



Universidad de Sevilla

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

**LA NOCIÓN DE VARIEDAD EN LA CLASE DE ESPACIOS DE
ALEXANDROFF. SUPERFICIES CERRADAS Y ESPACIOS
FINITOS.**

Antonio Barrena Lara

Tutor:

Antonio Rafael Quintero Toscano

Departamento de Geometría y Topología

15 de Junio de 2020

Abstract

Digital topology deals with topological features of 2-D and 3-D digital imagery.

Digital images can be represented on a meshed plane or space by means of pixels (2-D) and voxels (3-D), so that they can be managed by using graphs where pixels/voxels are their vertices and an edge between two pixels/voxels carries the adjacency information between them. However, this combinatorial structure is not suitable to describe in a systematic way the perception of pixels/voxels in a digital image. Several approaches are known in the literature for a proper mathematical handling of images from a topological and geometrical point of view.

The core of our study focuses on the notion of discrete or digital manifold proposed by Erik Melin in [7]. We first summarize the topological properties of Alexandroff spaces and its equivalence with ordered sets as well as the inherent adjacency relationship defined by both kind of structures. Additionally, we also analyze the relationship between Melin constructions and other digital manifold structures for dimensions ≤ 2 . Finally, we discuss the separation problem in such dimensions.

Resumen

La topología digital se ocupa de las propiedades o características topológicas de las imágenes digitales bidimensionales y tridimensionales.

Dichas imágenes se pueden representar sobre un plano o espacio reticulado mediante píxeles (en dos dimensiones) y vóxeles (en tres dimensiones). Por lo tanto pueden ser tratadas como grafos donde los vértices representan los píxeles (vóxeles) y las aristas contienen la información del grado de adyacencia entre estos. Sin embargo, esta estructura combinatoria no es muy adecuada para describir de manera sistemática la percepción de los píxeles (vóxeles) de una imagen digital. El tratamiento matemático de estas imágenes desde el punto de vista topológico/geométrico admite varias aproximaciones según las técnicas utilizadas.

Este trabajo se centra en la noción de variedad discreta o digital propuesta por Erik Melin en [7] para el estudio de imágenes digitales en el espacio reticulado. Se comienza con un repaso de la topología de los espacios de Alexandroff y su equivalencia con los conjuntos ordenados así como de la relación de adyacencia inherente a estas estructuras. El trabajo también relaciona para dimensiones ≤ 2 las construcciones de Melin con otras de la literatura de la topología digital. Asimismo discutimos el problema de separación para objetos digitales en esas dimensiones.

Índice general

1. A-Espacios y Órdenes	9
1.1. A-Espacios	9
1.1.1. Definiciones y resultados básicos	9
1.1.2. Conexión y Conexión por Caminos	11
1.2. Órdenes	13
1.2.1. Definiciones básicas sobre Estructuras Ordenadas	13
1.3. Relación entre A-espacios y Preórdenes	14
1.3.1. Algunas consecuencias	15
1.4. A-Espacios localmente finitos	16
1.5. Diagramas de Hasse. Ejemplos	17
1.6. La topología de Khalimsky como ejemplo de poset	19
1.7. Complejos simpliciales	22
1.7.1. A-espacios vistos como complejos simpliciales	23
2. Adyacencia	27
2.1. Conceptos generales de adyacencia.	27
2.2. Adyacencia en \mathbb{Z}^n	28
2.2.1. El problema de separación para las A-curvas	30
2.2.2. Adyacencia en A-espacios	31
2.2.3. Adyacencia en la topología de Khalimsky	33
2.3. El problema de separación en \mathbb{Z}^3 y la noción de superficie discreta	41
2.3.1. Uso de los pares de adyacencia en la solución del problema de separación en \mathbb{Z}^3	42
2.3.2. Uso de la topología de Khalimsky en la solución del problema de separación en \mathbb{Z}^3	43
3. Variedades	45
3.1. Variedades ingenuas de Khalimsky	46
3.2. Variedades estrictas de Khalimsky	47
3.2.1. Clasificación de variedades estrictas de Khalimsky de dimensiones 1 y 2	48
3.3. Variedades de Khalimsky	56
3.4. Notas finales	64

Introducción

Los únicos conjuntos que pueden ser procesados en ordenadores son conjuntos discretos o digitales, esto es, conjuntos que contengan a lo sumo una cantidad numerable de elementos. Una parte muy importante en estos conjuntos la forman las imágenes. La topología digital estudia las propiedades y características de las imágenes digitales bidimensionales o tridimensionales. Su objetivo principal es el análisis de las propiedades topológicas de los objetos discretos, que se obtienen digitalizando objetos continuos y, recíprocamente, la interpretación en el mundo continuo de nuestra percepción de las imágenes digitales. Los conceptos y resultados de la topología digital se utilizan para encontrar y justificar algoritmos de análisis de imágenes.

Arziel Rosenfeld fue el primer matemático que estudió la topología digital (además de ser quien acuñó este término) a finales de los años 1960. La idea de Rosenfeld fue considerar los elementos más pequeños que componen una imagen digital como un objeto en la pantalla de la computadora, los píxeles (o vóxeles, en dimensión 3), como vértices de un grafo cuya aristas representan la adyacencia entre ellos. La topología digital se consolidó con aportaciones posteriores de otros matemáticos como Vladimir Kovalevsky y Ralph Kopperman.

A la hora de trabajar con los grafos de adyacencia surgen varias dificultades. Una de ellas es que estos modelos combinatorios están lejos del plano (o espacio) euclídeo. Sin embargo, siendo las imágenes digitales por sí mismas objetos discretos, quieren representar y son percibidas como objetos continuos. Por ello se hace necesario que las nociones de curva o superficie digitales cumplan propiedades que se asemejen a las propiedades conocidas de las curvas y superficies en el plano y el espacio euclídeo, en particular la propiedad de separación de Jordan. Aquí surge el conocido problema de separación de la curva de Jordan en topología digital, ya observado por Rosenfeld. Esto es, para las adyacencias habituales entre píxeles en el reticulado por cuadrados del plano, existen curvas cerradas que no dividen al reticulado.

La solución a este problema dio lugar a varias aproximaciones a la fundamentación de la topología digital. Una se basa en el uso simultáneo de dos adyacencias y fue propuesta por David G. Morgenthaler y Rosenfeld. Otra, basada en el uso de los espacios de Alexandroff, fue presentada por Efim Khalimsky, Kopperman y Paul R. Meyer. En este segundo caso, los objetos digitales finitos están representados por espacios finitos que forman la clase más importante de espacios de Alexandroff.

En este trabajo exponemos los elementos básicos de la segunda aproximación y algunas de sus relaciones con la primera en dimensiones ≤ 2 . En especial nos centramos en algunos de los resultados de Melin en [7], trabajo en el que se propone una definición abstracta de variedad digital basada en la topología de Alexandroff (a priori no definida en un espacio ambiente). En particular las variedades compactas de Melin son ejemplos de espacios topológicos finitos. Es importante recordar que, a diferencia de la curva cerrada digital, no existe una definición universalmente admitida de superficie digital, así que también incluimos la comparación de la definición de Melin con algunas de las definiciones de superficie digital en la literatura. Finalmente, usamos el complejo orden que tiene asociado todo espacio de Alexandroff para ver cómo

las variedades de Melin tienen un análogo continuo que es variedad topológica.

Pasamos a detallar el contenido del trabajo.

En el capítulo 1 recogemos las herramientas básicas para llevar a cabo el contenido teórico del resto del trabajo. Recordamos la clásica equivalencia de los espacios de Alexandroff (A-espacios) con los conjuntos ordenados y damos la conocida relación de los A-espacios con los complejos simpliciales por medio del complejo orden.

El capítulo 2 contiene las definiciones básicas en torno a la noción de adyacencia, en particular definimos la adyacencia que lleva aparejado todo A-espacio y las adyacencias naturales de los reticulados cúbicos de los espacios. Hablamos del problema de la curva de Jordan en \mathbb{Z}^2 y de las soluciones posibles. Asimismo, presentamos el problema de separación en \mathbb{Z}^3 , el cual nos servirá como nexo para introducir las superficies digitales como introducción al tercer capítulo, que contiene la parte principal de este trabajo.

El capítulo 3 se centra en el desarrollo de parte del artículo [7]. En este artículo el autor propone una noción abstracta de variedad en la clase de los A-espacios, llamada variedad de Khalimsky. Aunque exponemos con detalle las definiciones propuestas en dimensiones arbitrarias, nos centramos en la dimensión ≤ 2 para los resultados y comparaciones con algunas de las nociones de superficies digitales ya conocidas. Como novedad no incluida en [7], usamos el complejo orden para comparar las variedades de Khalimsky con las variedades topológicas habituales y deducir un teorema de separación para las primeras.

Capítulo 1

A-Espacios y Órdenes

1.1. A-Espacios

1.1.1. Definiciones y resultados básicos

Definición 1.1.1. Un *espacio de Alexandroff* (o *A-espacio*) es un espacio topológico donde cualquier intersección arbitraria de abiertos es un abierto o, equivalentemente, la unión arbitraria de cerrados es un cerrado.

Definición 1.1.2. Sea $A \subseteq X$ un subconjunto del espacio topológico X . Se denotará por \bar{A} a la *clausura* de A en X . Recordemos que \bar{A} coincide con la intersección de todos los cerrados que contienen a A y vuelve a ser un conjunto cerrado.

Análogamente se puede definir el conjunto U_A como la intersección de todos los abiertos que contienen a A .

En general U_A no es conjunto abierto (pensemos que el origen de la recta euclídea es la intersección de los abiertos que lo contienen). Pero si X es un A-espacio tenemos que U_A es un conjunto abierto. Nótese que U_A es el abierto más pequeño que contiene a A y por este motivo lo llamaremos *abierto mínimo*. Para un punto $x \in X$ denotamos $U_x = U_{\{x\}}$ y $\bar{x} = \overline{\{x\}}$.

Proposición 1.1.3. Sea X un A-espacio con $x, y \in X$. Se tiene que $y \in U_x$ si y sólo si $x \in \bar{y}$.

Demostración. Tenemos que $y \in U_x$ si y sólo si y pertenece a cualquier abierto G que contiene a x . Esto es, $G \cap \{y\} \neq \emptyset$, o lo que lo mismo $x \in \bar{y}$. □

Proposición 1.1.4. X es un A-espacio si y sólo si para todo punto $x \in X$, existe un abierto mínimo U_x que lo contiene.

Demostración. Ya sabemos por la definición 1.1.1 que en todo A-espacio se puede encontrar un abierto mínimo para cada punto. Recíprocamente, sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia cualquiera de abiertos de X , con $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha \neq \emptyset$ y tomemos $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$. Entonces, $x \in G_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$. Por hipótesis, $U_x \subseteq G_\alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$, y por tanto $x \in U_x \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, luego $x \in \text{int}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Así, $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha = \text{int}(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha)$. Hemos probado que $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ es un abierto. □

Proposición 1.1.5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre A-espacios. Entonces f es continua si y sólo si $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si f es continua, entonces $f^{-1}(U_{f(x)})$ es abierto y $x \in f^{-1}(U_{f(x)})$, luego $U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)})$. Esto es, $f(U_x) \subseteq U_{f(x)}$.

Recíprocamente, si Ω es cualquier abierto de Y y $x \in f^{-1}(\Omega)$, tenemos $f(x) \in \Omega$. Luego $f(U_x) \subseteq U_{f(x)} \subseteq \Omega$. Aquí usamos la hipótesis y la minimalidad de $U_{f(x)}$. Por tanto, $U_x \subseteq f^{-1}(\Omega)$ y $x \in \text{int}(f^{-1}(\Omega))$. Hemos probado que $\text{int}(f^{-1}(\Omega)) = f^{-1}(\Omega)$, y por consiguiente $f^{-1}(\Omega)$ es abierto, lo que quiere decir que f es continua. □

Nota 1.1.6. Recordemos las siguientes propiedades de separación más débiles que la conocida propiedad de separación de Hausdorff:

- a) Un espacio X se dice T_0 si para dos puntos distintos cualesquiera $x, y \in X$, existe o bien un abierto U de X con $x \in U$ e $y \notin U$ o un abierto V con $y \in V$ y $x \notin V$.
- b) El espacio X se dice T_1 si para dos puntos $x \neq y$ existen abiertos U y V con $x \in U$, $y \in V$ y $x \notin V$ e $y \notin U$.

La conocida propiedad de Hausdorff es denotada T_2 : para dos puntos cualesquiera $x \neq y$ existe abiertos disjuntos U y V con $x \in U$ e $y \in V$.

Siempre

$$T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Definición 1.1.7. La *topología producto* sobre $X \times Y$ es la topología que consiste en el vacío y todos aquellos conjuntos $\Omega \subseteq X \times Y$ tales que para todo $(x, y) \in \Omega$ existen abiertos U de X y V de Y con $(x, y) \in U \times V \subseteq \Omega$.

Obsérvese que todo producto de abiertos de X e Y es un conjunto abierto de la topología producto pero ésta puede contener abiertos que no son de esa forma.

Proposición 1.1.8. Sean X e Y dos A-espacios. Entonces $X \times Y$ es un A-espacio. Además, para todo $(x, y) \in X \times Y$, $U_x \times U_y$ es el abierto mínimo de (x, y) .

Demostración. De acuerdo con la proposición 1.1.4, bastará demostrar que $U_x \times U_y$ es el abierto mínimo de (x, y) para la topología producto. En efecto, sea Ω un abierto tal que $(x, y) \in \Omega$. Por la definición de topología producto tenemos que existen abiertos Ω_x, Ω_y tales que $(x, y) \in \Omega_x \times \Omega_y \subseteq \Omega$. Para los correspondientes abiertos mínimos de x e y obtenemos que $U_x \times U_y \subseteq \Omega_x \times \Omega_y = \Omega$. Como Ω es un abierto arbitrario se cumple que $U_x \times U_y$ es el abierto mínimo de (x, y) . □

Lema 1.1.9. Sea X un espacio topológico. Entonces para cualesquiera $A, B \subseteq X$ tenemos que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Demostración. \supseteq Sean $x \in \overline{A}$ e $y \in \overline{B}$. Dado un abierto Ω en $X \times Y$ con $(x, y) \in \Omega$, sean Ω_x y Ω_y abiertos en X e Y tales que $(x, y) \in \Omega_x \times \Omega_y$.

Como $x \in \overline{A}$, $\Omega_x \cap A \neq \emptyset$. Análogamente, $\Omega_y \cap B \neq \emptyset$.

Así pues

$$\emptyset \neq (\Omega_x \times \Omega_y) \cap (A \times B) \subseteq \Omega \cap (A \times B).$$

Esto es, $(x, y) \in \overline{A \times B}$.

\square Sea $(x, y) \in \overline{A \times B}$, entonces para todo abierto Ω de $X \times Y$ tenemos que $\Omega \cap (A \times B) \neq \emptyset$.

Para ver que $x \in \overline{A}$, sea U cualquier abierto de X con $x \in U$. Entonces $U \times Y$ es un abierto de $X \times Y$ y por hipótesis $(U \times Y) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times B \neq \emptyset$. Luego $U \cap A \neq \emptyset$ y $x \in \overline{A}$.

De manera análoga se demuestra que $y \in \overline{B}$.

\square

1.1.2. Conexión y Conexión por Caminos

Antes de ver el comportamiento de los A-espacios respecto a la conexión, recordaremos las propiedades básicas de esta propiedad topológica.

Definición 1.1.10. Un *camino* en un espacio X , con punto inicial $x \in X$ y punto final $x' \in X$, es una aplicación continua $\sigma : I \rightarrow X$, donde $I = [0, 1]$ es el intervalo unidad euclídeo, tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = x'$. En tal situación diremos que los puntos x y x' se pueden unir por un camino.

Un espacio es *conexo por caminos* si dos puntos arbitrario de él se pueden unir por un camino. Un subconjunto $A \subseteq X$ se llamará *conexo por caminos* si los es con respecto a su topología relativa.

Un espacio X es *localmente conexo por caminos* si para todo $x \in X$ y todo entornos N de X existe otro entorno N' de x que es conexo por caminos y $N' \subseteq N$.

Nota 1.1.11. Es bien conocido que la relación entre los puntos de X “estar unidos por un camino” es de equivalencia. En efecto, la propiedad reflexiva se deduce del camino constante $c(t) = x$ para todo $t \in [0, 1]$. Sea $\sigma : I \rightarrow X$ un camino que une x y x' ; entonces la aplicación $\bar{\sigma} : I \rightarrow X$ definida por $\bar{\sigma}(t) = \sigma(1 - t)$ es un camino cuyo punto inicial es x' y su final es x . Esto prueba la propiedad simétrica. Finalmente, para demostrar la propiedad transitiva, sean $\sigma_1 : I \rightarrow X$ un camino que une x con x' y $\sigma_2 : I \rightarrow X$ un camino que une x' con x'' . Entonces la yuxtaposición de caminos $\sigma : I \rightarrow X$ definida por:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \sigma_2(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

es un camino que une x con x'' .

Se llama *componente conexa por caminos* de X al conjunto de puntos que pertenecen a una misma clase de equivalencia bajo la relación anterior.

Definición 1.1.12. Un espacio X se dice *disconexo* si se puede descomponer como la unión de dos conjuntos abiertos (o, equivalentemente, cerrados) disjuntos y no vacíos. En caso contrario se dirá que es *conexo*. Es claro que X es conexo si y sólo si los únicos conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados son X y \emptyset .

Puesto que todo intervalo euclídeo es conexo, se sigue inmediatamente la siguiente proposición:

Proposición 1.1.13. Todo espacio topológico conexo por caminos es conexo.

Para los espacios topológicos localmente conexos por caminos se tiene la equivalencia de ambas nociones de conexión. Esto es:

Proposición 1.1.14. Sea X un espacio topológico localmente conexo por caminos. Entonces X es conexo si y sólo si es conexo por caminos.

En contra de lo que se pudiera esperar a primera vista, las propiedades relativas a la conexión de los A-espacios son sorprendentemente similares a aquellas de los espacios de interés en la topología algebraico-geométrica; en particular son espacios localmente conexos y así la conexión y la conexión por caminos coinciden para esta clase de espacios.

Lema 1.1.15. Sea X un A-espacio. Si $y \in U_x$ entonces existe un camino en U_x entre y y x . En particular, todos los abiertos mínimos de X son conexos por caminos.

Demostración. Se define $\sigma : [0, 1] \rightarrow U_x$ como $\sigma(t) = y$ si $t < 1$ y $\sigma(1) = x$. Veamos que es continua. Para ello, bastará ver que σ es continua llegando a X , y por tanto comprobar que $\sigma^{-1}(U_z)$ es abierto para todo $z \in X$. Esto es trivial si $x, y \notin U_z$, ya que entonces $\sigma^{-1}(U_z) = \emptyset$. Si $x \in U_z$, tenemos $U_x \subseteq U_z$ y, por hipótesis, $U_y \subseteq U_x \subseteq U_z$. Por tanto, $\sigma^{-1}(U_z) = [0, 1]$. Finalmente, si $y \in U_z$ y $x \notin U_z$, entonces $\sigma^{-1}(U_z) = [0, 1)$.

□

Corolario 1.1.16. Todo A-espacio X es localmente conexo por caminos.

Como consecuencia inmediata del corolario 1.1.16 y la proposición 1.1.14, tenemos que la conexión y la conexión por caminos coinciden en la clase de los A-espacios. Más aún, tenemos la siguiente caracterización de estas propiedades para los A-espacios.

Teorema 1.1.17. Sea X un A-espacio. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. X es conexo
2. Dados $x, y \in X$, existe una secuencia $x = z_1, \dots, z_s = y$, tal que $z_i \in U_{z_{i+1}}$ ó $z_{i+1} \in U_{z_i}$ para $i < s$.
3. X es conexo por caminos

Demostración. Supongamos que X es conexo. Fijamos $x \in X$ y consideramos A como el conjunto de puntos y tales que existe una secuencia como en el enunciado de x a y .

Se tiene que si $A \cap U_p \neq \emptyset$ entonces $U_p \subseteq A$; en efecto, si $y \in A \cap U_p$ la secuencia z_1, \dots, z_s de x a y se puede modificar para encontrar una secuencia entre x y cualquier $w \in U_p$ como sigue. Si $y \in U_{z_{s-1}}$, entonces la secuencia original se extiende a otra con dos términos más, $z_{s+1} = p$ y $z_{s+2} = w$ ya que $y = z_s$ y w están en $U_p = U_{z_{s+1}}$. Si, en otro caso, $z_{s-1} \in U_y$, entonces consideramos la nueva secuencia q_1, \dots, q_{s+1} donde $q_j = z_j$ si $j \leq s-1$, $q_s = p$ y $q_{s+1} = w$ ya que en este caso $z_{s-1} \in U_{z_{s-1}} \subseteq U_y \subseteq U_{q_s}$ y $q_{s+1} \in U_{q_s}$.

De la observación anterior se sigue inmediatamente que $y \in A$ si y sólo si $U_y \subseteq A$ y, como consecuencia, A es abierto y cerrado, por lo que o bien $A = \emptyset$ ó $A = X$ ya que X es conexo. Como $x \in A$, se sigue que $A = X$ y por tanto se tiene (2).

Si se cumple (2), usamos el lema 1.1.15 para definir un camino σ_i entre z_i y z_{i+1} para todo $1 \leq i \leq s$. Entonces por la nota 1.1.11 se sigue que existe un camino entre x e y y así X es conexo por caminos.

La implicación (3) \Rightarrow (1) es válida para cualquier espacio topológico.

□

1.2. Órdenes

Alexandroff en [1] y Tucker en [10] demostraron que los A-espacios permiten dar una interpretación puramente topológica de las estructuras de orden. Antes de explicar dicha interpretación, recordaremos las nociones elementales de la teoría de conjuntos ordenados.

1.2.1. Definiciones básicas sobre Estructuras Ordenadas

Definición 1.2.1. Sea X un conjunto. Una *relación binaria* (o relación) en X es cualquier subconjunto $\mathcal{R} \subseteq X \times X$. Una relación \mathcal{R} es *reflexiva* si $(x, x) \in \mathcal{R}$ para cada $x \in X$. Se dice *simétrica* si para todo $x, y \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ implica $(y, x) \in \mathcal{R}$. Por el contrario, \mathcal{R} es *antisimétrica* si para todo $x, y \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, x) \in \mathcal{R}$ implica $x = y$. Finalmente, \mathcal{R} es *transitiva* si para todo $x, y, z \in X$ la condición $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $(y, z) \in \mathcal{R}$ implica $(x, z) \in \mathcal{R}$.

Definición 1.2.2. Un *preorden* \mathcal{R} en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva. Si un *preorden* \mathcal{R} en X es antisimétrico, se llamará *orden parcial* (o simplemente *orden* en X) y decimos que (X, \mathcal{R}) es un *conjunto parcialmente ordenado* (o *poset*).

Notación. Como de costumbre, se escribe $x \leq y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y (X, \leq) por (X, \mathcal{R}) .

Definición 1.2.3. Un elemento $x \in X$ es un *elemento maximal* (*minimal*) si para cada z en X , $x \leq z$ ($z \leq x$, respectivamente) implica $x = z$. Se denotará por $Max(X)$ ($Min(X)$, respectivamente) el conjunto de los elementos maximales (minimales, respectivamente) de X .

Definición 1.2.4. Dos elementos x, y se dice *comparables* si $x \leq y$ ó $y \leq x$, de lo contrario se dicen *incomparables*. Si cada par de elementos son comparables decimos que (X, \leq) es un conjunto *totalmente ordenado*. En general, cualquier subconjunto totalmente ordenado de un poset se llamará *cadena*. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice una *anticadena* si ningún par de su elementos son comparables. Nótese que tanto $Max(X)$ como $Min(X)$ son anticadenas.

Definición 1.2.5. Una aplicación entre conjuntos preordenados $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$ se dice que *preserva el orden* (o que es una *aplicación ordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x) \preceq f(x')$. Se dice que *invierte el orden* (o es *antiordenada*) si para $x \leq x'$ se tiene $f(x') \preceq f(x)$. La aplicación anterior se dice que es un *isomorfismo* entre conjuntos preordenados si es una biyección tal que f y f^{-1} son aplicaciones ordenadas. Si son antiordenadas se llama *antiisomorfismo*.

Definición 1.2.6. Un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto decreciente* si $y \leq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in X$. Para cualquier $x \in X$, $\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}$ es un conjunto decreciente, llamado el *ideal principal* generado por x .

Dualmente, un subconjunto $S \subseteq X$ se llama *conjunto creciente* si $y \geq x \in S$ implica $y \in S$ para $x, y \in X$. Como caso particular, $\uparrow x = \{y \in X; y \geq x\}$ es un conjunto creciente para todo $x \in X$, llamado *filtro principal* generado por x .

Nota 1.2.7. Es inmediato comprobar que el complementario de un conjunto decreciente es un conjunto creciente y viceversa. En efecto, si C es creciente y $x \notin C$, entonces para todo $y \leq x$ se tiene que $y \notin C$ pues $y \in C$ implica $x \in C$ por ser C creciente.

Definición 1.2.8. Sea X un A-espacio, se define el *preorden de Alexandroff-Birkhoff* como $x \leq y$ si y sólo si $x \in U_y$ o, equivalentemente, $U_x \subseteq U_y$. Esta relación también es llamada *preorden de especialización* del espacio X .

Nota 1.2.9. Tenemos que para todo $x \in X$ se tiene $x \in U_x$. Con esto probamos la propiedad reflexiva. Además, dados $x, y, z \in X$ se tiene que si $x \in U_y$ e $y \in U_z$ entonces $x \in U_y \subseteq U_z$. Queda demostrada así la propiedad transitiva y con esto concluimos que efectivamente, la relación de Alexandroff-Birkhoff se trata de un preorden.

1.3. Relación entre A-espacios y Preórdenes

Por medio del preorden de Alexandroff-Birkhoff, todo A-espacio tiene asociada una relación de preorden natural. Ahora veremos el recíproco, lo que da lugar a una equivalencia entre A-espacios y conjuntos preordenados.

Lema 1.3.1. Los conjuntos decrecientes junto con el vacío forman una A-topología sobre cualquier conjunto preordenado (X, \leq) tal que el abierto mínimo de x es el ideal principal generado por él:

$$\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}$$

En particular, los cerrados de esta topología son los conjuntos crecientes y $\bar{x} = \uparrow x$.

Demostración. En efecto, obviamente X es un conjunto decreciente. También es inmediato que las uniones e intersecciones arbitrarias de conjuntos decrecientes es un conjunto decreciente (o el vacío).

Además si U es un conjunto decreciente y $x \in U$, es inmediato que $\downarrow x \subseteq U$. Esto demuestra que $\downarrow x$ es el abierto mínimo de x .

Como se observó en la nota 1.2.7, los complementarios de conjuntos decrecientes son los conjuntos crecientes y así éstos corresponden a los cerrados de la topología. Más aún,

$$\bar{x} = \{y \in X; \{x\} \cap (\downarrow y) \neq \emptyset\} = \{y \in X; x \leq y\} = \uparrow x.$$

□

Definición 1.3.2. A la topología anterior la llamaremos *topología del preorden " \leq "* y la denotaremos por \mathcal{T}_{\leq} .

Nota 1.3.3. Se podría definir otra topología con los conjuntos crecientes como abiertos para la cual los abiertos mínimos serían los filtros principales. Esta topología corresponde al orden opuesto definido por $x \leq^{op} y$ si $y \leq x$.

Teorema 1.3.4. Toda relación de preorden " \leq " sobre un conjunto X coincide con el preorden de especialización de la topología de preorden dado. Más aún, toda A-topología \mathcal{T} sobre X es la topología de su preorden dado. Además, $f : (X, \leq) \rightarrow (Y, \preceq)$ es ordenada si y sólo si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\preceq})$ es continua.

Demostración. Denotemos por " \preceq " el preorden de especialización de \mathcal{T}_{\preceq} y supongamos que $x \preceq y$, esto es, $x \in U_y$. Como el abierto mínimo de y en \mathcal{T}_{\preceq} es el ideal principal de y con respecto al preorden " \preceq ", $U_y = \downarrow y$, se sigue que $x \leq y$.

Si ahora A es un abierto de la topología del preorden de especialización de \mathcal{T} , " $\leq_{\mathcal{T}}$ ", podemos escribir A como la unión $A = \cup_{a \in A} \downarrow a$ donde los ideales principales están tomados respecto a " $\leq_{\mathcal{T}}$ ". Pero, respecto a este orden, es inmediato probar que $\downarrow a = U_a$ es el abierto mínimo de a en la A-topología \mathcal{T} , y así A es abierto de esta topología.

Ahora, si $f : (X, \mathcal{T}_{\leq}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{\leq})$ es continua, entonces, la continuidad y la definición de la topología del preorden nos dan $\downarrow x = U_x \subseteq f^{-1}(U_{f(x)}) = f^{-1}(\downarrow f(x))$. Luego si $y \leq x$, entonces $f(y) \leq f(x)$. El recíproco es análogo. □

Teorema 1.3.5. Un conjunto preordenado (X, \leq) es un poset si y sólo si la A-topología de ese preorden es T_0 .

Análogamente, un A-espacio es T_0 si y sólo si su preorden de especialización es un orden parcial.

Demostración. $\boxed{\rightarrow}$ Suponemos que (X, \leq) es un poset. Tenemos que comprobar que la A-topología cuyos abiertos mínimos son de la forma $\downarrow x = \{y \in X; y \leq x\}$ es T_0 . Para ello, tomamos dos puntos distintos x, y . Si x e y no son comparables, encontramos abiertos U y V con $x \in U$, $y \in V$ y $x \notin V$ e $y \notin U$ (basta tomar $U = \downarrow x$, $V = \downarrow y$). Si son comparables, suponemos sin pérdida de generalidad $x \leq y$ y deducimos trivialmente $y \notin \downarrow x$, pues \leq es antisimétrica por ser orden, por lo tanto $y \not\leq x$, esto es, $y \notin U_x$.

$\boxed{\leftarrow}$ Supongamos ahora que el conjunto preordenado (X, \leq) no es un poset. Por lo tanto \leq no es antisimétrico. Podemos encontrar entonces elementos distintos $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ e $y \leq x$, esto es, $x \in U_y$ e $y \in U_x$. Como U_x y U_y son abiertos mínimos, no podemos encontrar un G abierto de X tal que $x \in G$ e $y \notin G$ o viceversa. Concluimos entonces que la A-topología de (X, \leq) no es T_0 .

El resultado análogo para A-espacios T_0 es trivial a partir del teorema 1.3.4. □

Como consecuencia de los teoremas anteriores tenemos:

Teorema 1.3.6. La clase de los A-espacios y aplicaciones continuas es equivalente a la clase de los conjuntos preordenados y aplicaciones ordenadas. Además la subclase de los A-espacios T_0 es equivalente a la subclase de los posets.

Notación: Llamaremos A_0 -espacio a los A-espacios que tienen la propiedad T_0 .

1.3.1. Algunas consecuencias

En esta sección vemos algunas propiedades topológicas de los A-espacios en términos de los preórdenes que definen. Recordemos que un punto abierto (cerrado) en un espacio topológico X es un $x \in X$ tal que el conjunto unitario $\{x\}$ es abierto (cerrado, respectivamente). Comenzamos con el siguiente resultado.

Proposición 1.3.7. Los elementos minimales de un conjunto preordenado (X, \leq) son puntos abiertos de la A-topología asociada al preorden. Igualmente, los elementos maximales de X son puntos cerrados. En particular, $Min(X)$ es un subespacio abierto discreto y $Max(X)$ es un subespacio cerrado discreto.

Demostración. Si $x \in Min(X)$, entonces no existe $y \in X$ tal que $y \leq x$, esto es, para el abierto mínimo de x en \mathcal{T}_{\leq} tenemos $y \notin U_x$ para todo $y \neq x$, luego $U_x = \{x\}$. Análogamente, si $x \in Max(X)$, no existe $y \in X$ tal que $x \leq y$, esto es, x no está en ningún abierto mínimo U_y o, equivalentemente, $y \notin \overline{\{x\}}$ si $y \neq x$, esto es, $\overline{\{x\}} = \{x\}$. Así pues, $Min(X)$ es abierto en $(X, \mathcal{T}(\leq))$ y, por ser un A-espacio, $Max(X)$ es cerrado por ser unión (posiblemente infinita) de cerrados.

Es obvio que la topología relativa de $Min(X)$ es la discreta pues sus puntos son abiertos. Para $Max(X)$ se sigue del hecho de que dos elementos maximales no son comparables, por lo que para cualquier $x \in Max(X)$, $U_x \cap Max(X) = \{x\}$.

□

Terminamos caracterizando la conexión y la compacidad de los A-espacios. Para la conexión, se tiene como consecuencia inmediata del teorema 1.1.17.

Teorema 1.3.8. Un A-espacio X es conexo (o, equivalentemente, conexo por caminos) si y sólo si existe una secuencia de elementos comparables para el orden de especialización entre dos puntos cualesquiera de X .

Para la compacidad tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.3.9. Un A-espacio X es compacto si y sólo si $Max(X)$ es finito.

Demostración. Si X es compacto, también lo es su subespacio cerrado y discreto $Max(X)$ (ver proposición 1.3.7). Como los únicos espacios discretos compactos son los finitos, se sigue que $Max(X)$ es finito.

Supongamos ahora que $Max(X)$ es finito. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ cualquier recubrimiento por abiertos de X . Dado $x \in Max(X)$ existe $\alpha(x) \in \Lambda$ con $x \in V_{\alpha(x)}$. Entonces $U_x \subseteq V_{\alpha(x)}$. Como

$$X = \cup_{x \in Max(X)} U_x \subseteq \cup_{x \in Max(X)} V_{\alpha(x)},$$

tenemos que $\{V_{\alpha(x)}\}_{x \in Max(X)}$ es un subrecubrimiento finito de \mathcal{V} y X es compacto.

□

1.4. A-Espacios localmente finitos

Aunque los espacios finitos son los A-espacios más estudiados, el A-espacio que será la base de nuestro estudio posterior (la recta de Khalismsky) no lo es, aunque pertenece a la clase de A-espacios infinitas más importante. Comenzamos recordando las clases de posets más estudiadas en la teoría de las estructuras ordenadas.

Definición 1.4.1. Un poset (X, \leq) se dice *localmente finito descendentemente* (abreviado a *l.f.d.*) si para todo $x \in X$ el ideal principal generado por él, $\downarrow x$, es finito. Dualmente, decimos que es *localmente finito ascendentemente* (abreviado a *l.f.a.*) si el filtro principal $\uparrow x$ es finito para todo $x \in X$.

Un poset (X, \leq) se dice *localmente finito* (abreviado a *l.f.*) si es a la vez l.f.a. y l.f.d. Es claro que el poset es l.f. si y sólo si para todo $x \in X$ el conjunto de los elementos comparables a x es finito. Equivalentemente, X es localmente finito si y sólo si para todo $x \in X$, el número de cadenas en X que contiene a x es finito.

Definición 1.4.2. Un A-espacio se dice *localmente finito* si su poset asociado lo es; análogamente se definen A-espacios *l.f.a.* o *l.f.d.*

Lema 1.4.3. Sea X un A-espacio. Se cumple las siguientes propiedades.

1. X es l.f.d. si y sólo si U_x es finito para todo $x \in X$.
2. X es l.f.a. si y sólo si \bar{x} es finito para todo $x \in X$.
3. X es l.f. si y sólo si $U_x \cup \bar{x}$ es finito para todo $x \in X$.

Demostración. teorema 1.3.4 que nos dice que en todo A-espacio su A-topología coincide con la topología de preorden dado. Por el lema 1.3.1 sabemos que en la topología de preorden se cumple que $U_x = \downarrow x$. Entonces tenemos que U_x es finito para todo $x \in X$, esto es, (1). Para demostrar (2) también usamos el lema 1.3.1, que nos dice que $\bar{x} = \uparrow x$. La demostración de (3) es trivial a partir de (1) y (2). □

Para la demostración usamos el

Lema 1.4.4. En un A-espacio l.f. X el conjunto $Min(X)$ es un conjunto abierto y denso, mientras que $Max(X)$ es un conjunto cerrado, que no está contenido en ningún abierto distinto de X .

Demostración. Por la proposición 1.3.7, $Min(X)$ es un conjunto abierto. Además, por el lema 1.3.1, $\overline{Min(X)} = \cup_{x \in Min(X)} \bar{x} = \cup_{x \in Min(X)} \uparrow x = X$ pues todo elemento de X es mayor o igual que algún minimal. □

Ya sabemos que $Max(X)$ es un conjunto cerrado por la proposición 1.3.7. Sea G un abierto con $Max(X) \subseteq G$. Entonces $X = \cup_{x \in Max(X)} U_x \subseteq G$ y $G = X$. □

1.5. Diagramas de Hasse. Ejemplos

Todo conjunto preordenado (X, \leq) puede ser representado gráficamente como un grafo dirigido cuyos vértices son los elementos de X . Estos vértices se conectan por medio de aristas dirigidas, donde una arista dirigida va de a hasta b si $a \leq b$. Por tanto, a todo A-espacio (X, \mathcal{T}) le corresponde el grafo de su preorden de especialización " $\leq_{\mathcal{T}}$ ". Por supuesto, dado el grafo correspondiente a $\leq_{\mathcal{T}}$, podemos visualizar la topología: un conjunto de vértices del grafo U es abierto si cada arista que tiene su punto final en un elemento de U tiene su punto inicial también en U .

Ejemplo 1.5.1. Para la topología $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}, X, \emptyset\}$ sobre $X = \{a, b, c, d\}$ los abiertos mínimos son $U_a = \{a, b\}$, $U_b = \{b\}$, $U_c = U_d = \{b, c, d\}$. Por tanto su preorden es $b < a$, $b < c$, $b < d$, $c < d$ y $d < c$ y su grafo dirigido asociado es el que muestra la figura 1.1.

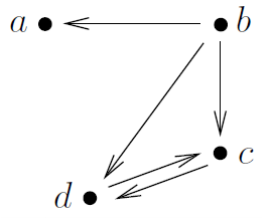


Figura 1.1: Diagrama de Hasse asociado al ejemplo 1.5.1

Definición 1.5.2. Dado un poset (X, \leq) , se llama *diagrama de Hasse asociado a X* al grafo orientado $\mathcal{H}(X)$, en el que sus vértices son los elementos de X y sus aristas son los pares ordenados (a, b) tales que $a < b$ y no existe $c \in X$ con $a < c < b$.

Como cada A-espacio (X, \mathcal{T}) puede ser identificado con un poset (teorema 1.3.4), se llama diagrama de Hasse del espacio al diagrama del poset que determina.

Nota 1.5.3. Usualmente, $\mathcal{H}(X)$ se dibuja en el plano de tal manera que, si $a < b$ entonces el vértice que representa a b está arriba del vértice que represente a a , quedando la dirección de la arista de a a b bien definida por el dibujo.

Proposición 1.5.4. Si X es A-espacio l.f., entonces X es conexo si y sólo si el diagrama de Hasse asociado a X es conexo.

Demostración. Supongamos que el diagrama de Hasse asociado a X es conexo. Dados dos elementos $x, y \in X$, podemos encontrar un arco por aristas Γ en el diagrama de Hasse entre x e y . Como los vértices de cada arista de $\mathcal{H}(X)$ son elementos comparables en X , el arco Γ determina una secuencia de elementos comparables en X . Esto prueba que X es conexo por el teorema 1.3.8.

Si X es conexo y $a, b \in X$, existe una secuencia de elementos comparables x_0, x_1, \dots, x_n con $a = x_0$ y $b = x_n$. Si la relación entre x_i y x_{i+1} , digamos $x_i \leq x_{i+1}$, no aparece reflejada como una arista en $\mathcal{H}(X)$ es porque existen elementos intermedios entre ellos. Por ser X localmente finito, sólo existe una cantidad finita de cadenas entre x_i y x_{i+1} y por tanto podemos encontrar una cadena de longitud máxima. Tal cadena está necesariamente compuesta por relaciones directas sin elementos intermedios, que da lugar a un arco ascendente por aristas en $\mathcal{H}(X)$ entre x_i y x_{i+1} . De esta forma a y b quedan unidos $\mathcal{H}(X)$ por la yuxtaposición de estos arcos.

□

Nota 1.5.5. Para A-espacios generales, la proposición 1.5.4 puede no ser cierta. Ponemos a continuación un ejemplo donde esto no se cumple.

Ejemplo 1.5.6. Se llama *cono del poset* (X, \leq) al poset $(\mathbb{C}(X), \leq)$ donde $\mathbb{C}(X) = X \cup \{\infty\}$ y el orden de X se extiende a un orden de $\mathbb{C}(X)$ tomando $x \leq \infty$ para todo $x \in X$.

Sea (\mathbb{Z}, \leq) con el orden habitual. Entonces el diagrama de Hasse de $(\mathbb{C}(\mathbb{Z}), \leq)$ no es conexo (aunque $\mathbb{C}(\mathbb{Z})$ sí lo sea). El elemento ∞ no se une a ningún otro por la definición del diagrama de Hasse, ya que cualquier relación $x < \infty$ se descompone en $x < x' < \infty$ para algún x' .



En la siguiente sección daremos el ejemplo de A_0 -espacio localmente finito que será la base de los resultados principales expuestos en este trabajo.

1.6. La topología de Khalimsky como ejemplo de poset

La *recta de Khalimsky* fue introducida por Khalimsky en [4]. Se trata de un A-espacio (\mathbb{Z}, τ) donde sus abiertos mínimos son los siguientes:

- Si $n \in \mathbb{Z}$ es impar, su abierto mínimo viene dado por $\{n\}$.
- Si $n \in \mathbb{Z}$ es par, su abierto mínimo viene dado por $\{n-1, n, n+1\}$.

Podemos ver una representación gráfica de la línea de Khalimsky y sus conjuntos mínimos en la figura 1.2.

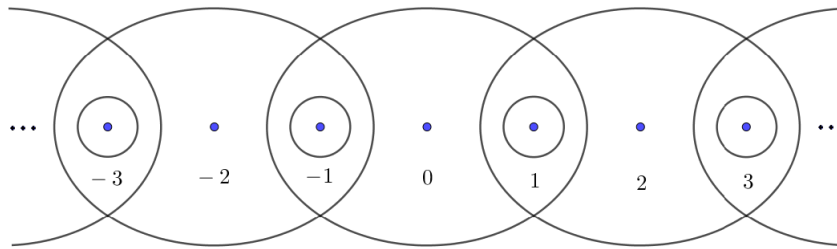


Figura 1.2: Esquema de los abiertos en la recta de Khalimsky.

Definición 1.6.1. Desde el punto de vista del orden, la línea de Khalimsky es el poset $K = (\mathbb{Z}, \preceq)$ donde $2k+1 \preceq 2k, 2k+2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

El diagrama de Hasse de K es el de la figura 1.3.

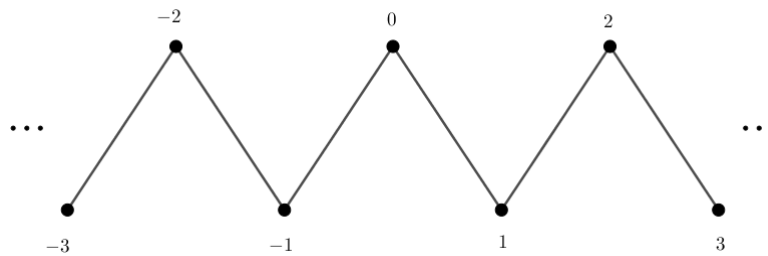


Figura 1.3: Diagrama de Hasse de la línea de Khalimsky K .

Queda reflejado en el diagrama de Hasse que los elementos minimales de K son los impares y los maximales los pares. Además la clausura de un impar n es $\{n-1, n, n+1\}$, por lo que la recta de Khalimsky es un A_0 -espacio localmente finito.

Definición 1.6.2. La *semirrecta de Khalimsky* es el subposet de K , $K_{\geq 0} = (\mathbb{Z}_{\geq 0}, \preceq)$, cuyo diagrama de Hasse representamos en la figura 1.4.

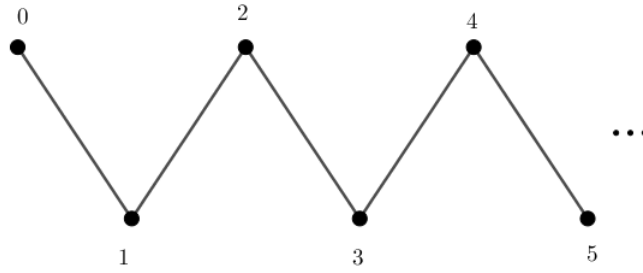


Figura 1.4: Semirrecta de Khalimsky.

Recordemos que dados dos posets (X, \leq) e (Y, \preceq) , el poset producto $(X \times Y, \trianglelefteq)$ está dado por $(x, y) \trianglelefteq (x', y')$ si $x \leq x'$ e $y \preceq y'$. De esta forma la topología inducida por ' \trianglelefteq ' es la topología producto de las correspondientes topologías de (X, \leq) e (Y, \preceq) ya que

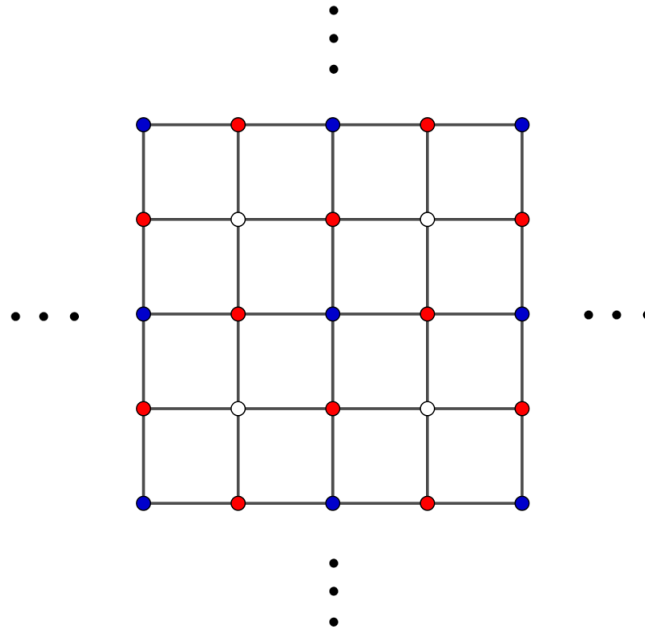
$$U_{(x,y)} = \downarrow(x, y) = \downarrow x \times \downarrow y = U_x \times U_y.$$

Definición 1.6.3. Se llama *n-espacio de Khalimsky* al poset producto de n copias de la recta de Khalimsky $K^n = (\mathbb{Z}^n, \preceq_n)$.

Nota 1.6.4. La relación de orden existente en estos espacios de mayor dimensión \preceq_n es más compleja. En el caso de dimensión 1, cada punto se relacionaba únicamente con sus dos vecinos. Pero cuanto mayor sea la dimensión, más elementos comparables a uno dado aparecen.

Como sabemos el conjunto de puntos relacionados con uno dado viene determinado como la unión de ideal principal y su filtro principal; esto es, en términos topológicos por la unión de su abierto mínimo con su clausura.

Si seguimos el convenio adoptado en la nota 1.5.3, es difícil dibujar el diagrama de Hasse del poset $K^2 = (\mathbb{Z}^2, \preceq_2)$. A continuación nos ayudamos de colores para dar una representación plana del diagrama de Hasse de K^2 . Los puntos azules representan el nivel 0 (esto es, los puntos minimales y por tanto los puntos abiertos de K^2), los puntos rojos representan el nivel 1 y los puntos blancos el nivel 2 (esto es, los puntos maximales y por tanto los puntos cerrados de K^2).



Definición 1.6.5. Un *arco de Khalimsky* de longitud $n \geq 2$ es un subposet de K con n elementos consecutivos (en el orden de \mathbb{Z}). En la figura 1.3 podemos ver un arco de Khalimsky que comienza en -3 y acaba en 3 .

Definición 1.6.6. De una manera similar a la circunferencia continua, una *circunferencia de Khalimsky* es un A-espacio finito de m puntos $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$ de forma que $x_{m+1} = x_1$ y tal que, de manera consecutiva, para cada uno de ellos su abierto mínimo se corresponde con un abierto mínimo de un punto de la recta de Khalimsky. Esto es, si x_1 es un punto cerrado (abierto), x_2 es abierto (cerrado) y así sucesivamente de manera cíclica. En una *circunferencia de Khalimsky*, m ha de ser un número par pues si m fuese impar, $x_1 = x_{m+1}$ se correspondería con un punto de la recta de Khalimsky que es a la vez un punto abierto y cerrado, puntos que no existen en la topología de Khalimsky.

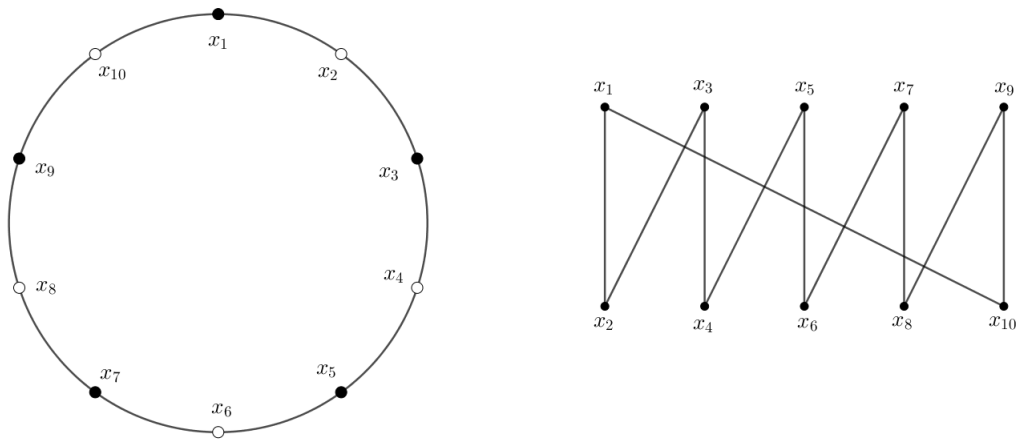


Figura 1.5: A la izquierda, la circunferencia de Khalimsky con 10 puntos, donde se representan en blanco los abiertos y en negro los cerrados. A la derecha, el diagrama de Hasse asociado.

1.7. Complejos simpliciales

En esta sección recojemos las nociones básicas de la teoría de complejos simpliciales ya que éstos son muy útiles en el estudio de los A-espacios.

Definición 1.7.1. El n -símplice de \mathbb{R}^m de vértices a_0, \dots, a_n afinmente independientes es la envolvente conexas de dichos vértices. Esto es:

$$\{x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i; \lambda_i \geq 0; \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$$

y lo notamos por $\sigma = (a_0 \dots a_n)$.

Definición 1.7.2. Si $\sigma = (a_0 \dots a_n)$ un símplice τ se dice *cara* y se denota por $\tau \leq \sigma$ si los vértices de τ son algunos de los de σ . Se dice que τ es *cara propia* si $\tau \neq \sigma$, se escribe $\tau < \sigma$.

Definición 1.7.3. Se llama *borde* de σ a $\cup_{\tau < \sigma} \tau$ y se denota por $\dot{\sigma}$. Se llama *interior* de σ a

$$\dot{\sigma} = \{x \in \sigma : x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i; \lambda_i > 0\}$$

Entonces se tiene que $\sigma = \dot{\sigma} \sqcup \dot{\sigma}$.

Definición 1.7.4. Un *complejo simplicial* en \mathbb{R}^m es un conjunto K de símplices en \mathbb{R}^m cumpliendo:

- Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$
- Si $\sigma, \mu \in K$ entonces $\sigma \cap \mu$ es o bien el vacío o bien un cara común de ambos símplices.

Definición 1.7.5. $L \subseteq K$ se dice *subcomplejo* si L es un complejo simplicial.

Definición 1.7.6. Se define el *poliedro subyacente* a K como $|K| = \cup_{\sigma \in K} \sigma \subseteq \mathbb{R}^m$ donde con “ \subseteq ” nos referimos a subespacio topológico.

Definición 1.7.7. Si $x \in |K|$ se llama *estrella* de K al subcomplejo

$$st(x, K) = \{\sigma \in K : \sigma \leq \tau \text{ y } x \in \tau\}.$$

También llamamos *estrella* a su poliedro subyacente

$$|st(x, K)| = \cup \{\sigma \in K : x \in \sigma\}.$$

La *estrella abierta* de x se define como el conjunto

$$\dot{st}(x, K) = \cup_{x \in \sigma} \dot{\sigma} \subseteq |K|.$$

La estrella abierta es un abierto del poliedro $|K|$.

Definición 1.7.8. Se llama *engarce* de $x \in |K|$ al subcomplejo de $st(x, K)$,

$$lk(x, K) = \{\sigma \in st(x, K) : x \notin \sigma\}$$

o también a su poliedro subyacente $|lk(x, K)|$.

Definición 1.7.9. El *baricentro* del n -símplice $\sigma = (a_0 \dots a_n)$ es el punto

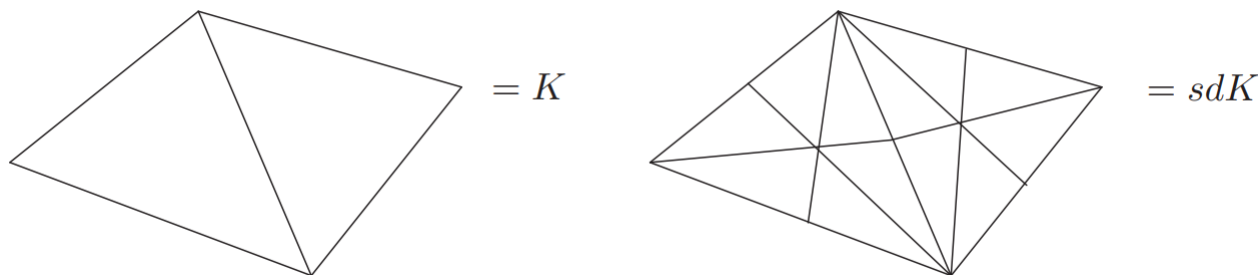
$$b(\sigma) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} a_i.$$

Definición 1.7.10. La subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial K , denotada por sdK , es el complejo simplicial formado por los símlices de la forma

$$(b(\sigma_0) \dots b(\sigma_q))$$

donde $\sigma_0, \dots, \sigma_q$ son símlices de K verificando que $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_q$. Así pues, los vértices de sdK son los baricentros de los símlices de K .

Ejemplo 1.7.11. Dado el complejo simplicial K , representamos a la derecha su subdivisión baricéntrica sdK :



Nota 1.7.12. Dado cualquier complejo simplicial K se tiene que $|K| = |sdK|$.

1.7.1. A-espacios vistos como complejos simpliciales

Pasamos ahora a ver cómo podemos relacionar la teoría de complejos simpliciales y la teoría de conjuntos parcialmente ordenados. Teniendo en cuenta la equivalencia entre estos conjuntos y los A-espacios estas relaciones serán válidas también para los A-espacios. Dado un poset, podemos generar a partir de sus elementos un complejo simplicial de la siguiente forma:

Definición 1.7.13. El *complejo de orden* de un poset X es un complejo simplicial cuyos símlices son las cadenas (ver 1.2.4) de X . Lo denotamos por $\mathcal{O}(X)$.

Nota 1.7.14. Todo complejo simplicial K tiene naturalmente asociado un poset (o, equivalentemente un A_0 -espacio) al definir sobre el propio K como conjunto de símlices la relación de ser cara. Denotamos este poset por $\mathcal{X}(K)$. Obsérvese que el nivel m del diagrama de Hasse de $\mathcal{X}(K)$ está formado por los símlices de dimensión m de K .

Es también interesante observar que el complejo orden de $\mathcal{X}(K)$, $\mathcal{O}(\mathcal{X}(K))$, se puede identificar con la subdivisión baricéntrica de K , sdK . En efecto, el símlice representado por la cadena $\sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_s$ se corresponde con el símlice de sdK de vértices los baricentros $b(\sigma_0), b(\sigma_1), \dots, b(\sigma_s)$.

Ejemplo 1.7.15. Veamos un ejemplo de esto tomando K un 2-símlice de vértices 1, 2, 3. A continuación describimos el poset $(\mathcal{X}(K), \leq)$:

$$\mathcal{X}(K) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\},$$

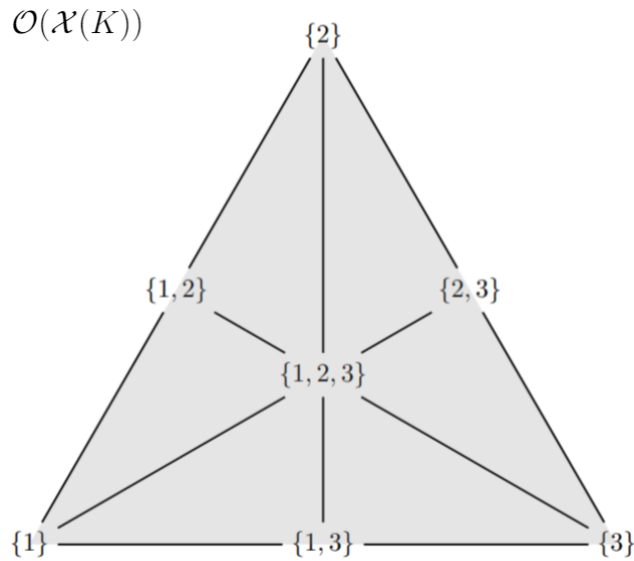
donde cada vértice corresponde a un conjunto unitario, las aristas son los conjuntos de dos elementos y el triángulo se representa mediante el conjunto que contiene a los tres elementos.

La relación de ser cara (\leq) nos da:

$$\{1\} \leq \{1, 2\} \geq \{2\} \leq \{2, 3\} \geq \{3\} \leq \{1, 3\} \geq \{1, 2, 3\}$$

y $\{1, 2, 3\}$ mayor que cualquier otro elemento de $\mathcal{X}(K)$.

Representamos a continuación el complejo de orden asociado a este poset.



Vemos que, en efecto, $\mathcal{O}(\mathcal{X}(K))$ coincide con la subdivisión baricéntrica de K .

Definición 1.7.16. El *análogo poliedral* $|\mathcal{O}(X)|$ de un A_0 -espacio es el poliedro subyacente de su complejo de orden.

Un A_0 -espacio X y su análogo poliedral $|\mathcal{O}(X)|$ tienen los mismos invariantes de la topología algebraica (ver [6] o [2]). En este trabajo sólo usaremos el número de componentes para la conexión por caminos (que es equivalente a la conexión topológica en poliedros como vimos en el curso de Homología Simplicial y en A_0 -espacios como se vio en 1.1.17). Exactamente haremos uso de las siguientes proposiciones.

Proposición 1.7.17. Sea X un A_0 -espacio. Entonces el X es conexo por caminos si sólo si lo es $|\mathcal{O}(X)|$.

Demostración. De acuerdo con el teorema 1.3.8 y la definición 1.7.13, es claro que dos elementos $x, y \in X$ están conectados por un camino en X si y sólo si, vistos como vértices de $\mathcal{O}(X)$, están conectados por un camino de aristas en $\mathcal{O}(X)$. Como se vio en el curso de Homología Simplicial, la conexión por aristas de todos los vértices equivale a la conexión por caminos del poliedro $|\mathcal{O}(X)|$.

□

Proposición 1.7.18. Sea X un A_0 -espacio. Para todo $A \subseteq X$, el número de componentes conexas por caminos de $X - A$ es el mismo que el de $|\mathcal{O}(X)| - |\mathcal{O}(A)|$.

Demostración. Sea $A \subseteq X$. Si $C \subseteq X - A$ es una componente, entonces $|\mathcal{O}(C)|$ es conexo por caminos por la proposición 1.7.17. Así que $|\mathcal{O}(C)|$ está contenido en una componente P_C de $Y = |\mathcal{O}(X)| - |\mathcal{O}(A)|$.

Veamos que la correspondencia $C \mapsto P_C$ es una biyección entre las familias de componentes:

La sobreyectividad es inmediata pues si P es una componente de Y y $z \in P$, sea $\sigma \in \mathcal{O}(X)$ con $z \in \overset{\circ}{\sigma}$.

Entonces existe un v3rtice $v \in \sigma$ con $v \notin A$ pues en caso contrario toda la cadena de X que representa el s3mplice σ estar3a formada por puntos de A y como consecuencia $z \in \sigma \subseteq |\mathcal{O}(A)|$, que es una contradicci3n.

Tambi3n tenemos que $\overset{\circ}{\sigma} \cap |\mathcal{O}(A)| = \emptyset$, pues si y est3a en esa intersecci3n, existe un s3mplice $\tau \in \mathcal{O}(A)$ con $y \in \overset{\circ}{\tau}$ y los s3mplices de $\mathcal{O}(X)$, σ y τ se cortar3an en sus interiores, lo que no es posible en un complejo simplicial, a menos que $\sigma = \tau \in \mathcal{O}(A)$.

Es inmediato entonces que el segmento de z a v en σ est3a formado por puntos de Y y por ello la componente P de Y est3a representada por el v3rtice v y para la componente C de v en $X - A$ tenemos que $P_C = P$.

Para ver la inyectividad, supongamos que tenemos $P_C = P_D$ para las componentes $C, D \subseteq X - A$ y sean $v \in C$ y $w \in D$. Vistos como v3rtices de $\mathcal{O}(X)$, tenemos que $v, w \in P_C = P_D$ y por ello existe un camino $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ con $\gamma(0) = v$ y $\gamma(1) = w$. Consideremos la estrella de v , $S = |st(v, \mathcal{O}(X))|$.

Podemos suponer que $w \notin S$ pues en caso contrario la arista α de v3rtices v y w ($v < w$ 3 $w < v$) estar3a en S y adem3s $\alpha \notin \mathcal{O}(A)$, por lo que v y w estar3an conectados en $X - A$.

As3 pues, por la compacidad de $[0, 1]$, existe un t_0 tal que $z_1 = \gamma(t_0)$ es el 3ltimo elemento del camino en S , esto es, $t_0 = \max(\gamma^{-1}(S))$. Sea $\eta \subseteq S$ el s3mplice con $z_1 \in \overset{\circ}{\eta}$. Tenemos que $v \notin \eta$ pues en caso contrario, $z_1 \in \overset{\circ}{\eta} \subseteq \overset{\circ}{S}$, donde $\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{st}(v, \mathcal{O}(X))$ es la estrella abierta, que es un abierto de $|\mathcal{O}(X)|$, por tanto $\gamma^{-1}(\overset{\circ}{S})$ ser3a un abierto conteniendo a t_0 y existir3a alg3n $\epsilon > 0$ con $\gamma(t_0 + \epsilon) \in \overset{\circ}{S} \subseteq S$.

Por tanto el s3mplice η est3a en el engarce $lk(v, \mathcal{O}(X))$. Adem3s, como $z_1 \notin |\mathcal{O}(A)|$, $\eta \notin \mathcal{O}(A)$ y como vimos antes, existe alg3n v3rtice v_1 con $v_1 \notin A$. En particular la arista con v3rtices v y v_1 no est3a en $\mathcal{O}(A)$. Ahora consideramos la restricci3n de γ a $[t_0, 1]$ como un camino γ_1 de v_1 a w y realizamos el razonamiento anterior con v_1 en lugar de v y continuamos el proceso hasta encontrar un camino por aristas en $\mathcal{O}(X) - \mathcal{O}(A)$ entre v y w , lo que nos dice que las componentes C y D de partida son la misma. Prob3ndose as3 la inyectividad.

Hemos usado en el 3ltimo paso el hecho de que, por compacidad, la imagen del camino original γ est3a contenida en un n3mero finito de estrellas abiertas (y por tanto en el mismo n3mero de estrellas) de $\mathcal{O}(X)$.

□

Capítulo 2

Adyacencia

En los últimos tiempos, se ha realizado un importante salto de calidad en cuanto al visionado de imágenes y vídeos en formato digital. La calidad de reproducción es cada vez mayor al aumentar la resolución en los monitores, televisiones, etc. Este aumento de resolución viene proporcionado por un aumento de píxeles en pantalla.

El procesamiento de las imágenes en la pantalla de un ordenador tiene un carácter discreto, por lo que los programas de nuestras computadoras operan en términos de lo que se denomina adyacencia. Este capítulo se dedicará a desarrollar el concepto de adyacencia y en concreto su significado desde el punto de vista de los A -espacios.

2.1. Conceptos generales de adyacencia.

Definición 2.1.1. La *adyacencia* es una relación binaria que cumple las propiedades irreflexiva y simétrica, esto es, $x \not\sim x$ y si $x \sim y$ entonces $y \sim x$.

Suponemos ahora una adyacencia A definida en un conjunto X .

Definición 2.1.2. Llamamos *conjunto de adyacencia* de $x \in X$ al conjunto:

$$A_X(x) = \{y : (x, y) \in A\}.$$

Asimismo, definimos el *entorno de adyacencia* de un punto como:

$$AN_X(x) = A_X(x) \cup \{x\}.$$

Definición 2.1.3. Dada una adyacencia A en un conjunto X , un A -camino en un subconjunto $S \subset X$ entre dos de sus puntos, $y, z \in S$ es una secuencia finita de puntos $x_1, \dots, x_n \in S$ donde para cada $1 \leq k < n$, $(x_k, x_{k+1}) \in A$, con $y = x_1, z = x_n$. Un subconjunto $S \subseteq X$ es A -conexo si para cualesquiera dos puntos de S podemos encontrar un A -camino en S entre ellos. Un A -componente de X es un subconjunto maximal A -conexo.

Definición 2.1.4. Un A -arco es un A -camino x_1, \dots, x_n donde para cada $1 \leq k, m \leq n$, si $(x_k, x_m) \in A$, entonces $m = k \pm 1$. Esto es, un A -arco es un A -camino sin autointersecciones. Una A -curva de Jordan es un A -arco donde $(x_1, x_n) \in A$

2.2. Adyacencia en \mathbb{Z}^n

Podemos aplicar estas definiciones para crear diferentes adyacencias en el reticulado \mathbb{Z}^n con $n \geq 1$.

- $n = 1$. Este caso es el más simple. En el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} se define la *1-adyacencia* $A_{\mathbb{Z}}^1$ haciendo que, para cada $x \in \mathbb{Z}$, $A_{\mathbb{Z}}^1(x) = \{x \pm 1\}$. De manera general, para cada $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ se define la *r-adyacencia* en \mathbb{Z} , tomando $A_{\mathbb{Z}}^r(x) = \{x \pm 1, \dots, x \pm r\}$. Aquí sólo usaremos el caso $r = 1$.
- $n = 2$. Consideramos aquí dos tipos fundamentales de adyacencias en \mathbb{Z}^2 , a la que nos referiremos a lo largo del desarrollo del trabajo.

Definición 2.2.1. La primera es la denominada *4-adyacencia*, $A_{\mathbb{Z}^2}^4$, definida al tomar para cada punto $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:

$$A_{\mathbb{Z}^2}^4(x, y) = \{(x, y - 1), (x, y + 1), (x - 1, y), (x + 1, y)\}.$$

Vemos una ilustración aclaratoria:

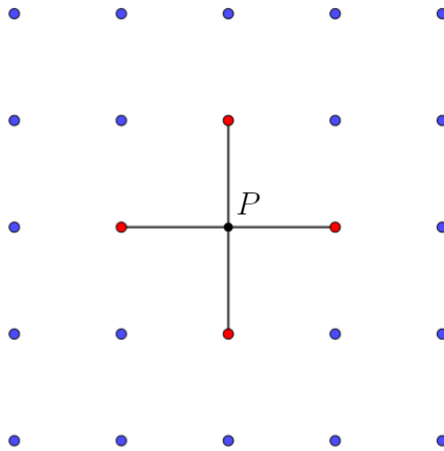


Figura 2.1: El conjunto de adyacencia del punto P de color negro en el centro viene formado por los puntos rojos de la figura

Definición 2.2.2. La segunda adyacencia que vemos es la denominada *8-adyacencia*, $A_{\mathbb{Z}^2}^8$, que a cada punto $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ le asigna el siguiente conjunto de adyacencia:

$$A_{\mathbb{Z}^2}^8(x, y) = \{(x, y - 1), (x, y + 1), (x - 1, y), (x + 1, y), \\ (x + 1, y + 1), (x + 1, y - 1), (x - 1, y + 1), (x - 1, y - 1)\}.$$

Lo vemos en el siguiente dibujo:

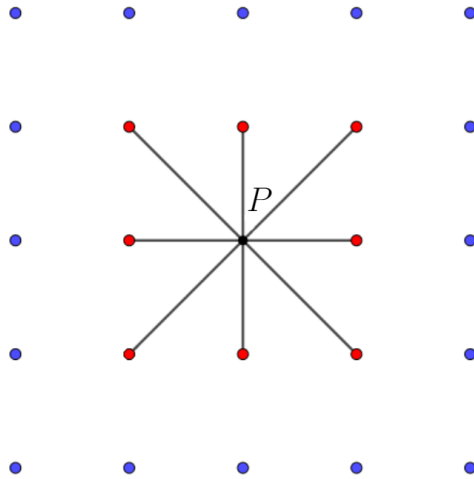


Figura 2.2: El conjunto de adyacencia del punto P de color negro en el centro viene formado por los puntos rojos de la figura

Para la 4-adyacencia los puntos vecinos son los más próximos en la vertical y horizontal del punto y para la 8-adyacencia, además de los 4-adyacentes, se añaden los puntos vecinos en las correspondientes diagonales.

Otro ejemplo de adyacencia en el plano es la *adyacencia hexagonal*, que también se llama *3-adyacencia*. Distinguimos entre *puntos del tipo I* y *puntos del tipo D*.

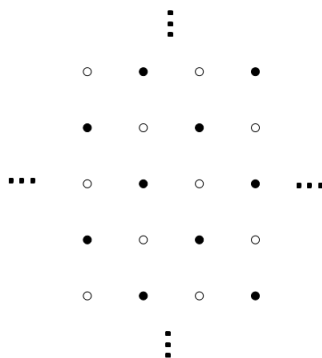
Un punto (x, y) se dice *punto del tipo D* si su conjunto de adyacencia es:

$$\{(x, y + 1), (x, y - 1), (x + 1, y)\}.$$

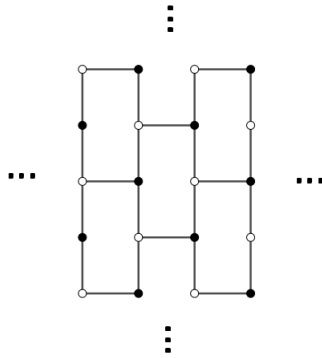
Un punto (x, y) se dice *punto del tipo I* si su conjunto de adyacencia es:

$$\{(x, y + 1), (x, y - 1), (x - 1, y)\}.$$

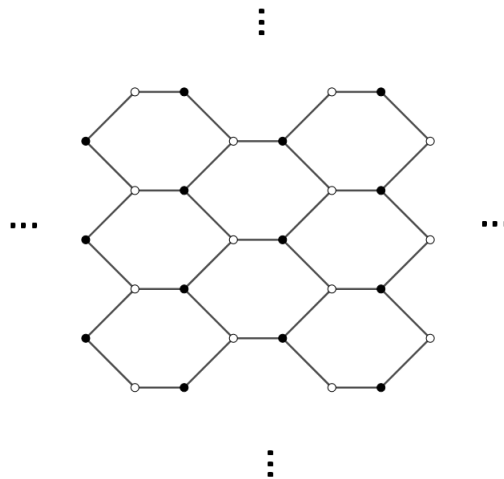
Los puntos en el plano se distribuyen de esta forma (donde los blancos representan puntos del tipo D y los negros representan puntos del tipo I):



De esta forma, podemos hacernos una idea del reticulado asociado a esta adyacencia:



El motivo por el que se llama *adyacencia hexagonal* es que podemos deformar el reticulado anterior del plano y obtener un reticulado hexagonal como en la siguiente figura, donde la adyacencia queda representada por la conexión directa de aristas del reticulado:



2.2.1. El problema de separación para las A-curvas

Recordemos el teorema de la curva de Jordan que resuelve el problema de separación para las curvas cerradas y simples en el plano euclídeo:

Toda curva cerrada simple del plano divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común.

Discretizando el problema para verlo en el plano reticulado (previa elección de una adyacencia A en \mathbb{Z}^2), es natural enunciar el siguiente teorema:

Toda A-curva de Jordan divide a \mathbb{Z}^2 en dos A-componentes.

Pero a la hora de intentar probar el teorema encontramos que es falso en general: existen A-curvas de Jordan que no dividen al plano en dos A-componentes. Vemos ejemplos donde no se cumple el teorema de la curva de Jordan con la 4-*adyacencia* y la 8-*adyacencia*:

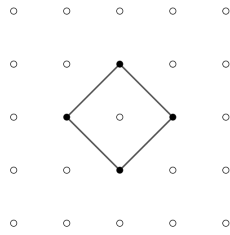


Figura 2.3: En esta imagen se puede ver una 8-curva de Jordan donde el único punto que encierra la curva queda conectado con el exterior de la curva mediante la 8-adyacencia.

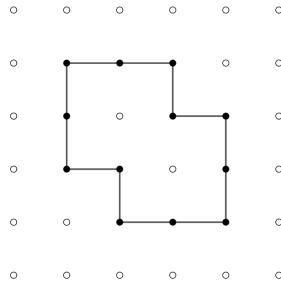


Figura 2.4: En esta imagen se puede ver una 4-curva de Jordan que divide al plano reticulado en tres 4-componentes, ya que los dos puntos de la región interior de la curva son 8-adyacentes, pero no pueden ser conectados por un camino de puntos 4-adyacentes en el interior de la curva.

Con estos ejemplos queda claro el problema existente con la versión discreta del teorema de Jordan y por tanto con la fundamentación teórica de las ideas topológicas utilizadas en el procesamiento de imágenes digitales.

Una solución al problema se obtiene usando simultáneamente dos tipos de adyacencias, lo que proporciona una considerable solidez a la teorización de la “topología digital”. El enunciado correcto del teorema de Jordan es doble según el par de adyacencias que se use; ver [9].

Teorema 2.2.3. 1. Toda 4-curva de Jordan divide a \mathbb{Z}^2 en dos 8-componentes.

2. Toda 8-curva de Jordan divide a \mathbb{Z}^2 en dos 4-componentes.

Otra opción es usar la topología Khalimsky y obtener un teorema de Jordan con una sola adyacencia, al depender la adyacencia de un punto de la naturaleza topológica del mismo como veremos más adelante.

2.2.2. Adyacencia en A-espacios

Definición 2.2.4. En todo A-espacio X hay definida una adyacencia A_X (llamada X -adyacencia) al declarar dos puntos distintos $x, y \in X$ adyacentes para A_X (X -adyacentes) si el subespacio $\{x, y\}$ es conexo en X .

Lema 2.2.5. En un A-espacio X un conjunto $\{x, y\}$ es conexo si y sólo si $x \in U_y$ o $y \in U_x$; esto es $x \leq y$ o $y \leq x$ (x e y son comparables) para el preorden de Alexandroff-Birkhoff de X .

Demostración. Supongamos $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$. Entonces la intersecciones $\{x\} = U_x \cap \{x, y\}$ e $\{y\} = U_y \cap \{x, y\}$ son abiertos relativos y por tanto $\{x, y\}$ sería la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos y esto contradice su conexión.

Recíprocamente, si $x \in U_y$, entonces $x \leq y$ y $\{x, y\}$ es conexo por 1.1.17. El resultado es análogo para $y \in U_x$.

□

La siguiente proposición completa el lema anterior, dando otra caracterización de la adyacencia en A-espacios.

Proposición 2.2.6. Las tres condiciones siguientes son equivalentes en un A-espacio X para dos puntos distintos $x, y \in X$:

1. x e y son X -adyacentes.
2. $x \in U_y - \{y\}$ o $y \in U_x - \{x\}$.
3. $y \in \bar{x} \cup U_x - \{x\}$.
4. $x \in \bar{y} \cup U_y - \{y\}$.

Demostración. La equivalencia de 1) y 2) es el lema 2.2.5 (recordemos que $x \neq y$). Ahora 2) es equivalente a 3), pues ya vimos en la proposición 1.1.3 que $x \in U_y$ si y sólo si $y \in \bar{x}$. Así pues 2) se puede escribir como $y \in U_x - \{x\}$ o $y \in \bar{x} - \{x\}$; es decir, 3). Igualmente 2) es equivalente a 4), cambiado los papeles de x e y .

□

Corolario 2.2.7. Dado un A-espacio X , el conjunto de X -adyacencia de $x \in X$ es

$$A_X(x) = (U_x \cup \bar{x}) - \{x\}$$

y el entorno de X -adyacencia es

$$AN_X(x) = U_x \cup \bar{x}.$$

Podemos entonces reescribir el teorema 1.1.17 como:

Teorema 2.2.8. Sea X un A-espacio, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- X es conexo.
- X es A_X -conexo.
- X es conexo por caminos.

La proposición que sigue nos dice que el entorno de adyacencia de un punto en un A_0 -espacio se traduce como la estrella de ese punto visto como vértice del complejo orden del espacio.

Proposición 2.2.9. Sea X un A_0 -espacio y $\mathcal{O}(X)$ su complejo de orden. Entonces tenemos que $st(x, \mathcal{O}(X)) = \mathcal{O}(AN_X(x))$.

Demostración. En primer lugar, todo $\sigma \in \mathcal{O}(AN_X(x))$ está definido como una cadena en $AN_X(x)$, digamos $\sigma = x_1 < x_2 < \dots < x_s$.

Si $x \in \sigma$ no hay nada que probar pues entonces deducimos de forma inmediata que $\sigma \in st(x, \mathcal{O}(X))$.

Si $x \notin \sigma$ encontramos dos casos:

- Sea x_i el mayor vértice de σ que aún está en U_x . Entonces $x_{i+1} \in \bar{x}$ y podemos construir una nueva cadena $\tau = x_1 < \dots < x_i < x < x_{i+1} < \dots < x_s$ perteneciente a $st(x, \mathcal{O}(X))$. Por lo tanto $\sigma \in st(x, \mathcal{O}(X))$ por ser cara de τ .
- Supongamos que no hay vértices de σ en U_x . Por lo tanto, todos los vértices serán de \bar{x} . Entonces la cadena $\sigma \cup \{x\}$ representa un símplice μ de $st(x, \mathcal{O}(X))$ y por tanto $\sigma \in st(x, \mathcal{O}(X))$ por ser cara de μ .

Recíprocamente, tomamos una cadena $\nu = y_1 < y_2 < \dots < y_k$ en $st(x, \mathcal{O}(X))$. Por definición, existe una cadena $\rho \in \mathcal{O}(X)$ que contiene a x y a ν . En particular podemos encontrar una cadena formada por x y los puntos de ν . Dicha cadena estará formada por puntos de $\bar{x} \cup U_x = AN_X(x)$.

□

2.2.3. Adyacencia en la topología de Khalimsky

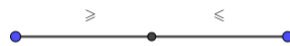
Vamos a ver ahora la relación de las adyacencias vistas en las definiciones 2.2.1 y 2.2.2 con la adyacencia de la topología de Khalimsky.

Adyacencia en la línea de Khalimsky

Anteriormente hemos hecho un breve estudio de la línea de Khalimsky K y sus relaciones según el preorden de Alexandroff-Birkhoff. Plasmanos a continuación los dos tipos de puntos posibles en la línea de Khalimsky:

- **Puntos abiertos**

Esta clase de puntos se corresponden con los enteros impares, estando situados en el nivel 0 en el diagrama de Hasse. La situación de un punto abierto en la línea de Khalimsky está indicada en negro en el diagrama siguiente

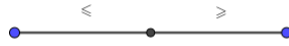


Si llamamos p al punto al que estamos realizando el estudio, obtenemos que

$$U_p = \{p\}, \quad \bar{p} = \{p-1, p, p+1\}.$$

- **Puntos cerrados**

Esta clase de puntos se corresponden con enteros pares. Están colocados en el nivel 1 del diagrama de Hasse y su posición en la línea de Khalimsky está indicada en negro en el diagrama siguiente.



Si llamamos p al punto al que estamos realizando el estudio, obtenemos que

$$U_p = \{p - 1, p, p + 1\}, \quad \bar{p} = \{p\}.$$

Proposición 2.2.10. Dos enteros x, y pertenecientes a la línea de Khalimsky K son adyacentes si y sólo si $|x - y|=1$.

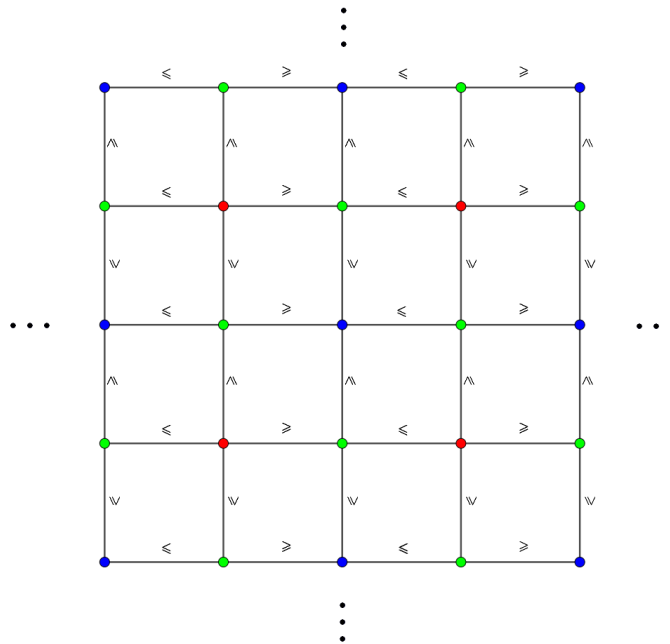
Demostración. Por el lema 2.2.5 tenemos que x, y son adyacentes si y sólo si $x \leq y$ o $y \leq x$. En el capítulo anterior vimos que desde el punto de vista del orden para todo $k \in \mathbb{Z}$ se tiene $2k + 1 \leq 2k, 2k + 2$. Por lo tanto, deducimos que cualesquiera dos números consecutivos van a ser adyacentes y además que si $|x - y| > 1$, x e y no son comparables, y como consecuencia no pueden ser adyacentes. □

Podemos deducir de esta proposición:

Corolario 2.2.11. La adyacencia en la línea de Khalimsky coincide con la 1-adyacencia de \mathbb{Z} .

Adyacencia en el plano de Khalimsky

Vamos ahora a trabajar en el espacio K^2 . Primero, damos una representación de una porción del diagrama de Hasse del plano de Khalimsky:



Las intersecciones de las líneas de Khalimsky dan lugar a los puntos del plano de Khalimsky. En cada arista se ve representada la relación existente entre sus extremos. Los

puntos azules denotan el nivel 0 en el diagrama de Hasse, los verdes el nivel 1 y los rojos el nivel 2.

Antes de hablar de adyacencia, vamos a definir los puntos que nos encontramos en el plano de Khalimsky según su posición. Para explicar de forma más ilustrativa cada tipo de punto, clasificaremos las dos líneas de Khalimsky que se cortan en cada punto del plano de Khalimsky como línea de Khalimsky horizontal y línea de Khalimsky vertical:

Definición 2.2.12. Se dice que un punto es *Abierto-Abierto* si se tiene que ese punto es abierto con respecto a su línea de Khalimsky horizontal y abierto con respecto a su línea de Khalimsky vertical. Análogamente se define un punto *Cerrado-Cerrado*.

Se dice que un punto es *Abierto-Cerrado* si se trata de un abierto con respecto a su línea de Khalimsky horizontal y cerrado con respecto a su línea de Khalimsky vertical. Análogamente se definen los puntos *Cerrado-Abierto*.

A los dos primeros tipos de puntos se les denominan *puros*, y *mixtos* a los dos últimos tipos.

Por la definición de adyacencia en A-espacios, existen diferentes conjuntos de adyacencia dependiendo de las propiedades topológicas de los puntos considerados. Veremos a continuación cómo se comporta la adyacencia atendiendo a cada tipo de punto del plano reticulado:

- Para todo punto *Abierto-Abierto* ocurre que su entorno de adyacencia va a venir dado por los puntos del plano de Khalimsky que cumplen $\|x - y\|_{max} \leq 1$ para la norma del máximo $\|x - y\|_{max} = \max\{|x_i - y_i|\}$. Lo mismo ocurre con los puntos *Cerrado-Cerrado*. Esto es, la K^2 -adyacencia para los puntos *Abierto-Abierto* y *Cerrado-Cerrado* es la 8-adyacencia. Vemos ambos casos de forma ilustrativa:

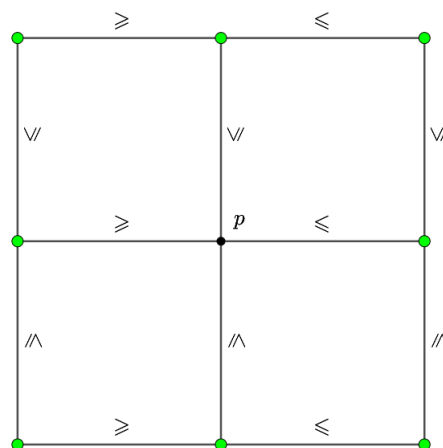


Figura 2.5: Representamos aquí la K^2 -adyacencia de un punto *Abierto-Abierto* p . Para cualquier punto $x \neq p$ de la figura se tiene $p \leq x$. Llegamos entonces (atendiendo a la definición de la relación de Alexandroff-Birkhoff) a la conclusión de que todo punto de la figura es adyacente a p por pertenecer a su clausura. Los puntos adyacente por pertenencia a clausura los indicaremos en color verde.

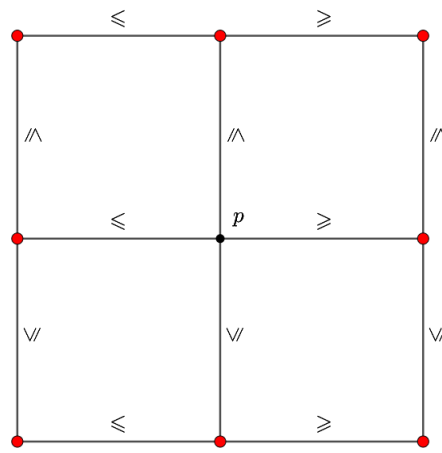


Figura 2.6: Siguiendo el mismo razonamiento que en la figura anterior, en un punto *Cerrado-Cerrado* p la adyacencia al mismo se tiene por pertenencia a su abierto mínimo. Los puntos adyacentes por pertenencia al abierto mínimo los indicaremos en color rojo.

Concluimos entonces que la K^2 -adyacencia de cualquier punto *puro* del plano de Khalimsky coincide con la δ -adyacencia en el reticulado \mathbb{Z}^2 , vista en la definición 2.2.2.

- Vemos la adyacencia de los puntos mixtos.

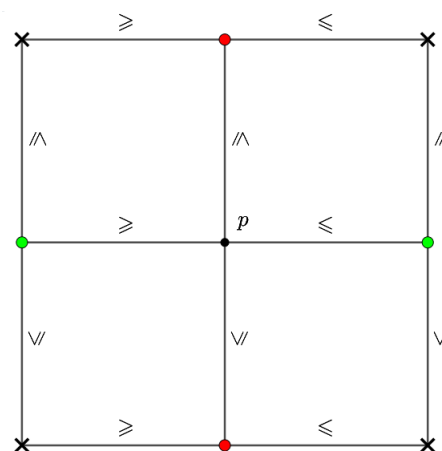


Figura 2.7: En esta ilustración p representa un punto *Abierto-Cerrado*. Si tomamos cualquiera de los puntos representados con cruces vemos que no son comparables a p (los segmentos que los unen tienen relaciones opuestas). Por lo tanto, dichos puntos no serán K^2 -adyacentes a p . Para los adyacentes, seguimos el mismo patrón de colores que en las dos figuras anteriores.

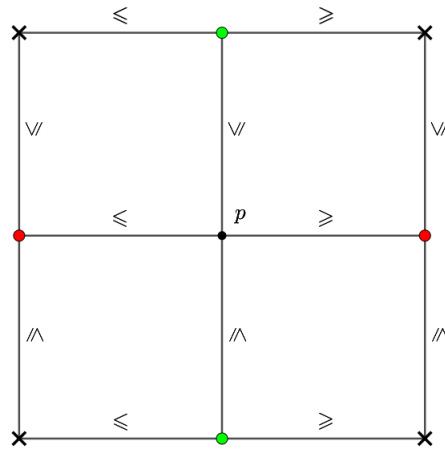


Figura 2.8: Seguimos el mismo criterio que en la ilustración anterior para representar la K^2 -adyacencia de un punto p que sea *Cerrado-Abierto*.

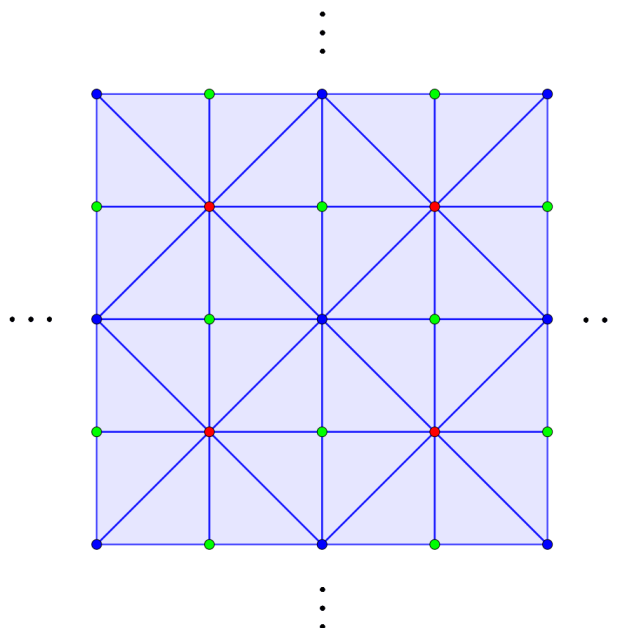
Concluimos entonces que la K^2 -adyacencia para los puntos *mixtos* en el plano de Khalimsky es la 4-*adyacencia* de \mathbb{Z}^2 , vista en la definición 2.2.1.

A continuación y en forma de aclaración resumimos en una tabla el entorno de adyacencia de cada tipo de punto:

Tipo de punto	Entorno de adyacencia
Puro	$A_X^8(x) \cup \{x\} = \bar{x} \cup U_x$
Mixto	$A_X^4(x) \cup \{x\} = \bar{x} \cup U_x$

Complejo de orden asociado al plano de Khalimsky

En el capítulo anterior ya vimos la relación existente entre los A_0 -espacios y los complejos simpliciales. Tomando ahora como poset a K^2 y aplicando la teoría vista en 1.7.1, podemos construir el siguiente complejo simplicial:



Los puntos rojos y azules representan a los puntos puros de K^2 mientras que los verdes se corresponden con los puntos mixtos.

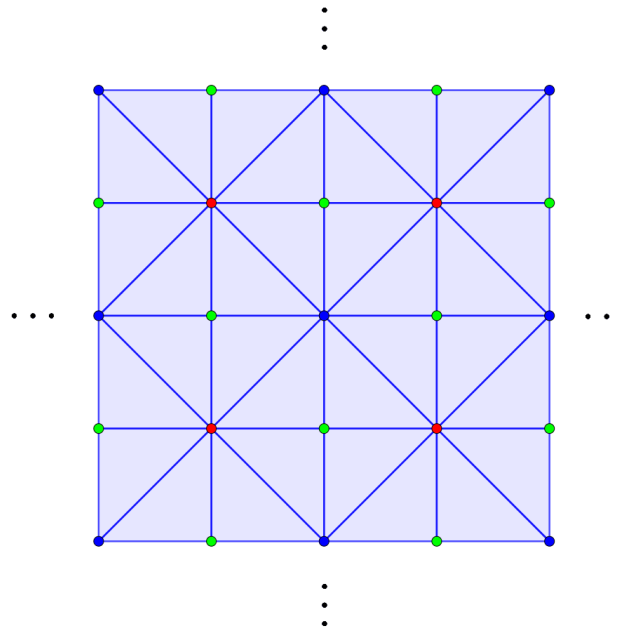
El Teorema de la curva de Jordan en el plano de Khalimsky

Una vez que hemos visto que la topología del plano de Khalimsky K^2 codifica en la K^2 -adyacencia la 4- y 8- adyacencias del reticulado \mathbb{Z}^2 , el teorema "doble" de la curva de Jordan para el reticulado \mathbb{Z}^2 , teorema 2.2.3, se reunifica como sigue:

Teorema 2.2.13. Para la adyacencia A_{K^2} del plano de Khalimsky se tiene el teorema de la curva de Jordan:

Toda A_{K^2} -curva de Jordan en K^2 divide al espacio en dos A_{K^2} -componentes.

Demostración. $\mathcal{O}(K^2)$ es la siguiente triangulación de \mathbb{R}^2 .



Por la proposición 1.7.17, la A_{K^2} -conexión es la conexión por aristas en $\mathcal{O}(K^2)$, que es equivalente a la conexión en $\mathbb{R}^2 = |\mathcal{O}(K^2)|$. Más aún, por la proposición 1.7.18 si $X \subset K^2$ es un subespacio, el número de componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - |\mathcal{O}(X)|$ es igual al número de A_{K^2} -componentes de $K^2 - X$.

Además una A_{K^2} -curva de Jordan Γ se convierte en una curva poligonal cerrada $\mathcal{O}(\Gamma)$ en $\mathcal{O}(K^2)$ a la que podemos aplicar el teorema de Jordan clásico de topología y $\mathbb{R}^2 - |\mathcal{O}(\Gamma)|$ tiene dos componentes, el mismo número de A_{K^2} -componentes de $K^2 - \Gamma$.

□

Nota 2.2.14. El método empleado en la demostración anterior consiste en pasar un problema discreto a uno continuo y resolver la versión continua con resultados ya conocidos de la topología clásica.

Veremos más adelante en 3.3.8, el mismo método aplicado en dimensiones arbitrarias.

- $n = 3$

 Para estudiar el caso tridimensional, representamos un cubo de lado dos, cuyo centro está en el origen. Tomamos además del origen y los vértices del cubo, los puntos medios de las aristas y el centro de cada cara, como se indica en la figura:

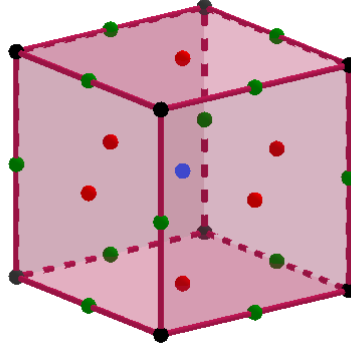


Figura 2.9: Aquí el centro está en azul, el punto medio de cada cara está en rojo, el punto medio de las aristas en verde y los vértices en negro.

Si el centro de la figura p está en el reticulado \mathbb{Z}^3 , entonces la figura anterior representa a los puntos $x \in \mathbb{Z}^3$ con $\|p - x\|_{max} \leq 1$. A partir del dibujo es inmediato observar tres posibles tipos de adyacencia para p (en azul en la figura):

1. **6-adyacencia:** Resulta al establecer como 6-adyacentes a p los puntos rojos.
2. **18-adyacencia:** Resulta al establecer como 18-adyacentes a p los puntos rojos y verdes.
3. **26-adyacencia:** Resulta al establecer como 26-adyacentes a p los puntos rojos, verdes y negros (todos los puntos de la esfera unidad de centro p con respecto a la norma del máximo).

Adyacencia en el espacio de Khalimsky

El espacio de Khalimsky K^3 no es más que el producto de tres líneas de Khalimsky. En el estudio previo que hemos hecho de la línea de Khalimsky vimos que sólo hay dos posibles situaciones de un punto respecto a la relación de sus adyacentes (los que llamamos puntos abiertos y puntos cerrados). Después, al estudiar el plano de Khalimsky, vimos que un punto podría tener cuatro situaciones posibles (Abierto-Abierto, Abierto-Cerrado, Cerrado-Abierto y Cerrado-Cerrado). Ahora, al estar manejando tres dimensiones, aparecen hasta 8 situaciones diferentes. Las estudiaremos de forma analítica tomando como referencia para la explicación la siguiente figura.

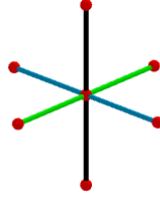


Figura 2.10: Con colores representamos cada una de tres líneas de Khalimsky diferentes que se cortan en un punto

Nos referiremos a cada punto de \mathbb{Z}^3 en sus coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , donde cada punto x_i será abierto o cerrado en la correspondiente recta de Khalimsky. Como en el caso bidimensional, atendiendo a lo anterior tenemos tres tipos de puntos:

- **Abierto-Abierto-Abierto:** En este caso las tres coordenadas son puntos abiertos y

$$U_{(x_1, x_2, x_3)} = U_{x_1} \times U_{x_2} \times U_{x_3} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \{x_3\} = \{(x_1, x_2, x_3)\}$$

Por otro lado, la clausura $\overline{(x_1, x_2, x_3)}$ es el producto de clausuras

$$\overline{x_1} \times \overline{x_2} \times \overline{x_3} = \{x_1, x_1 \pm 1\} \times \{x_2, x_2 \pm 1\} \times \{x_3, x_3 \pm 1\}$$

Esto es, si nuestro punto corresponde al punto azul en la figura 2.9, el conjunto de adyacencia $A_{\mathbb{Z}^3}$ está formado por los 26 puntos que están alrededor de ese punto. Por tanto en este caso se tendrá la *26-adyacencia*. Respecto al orden vemos que esos 26 puntos son comparables con el punto original de acuerdo con la topología/orden producto.

- **Cerrado-Cerrado-Cerrado:** Nos encontramos en la situación dual del caso anterior, pues ahora la clausura del punto es el propio punto y el abierto mínimo es

$$U_{(x_1, x_2, x_3)} = \{x_1, x_1 \pm 1\} \times \{x_2, x_2 \pm 1\} \times \{x_3, x_3 \pm 1\}$$

En este caso también tendremos la *26-adyacencia*.

Como en el caso del plano de Khalimsky, a los puntos de estos dos tipos se les denominan *puntos puros*.

- **Puntos mixtos:** Los puntos restantes, dados por aquellas combinaciones *Abierto-Cerrado* en las tres dimensiones, son llamados mixtos. Tenemos las siguientes combinaciones:

Cerrado-Cerrado-Abierto: En este caso el abierto mínimo es

$$U_{(x_1, x_2, x_3)} = \{x_1, x_1 \pm 1\} \times \{x_2, x_2 \pm 1\} \times \{x_3\},$$

y la clausura

$$\overline{(x_1, x_2, x_3)} = \{x_1\} \times \{x_2\} \times \{x_3, x_3 \pm 1\}.$$

Por tanto el conjunto de adyacencia de el punto (x_1, x_2, x_3) está formado por los ocho puntos adyacentes a ese punto en el reticulado del plano $z = x_3$ junto con los dos puntos $\{(x_1, x_2, x_3 \pm 1)\}$.

Cerrado-Abierto-Abierto: En este caso el abierto mínimo es

$$U_{(x_1, x_2, x_3)} = \{x_1, x_1 \pm 1\} \times \{x_2\} \times \{x_3\},$$

y la clausura

$$\overline{(x_1, x_2, x_3)} = \{x_1\} \times \{x_2, x_2 \pm 1\} \times \{x_3, x_3 \pm 1\}.$$

Por tanto el conjunto de adyacencia del punto (x_1, x_2, x_3) está formado por los ocho puntos adyacentes a ese punto en el reticulado del plano $z = x_1$ junto con los dos puntos $\{(x_1 \pm 1, x_2, x_3)\}$.

En el resto de caso de puntos mixtos se puede construir el conjunto de adyacencia de una manera análoga.

Al contrario que pasaba con el caso bidimensional, la adyacencia inducida por el espacio de Khalimsky K^3 sobre los puntos mixtos ya no coincide con ninguna de las adyacencias naturales definidas anteriormente sobre el reticulado \mathbb{Z}^3 .

■ Dimensiones $n > 3$

En la recta de Khalimsky encontramos dos tipos de puntos: abiertos y cerrados y ambos tienen los mismos conjunto de adyacencia. En el plano ya encontramos cuatro tipos como vimos en la definición 2.2.12, que clasificábamos en puros y mixtos. Para el espacio el número de tipos es ocho, también encasillados en puros y mixtos atendiendo al carácter abierto o cerrado (o, equivalentemente, a la paridad) de sus coordenadas.

En general, para el reticulado \mathbb{Z}^n , el n -espacio de Khalimsky K^n nos da 2^n tipos de puntos y define el siguiente conjunto de adyacencia para el punto $x \in \mathbb{Z}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ con x_1, \dots, x_m coordenadas impares y x_{m+1}, \dots, x_n coordenadas pares.

El abierto mínimo es

$$U_x = \{x_1\} \times \dots \times \{x_m\} \times \{x_{m+1} - 1, x_{m+1}, x_{m+1} + 1\} \times \dots \times \{x_n - 1, x_n, x_n + 1\},$$

y tiene 3^m elementos. Ahora,

$$\bar{x} = \{x_1 - 1, x_1, x_1 + 1\} \times \dots \times \{x_m - 1, x_m, x_m + 1\} \times \{x_{m+1}\} \times \dots \times \{x_n\},$$

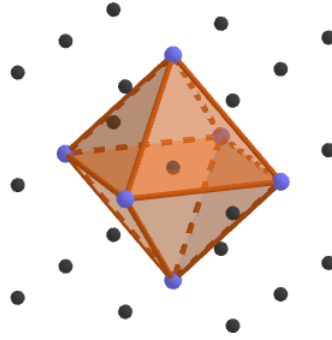
y tiene 3^{n-m} elementos. Por lo tanto, el conjunto de adyacencia

$$A_{K^n}(x) = (U_x \cup \bar{x}) - \{x\}$$

tiene $3^m + 3^{n-m} - 2$ elementos. En particular, para un punto $x \in \mathbb{Z}^n$ puro, $A_{\mathbb{Z}^n}(x)$ tendrá $3^n - 1$ elementos.

2.3. El problema de separación en \mathbb{Z}^3 y la noción de superficie discreta

Tomamos un ejemplo simple que extrapola a tres dimensiones el problema de la curva de Jordan en \mathbb{Z}^2 . Tenemos la siguiente superficie, creada a partir de la unión de puntos 26-adyacentes de \mathbb{Z}^3 :



Este conjunto de puntos de \mathbb{Z}^3 separa el retículo tridimensional en dos 6-componentes (pero su complemento tiene una única 18 o 26-componente). Una 6-componente está formada exclusivamente por el punto encerrado por la superficie, y la otra 6-componente la forman los puntos del reticulado en el exterior de la superficie. No obstante, ambas componentes se pueden conectar por medio de un 18 o 26-camino.

A la hora de buscar una solución al problema de separación de Jordan se debe establecer en primer lugar una noción de superficie discreta ya que, a diferencia de la curva, no hay una definición universalmente admitida de lo que es una superficie discreta en la topología aplicada al procesamiento de imágenes.

En 1979 A. Rosenfeld señaló en [9] el interés de usar el lenguaje de la topología en el análisis tratamiento de imágenes digitales, acuñando el término “topología digital”, destacando la necesidad de dar una respuesta coherente al problema de la curva de Jordan y la necesidad de una definición bien fundada y lo más general posible de superficie digital. Desde entonces, varias aproximaciones a la noción de superficie discreta se pueden encontrar en la literatura.

El primer test de consistencia de cualquier tentativa de definición de superficie digital es que el problema de separación tenga una respuesta afirmativa para las superficies así definidas.

Toda superficie digital divide el espacio reticulado en dos componentes conexas.

2.3.1. Uso de los pares de adyacencia en la solución del problema de separación en \mathbb{Z}^3

Entre las contribuciones a los problemas mencionados que tienen una literatura más extensa destacan las basadas en la extensión de la solución al problema de la curva de Jordan por medio de doble adyacencias.

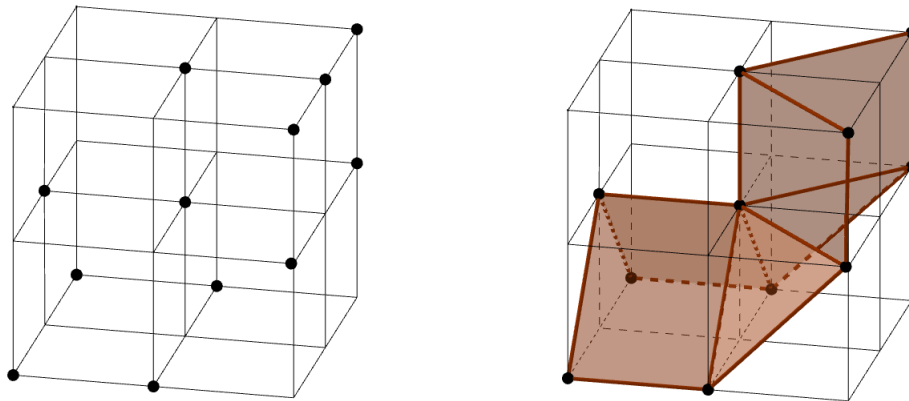
Definición 2.3.1. Dadas dos adyacencias $A, B \in \{6, 18, 26\}$, una (A, B) -adyacencia en el reticulado \mathbb{Z}^3 consiste en tener definidas las adyacencias A y B simultáneamente sobre el mismo de manera que para cualquier conjunto de puntos $M \subseteq \mathbb{Z}^3$, la conexión sobre M está definida como la A -conexión, mientras que en su complemento lo está por la B -conexión.

En 1981, Morgethaler y Rosenfeld en [8] propusieron una definición de $(26, 6)$ -superficies y $(6, 26)$ -superficies basada en tres axiomas. Esta definición fue extendida en 1985 por Kong y Roscoe a otros pares de adyacencia en [5]. Una definición de superficie digital que engloba las superficies en las referencias anteriores y otras familias de superficies propuestas posteriormente se puede encontrar en [3].

Todas estas tentativas se basan en dos pilares:

- Elegir adecuadamente una familia de posibles configuraciones de puntos de \mathbb{Z}^3 llamadas “placas” cuyos análogos continuos corresponden a discos poliedrales
- Establecer condiciones sobre el ensamblaje de placas que aseguren que aquellos conjuntos de puntos $S \subseteq \mathbb{Z}^3$ que se definen como superficies digitales sean descritos como placas ensambladas de tal manera que al ver esas placas como discos el resultado sea una superficie de \mathbb{R}^3 .

En la siguiente imagen vemos un ejemplo de parte de una superficie digital de acuerdo con la definición en [8].



Qué regiones son admisibles como placas lo determina un conjunto de axiomas que, por el problema de separación antes mencionado, da lugar a distintas familias de superficies según se elija una de las nueve posibles parejas de adyacencias que se puede formar con la 6, 18 y 26-adyacencia.

2.3.2. Uso de la topología de Khalimsky en la solución del problema de separación en \mathbb{Z}^3

Se puede extender el uso que se hizo de topología de Khalimsky en el caso de curvas en el reticulado \mathbb{Z}^2 a dimensiones superiores. En el siguiente capítulo se definen las superficies digitales de Khalimsky en \mathbb{Z}^3 y, mucho más generalmente, la noción de *variedad abstracta* de Khalimsky de dimensión arbitraria presentada por E. Melin en [7].

Capítulo 3

Variedades

En el capítulo 2 vimos que las nociones que se proponen en la literatura de superficie digital siempre son objetos S del reticulado \mathbb{Z}^3 que cumplen como primera condición un teorema de separación de Jordan: S divide a \mathbb{Z}^3 en dos componentes. También vimos que no es posible usar una sola adyacencia de la habituales del reticulado \mathbb{Z}^3 en la que basar la conexión tanto S como la de sus complementario $\mathbb{Z}^3 - S$. En lugar de eso, hay que especificar dos adyacencias, una para S y otra para $\mathbb{Z}^3 - S$. Este es el procedimiento habitual usado en la topología del análisis de imágenes o topología digital.

Ya adelantamos para las curvas la posibilidad de usar la topología de Khalimsky como alternativa a la aproximación anterior y enunciar un teorema de separación sólo con respecto a la conexión de la adyacencia definida por dicha topología. En este capítulo recopilamos parte del trabajo de Melin en [7], donde propone una definición de variedad abstracta de dimensión arbitraria que englobe las superficies del reticulado \mathbb{Z}^3 .

Comenzamos recordando que en topología, las variedades son aquellos espacios localmente equivalentes a los espacios euclídeos. Más precisamente, un espacio M se dice que es una *variedad topológica real n -dimensional* si es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . Esto es, existe un recubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in \Lambda}$ de M y para cada $i \in \Lambda$ un homeomorfismo $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, donde $\varphi_i(U_i)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . El par (U_i, φ_i) se denomina carta. El conjunto \mathcal{A} de todas las cartas se denomina atlas.

Si U_i y U_j tienen intersección no vacía, entonces el cambio de coordenadas

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

se convierte automáticamente en un homeomorfismo entre subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n . Si todos los cambios de coordenadas de un atlas \mathcal{A} son de clase C^k ($k \in \mathbb{N}$ o $k = \infty$), entonces el par (M, \mathcal{A}) es llamado variedad de clase C^k . Una *variedad diferenciable* es una variedad de clase C^∞ .

Al disponer para cada poset de un complejo simplicial asociado (el complejo de orden, definido en 1.7.13), podemos distinguir aquellos espacios cuyo complejo orden triangula a una variedad.

Definición 3.0.1. Una *A-variedad* es un A_0 -espacio X donde su análogo poliedral (1.7.16) es una variedad topológica.

Melin, en [7], no usa esta definición sino que trabajó directamente con la topología de Khalimsky para obtener una definición de variedad entre los A_0 -espacios. Antes de llegar a su propuesta definitiva de variedad, Melin hace dos aproximaciones y ve que estos dos primeros intentos presentan serias dificultades.

3.1. Variedades ingenuas de Khalimsky

Melin comienza con una definición aparentemente natural de variedad. Se llega, no obstante, a la conclusión de que esta definición va a ser insuficiente, pues acepta espacios demasiado generales como variedades y deja sin precisar la dimensión de las mismas.

Definición 3.1.1. Un espacio topológico numerable X es llamado *variedad ingenua de Khalimsky n -dimensional* si posee un recubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in \Lambda}$ donde cada U_i es homeomorfo a un subconjunto abierto del espacio de Khalimsky K^n .

Proposición 3.1.2. Toda variedad ingenua de Khalimsky X es un A_0 -espacio.

Demostración. Como cada U_i es homeomorfo a un abierto de K^n , cada U_i es un A_0 -espacio. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de abiertos de X . Entonces cada intersección $G_\alpha \cap U_i$ es un abierto de U_i (posiblemente vacío). Entonces

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (G_\alpha \cap X) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} (\bigcup_{i \in \Lambda} (G_\alpha \cap U_i)) = \bigcup_{i \in \Lambda} (\bigcap_{\alpha \in \Gamma} (G_\alpha \cap U_i)).$$

Como cada U_i es un A_0 -espacio, la intersección $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} (G_\alpha \cap U_i)$ es un abierto de U_i , y por tanto de X ya que U_i es abierto de X . Así pues, como la unión de abiertos es siempre abierto, $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ es abierto de X y así X es un A_0 -espacio.

□

Nota 3.1.3. Una variedad ingenua no tiene porqué ser un A_0 -espacio localmente finito. Ver ejemplo 3.1.5.

Ejemplo 3.1.4. La recta de Khalimsky K es una variedad ingenua de dimensión n para todo $n \geq 1$ pues, K es homeomorfa al conjunto $K \times \{1\}^{n-1}$, que, por ser un producto de abiertos de K , es abierto de K^n .

Con este primer ejemplo vemos que este primer intento de definición de variedad es poco consistente pues la dimensión no está unívocamente determinada por la variedad. Además no permiten una noción natural de curva como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.5. Sea J cualquier conjunto no vacío numerable de índices. Tomamos J copias del intervalo abierto de Khalimsky $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$ y las pegamos todas por el punto 1, como queda indicado en la figura 3.1. El espacio obtenido es conexo y está recubierto por J copias de $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$, donde cada copia es homeomorfa a un intervalo $[1, 3]_{\mathbb{Z}}$ de la línea Khalimsky y esto lo hace variedad ingenua. Pero el punto 1 es adyacente a $\text{card}(J)$ puntos. Si queremos pensar en una variedad de dimensión uno como una curva, debemos esperar que un punto no sea adyacente a más de dos puntos.

Además este ejemplo prueba que una variedad ingenua no tiene que ser un A_0 -espacio localmente finito pues el espacio descrito no lo es en el punto 1.

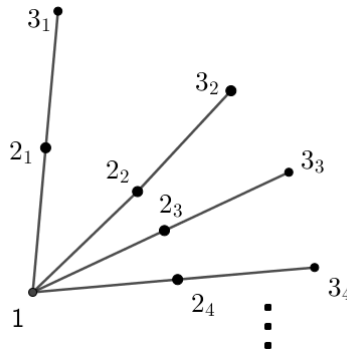


Figura 3.1: En la figura podemos ver como el punto 1 es adyacente a más de dos puntos, pese a ser una variedad ingenua de Khalimsky de dimensión 1.

3.2. Variedades estrictas de Khalimsky

Para evitar los ejemplos extraños de la sección previa, Melin propone una definición más restrictiva sin los problemas de adyacencia del ejemplo 3.1.5. No obstante, esta definición de variedad también resulta insuficiente debido a las excesivas restricciones que impone a un A_0 -espacio para ser variedad.

Definición 3.2.1. Un A_0 -espacio numerable X es llamado *variedad estricta Khalimsky n -dimensional* si para cada $x \in X$ se puede encontrar un punto $p \in K^n$ y un homeomorfismo $\psi : AN_X(x) \rightarrow AN_{K^n}(p)$ con $\psi(x) = p$.

Proposición 3.2.2. Toda variedad estricta Khalimsky X es una variedad ingenua Khalimsky.

Demostración. Suponemos una variedad estricta X . Por la definición 3.2.1 tenemos que $\psi(AN_X(x)) = AN_{K^n}(p)$, o sea $\psi(U_x \cup \overline{\{x\}}) = U_p \cup \overline{\{p\}}$. Es inmediato comprobar que el abierto mínimo de x en el A -espacio X coincide con el abierto mínimo en la topología restricción a $AN_X(x)$ y, análogamente, \overline{x} coincide con la clausura de x en $AN_X(x)$, por lo que al ser ψ homeomorfismo, $\psi(U_x) = U_p$ y $\psi(\overline{\{x\}}) = \overline{\{p\}}$. Podemos tomar el recubrimiento por abiertos $\{U_x\}_{x \in X}$ donde cada U_x del recubrimiento es homeomorfo a un abierto $U_p \subset K^n$. Concluimos entonces que X es variedad ingenua de Khalimsky. □

Nota 3.2.3. Observemos que a diferencia de las variedades ingenuas, las variedades estrictas de Khalimsky siempre son A_0 -espacios localmente finitos por la propia definición.

Nota 3.2.4. Los espacios de Khalimsky son, trivialmente, ejemplos de variedades estrictas de Khalimsky. Igualmente, las circunferencias de Khalimsky, definidas en 1.6.6 son variedades estrictas de Khalimsky.

Proposición 3.2.5. Una variedad estricta de Khalimsky tiene dimensión única.

Demostración. Para demostrar este resultado, supongamos que para algún punto $x \in X$ existen $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, puntos $p \in K^n$ y $q \in K^m$ y homeomorfismos $\psi : AN_X(x) \rightarrow AN_{K^n}(p)$ y $\varphi : AN_X(x) \rightarrow AN_{K^m}(q)$ con $\psi(x) = p$ y $\varphi(x) = q$. Entonces $f = \varphi^{-1} \circ \psi : AN_{K^n}(p) \rightarrow AN_{K^m}(q)$ es un homeomorfismo con $f(p) = q$. Veamos que esto no puede ocurrir.

Como se vio en la demostración de la proposición 3.2.2, tenemos que $f(U_p) = U_q$ y $f(\overline{\{p\}}) = \overline{\{q\}}$. Como $p \in K^n$ y $q \in K^m$ podemos escribir estos puntos como $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$. Entonces, por el lema 1.1.9 y la proposición 1.1.8 tenemos que $U_p = U_{p_1} \times \dots \times U_{p_n}$, $U_q = U_{q_1} \times \dots \times U_{q_m}$, $\overline{\{p\}} = \overline{\{p_1\}} \times \dots \times \overline{\{p_n\}}$ y $\overline{\{q\}} = \overline{\{q_1\}} \times \dots \times \overline{\{q_m\}}$. El cardinal de los productos $\overline{\{p_1\}} \times \dots \times \overline{\{p_n\}}$ y $\overline{\{q_1\}} \times \dots \times \overline{\{q_m\}}$ debe coincidir y para ello el número (digamos k) de conjuntos $\overline{\{q_i\}}$ con cardinal 3 debe ser menor o igual a n . Pero entonces el número de conjuntos U_{q_i} con cardinal 3 debe ser $m - k > n - k$ y por tanto $f(U_p)$ no puede ser biyectivo con U_q . Esto termina la demostración. □

3.2.1. Clasificación de variedades estrictas de Khalimsky de dimensiones 1 y 2

Aunque las variedades definidas por Melin no disponen de un espacio ambiente, siempre es posible usar el complejo orden para modelar una variedad discreta. De esta manera el complejo orden hará el papel del análogo continuo usado habitualmente en la topología digital (ver [3]). Más aún, tenemos el siguiente resultado que nos asegura la compatibilidad del complejo orden con la noción de variedad estricta de Khalimsky.

Teorema 3.2.6. Toda n -variedad estricta de Khalimsky X con $n \leq 2$ es una A-variedad de dimensión n .

Demostración. Obsérvese que por ser X una n -variedad estricta las cadenas maximales que contienen a cualquier $x \in X$ tienen longitud $n + 1$ pues dichas cadenas son cadenas en $\bar{x} \cup U_x = AN_x(X) \cong AN_p(K^n)$ para algún $p \in K^n$. Así pues la dimensión del complejo orden $\mathcal{O}(X)$ es n . Además, si $z \in |\mathcal{O}(X)|$ entonces $z \in \overset{\circ}{\sigma}$ para algún símplice $\sigma \in \mathcal{O}(X)$. Por definición, σ es una cadena en X .

Ahora nos reducimos al caso $n \leq 2$. Veamos los casos:

$\sigma = z$ Entonces z es vértice de $\mathcal{O}(X)$, por lo tanto es un elemento de X . Entonces $|st(z, \mathcal{O}(X))| = |\mathcal{O}(AN_X(z))|$ (proposición 2.2.9) es homeomorfa (de hecho por un isomorfismo simplicial) a $|\mathcal{O}(AN_{K^n}(p))| = |st(p, \mathcal{O}(K^n))|$ para algún $p \in K^n$. Como podemos ver en las figuras 3.2 y 3.3, $|\mathcal{O}(AN_{K^n}(p))|$ es homeomorfo a la bola B^n con p en su interior. Así pues z tiene un entorno homeomorfo a una bola de dimensión n y por lo tanto es un punto de variedad en $|\mathcal{O}(X)|$.

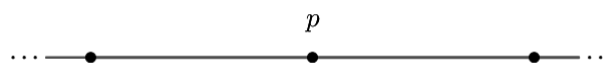


Figura 3.2: Tenemos en el centro de la imagen el punto $p = \psi(z)$. Vemos que localmente la línea de Khalimsky se comporta de igual forma para todos los puntos, pues para todo $p \in K$ tenemos que $AN(p) = \{p - 1, p, p + 1\}$. El entorno del punto p es homeomorfo a B^1 .

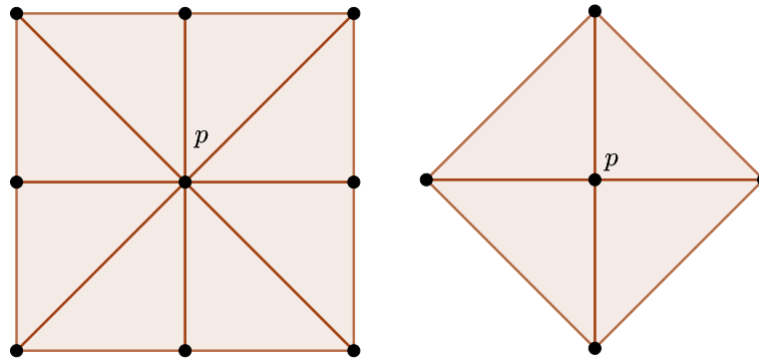


Figura 3.3: En este caso, a la izquierda tenemos representado el complejo de orden asociado a un punto puro $p = \psi(z)$ de K^2 . A la derecha el complejo de orden asociado a un punto mixto $p = \psi(z)$ de K^2 . En ambos casos, el entorno del punto central es homeomorfo a B^2 .

$\dim(\sigma) \geq 1$ Sea z_0 el punto mínimo de la cadena σ . Ahora tomando z_0 el papel de z en el apartado anterior, llegamos a que $|st(z_0, \mathcal{O}(X))|$ es homeomorfo por medio de un homeomorfismo ρ a una n -bola que, de hecho es un cono desde $q = \rho(z_0)$. Ahora $p = \rho(z)$ aparece en el interior de esa bola y tenemos que también es un punto de variedad en $|\mathcal{O}(X)|$. Lo representamos en las figuras 3.4 y 3.5.

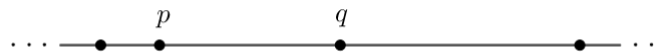


Figura 3.4: Tenemos en el centro de la imagen el punto $q = \rho(z_0)$. El punto $p = \rho(z)$ aparece en el interior de un segmento que tiene a q como vértice. El entorno del punto p es homeomorfo a B^1 .

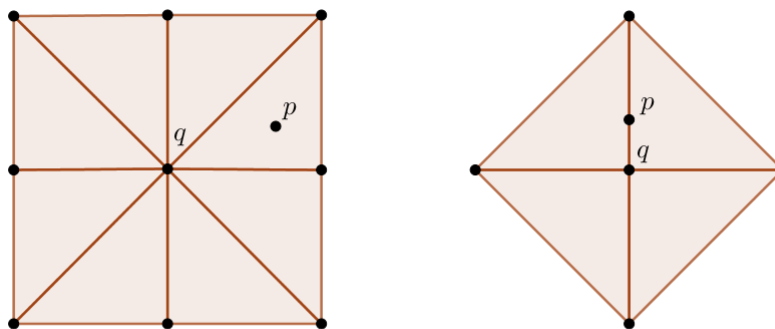


Figura 3.5: En este caso, a la izquierda tenemos representado el complejo de orden asociado a un punto puro $q = \rho(z_0)$ de K^2 . El punto $p = \rho(z)$ en ese caso lo hemos representado en el interior de un 2-símplice que tiene a q como uno de sus vértices. A la derecha el complejo de orden asociado a un punto mixto $q = \rho(z_0)$ de K^2 . El punto $p = \rho(z)$ lo vemos en este caso en el interior de un 1-símplice que tiene a q como uno de sus vértices. En ambos casos, el entorno de p es homeomorfo a la bola B^2 .

□

Nota 3.2.7. La demostración del teorema 3.2.6 se puede generalizar a una dimensión arbitraria n . No hacemos aquí la forma general para evitar la complicación de la estructura combinatoria de los conjuntos de adyacencias de K^n , de la que, no obstante, queremos hacer la siguiente observación tomada de [7]:

Toda n -variedad estricta de Khalimsky X se puede descomponer como una unión disjunta de conjuntos $X = \cup_{i=0}^n D_i$, donde $D_i \subseteq X$ denota el subconjunto de puntos de X cuyos entornos de proximidad son homeomorfos a los de puntos de K^n que tienen i coordenadas cerradas (coordenadas pares).

A partir de esta descomposición se puede asociar a X de un complejo celular $\mathcal{R}(X)$, como estructura combinatoria alternativa al complejo orden. Recordemos que un complejo celular es una colección \mathcal{C} de poliedros (llamados células) tales que cada $C \in \mathcal{C}$ es homeomorfo a una bola de cierta dimensión y además se cumple:

- el borde de cada $C \in \mathcal{C}$ es colección de células.
- dos células de \mathcal{C} se cortan en una célula de \mathcal{C} (posiblemente vacía).

El complejo celular $\mathcal{R}(X)$ está definido al tomar para cada $x \in D_n$ la n -célula $C_x = |\mathcal{O}(AN_X(x))|$. Para cada $x \in D_{n-1}$ tenemos la $(n-1)$ -célula $C_x = |\mathcal{O}(AN_X(y_x))| \cap |\mathcal{O}(AN_X(z_x))|$, donde y_x y z_x son los dos únicos elementos de D_n comparables con x ; esto es, $x \in AN_X(y_x) \cap AN_X(z_x)$.

En general, la i -célula asociada a $x \in D_i$ es la intersección

$$C_x = \bigcap_{y \in R(x)} |\mathcal{O}(AN_X(y))|, \text{ donde } R(x) = \{y \in D_n; x \in AN_X(y)\}.$$

Si $p = (p_1, \dots, p_n) \in K^n$ es un punto tal que $AN_X(x)$ es homeomorfo a $AN_{K^n}(p)$, la célula C_x es homeomorfa a $|AN_{K_p^n}(p)|$, siendo $K_p^n = L_1 \times \dots \times L_n$ el producto donde $L_i = \{p_i\}$ si p_i es impar y $L_i = K$ si p_i es par.

A partir de la definición se puede comprobar que las células de $\mathcal{R}(X)$ están trianguladas por subcomplejos de $\mathcal{O}(X)$.

Corolario 3.2.8. Toda 1-variedad estricta de Khalimsky conexa X es una circunferencia o una recta de Khalimsky.

Demostración. De acuerdo con el teorema 3.2.6, $V = |\mathcal{O}(X)|$ es una 1-variedad. Atendiendo a la clasificación de las 1-variedades topológicas, V es homeomorfo a S^1 o a \mathbb{R} .

- Supongamos que V es homeomorfo a S^1 y tomemos $x \in X$. Visto x como vértice de $\mathcal{O}(X)$, x tiene dos vértices y_1, z_1 con los que forman las dos aristas de $\mathcal{O}(X)$ incidentes en x . Por tanto x e y_1 forman una cadena en X . Supongamos $x < y_1$ (análogamente se razona si $y_1 < x$). Entonces $x < z_1$ también, pues en caso contrario, tendríamos la cadena $z_1 < x < y_1$ que daría lugar a un 2-símplice en $\mathcal{O}(X)$ (lo que es imposible pues estamos en dimensión 1). Ahora sustituimos x por y_1 en el razonamiento anterior y continuamos así hasta que por finitud de X llegamos a un punto w que comparte arista con z_1 ; esto es, w es comparable con z_1 . Necesariamente $w < z_1$ pues de lo contrario aparecería la cadena $x < z_1 < w$ en X . Esto demuestra que X es una circunferencia de Khalimsky.
- Supongamos que V es homeomorfo a \mathbb{R} , si empezamos también con $y_1 \geq x$, encontraríamos una secuencia de cadenas

$$\dots \geq y_{2n} \leq y_{2n-1} \geq y_{2n-2} \leq \dots \leq y_1 \geq x \leq z_1 \geq \dots \leq z_{2n-1} \geq z_{2n} \leq z_{2n+1} \geq \dots$$

que cubre todos los puntos de X . Así pues X es homeomorfo a la recta de Khalimsky.

□

Respecto a las 2-variedades estrictas, veamos a modo de ejemplo cómo construir el toro de Khalimsky.

Ejemplo 3.2.9. *El toro de Khalimsky*

Si hacemos el producto de dos circunferencias de Khalimsky obtenemos el *2-toro de Khalimsky*, $T_{m_1, m_2} = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$. El toro está parametrizado por dos enteros pares mayores que 2, pues son los cardinales posibles para las circunferencias de Khalimsky, como se observó en la definición 1.6.6.

Damos el ejemplo del 2-toro de Khalimsky $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$. Tomaremos la circunferencia de Khalimsky de longitud 4 por un lado, que la representamos en la siguiente imagen:

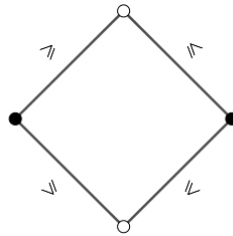


Figura 3.6: En esta circunferencia de Khalimsky hemos marcado los puntos abiertos en color blanco y los puntos cerrados en color negro.

Por otro lado, siguiendo el mismo procedimiento construimos la circunferencia de Khalimsky de longitud 8:

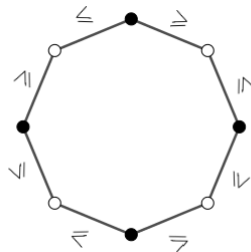


Figura 3.7: De nuevo hemos usado el color blanco para los puntos abiertos y el color negro los puntos cerrados.

Realizando el producto de estas dos circunferencias de Khalimsky, obtenemos el toro de Khalimsky $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$. A continuación representamos el alzado y el perfil del toro:

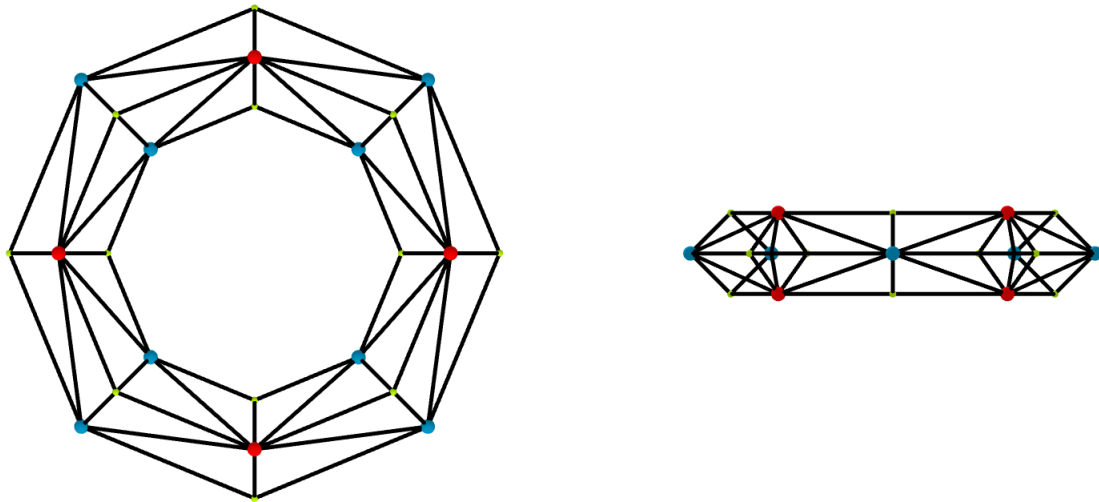
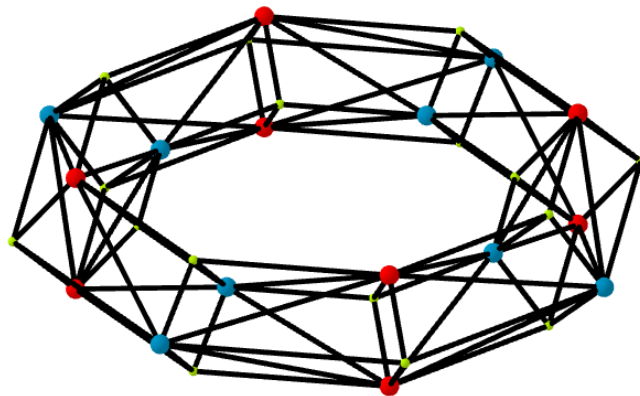


Figura 3.8: El toro de Khalimsky $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$. Los puntos cerrado-cerrado están marcados en rojo, los puntos abierto-abierto están marcados en azul y los puntos mixtos están marcados en verde.

Una vista general del toro de Khalimsky sería la siguiente:



Definición 3.2.10. La definición anterior se puede generalizar para cualquier n -tupla $m = (m_1, \dots, m_n) \in (2\mathbb{Z})^n$ donde $m_i \geq 4$ para cada $1 \leq i \leq n$. Definimos de esta forma el n -toro de Khalimsky, $T_m = \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.2.11. Para dos n -tuplas m y m' como en la Definición anterior, se tiene que T_m es homeomorfo a $T_{m'}$ si y sólo si $n = n'$ y las tuplas son iguales salvo orden de sus componentes.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [7]. No la añadimos por su extensión.

En ese mismo artículo, Melin estudió la construcción del complejo celular expuesto en la nota 3.2.7. Recordemos que las células de ese complejo estaban trianguladas por subcomplejos del complejo de orden de X .

Definición 3.2.12. Al complejo celular $\mathcal{R}(x)$ lo denominamos *análogo celular de Melin*.

De nuevo dejamos la versión general y nos concentramos en la dimensión 2.

Ejemplo 3.2.13. *Complejo celular $\mathcal{R}(K^2)$ del plano de Khalimsky*

En lo que sigue describiremos explícitamente el complejo celular $\mathcal{R}(K^2)$ del plano de Khalimsky. Recuperamos del capítulo anterior la representación de una porción de K^2 (extendible a todo el plano al ser éste simétrico con respecto a cualquiera de sus ejes), con sus respectivos órdenes:

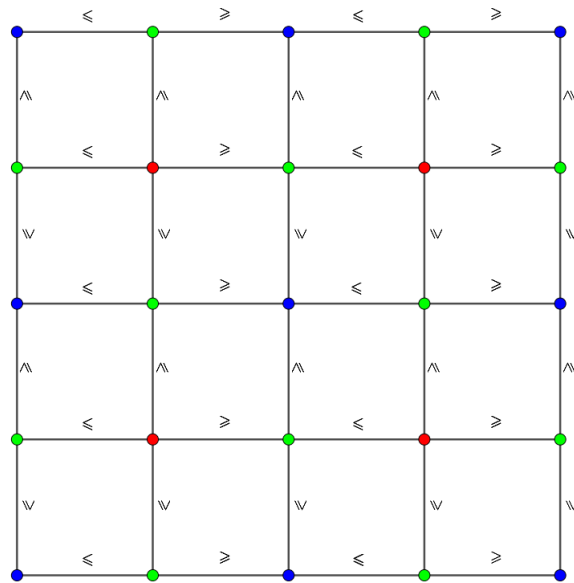


Figura 3.9: Los puntos azules representan los puntos *Abierto-Abierto*, los verdes los puntos *mixtos* y los rojos los puntos *Cerrado-Cerrado*

Mediante la definición de complejo de orden 1.7.13 obtenemos la siguiente porción del complejo simplicial asociado a \mathbb{Z}^2 , que ya representamos en 2.2.3 (obviamente, dicha porción del complejo es extendible a todo el plano, al ser también simétrica):

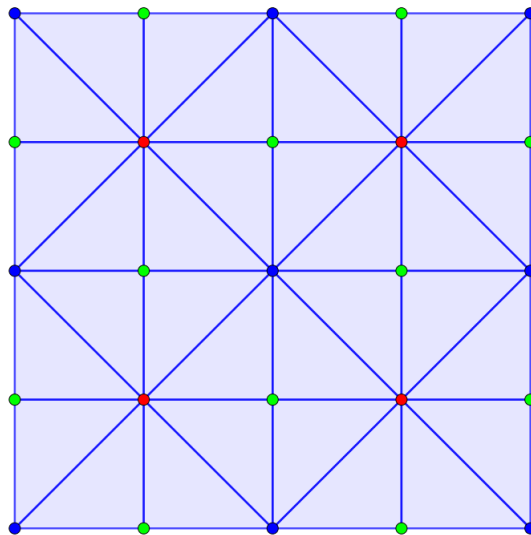


Figura 3.10: Este es un complejo simplicial de dimensión 2, cuyos vértices (0-símplices) son todos los puntos del plano de Khalimsky, sus 1-símplices son los segmentos que unen los puntos del plano y sus 2-símplices son los triángulos (representados junto con su interior en azul).

Atendiendo a la nota 3.2.7, vemos que K^2 se va a poder descomponer como unión disjunta de los siguientes conjuntos:

- D_0 es el conjunto de puntos de K^2 con 0 coordenadas pares, esto es, los puntos abiertos puros. Tomando de referencia la figura 3.9, vemos que su conjunto D_0 viene dado por los puntos azules.
- D_1 es el conjunto de puntos de K^2 con 1 coordenada par, esto es, los puntos mixtos. En la figura 3.9, D_1 viene dado por los puntos verdes.
- D_2 es el conjunto de puntos de K^2 con 2 coordenadas pares, o sea, puntos cerrados puros. En la figura 3.9, D_2 es el conjunto de puntos rojos.

Nos centramos en cada tipo de punto para describir como sería la célula asociada.

Tomamos primero $x_2 \in D_2$. Tenemos que para esta clase de puntos, cada célula viene dada por $C_{x_2} = |\mathcal{O}(AN_{K^2}(x_2))|$. Si nos fijamos en los puntos $x_1 \in D_1$, las células asociadas a este tipo de puntos vienen dadas por $C_{x_1} = |\mathcal{O}(AN_{K^2}(x_1^1))| \cap |\mathcal{O}(AN_{K^2}(x_1^2))|$ donde X_1^1 y X_1^2 son los dos únicos puntos de D_2 comparables con x_1 . Para los puntos $x_0 \in D_0$ tenemos que las células en estos puntos son $C_{x_0} = \cap_{\alpha_2} |\mathcal{O}(AN_{K^2}(\alpha_2))|$ donde α_2 son los únicos puntos de D_2 que pertenecen a $AN_{K^2}(x_0)$. Atendiendo a esta notación, damos una representación gráfica de la célula asociada a cada clase de punto (en color rojo):

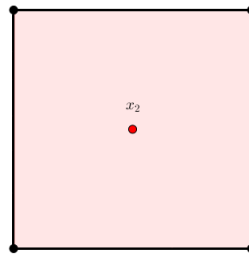


Figura 3.11: Célula asociada a los puntos pertenecientes a D_2 .

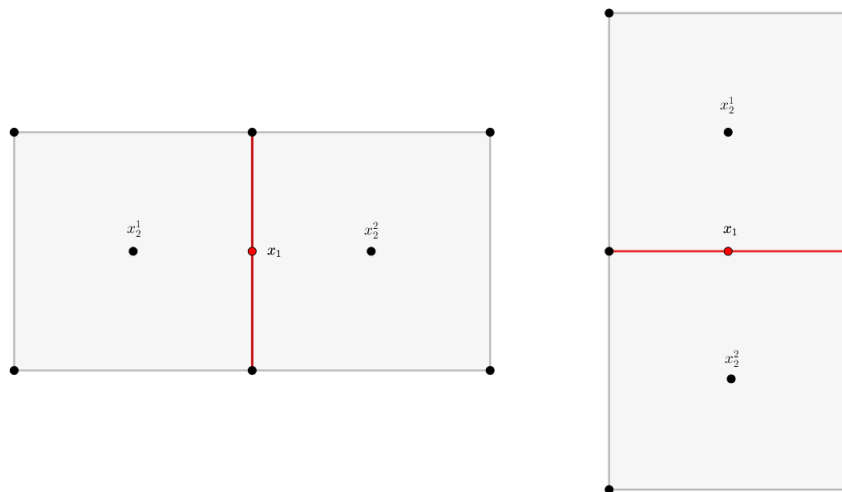


Figura 3.12: Célula asociada a los puntos pertenecientes a D_1 .

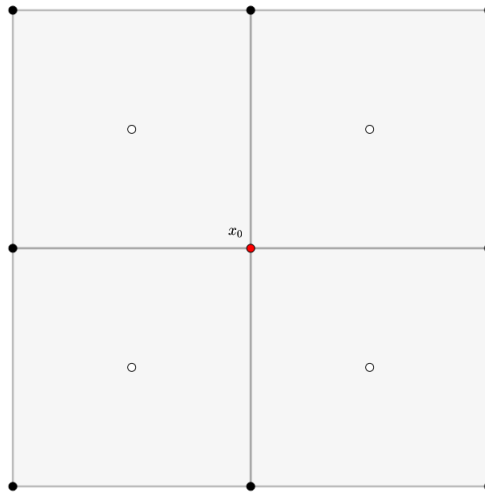
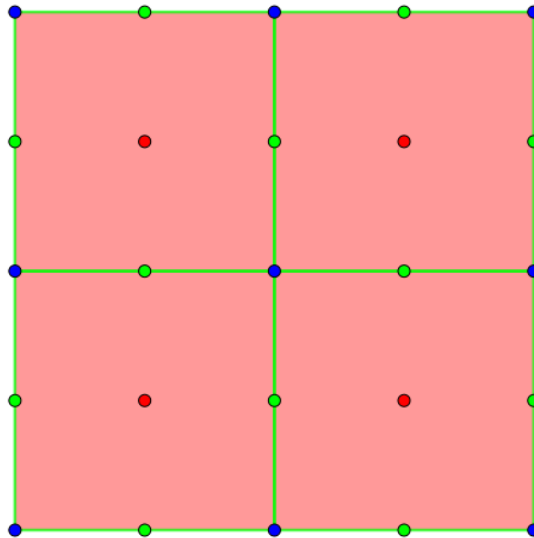


Figura 3.13: Célula asociada a los puntos pertenecientes a D_0 . Los puntos blancos representan los que antes hemos denotado como α_2 .

Plasmando todas estas células sobre K^2 podemos representar el análogo celular de Melin asociado al plano de Khalimsky (extendible a todo el plano). Distinguimos cada célula con diferentes colores, rojo para células de puntos pertenecientes a D_2 , verdes para células de puntos pertenecientes a D_1 y azules para células de puntos pertenecientes a D_0 :



Nota 3.2.14. El mismo patrón sigue el complejo celular $\mathcal{R}(X)$ para una 2-variedad estricta de Khalimsky. En efecto, por cada punto $x \in X$ en D_2 tenemos un cuadrado correspondiente homeomorfo a $AN_p(K^2)$ con p un punto cerrado puro. Si $x \in D_1$ entonces la célula C_x es la intersección de los dos cuadrados correspondientes a los puntos de D_2 comparables con x . Finalmente para $x \in D_0$, o sea los puntos abiertos puros, las células C_x son los vértices de los cuadrados con centro los cuatro puntos cerrados puros que le son X -adyacentes.

La característica de Euler en 2-variedades estrictas de Khalimsky

Al inicio de esta sección hemos comentado que esta definición de variedad era demasiado restrictiva. En este apartado veremos cómo las observaciones sobre el análogo celular de Melin hechas en 3.2.7 reducen los análogos poliedrales de las 2-variedades estrictas compactas a sólo dos posibles superficies. Para ello, usaremos la característica de Euler-Poincaré de la que recordamos la definición.

Definición 3.2.15. Sea P un poliedro descompuesto por un complejo celular \mathcal{C} . Entonces la característica de Euler-Poincaré de P es la suma alternada

$$\chi(P) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \alpha_i \text{ donde } \alpha_i \text{ es el número de } i\text{-células de } \mathcal{C}.$$

Es bien sabido que la característica de Euler-Poincaré de p sólo depende de la topología del poliedro y no del complejo celular \mathcal{C} .

Proposición 3.2.16. Sea X un espacio finito que es 2-variedad estricta de Khalimsky. Entonces $|\mathcal{O}(X)|$ es el toro o la botella de Klein.

Demostración. De acuerdo con la nota 3.2.14, $|\mathcal{O}(X)|$ puede descomponerse en un complejo celular de dimensión 2 cuyas 2-células tienen como centro los puntos cerrados puros, las aristas de éstas tienen a los puntos mixtos como sus centros y los vértices son los puntos abiertos puros. Además cada arista están en dos cuadrados y cada vértice pertenece a cuatro cuadrados.

De esta manera si n es el número de cuadrados, el número de aristas será $\frac{4n}{2} = 2n$ y el número de vértices es $\frac{4n}{4} = n$. Así pues, $\chi(|\mathcal{O}(X)|) = n - 2n + n = 0$.

Ahora bien, sabemos por el teorema 3.2.6 que $|\mathcal{O}(X)|$ es una superficie cerrada (compacta y sin borde). Del Teorema de Clasificación de Superficies se sabe que las únicas superficies cerradas con característica de Euler-Poincaré nula son el toro y la Botella de Klein.

□

Corolario 3.2.17. No existe la 2-esfera estricta de Khalimsky.

3.3. Variedades de Khalimsky

Después de la proposición 3.2.16, es natural buscar una definición más flexible que la de variedad estricta. Se observa que un candidato natural para una 2-esfera de Khalimsky es el conjunto de adyacencia de un punto puro en K^3 :

$$\{x \in K^3; \|x - p\|_{max} = 1\}.$$

Melin propone la siguiente definición que asegura que el ejemplo anterior de esfera es una superficie admisible.

Definición 3.3.1. Un A_0 -espacio X es llamado *variedad Khalimsky n -dimensional* o *n -variedad Khalimsky* si es numerable y para cada $x \in X$ existen un $p \in \mathbb{Z}^{n+1}$, un $q \in \mathcal{A}_{K^{n+1}}(p)$ y un homeomorfismo $\psi : AN_X(x) \rightarrow AN_{\mathcal{A}_{K^{n+1}}(p)}(q)$ con $\psi(x) = q$.

Ejemplo 3.3.2. Vemos en la siguiente figura el *doble toro*. Este objeto es una variedad de Khalimsky que no es variedad estricta de Khalimsky de acuerdo con la proposición 3.2.16. Si nos fijamos en el punto abierto de la esquina superior (llamémoslo q), no existe ningún $p \in K^2$ tal que $AN_{K^2}(p)$ sea homeomorfo a $AN_X(q)$ siendo X el doble toro.

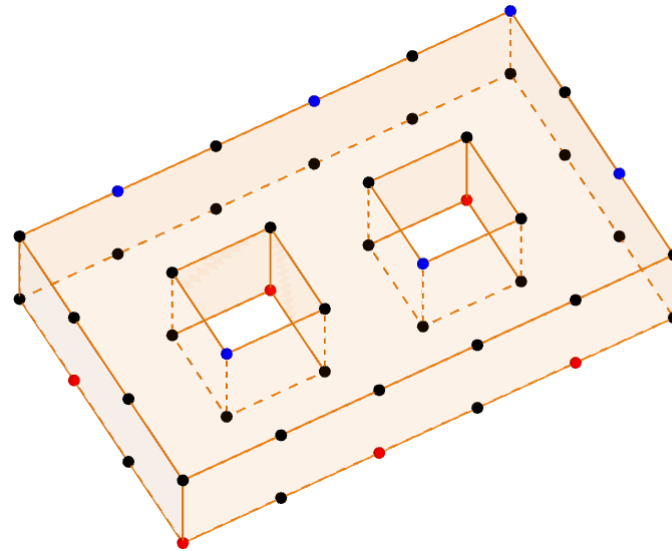


Figura 3.14: Representamos en rojo los puntos cerrados puros del doble toro, en azul los abiertos puros y en negro los puntos mixtos.

Proposición 3.3.3. Toda n -variedad estricta de Khalimsky es una n -variedad Khalimsky.

Demostración. La demostración en [7] usa una construcción para manejar la combinatoria en dimensiones arbitrarias que dejamos fuera de este trabajo y nos restringimos a las dimensiones $n \leq 2$.

$n = 1$ Sea $x \in X$ y $a \in K$ con $AN_X(x) \cong AN_K(a)$. Entonces si a es un punto abierto de K , $AN_K(a) = \bar{a} = \{b \geq a \leq c\}$ es homeomorfo a $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ para los puntos de K^2 , $p = (a, 1)$ (abierto puro) y $q = (a + 1, 1)$ (mixto). Si a es un punto cerrado de K , $AN_K(a) = U_a = \{b \geq a \leq c\}$ es homeomorfo a $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ para los puntos de K^2 , $p = (a, 0)$ (cerrado puro) y $q = (a + 1, 0)$ (mixto).

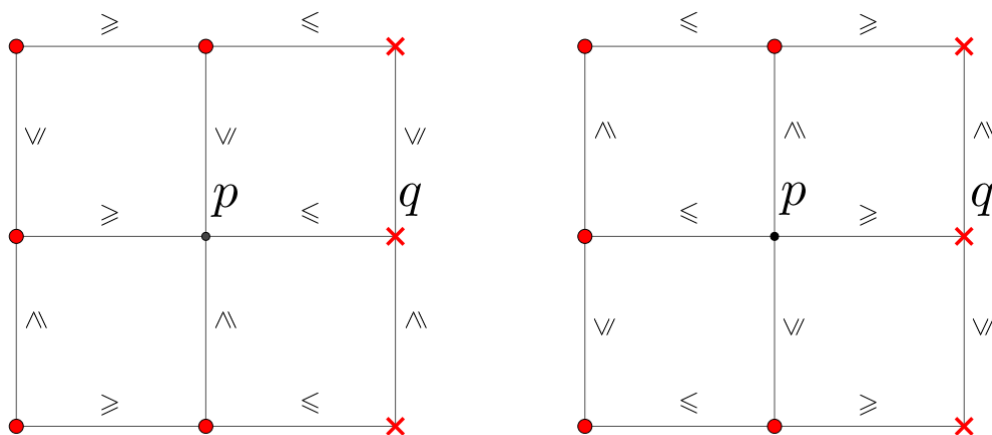


Figura 3.15: A la izquierda vemos el caso de a abierto de K y a la derecha el de a cerrado de K . Representamos en rojo los puntos de $\mathcal{A}(p)$ y notamos con una cruz los que además pertenecen a $AN_{K^2}(q)$, esto es, el conjunto $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$. Vemos claramente que este conjunto es homeomorfo a $AN_X(x) \cong AN_K(a)$.

$n = 2$ Sea $x \in X$ y $a = (a_1, a_2) \in K^2$ con $AN_X(x) \cong AN_{K^2}(a)$. Si a es un punto abierto

puro, $AN_{K^2}(a) = \bar{a}$ es homeomorfo a $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ para los puntos $p, q \in K^3$, con $p = (a_1, a_2, 1)$ (abierto puro) y $q = (a_1 + 1, a_2, 1)$ (mixto). Lo vemos representado en la figura 3.16.

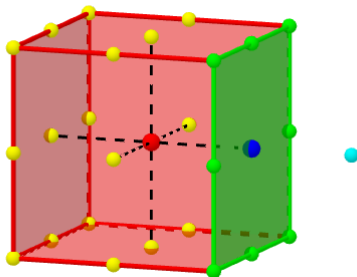


Figura 3.16: Los puntos rojo y azul corresponden a p y q respectivamente. Los puntos amarillos son los correspondientes a $AN_{K^3}(p)$ que no pertenecen a $AN_{K^3}(q)$. El punto celeste es (de manera análoga) el único punto de $AN_{K^3}(q)$ que no pertenece a $AN_{K^3}(p)$. Los puntos pertenecientes al cuadrilátero verde (los verdes y el punto azul q) indican los puntos de $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$. Es inmediato el homeomorfismo entre este conjunto y $AN_{K^2}(a) \cong AN_X(x)$. Las líneas negras discontinuas señalan los puntos 6-adyacentes a p , para dar una visión espacial a la figura.

Si a es un punto cerrado puro, p y q se eligen de manera análoga.

Si a es un punto mixto abierto-cerrado, entonces $AN_{K^2}(a) = \bar{a} \cup U_a$ es homeomorfo a $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ para los puntos $p, q \in K^3$ $p = (a_1, a_2, 1)$ y $q = (a_1 + 1, a_2, 1)$. Lo vemos en la figura 3.17.

Si a es un punto mixto cerrado-abierto entonces tenemos la situación anterior con $p = (a_1 + 1, a_2 + 1, 1)$ y $q = (a_1 + 2, a_2 + 1, 1)$. La figura es la misma que en el caso anterior.

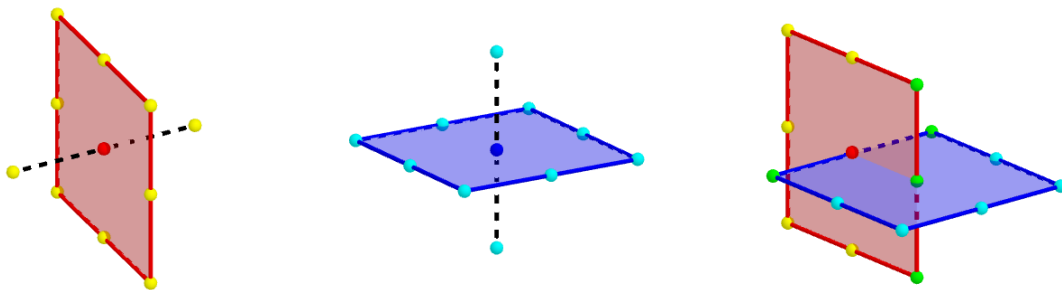


Figura 3.17: La primera figura representa el conjunto $AN_{K^3}(p)$ con los puntos de $\mathcal{A}(p)$ representados en amarillo y p en rojo. La segunda es análoga pero para q . En la tercera figura solapamos ambos conjuntos para ver que el conjunto $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ dispone de 5 puntos que son los puntos verdes (entre ellos el propio q). Es inmediato comprobar que existe un homeomorfismo entre estos 5 puntos y el conjunto $AN_{K^2}(a) \cong AN_X(x)$.

□

Nota 3.3.4. Como consecuencia de la demostración anterior también vemos que las 1-variedades son exactamente las 1-variedades estrictas pues, para todo punto $p \in K^2$, y todo $q \in \mathcal{A}(p)$, tenemos que $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ es homeomorfo $AN_K(z)$ para algún $z \in K$. Si tomamos p un punto mixto, tenemos que todo $q \in \mathcal{A}(p)$ va a ser un punto puro y siempre tendremos que $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ va a ser un conjunto formado por tres puntos. Dicho conjunto va a ser homeomorfo a $AN_K(x)$ para todo $x \in K$. Ahora, si p es un punto puro hay dos opciones:

- La primera opción es que $q \in \mathcal{A}(p)$ sea mixto. En este caso tendremos uno de los puntos 4-adyacentes con p . Deducimos entonces que $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ estará formada por tres puntos y podremos establecer un homeomorfismo con $AN_K(x)$ para todo $x \in K$. En la figura 3.15 podemos ver dos ejemplos de este caso.
- La segunda opción es que $q \in \mathcal{A}(p)$ sea puro. En este caso tendremos un punto diagonal de los 8-adyacentes. De nuevo se tiene que el conjunto $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ estará formado por tres puntos y podremos establecer un homeomorfismo con $AN_K(x)$ para todo $x \in K$. Los vemos en la figura 3.18.

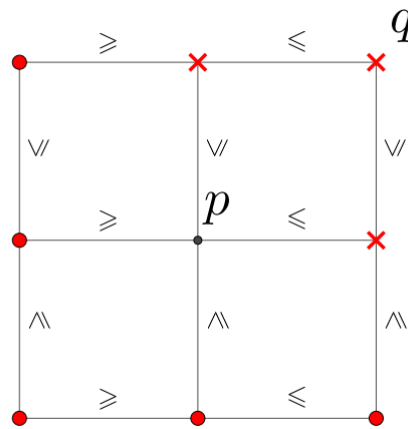


Figura 3.18: Vemos el caso en el que p es un abierto puro. Los puntos de $\mathcal{A}(p)$ los señalamos en rojo y los de $AN_{\mathcal{A}(p)}(q)$ vienen representados además con una cruz. El caso en el que p es cerrado puro es análogo.

Lema 3.3.5. Para todo $p \in K^n$, $|\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))|$ es homeomorfo a la esfera S^{n-1} . Más aún la estrella de cada vértice de $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$ es homeomorfa a la bola B^{n-1} .

Demostración. Evitamos la demostración general y nos limitamos al caso $n \leq 3$.

Para $n = 1$ es inmediato pues $\mathcal{A}(p)$ se reduce a los puntos $\{p - 1, p + 1\}$.

Para $n = 2$ distinguimos dos casos:

- Para un punto mixto $p \in K^2$, $\mathcal{A}(p)$ estará formado por cuatro puntos, que denominamos y_1, y_2, y_3, y_4 . En ambos tipos de puntos (abierto-cerrado y cerrado-abierto) obtendremos una circunferencia de Khalimsky de longitud 4 (en uno de ellos tendremos $y_1 > y_2 < y_3 > y_4 < y_1$ y en el otro $y_1 < y_2 > y_3 < y_4 > y_1$) que vemos en la figura 3.19. Tendremos entonces que $|\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))|$ será homeomorfo a S^1 .
- Para un punto puro $p \in K^2$ obtenemos la circunferencia de Khalimsky que representamos en la figura 3.19. Por lo tanto deducimos que en este caso obtenemos también que $|\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))|$ será homeomorfo a S^1 .

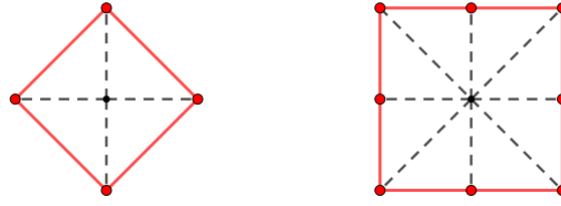


Figura 3.19: A la izquierda, la circunferencia de Khalimsky asociada a un punto mixto. A la derecha la circunferencia de Khalimsky asociada a un punto puro. Además en ambos casos vemos que si tomamos un entorno de cualquiera de los puntos señalados en rojo (vértices de $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$) dicho entorno es homeomorfo a B^1 .

Para $n = 3$ tenemos que $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$ va a tener como vértices los puntos correspondientes al borde de un cubo para un punto p puro y los puntos correspondientes al cono sobre el borde un cuadrado para p mixto. Lo representamos en la siguiente imagen.

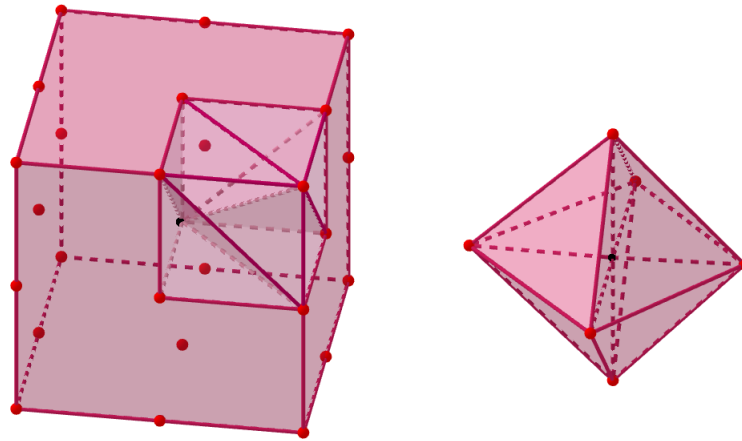


Figura 3.20: A la izquierda, $|\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))|$ con p puro. A la derecha, $|\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))|$ con p mixto. En ambos casos el punto p está marcado en negro. Si tomamos la estrella en $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$ de cualquiera de los puntos señalados en rojo (vértices de $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$) vemos que dicha estrella es homeomorfa a B^2 . Representamos en una porción del cubo la triangulación correspondiente al conjunto de adyacencia de un punto p puro en K^3 .

□

Al igual que demostramos para las variedades estrictas de Khalimsky, vemos mediante el siguiente resultado que las variedades de Khalimsky también son A-variedades:

Teorema 3.3.6. Toda n -variedad de Khalimsky X es una A-variedad.

Demostración. Igual que hicimos en la proposición 3.3.3, aquí sólo haremos la demostración de manera rigurosa para el caso $n \leq 2$.

En cualquier dimensión, por la proposición 2.2.9 para todo $x \in X$ tenemos un homeomorfismo

$$st(x, \mathcal{O}(X)) = \mathcal{O}(AN_X(x)) \cong \mathcal{O}(AN_{\mathcal{A}(p)}(q)) = st(q, \mathcal{O}(AN_{\mathcal{A}(p)}(q))) \text{ con } p \in K^{n+1}, q \in \mathcal{A}(p).$$

Sea ahora $z \in |\mathcal{O}(X)|$ cualquier punto. Existe un s3mplice $\sigma \in \mathcal{O}(X)$ que contiene a z en su interior.

Estudiamos los dos casos siguientes:

$\sigma = z$ Esto es, z es v3rtice de $\mathcal{O}(X)$ (o un elemento de X). Entonces, el poliedro $|st(z, \mathcal{O}(X))|$ es homeomorfo a $|st(q, \mathcal{O}(AN_{\mathcal{A}(p)}(q)))|$ para alg3un $p \in K^{n+1}$ y $q \in \mathcal{A}(p)$. Por el lema 3.3.5 esta estrella es homeomorfa a la bola B^n con q en su interior. As3i pues z tiene un entorno homeomorfo a una bola con el punto correspondiente a z en su interior y z es un punto de variedad en $|\mathcal{O}(X)|$. Eso ocurre en tomando cualquiera de los puntos rojos de las figuras 3.19, 3.20. Vemos que en el caso de la figura 3.19 su entorno va a ser homeomorfo a la bola B^1 y en el caso de la figura 3.20 su entorno va a ser homeomorfo a la bola B^2 .

$\dim \sigma \geq 1$ Sea z_0 el punto m3nimo de la cadena σ . Ahora tomando z_0 el papel de z en el apartado anterior y de nuevo por el lema 3.3.5, llegamos a que $|st(z_0, \mathcal{O}(X))|$ es homeomorfo (de hecho simplicialmente isomorfo) a una n -bola que es un cono desde el punto imagen de z_0 . Como todos los v3rtices del s3mplice σ salvo z_0 est3n en el borde de la bola, se sigue que z aparece en el interior de esa bola y tenemos que tambi3n es un punto de variedad en $|\mathcal{O}(X)|$.

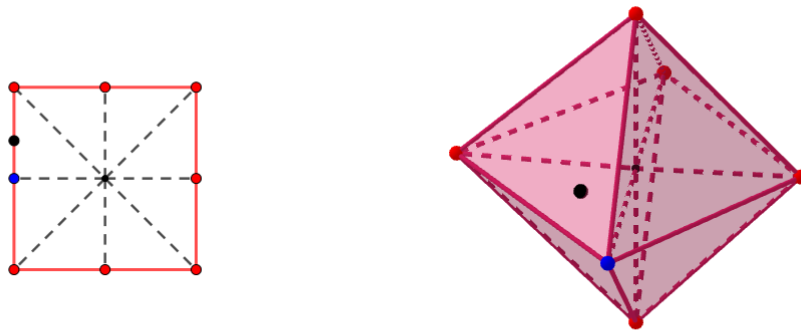


Figura 3.21: El punto imagen de z_0 est3 indicado en azul en ambas figuras. El punto imagen de z lo representamos en color negro. A la izquierda (caso $n = 1$), el punto negro est3 en el interior de una arista de la estrella del azul en $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p)) \subseteq \mathbb{Z}^2$. A la derecha (caso $n = 2$) aparece en el interior de un tri3ngulo de la estrella del azul en $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p)) \subseteq \mathbb{Z}^3$

□

Nota 3.3.7. Los puntos mixtos para $n = 2, 3$ tienen todas las mismas caracter3sticas: para $n = 2$ tiene una coordenada de cada paridad, para $n = 3$ dos coordenadas son de una paridad y la otra de paridad distinta. Sin embargo para $n = 4$ tenemos ya dos tipos de puntos mixtos aquellos que tienen tres coordenadas con la misma paridad y una distinta o aquellos con dos coordenadas de la misma paridad y otras dos con la otra paridad. Con la notaci3n usada en el curso de Homolog3a Simplicial, para los puntos mixtos del primer tipo tenemos que $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$ es la suspensi3n de las paredes de un cubo (correspondiente al conjunto de adyacencia de las tres coordenadas de la misma paridad) y para los puntos del segundo tipo $\mathcal{O}(\mathcal{A}(p))$ es la uni3n

simplicial de dos copias del perímetro de un cuadrado (uno por cada par de coordenadas con la misma paridad).

Como contribución al estudio de las variedades de Khalimsky por Melin, damos el siguiente teorema de separación.

Teorema 3.3.8. Toda $(n - 1)$ -variedad de Khalimsky $X \subseteq K^n$ que sea conexa respecto a su adyacencia (o, equivalentemente, la A_{K^n} -adyacencia) separa a K^n en dos A_{K^n} -componentes.

Demostración. No damos los detalles, sólo indicar que se pueden seguir los pasos del teorema 2.2.13 ya que $\mathcal{O}(K^n)$ es una triangulación de \mathbb{R}^n que consiste en hacer conos en orden creciente de dimensión desde el centro de cada cara de los cubos que define el reticulado Z^n .

Por la proposición 1.7.17 la A_{K^n} -conexión es la conexión por aristas en $\mathcal{O}(K^n)$, que es equivalente a la conexión en $\mathbb{R}^n = |\mathcal{O}(K^n)|$. Más aún, por la proposición 1.7.18, el número de componentes conexas de $\mathbb{R}^n - |\mathcal{O}(X)|$ es igual al número de A_{K^n} -componentes de $K^n - X$.

Ahora, por el teorema 3.3.6, $|\mathcal{O}(X)|$ es una $(n - 1)$ -variedad a la que podemos aplicar el teorema de Jordan-Brouwer clásico de topología y $\mathbb{R}^n - |\mathcal{O}(X)|$ tiene dos componentes, luego $K^n - X$ tiene también dos A_{K^n} -componentes. □

Es fácil encontrar ejemplos de A-superficies que no sean superficies de Khalimsky ya que la definición de éstas restringe mucho el cardinal de los entornos de adyacencia de los puntos.

Ejemplo 3.3.9. En el teorema 3.3.3 hemos visto que toda variedad estricta de Khalimsky es una A-variedad. El siguiente ejemplo muestra que el recíproco no es cierto en general.

Sea K la triangulación usual del toro que representamos en la figura 3.22.

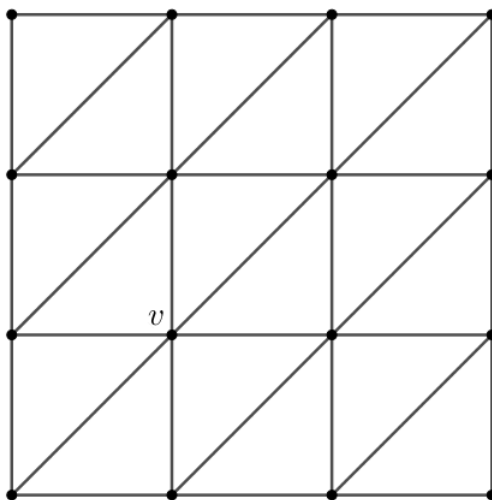


Figura 3.22: Triangulación del toro.

Como ya se vio en la nota 1.7.14 tenemos que el complejo orden del poset asociado a K , $X = (\mathcal{X}(K), \leq)$ (con “ \leq ” la relación de ser cara), se corresponde con la subdivisión baricéntrica de K , ver la figura 3.23.

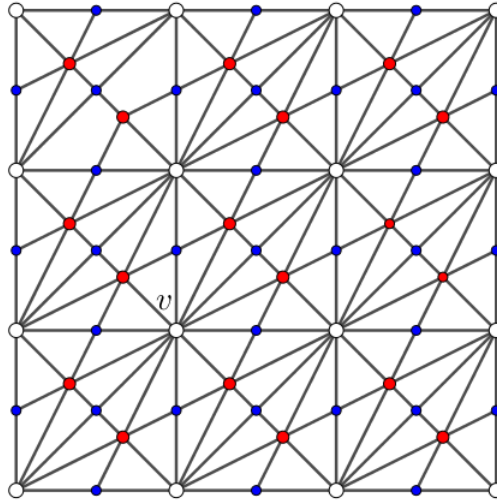


Figura 3.23: Los vértices rojos representan los 2-simplices, los vértices azules los 1-simplices y los vértices blancos los 0-simplices (vértices) de K .

Si nos fijamos en v tenemos que su conjunto de adyacencia $\mathcal{A}_X(v)$ contiene 12 puntos correspondientes a los simplices de K que contienen a v ; esto es, los vértices del engarce de v en sdK . Sin embargo, no existen puntos $p \in K^3$ y $q \in \mathcal{A}(p)$ tales que $AN_{\mathcal{A}(p)}(q) \cong AN_X(v)$ ya que los posibles cardinales del conjunto de adyacencia de q en $\mathcal{A}(p)$ son 4, 6 y 8 si p es puro y 4 y 8 si p es mixto.

Por tanto, X es una A-superficie ($|\mathcal{O}(X)| = |sdK| = |K|$ es el toro) que no es variedad de Khalimsky.

3.4. Notas finales

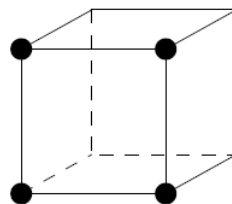
1. (El Tutor) Como ya se ha dicho, los resultados 3.2.6, 3.3.3, 3.3.5 y 3.3.6 admiten una demostración para dimensiones arbitrarias, pero hemos limitado el trabajo a introducir el uso del complejo orden en el tratamiento de Melin de la noción de variedad en la clase de los A_0 -espacios y en especial en los espacios finitos sin usar en exceso herramientas de la Topología Combinatoria.
2. Aunque las variedades de Khalimsky (y, en particular, las superficies de Khalimsky) han sido definidas por Melin de manera abstracta, el mismo autor prueba el siguiente teorema de inmersión:

Toda variedad de Khalimsky es homeomorfa a un subespacio de algún espacio de Khalimsky.

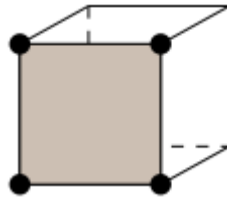
No conocemos referencia en la literatura que demuestre que toda superficie de Khalimsky orientable se pueda representar en K^3 .

3. En topología digital los vóxeles son cubos formando un reticulado de \mathbb{R}^3 , y las adyacencias entre ellos se mide por la intersección; esto es, los vóxeles σ y τ son 6-adyacentes si $\dim(\sigma \cap \tau) = 2$, 18-adyacentes si $\dim(\sigma \cap \tau) \geq 1$ y 26-adyacentes si $\dim(\sigma \cap \tau) \geq 0$.

De esta manera es habitual representar los vóxeles como vértices de un nuevo reticulado R donde la adyacencia entre dos vértices se mide según su posición relativa: 6-adyacentes si comparten una arista de un cubo de R , 18-adyacentes si comparten una cara y 26-adyacentes si están en el mismo cubo de R . Se podría dotar a R de la topología de Khalimsky y esperar que el llamado análogo continuo de una superficie digital S definida en R por medio de placas para un par de adyacencias dado fuese el complejo orden de S como A -espacio. Eso no es así pues por ejemplo, la siguiente configuración de vóxeles en R está permitida en una (26,6)-superficie de Kong-Roscoe en [5], pero el complejo orden de esa configuración es un cuadrado.



Es por ello que se debe subdividir el reticulado original para hacer aparecer los puntos medios las aristas, caras y cubos de R . Si este nuevo reticulado R' se identifica con el espacio de Khalimsky K^3 ya no tenemos el problema anterior. Lo que ocurre es que los puntos medios que se han introducido para construir R' no son vóxeles y por tanto no aparecen en las superficies digitales. Entonces, la configuración anterior corresponde a un conjunto de K^3 que sólo contiene los puntos indicados, que no están relacionados. Sin embargo, si se hace que todos los puntos de la antigua cara estén en nuestro conjunto de K^3 entonces aparece una placa permitida.



Esto ocurre de manera análoga con las otras configuraciones y placas permitidas en las $(26,6)$ -superficies de Kong-Roscoe.

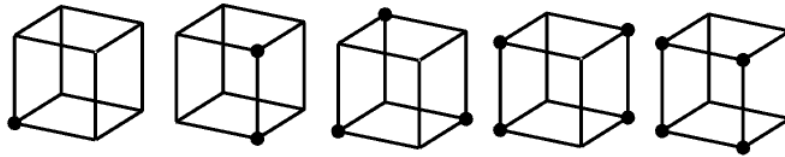


Figura 3.24: Configuraciones permitidas en las $(26,6)$ -superficies de Kong-Roscoe.

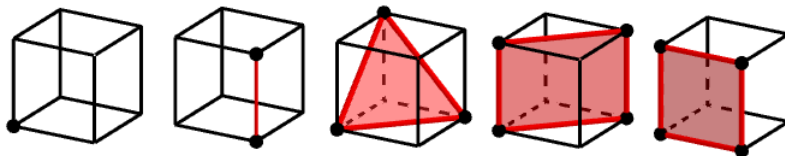


Figura 3.25: Vértices, aristas y placas asociadas a las configuraciones permitidas en las $(26,6)$ -superficies de Kong-Roscoe, salvo rotaciones y reflexiones.

El argumento anterior probaría que toda $(26,6)$ -superficie de Kong-Roscoe se puede ver como una superficie de Khalimsky.

No conocemos ninguna referencia donde las distintas clases de superficies digitales (por ejemplo las recogidas en [3]) hayan sido comparadas con las superficies de Khalimsky.

Bibliografía

- [1] P.S. Alexandroff. Diskrete Raume. Math. Sbornik, 2(1937), 501-519.
- [2] J.A. Barmak. Algebraic topology of finite topological spaces and applications. Lecture Notes Math., vol. 2032. Springer. 2011.
- [3] J.C. Ciria, E. Domínguez, A. R. Francés, A. Quintero. Universal spaces for (k, \bar{k}) -surfaces. DGCI'09: Proceedings of the 15th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery (385–396). 1996.
- [4] E.D. Khalimsky, R. Kopperman, P. R. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. Topol. Its Appl. 36(1990), 1-17.
- [5] T.Y. Kong, A.W. Roscoe. Continuous analogs of axiomatized digital surfaces. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 29(1985), 60-86.
- [6] J.P. May. Finite topological spaces. Notes for REU. 2003. <http://www.math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf>.
- [7] E. Melin. Digital Khalimsky Manifolds. J. Math. Imaging and Vision 33(2009), 267-280.
- [8] D.G. Morgenthaler, A. Rosenfeld. Surfaces in three-dimensional digital images. Information and Control, 51(1981), 227-247.
- [9] A. Rosenfeld. Digital Topology. The American Mathematical Monthly, 86(1979), 621-630.
- [10] A.W. Tucker. Cell spaces. Ann. of Math., 37(1936), 92-100.