



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y ANÁLISIS NUMÉRICO

**MÉTODOS MULTIPASO PARA LA  
APROXIMACIÓN DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES ORDINARIAS.  
MODELIZACIÓN DE PROBLEMAS RELATIVOS  
AL ATLETISMO.**

Antonio David Moreno López

---

Dirigido por:

Macarena Gómez Mármol  
Samuele Rubino



# Abstract

This work addresses numerical approximation of ordinary differential equations by means of multistep methods, with application to the modelling of problems related to athletics. The work consists essentially of two parts. In the first part we will study multistep methods for numerical resolution of ordinary differential equations and their most important numerical properties, focusing on Adams methods. In the second part we will perform a mathematical modeling for predicting race times that could be applied to different athletics competitions, based on energy considerations. We will use the numerical resolution techniques seen in the first part to approximate the solution of the developed race model and we will perform simulations of athletics competitions.

# Resumen

El presente trabajo aborda la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante métodos multipaso, con aplicación a la modelización de problemas relativos al atletismo. El trabajo consta esencialmente de dos partes. En la primera parte estudiaremos en profundidad métodos multipaso para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y sus propiedades numéricas más importantes, centrándonos en los métodos de Adams. En la segunda parte realizaremos una modelización de carrera que nos sirva para poder aplicarla a distintas competiciones del atletismo, basada en consideraciones energéticas. Como aplicación, usaremos las técnicas de resolución numérica vistas en la primera parte para aproximar la solución del modelo de carrera desarrollado y realizar simulaciones de competiciones del atletismo.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Conceptos y resultados teóricos básicos</b>	<b>9</b>
2.1. Interpolación de Lagrange . . . . .	9
2.2. Lema de Gronwall . . . . .	11
2.3. Teorema del punto fijo . . . . .	12
<b>3. Resultado teórico principal:</b>	
<b>Los métodos de Adams</b>	<b>13</b>
3.1. Descripción de los métodos de Adams . . . . .	14
3.1.1. El método de Adams-Bashforth de $(r+1)$ pasos . . . . .	14
3.1.2. El método de Adams-Moulton de $(r+1)$ pasos . . . . .	17
3.2. Estabilidad, orden y convergencia de los métodos de Adams . . . . .	22
3.3. Estimación del error de discretización . . . . .	26
3.4. Métodos predictor-corrector . . . . .	28
3.5. Estudio de los métodos <i>PECE</i> . . . . .	29
<b>4. Desarrollo y modelización de carrera</b>	<b>33</b>
4.1. Introducción . . . . .	33
4.2. Estudio de modelos de carrera . . . . .	34
4.2.1. Métodos basados en la segunda ley de Newton . . . . .	34
4.2.2. Métodos basados en consideraciones energéticas . . . . .	36
4.3. Modelo basado en balances energéticos . . . . .	37
4.3.1. Ecuaciones básicas de energía y potencia . . . . .	37
4.3.2. La energía necesaria para correr . . . . .	38
4.3.3. La cinética de la conversión de energía química . . . . .	38
4.3.4. Ecuaciones finales de la potencia y la energía de un atleta . . . . .	42
4.3.5. Distinción para carreras largas y cortas . . . . .	42
4.3.6. El efecto de una curva . . . . .	44
4.3.7. Cálculo del tiempo necesario para ejecutar una carrera . . . . .	45
<b>5. Simulación numérica</b>	<b>47</b>
5.1. Test académicos . . . . .	48
5.2. Test aplicados . . . . .	52
5.2.1. Estimación de parámetros . . . . .	52
5.2.2. Aplicación de los métodos al objeto de estudio . . . . .	53
5.2.3. Simulación de carreras de los Juegos Olímpicos . . . . .	55

5.2.4.	Influencia del término de curvatura . . . . .	57
5.2.5.	Observaciones . . . . .	62

# Capítulo 1

## Introducción

El número de ecuaciones diferenciales ordinarias a las que sabemos darle una expresión de su solución exacta es demasiado limitado, sólo se conocen algunos métodos para determinadas ecuaciones que cumplen una serie de condiciones. Para dar una solución a otras ecuaciones de las que no se conocen solución exacta utilizamos técnicas de resolución numérica, con las que dada una partición de la variable independiente somos capaces de obtener un valor aproximado de la solución en cada punto de esta partición. Estas técnicas son de gran importancia, debido a que la gran mayoría de procesos físicos, mecánicos o biológicos se rigen por ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales de los cuales no conocemos su solución exacta.

El estudio de estos métodos durante el grado en matemáticas se limita prácticamente al conocimiento de métodos en los que para conocer el valor aproximado en un punto de la partición sólo es necesario conocer el valor en el punto anterior (métodos de un paso). Sabemos que existen otros métodos, conocidos como métodos multipaso, que usan la información de un mayor número de puntos.

El objetivo de este trabajo es la ampliación de conocimientos en técnicas multipaso de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y su posterior puesta en práctica, centrándonos en los métodos de Adams.

*La descripción de los capítulos es la siguiente:*

El capítulo 2 es un breve recordatorio de algunas nociones básicas sobre los polinomios de interpolación de Lagrange, del lema de Gronwall y del teorema de Punto Fijo.

El capítulo 3 está dedicado al análisis numérico de métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este se describen los métodos de Adams-Bashforth y de Adams Moulton, se muestran sus diferencias y se analizan sus propiedades más importantes, como la estabilidad, el orden y la convergencia. Además, proporcionaremos una estimación a priori del error de discretización. Para terminar el capítulo describiremos los métodos predictor-corrector, centrándonos en los métodos *PECE*.

En el capítulo 4 realizaremos una recopilación de los estudios realizados hasta el momento para modelizar la estimación del tiempo necesario para ejecutar una carrera. Acto seguido, plantearemos un modelo matemático que pretenda simular la estrategia seguida por el atleta para obtener un tiempo óptimo.

Para finalizar el trabajo, en el capítulo 5 se realizará en primer lugar una simulación numérica de una ecuación diferencial con solución conocida para verificar los métodos de resolución numérica que vamos a utilizar. Tras esto, simularemos numéricamente una serie de competiciones de la rama del atletismo usando el modelo obtenido en el capítulo anterior, y compararemos los resultados obtenidos con estudios anteriores y con resultados reales de los Juegos Olímpicos comprendidos entre los años 1960 y 1976. Por último, compararemos el modelo de Keller basado en la segunda ley de Newton con el obtenido usando balances energéticos, y se discutirá la influencia que tiene introducir en el modelo un término que haga referencia a la curvatura en carreras de trayectoria no rectilínea.

# Capítulo 2

## Conceptos y resultados teóricos básicos

En este capítulo presentamos algunos resultados básicos y herramientas necesarias en el desarrollo del trabajo. En primer lugar, recordemos la interpolación de Lagrange, componente básica para la construcción de los métodos de Adams. A continuación presentamos un lema de Gronwall discreto que nos permitirá estudiar la estabilidad de los métodos numéricos y por último un Teorema de Punto Fijo que utilizaremos para demostrar que los métodos implícitos están bien definidos.

### 2.1. Interpolación de Lagrange

**Definición 2.1.1 (Polinomio de interpolación de Lagrange)** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función y  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   $n + 1$  puntos distintos del intervalo  $[a, b]$ . Se define el polinomio de interpolación de Lagrange como el único polinomio de grado  $n$  que verifica:

$$\forall i = 0, 1, \dots, n, \quad p_n(x_i) = f(x_i)$$

Este polinomio se escribe:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \tag{2.1.1}$$

donde

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

#### Observación

Este polinomio de Lagrange puede obtenerse de distintas maneras. En nuestro caso vamos a utilizar la fórmula de Newton que desarrollamos a continuación.

Denotando como  $p_k$  al polinomio de interpolación de Lagrange en los puntos  $x_0, \dots, x_k$  para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , queremos construir  $p_n$ , polinomio de interpolación para  $x_0, \dots, x_n$ .

En primer lugar,

$$p_0(x) = f(x_0)$$

Para cada  $k$ , el polinomio  $p_k - p_{k-1}$  es de grado  $k$  y se anula en los puntos  $x_0, \dots, x_{k-1}$ , por tanto es de la forma

$$(p_k - p_{k-1})(x) = f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) \quad (2.1.2)$$

donde  $f[x_0, \dots, x_k]$  simboliza el coeficiente de  $x^k$  en  $p_k(x)$ . Deducimos por recurrencia que la expresión del polinomio de interpolación  $p_n$  en los puntos  $x_0, \dots, x_n$  viene dada por

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}) \quad (2.1.3)$$

y se denomina **forma de Newton del polinomio de interpolación**  $p_n$ . A continuación vamos a ver un resultado que nos proporciona cómo calcular los coeficientes.

### Lema 2.1.2

$$\forall k \geq 1, \quad f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (2.1.4)$$

y

$$f[x_i] = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

### Demostración

Denotamos, para  $k \geq 1$ ,  $p_{k-1}^*$  el polinomio de interpolación de  $f$  de grado  $k-1$  en los puntos  $x_1, \dots, x_k$ ; su coeficiente líder es  $f[x_1, \dots, x_k]$ .

Definimos  $q_k$  como el polinomio de grado  $k$ :

$$q_k(x) = \frac{(x - x_0)p_{k-1}^*(x) - (x - x_k)p_{k-1}(x)}{x_k - x_0}$$

$q_k$  es un polinomio de grado  $k$  que coincide con  $f$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k$ , por la unicidad del polinomio de interpolación se deduce que  $q_k(x) = p_k(x)$ . La fórmula (2.1.4) viene de identificar los coeficientes de  $x^k$  en los dos miembros.  $\square$

La recurrencia que proporciona el lema (2.1.2) es válida para  $x_0, x_1, \dots, x_k$  puntos distintos. A continuación vamos a calcular estos coeficientes para el caso particular en que los puntos son equidistantes, es decir,  $x_i = x_0 + ih$  con  $h$  una constante.

Definimos el **operador de diferencias finitas progresivas** como:

$$\begin{aligned} \nabla^0 f_i &= f(x_i) = f_i \\ \nabla f_i &= f(x_{i+1}) - f(x_i) \\ \nabla^{k+1} f_i &= \nabla(\nabla^k f_i) = \nabla^k f_{i+1} - \nabla^k f_i \end{aligned}$$

Usando el lema (2.1.2) se verifica que

$$\nabla^k f_i = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] k! h^k$$

Utilizando esta expresión y el cambio de variable  $s = \frac{x - x_0}{h}$  vamos a calcular la forma de Newton (2.1.3) del polinomio de interpolación  $p_n$  de grado  $n$  de  $f$  en los puntos  $x_0, \dots, x_n$ .

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})f[x_0, \dots, x_k] = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!} \nabla^k f_0$$

y así,

$$p_n(x) = f_0 + \frac{s}{1!} \nabla f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \nabla^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} \nabla^n f_0.$$

Por tanto,

$$p_n(x) = f_0 + \binom{s}{1} \nabla f_0 + \binom{s}{2} \nabla^2 f_0 + \dots + \binom{s}{n} \nabla^n f_0 \quad (2.1.5)$$

donde

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

Esta ecuación es conocida como la **fórmula de Newton progresiva**.

Análogamente, vamos a definir el **operador de diferencias finitas regresivas** como

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^0 f_i &= f(x_i) = f_i \\ \bar{\nabla} f_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}) \\ \bar{\nabla}^{k+1} f_i &= \bar{\nabla}(\bar{\nabla}^k f_i) = \bar{\nabla}^k f_i - \bar{\nabla}^k f_{i-1} \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $s = \frac{x - x_n}{h}$ , obtenemos la siguiente expresión de  $p_n(x)$

$$p_n(x) = f_n + \frac{s}{1!} \bar{\nabla} f_n + \frac{s(s+1)}{2!} \bar{\nabla}^2 f_n + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} \bar{\nabla}^n f_n,$$

que podemos escribir de la forma

$$p_n(x) = f_n + \binom{s}{1} \bar{\nabla} f_n + \binom{s+1}{2} \bar{\nabla}^2 f_n + \dots + \binom{s+n-1}{n} \bar{\nabla}^n f_n \quad (2.1.6)$$

donde

$$s = \frac{x - x_n}{h}$$

A esta expresión se la denomina como **fórmula de Newton regresiva**.

## 2.2. Lema de Gronwall

**Lema 2.2.1 (Gronwall discreto)** Sea  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < T = t_N\}$  una partición del intervalo  $[0, T]$  y denotamos por  $h_n = t_{n+1} - t_n$ ,  $\forall n = 0, \dots, N-1$ . Consideramos  $\{\theta_n\}_{n=0}^N$  y  $\{\alpha_n\}_{n=0}^N$  dos sucesiones reales no negativas que satisfacen:

$$\theta_{n+1} \leq (1 + h_n L) \theta_n + \alpha_n, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1$$

donde  $L$  es una constante positiva.

Entonces,

$$\theta_n \leq e^{L(t_n - t_0)} \theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_{i+1} - t_i)} \alpha_i, \quad \forall n = 0, 1, \dots, N$$

**Demostración**

Sea  $n$  un entero cualquiera entre 0 y  $N - 1$ , entonces por recurrencia tenemos que

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &\leq (1 + h_n L)\theta_n + \alpha_n \leq (1 + h_n L)((1 + h_{n-1} L)\theta_{n-1} + \alpha_{n-1}) + \alpha_n = \\ &= (1 + h_n L)(1 + h_{n-1} L)\theta_{n-1} + (1 + h_{n-1} L)\alpha_{n-1} + \alpha_n \leq \\ &\leq (1 + h_n L)(1 + h_{n-1} L)(1 + h_{n-2} L)\theta_{n-2} + (1 + h_{n-2} L)\alpha_{n-2} + (1 + h_{n-1} L)\alpha_{n-1} + \alpha_n \leq \\ &\leq \dots \leq \prod_{i=0}^n (1 + h_i L)\theta_0 + \sum_{i=0}^n (1 + h_i L)\alpha_i\end{aligned}$$

Gracias a la desigualdad  $(1 + x) \leq e^x \forall x \in \mathbb{R}$ , tenemos que:

$$\prod_{i=0}^n (1 + h_i L) \leq \prod_{i=0}^n e^{h_i L} = e^{\sum_{i=0}^n h_i L} = e^{L(t_{n+1} - t_0)}$$

Utilizando de nuevo la desigualdad para el segundo sumando obtenemos:

$$\sum_{i=0}^n (1 + h_i L)\alpha_i \leq \sum_{i=0}^n e^{h_i L}\alpha_i = \sum_{i=0}^n e^{L(t_{i+1} - t_i)}\alpha_i$$

luego:

$$\theta_{n+1} \leq e^{L(t_{n+1} - t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^n e^{L(t_{i+1} - t_i)}\alpha_i \quad \forall n = 0, \dots, N - 1$$

Por tanto

$$\theta_n \leq e^{L(t_n - t_0)}\theta_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L(t_{i+1} - t_i)}\alpha_i \quad \forall n = 1, \dots, N$$

Para  $n = 0$  también es cierta ya que

$$\theta_0 \leq e^{L(t_0 - t_0)}\theta_0$$

En consecuencia, el resultado es cierto  $\forall n = 0, \dots, N$ . □

**2.3. Teorema del punto fijo**

**Teorema 2.3.1 (Teorema del punto fijo de Banach)** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva. Bajo estas condiciones, existe un único punto fijo de  $T$ , es decir, existe un único  $x \in X$  tal que  $Tx = x$ .*

**Nota**

La demostración de este teorema fue estudiada en la asignatura de *Cálculo Numérico I*.

# Capítulo 3

## Resultado teórico principal: Los métodos de Adams

Como ya mencionamos en la introducción nuestro objetivo es la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Los métodos estudiados en la asignatura de *Análisis Numérico de las Ecuaciones Diferenciales* proporcionan el valor aproximado  $y_{n+1}$  de la solución de un problema de valor inicial en el punto  $t_{n+1}$  a partir de otro valor aproximado  $y_n$  de la solución en el punto  $t_n$ . Estos métodos constituyen los llamados métodos de un paso. Para obtener  $y_{n+1}$  se han tenido que calcular previamente los valores aproximados de la solución en los puntos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ . Parece entonces razonable desarrollar métodos numéricos que aprovechen la información obtenida en etapas anteriores para obtener el valor aproximado  $y_{n+1}$ . Se obtienen de esta forma los llamados métodos multipaso para la resolución numérica de ecuaciones o sistemas diferenciales ordinarios. Dentro de esta familia de métodos nos centramos en los métodos de Adams, que constituyen el objetivo de estudio de este capítulo.

En este capítulo vamos a describir los métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton para nodos no equidistantes, seguido del estudio de su estabilidad, orden y convergencia. Los métodos de Adams-Moulton resultan más precisos y más estables que los métodos de Adams-Bashforth, pero requieren la resolución de una ecuación (generalmente no lineal) a cada paso, ya que se tratan de métodos implícitos. La resolución de esta ecuación puede realizarse mediante un método iterativo, tomando como valor inicial de la iteración un valor dado por el método de Adams-Bashforth. Así podemos llevar el método iterativo a cabo, o limitarnos a una iteración. En este último caso obtenemos un nuevo esquema llamado esquema predictor-corrector.

### 3.1. Descripción de los métodos de Adams

Consideramos el problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = \eta \end{cases} \quad (3.1.1)$$

donde la función  $f \in \mathcal{C}^0([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^m)$  es lipschitziana respecto a la segunda variable, es decir,  $\exists L > 0$  tal que

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad \forall y, z \in \mathbb{R}^m, \quad |f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad (3.1.2)$$

Vamos a tomar una partición del intervalo  $[t_0, t_0 + T]$  de la siguiente manera:  $[t_0, t_0 + T] = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T\}$  y denotamos por  $h_n = t_{n+1} - t_n$ .

Integrando la ecuación de (3.1.1) entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$  obtenemos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (3.1.3)$$

Los métodos de Adams se obtienen utilizando una fórmula de cuadratura de tipo inter-

polatorio para aproximar  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt$ , es decir,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \simeq \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_k(t) dt$$

donde  $P_k(t)$  es un polinomio de interpolación de grado  $k$  de la función  $f$ .

En primer lugar, vamos a deducir el método de Adams-Bashforth de  $(r + 1)$  pasos.

#### 3.1.1. El método de Adams-Bashforth de $(r+1)$ pasos

Sea  $r$  un entero no negativo fijo y supongamos que conocemos el valor aproximado  $y_n$  de  $y(t_n)$ , así como los valores  $f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n-r}$  definidos por  $f_k = f(t_k, y_k)$ ,  $\forall k = n-r, \dots, n$ . Sea  $P_{n,r}$  el único polinomio de Lagrange de grado  $\leq r$  que satisface:

$$\forall i = 0, 1, \dots, r \quad P_{n,r}(t_{n-i}) = f_{n-i}$$

El método de Adams-Bashforth se obtiene entonces como:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} P_{n,r}(t) dt \quad (3.1.4)$$

Ahora bien, el polinomio  $P_{n,r}$  se puede escribir según la interpolación de Lagrange (2.1.1) como:

$$P_{n,r} = \sum_{i=0}^r f_{n-i} L_{n,i,r}(t)$$

siendo

$$L_{n,i,r}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r \frac{t-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}}$$

Denotando como

$$b_{n,i,r} = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,i,r}(t) dt \quad (3.1.5)$$

el esquema de Adams-Bashforth de  $(r+1)$  pasos es el siguiente:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i,r} f_{n-i}, \quad \forall n \geq r \quad (3.1.6)$$

### Observaciones

1. Si  $r = 0$ , el método obtenido es conocido como método de Euler (método explícito y de un paso).
2. El método obtenido es un método explícito para todo  $r$ .
3. Para poder empezar a aplicar el método es necesario conocer los valores  $y_0, y_1, \dots, y_r$ . Estos valores reciben el nombre de **valores iniciales**, los cuales pueden ser obtenidos mediante otro método, por ejemplo mediante algún método de un paso.
4. Si  $h_n = h_{n-1} = \dots = h_{n-r}$  entonces los coeficientes  $b_{n,i,r}$  no dependen de  $n$ . Concretamente, si llamamos

$$l_{i,r}(s) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r \frac{s+j}{j-i}$$

obtenemos mediante el cambio de variable que

$$\bar{b}_{i,r} = b_{n,i,r} = \int_0^1 l_{i,r}(s) ds \quad (3.1.7)$$

Por otro lado, si utilizamos la fórmula de Newton regresiva (2.1.6) se tiene que

$$P_{n,r}(t) = \sum_{i=0}^r \binom{s+i-1}{i} \bar{\nabla}^i f_n \quad \text{con } s = \frac{t-t_n}{h_n}$$

y por tanto

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=0}^r \gamma_i \bar{\nabla}^i f_n \quad (3.1.8)$$

con

$$\gamma_i = \int_0^1 \frac{s(s+1)\dots(s+i-1)}{i!} ds > 0$$

Estos coeficientes  $\gamma_i$  pueden ser calculados mediante la recurrencia:

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \gamma_i = 1 - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\gamma_j}{(i+1-j)}, \quad \forall i \geq 1 \end{cases}$$

Para obtener esta ley de recurrencia se utiliza el desarrollo de Taylor respecto de  $t$  de la función

$$G(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i = \frac{-t}{(1-t)\log(1-t)}$$

Una vez conocidos los valores  $\gamma_i$  y utilizando (3.1.6) y (3.1.8) podemos deducir los valores de  $\bar{b}_{i,r}$ , mediante las expresiones:

$$\bar{b}_{r,r} = (-1)^r \gamma_r, \quad \bar{b}_{i,r} = \bar{b}_{i,r-1} + (-1)^i \binom{r}{i} \gamma_r, \quad 0 \leq i < r \quad (3.1.9)$$

Con este resultado obtenemos la siguiente tabla

Tabla 3.1: Coeficientes para Adams-Bashforth con paso constante.

A-B	$\bar{b}_{0,r}$	$\bar{b}_{1,r}$	$\bar{b}_{2,r}$	$\bar{b}_{3,r}$	$\bar{b}_{4,r}$	$\gamma_r$	$\alpha = \sum_i  \bar{b}_{i,r} $
$r = 0$	1	-	-	-	-	1	1
$r = 1$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-	-	-	$\frac{1}{2}$	2
$r = 2$	$\frac{23}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	-	-	$\frac{5}{12}$	3.66...
$r = 3$	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{3}{8}$	-	$\frac{3}{8}$	6.66..
$r = 4$	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{1387}{360}$	$\frac{109}{30}$	$-\frac{637}{360}$	$\frac{251}{720}$	$\frac{251}{720}$	12.24...

A continuación vamos a deducir los métodos de Adams-Moulton de  $(r + 1)$  pasos.

### 3.1.2. El método de Adams-Moulton de $(r+1)$ pasos

La técnica para la deducción de estos métodos es la misma que la utilizada para Adams-Bashforth con la diferencia de que en este caso vamos a utilizar también en la interpolación el punto  $t_{n+1}$ . En consecuencia, vamos a generar métodos implícitos.

Suponemos como antes que conocemos los valores aproximados  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-r}$  y sea  $Q_{n,r}$  el polinomio de interpolación de grado  $(r + 1)$  que satisface:

$$\begin{aligned} Q_{n,r}(t_{n-i}) &= f_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, r \\ Q_{n,r}(t_{n+1}) &= f_{n+1} \end{aligned}$$

El polinomio  $Q_{n,r}$  se escribe en su forma de Lagrange como

$$Q_{n,r} = \sum_{i=-1}^r f_{n-i} L_{n+1,i+1,r+1}(t)$$

Denotando como

$$\begin{aligned} b_{n,i,r}^* &= \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n+1,i+1,r+1}(t) dt \\ b_{n,r}^* &= b_{n,-1,r}^* \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

el **esquema de Adams-Moulton** es el siguiente

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i,r}^* f_{n-i}, \quad \forall n \geq r} \quad (3.1.11)$$

La ecuación (3.1.11) también puede escribirse como

$$y_{n+1} - h_n b_{n,r}^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i,r}^* f_{n-i}. \quad (3.1.12)$$

Podemos observar que la ecuación (3.1.12) es una ecuación implícita en  $y_{n+1}$  que no tiene por qué tener solución, y en el caso de tenerla debe ser única. Nos ocupamos en primer lugar de ver cuándo el método de Adams-Moulton está bien definido, es decir, cuando la ecuación posee una única solución.

**Lema 3.1.1 (Unicidad y existencia de solución)** *Bajo la hipótesis  $h_n |b_{n,r}^*| L < 1$ , la ecuación (3.1.12) admite una única solución.*

#### Demostración

Consideremos  $\Phi_n : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$z \longrightarrow \Phi_n(z) = h_n b_{n,r}^* f(t_{n+1}, z) + y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i,r}^* f_{n-i}$$

La ecuación (3.1.12) posee una única solución si  $\Phi_n$  admite un único punto fijo. Para ello, vamos a utilizar el teorema de Punto Fijo (2.3.1); como espacio  $X$  elegimos  $\mathbb{R}^m$  con la distancia asociada a la norma euclídea, que es un espacio métrico completo. Entonces si  $\Phi_n$  es contractiva tenemos que la ecuación posee una única solución. En efecto, sean  $y, z \in \mathbb{R}^m$  cualesquiera,

$$|\Phi_n(y) - \Phi_n(z)| = h_n b_{n,r}^* |f(t_{n+1}, y) - f(t_{n+1}, z)| \leq h_n b_{n,r}^* L |y - z|$$

En consecuencia, tenemos que el método está bien definido si  $h_n |b_{n,r}^*| L < 1$   $\square$

A partir de ahora vamos a suponer que la hipótesis del lema (3.1.1) siempre se verifica. Así, el esquema de Adams-Moulton (3.1.11) define de manera única las aproximaciones a partir de los valores iniciales  $y_0, \dots, y_r$ .

### Observaciones

1. Si  $r = -1$  se obtiene el método de Euler Implícito,  $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$ .
2. Todos los métodos de Adams-Moulton son implícitos.
3. En el caso de  $r = 0$  la ecuación (3.1.11) pasa a ser  $y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} (f_n + f_{n+1})$ . Este método es conocido como Euler Mejorado, método de Crank-Nicolson o método de Runge Kutta asociado al siguiente tablero de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ \hline & 0,5 & 0,5 \end{array}$$

Como en los métodos de Adams-Bashforth, en el caso de que  $h_n = h_{n-1} = \dots = h_{n-r}$  los coeficientes  $b_{n,i,r}^*$  son independientes de  $n$ . De hecho, tenemos que

$$\bar{b}_{i,r}^* = b_{n,i,r}^* = \int_{-1}^0 l_{i+1,r+1}(s) ds \quad (3.1.13)$$

y aplicando diferencias finitas llegamos a la siguiente expresión

$$Q_{n,r}(t) = \sum_{i=0}^{r+1} \binom{s+i-1}{i} \bar{\nabla}^i f_{n+1} \quad \text{con } s = \frac{t - t_{n+1}}{h_n}$$

Por tanto,

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=0}^{r+1} \gamma_i^* \bar{\nabla}^i f_{n+1} \quad (3.1.14)$$

donde  $\gamma_0^* = 1$  y  $\gamma_i^* = \int_{-1}^0 \frac{s(s+1)\dots(s+i-1)}{i!} ds < 0$  para  $i \geq 1$ .

Al igual que en el caso de los métodos de Adams-Bashforth, estos coeficientes pueden ser obtenidos mediante una recurrencia, que se obtiene de nuevo mediante la serie Taylor respecto de  $t$  de la función

$$G^*(t) = (1 - t)G(t)$$

donde  $G(t)$  es la función generatriz asociada a los coeficientes de Adams-Bashforth.

En este caso, se obtiene la siguiente relación entre los coeficientes  $\bar{b}_{i,r}^*$  y  $\gamma_r^*$ :

$$\bar{b}_{r,r}^* = (-1)^{r+1}\gamma_{r+1}^*, \quad \bar{b}_{i,r}^* = \bar{b}_{i,r-1}^* + (-1)^{i+1} \binom{r+1}{i+1} \gamma_{r+1}^* \quad (3.1.15)$$

Obtenemos así la siguiente tabla

Tabla 3.2: Coeficientes para Adams-Moulton con paso constante.

A-M	$\bar{b}_{-1,r}^*$	$\bar{b}_{0,r}^*$	$\bar{b}_{1,r}^*$	$\bar{b}_{2,r}^*$	$\bar{b}_{3,r}^*$	$\bar{b}_{4,r}^*$	$\gamma_r^*$	$\alpha = \sum_i  \bar{b}_{i,r}^* $
$r = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	-	-	-	1	1
$r = 1$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$	-	-	-	$-\frac{1}{2}$	1.16...
$r = 2$	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	-	-	$-\frac{1}{12}$	1.41...
$r = 3$	$\frac{251}{720}$	$\frac{323}{360}$	$-\frac{11}{30}$	$\frac{53}{360}$	$-\frac{19}{720}$	-	$-\frac{1}{24}$	1.73...
$r = 4$	$\frac{95}{288}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{133}{240}$	$\frac{241}{720}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{3}{160}$	$-\frac{19}{720}$	2.34...

El siguiente lema (que usaremos más adelante) muestra que los coeficientes de los métodos de Adams están acotados bajo ciertas condiciones sobre los  $h_n$ .

**Lema 3.1.2** *Supongamos que*

$$\forall n = 0, 1, \dots, N-2, \quad h_{n+1} \leq \delta h_n \quad (3.1.16)$$

con  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \neq 0$ . Entonces:

1. Existen dos números reales  $\alpha_r(\delta)$  y  $\alpha_r^*(\delta)$  tales que  $\forall n = 0, 1, \dots, N-1$

$$\sum_{i=0}^r |b_{n,i,r}| \leq \alpha_r(\delta), \quad \sum_{i=0}^r |b_{n,i,r}^*| \leq \alpha_r^*(\delta) \quad (3.1.17)$$

2. Además, se tiene siempre que

$$\frac{1}{r+2} \leq b_{n,r}^* \leq \frac{1}{2} \quad (3.1.18)$$

### Demostración

1. Comencemos con la primera desigualdad de (3.1.17).

$$|b_{n,i,r}| \leq \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |L_{n,i,r}(t)| = \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^r \frac{t-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}} \right| \leq \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^r \frac{t_{n+1}-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}} \right| \quad (\star)$$

La condición (3.1.16) nos permite acotar cada elemento del producto

· Si  $i < j$ :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_{n-j} &= h_n + h_{n-1} + \dots + h_{n-i} + t_{n-i} - t_{n-j} \leq \\ &\leq (\delta^{i+1} + \delta^i + \dots + \delta)h_{n-(i+1)} + t_{n-i} - t_{n-j} \leq \\ &\leq (\delta^{i+1} + \delta^i + \dots + \delta + 1)(t_{n-i} - t_{n-j}). \end{aligned}$$

· Si  $i > j$ :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_{n-j} &= h_n + h_{n-1} + \dots + h_{n-j} \leq (\delta^{j+1} + \delta^j + \dots + \delta)h_{n-(j+1)} \leq \\ &\leq (\delta^{j+1} + \delta^j + \dots + \delta)(t_{n-j} - t_{n-i}). \end{aligned}$$

$$(\star) \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^r \frac{t_{n+1}-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}} \right| \leq \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^r \frac{(\delta^{i+1} + \delta^i + \dots + \delta + 1)(t_{n-i} - t_{n-j})}{t_{n-i} - t_{n-j}} \right| = (\delta^{i+1} + \delta^i + \dots + \delta + 1)^r$$

Como  $(1 + \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{i+1}) = \frac{\delta^{i+1} - \delta}{\delta - 1}$ , entonces

$$\alpha_r(\delta) = \sum_{i=0}^r \left( \frac{\delta^{i+1} - \delta}{\delta - 1} \right)^r$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} |b_{n,i,r}^*| &\leq \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} |L_{n+1,i+1,r+1}(t)| = \max_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=-1}}^r \frac{t-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}} \right| \leq \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=-1}}^r \frac{t_{n+1}-t_{n-j}}{t_{n-i}-t_{n-j}} \right| \leq \\ &\leq \left| \prod_{\substack{j \neq i \\ j=-1}}^r \frac{(\delta^{i+2} + \delta^{i+1} + \dots + \delta + 1)(t_{n-i} - t_{n-j})}{t_{n-i} - t_{n-j}} \right| = (\delta^{i+2} + \delta^{i+1} + \dots + \delta + 1)^r \end{aligned}$$

$(1 + \delta + \dots + \delta^{i+2}) = \frac{\delta^{i+2} - \delta}{\delta - 1}$ , por lo que

$$\alpha_r^*(\delta) = \sum_{i=0}^r \left( \frac{\delta^{i+2} - \delta}{\delta - 1} \right)^r$$

2. Probemos ahora la acotación (3.1.18). Sabemos que

$$b_{n,r}^* = \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} L_{n,r}(t) dt$$

con

$$L_{n,r}(t) = \prod_{j=0}^r \frac{t - t_{n-j}}{t_{n+1} - t_{n-j}}$$

Para  $t \in [t_n, t_{n+1}]$  tenemos que  $\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \leq \frac{t - t_{n-j}}{t_{n+1} - t_{n-j}} \leq 1, \forall j \geq 0$ . (\*\*)

La primera desigualdad es cierta porque la función  $f(x) = \frac{t - x}{t_{n+1} - x}$  es decreciente, por lo que  $f(t_n) \leq f(t_{n-j})$  y la segunda es trivial porque  $t$  pertenece al intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ .

$$\prod_{j=0}^r \frac{t - t_{n-j}}{t_{n+1} - t_{n-j}} = \left( \frac{t - t_n}{h_n} \right) \prod_{j=1}^r \left( \frac{t - t_{n-j}}{t_{n+1} - t_{n-j}} \right)$$

Aplicando (\*\*) a  $\prod_{j=1}^r \left( \frac{t - t_{n-j}}{t_{n+1} - t_{n-j}} \right)$  obtenemos que

$$\left( \frac{t - t_n}{h_n} \right) \prod_{j=1}^r \left( \frac{t - t_{n-j}}{h_n} \right) \leq \left( \frac{t - t_n}{h_n} \right) \prod_{j=1}^r \left( \frac{t - t_{n-j}}{t_{n+1} - t_{n-j}} \right) \leq \left( \frac{t - t_n}{h_n} \right) \prod_{j=1}^r 1$$

luego

$$\left( \frac{t - t_n}{h_n} \right)^{r+1} \leq L_{n,r}(t) = \frac{t - t_n}{h_n}$$

Integrando entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$  y multiplicando por  $\frac{1}{h_n}$  tenemos:

$$\frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{t - t_n}{h_n} \right)^{r+1} dt \leq b_{n,r}^* \leq \frac{1}{h_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{t - t_n}{h_n} dt$$

En consecuencia:

$$\frac{1}{r+2} \leq b_{n,r}^* \leq \frac{1}{2}$$

como queríamos probar. □

Esta demostración nos muestra que conforme aumentamos el número de pasos, el valor de  $\alpha_r(\delta)$  y de  $\alpha_r^*(\delta)$  incrementa significativamente. Luego, bajo el punto de vista práctico, no es recomendable usar métodos de un número elevado de pasos.

### 3.2. Estabilidad, orden y convergencia de los métodos de Adams

Nos colocamos en un marco general donde  $r$  es el número de pasos del método ( $r$  finito) y llamamos  $n_0 = r - 1$ . Consideramos los métodos numéricos que se escriben de la siguiente forma:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} f_{n-i}, \quad n \geq n_0 \quad (3.2.1)$$

El método que estamos considerando se trata del método Adams-Bashforth de  $r$  pasos si  $b_{n,-1} = 0$ , donde cada  $b_{n,i}$  representa a  $b_{n,i,r}$ . En caso contrario, el método será de Adams-Moulton de  $r$  pasos y cada  $b_{n,i}$  representa a  $b_{n,i,r}^*$ .

·Si  $n_0 = 0$  la ecuación (3.2.1) define de manera única la sucesión  $y_n$  a partir de  $y_0$  y de  $f_0 = f(t_0, y_0)$  si se verifica la condición del lema (3.1.1)

$$\forall n \geq n_0 \quad h_n |b_{n,-1}| L \leq c < 1 \quad (3.2.2)$$

·Si  $n_0 \geq 1$ , para utilizar el esquema (3.2.1) necesitamos conocer los valores iniciales  $y_0, y_1, \dots, y_{n_0}$ .

En esta sección vamos a estudiar propiedades numéricas de estos métodos que nos conduzcan a la convergencia de las aproximaciones. En primer lugar vamos a estudiar la estabilidad del esquema. Para ello, consideramos el esquema perturbado definido por

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} f(t_{n-i}, z_{n-i}) + \varepsilon_n, \quad n \geq n_0, \quad (3.2.3)$$

donde  $\varepsilon_n$  representa una perturbación que puede corresponder, por ejemplo, a los errores de redondeo.

**Teorema 3.2.1** *Supongamos que estamos en las hipótesis del lema (3.1.1) y que existe un número real  $\alpha$  tal que*

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{i=-1}^r |b_{n,i}| \leq \alpha \quad (3.2.4)$$

*Entonces el método de Adams es estable, es decir, existe un número real y positivo  $M$  tal que  $\forall n = 0, 1, \dots, N$  se tiene que*

$$|y_n - z_n| \leq M \left[ \max_{l \leq n_0} |y_l - z_l| + \sum_{i=n_0}^{n-1} |\varepsilon_i| \right].$$

#### Demostración

Por definición de  $y_n$  y de  $z_n$  tenemos:

$$|z_{n+1} - y_{n+1}| \leq |z_n - y_n| + \sum_{i=-1}^r h_n |b_{n,i}| L |z_{n-i} - y_{n-i}| + |\varepsilon_n|$$

Denotando como

$$\theta_n = \max_{0 \leq k \leq n} |z_k - y_k|$$

se tiene que

$$\theta_{n+1} \leq \theta_n + h_n |b_{n,-1}| L \theta_{n+1} + h_n \sum_{i=0}^r |b_{n,i}| L \theta_n + |\varepsilon_n| \quad (3.2.5)$$

Despejando  $\theta_{n+1}$  en la desigualdad

$$\theta_{n+1} \leq \frac{1}{1 - h_n |b_{n,-1}| L} \left[ \left( 1 + h_n \sum_{i=0}^r |b_{n,i}| L \right) \theta_n + |\varepsilon_n| \right].$$

Denotamos  $h\beta = \max_{n \geq n_0} h_n |b_{n,-1}|$  y observamos que

$$\frac{1 + h_n \sum_{i=-1}^{r_n} |b_{n,i}| L}{1 - h_n |b_{n,-1}| L} = 1 + h_n \sum_{i=-1}^{r_n} \frac{|b_{n,i}| L}{1 - h_n |b_{n,-1}| L} \leq 1 + K(h) h_n,$$

siendo  $K(h) = \frac{\alpha L}{1 - h\beta L}$ . Volviendo a (3.2.5) obtenemos que

$$\theta_{n+1} \leq (1 + K(h) h_n) \theta_n + \frac{|\varepsilon_n|}{1 - h\beta L}$$

y usando el lema de Gronwall (2.2.1)

$$\forall n \geq n_0, \quad \theta_n \leq e^{K(h)(t_n - t_0)} \theta_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} e^{K(h)(t_n - t_{i+1})} \frac{|\varepsilon_i|}{1 - h\beta L} \quad (3.2.6)$$

Entonces para cualquier  $h \leq h^*$  tomando  $M = \frac{e^{K(h^*)}}{1 - h^* \beta L}$  se obtiene el resultado.  $\square$

La relación entre los conceptos de estabilidad, consistencia y convergencia viene dada por el teorema de Lax:

**Teorema 3.2.2 (de Lax)** *Si un método es consistente, entonces estabilidad y convergencia son equivalentes.*

**Nota**

El teorema de Lax es un resultado básico para la rama del análisis numérico y su demostración puede encontrarse en cualquier libro de análisis como Crouzeix et al. [1].

En nuestro caso vamos a utilizar la implicación del teorema de Lax que nos proporciona la convergencia, es decir, si los métodos de Adams son consistentes y estables entonces son convergentes.

**Definición 3.2.3 (Consistencia)** .

1. Llamamos *error de consistencia* del método de Adams en el instante  $t_n$  a

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} y'(t_{n-i}). \quad (3.2.7)$$

2. Diremos que el método de Adams es *consistente* si  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon\| = 0$  para toda solución de (3.1.1). Vamos a usar la norma 1, es decir, el método es consistente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=n_0}^{N-1} |\varepsilon_n| = 0$$

**Definición 3.2.4 (Convergencia)** .

Diremos que el método de Adams es *convergente* si  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \right) = 0$ .

**Definición 3.2.5 (Orden)** .

1. Diremos que el método de Adams es de *orden al menos  $p$*  si existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\|\varepsilon_n\| \leq Kh^p$ .
2. Diremos que el método de Adams es de *orden exactamente  $p$*  si el error de consistencia es cero para todo polinomio de grado menor o igual que  $p$ .

En el teorema (3.2.1) se ha probado la estabilidad, a continuación vamos a estudiar la consistencia. Para ello vamos a probar el siguiente resultado auxiliar:

**Lema 3.2.6** *Suponemos que se verifica (3.2.4), entonces:*

1. *El método de Adams tiene orden exactamente 1 sí, y solo sí*

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{i=-1}^r b_{n,i} = 1$$

2. *Si el método de Adams tiene orden 1 entonces es consistente.*

**Demostración**

1. El método es de orden exactamente 1 si el error de consistencia es cero para los polinomios de grado 1. Tomamos  $y(t) = t$ ,  $y'(t) = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} y'(t_{n-i}) = t_{n-i} - t_n - \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} = \\ &= h_n - \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} = h_n \left( 1 - \sum_{i=-1}^r b_{n,i} \right) \end{aligned}$$

luego  $\varepsilon_n = 0 \iff \sum_{i=-1}^r b_{n,i} = 1$ .

2. Tenemos que probar que  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=n_0}^{N-1} |\varepsilon_n| = 0$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} y'(t_{n-i}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt - \sum_{i=-1}^r \int_{t_n}^{t_{n+1}} b_{n,i} y'(t_{n-i}) dt = \\ &= \sum_{i=-1}^r b_{n,i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt - \sum_{i=-1}^r b_{n,i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t_{n-i}) dt \end{aligned}$$

Esta última igualdad es cierta gracias a que  $\sum_{i=-1}^r b_{n,i} = 1$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n| &\leq \left| \sum_{i=-1}^r b_{n,i} h_n \omega(y'; t_{n+1} - t_{n-i}) \right| \leq h_n \alpha \sum_{i=-1}^r |\omega(y'; t_{n+1} - t_{n-i})| \leq \\ &\leq h_n \alpha (r+2) |\omega(y'; (r+1)h)| \end{aligned}$$

donde  $\omega(y'; |x - z|)$  es el módulo de continuidad de la función  $y'$ .

Sumando ahora para  $n = n_0, \dots, N-1$  tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{N-1} |\varepsilon_n| &\leq \sum_{n=n_0}^{N-1} h_n \alpha (r+2) |\omega(y'; (r+1)h)| \leq \\ &\leq \alpha (r+2) |\omega(y'; (r+1)h)| \sum_{n=n_0}^{N-1} h_n \leq \alpha T (r+2) |\omega(y'; (r+1)h)| \end{aligned}$$

Si  $y'$  es una función continua entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} |\omega(y'; (r+1)h)| = 0$ , luego

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=n_0}^{N-1} |\varepsilon_n| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \alpha (T) (r+2) |\omega(y'; (r+1)h)| = 0$$

□

Con este resultado podemos concluir que si se satisface que

$$\forall n \geq n_0 \quad h_n |b_{n,-1}| L < 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=-1}^r b_{n,i} = 1$$

entonces el método de Adams es convergente, ya que es estable y consistente. Ahora vamos a estudiar el orden de convergencia de los métodos. Para ello tenemos el siguiente resultado:

**Lema 3.2.7** *Si el método de Adams tiene orden exactamente  $p$ , el método tiene orden al menos  $p$ .*

### Nota

La demostración de este lema puede encontrarse en M. Crouzeix et al. [1] y es una consecuencia del Teorema de Taylor y del hecho de que el método tiene orden exactamente  $p$ . Para poder aplicar Taylor necesitaremos que la solución del problema continuo sea suficientemente regular.

### Observaciones

1. El recíproco del lema (3.2.7) no es cierto. Por ejemplo,

$$y_{n+1} = h_n \left[ \left( \frac{1}{2} - h_n \right) f(t_n, y_n) + \left( \frac{1}{2} + h_n \right) f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right]$$

es de orden 2 pero no de orden exactamente 2.

2. Recordemos que los métodos de Adams de  $r$  pasos se construyen mediante polinomios de interpolación de grado  $r$  en Adams-Bashforth y  $(r + 1)$  en Adams-Moulton. En consecuencia, el método de Adams-Bashforth es de orden exactamente  $r$  y por tanto de orden  $r$  y el método de Adams-Moulton de orden  $(r + 1)$  por la misma razón.

## 3.3. Estimación del error de discretización

En esta sección vamos a obtener una estimación a priori del error de discretización.

**Lema 3.3.1** *Consideremos un método de Adams de orden  $p$  y supongamos que estamos en las hipótesis bajo las cuales el esquema es estable. Entonces,  $\exists M > 0$  tal que*

$$|e_n| \leq M \left( \max_{l \leq n_0} |e_l| + Ch^p \right)$$

Si además  $|y_l - y(x_l)| \leq Ch^p \forall l \leq n_0$  entonces:

$$|e_n| \leq Ch^p$$

### Demostración

El esquema se escribe como:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} f(t_{n-i}, y_{n-i})$$

Por definición de orden de consistencia tenemos:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \sum_{i=-1}^r h_n b_{n,i} f(t_{n-i}, y(t_{n-i})) + \varepsilon_n$$

Esta igualdad podemos tomarla como una perturbación del esquema numérico, y aplicando la hipótesis de estabilidad llegamos a que  $\exists M > 0$  tal que

$$|y_n - y(t_n)| \leq M \left( \max_{l \leq n_0} |y_l - y(t_l)| + \sum_{i=n_0}^{n-1} |\varepsilon_i| \right)$$

Por otro lado, como el método es de orden  $p$

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} |\varepsilon_i| \leq \sum_{i=n_0}^{N-1} |\varepsilon_i| \leq Ch^p$$

Luego

$$|y_n - y(t_n)| \leq M \left( \max_{l \leq n_0} |y_l - y(t_l)| + Ch^p \right)$$

Si además  $|y_l - y(t_l)| \leq Ch^p, \forall l \leq n_0$ , entonces:

$$|y_n - y(t_n)| \leq Ch^p$$

□

### Observación

Al igual que se hace con los métodos de un paso, podemos aplicar a los métodos de Adams una extrapolación de Richardson y obtener una aproximación de orden  $(p + 1)$  y, por tanto, más precisa.

Como conclusión de estas secciones podemos decir que los métodos de Adams bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes son estables y consistentes (y por tanto convergentes). Además, por construcción tienen orden  $r$  en el caso de Adams-Bashforth de  $r$  pasos y  $(r + 1)$  en el caso de Adams-Moulton de  $r$  pasos. Si bien es cierto que es preferible tener un método de orden  $(r + 1)$  como Adams-Moulton frente a un método de orden  $r$  como Adams-Bashforth, en la mayoría de situaciones se elige Adams-Bashforth en lugar de Adams-Moulton ya que se trata de un método explícito y requiere de un menor coste computacional para obtener una aproximación.

En la siguiente sección vamos a obtener métodos de tipo predictor-corrector para mantener el uso de métodos explícitos y tener orden  $(r + 1)$ .

### 3.4. Métodos predictor-corrector

El inconveniente principal de los métodos de Adams-Moulton es la necesidad de resolver en cada paso un sistema que puede ser lineal o no. Recordemos que el esquema se escribe:

$$y_{n+1} - h_n b_{n,-1}^* f(t_{n+1}, y_{n+1}) = y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i}^* f_{n-i} \quad (3.4.1)$$

En algunos casos particulares como sistemas diferenciales lineales, la solución podrá encontrarse mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, pero en el caso general habrá que emplear un método para ecuaciones no lineales como puede ser el método de aproximaciones sucesivas (MAS) o el método de Newton (MN), entre otros. Para salvar esta dificultad y mantener la precisión vamos a definir los métodos predictor-corrector.

Supongamos conocidos los valores  $y_{n-i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$ . En primer lugar vamos a calcular una aproximación  $y_{n+1}^{(0)}$  de  $y_{n+1}$  mediante un esquema de Adams-Bashforth, que llamaremos **esquema predictor**.

$$(P) \quad y_{n+1}^{(0)} = y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i} f_{n-i}$$

A partir de  $y_{n+1}^{(0)}$ , se obtiene una aproximación  $f_{n+1}^{(0)}$  definida como:

$$(E) \quad f_{n+1}^{(0)} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$$

Las siguientes aproximaciones de  $y_{n+1}$  y de  $f_{n+1}$  se obtienen mediante el método de aproximaciones sucesivas para el esquema (3.4.1) con una cantidad de  $k_n$  pasos (denominado **esquema corrector**), obteniéndose:

$$(C) \quad y_{n+1}^{(l+1)} = y_n + h_n b_{n,-1}^* f_{n+1}^{(l)} + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i}^* f_{n-i}$$

y

$$(E) \quad f_{n+1}^{(l+1)} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(l+1)}), \quad \forall l = 0, 1, \dots, k_n - 1$$

Finalmente,

$$y_{n+1} = y_{n+1}^k \quad \text{y} \quad f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^k).$$

Ahora nos ocupamos de cómo elegir el número de pasos  $k_n$  para cada  $n$ . Para ello observamos que:

$$|y_{n+1} - y_{n+1}^{(l+1)}| = h_n \left| b_{n,-1}^* \left( f(t_{n+1}, y_{n+1}) - f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(l)}) \right) \right| \leq h_n |b_{n,-1}^*| L |y_{n+1} - y_{n+1}^{(l)}|$$

y por recurrencia

$$|y_{n+1} - y_{n+1}^{(l)}| \leq (h_n |b_{n,-1}^*| L)^l |y_{n+1} - y_{n+1}^{(0)}|.$$

Una primera elección de  $k_n$  podría ser el número de iteraciones necesarias para que el MAS converja. Cabe señalar que esta técnica no requerirá demasiadas iteraciones si el

esquema predictor es suficientemente preciso y si  $h_n|b_{n,-1}^*|L$  es suficientemente pequeño. En otro caso, si  $h_n|b_{n,-1}^*|L$  no es suficientemente pequeño entonces la convergencia puede ser muy lenta y provocará que tengamos que reducir el paso  $h_n$  o bien nos permitirá detectar que el problema está mal condicionado ( $L$  demasiado grande). En este último caso será necesario recurrir a métodos adaptados a problemas stiff (rígidos).

Una segunda elección puede ser aplicar el método iterativo parando en un número fijo  $k \geq 1$ , y tomar:

1.  $y_{n+1} = y_{n+1}^{(k)}$  y  $f_{n+1} = f_{n+1}^{(k)}$  (método  $P(EC)^kE$ )
2.  $y_{n+1} = y_{n+1}^{(k)}$  y  $f_{n+1} = f_{n+1}^{(k-1)}$  (método  $P(EC)^k$ )

Los métodos más utilizados se corresponden con escoger  $k = 1$ , que son los métodos **PEC** y sobretodo los métodos **PECE**, los cuales vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & y_{n+1}^{(0)} = y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i} f_{n-i} \\
 \text{(E)} \quad & f_{n+1}^{(0)} = f(t_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) \\
 \text{(C)} \quad & y_{n+1} = y_n + h_n b_{n,-1}^* f_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i}^* f_{n-i} \\
 \text{(E)} \quad & f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1}).
 \end{aligned}$$

### 3.5. Estudio de los métodos PECE

En esta sección vamos a estudiar las propiedades numéricas de estos métodos. En este caso vamos a obtener directamente una estimación del error de discretización.

Consideremos el método *PECE* (denotamos como  $p_{n+1} = y_{n+1}^{(0)}$ ):

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & p_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i} f(t_{n-i}, y_{n-i}) \\
 \text{(C)} \quad & y_{n+1} = y_n + h_n b_{n,-1}^* f(t_{n+1}, p_{n+1}) + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i}^* f(t_{n-i}, y_{n-i})
 \end{aligned}$$

Denotamos por  $\varepsilon_n^{(p)}$  y  $\varepsilon_n^{(c)}$  a los errores de consistencia de los esquemas predictor y corrector (respectivamente), es decir,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_n^{(p)} &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i} y'(t_{n-i}) \\
 \varepsilon_n^{(c)} &= y(t_{n+1}) - y(t_n) - h_n b_{n,-1}^* y'(t_{n+1}) - \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i}^* y'(t_{n-i})
 \end{aligned}$$

Se tiene que

$$y(t_{n+1}) - p_{n+1} = y(t_n) - y_n + \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i} [f(t_{n-i}, y(t_{n-i})) - f(t_{n-i}, y_{n-i})] + \varepsilon_n^{(p)} \quad (3.5.1)$$

y

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) - y_{n+1} &= y(t_n) - y_n + h_n b_{n,-1}^* [f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, p_{n+1})] + \\ &+ \sum_{i=0}^r h_n b_{n,i}^* [f(t_{n-i}, y(t_{n-i})) - f(t_{n-i}, y_{n-i})] + \varepsilon_n^{(c)} \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Supongamos que, como en el teorema (3.2.1), para cualquier  $n \geq n_0$

$$\sum_{i=0}^r |b_{n,i}| \leq \alpha, \quad \sum_{i=-1}^r |b_{n,i}^*| \leq \alpha^*, \quad h_n |b_{n,-1}^*| \leq h\beta \quad (3.5.3)$$

y denotemos como

$$\theta_n = \max_{0 \leq l \leq n} |y(t_l) - y_l|, \quad \alpha_n^* = \sum_{i=0}^r |b_{n,i}^*|.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} |y(t_{n+1}) - p_{n+1}| &\leq (1 + h_n \alpha L) \theta_n + |\varepsilon_n^{(p)}| \\ |y(t_{n+1}) - y_{n+1}| &\leq (1 + h_n \alpha^* L) \theta_n + h_n |b_{n,-1}^*| L |y(t_{n+1}) - p_{n+1}| + |\varepsilon_n^{(c)}| \end{aligned}$$

y usando ambas desigualdades deducimos que

$$|y(t_{n+1}) - y_{n+1}| \leq (1 + h_n \alpha^* L + h_n |b_{n,-1}^*| L + h_n |b_{n,-1}^*| L h_n \alpha L) \theta_n + h_n |b_{n,-1}^*| L |\varepsilon_n^{(p)}| + |\varepsilon_n^{(c)}|, \quad (3.5.4)$$

es decir,

$$\theta_{n+1} \leq (1 + h_n \alpha^* L + h_n h \beta \alpha L^2) \theta_n + |\varepsilon_n^{(c)}| + h \beta L |\varepsilon_n^{(p)}|.$$

Denotemos como

$$K(h) = \alpha^* L + h \beta \alpha L^2 \quad (3.5.5)$$

Usando el lema de Gronwall (2.2.1) obtenemos que

$$\theta_n \leq e^{K(h)(t_n - t_{n_0})} \theta_{n_0} + \sum_{i=n_0}^{n-1} e^{K(h)(t_n - t_{i+1})} \left[ |\varepsilon_i^{(c)}| + h \beta L |\varepsilon_i^{(p)}| \right],$$

es decir,

$$|y(t_n) - y_n| \leq e^{K(h)(t_n - t_{n_0})} \max_{0 \leq l \leq n_0} |y(t_l) - y_l| + \sum_{i=n_0}^{n-1} e^{K(h)(t_n - t_{i+1})} \left[ |\varepsilon_i^{(c)}| + h \beta L |\varepsilon_i^{(p)}| \right] \quad (3.5.6)$$

### Observación

$K(h) = \alpha^* L + h \beta \alpha L^2$  aparece entonces como la constante de estabilidad del esquema predictor-corrector *PECE*. Usando el teorema (3.2.1) podemos observar que si usamos sólo el esquema corrector la constante de estabilidad sería

$$K(h) = \frac{\alpha^* L}{1 - h \beta L}$$

luego podemos concluir que si  $hL$  es suficientemente pequeño entonces ambas  $K$  son prácticamente iguales, por lo que el esquema *PECE* será tan estable como el esquema corrector utilizado.

De (3.5.6) se puede deducir el siguiente teorema:

**Teorema 3.5.1** *Supongamos que estamos bajo las hipótesis (3.5.3), que el esquema predictor es de orden  $p$  y que el esquema corrector es de orden exactamente  $(p+1)$ . Entonces si  $|y_l - y(t_l)| \leq Ch^{p+1}$  se tiene que el método *PECE* es de orden  $(p+1)$ .*

### **Demostración**

A partir de (3.5.6) acotando los errores de consistencia de cada uno de los métodos se obtiene el resultado. □



# Capítulo 4

## Desarrollo y modelización de carrera

En este capítulo vamos a hacer una recopilación de los estudios que se han realizado hasta ahora en la literatura científica para la predicción del tiempo requerido para realizar una determinada carrera. Después, vamos a desarrollar y explicar un modelo de carrera basado en balances energéticos, procurando evitar factores de eficiencia mecánica. Por último, introduciremos en el modelo los efectos que se producen al trazar una curva en lugar de seguir una trayectoria rectilínea.

### 4.1. Introducción

El análisis matemático del rendimiento de un atleta en carrera cogió fuerza a principios del siglo pasado. Los primeros modelos matemáticos que se propusieron estaban basados en la segunda ley de Newton (o ley fundamental de la dinámica). A mediados del siglo pasado, autores como LLoyd ([10],[11]) o Margaria [13] utilizaron un método basado en algunas consideraciones energéticas, pero sujetas a factores de eficiencia mecánica que a día de hoy no terminan de resolver algunas cuestiones sobre el rendimiento físico del atleta durante una carrera.

En cada instante de tiempo de una carrera el cuerpo humano está sometido a una gran variedad de intercambios de energía: los músculos generan energía mecánica mediante la conversión de energía química, el cuerpo gana y pierde energía cinética y potencial a medida que se mueve verticalmente en el campo rotacional de la Tierra, etc. Cada uno de estos componentes ha de evaluarse cuidadosamente para lograr conseguir un modelo preciso y eficiente.

En este estudio se va a tener en cuenta que los atletas adoptan enfoques distintos para carreras tipo sprint y carreras de larga distancia. En líneas generales, en las tipo sprint el atleta ejerce la máxima potencia disponible durante todo el curso de la carrera. En las carreras de larga distancia el atleta, habiendo acelerado durante una etapa inicial, traza el resto del recorrido a un ritmo generalmente uniforme hasta llegar a una etapa final donde realiza un último esfuerzo. Estas diferencias entre carreras cortas y largas se explican en gran medida por la importante influencia que tiene la producción de ácido láctico. Durante el desarrollo del capítulo examinaremos más a fondo esta cuestión, viendo en detalle las transformaciones de energía química y tratando de dar una estrategia que relacione el

tipo de carrera con los procesos químicos implicados en la liberación de energía.

Aunque algunos autores como Lloyd ([10],[11]) o Margaria [13] realizaron un análisis sobre el rendimiento en carreras de larga distancia, desde la publicación del artículo de Furusawa et al. [3] la atención se ha centrado casi por completo en el estudio de carreras cortas, basándose principalmente en la segunda ley del movimiento de Newton. El objetivo de este estudio es la extensión a un análisis diferente, basado en consideraciones energéticas.

## 4.2. Estudio de modelos de carrera

### 4.2.1. Métodos basados en la segunda ley de Newton

Los primeros modelos a los que vamos a hacer referencia toman como buque insignia la segunda ley de Newton para obtener una relación entre la velocidad de desplazamiento,  $v$ , la distancia recorrida,  $x$ , y el tiempo transcurrido desde el reposo,  $t$ . Furusawa et al. [3] expresaron la fuerza neta aplicada en términos de fuerza motriz o propulsora,  $F_D$ , y fuerza de resistencia interna,  $F_R$ . Así, la ecuación del movimiento del atleta se escribe como

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F_D - F_R \quad (4.2.1)$$

donde  $m$  es la masa del atleta. En los trabajos de Furusawa et al. ([3],[4]), la fuerza motriz se tomó constante y se expresó como fracción del peso corporal, mientras que la fuerza de resistencia fue atribuida a la “viscosidad” de los músculos y era proporcional a la velocidad. Por tanto, la ecuación del movimiento del atleta podría expresarse de la siguiente forma:

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = bmg - \frac{mv}{a} \quad (4.2.2)$$

donde  $a$  y  $b$  son coeficientes constantes y  $g$  es la constante de gravedad. Integrando respecto de  $t$  obtenemos

$$x = abg \left[ t - a \left( 1 - e^{-\frac{t}{a}} \right) \right] \quad (4.2.3)$$

Para la velocidad, derivamos respecto al tiempo y se obtiene que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v = abg \left[ 1 - e^{-\frac{t}{a}} \right] \quad (4.2.4)$$

La ecuación (4.2.4) muestra que para valores grandes de  $t$  la velocidad se aproxima asintóticamente a un valor límite, que representamos como  $V_{max}$ . Tomando límite llegamos a que

$$V_{max} = abg \quad (4.2.5)$$

Con el fin de determinar las constantes  $a$  y  $b$ , Furusawa et al. [3] realizaron diversas pruebas de distintas longitudes a varios corredores (desde atletas profesionales hasta atletas amateurs) para darles un valor empírico. Partiendo del mismo razonamiento, Hill

[6] también quiso tener en cuenta los efectos de la resistencia del aire, aunque no terminó incluyéndolo en su modelo. Keller ([8],[9]) aportó que había demasiadas diferencias entre carreras cortas y largas y decidió catalogar como carrera corta o sprint a las que no superan una distancia de 291m y carrera larga para distancias mayores. Durante su estudio, las carreras cortas las analizaba de una manera parecida a la que hemos descrito, y para la etapa final de carreras de larga distancia obtuvo una ecuación casi idéntica a (4.2.2). Senator [16] sí añadió los efectos de la resistencia del aire a su estudio de modo que, siguiendo con la notación empleada hasta ahora, la ecuación (4.2.1) puede expresarse como

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F_D - F_R - D \quad (4.2.6)$$

donde  $D$  es la fuerza aerodinámica de arrastre.

En su estudio, Senator [16] combina la fuerza de resistencia interna  $F_R$  y la resistencia al aire por la siguiente ley empírica

$$F_R + D = c \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^n \quad (4.2.7)$$

con  $c$  y  $n$  constantes. No hay ninguna justificación física para esta asociación de términos, luego el análisis consecuente debe ser cuestionado y no vamos a continuarlo.

Por razones físicas, es preferible considerar las fuerzas motrices  $F_D$  y las fuerzas de resistencia interna  $F_R$  combinadas en una única fuerza motriz neta, denotada como  $F'_D = F_D - F_R$ . Vaughan [17] utilizó este enfoque y lo reflejó con la siguiente ecuación

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F'_D - D \quad (4.2.8)$$

Vaughan consideró también la siguiente ley empírica

$$F'_D - D = m (A_1 - B_1 v^\alpha - C_1 v^2) \quad (4.2.9)$$

donde  $A_1, B_1, C_1$  y  $\alpha$  son constantes. La resistencia aerodinámica puede expresarse de la siguiente forma:

$$D = \frac{1}{2} (\rho S C_D) v^2 \quad (4.2.10)$$

siendo  $\rho$  la densidad del aire,  $S$  el área frontal del corredor donde “impacta” el aire y  $C_D$  el coeficiente de arrastre. Observando las ecuaciones (4.2.9) y (4.2.10), podemos escribir el coeficiente  $C_1$  de la ecuación (4.2.9) como

$$C_1 = \frac{\rho S C_D}{2m} \quad (4.2.11)$$

Con esto, podemos deducir de la ecuación (4.2.9) que

$$F'_D = m (A_1 - B_1 v^\alpha) \quad (4.2.12)$$

Al medir el rendimiento de una serie de velocistas universitarios, Vaughan [17] obtuvo valores empíricos para  $A_1, B_1$  y  $\alpha$ , siendo  $\alpha = 0.7$ ,  $A_1$  quedaba comprendida entre  $10.26 \text{ ms}^{-2}$  y  $10.65 \text{ ms}^{-2}$  y  $B_1$  oscilaba entre  $1.93 \text{ m}^{0.3} \text{ s}^{-1.3}$  y  $2.02 \text{ m}^{0.3} \text{ s}^{-1.3}$ .

Resumiendo, todos los análisis matemáticos basados en la segunda ley de Newton para la modelización de una carrera pecan de al menos dos de las siguientes deficiencias:

1. La inclusión de leyes empíricas que no han sido verificadas y que no sabemos con qué exactitud hacen referencia a los procesos físicos involucrados en la carrera.
2. La velocidad tiende asintóticamente a un valor constante máximo con el incremento de  $t$ , lo que es inconsistente en la práctica.
3. Dado que la velocidad tiende asintóticamente a un valor máximo, el método no puede extenderse convenientemente para proporcionar estimaciones realistas del rendimiento en carreras de distancia significativamente grande.

### 4.2.2. Métodos basados en consideraciones energéticas

Un enfoque alternativo a la modelización basada en la segunda ley de Newton puede hacerse tomando como base los balances energéticos producidos en el cuerpo al realizar esfuerzos. Furuwasa et al. [3] ya reconocieron la importancia que debían tener estos intercambios de energía en la modelización de una carrera, a pesar de basar su análisis sobre el sprint en las leyes del movimiento de Newton.

Lloyd [10] fue el primer autor que utilizó consideraciones energéticas para crear un modelo de carrera. La base del método es la relación que existe entre la conversión de energía química y la correspondiente salida de energía del atleta. Lloyd [11] propuso que la energía química disponible  $C$  podía separarse en dos términos, uno que expresaba la energía disponible almacenada y otro que denotaba la disponibilidad de energía a ritmo constante. Lloyd [10] también dió una expresión para la energía gastada por un atleta durante la aceleración partiendo del reposo,  $E_R$ .

En principio, puede hacerse un equilibrio entre  $C$  y  $E_R$ . Sin embargo, para proceder de esta manera, tanto Lloyd [10] como Lloyd y Moran [12] se vieron obligados a introducir factores de eficiencia mecánica para la conservación de energía. No obstante, Lloyd y Moran [12] lograron aproximar con bastante precisión los récords mundiales de ese año tanto para sprints como para carreras de media y larga distancia.

Entonces, ¿qué falla en su modelo? El principal inconveniente que tiene es la introducción de un término de eficiencia mecánica para evitar algunos problemas de balances energéticos que no podían expresarse con exactitud. Su introducción ha servido para “cuadrar” a priori un modelo que no se sostenía por sí solo, a cambio de oscurecer la naturaleza del balance energético total de una carrera.

En la siguiente sección vamos a introducir un análisis del movimiento basado en los mismos principios que Lloyd y Moran [12] pero mejorando la base física de la que depende el modelo matemático, evitando la introducción de términos de eficiencia mecánica. Además, se implementará un término que tenga en cuenta el cambio que supone tomar una curva, para aplicarlo en carreras cortas.

### 4.3. Modelo basado en balances energéticos

#### 4.3.1. Ecuaciones básicas de energía y potencia

Para la introducción del modelo vamos a considerar los procesos de intercambio de energía que se producen durante una carrera, introducidos por Ward-Smith [18] y recogidos en el siguiente esquema.

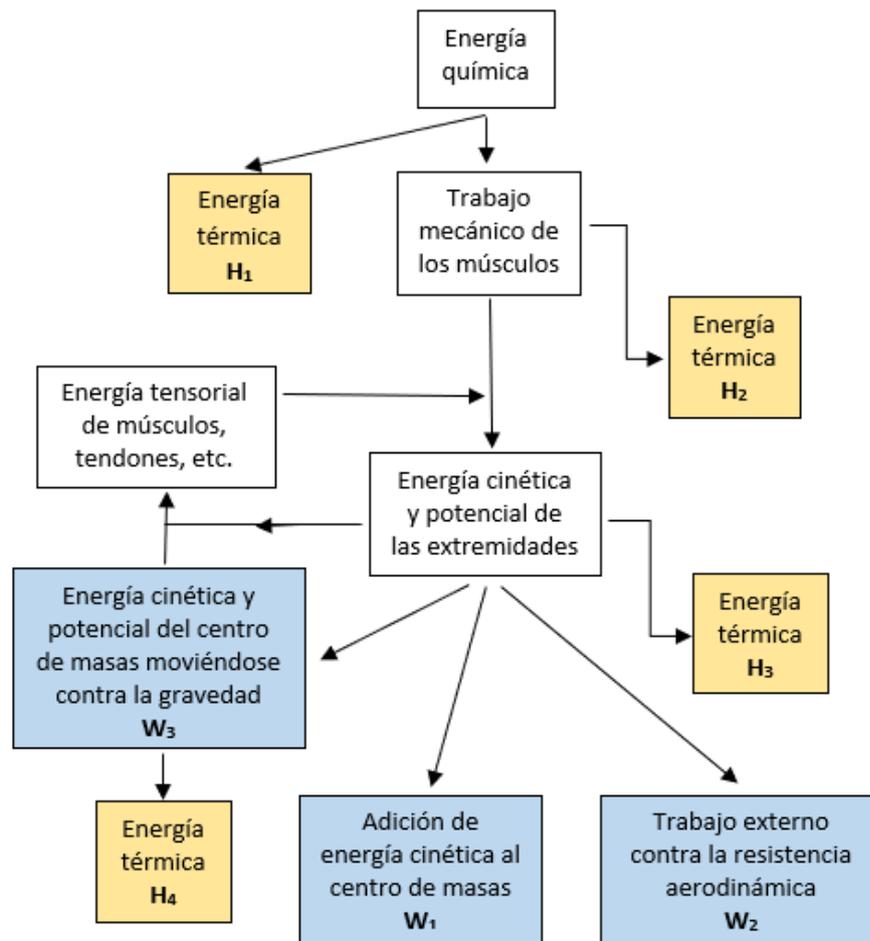


Figura 4.1: Esquema de balances energéticos.

Aunque la energía liberada por la conversión de energía química pasa por una serie de etapas, es posible encontrar un balance energético global donde las dos fuentes en las que se transforma  $C$  son en energía térmica que se desprende, la cual denotaremos por  $H$ , y en trabajo, que vendrá denotada como  $W$ . Aplicando la primera ley de la termodinámica, “la energía química liberada es igual a la suma del trabajo útil realizado por el centro de masa del corredor más la energía mecánica degradada en energía térmica”, obtenemos que

$$C = W + H \quad (4.3.1)$$

siendo

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

Promediando sobre el número de zancadas o pasos que ejecuta el corredor,  $W_3 = 0$  si se ignora el pequeño cambio en la energía potencial del centro de masa de un atleta entre el inicio y el final de la carrera si el terreno se considera plano.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (4.3.1)

$$P = P_H + P_W \quad (4.3.2)$$

donde  $P = \frac{\partial C}{\partial t}$ ,  $P_H = \frac{\partial H}{\partial t}$  y  $P_W = \frac{\partial W}{\partial t}$ .  $P$  se interpreta como potencia con o sin sufijo.

### 4.3.2. La energía necesaria para correr

Vamos a examinar detenidamente las componentes de la ecuación de la potencia. La variación de energía cinética del centro de masa del atleta se puede modelar como

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} = mv \frac{\partial v}{\partial t}$$

y la tasa de trabajo contra la resistencia aerodinámica es (en ausencia de viento)

$$\frac{\partial W_2}{\partial t} = Dv = \frac{1}{2} \rho v^3 SC_D$$

con las constantes ya conocidas.

Ward-Smith [18] estudió el incremento de energía térmica en detalle. En un principio, realizando pruebas con sujetos en una cinta de correr con distintas resistencias, tanto Davies [2] como Margaria [13] lograron dar la siguiente relación

$$\frac{\partial H}{\partial t} = Av$$

siendo  $A$  una constante. Más tarde, Ward-Smith [18] demostró que esta ley empírica puede extrapolarse para aplicarla también a un sprint. Por tanto, la potencia necesaria para correr viene dada por la suma de las contribuciones anteriores y es

$$P_H + P_W = Av + \frac{1}{2} \rho v^3 SC_D + mv \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.3.3)$$

### 4.3.3. La cinética de la conversión de energía química

La fuente fundamental de energía química es la reacción exotérmica que divide el adenosin trifosfato (ATP) en adenosin difosfato (ADP) y ácido fosfórico. Puesto que el músculo contiene una cantidad limitada de ATP, este tiene que ser resintetizado continuamente al mismo tiempo que se divide. La energía necesaria para esto es proporcionada por la división de la fosfocreatina en creatina y ácido difosfórico. Dado que las dos reacciones se dan en serie y su contenido de energía es aproximadamente el mismo, introducimos

el término fosfógeno para describir a todas las sustancias que contienen fosfato de alta energía. Por lo tanto, la división de fosfógeno se considera la fuente principal de energía muscular. En ejercicios musculares prolongados, el fosfógeno debe ser resintetizado continuamente utilizando la energía de la combustión de alimentos y la glicólisis.

Para el ejercicio prolongado prevalece la obtención de energía por este mecanismo oxidativo, existiendo una tasa máxima de liberación de energía que puede ser mantenida por este (representada por  $R$ ). Tras una serie de pruebas (véase Margaria [13]) se tiene que, partiendo del reposo y manteniendo una tasa constante de gasto energético la potencia aeróbica, denotada por  $P_{aer}$ , decrece exponencialmente en tiempo y puede ser modelada de la siguiente manera

$$P_{aer} = R(1 - e^{(-\lambda t)}) \quad (4.3.4)$$

siendo  $\lambda$  una constante que obtendremos empíricamente. Al integrar esta ecuación obtenemos la cantidad de energía aportada por el mecanismo oxidativo

$$C_{aer} = Rt - \frac{R}{\lambda}(1 - e^{(-\lambda t)}) \quad (4.3.5)$$

En condiciones de sobreesfuerzo anaeróbico (como la etapa final de una carrera de larga distancia) la energía proporcionada por el mecanismo oxidativo (o aeróbico) no es suficiente y se complementa con energía de una fuente distinta. Esta fuente de energía es vital para carreras cortas. Al comienzo de un esfuerzo, la energía es proporcionada únicamente por la división del fosfógeno, pero cuando éste alcanza la mitad de su nivel inicial se activa el mecanismo glicolítico, caracterizado por la producción de ácido láctico.

La producción de ácido láctico se asocia a un considerable malestar físico y agotamiento, lo que conduce rápidamente a la disminución de los niveles de rendimiento del atleta. Por esta razón en las carreras de media o larga distancia los atletas evitan un esfuerzo excesivo en las primeras etapas, retrasando la activación del mecanismo glicolítico a las etapas finales de la carrera.

Denotando la capacidad del mecanismo aláctico (oxidativo) por  $E_a$  y la del mecanismo glicolítico por  $E_g$ , la capacidad total del mecanismo anaeróbico,  $E_0$ , viene dada por

$$E_0 = E_a + E_g$$

En carreras de larga distancia (como maratones o eventos con una longitud de carrera significativamente extensa) el rendimiento está determinado principalmente por el mecanismo aláctico. Como se pondrá de manifiesto, siempre que se evite la producción prematura de ácido láctico, la liberación de energía por el mecanismo anaeróbico no es significativa para determinar la relación entre el tiempo total y la distancia recorrida en una carrera. En eventos de sprint y, en menor medida, en eventos de distancia media, la tasa de liberación de energía por el mecanismo anaeróbico tiene una influencia importante en el rendimiento, y para predecir dicho rendimiento en una carrera es necesaria una expresión para la variación de la potencia máxima anaeróbica disponible con el paso del tiempo. Para abordar este requisito, tendremos en cuenta una serie de condiciones que introdujo Margaria [13] y que son las siguientes:

1. La cantidad total de energía disponible de los dos procesos (aláctico y glicolítico) es constante (e igual a  $E_0$ ).
2. La potencia anaeróbica disponible es decreciente y alcanza su máximo en  $t = 0$ .
3. La energía anaeróbica disponible es estrictamente decreciente.

Para incorporar estas hipótesis tendremos en cuenta que, antes de la activación del mecanismo glicolítico, la tasa de energía liberada debida a la oxidación depende de la cantidad de fosfógeno de partida.

La cantidad total de energía disponible en el instante  $t$  para las fuentes anaeróbicas se denota por  $E$ . Por tanto, siguiendo las hipótesis de Margaria [13] tenemos que

$$P_{aer} = k(E_0 - E)$$

donde  $k$  es una constante de proporcionalidad. Sustituyendo (4.3.4) obtenemos

$$C_{an} = E_0 - E = \frac{R}{k} (1 - e^{(-\lambda t)})$$

Derivamos respecto al tiempo y tenemos que

$$\frac{\partial C_{an}}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial t} = P_{an} = \frac{R\lambda}{k} e^{(-\lambda t)}.$$

Llamando  $P_{max} = \frac{R\lambda}{k}$ , máximo potencial disponible del mecanismo glicolítico, la expresión final para  $P_{an}$  es

$$P_{an} = P_{max} e^{(-\lambda t)}, \quad (4.3.6)$$

expresión que satisface todas las condiciones enumeradas anteriormente.

El uso de la ecuación (4.3.6) para describir la potencia anaeróbica máxima disponible desde el reposo sólo puede justificarse antes de la activación del mecanismo glicolítico. Sin embargo, a falta de una descripción alternativa obvia, la utilizaremos para describir todas las fases del mecanismo anaeróbico. Al hacerlo, observamos que

1. No se aprecian cambios bruscos en el rendimiento de carrera correspondientes a la activación del mecanismo glicolítico.
2. La ecuación (4.3.6) tiene la capacidad anaeróbica correcta para las fuentes de energía combinadas de la división del fosfógeno y glicólisis.
3. Se conoce (véase Margaria [13]) que la potencia máxima disponible del mecanismo glicolítico es muy inferior a  $P$ .

Todos estos aspectos corroboran que la ecuación (4.3.6) es consistente y concuerda con los resultados obtenidos en las pruebas fisiológicas recogidas por Margaria [13]. En consecuencia, la ecuación (4.3.6) se utilizará para representar la potencia anaeróbica máxima disponible para todo  $t$ .

Integrando la ecuación (4.3.6) obtenemos que

$$C_{an} = E_0 - E = \frac{P_{max}}{\lambda} (1 - e^{(-\lambda t)}) \quad (4.3.7)$$

Si  $t \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$E_0 = \frac{P_{max}}{\lambda},$$

lo que nos permite relacionar la capacidad del mecanismo anaeróbico con la potencia anaeróbica máxima.

El conocimiento de la tasa máxima a la que se puede extraer energía del mecanismo anaeróbico no sólo es importante para el cálculo del rendimiento, sino también para la elección de la estrategia empleada por un atleta en carreras de larga distancia. Por esta razón, suponemos a partir de ahora que las ecuaciones de energía y potencia se establecen para un atleta que disponga de la potencia máxima disponible al principio de la carrera.

Sumando las contribuciones de las fuentes aeróbicas y anaeróbicas se obtiene la ecuación de la potencia disponible a partir de la conversión de energía química:

$$P = P_{an} + P_{aer} = (P_{max} - R)e^{(-\lambda t)} + R \quad (4.3.8)$$

La correspondiente ecuación de la energía es

$$C = C_{an} + C_{aer} = \left( \frac{P_{max} - R}{\lambda} \right) (1 - e^{(-\lambda t)}) + Rt \quad (4.3.9)$$

Las ecuaciones (4.3.8) y (4.3.9) pueden expresarse también de la siguiente forma

$$P = P_{max}e^{(-\lambda t)} + R(1 - e^{(-\lambda t)}) \quad (4.3.10)$$

y

$$C = E_0(1 - e^{(-\lambda t)}) + R \left( t - \frac{1}{\lambda} (1 - e^{(-\lambda t)}) \right) \quad (4.3.11)$$

donde el primer y segundo término de ambas ecuaciones representan las contribuciones de los mecanismos anaeróbicos y aeróbicos, respectivamente. Estas ecuaciones muestran claramente la influencia dominante que tienen las fuentes anaeróbicas durante la etapa inicial y la creciente influencia de la contribución aeróbica con el paso del tiempo.

Los argumentos físicos provenientes del modelo propuesto por Lloyd [11] usados para describir los procesos de conversión de energía son menos detallados que los que hemos utilizado en este desarrollo. No obstante, las ecuaciones (4.3.8) y (4.3.9) son bastante parecidas a las ecuaciones de potencia y energía propuestas por Lloyd [11]. Podemos relacionar las ecuaciones con la introducción del parámetro  $S_0$ , definido por

$$S_0 = \frac{P_{max} - R}{\lambda} = \frac{P_{max} - R}{P_{max}} E_0 \quad (4.3.12)$$

Cabe señalar que  $E_0$  se puede interpretar como una medida de deuda de oxígeno durante un periodo de la carrera. El parámetro  $S_0$ , aunque posee unidades de energía, debe considerarse como una variable introducida por conveniencia matemática y sin ningún significado físico especial.

#### 4.3.4. Ecuaciones finales de la potencia y la energía de un atleta

Sustituyendo en la ecuación (4.3.2) las ecuaciones (4.3.3) y (4.3.8) e incorporando el cambio de variable mencionado en (4.3.12) obtenemos la ecuación de la potencia

$$\lambda S_0 e^{(-\lambda t)} + R = Av + \frac{1}{2} \rho v^3 SC_D + mv \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.3.13)$$

La ecuación de energía correspondiente se obtiene al integrar la ecuación (4.3.13) respecto de  $t$

$$S_0 (1 - e^{(-\lambda t)}) + Rt = Ax + \frac{1}{2} \rho SC_D \int_0^t v^3 dt + \frac{1}{2} mv^2 \quad (4.3.14)$$

donde

$$x = \int_0^t v dt \quad (4.3.15)$$

Observamos que al formular las ecuaciones de potencia y energía (4.3.13) y (4.3.14) se han tenido en cuenta todos los términos referidos a los balances energéticos descritos y, a diferencia del modelo de Lloyd [11], no ha sido necesaria la introducción del concepto de eficiencia mecánica.

Por razones dimensionales se puede decir que los parámetros  $S_0$ ,  $R$  y  $A$  son directamente proporcionales a la masa corporal  $m$ . Por otra parte,  $S$  es proporcional a  $m^{\frac{2}{3}}$ . Dividiendo la ecuación (4.3.14) por  $m$  podemos reescribirla como

$$S_0^* (1 - e^{(-\lambda t)}) + R^* t = A^* x + K^* \int_0^t v^3 dt + \frac{v^2}{2} \quad (4.3.16)$$

con

$$S_0^* = \frac{S_0}{m}, \quad R^* = \frac{R}{m}, \quad A^* = \frac{A}{m} \quad \text{y} \quad K^* = \frac{\rho SC_D}{2m} \quad (4.3.17)$$

#### 4.3.5. Distinción para carreras largas y cortas

En su mayor parte, las carreras de larga distancia se ejecutan a una velocidad más o menos constante  $V_{cte}$ . En estas circunstancias el tiempo  $T$  necesario para ejecutar una distancia  $s$  viene dado por la siguiente relación, que se obtiene aproximando la ecuación (4.3.16) por la ecuación que se obtiene al sustituir  $x = s$ ,  $t = T$  y  $v = V_{cte} = \frac{s}{T}$ .

$$S_0^* (1 - e^{(-\lambda T)}) + R^* T = A^* s + K^* V_{cte}^3 T + \frac{V_{cte}^2}{2} \quad (4.3.18)$$

donde la aproximación

$$V_{cte}^3 T = \int_0^T v^3 dt \quad (4.3.19)$$

ha sido introducida para simplificar la expresión. Dejando la ecuación dependiendo únicamente de  $s$  y  $T$  se obtiene

$$S_0^* (1 - e^{(-\lambda T)}) + R^* T = A^* s + K^* \frac{s^3}{T^2} + \frac{s^2}{2T^2}$$

y reorganizando términos llegamos a

$$2S_0^* T^2 (1 - e^{(-\lambda T)}) + 2R^* T^3 = 2A^* s T^2 + 2K^* s^3 + s^2 \quad (4.3.20)$$

la cual es una ecuación implícita de  $s$  y  $T$ .

Si nos centramos ahora en carreras cortas, las aproximaciones que hemos hecho antes no son válidas pues la velocidad que llevaremos no será constante en ningún intervalo de tiempo de la carrera. Usando la notación proporcionada por (4.3.17), la ecuación (4.3.13) puede escribirse como

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{v} (\lambda S_0^* e^{(-\lambda t)} + R^* - A^* v - K^* v^3) \quad (4.3.21)$$

La ecuación (4.3.15) puede escribirse como

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v \quad (4.3.22)$$

Obtenemos así un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para resolverlo, se va a aplicar un esquema proporcionado por los métodos numéricos estudiados en el capítulo 3. Hay que tener en cuenta que la ecuación (4.3.21) tiene un singularidad en  $v = 0$ , es decir, al comienzo de la carrera ( $t = 0$ ). Podemos suponer que la velocidad no va a volver a anularse en ningún instante de la carrera. Para solventar esta singularidad, calcularemos primero la velocidad del atleta en un pequeño incremento de tiempo  $\Delta t$  desde el inicio de la carrera de la siguiente forma:

$$v \partial v = (\lambda S_0^* + R^*) \partial t$$

Integrando se obtiene

$$v = \sqrt{2} (\lambda S_0^* + R^*)^{\frac{1}{2}} (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.23)$$

Durante este tiempo el atleta se desplazará una distancia

$$x = \sqrt{\frac{8}{9}} (\lambda S_0^* + R^*)^{\frac{1}{2}} (\Delta t)^{\frac{3}{2}} \quad (4.3.24)$$

Una vez establecidas las condiciones para el primer incremento de tiempo mediante (4.3.23) y (4.3.24), los pasos restantes se obtienen resolviendo numéricamente las ecuaciones (4.3.21) y (4.3.22).

### 4.3.6. El efecto de una curva

Es de esperar que en una carrera corta (por ejemplo de 200m) un atleta maneje de forma distinta la parte curva y la parte rectilínea. La principal diferencia se debe a los efectos de las fuerzas centrífuga y centrípeta del atleta, que se intentan compensar con una ligera inclinación de su cuerpo, proporcional a la velocidad que lleve. Sin embargo, el ángulo de inclinación está limitado por el ángulo máximo de flexión del tobillo y es de esperar que la eficiencia propulsiva se vea afectada si se llega a este límite. Sin dejar de lado esta observación y recordando que la base de nuestro modelo son los balances energéticos, vamos a suponer que el efecto de tomar una curva se manifestará como un término centrífugo en la ecuación del movimiento y que dicha curva será un arco de circunferencia de radio  $r$ .

Nuestro objetivo es añadir una modificación a la ecuación (4.3.21) que tenga en cuenta esta fuerza centrífuga. Recordemos en primer lugar el modelo de Keller [9] que, en su forma más simple, es una solución a la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(t) - \tau^{-1}v(t) \quad (4.3.25)$$

donde  $f$  es la fuerza por unidad de masa ejercida por el atleta y  $\tau$  es una constante de degradación que modela las resistencias fisiológicas sentidas por el atleta. Esta ecuación diferencial simple se resuelve partiendo de la condición inicial de velocidad  $v(0) = 0$ , y teniendo en cuenta que el atleta sólo puede ejercer una cantidad finita de fuerza por unidad de tiempo ( $f(t) \leq F$ ).

En estudios posteriores y usando argumentos que A.V. Hill [5] ya tuvo en consideración durante su trabajo, Keller [9] incorporó en su modelo un término que hacía referencia al efecto centrífugo de una curva. Puesto que este efecto es normal al movimiento del atleta, se obtiene que

$$f(t)^2 = \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \tau^{-1}v(t) \right)^2 + \mu^2 \frac{v(t)^4}{r^2}$$

El término  $\mu < 0$  se ha añadido para tener en cuenta que el atleta no siente completamente la fuerza centrífuga resultante de su velocidad angular. Observamos que la ecuación del movimiento se recupera si  $r \rightarrow \infty$ . Despejando se obtiene que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\tau^{-1}v(t) + \sqrt{f(t)^2 - \mu^2 \frac{v(t)^4}{r^2}} \quad (4.3.26)$$

Vamos a introducir de forma parecida a Keller [9] un término que incorpore el efecto centrífugo a la ecuación (4.3.21)

$$(\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^*)^2 = \left( v \frac{\partial v}{\partial t} + A^* v + K^* v^3 \right)^2 + \mu^2 \frac{v^6}{r^2}$$

Eliminando los cuadrados se tiene que

$$\sqrt{(\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^*)^2 - \mu^2 \frac{v^6}{r^2}} = v \frac{\partial v}{\partial t} + A^* v + K^* v^3$$

y despejando obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A^* - K^*v^2 + \frac{1}{v} \sqrt{(\lambda S_0^* e^{(-\lambda t)} + R^*)^2 - \mu^2 \frac{v^6}{r^2}} \quad (4.3.27)$$

### 4.3.7. Cálculo del tiempo necesario para ejecutar una carrera

Supongamos en primer lugar que la carrera se divide en un primer tramo de trayectoria rectilínea y otro tramo de trayectoria curvilínea. La distancia total  $d$  será entonces la suma de las distancias que se recorren en cada trayectoria. El problema que queremos resolver es el siguiente

$$d = d_r + d_c = \int_0^{t_1} v_r(t) dt + \int_{t_1}^T v_c(t) dt$$

En primer lugar calculamos la solución del problema de valor inicial dado por la ecuación (4.3.21) y la condición inicial  $v_r(0) = 0$ . Conocida  $v_r(t)$  resolvemos la ecuación integral

$$d_r = \int_0^{t_1} v_r(t) dt$$

donde nuestra incógnita es  $t_1$ . Acto seguido, resolvemos el problema de valor inicial dado por la ecuación (4.3.27) y la condición inicial  $v_c(t_1) = v_r(t_1)$ . Conocida  $v_c(t)$  ya podemos hallar  $T$ , solución de la ecuación integral

$$d_c = \int_{t_1}^T v_c(t) dt$$

Si tenemos una trayectoria distinta (primero curvilínea y después rectilínea, o donde las trayectorias rectilínea y curvilínea se intercalen) la manera de actuar es similar. Para cada tramo  $p$  se resuelve un problema de valor inicial donde la ecuación dependerá del tipo de trayectoria del tramo y la condición inicial será  $v_p(t_{p-1}) = v_{p-1}(t_{p-1})$ , siendo  $t_{p-1}$  el tiempo final del tramo  $p-1$  y por tanto el tiempo inicial del tramo  $p$  (En el primer tramo la condición inicial será  $v_1(0) = 0$ ). Tras calcular  $v_p(t)$  resolvemos la ecuación integral

$$d_p = \int_{t_{p-1}}^{t_p} v_p(t) dt$$

obteniéndose  $t_p$ , tiempo utilizado para recorrer los primeros  $p$  tramos. Así, el tiempo  $T$  necesario para recorrer una distancia  $d$  será la solución de la ecuación integral del último tramo ( $T = t_p$ ).



# Capítulo 5

## Simulación numérica

En esta sección vamos a realizar diversos ensayos para poner en práctica la teoría y discutiremos sobre la modelización descrita en los capítulos anteriores. En primer lugar, realizaremos una serie de tests sobre un problema de valor inicial con solución conocida para comparar los distintos métodos que vamos a utilizar, ver sus errores y estudiar su orden. A continuación, desarrollaremos el modelo obtenido para carreras de corta distancia en el capítulo 4, analizando cómo se comporta la solución en función de los parámetros que aparecen y comparando los resultados obtenidos con resultados reales de diversas competiciones y con las simulaciones realizadas por Ward-Smith [19] en un estudio similar. Por último, se realizará una comparación de distintos modelos con y sin penalización de la curvatura, discutiendo donde es necesario añadirla o no para obtener aproximaciones consistentes y semejantes a la realidad.

## 5.1. Test académicos

Consideremos el siguiente problema de valor inicial:

$$(P) \begin{cases} y' = y & \forall t \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sabemos que su solución exacta es  $y(t) = e^t$ . Para empezar, aproximemos la solución usando el método de Adams-Bashforth de distintos pasos (1,2 y 3 respectivamente).

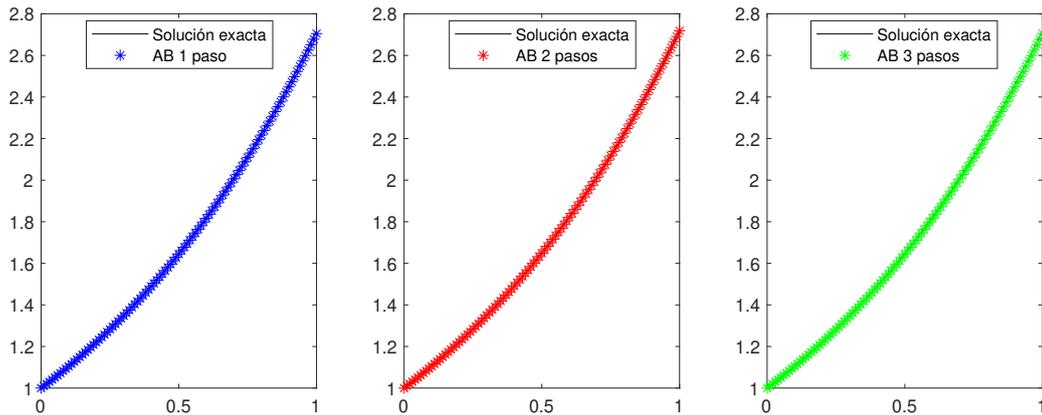


Figura 5.1: Soluciones numéricas usando Adams-Bashforth.

Veamos que, efectivamente, los órdenes de los métodos de Adams-Bashforth de 1,2 y 3 tres pasos son 1,2 y 3. Para ello, comparemos los errores de cada uno de los métodos variando el paso  $h$ .

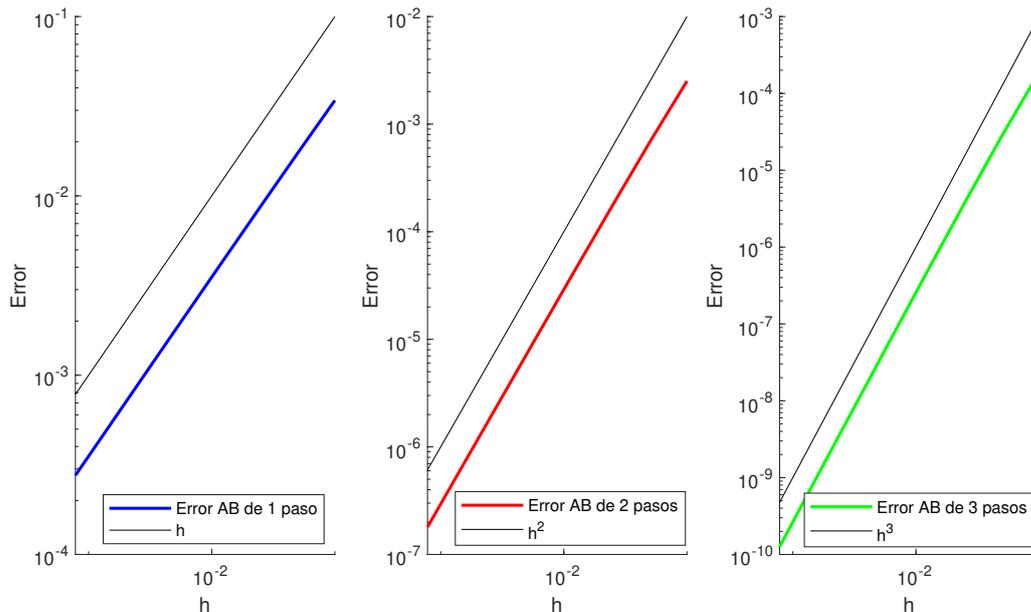


Figura 5.2: Errores de los métodos de Adams-Bashforth de 1, 2 y 3 pasos.

En la figura 5.2 podemos ver en escala logarítmica que los errores siguen una recta de pendiente 1, 2 y 3 respectivamente, lo que indica que los órdenes de los métodos son 1, 2 y 3. Análogamente para los métodos de Adams-Moulton de 1, 2 y 3 pasos representamos las aproximaciones numéricas de la solución.

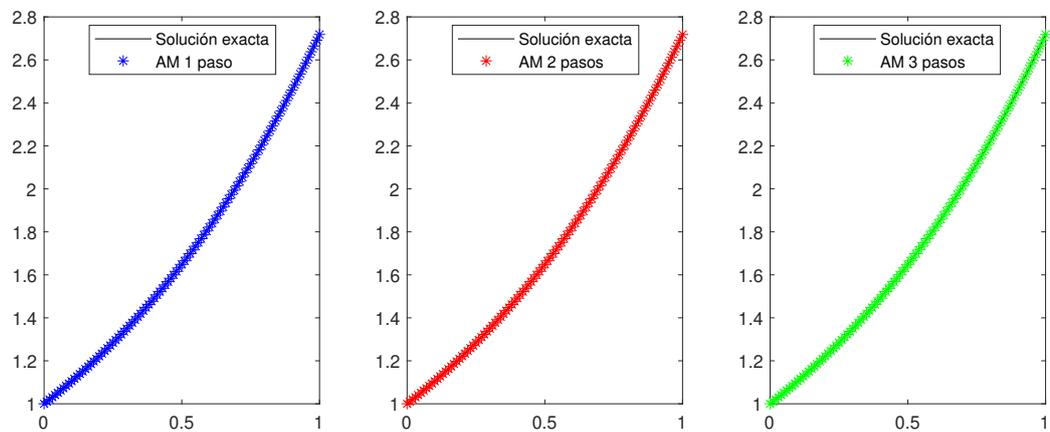


Figura 5.3: Soluciones numéricas usando Adams-Moulton.

y sus respectivos errores en escala logarítmica variando el paso  $h$

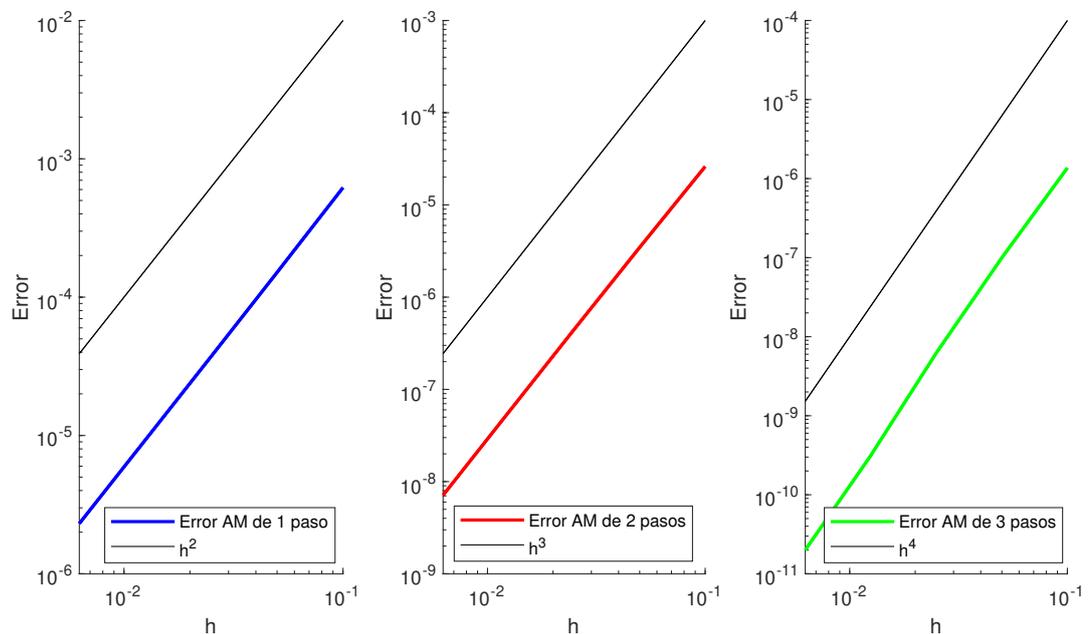


Figura 5.4: Errores de los métodos de Adams-Moulton de 1, 2 y 3 pasos.

De nuevo, las gráficas muestran que los errores siguen una recta de pendiente 2, 3 y 4 (respectivamente), lo que confirma que los métodos tienen el orden que ya se calculó en el capítulo 3.

Vamos a añadir en el estudio un método predictor-corrector de orden 2 (como vimos, usaremos Adams-Bashforth de dos pasos para el esquema predictor y Adams-Moulton de un paso para el esquema corrector).

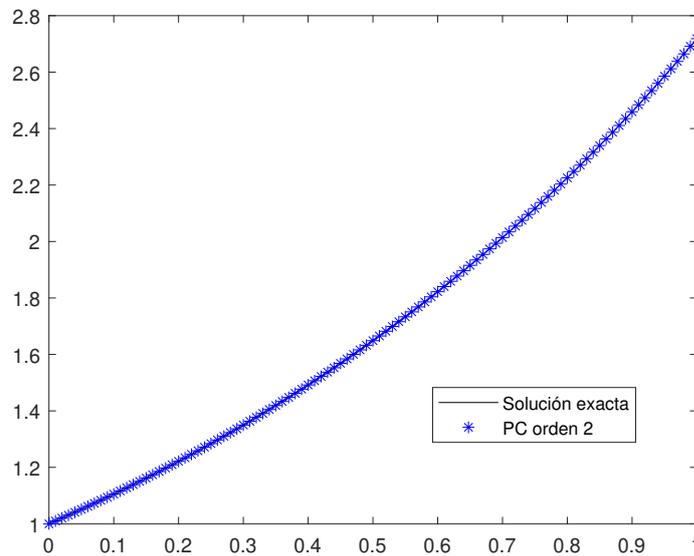


Figura 5.5: Solución numérica usando un método Predictor-Corrector de orden 2.

Al igual que antes, mostremos en una gráfica con escala logarítmica el error cometido por el método predictor-corrector y comprobemos que, en efecto, es de orden 2.

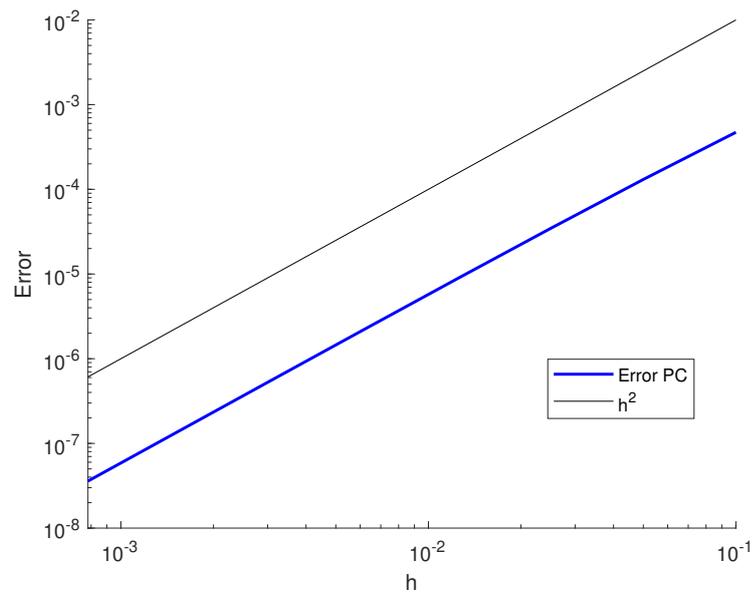


Figura 5.6: Errores correspondientes a la aproximación numérica del método Predictor-Corrector.

De nuevo, es fácil ver gracias a la figura 5.6 que el método tiene orden dos. Hay que tener en cuenta que, tanto para Adams-Bashforth de 2 pasos como para el método predictor-corrector descrito arriba necesitamos conocer los valores iniciales en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , de los cuales sólo conocemos la condición inicial  $y(t_1) = 1$ . Para solventarlo manteniendo el orden usaremos el método de Adams-Moulton para calcular la aproximación en el instante  $t_2$  y a partir de ahí inicializaremos el método correspondiente. Análogamente, para Adams-Bashforth de 3 pasos y Adams-Moulton de 3 pasos se han utilizado para obtener los valores en  $t_2$  y  $t_3$  métodos Runge-Kutta de tercer y cuarto orden, respectivamente.

La siguiente tabla muestra de forma más compacta los errores y los órdenes de los distintos métodos usados tomando  $h = 0.01$ .

	AB 1 paso	AB 2 pasos	AB 3 pasos	AM 1 paso	AM 2 pasos	AM 3 pasos	P-C orden 2
Error paso $h$	0.0634	5.225e-4	4.619e-6	1.065e-4	5.222e-7	2.335e-9	1.020e-4
Error relativo paso $h$	0.0035	2.904e-5	2.568e-7	5.928e-6	2.903e-8	1.298e-10	5.671e-6
Error paso $2h$	0.0899	0.0015	2.546e-5	3.048e-4	2.932e-6	2.572e-8	2.794e-4
Error relativo paso $2h$	0.0070	1.145e-4	1.988e-6	2.381e-5	2.290e-7	2.010e-9	2.182e-5
Orden	0.9947	1.9788	2.9531	2.0072	2.9797	3.9519	1.9443

Tabla 5.1: Errores y órdenes de los métodos multipaso.

### Nota

Para el cálculo de los distintos errores se ha utilizado la norma euclídea.

Se puede hacer un estudio más exhaustivo para comprobar que el error de convergencia del método converge realmente al valor esperado. Consideremos el método de Adams-Bashforth de dos pasos. La tabla que aparece a continuación muestra el orden del método para una serie de valores de  $h$ .

$h$	Orden
0.01	1.9788
0.01/2	1.9896
0.01/4	1.9949
0.01/8	1.9974
0.01/16	1.9987

Tabla 5.2: Orden del método de Adams-Bashforth de 2 pasos para distintos valores de  $h$ .

Como era de esperar, el orden del método converge a 2 cuando  $h$  tiende a cero.

## 5.2. Test aplicados

Una vez validados nuestros programas vamos a utilizarlos para resolver las ecuaciones propuestas en el desarrollo del capítulo 4. Como hemos dicho antes, vamos a centrarnos en carreras de distancias relativamente cortas, de 100 a 10000 metros, donde la velocidad va variando en cada instante de tiempo y cuya modelización viene dada por la ecuación (4.3.21) si se trata de trayectoria rectilínea o por la ecuación (4.3.27) si la trayectoria es curvilínea.

Comenzaremos con un estudio similar al realizado por Ward-Smith [19], comparando los resultados obtenidos para distintas carreras con resultados reales y con las simulaciones que éste obtuvo. Ward-Smith [19] realizó su estudio suponiendo que la trayectoria era rectilínea, suposición que se va a mantener en primera instancia para contrastar los resultados. En la última parte del trabajo compararemos el efecto producido del término de curvatura en distintos modelos usando la competición de 200 metros lisos con el fin de llegar a una conclusión que nos permita contrastar su influencia.

### 5.2.1. Estimación de parámetros

Para determinar las constantes de dichas ecuaciones se van a utilizar datos medios proporcionados por atletas que participaron en los juegos olímpicos durante los años comprendidos entre 1960 y 1976, recogidos por Ward-Smith [19], Davies [2], Margaria [13] y Lloyd [11]. Comencemos por el parámetro  $K^*$ ; recordemos que

$$K^* = \frac{\rho S C_D}{2m}$$

En condiciones normales de temperatura y presión, la densidad atmosférica viene dada por  $1.22 \text{ kg m}^{-3}$ . El peso medio para un atleta de complexión física mediana es de  $m = 70 \text{ kg}$  y el producto de  $S C_D$  es de  $0.385 \text{ m}^2$  (véase Margaria [13]). Así,

$$K^* = \frac{1.22 \cdot 0.385}{2 \cdot 70} = 3.355 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Los datos de Margaria [13] y Davies [2] obtenidos empíricamente y la extrapolación de dichos resultados a carreras cortas realizada por Ward-Smith [18] nos proporcionan un valor para  $A^*$  de

$$A^* = 3.9 \text{ J m}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

La tasa máxima de liberación de energía del mecanismo oxidativo oscila en un intervalo demasiado grande en función del entrenamiento que tenga el atleta. Dicho esto, utilizaremos los datos recogidos por Margaria [13] y empleados más tarde por Ward-Smith [19] de atletas que compitieron en los Juegos Olímpicos del año 1972.

$$R^* = 23.5 \text{ W kg}^{-1} = 23.5 \text{ J s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\lambda = 0.03 \text{ s}^{-1}$$

Por último, para  $S_0^*$  utilizaremos la estimación empírica propuesta por Lloyd [11] y utilizada por Ward-Smith [19] en su estudio, que viene dada por

$$S_0^* = 900 \text{ J kg}^{-1}$$

En la pista de atletismo, el radio de la curva que toma el atleta depende de la calle en la que se encuentre. Para facilitar la aproximación, suponemos que el atleta corre por la calle central, dejando dividida la pista en dos tramos rectilíneos de 100 metros cada uno y dos tramos curvilíneos correspondientes a dos semicircunferencias de radio  $\frac{100}{\pi}$ . El término  $\mu$  se introdujo para tener en cuenta que el atleta no siente toda la fuerza centrífuga resultante de su velocidad angular. Como depende de la distancia de la carrera y del momento en el que se tome la curva, no existe una estimación empírica concreta. No obstante, Mureika [14] estimó en su estudio que para competiciones relativamente cortas (inferiores a 400m) cualquier valor de  $\mu^2$  comprendido entre 0.50 y 0.80 era factible.

Los datos de los parámetros quedan recogidos en la siguiente tabla:

Parámetro	Valor empírico
$S_0^*$	900 J kg <sup>-1</sup>
$\lambda$	0.03 s <sup>-1</sup>
$R^*$	23.5 J s <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup>
$A^*$	3.9 J m <sup>-1</sup> kg <sup>-1</sup>
$K^*$	3.355 · 10 <sup>-3</sup> m <sup>-1</sup>
$r$	100/π m
$\mu^2$	0.65

Tabla 5.3: Valor empírico de los parámetros que aparecen en la ecuación (4.3.21).

Recordemos que la ecuación (4.3.21) tiene un punto de discontinuidad en el instante  $t = 0$ . Para solventarlo, utilizaremos las ecuaciones (4.3.23) y (4.3.24) tomando  $\Delta t = 0.05$  s.

### 5.2.2. Aplicación de los métodos al objeto de estudio

Para la resolución numérica nos vamos a centrar en los métodos estudiados de orden dos, es decir, Adams-Bashforth de 2 pasos, Adams-Moulton de 1 paso y el predictor-corrector cuyo esquema predictor es Adams-Bashforth de dos pasos y el corrector se trata de Adams-Moulton de 1 paso.

Queremos resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{1}{v} (\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^* - A^* v - K^* v^3), & t \in [0, T] \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

Ya vimos como teníamos que tratar la discontinuidad en  $t = 0$  en el capítulo 4, luego nuestro problema pasa a ser

$$\begin{cases} v'(t) = \frac{1}{v} (\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^* - A^* v - K^* v^3), & t \in [\Delta t, T] \\ v(\Delta t) = \sqrt{2} (\lambda S_0^* + R^*)^{\frac{1}{2}} (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que  $T$  ha de ser suficientemente grande para contener al instante de tiempo que queremos obtener. Consideremos una partición del intervalo  $[\Delta t, T]$

$$[\Delta t, T] = \{t_1 = \Delta t < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T\}$$

con  $h_n = t_{n+1} - t_n, \forall n = 1..N - 1$ . Consideremos la función

$$f(t, v) = \frac{1}{v} (\lambda S_0^* e^{(-\lambda t)} + R^* - A^* v - K^* v^3)$$

### Resolución numérica usando Adams-Bashforth de dos pasos

Para este método necesitamos conocer los valores de  $v$  en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ , pero sólo conocemos el valor en  $t_1$ . Para calcular una aproximación en  $t_2$  manteniendo el orden del método aplicaremos un paso del método de Crank-Nicolson, es decir:

$$v_2 = v_1 + \frac{h_1}{2}(f_1 + f_2)$$

siendo  $f_i = f(t_i, v_i)$ . Esta es una ecuación de punto fijo, que resolveremos usando el método de aproximaciones sucesivas. Una vez calculado este valor, el esquema a seguir sería el siguiente:

$$\begin{cases} \text{Conocido } v_1 \text{ y } v_2 \\ v_{n+1} = v_n + h_n b_{n,0,1} f_n + h_n b_{n,1,1} f_{n-1}, \quad \forall n = 2..N - 1 \end{cases}$$

### Resolución numérica usando Adams-Moulton de un paso

El esquema que empleamos es el siguiente

$$\begin{cases} \text{Conocido } v_1 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{2} f_n + \frac{h_n}{2} f_{n+1}, \quad \forall n = 1..N - 1 \end{cases}$$

En este caso debemos resolver para cada etapa una ecuación implícita usando el método de aproximaciones sucesivas.

### Resolución numérica usando Predictor-Corrector

Como en el caso de Adams-Bashforth, usamos Crank-Nicolson para encontrar la aproximación en  $t_2$ . Acto seguido, procedemos de la siguiente forma:

$$\text{(P)} \quad v_{n+1}^{(0)} = v_n + h_n b_{n,0,1} f_n + h_n b_{n,1,1} f_{n-1}$$

$$f_{n+1}^{(0)} = f(t_{n+1}, v_{n+1}^{(0)})$$

$$\text{(C)} \quad v_{n+1} = v_n + h_n b_{n,-1,0}^* f_{n+1}^{(0)} + h_n b_{n,0,0} f_n$$

$$f_{n+1} = f(t_{n+1}, v_{n+1})$$

Una vez obtenidas las velocidades en cada instante de tiempo se puede obtener la posición  $x$  en cada instante, luego basta obtener el tiempo  $t$  donde la posición  $x$  obtenida de la ecuación (4.3.22) sea igual a la distancia total de la carrera.

### 5.2.3. Simulación de carreras de los Juegos Olímpicos

Como dijimos al comienzo del capítulo, supongamos que seguimos una trayectoria rectilínea durante toda la carrera. En la siguiente tabla se recogen resultados de las competiciones de los Juegos Olímpicos de 1960, 1964, 1968, 1972 y 1976, siendo la columna 2 la media de los tres primeros clasificados en cada competición y la columna 3 la estimación realizada por Ward-Smith [19], utilizando para ello el método de Runge-Kutta de 4º orden.

Distancia de la competición (en metros)	Tiempo real (en segundos)	Predicción de Ward-Smith (en segundos)
100	10.19	10.09
200	20.40	20.42
400	44.93	44.50
800	105.48	104.15
1500	218.24	221.49
5000	816.48	818.89
10000	1686.83	1673.04

Tabla 5.4: Comparación de las predicciones de Ward-Smith con los resultados de los Juegos Olímpicos.

Los resultados de las aproximaciones numéricas obtenidos usando los métodos de Adams-Bashforth de 2 pasos, Adams-Moulton de un paso y predictor-corrector de segundo orden son los siguientes:

Distancia de la competición (en metros)	Tiempo real (en segundos)	Tiempo AB 2 pasos (en segundos)	Tiempo AM 1 paso (en segundos)	Tiempo P-C orden 2 (en segundos)
100	10.19	10.2466	10.2438	10.2436
200	20.40	20.3853	20.3821	20.3818
400	44.93	44.3205	44.3166	44.03163
800	105.48	104.3823	104.3774	104.3771
1500	218.24	222.3761	222.3710	222.3707
5000	816.48	820.2980	820.2929	820.2925
10000	1686.83	1674.59	1674.58	1674.51

Tabla 5.5: Aproximaciones numéricas de las distintas competiciones.

Podemos observar que apenas existen diferencias entre nuestras tres aproximaciones, lo que era de esperar por tratarse de tres métodos de orden 2. No obstante, el coste computacional no es el mismo, siendo el de Adams-Moulton significativamente mayor a los otros dos. En la siguiente tabla mostramos el coste computacional requerido por cada programa en cada competición (en segundos)

Distancia de la competición (en metros)	Adams-Bashforth de 2 pasos	Adams-Moulton de 1 paso	Predictor-Corrector de orden 2
100	3.754e-3	4.6092e-2	8.396e-3
200	8.799e-3	7.4907e-2	1.6110e-2
400	1.4610e-2	1.7506e-1	2.4126e-2
800	2.6258e-2	4.7557e-1	5.4463e-2
1500	5.2805e-2	1.3226	1.0589e-1
5000	1.65126e-1	22.4451	3.3321e-1
10000	3.3601e-1	206.4451	6.7801e-1

Tabla 5.6: Coste computacional requerido en cada competición

También merece la pena observar que el error incrementa al hacerlo la distancia de la carrera. Esto es debido a que al tener que resolver durante más tiempo, se van acumulando los errores. Por tanto, las competiciones de mayor distancia tienen un mayor número de errores de redondeo. No obstante, las aproximaciones obtenidas para las carreras más cortas son bastante precisas.

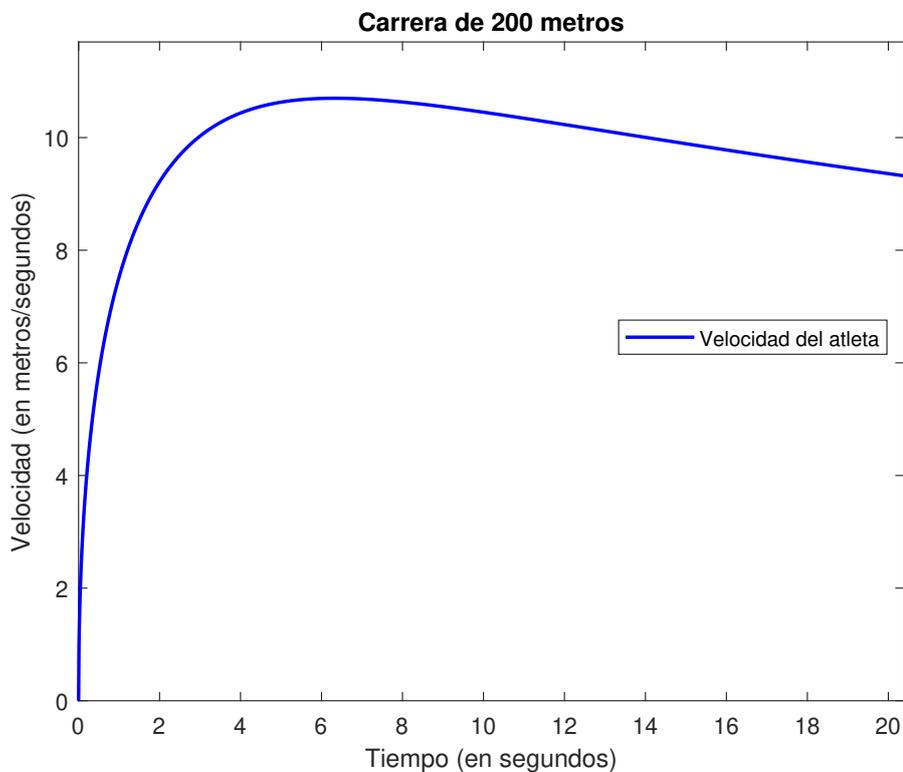


Figura 5.7: Velocidad estimada en un atleta en una carrera de 200 metros.

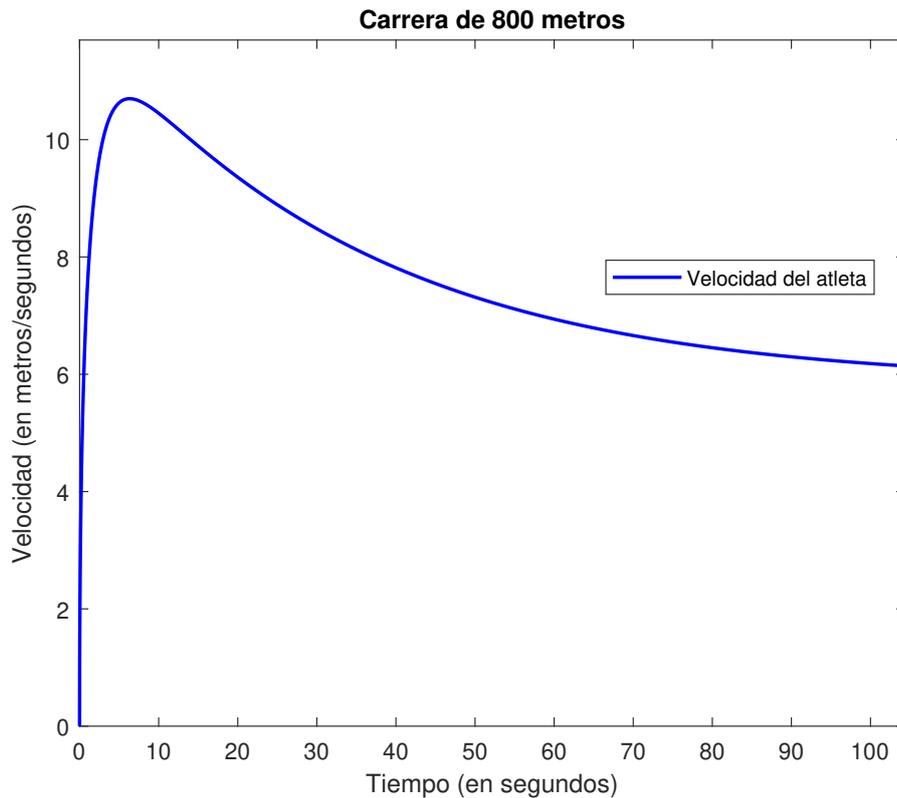


Figura 5.8: Velocidad estimada en un un atleta en una carrera de 800 metros.

En las figuras 5.7 y 5.8 podemos observar el comportamiento de la velocidad estimada de un atleta mediante el método predictor-corrector de segundo orden para carreras de 200 y 800 metros respectivamente. En la carrera de 200 metros el atleta acelera hasta alcanzar una velocidad que prácticamente podrá mantener hasta el final de la carrera. Sin embargo, en la carrera de 800 metros no es posible llevar a cabo esta estrategia debido al alto gasto de energía producido en un intervalo de tiempo tan prolongado, luego se producirá una deceleración hacia una velocidad que el atleta pueda mantener hasta terminar la carrera.

#### 5.2.4. Influencia del término de curvatura

El objetivo de esta simulación es ver la influencia que tiene la inclusión del término de curvatura en nuestro modelo de balances energéticos. La descripción es la siguiente: se realizará una simulación de una carrera de 200 metros en una pista dividida en una parte curvilínea de 100 metros en forma de semicirconfunferencia de radio  $\frac{100}{\pi}$  y en una parte rectilínea de otros 100 metros.

Para la simulación numérica, visto que los tres métodos utilizados proporcionan resultados casi idénticos vamos a utilizar el método predictor-corrector de segundo orden. Hay que tener en cuenta que para  $\Delta t$  suficientemente pequeño podemos suponer que no se aprecian diferencias entre comenzar la carrera en trayectoria curvilínea frente a empezarla

en una recta, luego las ecuaciones (4.3.23) y (4.3.24) siguen siendo válidas para resolver el punto de discontinuidad inicial. Supongamos que el primer tramo es el curvilíneo, luego tomaremos como  $f_c$  la función proporcionada por la ecuación (4.3.27)

$$f_c = -A^* - K^*v_c^2 + \frac{1}{v_c} \sqrt{(\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^*)^2 - \mu^2 \frac{v_c^6}{r^2}}$$

donde  $v_c$  denota a la velocidad en curva. Así, el problema que vamos a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} v_c'(t) = -A^* - K^*v_c^2 + \frac{1}{v_c} \sqrt{(\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^*)^2 - \mu^2 \frac{v_c^6}{r^2}}, & t \in [\Delta t, T_c] \\ v_c(\Delta t) = \sqrt{2} (\lambda S_0^* + R^*)^{\frac{1}{2}} (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Con la aproximación numérica de las velocidades para cada unidad de tiempo podemos calcular el tiempo que tarda en recorrer la trayectoria curvilínea (que llamaremos  $t_c$ ). Una vez obtenida, sea  $f_r$  la función proporcionada por la ecuación (4.3.21)

$$f_r = \frac{1}{v} (\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^* - A^*v - K^*v^3)$$

El objetivo ahora es resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} v_r'(t) = \frac{1}{v_r} (\lambda S_0^* e^{-\lambda t} + R^* - A^*v_r - K^*v_r^3), & t \in [t_c, T] \\ v_r(t_c) = v_c(t_c) \end{cases}$$

siendo  $v_r$  la velocidad del atleta en la trayectoria rectilínea. De aquí obtendremos las aproximaciones de la velocidad para cada instante de tiempo y, haciendo lo mismo de antes, somos capaces de calcular el tiempo necesario para recorrer la distancia de la trayectoria rectilínea y, por tanto, el tiempo total  $t_f$ . Por otro lado, si comenzamos en el tramo rectilíneo y acabamos en el curvilíneo la predicción del tiempo se consigue de forma análoga intercambiando las funciones  $f_c$  y  $f_r$ .

Los resultados obtenidos son los siguientes:

Trazada	Tiempo en 0-100 m.	Tiempo en 100-200 m.	Tiempo Final
Recta-Curva	10.2436	11.1382	21.3818
Curva-Recta	11.07	10.4826	21.5554

Tabla 5.7: Estimación de tiempos para una carrera de 200 metros..

Las siguientes gráficas muestran la velocidad del atleta en las dos situaciones que estamos simulando:

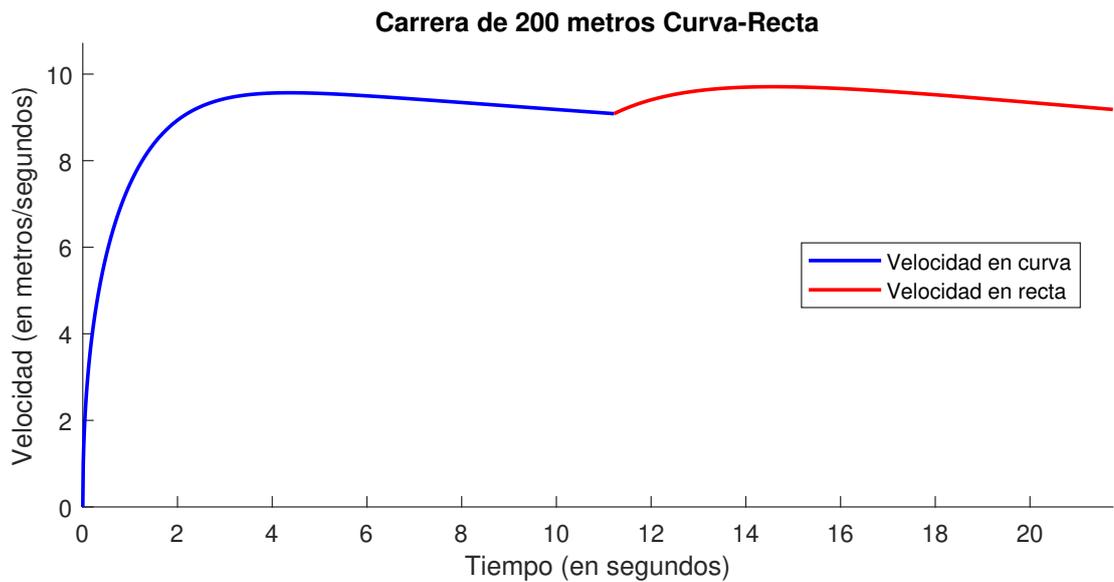


Figura 5.9: Velocidad estimada de un atleta en 100 metros de trayectoria curvilínea seguidos de 100 metros de trayectoria rectilínea.

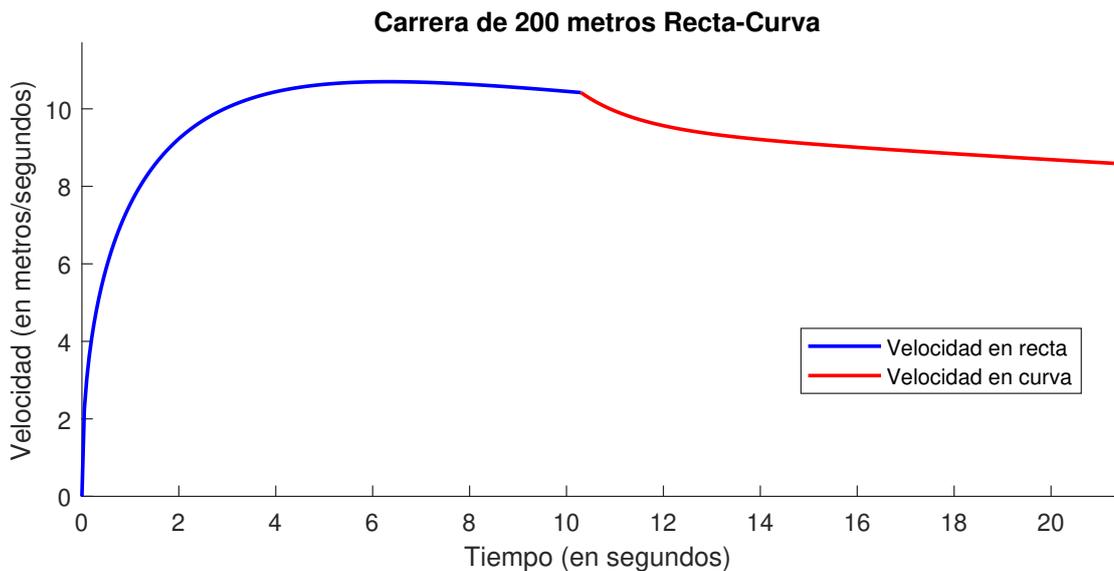


Figura 5.10: Velocidad estimada de un atleta en 100 metros de trayectoria rectilínea seguidos de 100 metros de trayectoria curvilínea.

En la primera gráfica se observa como la velocidad del atleta en el tramo curvilíneo alcanza su máximo y desciende levemente hasta finalizar la curva, donde aumenta algo su velocidad al no sufrir la fuerza centrífuga. No obstante, el esfuerzo acumulado hace que vaya perdiendo velocidad hasta llegar a la meta.

En la segunda gráfica se observa que al empezar en trayectoria rectilínea la velocidad alcanzada es mayor, lo que provoca una mayor fuerza centrífuga al llegar pasar al tramo curvilíneo, provocando una deceleración notable hasta llegar a la meta.

En ambas simulaciones el tiempo final obtenido es entorno a un 5% superior al valor real. Recordemos que nuestro modelo estaba basado en balances energéticos producidos por el cuerpo al someterse a un esfuerzo, mientras que el término de curvatura es un término mecánico obtenido de la ecuación del movimiento. Esto nos hace pensar que el hecho de realizar una curva está incluido implícitamente en el modelo proporcionado por la ecuación (4.3.21), por lo que introducir un término adicional que penalice la curvatura sería redundante.

Para finalizar con el estudio vamos a ver que, a diferencia del modelo de Keller donde el término de curvatura es esencial para proporcionar una aproximación consistente, en el modelo proporcionado por balances energéticos dicho término sólo empeora la solución. Seguimos en la misma situación que antes, una carrera de 200 metros con una primera parte curvilínea y otra rectilínea, ambas de 100 metros. Recordemos que el modelo de Keller viene modelado por la ecuación (4.3.25) para trayectorias rectilíneas y por (4.3.26) para trayectorias curvilíneas. Para la estimación de los parámetros y la elección de la función  $f$  nos fijaremos en el estudio de Mureika [14], que utilizó una función lineal  $f(t) = (a - bt)$  y los siguientes valores empíricos:

Parámetro	Valor empírico
$a$	9.596 m s <sup>-2</sup>
$b$	0.058 m s <sup>-3</sup>
$\tau$	1.274 s
$\mu^2$	0.65
$r$	100/ $\pi$ m

Tabla 5.8: Valores empíricos de los parámetros usados en el modelo de Keller.

En la siguiente figura se va a representar el tiempo necesario para ejecutar una carrera de 200 metros con los siguientes modelos:

1. Modelo de Keller suponiendo trayectoria rectilínea
2. Modelo de Keller con corrección de la curvatura en los primeros 100 metros.
3. Modelo basado en balances energéticos.
4. Modelo basado en balances energéticos con corrección de la curvatura en los primeros 100 metros.

Además, se va a añadir la velocidad media para recorrer 200 metros en un tiempo total de 20.40 segundos, media de los resultados reales obtenidos en las olimpiadas de los años comprendidos entre 1960 y 1976 en la competición de 200 metros lisos.

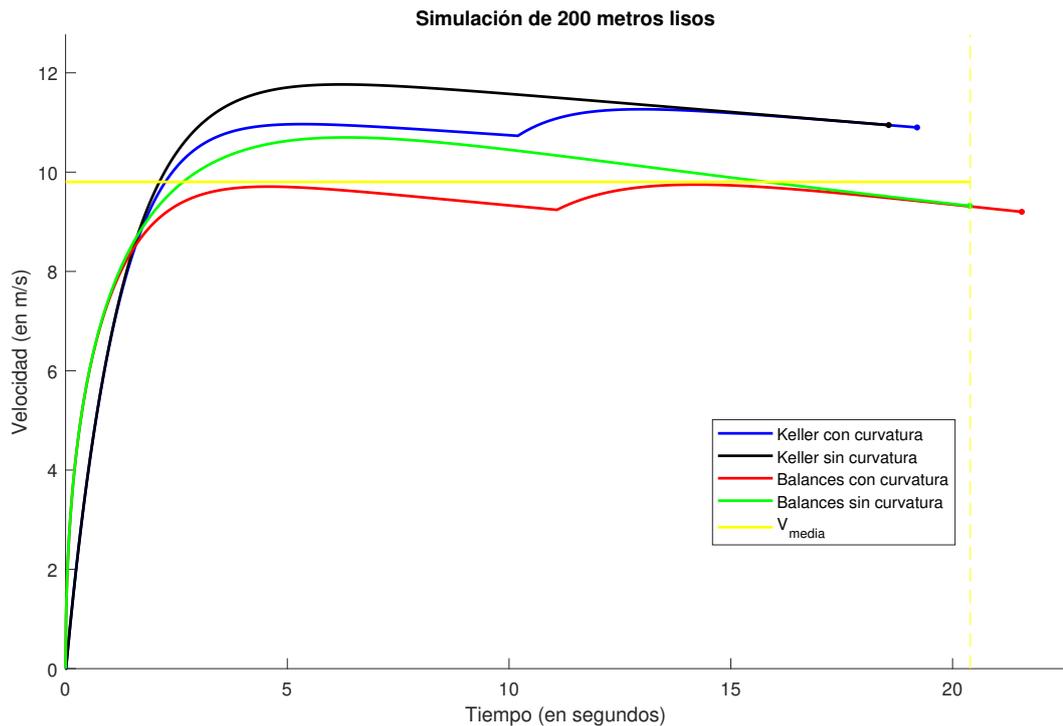


Figura 5.11: Velocidad de un atleta en 200 metros lisos utilizando diferentes modelos matemáticos.

En primer lugar es claro que utilizar el modelo de Keller sin añadirle el término de curvatura provoca que la velocidad tome valores demasiado altos, alejándolo de la solución real. Por tanto en simulaciones de carreras donde haya trayectoria curvilínea este término es imprescindible.

Si nos fijamos ahora en nuestro modelo de balances energéticos observamos que introducir el término de curvatura daña la aproximación, lo que refuerza la idea de que introducir un término mecánico en un modelo basado en balances energéticos ralentiza en exceso la velocidad a la hora de afrontar una curva, hecho conocido como sobreajuste. Si no le introducimos este término observamos que el comportamiento en la curva (primeros 100 metros) es prácticamente idéntico al modelo de Keller con el término de curvatura y en el tramo rectilíneo sigue una velocidad similar a la velocidad media de la solución real.

Todo esto nos hace llegar a la conclusión de que el modelo de carrera dado por la ecuación (4.3.21) simula de forma eficaz el tiempo necesario para ejecutar una carrera. Esto no quiere decir que el uso de la ecuación del movimiento vaya a quedar obsoleta, simplemente es un enfoque distinto a la segunda ley de Newton, con base física y biológica en lugar de mecánica y que puede ser adaptado a los niveles físicos atleta, siendo esto de gran ayuda para su posterior preparación física y mejora del rendimiento.

### 5.2.5. Observaciones

1. El modelo propuesto está limitado por constantes empíricas, obtenidas mediante la recogida promediada de datos de los atletas a los que luego hemos simulado sus tiempos. Las aproximaciones son cercanas a los datos reales, pero un cambio en la toma de las constantes supondrá un cambio en las predicciones.
2. En relación con la observación anterior, sería interesante realizar como extensión un análisis de sensibilidad con respecto a los parámetros. Con esto, podríamos adaptar el modelo al rendimiento físico de un atleta en particular, lo que sería de gran ayuda a la hora de diseñar entrenamientos personalizados.
3. La tasa de trabajo contra la resistencia aerodinámica se ha tomado en ausencia de viento por la aplicación del modelo a competiciones olímpicas, que son realizadas en estadio cerrado. La existencia de viento alteraría la constante  $K^*$  introducida en el modelo, pero por su imposible predicción a priori no se ha tenido en cuenta.
4. Cabe destacar el hecho de que el modelo sea consistente para carreras de distancias tan dispares como pueden ser la de 100 metros y la de 10000. Nótese también que en carreras como la de 5000 o de 10000 metros hay una amplia variedad de estrategias a seguir, no sólo la inducida por el modelo.

# Bibliografía

- [1] CROUZEIX M. y MIGNOT A.L., *Analyse numérique des équations différentielles*, 2ª edición, págs. 5-144, 1989.
- [2] DAVIES C.T.M., *Effect of wind assistance and resistance on the forward motion of a runner*, págs. 156-170, 1980.
- [3] FURASAWA K., HILL A.V. y PARKINSON J.L., *The dynamics of sprint running*, Proc. R. Soc., págs. 29-42, 1927.
- [4] FURASAWA K., HILL A.V. y PARKINSON J.L., *The energy used in sprint running*, Proc. R. Soc., págs. 43-50, 1927.
- [5] HILL A.V., *The physiological basis of athletic records*, Assoc. for the Adv. of Science, págs. 156-170, 1925.
- [6] HILL A.V., *The air resistance to a runner*, Proc. R. Soc., págs. 380-385, 1927.
- [7] HILL A.V., *The heat of shortening and the dynamic constants of muscles*, Proc. R. Soc., págs. 136-195, 1938.
- [8] KELLER J.B., *A theory of competitive running*, Physics Today, págs. 43-47, 1973.
- [9] KELLER J.B., *Optimal velocity in a race*, Amer. Math. Monthly. págs. 474-480, 1974.
- [10] LLOYD B.B., *Energetics of running: An analysis of world records*, Advanced Science, págs. 515-530, 1966.
- [11] LLOYD B.B., *World running records as maximal performances. Oxygen debt and other limiting factors*, págs. 218-226, 1967.
- [12] LLOYD B.B. y MORAN P.T., *Analogue computer simulation of the equation of motion of a runner*, págs 18-20, 1966.
- [13] MARGARIA R., *Biomechanics and Energetics of Muscular Exercise*, Clarendon Press, Oxford, 1982.
- [14] MUREIKA J.R., *A simple Model for Predicting Sprint Race Times Accounting for Energy Loss on the Curve*, University of Southern California, 1997.
- [15] QUARTERONI A. y SALERI F., *Cálculo científico con Matlab y Octave*, Springer, págs. 193-243, 2006.

- [16] SENATOR M., *Extending the theory of dash running*, págs. 209-213, 1982.
- [17] VAUGHAN C.L., *Simulation of a sprinter*, págs. 65-83, 1983.
- [18] WARD-SMITH A.J., *Air resistance and its influence on the biomechanics and energetics of sprinting at sea level and at altitude*, págs. 339-347, 1960.
- [19] WARD-SMITH A.J., *A mathematical theory of running, based on the First Law of Thermodynamics, and its application to the performance of World-Class athletes*, págs. 337-349, 1984.
- [20] World Athletics Webpage.  
<https://www.worldathletics.org/>, 1 de Junio de 2020.