FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

LA TRANSFORMADA DE CAUCHY DE MEDIDAS EN LA CIRCUNFERENCIA UNIDAD

Por Francisco José Cruz Zamorano

Dirigido por D. Guillermo Curbera Costello

Trabajo para optar al Doble Grado en Física y Matemáticas

A las dos personas que
se han preocupado por
asegurar que llegase este
momento: *mis padres.*

Resumen

Una transformada de Cauchy es una función holomorfa, definida en el disco unidad del plano complejo, y construida, por integración, a partir de una medida boreliana compleja en la circunferencia unidad. Dicha construcción hace que algunas propiedades de tal función se deduzcan directamente de las propiedades de la medida de la que proviene. En particular, cuando se profundiza en este estudio, aparece una estrecha relación entre el espacio de las transformadas de Cauchy y los espacios de Hardy de funciones analíticas en el disco unidad.

Esta relación sugiere el estudio de la transformada de Cauchy como un operador lineal definido sobre un espacio de medidas. Con esta visión se obtienen muchos de los resultados que se estudian en este trabajo: la relación con la transformada de Poisson, con la proyección de Riesz o con la derivada de una medida, por ejemplo.

También se aborda, en el trabajo, el estudio del espacio de transformadas de Cauchy. Más concretamente, su visión como espacio de Banach, el estudio de la convergencia en norma, o ciertas propiedades de factorización.

Vemos, por tanto, que el estudio de la transformada de Cauchy no se restringe al campo de la teoría de la medida, sino que sus resultados más característicos se dan a través del uso de herramientas propias del análisis funcional o la variable compleja.

Abstract

A Cauchy transform is an holomorphic function, defined on the unit disk of the complex plain, and constructed, by integration, from a complex Borel measure on the unit circumference. This construction is such that it allows to relate the properties of a measure and its transform. In particular, when this relation is studied, the space of Cauchy transforms seems to be linked with Hardy spaces of analytic functions on the unit disk.

This link suggests that the Cauchy transform can be studied as a lineal operator on the space of complex Borel measures. In this way, the most relevant results in this field (the connection with Poisson transform, with Riesz projection or with the derivative of a measure, among others) are obtained.

The vision of the space of Cauchy transforms as a Banach space is also approached, studying its norm convergence, and some properties related with the factorization of such space.

As this introduction induces, the concepts and proceedings we will use as we develope the study of the Cauchy transform will not only come from the Measure Theory, but also from Functional Analysis and the field of Complex Variables.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este primer capítulo del trabajo trataremos de dar algunas "pinceladas" sobre aquellos conceptos y aquellas ideas que se usarán a lo largo del mismo de manera frecuente, dotando al lector de un documento de referencia para consultar los resultados que sean necesarios posteriormente.

1.2. Medidas

Comenzaremos esta introducción preliminar con el concepto central sobre el que se construye el trabajo: las medidas. En este sentido, es apropiado recordar las siguientes definiciones.

Definición 1.2.1. *Sea X un conjunto, y $\mathscr{F}$ una familia de subconjuntos de X. Se dice que $\mathscr{F}$ es un σ-álgebra (sobre X) si se cumple:*

(a) $X \in \mathscr{F}$.

(b) Si $A \in \mathscr{F}$, *entonces* $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

(c) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$, *entonces* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$.

Definición 1.2.2. *Dado un σ-álgebra $\mathscr{F}$, decimos que la aplicación $\mu\colon \mathscr{F} \to \mathbb{C}$ es una medida (compleja) sobre $\mathscr{F}$ si posee las siguientes propiedades:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right).$$

Los dos conceptos anteriores han sido enunciados con cierta generalidad. No obstante, en este trabajo nos restringiremos a un σ-álgebra concreto, así como a un tipo específico de medidas.

Definición 1.2.3. *Se llama σ-álgebra de Borel, $\mathscr{B}_o(\mathbb{T})$, al menor σ-álgebra que contiene a todos los abiertos de $\mathbb{T}$, la circunferencia unidad de $\mathbb{C}$ (en la restricción de la topología euclídea del plano complejo). A los elementos del σ-álgebra de Borel se les denomina borelianos.*

Nótese que el σ-álgebra de Borel que acabamos de introducir existe gracias al hecho de que el concepto de σ-álgebra posee buenas propiedades. En particular, la intersección de dos de ellos vuelve a ser un nuevo σ-álgebra. Ahora ya podemos dar paso a nuestro objeto de estudio.

Definición 1.2.4. *Al conjunto de las medidas complejas μ sobre el σ-álgebra de Borel se le denota por $\mathbf{M}$, el espacio de medidas borelianas.*

Entre las medidas de $\mathbf{M}$ resultan especialmente útiles las medidas que toman valores en $[0, +\infty)$. Se las conoce como medidas positivas finitas, pues del hecho de que $0 \leq \mu(B) < +\infty$ para todo boreliano $B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$ se sigue que la medida está acotada, es decir, existe $C > 0$ tal que $0 \leq \mu(B) \leq C$ para todo boreliano $B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$.

También es importante notar que, en la Definición 1.2.4, el término "espacio" no es casual: $\mathbf{M}$ puede ser dotado de la estructura de un espacio vectorial. Es más, dicho espacio puede ser dotado de una norma que lo haga completo, es decir, puede ser dotado de la estructura de un espacio de Banach.

Definición 1.2.5. *Sea $B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$ un boreliano. Se dice que la familia de conjuntos $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$ es una partición de Borel de B si:*

(a) Es una familia disjunta, es decir, $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

(b) Su unión es B, es decir, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B$.

Esta situación la notaremos escribiendo $B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Proposición 1.2.6. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Entonces se puede definir otra medida $\nu \in \mathbf{M}$, que es una medida positiva, dada por*

$$\nu(B) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(B_i)| : B = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\},$$

y cumpliendo $|\mu(B)| \leq \nu(B)$ para todo boreliano $B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$.

La medida anterior suele nombrarse como la medida variación de μ, y suele denotarse por $|\mu|$.

Proposición 1.2.7. *La aplicación $\|\cdot\|_{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|\mu\|_{\mathbf{M}} := |\mu|(\mathbb{T}),$$

conocida como variación total de μ, es una norma sobre $\mathbf{M}$. Además, dota a $\mathbf{M}$ de la estructura de un espacio de Banach.

Ejemplo 1.2.8. *Sea $\xi_0 \in \mathbb{T}$ un punto. Definamos la aplicación δ_{ξ_0} del σ-álgebra de Borel en $\mathbb{C}$ dada por:*

$$\delta_{\xi_0}(B) := \begin{cases} 1, & \text{si } \xi_0 \in B, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica que $\delta_{\xi_0} \in \mathbf{M}$. A esta medida la llamamos la medida delta en el punto ξ_0.

1.3. Medida de Lebesgue

El concepto de medida surge del intento de axiomatizar la idea de asignar una cierta “longitud”, “superficie” o “volumen” a los subconjuntos de un espacio. No obstante esta asignación no es siempre posible para todos los conjuntos, como probó Vitali, por más que se generalice el concepto de medida.

Siendo un poco menos abstractos, hay una medida concreta que despierta un interés especial.

Definición 1.3.1. *Consideramos la aplicación $T\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{T}$ dada por $T(\theta) := e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Se define la medida imagen de la medida de Lebesgue $m_{[0,2\pi]}$ en $[0, 2\pi]$, mediante la aplicación T, como*

$$m_T(B) := m_{[0,2\pi]}\left(T^{-1}(B)\right), \text{ para todo boreliano } B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T}).$$

Como T es continua, la medida imagen m_T está bien definida y es una medida de $\mathbf{M}$. A través de ella, definimos a la medida de Lebesgue (normalizada) sobre $\mathbb{T}$, notada por m, y dada por

$$m := \frac{1}{2\pi} m_T.$$

En base a esta medida, nos interesa abordar los siguientes conceptos:

Definición 1.3.2. *Se dice que una medida $\mu \in \mathbf{M}$ es absolutamente continua respecto de m si $\mu(A) = 0$ para cualquier boreliano A satisfaciendo $m(A) = 0$.*

Definición 1.3.3. *Se dice que una medida $\mu \in \mathbf{M}$ es singular respecto de m si existen dos borelianos disjuntos A y B de manera que $A \cup B = \mathbb{T}$ y $|\mu|(A) = m(B) = 0$.*

Un resultado de gran trascendencia en base a las definiciones anteriores, y que debemos tener en mente durante todo el trabajo, es el siguiente.

Teorema 1.3.4 (Teorema de Descomposición de Lebesgue)**.** *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Esta puede ser descompuesta, de manera única, como*

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

donde μ_a es una medida absolutamente continua respecto de m, y μ_s es una medida singular respecto de m.

También haremos uso de la siguiente descomposición.

Proposición 1.3.5 (Descomposición de Jordan)**.** *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. En ese caso, podemos encontrar $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \in \mathbf{M}$ medidas positivas de manera que*

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4).$$

Además, esta descomposición es única si μ_1 y μ_2 son mutuamente singulares, así como μ_3 y μ_4. Es decir, si existen cuatro borelianos $B_1, \ldots, B_4 \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$ de manera que $B_1 \cap B_2 = B_3 \cap B_4 = \emptyset$, y $B_1 \cup B_2 = B_3 \cup B_4 = \mathbb{T}$, cumpliendo $|\mu_i|(B_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq 4$.

Nótese que, en el caso en el que μ es una medida que toma valores reales, entonces

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu), \quad \mu_3 = \mu_4 = 0,$$

es la descomposición de Jordan de μ. En el caso en el que μ toma valores complejos, la idea anterior puede usarse para obtener una descomposición de Jordan de μ a través de $\Re(\mu)$ y $\Im(\mu)$.

1.4. Espacios de Lebesgue

A partir del concepto de medida se introduce la conocida integral de Lebesgue, que resulta enormemente fructífera en muchos aspectos. En particular, nosotros trabajaremos con las siguientes ideas.

Definición 1.4.1. *Denotaremos por* $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$*, para* $0 < p < \infty$*, el conjunto de funciones medibles* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *de manera que*

$$\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, dm < \infty.$$

Según el valor de p, los conjuntos anteriores tienen diferentes propiedades.

Teorema 1.4.2. *Denotamos por* $L^p(\mathbb{T})$ *al espacio de clases de equivalencia de* $\mathscr{L}^p(\mathbb{T})$ *obtenido identificando funciones que coinciden en casi todo, es decir, aquellas funciones medibles* f *y* g *cumpliendo*

$$m(\{\xi \in \mathbb{T} : f(\xi) = g(\xi)\}) = 0.$$

Entonces, para $1 \leq p < \infty$*, la aplicación* $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})} : L^p(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, dm \right)^{1/p},$$

es una norma sobre $L^p(\mathbb{T})$ *que dota a este espacio de la estructura de espacio de Banach.*

Para $0 < p < 1$*, la aplicación* $d\colon L^p(\mathbb{T}) \times L^p(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(f, g) := \int_{\mathbb{T}} |f - g|^p \, dm$$

define una distancia sobre $L^p(\mathbb{T})$ *que dota a este espacio de la estructura de espacio métrico completo.*

Para el caso $p = \infty$ también son conocidas las siguientes ideas.

Definición 1.4.3. *Sea* $\mathscr{L}^\infty(\mathbb{T})$ *el conjunto de funciones medibles* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *de manera que*

$$\inf\{M > 0 : |f(\xi)| \leq M \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{T}\} < \infty.$$

Teorema 1.4.4. *Denotamos por* $L^{\infty}(\mathbb{T})$ *al espacio de clases de equivalencia de* $\mathscr{L}^{\infty}(\mathbb{T})$ *obtenido identificando funciones que coinciden en casi todo, es decir, aquellas funciones medibles* f *y* g *cumpliendo*

$$m\left(\{\xi \in \mathbb{T} : f(\xi) = g(\xi)\}\right) = 0.$$

Entonces, la aplicación $\|\cdot\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} : L^{\infty}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})} := \text{ínf}\left\{M > 0 : |f(\xi)| \leq M \text{ para casi todo } \xi \in \mathbb{T}\right\},$$

es una norma sobre $L^{\infty}(\mathbb{T})$ *que lo dota de la estructura de espacio de Banach.*

Estos conocidos espacios, denominados espacios de Lebesgue, tendrán una relevancia fundamental a lo largo del trabajo. En particular, serán de nuestro interés los siguientes resultados.

Teorema 1.4.5 (Teorema de representación de F. Riesz)**.** *Sea* $1 \leq p < \infty$*, y sea* q *tal que* $1/q + 1/p = 1$ *(con* $q = \infty$ *si* $p = 1$*). Se cumple que todo funcional lineal y continuo* $T\colon L^p(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ *es de la forma*

$$f \in L^p(\mathbb{T}) \mapsto T(f) := \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, dm \in \mathbb{C}$$

para alguna función $g \in L^q(\mathbb{T})$*.*

Más aún, el espacio $(L^p(\mathbb{T}))^*$ *de aplicaciones lineales y continuas* $T\colon L^p(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$*, dotado de la norma*

$$\|T\| := \text{ínf}\left\{C \geq 0 : |T(f)| \leq C\,\|f\|_p\,, f \in L^p(\mathbb{T})\right\},$$

es isométricamente isomorfo a $L^q(\mathbb{T})$*, bajo la isometría*

$$g \in L^q(\mathbb{T}) \mapsto T_g \in (L^p(\mathbb{T}))^*,$$

donde

$$T_g(f) := \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, dm, \quad f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Teorema 1.4.6 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Sea* $\mu \in \mathbf{M}$ *una medida. Entonces* μ *es absolutamente continua respecto de* m *si y solo si existe* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *de manera que, para todo boreliano* $B \subseteq \mathbb{T}$*, se verifique*

$$\mu(B) = \int_B f dm.$$

Esta situación la notaremos por $d\mu = f dm$*.*

1.5. Espacios de Hardy

Queremos introducir ahora los espacios de Hardy, que son espacios de funciones holomorfas. No obstante, como se verá, estos espacios están íntimamente ligados con los espacios de Lebesgue. Es por ello que, de alguna manera, estos espacios ligan la variable compleja y la teoría de la medida.

Definición 1.5.1. *Sea $0 < p < \infty$. Se denota por el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ al conjunto de funciones analíticas $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, de manera que*

$$\sup_{0\leq r<1} \left(\int_T |f(r\xi)|^p \, dm(\xi) \right)^{1/p} < \infty.$$

Por analogía con $L^\infty(\mathbb{T})$, también podemos dar la siguiente definición.

Definición 1.5.2. *Se denota por el espacio de Hardy $H^\infty(\mathbb{D})$ al conjunto de funciones analíticas $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ de manera que*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty.$$

Proposición 1.5.3. *Sean $0 < p < q \leq \infty$. Se cumple que $H^q(\mathbb{D}) \subseteq H^p(\mathbb{D})$.*

Los espacios de Hardy pueden ser dotados de una topología de la siguiente forma.

Definición 1.5.4. *Dado $0 < p < \infty$ cualquiera, se define la aplicación $M_p\colon [0,1) \times H^p(\mathbb{D}) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$M_p(r,f) := \left(\int_T |f(r\xi)|^p \, dm(\xi) \right)^{1/p}.$$

En caso de que $p = \infty$, se define la aplicación $M_\infty\colon [0,1) \times H^\infty(\mathbb{D}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$M_\infty(r,f) := \sup_{|z|\leq r} |f(z)|.$$

Teorema 1.5.5. *Sea $0 < p \leq \infty$. Definamos la aplicación $\|\cdot\|_p : H^p(\mathbb{D}) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\|f\|_p := \sup_{0\leq r<1} M_p(r,f).$$

Si $0 < p < 1$, entonces $\|\cdot\|_p$ dota al espacio $H^p(\mathbb{D})$ de la estructura de un espacio métrico completo a través de la distancia $d_p\colon H^p(\mathbb{D}) \times H^p(\mathbb{D}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_p(f,g) := \|f-g\|_p^p.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, se tiene que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre el espacio $H^p(\mathbb{D})$ que lo dota de la estructura de un espacio de Banach.

Es importante destacar que, para $0 < p \leq \infty$, la función M_p es creciente. Es decir, para toda función $f \in H^p(\mathbb{D})$ se cumple que

$$M_p(r_1, f) \leq M_p(r_2, f), \quad \text{si } 0 \leq r_1 \leq r_2 < 1.$$

Esto permite justificar que, para toda función $f \in H^p(\mathbb{D})$, se cumple

$$\|f\|_p = \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f).$$

Una de las razones por las que esta topología se vuelve crucial en los espacios de Hardy es porque "respeta" la convergencia uniforme en compactos. No obstante, los aspectos más relevantes de estos espacios, los cuales serán usados numerosas veces durante el trabajo, son los siguientes.

Teorema 1.5.6. *Sea $0 < p \leq \infty$, y sea cualquier función $f \in H^p(\mathbb{D})$. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) La función f posee límite no tangencial en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida Lebesgue). Es decir, para todo $\xi \in \mathbb{T}$ salvo un conjunto de medida Lebesgue nula, y para todo $\alpha > 1$, existe

$$f^*(\xi) := \lim_{\substack{z \to \xi \\ z \in \Gamma_\alpha(\xi)}} f(z),$$

donde

$$\Gamma_\alpha(\xi) := \{z \in \mathbb{D} : |z - \xi| < \alpha(1 - |z|)\},$$

y $f^*(\xi)$ es independiente de α.

En particular, para todo $\xi \in \mathbb{T}$ salvo un conjunto de medida Lebesgue nula, existe el límite radial de f en ξ, cumpliendo

$$f^*(\xi) = \lim_{r \to 1^-} f(r\xi).$$

(b) La función f^* definida en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida Lebesgue) pertenece a $L^p(\mathbb{T})$. Aún más, se cumple que

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi) - f^*(\xi)|^p \, dm(\xi) = 0.$$

En particular,

$$\|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_p.$$

(c) Aún más, si f^* se anula en un subconjunto de $\mathbb{T}$ con medida Lebesgue no nula, entonces f es idénticamente nula sobre $\mathbb{T}$.

(d) Si $1 \leq p \leq \infty$, y si la función f viene dada por la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

entonces se tiene que

$$a_n = \int_{\mathbb{T}} f^*(\xi)\, \overline{\xi}^n dm(\xi) = \widehat{f^*}(n), \quad \text{para } n = 0, 1, \ldots,$$

donde $\widehat{f^*}(n)$ en el n-ésimo coeficiente de Fourier de f^*.

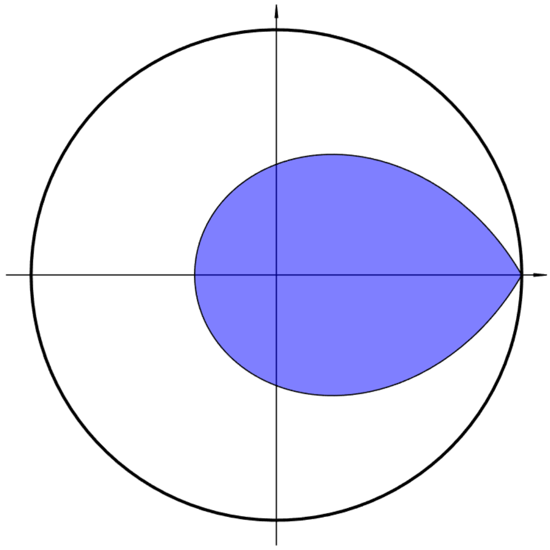

Figura 1.5.7: Ilustración de la región $\Gamma_\alpha(\xi)$ para $\alpha = 2$ y $\xi = 1$ inscrita en $\mathbb{T}$.

La existencia de límite no tangencial puede utilizarse para definir el siguiente espacio.

Definición 1.5.8. *Sea $0 < p < \infty$. Se denota por el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{T})$ al conjunto de funciones medibles $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de manera que existe $g \in H^p(\mathbb{D})$ con*

$$f(\xi) = \lim_{r \to 1^-} g(r\xi),$$

para casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida Lebesgue).

Los espacios $H^p(\mathbb{T})$ pueden verse como subespacios de $L^p(\mathbb{T})$, heredando su topología. En este sentido son importante los siguientes resultados.

Proposición 1.5.9 (Smirnov)**.** *Sean $0 < p < q \leq \infty$, y $f \in H^p(\mathbb{D})$. Si la función f^* que definen sus límites radiales pertenece a $L^q(\mathbb{T})$, entonces $f \in H^q(\mathbb{T})$.*

Teorema 1.5.10. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, y una función $f \in L^p(\mathbb{T})$. Entonces f pertenece a $H^p(\mathbb{T})$ si y solo si los coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ se anulan para todo entero $n < 0$.*

Capítulo 2

Introducción a la transformada de Cauchy

2.1. Introducción

La introducción en el área de la variable compleja comienza con la familiarización de la estructura del plano complejo, $\mathbb{C}$, como cuerpo algebraico. Más tarde se estudian las propiedades más elementales de las funciones de variable compleja, y se introduce el concepto de función holomorfa. El siguiente aspecto en el estudio suele ser la integración de funciones sobre caminos en $\mathbb{C}$. Es justo en este momento cuando aparece una idea central en la teoría elemental de esta disciplina, y que relaciona la integración y la holomorfía: la fórmula integral de Cauchy.

Una versión simple de este resultado dice que si f es una función holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contenga a un disco cerrado D, y γ es la curva que define la frontera de D recorrida positivamente, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D.$$

El trabajo que aquí expongo consiste, en algún sentido, en el estudio de la idea anterior, algo más generalizada, y haciendo uso de técnicas externas a la variable compleja, como el análisis funcional y la teoría de la medida.

En particular, y por simplicidad, pensemos en el caso anterior, pero particularizando en $D = \mathbb{D}$, el disco unidad de $\mathbb{C}$, y con $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ su frontera, la cual origina la curva γ. Sabemos que, entonces, todo $\xi \in \mathbb{T}$ se escribe como $\xi = e^{i\theta}$ para algún $\theta \in [0, 2\pi]$, de manera que $\xi^{-1} = \bar{\xi}$. Por tanto, la fórmula anterior puede ser reescrita según:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{\xi} f(\xi)}{1-\bar{\xi}z} d\xi = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\bar{\xi}z}\frac{d\xi}{2\pi i\xi}.$$

Observando que

$$dm = \frac{d\xi}{2\pi i \xi}$$

es la medida de Lebesgue normalizada, entonces

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi), \quad z \in \mathbb{D}.$$

A la vista de la expresión anterior, nos planteamos: ¿cuándo tiene sentido la integral que ahí aparece? Por ejemplo, si $f \in L^1(\mathbb{T})$, la integral anterior sigue existiendo, aunque no podemos decir, en principio, que sea igual a $f(z)$. Yendo más allá, podemos ver a $f(\xi)\, dm(\xi)$ como una medida $d\mu(\xi)$, definida sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{T}$. Es decir, la expresión previa induce la idea del estudio de la integral

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z},$$

para μ una medida compleja sobre $\mathbb{T}$, es decir, para $\mu \in \mathbf{M}$.

2.2. La transformada de Cauchy

Definición 2.2.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Se llama transformada de Cauchy de μ a la función definida en $\mathbb{D}$ por*

$$K\mu(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Proposición 2.2.2. *La transformada de Cauchy de cualquier medida $\mu \in \mathbf{M}$ existe y es una función holomorfa en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Comenzamos notando que, fijado $z \in \mathbb{D}$, la función

$$\xi \in \mathbb{T} \mapsto \frac{1}{1-\bar{\xi}z},$$

es una función continua, y por tanto, medible. Además, se tiene que

$$\left|1-\bar{\xi}z\right| \geq \left|1-\left|\bar{\xi}z\right|\right| = \left|1-|z|\right| = 1-|z|, \quad z \in \mathbb{D}, \xi \in \mathbb{T},$$

de donde se deduce

$$\left|\frac{1}{1-\bar{\xi}z}\right| \leq \frac{1}{1-|z|}.$$

Por tanto, dada $\mu \in \mathbf{M}$ una medida, y para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z}\right| \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{d|\mu|(\xi)}{1-|z|} = \frac{\|\mu\|_{\mathbf{M}}}{1-|z|} < \infty, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

Así, la integral que define a $K\mu(z)$ es convergente. Se sigue de esto que la transformada de Cauchy de cualquier medida existe en cada punto $z \in \mathbb{D}$.

En cuanto al hecho de que $K\mu$ sea una función holomorfa, hemos de notar que el integrando de la expresión que la define puede verse como una serie geométrica

$$\frac{1}{1-\bar{\xi}z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\xi}z)^n,$$

donde la convergencia es, como en toda serie geométrica, uniforme. Es más, a través de esta convergencia, se tiene que si tomamos $N \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N}\int_{\mathbb{T}} (\bar{\xi}z)^n \, d\mu(\xi) - K\mu(z)\right| &= \left|\int_{\mathbb{T}} \left[\sum_{n=0}^{N} (\bar{\xi}z)^n - \frac{1}{1-\bar{\xi}z}\right] d\mu(\xi)\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \left|\sum_{n=0}^{N} (\bar{\xi}z)^n - \frac{1}{1-\bar{\xi}z}\right| d|\mu|(\xi) \\ &\leq \sup_{w=\bar{\xi}z\in\mathbb{D}} \left|\sum_{n=0}^{N} w^n - \frac{1}{1-w}\right| \|\mu\|_{\mathbf{M}} \to 0.\end{aligned}$$

En ese caso, las operaciones de sumación e integral puede conmutarse, obteniendo:

$$\begin{aligned}K\mu(z) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1-\bar{\xi}z} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\xi}z)^n \, d\mu(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{T}} (\bar{\xi}z)^n \, d\mu(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde hemos tomado

$$a_n = \int_{\mathbb{T}} \overline{\xi}^n d\mu\left(\xi\right), \quad n \geq 0.$$

Nótese que (2.2) es un desarrollo de Taylor para $K\mu$ en $z = 0$. Por tanto, para ver dónde $K\mu$ es holomorfa, debemos hallar el radio de convergencia de tal serie. Con esto en mente, notamos que

$$|a_n| = \left|\int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu\left(\xi\right)\right| \leq \int_{\mathbb{T}} d\left|\mu\right|\left(\xi\right) = \left\|\mu\right\|_{\mathbf{M}}.$$

De esto se deduce que el radio es convergencia de la serie de potencias dada en (2.2) es mayor o igual que 1. De hecho, para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right| \leq \left\|\mu\right\|_{\mathbf{M}} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{\left\|\mu\right\|_{\mathbf{M}}}{1-|z|} < \infty.$$

Por tanto, (2.2) converge en $\mathbb{D}$, deduciéndose que $K\mu$ es holomorfa, al menos, en esta región. □

La proposición anterior, aunque esperable, pone a nuestra disposición una gran cantidad de herramientas para el estudio de la transformada de Cauchy.

Definición 2.2.3. *Se llama espacio de transformadas de Cauchy al conjunto de funciones*

$$\mathscr{K} := \left\{K\mu : \mu \in \mathbf{M}\right\}.$$

Apreciemos que $\mathscr{K}$ es un subespacio vectorial del espacio de funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$.

No obstante, ¿toda función holomorfa está en $\mathscr{K}$? La respuesta es negativa, es decir, $\mathscr{K}$ es un subespacio propio de funciones holomorfas. Para ver esto, trabajamos sobre los siguientes resultados, donde nos conviene recordar que, por analogía con las funciones de $L^1\left(\mathbb{T}\right)$, se llaman coeficientes de Fourier de una medida $\mu \in \mathbf{M}$ a

$$\hat{\mu}\left(n\right) := \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu\left(\xi\right).$$

Proposición 2.2.4. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Los coeficientes de Taylor (centrados en $z = 0$) de la función $K\mu$ son los coeficientes de Fourier $\hat{\mu}\left(n\right)$ de la medida μ con $n \geq 0$.*

Demostración. Se sigue sin más que identificar la correspondiente expresión (2.2) que se obtuvo al final de la demostración de la Proposición 2.2.2, donde vimos que

$$K\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

con

$$a_n = \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) = \hat{\mu}(n).$$

□

Corolario 2.2.5. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Los coeficientes de Taylor (centrados en $z = 0$) de $K\mu$ están acotados.*

Demostración. Por la proposición anterior, sabemos que estos coeficientes son los coeficientes de Fourier de μ. Sin embargo:

$$|\hat{\mu}(n)| = \left| \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) \right| \leq \int_{\mathbb{T}} d|\mu|(\xi) = \|\mu\|_{\mathbf{M}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Nótese que este último corolario no es cierto, en general, para funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$. Esto justifica lo que ya se había adelantado sobre la contención estricta de $\mathscr{K}$ en el conjunto de funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$.

2.3. Relación entre medidas con la misma transformada

Definición 2.3.1. *Dada $f \in \mathscr{K}$, denotaremos por R_f al conjunto de medidas cuya transformada de Cauchy es f, es decir,*

$$R_f := \{\mu \in \mathbf{M} : f = K\mu\}.$$

Una primera cuestión a determinar es si R_f es un conjunto unitario o no. Para entender esto, hemos de pensar que si μ es una medida tal que $f = K\mu$, y escogemos otras medida μ_0 con $K\mu_0 = 0$, entonces $\mu + \mu_0 \in R_f$, pero a priori $\mu + \mu_0$ es distinta a μ. A la vista de esto, parece relevante determinar las medidas cuya transformada de Cauchy sean la función nula.

Para estudiar esto, haremos uso del siguiente resultado de F. y M. Riesz, que está íntimamente relacionado con el Teorema 1.5.10.

Teorema 2.3.2 (F. y M. Riesz). *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida cuyos coeficientes de Fourier son nulos para todo entero $n < 0$. Entonces μ es una medida absolutamente continua respecto de m. Es más, existe $\phi \in H^1(\mathbb{T})$ de manera que $d\mu = \phi dm$.*

Nótese que, siguiendo la notación del resultado anterior, se tiene

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n \phi(\xi)\, dm(\xi) = \hat{\phi}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es por ello que si la anterior medida $\mu \in \mathbf{M}$ cumpliese, además, que $\hat{\mu}(0) = 0$, entonces lo mismo se deduciría para ϕ. Esta es, de hecho, una situación que será de nuestro interés en más ocasiones. Es por ello que damos la siguiente definición.

Definición 2.3.3. *Denotamos por $H_0^1(\mathbb{T})$ al conjunto de funciones $\phi \in H^1(\mathbb{T})$ cumpliendo $\hat{\phi}(0) = 0$, es decir,*

$$\int_{\mathbb{T}} \phi(\xi)\, dm(\xi) = 0.$$

Ahora ya estamos en posición de responder a la pregunta con la que abrimos esta sección.

Proposición 2.3.4. *Sea ϕ una función de $H_0^1(\mathbb{T})$. Entonces $\bar{\phi}\, dm$ es una medida absolutamente continua respecto de m con $K(\bar{\phi} dm) = 0$.*

Demostración. El hecho de que $\bar{\phi} dm$ es una medida absolutamente continua es conocido.

Dado un entero $n > 0$, calculamos

$$\widehat{\bar{\phi} dm}(n) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n \bar{\phi}(\xi)\, dm(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{T}} \xi^n \phi(\xi)\, dm(\xi)} = \\ = \overline{\int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^{-n} \phi(\xi)\, dm(\xi)} = \overline{\hat{\phi}(-n)} = 0,$$

puesto que los coeficientes de Fourier para $-n < 0$ de las funciones de $H^1(\mathbb{T})$ son nulos (Teorema 1.5.10). Para $n = 0$, se tiene, puesto que $\phi \in H_0^1(\mathbb{T})$, que

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{\phi}(\xi)\, dm(\xi) = \overline{\hat{\phi}(0)} = 0.$$

Con esto se concluye que los coeficientes de Fourier de la medida $\bar{\phi} dm$ son nulos para $n \geq 0$, por tanto también lo son los coeficientes de Taylor (centrados en $z = 0$) de la función $K(\bar{\phi} dm)$. Se tiene, por tanto, que $K(\bar{\phi} dm) = 0$. $\square$

Corolario 2.3.5. *Sea $f \in \mathscr{K}$. Entonces el conjunto R_f es infinito, pues si $\mu \in \mathbf{M}$ es una medida con $\mu \in R_f$, entonces $\mu + \bar{\phi} dm \in R_f$ para toda función $\phi \in H_0^1$.*

Aún puede decirse más del conjunto R_0 (y, por tanto, de todo R_f por linealidad). La pregunta natural después de los resultados anteriores es si hay alguna otra medida que se transforme en la función nula y que no hayamos considerado aún (es decir, no sea del tipo $\bar{\phi} dm$ para $\phi \in H_0^1(\mathbb{T})$). El siguiente resultado, que está fuertemente basado en el teorema de F. y M. Riesz (Teorema 2.3.2) que enunciamos al inicio de esta sección, justifica que no.

Antes de verlo, recordemos que dada una medida $\mu \in \mathbf{M}$, por el teorema de descomposición de Lebesgue (Teorema 1.3.4), se puede expresar de forma única como $\mu = \mu_a + \mu_s$, donde μ_a es una medida absolutamente continua respecto de m, y μ_s es una medida singular respecto de m.

Proposición 2.3.6. *Sea $f \in \mathscr{K}$.*

(a) Se cumple que $K\mu = 0$ si y solo si $d\mu = \bar{\phi} dm$ para alguna $\phi \in H_0^1(\mathbb{T})$.

(b) Sean $\mu, \nu \in R_f$. Entonces $d\mu - d\nu = \bar{\phi} dm$ para alguna $\phi \in H_0^1(\mathbb{T})$.

(c) Si $\mu, \nu \in R_f$, entonces $\mu_s = \nu_s$.

Demostración. (a) Este resultado ya ha sido parcialmente probado en la Proposición 2.3.4. La implicación recíproca es consecuencia, como ya se ha dicho, del teorema de F. y M. Riesz (Teorema 2.3.2).

Para ver la implicación directa, tomemos una medida $\mu \in \mathbf{M}$ con $K\mu = 0$. En ese caso, por la Proposicion 2.2.4, ha de ser $\hat{\mu}(n) = 0$ para todo entero $n \geq 0$. Con esto en mente, definamos la medida $\nu \in \mathbf{M}$ dada por

$$\nu(B) = \overline{\mu(B)}, \quad B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T}).$$

Por analogía con la prueba de la Proposición 2.3.4, se tiene:

$$\hat{\nu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\xi}^n d\nu(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\xi}^n d\overline{\mu(\xi)} = \overline{\int_{\mathbb{T}} \xi^n d\mu(\xi)} = \overline{\hat{\mu}(-n)}.$$

Por tanto, $\hat{\nu}(n) = 0$ para todo entero $n \leq 0$. En aplicación del Teorema 2.3.2, y de los comentarios que le siguen, se tiene que $d\nu = \phi dm$ para alguna función $\phi \in H_0^1(\mathbb{T})$, y consecuentemente, $d\mu = \overline{\phi} dm$.

(b) Este apartado es consecuencia directa del anterior. Para ello, nótese que si $\mu, \nu \in R_f$, entonces $K(\mu - \nu) = 0$. Pero acabamos de probar que entonces $d\mu - d\nu = \bar{\phi} dm$ para alguna $\phi \in H_0^1$.

(c) De nuevo, desde el apartado anterior, nótese que si $d\mu - d\nu = \bar{\phi} dm$ para alguna $\phi \in H_0^1$, entonces $(\mu - \nu)_s = 0$ (pues $\bar{\phi} dm$ es absolutamente continua respecto de m). $\square$

2.4. Comportamiento en la frontera

Como la transformada de Cauchy de una medida es una función holomorfa definida sobre $\mathbb{D}$, una pregunta natural sería cómo se comporta dicha función en $\partial\mathbb{D} = \mathbb{T}$. En este sentido, es interesante recordar la restricción sobre el crecimiento de la transformada que se derivó en (2.1), a saber, que si $\mu \in \mathbf{M}$ es una medida, entonces se tiene la acotación

$$|(K\mu)(z)| \leq \frac{\|\mu\|_{\mathbf{M}}}{1 - |z|}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Nótese que, aunque la desigualdad anterior acota el módulo de $K\mu$ en cada punto de $\mathbb{D}$, no garantiza que la función tenga un buen comportamiento en $\mathbb{T}$ (i.e. la cota diverge si $|z| \to 1^-$). No obstante, ¿es realmente posible que la función diverja cerca de $\mathbb{T}$? La respuesta es que sí, como vemos a continuación.

Proposición 2.4.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida, y sea $\zeta \in \mathbb{T}$. Entonces*

$$\lim_{r \to 1^-} (1 - r)(K\mu)(r\zeta) = \mu(\{\zeta\}).$$

Demostración. Nótese que queremos calcular

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - r}{1 - r\bar{\xi}\zeta} d\mu(\xi).$$

Por tanto, parece lógico que la idea sea aplicar el teorema de la convergencia dominada. Para ello, definimos, para $0 < r < 1$,

$$f_r(\xi) := \frac{1 - r}{1 - r\bar{\xi}\zeta}, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Obsérvese que si $r \to 1^-$, entonces $f_r \to 0$, a menos que $\bar{\xi}\zeta = 1$, es decir, $\xi = \zeta$. Por tanto, f_r tiende puntualmente a la función característica del punto $\{\zeta\}$. Además, de nuevo, por la desigualdad triangular inversa, se tiene que $\left|1 - r\bar{\xi}\zeta\right| \geq 1 - r$, luego $|f_r| \leq 1$. Como la función idénticamente unidad es integrable respecto de μ (pues la medida de variación absoluta $|\mu|$ es una medida finita sobre $\mathbb{T}$), entonces el teorema de convergencia dominada garantiza que

$$\lim_{r \to 1^-} \int_{\mathbb{T}} f_r(\xi)\, d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{\{\zeta\}}(\xi)\, d\mu(\xi) = \mu(\{\zeta\}).$$

$\square$

El resultado que acabamos de probar parece indicar que la transformada de Cauchy no tiene un buen comportamiento en la frontera si la medida tiene parte singular no nula, pues se deduce que si $\zeta \in \mathbb{T}$ tal que $\mu(\{\zeta\}) \neq 0$, entonces

$$\lim_{r \to 1^-} |(K\mu)(r\zeta)| = +\infty.$$

A la vista de este comportamiento "patológico", cabría la posibilidad de pensar que la transformada de Cauchy solo merece ser estudiada cuando su acción se restringe, por ejemplo, a las medidas absolutamente continuas. Nada más lejos de la realidad. Hemos de recordar que, a efectos de propiedades como la integrabilidad, el comportamiento anterior es aceptable siempre que el conjunto de puntos de $\mathbb{T}$ en los que la transformada diverge sea de medida Lebesgue nula. Es esto precisamente lo que pasa, como veremos a continuación.

Teorema 2.4.2. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Entonces la función $K\mu \in H^p(\mathbb{D})$, para todo $0 < p < 1$. Más aún, la transformada de Cauchy define un operador lineal y continuo de $\mathbf{M}$ en $H^p(\mathbb{D})$, cumpliendo*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |K\mu(r\xi)|^p\, dm(\xi) \leq \frac{\sqrt{2}\, \|\mu\|_{\mathbf{M}}}{\cos(p\pi/2)}.$$

Para realizar la demostración del teorema que acabamos de enunciar nos apoyaremos en el siguiente resultado técnico.

Lema 2.4.3. *Sea una función analítica $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ con $\Re(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, dado $0 < p < 1$, se tiene*

$$\int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^p\, dm(\xi) \leq \frac{|f(0)|^p}{\cos(p\pi/2)}, \quad 0 < r < 1.$$

Demostración. Comenzamos notando que, como $\Re(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces f no se anula. En ese caso, dado que $\mathbb{D}$ es una región simplemente conexa, podemos encontrar una rama holomorfa de la función f^p.

En particular, proponemos $f(z) = |f(z)| e^{i\theta(z)}$, donde $\theta\colon \mathbb{D} \to (-\pi/2, \pi/2)$ es la rama principal del argumento de f. Así, podemos expresar

$$f^p(z) = |f(z)|^p e^{ip\theta(z)} = |f(z)|^p [\cos(p\,\theta(z)) + i \sin(p\,\theta(z))].$$

Desde la igualdad anterior, y fijando $0 < p < 1$, podemos notar que

$$\Re(f^p(z)) = |f|^p(z) \cos(p\,\theta(z)) \geq |f(z)|^p \cos(p\pi/2) > 0.$$

Con esto, basta recordar que si f^p es analítica, entonces $\Re(f^p)$ es una función armónica, por lo que haciendo uso del teorema del valor medio se tiene, para $0 < r < 1$, que

$$\int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{\Re(f^p(r\xi))}{\cos(p\pi/2)} dm(\xi) = \frac{\Re(f^p(0))}{\cos(p\pi/2)} \leq \frac{|f(0)|^p}{\cos(p\pi/2)}.$$

□

Corolario 2.4.4. *Sea una función analítica $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ con $\Re(f(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, dado $0 < p < 1$, se tiene que $f \in H^p(\mathbb{D})$.*

Demostración. Basta observar que, por el lema anterior, para cada $0 < p < 1$, se tiene que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \frac{|f(0)|^p}{\cos(p\pi/2)} < \infty.$$

Por tanto, por definición, $f \in H^p(\mathbb{D})$ para cada $0 < p < 1$. □

Proposición 2.4.5. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Supongamos que μ es positiva. Entonces la función $K\mu \in H^p(\mathbb{D})$, para todo $0 < p < 1$.*

Demostración. En base al resultado anterior, basta ver que $\Re(K\mu(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En este sentido, observamos que

$$\Re(K\mu(z)) = \Re\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi}z}\right) = \int_{\mathbb{T}} \Re\left(\frac{1}{1 - \bar{\xi}z}\right) d\mu(\xi),$$

donde se ha usado que μ es una medida positiva, y por tanto, real. Aún más

$$\Re\left(\frac{1}{1 - \bar{\xi}z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \bar{\xi}z} + \frac{1}{1 - \xi\bar{z}}\right) = \frac{1 - \Re\left(\bar{\xi}z\right)}{\left|1 - \bar{\xi}z\right|^2} > 0.$$

Por tanto, dado que μ es una medida positiva, se obtiene el resultado. □

Ahora ya estamos en posición de probar el teorema que anunciamos anteriormente.

Demostración del Teorema 2.4.2. Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Recuérdese que, haciendo uso de la descomposición de Jordan (Proposición 1.3.5), podemos expresar

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i\,(\mu_3 - \mu_4)\,,$$

donde cada μ_i es una medida positiva. Por tanto, dado que la transformada de Cauchy es lineal, y que la Proposición 2.4.5 justifica que cada función $K\mu_i$ pertenece a $H^p(\mathbb{D})$ para $0 < p < 1$, se deduce que $K\mu \in H^p(\mathbb{D})$ para $0 < p < 1$ debido a la estructura vectorial del espacio.

Sabiendo esto, y aludiendo de nuevo a la linealidad de K, se tiene que la transformada de Cauchy define un operador lineal de $\mathbf{M}$ en $H^p(\mathbb{D})$ para $0 < p < 1$. Resta ver su continuidad. Para ello, siguiendo los razonamientos anteriores, hacemos uso de la desigualdad del Lema 2.4.3 para cada medida positiva μ_i, notando que para $0 < p < 1$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} |K\mu_i(r\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \frac{|K\mu_i(0)|^p}{\cos(p\pi/2)}, \quad 0 \leq r < 1,$$

donde, como μ_i es positiva, se tiene

$$|K\mu_i(0)| = \left| \int_{\mathbb{T}} d\mu_i(\xi) \right| = \mu_i(\mathbb{T})\,.$$

Por tanto, se deduce que, para cada medida positiva μ_i, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} |K\mu_i(r\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \frac{(\mu_i(\mathbb{T}))^p}{\cos(p\pi/2)}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Podemos ya ver que la continuidad del operador K se puede probar utilizando, de nuevo, la descomposición de Jordan y las propiedades vistas para medidas positivas, así como el hecho de que $0 < p < 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |K\mu\,(r\xi)|^p\, dm\,(\xi) &= \int_{\mathbb{T}} |(K\mu_1 - K\mu_2 + iK\mu_3 - iK\mu_4)\,(r\xi)|^p\, dm\,(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \sum_{i=1}^{4} |K\mu_i\,(r\xi)|^p\, dm\,(\xi) \\ &\leq \frac{1}{\cos\,(p\pi/2)} \sum_{i=1}^{4} |K\mu_i\,(0)|^p \\ &\leq \frac{1}{\cos\,(p\pi/2)} \sum_{i=1}^{4} |K\mu_i\,(0)| \\ &\leq \frac{1}{\cos\,(p\pi/2)} \sum_{i=1}^{4} \mu_i\,(\mathbb{T})\,.\end{aligned}$$

Usando el Lema 2.4.6 (que probaremos a continuación), podemos ver que

$$\sum_{i=1}^{4} \mu_i\,(\mathbb{T}) \leq \sqrt{2}\,\|\mu\|_{\mathbf{M}}\,,$$

lo que nos permite ver que, para $0 < p < 1$, se tiene

$$\int_{\mathbb{T}} |K\mu\,(r\xi)|^p\, dm\,(\xi) \leq \frac{\sqrt{2}\,\|\mu\|_{\mathbf{M}}}{\cos\,(p\pi/2)}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Recordado la topología de los espacios $H^p\,(\mathbb{D})$ para $0 < p < 1$ (Teorema 1.5.5), lo anterior puede reescribirse como

$$d_p\,(K\mu, 0) \leq \frac{\sqrt{2}\,\|\mu\|_{\mathbf{M}}}{\cos\,(p\pi/2)}.$$

Pero, observando que $d_p\,(f, g) = d_p\,(f - g, 0)$, también podemos ver que

$$d_p\,(K\mu, K\nu) \leq \frac{\sqrt{2}\,\|\mu - \nu\|_{\mathbf{M}}}{\cos\,(p\pi/2)}.$$

Nótese que esto implica la continuidad de K. $\square$

Lema 2.4.6. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida, y sean $\mu_i \in \mathbf{M}$ $(1 \leq i \leq 4)$ medidas positivas, de manera que*

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i\,(\mu_3 - \mu_4)\,,$$

es la descomposición de Jordan de μ. Entonces, para todo boreliano $B \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T})$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{4} \mu_i(B) \leq \sqrt{2}\,|\mu|(B).$$

Demostración. En primer lugar, nos interesa notar que

$$\sum_{i=1}^{4} \mu_i(B) = \sum_{i=1}^{4} |\mu_i|(B) = |\mu_1 - \mu_2|(B) + |\mu_3 - \mu_4|(B).$$

donde hemos usado que, en la descomposición de Jordan, si ν es una medida real con $\nu = \nu_1 - \nu_2$, entonces $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$.

Ahora podemos usar la desigualdad

$$a + b \leq \sqrt{2}\,|a + ib|, \quad a, b > 0,$$

y se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4} \mu_i(B) \leq & \sqrt{2}\,\left||\mu_1 - \mu_2|(B) + i\,|\mu_3 - \mu_4|(B)\right| \\
= & \sqrt{2}\quad \left| \sup\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |(\mu_1 - \mu_2)(A_j)| : B = \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \right\} \right. \\
& \left. + i \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(\mu_3 - \mu_4)(B_k)| : B = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \right\} \right|.
\end{aligned}$$

De esta manera, si $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una partición de Borel de B, e igual para $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces basta definir $C_{jk} = A_j \cap B_k$ $(j, k \in \mathbb{N})$ para obtener otra partición de Borel de B (cada C_{jk} es un boreliano por ser intesección de dos de ellos, y además se comprueba fácilmente que son disjuntos), donde se ve claro que

$$A_j = A_j \cap B = A_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{jk}.$$

En ese caso, se tiene que

$$(\mu_1 - \mu_2)(A_j) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_1 - \mu_2)(C_{jk}).$$

Y por tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|(\mu_1-\mu_2)(A_j)\right| = \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(\mu_1-\mu_2)(C_{jk})\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|(\mu_1-\mu_2)(C_{jk})\right|.$$

Por analogía, también se ve que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(\mu_3-\mu_4)(B_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|(\mu_3-\mu_4)(C_{jk})\right|.$$

Por tanto, se cumple que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left|(\mu_1-\mu_2)(A_j)\right| + i\sum_{k=1}^{\infty}\left|(\mu_3-\mu_4)(B_k)\right|\right| \\
&\qquad\qquad \leq \left|\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|(\mu_1-\mu_2)(C_{jk})\right| + i\left|(\mu_3-\mu_4)(C_{jk})\right|\right]\right| \\
&\qquad\qquad \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left|(\mu_1-\mu_2)(C_{jk})\right| + i\left|(\mu_3-\mu_4)(C_{jk})\right|\right|.
\end{aligned}$$

Por tanto, siguiendo desde la desigualdad anterior (reenumarando los índices jk por l), se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4}\mu_i(B) \leq& \sqrt{2}\sup\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\left|\left|(\mu_1-\mu_2)(C_l)\right| + i\left|(\mu_3-\mu_4)(C_l)\right|\right| : B = \bigsqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l\right\} \\
=& \sqrt{2}\sup\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\left|(\mu_1-\mu_2+i\mu_3-i\mu_4)(C_l)\right| : B = \bigsqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l\right\} \\
=& \sqrt{2}\sup\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\left|\mu(C_l)\right| : B = \bigsqcup_{l\in\mathbb{N}} C_l\right\} \\
=& \sqrt{2}\,|\mu|(B).
\end{aligned}$$

□

El Teorema 2.4.2 representa, en mi opinión, una excelente conexión entre el área que aquí estamos estudiando y la teoría de familias de funciones holomorfas en el disco. De hecho, deduce excelentes propiedades para la transformada de Cauchy, puesto que "hereda" todas las buenas propiedades de las funciones de clase H^p que ya adelantábamos en los preliminares. La propiedad más central que nos permite deducir es, de hecho, la que resuelve la pregunta que comenzamos planteando en esta sección.

Corolario 2.4.7. *Sea f una transformada de Cauchy. Entonces su límite no tangencial existe y es finito para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida Lebesgue).*

Demostración. El Teorema 2.4.2 prueba que $\mathscr{K} \subseteq H^p(\mathbb{D})$ para todo $0 < p < 1$. Por tanto, el resultado se sigue del resultado correspondiente para cualquier función de $H^p(\mathbb{D})$ (Teorema 1.5.6). $\square$

Otro hecho que se desprende del Teorema 2.4.2 es que

$$\mathscr{K} \subseteq \bigcap_{0<p<1} H^p(\mathbb{D}). \tag{2.3}$$

Se puede ver comprobar, además, que dicha contención es estricta. Se sabe la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\frac{1}{1-z}$$

es de clase $H^p(\mathbb{D})$ para todo $0 < p < 1$, pero no tiene coeficientes de Fourier acotados, por lo que no será de $\mathscr{K}$ (Corolario 2.2.5).

2.5. Puntos fijos de la transformada

En esta sección nos interesamos por la determinación de los puntos fijos de la transformada de Cauchy. Nótese que la transformada de Cauchy se aplica sobre medidas pero genera funciones. Por tanto, el concepto de punto fijo se refiere, aquí, a una función f y a su medida fdm, tal que $K(fdm) = f$.

Nótese que esto último, aunque no es una propiedad general, no es algo extraño. Recordando la motivación dada en la Sección 2.1, si f es holomorfa en un abierto que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$, lo que se obtiene es exactamente $K(fdm) = f$ según la fórmula integral de Cauchy. Por tanto, en este caso, se tienen puntos fijos. La pregunta ahora es: ¿hay más? Por supuesto que sí.

Teorema 2.5.1. *Sea $f \in H^1(\mathbb{D})$. Entonces f es un punto fijo de K.*

Demostración. Para comenzar, construyamos la familia de funciones, para $0 < r < 1$, dada por

$$f_r(z) := f(rz), \quad |rz| < 1.$$

Nótese que, como $f \in H^1(\mathbb{D})$, su límite radial existe en casi todo punto de $\mathbb{T}$. Por tanto, podemos definir

$$f^*(\xi) := \lim_{r\to 1^-} f(r\xi) = \lim_{r\to 1^-} f_r(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

De hecho, $f^* \in H^1(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$. Sabemos, así, que $f^* dm$ es una medida absolutamente continua respecto de m.

En cuanto al carácter de punto fijo, notamos que, como f es analítica en $\mathbb{D}$, entonces cada f_r es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/r\}$, que es un disco abierto que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$. Con ello, la fórmula integral de Cauchy establece que

$$f_r(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f_r(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi), \quad z \in \mathbb{D}.$$

No obstante, por las propiedades de las funciones de clase $H^1(\mathbb{T})$, se tiene que $f_r \to f^*$ en $L^1(\mathbb{T})$ cuando $r \to 1^-$ (Teorema 1.5.6), por lo que

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \frac{f_r(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi) - \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi) \right| \leq \frac{\|f_r - f^*\|_{L^1(\mathbb{T})}}{1-|z|} \to 0, \quad \text{si } r \to 1^-.$$

Es decir

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{f_r(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi) \to \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi),$$

si $r \to 1^-$, para cada $z \in \mathbb{D}$.

Por otro lado, es claro que, por definición, $f_r(\xi) \to f^*(\xi)$ para cada $\xi \in \mathbb{T}$ si $r \to 1^-$. Por tanto, uniendo ambas ideas, y por unicidad de límite, se tiene que

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f^*(\xi)}{1-\bar{\xi}z} dm(\xi),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, tal y como se pretendía. □

Recordando las propiedades de los espacios $H^p(\mathbb{D})$ dadas en los preliminares (Proposición 1.5.3), así como los últimos comentarios de sección anterior, ya estamos en condiciones de decir que

$$\bigcup_{p \geq 1} H^p(\mathbb{D}) = H^1(\mathbb{D}) \subseteq \mathscr{K} \subseteq \bigcap_{0<p<1} H^p(\mathbb{D}). \tag{2.4}$$

De la misma manera que en (2.3), se puede comprobar que $\mathscr{K} \neq H^1(\mathbb{D})$. Para ello, basta ver que para la medida delta en $\xi = 1$, $\delta_1 \in \mathbf{M}$, se tiene

$$K\delta_1(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D},$$

pero el límite radial de dicha función no es integrable, por lo que la función $K\delta_1$ no pertenece a $H^1(\mathbb{D})$. Aún así, la relación (2.4) refuerza aún más la conexión que comentábamos en la sección anterior entre la transformada de Cauchy y los espacios H^p. No obstante, aún no hemos caracterizado totalmente los puntos fijos de K. Para ello, necesitaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.5.2. *Sea f una función analítica en $\mathbb{D}$. Entonces $f \in H^1(\mathbb{D})$ si y solo si se cumple simultáneamente que:*

(a) La función $f^*(\zeta) := \lim_{r\to 1^-} f(r\zeta)$ existe para casi todo $\zeta \in \mathbb{T}$ (en medida Lebesgue), y es integrable.

(b) Se cumple que $f = K(f^* dm)$.

Demostración. Comenzamos suponiendo que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Entonces, la primera propiedad es conocida (Teorema 1.5.6), y la segunda se sigue del Teorema 2.5.1.

Recíprocamente, supongamos que (a) y (b) se cumplen. En ese caso, tenemos una cierta función f definida sobre $\mathbb{D}$, analítica, y con límite radial integrable sobre $\mathbb{T}$, siendo además un punto fijo para K. En particular, $f \in \mathscr{K}$, así que, como ya se vió, $f \in H^p(\mathbb{D})$ para todo $0 < p < 1$ (Teorema 2.4.2). Esto nos permite deducir, a través de la Proposición 1.5.9, que $f \in H^1(\mathbb{D})$. $\square$

Nótese que no existen puntos fijos de K representados por funciones no analíticas (puesto que toda transformada de Cauchy lo es). Por tanto, el teorema anterior caracteriza realmente todos los puntos fijos de K como la clase $H^1(\mathbb{D})$. Nótese, además, que $H^1(\mathbb{D})$ contiene todos los puntos fijos que se derivaban directamente desde la fórmula integral de Cauchy.

2.6. Comentarios finales

La intención de este primer capítulo no es más que motivar y presentar la transformada de Cauchy de medidas en la circunferencia unidad, siguiendo el esquema que se da en [2, p. 41-47]. Destaca que sus propiedades más inmediatas se dan al estudiar la relación de este concepto con los espacios H^p de Hardy que, hasta ahora, se han mostrado como una herramienta fundamental. Es por ello el hincapié que se hizo sobre los mismos en los preliminares.

Capítulo 3

Relación con espacios funcionales

3.1. Introducción

En el primer capítulo nos encargamos de definir la transformada de Cauchy de una medida $\mu \in \mathbf{M}$, analizando sus propiedades más elementales (acotación, límites radiales...). En esta ocasión, nos interesamos más por ver la relación entre ciertos subespacios X del espacio de medidas $\mathbf{M}$ y el "transformado"

$$K(X) = \{K\mu : \mu \in X\}.$$

Más particularmente, haremos hincapié en subespacios de medidas absolutamente continuas respecto de m, $f dm$, donde f se encuentre en un espacio bien conocido, como $L^p(\mathbb{T})$.

Nótese que esta visión de K es completamente natural. De hecho, ya adelantábamos resultados de este tipo en el capítulo anterior (Teorema 2.4.2).

3.2. Relación con $L^2(\mathbb{T})$

Como ya hemos adelantado, vamos a estudiar las propiedades que se deducen cuando vemos K como un operador definido sobre $L^2(\mathbb{T})$ (más bien, sobre el conjunto de medidas de la forma $f dm$ donde $f \in L^2(\mathbb{T})$). Para ello, haremos uso de la siguiente caracterización del espacio $H^2(\mathbb{D})$.

Proposición 3.2.1. *Sea una función $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica. Supongamos que*

f está definida por el polinomio de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces $f \in H^2(\mathbb{D})$ si y solo si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de cuadrado sumable, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Demostración. Recordemos que $f \in H^2(\mathbb{D})$ si, por definición, se cumple que

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^2 \, dm(\xi) < \infty.$$

Si definimos, para $0 \leq r < 1$, la función

$$f_r(\xi) := f(r\xi), \quad \xi \in \mathbb{T},$$

podemos ver que $f_r \in L^2(\mathbb{T})$ para todo $0 \leq r < 1$. En ese caso, la igualdad de Parseval muestra que

$$\int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^2 \, dm(\xi) = \int_{\mathbb{T}} |f_r(\xi)|^2 \, dm(\xi) = \|f_r\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=0}^{\infty} |r^n a_n|^2 .$$

Por tanto

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |f(r\xi)|^2 \, dm(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 .$$

Esto muestra la equivalencia dada en el enunciado. □

La equivalencia del resultado anterior está basada, en algún sentido, en el hecho de que puede definirse sobre el espacio $H^2(\mathbb{D})$ un producto escalar que reproduzca la norma que le hemos asignado, tal y como pasa en el caso de $L^2(\mathbb{T})$ para los espacios de Lebesgue.

Gracias a esto, podemos dar paso al siguiente resultado.

Teorema 3.2.2. *Notemos por $K_2 \colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{D})$ a la aplicación definida por $K_2(f) := K(fdm)$. Entonces K_2 es un operador lineal y continuo. De hecho $\|K_2\| = 1$.*

Demostración. Sea $f \in L^2(\mathbb{T})$. Nótese que, entonces, $d\mu = fdm$ es una medida absolutamente continua respecto de m (puesto que $L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$, ya que $\mathbb{T}$ tiene medida de Lebesgue finita). En particular, los coeficientes de Fourier de esta medida vienen dados por

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{T}} f(\xi)\,\bar{\xi}^n dm(\xi) = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

En ese caso, como aplicación de la Proposicion 2.2.4, se tiene que

$$K_2(f)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)\, z^n.$$

En este sentido, $K_2(f)$ es una función holomorfa cuyos coeficientes de Taylor (centrados en $z = 0$) son de cuadrado sumable. Esto puede comprobarse sin más que aplicar la igualdad de Parseval:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 < +\infty.$$

Por tanto, $K_2(f) \in H^2(\mathbb{D})$. De hecho, este mismo razonamiento prueba que

$$\|K_2(f)\|_2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

De aquí se desprende que el operador K_2 es lineal (puesto que K lo es) y continuo de $L^2(\mathbb{T})$ en $H^2(\mathbb{D})$ con $\|K_2\| \leq 1$.

Para ver la igualdad de la norma basta tomar cualquier $f \in L^2(\mathbb{T})$, con $\hat{f}(n) = 0$ para $n < 0$, y cumpliendo la desigualdad de Parseval estrictamente. En particular, escogiendo $f(\xi) = 1$ para todo $\xi \in \mathbb{T}$, se tiene que, para todo $z \in \mathbb{D}$, $K_2(f)(z) = 1$. Por tanto

$$\|K_2(f)\|_2 = 1 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Esto prueba que $\|K_2\| = 1$. $\square$

Corolario 3.2.3. *Definamos $K_2^*\colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ como*

$$K_2^*(f)(\xi) := \lim_{r\to 1^-} K_2(f)(r\xi), \quad \textit{en casi todo } \xi \in \mathbb{T},$$

para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces K_2^* es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T})$ sobre $H^2(\mathbb{T})$.

Demostración. Comenzamos notando que, como probamos en el teorema anterior, $K_2(f) \in H^2(\mathbb{D})$ para todo $f \in L^2(\mathbb{T})$. Por tanto, $K_2(f)$ posee límite radiales en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (Teorema 1.5.6), de manera que K_2^* está bien definida.

Por otro lado, sea $f \in H^2(\mathbb{T})$. Nótese que, entonces, ha de existir que $g \in H^2(\mathbb{D})$, de manera que

$$f(\xi) = \operatorname*{lím}_{r \to 1^-} g(r\xi), \quad \text{en casi todo } \xi \in \mathbb{T}.$$

Por tanto, si extendemos g a la clausura de $\mathbb{D}$, haciendo que g coincida con f sobre $\mathbb{T}$, se tiene que $K_2(f) = g$ en virtud del Teorema 2.5.1. Pero entonces, por definición

$$K_2^*(f)(\xi) = \operatorname*{lím}_{r \to 1^-} K_2(f)(r\xi) = \operatorname*{lím}_{r \to 1^-} g(r\xi) = f(\xi), \quad \text{en casi todo } \xi \in \mathbb{T}.$$

Se desprende, por tanto, que K_2^* es la identidad sobre $H^2(\mathbb{T})$.

Por último, hemos de recordar que si $f \in L^2(\mathbb{T})$, entonces se tiene la expresión (Teorema 2.2.4)

$$K_2(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Eso justifica que los coeficientes de Fourier de $K_2^*(f)$ vienen dados por $\hat{f}(n)$ (Teorema 1.5.6). Pero entonces, aprovechando estos coeficientes (vistos como el desarrollo en una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$), se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle K_2^*(f) \mid f - K_2^*(f)\rangle \left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)\xi^n \mid \sum_{m=-\infty}^{-1} \hat{f}(m)\xi^m \right\rangle &= \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \overline{\hat{f}(n)} \hat{f}(m) \langle \xi^n \mid \xi^m \rangle \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{-1} \overline{\hat{f}(n)} \hat{f}(m) \delta_{n,m} \underset{n \neq m}{=} 0.
\end{aligned}$$

$\square$

La aplicación K_2^* que acabamos de introducir se conoce usualmente con el nombre de proyección ortogonal de Riesz. Esta aplicación es un caso particular de una idea mucho más general (y difícil) que se ve simplificada por la estructura de $L^2(\mathbb{T})$ y de $H^2(\mathbb{D})$ como espacios de Hilbert. En lo siguiente, intentaremos generalizar lo anterior a cualquier espacio $L^p(\mathbb{T})$, para lo cual nos vemos forzados a introducir una nueva herramienta.

3.3. Núcleo de Poisson

Definición 3.3.1. *Dado $z \in \mathbb{D}$, se conoce como* núcleo de Poisson *a la función $P_z \colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$P_z(\xi) := \Re\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

El núcleo de Poisson aparece para dar respuesta al conocido problema de Dirichlet en $\mathbb{D}$. Este problema, dada f una función definida en $\mathbb{T}$, consiste en hallar otra función $\tilde{f}$ definida en $\mathbb{D}$, de manera que $\tilde{f}$ sea armónica y "recupere" a f en $\mathbb{T}$.

La resolución de tal problema es bien conocida y pasa por estudiar las propiedades de la función integral de Poisson de f, dada por

$$\tilde{f}(z) = \int_T P_z(\xi) f(\xi)\, dm(\xi), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Resulta que esta es exactamente la solución al problema de Dirichlet.

En nuestro caso, tal y como hicimos con la transformada de Cauchy, nos interesa ver a la integral de Poisson como una nueva transformada de medidas, para proceder posteriormente a buscar relación entre ambos conceptos. En este sentido, definimos lo siguiente.

Definición 3.3.2. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Se define la* transformada de Poisson *de μ como la función*

$$(P\mu)(z) := \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\, d\mu(\xi), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Comenzaremos viendo qué forma adopta la función $P\mu$.

Proposición 3.3.3. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. En ese caso, dados $0 < r < 1$, y $\zeta \in \mathbb{T}$, se tiene que $z = r\zeta \in \mathbb{D}$. Entonces*

$$(P\mu)(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(n)\, r^{|n|} \zeta^n.$$

Demostración. Para hallar la expresión anterior vamos a expresar el núcleo de Poisson de una manera más conveniente. En este sentido, podemos proceder de la siguiente manera

$$P_z(\xi) = \Re\left(\frac{\xi + z}{\xi - z}\right) = \Re\left(\frac{1 + \bar{\xi} z}{1 - \bar{\xi} z}\right).$$

De esta manera, apreciamos que $\left|\bar{\xi}z\right| = |z| < 1$, por lo que podemos proponer la siguiente suma geométrica

$$\frac{1+\bar{\xi}z}{1-\bar{\xi}z} = 2\frac{1}{1-\bar{\xi}z} - 1 = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\bar{\xi}z\right)^n - 1.$$

Por tanto, recordando que

$$\Re\left(w\right) = \frac{w+\bar{w}}{2}, \quad w \in \mathbb{C},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} P_z\left(\xi\right) =& \frac{2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\bar{\xi}z\right)^n - 1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\xi\bar{z}\right)^n - 1}{2} \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(\bar{\xi}z\right)^n + \left(\xi\bar{z}\right)^n\right] - 1. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos $\bar{\xi}z = r\eta$ para $0 < r = |z| < 1$ y $\eta \in \mathbb{T}$, entonces la expresión anterior puede hacerse más compacta

$$P_z\left(\xi\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(r\eta\right)^n + \left(r\bar{\eta}\right)^n\right] - 1.$$

Como $\eta \in \mathbb{T}$, entonces $\bar{\eta} = \eta^{-1}$, así que reescribimos

$$\begin{aligned} P_z\left(\xi\right) =& \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(r\eta\right)^n + \left(r\eta^{-1}\right)^n\right] - 1 \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\left(r\eta\right)^n + \left(r^{-1}\eta\right)^{-n}\right] - 1 \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty}\left(r\eta\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{0}\left(r^{-1}\eta\right)^n - 1 \\ =& \sum_{n=0}^{+\infty}\left(r\eta\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(r^{-1}\eta\right)^n. \end{aligned}$$

Y desde aquí podemos reescribir P_z en sus variables originales

$$P_z\left(\xi\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\bar{\xi}z\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{\bar{\xi}z}{|z|^2}\right)^n.$$

Con esta reescritura, la prueba de la proposición se vuelve una mera comprobación

$$\begin{aligned}
(P\mu)(r\zeta) &= \int_{\mathbb{T}} P_{r\zeta}(\xi)\, d\mu(\xi) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) \right) r^n \zeta^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) \right) \frac{r^n \zeta^n}{r^{2n}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{\mu}(n)\, r^n \zeta^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{\mu}(n)\, r^{-n} \zeta^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(n)\, r^{|n|} \zeta^n.
\end{aligned}$$

□

Aunque no profundizaremos en esto hasta más adelante, nótese que similitud “formal” de la proposición anterior con la Proposición 2.2.4.

De alguna manera, nuestro objetivo inicial es seguir un camino análogo al que se realiza cuando se resuelve el problema de Dirichlet, siendo nuestra meta caracterizar el comportamiento fronterizo de $P\mu$. Para ello, tal y como se procede clásicamente, comenzamos recordando el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4. *El núcleo de Poisson posee las siguientes propiedades:*

(a) P_z *es una función real, no negativa y continua.*

(b) Se cumple, para todo $z \in \mathbb{D}$*:*

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\, dm(\xi) = 1.$$

(c) Sea $\alpha \in (0, \pi)$*. Sea* $z = re^{i\theta}$ *para* $0 < r < 1$*. Se tiene que*

$$\lim_{r \to 1^-} \left(\sup_{\substack{\xi = e^{i\theta'} \in \mathbb{T} \\ |\theta - \theta'| \geq \alpha}} P_z(\xi) \right) = 0.$$

Demostración. La primera propiedad es sencilla de ver. Claramente P_z es real porque es, precisamente, la parte real de una función compleja. Además, nótese que tal función es cociente de dos funciones continuas donde el denominador no se anula ($\xi \in \mathbb{T}$ y $z \in \mathbb{D}$), así que P_z también es continua.

Resta ver que P_z no es negativo, para lo cual daremos una expresión más conveniente de esta función. Para ello, recuérdese que

$$\Re(w) = \frac{w+\bar{w}}{2}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
P_z(\xi) =& \frac{\dfrac{\xi+z}{\xi-z} + \dfrac{\bar{\xi}+\bar{z}}{\bar{\xi}-\bar{z}}}{2} \\
=& \frac{(\xi+z)\left(\bar{\xi}-\bar{z}\right) + \left(\bar{\xi}+\bar{z}\right)(\xi-z)}{2|\xi-z|^2} \\
=& \frac{\Re\left((\xi+z)\left(\bar{\xi}-\bar{z}\right)\right)}{|\xi-z|^2} \\
=& \frac{\Re\left(1-\xi\bar{z}+\bar{\xi}z-|z|^2\right)}{|\xi-z|^2}.
\end{aligned}$$

Pero $-\xi\bar{z}+\bar{\xi}z$ es imaginario puro (es de la forma $w-\bar{w}$), luego

$$P_z(\xi) = \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}.$$

Con esta nueva expresión, y dado que $|z|<1$, es claro que $P_z(\xi) \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{T}$.

En cuanto a la segunda propiedad, es fácil demostrarla a través de la definición de la transformada de Poisson para medidas. A través ella, podemos ver que

$$\int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\, dm(\xi) = (Pm)(z).$$

Por otro lado, nótese que los coeficientes de Fourier de m son todos nulos salvo $\hat{m}(0) = 1$ (recuérdese que m es normalizada). Por tanto, en base a la Proposicion 3.3.3, ya es claro ver que $(Pm)(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Se sigue, entonces, de la primera igualdad, el resultado esperado.

La tercera propiedad hace uso de la expresión

$$P_z(\xi) = \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}.$$

Para realizar la prueba, notemos, para $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$ y $\xi \in \mathbb{T}$, que

$$|\xi-z|^2 = 1-\bar{\xi}re^{i\theta}-\xi re^{-i\theta}+r^2.$$

Si $\xi = e^{i\theta'}$, entonces

$$|\xi - z|^2 = 1 - 2r\cos(\theta - \theta') + r^2.$$

Si nos restringimos a $|\theta - \theta'| \geq \alpha$, entonces

$$\cos(\theta - \theta') \leq \cos(\alpha) < 1.$$

En ese caso

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta') + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha) + r^2}.$$

Por tanto

$$\sup_{\substack{\xi = e^{i\theta'} \in \mathbb{T} \\ |\theta - \theta'| \geq \alpha}} P_z(\xi) \leq \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha) + r^2}.$$

Y obsérvese que

$$\lim_{r \to 1^-} 1 - 2r\cos(\alpha) + r^2 = 1 - 2\cos(\alpha) + 1 = 2(1 - \cos(\alpha)) > 0.$$

Por tanto

$$\lim_{r \to 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha) + r^2} = 0.$$

Así que, puesto que esta expresión es una cota superior a la de nuestro interés, se tiene el resultado. $\square$

Observación 3.3.5. Nótese que los dos últimos apartados de la proposición anterior pueden parecer contradictorios. Por un lado, independientemente de z, sabemos que P_z siempre integra a la unidad (según el segundo apartado). Sin embargo, para z "cercano" a $\mathbb{T}$, P_z tiende a anularse en casi todo $\mathbb{T}$ (según el tercer apartado). ¿Cómo es esto posible?

Si en la prueba anterior tomamos $\alpha = 0$, entonces podemos tomar $\xi \in \mathbb{T}$ con $z \to \xi$ cuando $r \to 1^-$ (es decir, $\xi = e^{i\theta}$). En ese caso, se tiene

$$P_z(\xi) = \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} = \frac{1 - r^2}{|e^{i\theta} - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - r|^2} = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Ahora es claro que si tomamos $r \to 1^-$, se tiene que $P_z(\xi) \to +\infty$.

Por tanto, la visión de la proposición anterior es que la función P_z "tiende a concentrarse" en z cuando $|z| \to 1^-$.

Con el objetivo de ilustrar esta visión, incluimos la siguiente figura.

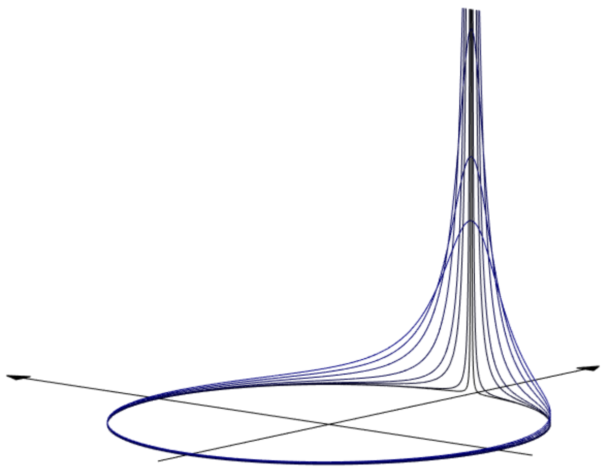

Figura 3.3.6: Representación de la función P_r sobre $\mathbb{T}$ para algunos valores de $0 < r < 1$. La escala de color se hace más oscura cuanto mayor es r. Nótese que el comportamiento se ajusta al comentado en esta observación.

El resultado que acabamos de ver, aunque básico, nos da una visión clara del núcleo de Poisson: si consideramos P_z como una familia de funciones definidas sobre $\mathbb{T}$ e “indexadas” por $z \in \mathbb{D}$, entonces dicha familia es lo que se conoce como una identidad aproximada sobre $L^1(\mathbb{T})$. Aunque no entraremos exactamente en este concepto, sí queremos nombrar que, de alguna manera, esta es la propiedad que nos ayudará a probar el siguiente resultado, el cual caracteriza el comportamiento fronterizo de la transformada de Poisson.

Teorema 3.3.7. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Supongamos que μ es de la forma $d\mu = fdm$ para $f \in L^p(\mathbb{T})$ para algún $1 < p < \infty$. Notemos, para $0 < r < 1$,*

$$f_r(\xi) := (P(fdm))(r\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

En ese caso, $f_r \to f$ cuando $r \to 1^-$ en $L^p(\mathbb{T})$, es decir,

$$\lim_{r \to 1^-} \|f_r - f\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0.$$

Demostración. Comenzamos notando que, como se vio en la demostración del Teorema 3.3.4, el núcleo de Poisson $P_z(\xi)$ en realidad es solo función del módulo $|z|$ y del ángulo entre z y ξ. Es por ello que, si expresamos $z = r\xi$ para $0 < r < 1$ y $\xi \in \mathbb{T}$, podemos notar lo siguiente

$$P_{r\xi}(\zeta) = \Re\left(\frac{\zeta + r\xi}{\zeta - r\xi}\right) = \Re\left(\frac{\zeta\bar{\xi} + r}{\zeta\bar{\xi} - r}\right) = P_r\left(\zeta\bar{\xi}\right).$$

Con esta idea, y recordando la segunda propiedad del Teorema 3.3.4, expresamos

$$\begin{aligned}
f(\xi) - f_r(\xi) &= \int_{\mathbb{T}} [f(\xi) - f(\zeta)] P_{r\xi}(\zeta)\, dm(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} [f(\xi) - f(\zeta)] P_r\left(\zeta\bar{\xi}\right) dm(\zeta).
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de varible $\gamma = \zeta\bar{\xi}$, reescribimos

$$f(\xi) - f_r(\xi) = \int_{\mathbb{T}} [f(\xi) - f(\gamma\xi)] P_r(\gamma)\, dm(\gamma).$$

La idea principal de la demostración es recordar que si q es el índice conjugado de p (i.e. $1/p + 1/q = 1$), entonces $L^p(\mathbb{T})$ es isométricamente isomorfo al espacio dual de $L^q(\mathbb{T})$ (Teorema 1.4.5). Es decir, para $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $g \in L^q(\mathbb{T})$, la función fg es integrable. De hecho, todo funcional $L^q(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ es de la forma

$$Tg = \int_{\mathbb{T}} \overline{f(\xi)} g(\xi)\, dm(\xi), \quad g \in L^q(\mathbb{T}),$$

con $f \in L^p(\mathbb{T})$ y $\|T\| = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$. En ese sentido, nos interesa identificar a $f - f_r$ con un funcional de $L^q(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ para así poder calcular su norma en $L^p(\mathbb{T})$.

Para desarrollar esta idea construimos el funcional

$$T\colon g \in L^q(\mathbb{T}) \mapsto T(g) := \int_{\mathbb{T}} [f(\xi) - f_r(\xi)]\, g(\xi)\, dm(\xi),$$

qué está bien definido, pues tanto f como f_r pertenecen a $L^p(\mathbb{T})$.

Con la reescritura anterior de $f - f_r$, y aplicando del teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned}
|T(g)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} [f(\xi) - f(\gamma\xi)] P_r(\gamma)\, dm(\gamma) \right) g(\xi)\, dm(\xi) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\xi) - f(\gamma\xi)| P_r(\gamma)\, dm(\gamma) \right) |g(\xi)|\, dm(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(\xi) - f(\gamma\xi)|\, |g(\xi)|\, dm(\xi)\, P_r(\gamma)\, dm(\gamma).
\end{aligned}$$

La integral en la variable ξ de la integral reiterada anterior puede acotarse, por la desigualdad de Hölder, como

$$\int_{\mathbb{T}} |f(\xi) - f(\gamma\xi)| \, |g(\xi)| \, dm(\xi) \leq \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} \|g\|_{L^q(\mathbb{T})},$$

donde $f_\gamma(\xi) := f(\gamma\xi)$. Por tanto, se tiene

$$|T(g)| \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(\gamma) \, dm(\gamma).$$

Con esto se deduce que

$$\|f - f_r\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\|\overline{f - f_r}\right\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|T\| \leq \int_{\mathbb{T}} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(\gamma) \, dm(\gamma).$$

Si ahora escogemos $\alpha \in (0, \pi)$, y notamos $\mathbb{T}_\alpha = \left\{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : |\theta| < \alpha\right\}$, entonces podemos separar la cota anterior según

$$\|f - f_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(\gamma) \, dm(\gamma) + \int_{\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(\gamma) \, dm(\gamma),$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(\gamma) \, dm(\gamma) &\leq \sup_{\gamma \in \mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma) \, dm(\gamma) \\ &= \sup_{\gamma \in \mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Por otro lado, obsérvese que

$$\|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} = 2 \|f\|_p,$$

por tanto

$$\int_{\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} P_r(\gamma) \, dm(\gamma) \leq 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \sup_{\gamma \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\alpha} P_r(\gamma).$$

En resumen, vemos que

$$\|f - f_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \sup_{\gamma \in \mathbb{T}_\alpha} \|f - f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} + 2 \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \sup_{\gamma \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\alpha} P_r(\gamma).$$

Pero nótese que el primer sumando podemos hacerlo tan pequeño como queramos sin más que tomar $\alpha \to 0^+$ (el "giro" $f \mapsto f_\gamma$ es una aplicación continua de $L^p(\mathbb{T})$ en sí mismo, que además coincide con la identidad cuando $\gamma = 1$), y la tercera propiedad del Teorema 3.3.4 asegura que

$$\lim_{r\to 1^-}\left(\sup_{\gamma\in\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}_\alpha} P_r(\gamma)\right) = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{r\to 1^-}\|f - f_r\|_{L^p(\mathbb{T})} = 0,$$

tal y como queríamos. □

3.4. Relación con $L^p(\mathbb{T})$

En la Sección 3.2 estudiamos el operador $K_2\colon L^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{D})$ inducido por la transformada de Cauchy, haciendo uso de la estructura de ambos espacios como espacios de Hilbert (en concreto, a través de la igualdad de Parseval y de la caracterización de las funciones de $H^2(\mathbb{D})$ a través de sus coeficientes de Taylor). Ya adelantábamos, entonces, que dicho estudio se podía extender a un operador de tipo $L^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{D})$, pero que esta idea resultaba técnicamente más compleja. No obstante, ya tenemos mucho trabajo hecho gracias a la transformada de Poisson. Para verlo, comenzamos probando el siguiente resultado.

Proposición 3.4.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Sean $\hat{\mu}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, sus coeficientes de Fourier. Supongamos que $\hat{\mu}(n) = 0$ para todo $n < 0$. Entonces la transformada de Cauchy de μ coincide con su transformada de Poisson.*

Demostración. La Proposición 2.2.4 establece que

$$(K\mu)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\hat{\mu}(n)\, z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Análogamente, la Proposición 3.3.3 establece que

$$(P\mu)(r\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{\mu}(n)\, r^{|n|}\zeta^n, \quad 0 < r < 1,\ \zeta \in \mathbb{T}.$$

Si $\hat{\mu}(n) = 0$ para todo $n < 0$, entonces esta última expresión puede reescribirse como

$$(P\mu)(r\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\hat{\mu}(n)\, r^n\zeta^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\hat{\mu}(n)\, z^n, \quad z = r\zeta \in \mathbb{D}.$$

Ahora ya es claro el resultado. □

Obsérvese que, por si mismo, el resultado anterior no es demasiado fuerte, puesto que sus hipótesis son muy restrictivas. No obstante, de él se desprende una fructífera idea. En su prueba utilizaremos la siguiente desigualdad.

Lema 3.4.2. *Sean A y B número reales no negativos. Sea $r > 0$. En ese caso, se tiene*

$$(A+B)^r \leq 2^r \left(A^r + B^r\right).$$

Demostración. Supongamos que $0 \leq A \leq B$. En ese caso, se tiene

$$(A+B)^r \leq (2B)^r = 2^r B^r \leq 2^r \left(A^r + B^r\right).$$

□

Proposición 3.4.3. *Tomemos $1 < p < \infty$. Existe una constante $M_p > 0$ tal que para toda $h \in H^p(\mathbb{T})$, con $u := \Re(h)$ y $v := \Im(h)$, cumpliendo $\hat{v}(0) = 0$, se tiene*

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M_p \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Demostración. Vamos a realizar la prueba de este resultado trabajando, inicialmente, con funciones sobre $\mathbb{D}$, usando argumentos de densidad. Al final de la prueba será cuando veamos el resultado enunciado, para $H^p(\mathbb{T})$, como un "paso al límite" de los hecho que durante la prueba desarrollemos.

Comenzaremos suponiendo que h es una función analítica sobre $\mathbb{D}$, continua en $\overline{\mathbb{D}}$ (estas funciones conforman el conocido álgebra del disco, $A(\mathbb{D})$). Nótese que, entonces, la parte real de h, u, y su parte imaginaria v, son funciones armónicas sobre $\mathbb{D}$ y continuas sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Supondremos, además, que $v(0) = 0$.

En primer lugar, asumamos que u es positiva sobre $\mathbb{D}$, es decir, que h lleva $\mathbb{D}$ en el semiplano derecho abierto $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. De esta manera sabemos que podemos tomar una rama holomorfa de h^p, digamos, a través del argumento principal. En ese caso, dado que $v(0) = 0$, se tiene que, usando el teorema de la media

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} h^p(\xi)\, dm(\xi) =& h^p(0)\\ =& [h(0)]^p\\ =& \left[\int_{\mathbb{T}} (u(\xi)+iv(\xi))\, dm(\xi)\right]^p\\ =& \left[\int_{\mathbb{T}} u(\xi)\, dm(\xi)\right]^p\\ \le& \int_{\mathbb{T}} u^p(\xi)\, dm(\xi). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otro lado, nótese que (prescidiendo el argumento en ξ)

$$(u+iv)^p - (iv)^p = \int_{iv}^{u+iv} pz^{p-1} dz.$$

En ese caso

$$\begin{aligned}|h^p - (iv)^p| =& |(u+iv)^p - (iv)^p|\\ =& \left|\int_{iv}^{u+iv} pz^{p-1} dz\right|\\ \le& \int_{iv}^{u+iv} \left|pz^{p-1}\right| d|z|\\ \le& p|u+iv|^{p-1} u\\ =& pu\left(u^2+v^2\right)^{(p-1)/2}. \end{aligned}$$

Usando el Lema 3.4.2 (nótese que $(p-1)/2 > 0$), se tiene

$$|h^p - (iv)^p| \le pu2^{(p-1)/2}\left[u^{p-1} + |v|^{p-1}\right].$$

En ese caso, integrando, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |h^p - (iv)^p|\, dm(\xi) \le& p2^{(p-1)/2}\left[\int_{\mathbb{T}} u^p dm(\xi) + \int_{\mathbb{T}} u|v|^{p-1} dm(\xi)\right]\\ \le& p2^{(p-1)/2}\left[\|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} + \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}\|v\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{T})}\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde hemos hecho uso de la desigualdad de Hölder.

Procediendo a través de la desigualdad triangular, y haciendo uso de (3.1) y (3.2), podemos ver que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |(iv)^p| \, dm(\xi) \leq& \int_{\mathbb{T}} |h^p - (iv)^p| \, dm(\xi) + \int_{\mathbb{T}} |h|^p \, dm(\xi) \\ \leq& p 2^{(p-1)/2} \left[\|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} + \|u\|_{L^p(\mathbb{T})} \|v\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{T})} \right] + \|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} . \quad (3.3)\end{aligned}$$

Ahora bien, como v toma valores en $\mathbb{R}$, tenemos

$$(iv)^p = |v|^p \, e^{\pm ip\pi/2},$$

donde el doble signo en el argumento de la exponencial hace referencia a la posibilidad de que v sea positiva o negativa. Con esto en mente, se tiene que

$$\Re\left[(iv)^p\right] = |v|^p \cos(p\pi/2) .$$

En ese caso, se tiene que

$$\begin{aligned}|\cos(p\pi/2)| \int_{\mathbb{T}} |v|^p \, dm(\xi) =& \left| \int_{\mathbb{T}} \Re\left[(iv)^p\right] dm(\xi) \right| \\ =& \left| \Re\left(\int_{\mathbb{T}} (iv)^p \, dm(\xi) \right) \right| \\ \leq& \left| \int_{\mathbb{T}} (iv)^p \, dm(\xi) \right| \\ \leq& \int_{\mathbb{T}} |iv|^p \, dm(\xi) . \quad (3.4)\end{aligned}$$

Uniendo todo lo anterior, es decir, (3.3) y (3.4), tenemos la desigualdad

$$|\cos(p\pi/2)| \, \|v\|^p_{L^p(\mathbb{T})} \leq p2^{(p-1)/2} \left(\|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} + \|u\|_{L^p(\mathbb{T})} \|v\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{T})} \right) + \|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} .$$

Tomando $\lambda := \|v\|_{L^p(\mathbb{T})} / \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}$, lo anterior se escribe como

$$|\cos(p\pi/2)| \, \lambda^p - p2^{(p-1)/2} \left(1 + \lambda^{p-1}\right) - 1 \leq 0.$$

Obsérvese que si $\cos(p\pi/2) \neq 0$ (es decir, p no impar), entonces el término izquierdo de la desigualdad anterior diverge hacia $+\infty$ cuando $\lambda \to +\infty$. Pero como la desigualdad impone que el término izquierdo no ha de ser positivo, se deduce que λ es acotado.

En resumen, para u positiva y p no impar, se tiene que existe $C > 0$ (que solo depende de p) de manera que $\lambda \leq C$, es decir

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C \, \|u\|_{L^p(\mathbb{T})} . \quad (3.5)$$

Nos encaminamos ahora a abordar el caso en el que u puede tomar valores con cualquier signo. Entonces descomponemos u en su parte positiva y negativa, es decir, $u = u^+ - u^-$, con u^+ y u^- funciones no negativas. Nótese que $u^+ + iv$ es una función continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Por tanto, sabemos que podemos encontrar un polinomio Q que “aproxime” a $u^+ + iv$ uniformemente. Más precisamente, dado ϵ, se tiene

$$\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \left|\big(u^+(z) + iv(z)\big) - Q(z)\right| < \epsilon.$$

Se tiene entonces, para $z \in \overline{\mathbb{D}}$, que

$$-\epsilon < u^+(z) - \Re(Q(z)) < \epsilon, \tag{3.6}$$

y

$$-\epsilon < u^-(z) - \Im(Q(z)) < \epsilon. \tag{3.7}$$

Sea el polinomio

$$P(z) := Q(z) + \varepsilon - i\Im(Q(0)), \quad z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

De (3.6) se sigue que

$$0 < \Re(Q(z)) + \epsilon - u^+(z) < 2\epsilon,$$

luego

$$\left|u^+(z) - \Re(P(z))\right| < 2\epsilon,$$

y

$$\Re(P(z)) > u^+(z) \geq 0.$$

De (3.7) se sigue que, como $v(0) = 0$, se tiene $|\Im(Q(0))| < \epsilon$, luego

$$-2\epsilon < v(z) - \Im(P(z)) < 2\epsilon.$$

Luego el polinomio P cumple:

(a) $\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} \left|u^+(z) - \Re(P(z))\right| < 2\epsilon$.

(b) $\Re(P(z)) > 0, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}$.

(c) $\Im(P(0)) = 0$.

(d) $\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |v(z) - \Im(P(z))| < 2\epsilon$.

Se sigue entonces de (b), (c) y (3.5) que

$$\|\Im(P)\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C\,\|\Re(P)\|_{L^p(\mathbb{T})}\,,$$

de donde se concluye, usando (a) y (b), que

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} &\le \|v-\Im(P)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\Im(P)\|_{L^p(\mathbb{T})}\\
&\le \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |v(z)-\Im(P(z))| + C\,\|\Re(P)\|_{L^p(\mathbb{T})}\\
&\le 2\epsilon + C\left(\left\|\Re(P)-u^+\right\|_{L^p(\mathbb{T})} + \left\|u^+\right\|_{L^p(\mathbb{T})}\right)\\
&\le 2\epsilon(1+C) + C\left\|u^+\right\|_{L^p(\mathbb{T})}\\
&\le 2\epsilon(1+C) + C\,\|u\|_{L^p(\mathbb{T})}\,,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que

$$\begin{aligned}
\left\|u^+\right\|^p_{L^p(\mathbb{T})} &= \sup_{0\le r<1}\int_{\mathbb{T}} \left|u^+(r\xi)\right|^p\,dm(\xi)\\
&\le \sup_{0\le r<1}\int_{\mathbb{T}} \left(\left|u^+(r\xi)\right|^p + \left|u^-(r\xi)\right|^p\right)\,dm(\xi)\\
&= \sup_{0\le r<1}\int_{\mathbb{T}} |u(r\xi)|^p\,dm(\xi)\\
&= \|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})}\,.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} \le C\,\|u\|_{L^p(\mathbb{T})}\,, \tag{3.8}$$

donde $h = u + iv$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, continua en $\overline{\mathbb{D}}$, y con $v(0) = 0$, y $p > 1$ no es impar.

Vamos, ahora, a deducir el caso en el que p es un entero impar mayor que 1. Para ello, aprovecharemos la dualidad entre los espacios $L^p(\mathbb{T})$ y $L^q(\mathbb{T})$ para índices conjugados p y q, tal y como se tiene en el Teorema 1.4.5. Concretamente, recuérdese que se cumple que

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{s\in L^q(\mathbb{T})\\ \|s\|_{L^q(\mathbb{T})}=1}} \left|\int_{\mathbb{T}} v(\xi)s(\xi)dm(\xi)\right|.$$

En realidad, el conjunto sobre el que se toma supremo en la expresión anterior se puede sustituir por las funciones de norma uno de un conjunto que sea denso en $L^q(\mathbb{T})$. En concreto, por la densidad de los polinomios, se puede considerar las funciones que son partes reales de polinomios, o, también, un conjunto mayor, las partes reales de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y continuas $\overline{\mathbb{D}}$. Luego

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{s=\Re(f)\\ f\in A(\mathbb{D})\\ \|s\|_{L^q(\mathbb{T})}=1}} \left| \int_{\mathbb{T}} v(\xi)s(\xi)dm(\xi) \right|. \tag{3.9}$$

Dada $s = \Re(f)$ para $f \in A(\mathbb{D})$, sea t la armónica conjugada de s que cumple $t(0) = 0$, es decir, $t(z) = \Im(f(z) - f(0))$ para $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= u(0)t(0) + v(0)s(0) \\ &= \Im\left((u + iv)(s + it)\right)(0) \\ &= \int_{\mathbb{T}} u(\xi)t(\xi)\, dm(\xi) + \int_{\mathbb{T}} v(\xi)s(\xi)\, dm(\xi), \end{aligned}$$

de donde

$$\int_{\mathbb{T}} v(\xi)s(\xi)\, dm(\xi) = -\int_{\mathbb{T}} u(\xi)t(\xi)\, dm(\xi),$$

por lo que, de (3.9), se sigue que

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{t=\Im(f),\, f\in A(\mathbb{D})\\ t(0)=0,\, \|\Re(f)\|_q=1}} \left| \int_{\mathbb{T}} u(\xi)t(\xi)\, dm(\xi) \right|.$$

Como $p = 3, 5\ldots$, el exponente conjugado es $1 < q < 2$, luego (3.8) se cumple para q. Acotando por la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} u(\xi)t(\xi)\, dm(\xi) \right| &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{T})} \|t\|_{L^q(\mathbb{T})} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{T})} C \|s\|_{L^q(\mathbb{T})} \\ &= C \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando supremos, en este caso también se cumple que existe $C > 0$ (que solo depende de p), de manera que

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}, \tag{3.10}$$

donde ahora $h = u + iv$ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, continua en $\overline{\mathbb{D}}$, con $v(0) = 0$, y $p > 1$ es cualquiera.

Resta, para completar la demostración, deducir el resultado correspondiente para las funciones de $H^p(\mathbb{T})$, tal y como dijimos, a partir de (3.10). Para verlo, sea $h = u + iv \in H^p(\mathbb{T})$ con $\hat{v}(0) = 0$. Sabemos, entonces, que h es el límite en la norma de $L^p(\mathbb{T})$ de una sucesión de polinomios P_n, definidos en $\overline{\mathbb{D}}$, con $\Im(P_n(0)) = 0$. Se cumple entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo visto en (3.10), que

$$\|\Im(P_n)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C \|\Re(P_n)\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

de donde se deduce, como $\Im(P_n) \to v$ y $\Re(P_n) \to u$ en $L^p(\mathbb{T})$, cuando $n \to \infty$, que

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

□

Teorema 3.4.4 (Proyección de M. Riesz)**.** *Tomemos* $1 < p < \infty$. *Sea* $f \in L^p(\mathbb{T})$, *cuya serie de Fourier es*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\,\xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Entonces existe $g \in L^p(\mathbb{T})$ *cuya serie de Fourier es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Más aún, existe una constante $C_p > 0$, *independiente de* f, *de manera que*

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M_p \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

En particular, la aplicación $\mathscr{P}_p \colon L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ *dada por*

$$\mathscr{P}_p(f) := g, \quad f \in L^p(\mathbb{T}),$$

donde

$$g(\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\xi^n, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

es un operador lineal y continuo de $L^p(\mathbb{T})$ *en sí mismo.*

Demostración. Supongamos que f es un polinomio trigonométrico, es decir, $f(\xi) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\,\xi^n$.

Consideremos primero el caso en que f es real. Entonces, para $-N \leq n \leq N$, se tiene

$$\hat{f}\,(-n) = \int_{\mathbb{T}} \xi^n f(\xi) dm\,(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n f\,(\xi)\, dm\,(\xi)} = \overline{\hat{f}\,(n)}.$$

Nótese que, en particular, que $\hat{f}\,(0) \in \mathbb{R}$. Se sigue que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n &= \sum_{n=-N}^{-1} \hat{f}\,(n)\,\xi^n + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(-n)\,\xi^{-n} + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n \\
&= \sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}\,(n)}\xi^{-n} + \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n \\
&= \hat{f}(0) + \left(\sum_{n=1}^{N} \overline{\hat{f}\,(n)}\xi^{-n} + \sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n \right) \\
&= \hat{f}(0) + 2\Re \left(\sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n \right) \\
&= \Re \left(\hat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n \right).
\end{aligned}$$

Se cumple entonces, para $g(\xi) := \sum_{n=0}^{N} \hat{f}\,(n)\,\xi^n$, que

$$\Re \left(2g - \hat{f}\,(0) \right) = f.$$

Sea $h := 2g - \hat{f}\,(0)$. Entonces h es un polinomio trigonométrico que cumple, como $\hat{h}(n) = 0$ para $n < 0$, que $h \in H^p(\mathbb{T})$. Como se cumple $\hat{h}(0) = \hat{f}(0) \in \mathbb{R}$, estamos en las condiciones de la Proposición 3.4.3, que permite deducir que

$$\left\|\Im(h)\right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq M_p \left\|\Re(h)\right\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

de donde

$$\left\|h\right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq (M_p + 1) \left\|\Re(h)\right\|_{L^p(\mathbb{T})} = (M_p + 1)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Entonces

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left\| \frac{h + \hat{f}(0)}{2} \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{2} \left(\|h\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\hat{f}(0)\|_{L^p(\mathbb{T})} \right),$$

donde, como m es normalizada, usado la desigualdad de Hölder se tiene

$$\|\hat{f}(0)\|_{L^p(\mathbb{T})} = |\hat{f}(0)| \, \|1\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \int_{\mathbb{T}} |f(\xi)| \, dm(\xi) \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Se concluye que

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{M_p + 2}{2} \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ es un polinomio trigonométrico complejo, basta considerar $f = \Re(f) + i\Im(f)$. En ese caso, la serie de Fourier de f se descompone como

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \xi^n = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\Re(f)}(n) \xi^n + i \sum_{n=-N}^{N} \widehat{\Im(f)}(n) \xi^n.$$

Con esto, notamos que

$$\sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n) \xi^n = \sum_{n=0}^{N} \widehat{\Re(f)}(n) \xi^n + i \sum_{n=0}^{N} \widehat{\Im(f)}(n) \xi^n,$$

donde las dos series del término derecho están asociadas, según hemos visto ya, a funciones de $L^p(\mathbb{T})$. Eso implica que, por linealidad, el término izquierdo también es la serie de una función de $L^p(\mathbb{T})$, digamos, g. En ese caso, podemos notar que

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^p(\mathbb{T})} &= \left\| \sum_{n=0}^{N} \widehat{\Re(f)}(n) \xi^n + i \sum_{n=0}^{N} \widehat{\Im(f)}(n) \xi^n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
&\leq \left\| \sum_{n=0}^{N} \widehat{\Re(f)}(n) \xi^n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} + \left\| \sum_{n=0}^{N} \widehat{\Im(f)}(n) \xi^n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
&\leq \frac{M_p + 2}{2} \left(\|\Re(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|\Im(f)\|_{L^p(\mathbb{T})} \right) \\
&\leq (M_p + 2) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

En el caso general, se puede proceder por densidad. Es decir, para una función $f \in L^p(\mathbb{T})$ cualquiera sabemos que f es límite en $L^p(\mathbb{T})$ de los polinomios trigonométricos $P_N(\xi) := \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)\,\xi^n$. Es decir, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $N_0 \in \mathbb{N}$ de manera que si $N \geq N_0$ se tiene que $\|f - P_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \epsilon$.

Nótese que, en ese caso, si tomamos $N_0 \leq N \leq M$, se tiene que

$$\left\| \sum_{n=N+1}^{M} \hat{f}(\xi)\,\xi^n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq (M_p + 2) \|P_M - P_N\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Pero entonces, como $P_N \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$, se tiene que $\|P_N - P_M\|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0$. En otras palabras, la serie anterior puede verse como una sucesión de Cauchy en $L^p(\mathbb{T})$. Por tanto, por completitud, dicha serie ha de converger en $L^p(\mathbb{T})$.

Visto lo anterior, y usando lo ya probado para polinomios trigonométricos, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n)\,\xi^n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} &\leq (M_p + 2) \|P_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
&\leq (M_p + 2) \left(\|f - P_N\|_{L^p(\mathbb{T})} + \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \right) \\
&\leq (M_p + 2)\,\epsilon + (M_p + 2) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario y la cota encontrada no depende de $N \geq N_0$, se deduce que ha de ser

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\xi^n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq (M_p + 2) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Por tanto, la función $g(\xi) := \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\,\xi^n \in L^p(\mathbb{T})$, y su norma está acotada por la norma de f a través de una constante que solo depende de p. $\square$

Teorema 3.4.5. *Sea $1 < p < +\infty$, y sea $f \in L^p(\mathbb{T})$. Sea $P_p(f)$ la transformada de Poisson de la medida $f dm$. Entonces*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |P_p(f)(r\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}^p < \infty.$$

Demostración. Para comenzar la prueba, definimos, para $0 < r < 1$, la función

$$g_r(\xi) := P_p(f)(r\xi), \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Nos encaminamos, ahora, a acotar $\|g\|_{L^p(\mathbb{T})}$. Para ello, aplicando una vez más la dualidad entre $L^p(T)$ y $L^q(\mathbb{T})$ cuando p y q con índices conjugados, será suficiente con acotarla integral

$$\int_{\mathbb{T}} g_r(\xi)\, h(\xi)\, dm(\xi), \quad h \in L^q(\mathbb{T}).$$

Comenzamos notando que, por la definición de g_r, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}} g_r(\xi)\, h(\xi)\, dm(\xi) = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} P_{r\xi}(\zeta)\, f(\zeta)\, dm(\zeta) \right] h(\xi)\, dm(\xi).$$

Aplicando el cambio de variable $\zeta = \gamma\xi$, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} P_{r\xi}(\zeta)\, f(\zeta)\, dm(\zeta) \right] h(\xi)\, dm(\xi) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} P_{r\xi}(\gamma\xi)\, f(\gamma\xi)\, dm(\gamma) \right] h(\xi)\, dm(\xi). \end{aligned}$$

Sin embargo, obsérvese que

$$P_{r\xi}(\gamma\xi) = \Re\left(\frac{\gamma\xi + r\xi}{\gamma\xi - r\xi}\right) = \Re\left(\frac{\gamma + r}{\gamma - r}\right) = P_r(\gamma).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} P_{r\xi}(\gamma\xi)\, f(\gamma\xi)\, dm(\gamma) \right] h(\xi)\, dm(\xi) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{T}} \left[\int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma)\, f(\gamma\xi)\, dm(\gamma) \right] h(\xi)\, dm(\xi) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma) \left[\int_{\mathbb{T}} f(\gamma\xi)\, h(\xi)\, dm(\xi) \right] dm(\gamma), \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el teorema de Fubini.

Del desarrollo anterior se concluye que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} g_r(\xi)\, h(\xi)\, dm(\xi) \right| &\le \int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma) \left[\int_{\mathbb{T}} |f(\gamma\xi)|\, |h(\xi)|\, dm(\xi) \right] dm(\gamma) \\ &\le \int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma)\, dm(\gamma)\, \|f\|_{L^p(T)}\, \|h\|_{L^q(T)} \\ &= \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\, \|h\|_{L^q(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la desigualdad de Hölder, y donde $h \in L^q(T)$ es una función cualquiera. Por tanto, tomando supremos, se tiene que

$$\|g_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Recordando la definición de g, esto es

$$\int_{\mathbb{T}} |P_p f(r\xi)|^p \, dm(\xi) \leq \|f\|^p_{L^p(\mathbb{T})},$$

de donde se deduce el resultado sin más que tomar supremos. □

Nótese que de lo anterior no se puede deducir que la transformada de Poisson de una medida absolutamente continua respecto de m sea una función de $H^p(\mathbb{D})$: no tiene por qué ser holomorfa.

Combinando los resultados anteriores podemos ver la siguiente conexión entre los conceptos introducidos, lo cual completa la idea originada a partir de la Proposicion 3.4.1.

Proposición 3.4.6. *Sea $1 < p < \infty$, y sea $f \in L^p(\mathbb{T})$. Denotemos por $K_p(f)$ a la transformada de Cauchy $K(fdm)$. En ese caso, se tiene*

$$K_p(f) = K_p(\mathscr{P}_p(f)) = P_p(\mathscr{P}_p(f)).$$

Demostración. Recordamos que, dado $n \in \mathbb{Z}$ y a la vista del Teorema 3.4.4, los coefientes de Fourier de $\mathscr{P}_p f$ son nulos para $n < 0$, y coinciden con los de f para $n \geq 0$.

En ese caso, la primera igualdad es consecuencia de la Proposición 2.2.4. Por otro lado, la segunda igualdad se deduce de la Proposición 3.4.1. □

Una vez visto todos los resultados anteriores, podemos pasar a enunciar el resultado más representativo de este capítulo, cuya prueba se ve simplificada por la introducción de la transformada de Poisson y de la proyección de M. Riesz.

Teorema 3.4.7. *Sea $1 < p < +\infty$. Denotemos $K_p \colon L^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{D})$ a la aplicación definida por $K_p(f) := K(fdm)$ para todo $f \in L^p(\mathbb{T})$. Entonces K_p es un operador lineal y continuo.*

Demostración. En primer lugar hemos de ver que K_p está bien definido, es decir, que para cada $f \in L^p(\mathbb{T})$ se tiene que $K_p(f) \in H^p(\mathbb{D})$. Para ello, recordamos que $K_p(f)$ es una función holomorfa en el disco (es una transformada de Cauchy), por lo que resta ver que

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_{\mathbb{T}} |K_p(f)(r\xi)|^p \, dm(\xi) < \infty.$$

Sin embargo, esto es consecuencia directa de que, como se vió en la Proposición 3.4.6, $K_p(f)$ puede verse, equivalentemente, como la transformada de Poisson de $\mathscr{P}_p(f)$. En ese caso, la acotación requerida viene justificada por el Teorema 3.4.5.

Una vez visto esto, resta ver que K_p es un operador lineal y continuo. La linealidad se deduce directamente de que K es ya lineal. En cuanto a la continuidad, resta ver que, vía la Proposición 3.4.6, se tiene

$$\|K_p(f)\|_p = \|P_p(\mathscr{P}_p(f))\|_p \leq \|\mathscr{P}_p(f)\|_p \leq M_p \|f\|_p ,$$

donde se han utilizado las propiedades de continuidad dadas en el Teorema 3.4.4 y en el Teorema 3.4.5. □

3.5. Comentarios finales

El trabajo realizado en este capítulo corresponde a la unión de los argumentos que se dan en varias referencias por separado. En particular, la Sección 3.2 está tomada siguiento las ideas de [2, p. 64-65]. El estudio del núcleo de Poisson en la siguiente sección puede seguirse de la misma manera en [4, p. 205-209] y en [6, p. 27-34].

Los argumentos de la última sección son, en algún sentido, propios. De hecho, son el fruto del estudio de las referencias anteriores. No obstante, en [2, p. 65-67] se puede encontrar una prueba conceptualmente parecida, aunque tecnicamente distinta, del Teorema 3.4.7.

Capítulo 4

El espacio de las transformadas de Cauchy

4.1. Introducción

En capítulos anteriores introdujimos el espacio de transformadas de Cauchy $\mathscr{K}$ (Definición 2.2.3), así como los conjuntos de medidas R_f que representan a una cierta transformada (Definición 2.3.1).

En esta ocasión queremos caracterizar a $\mathscr{K}$ desde el punto de vista del Análisis Funcional, para lo cual se tornarán fundamentales los resultados presentados en la Proposición 2.3.6, donde se caracterizan los conjuntos R_f.

4.2. $\mathscr{K}$ como espacio de Banach

En un sentido estrictamente algebraico, es claro que la relación en el espacio de medidas $\mathbf{M}$ dada por

$$\mu \sim \nu \Leftrightarrow K\mu = K\nu$$

induce una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) cuyo conjunto cociente $\mathbf{M}/\sim$ puede identificarse claramente con $\mathscr{K}$ (nótese que K es una biyección entre ambos conjuntos).

Yendo más allá, la Proposición 2.3.6 induce a la idea de que si definimos

$$\overline{H_0^1} := \left\{\overline{\phi}dm : \phi \in H_0^1(\mathbb{T})\right\} \subseteq \mathbf{M},$$

entonces $\overline{H_0^1}$ es exactamente la clase de equivalencia de la función nula (que es la transformada de Cauchy de la medida nula).

Incluso podemos decir más: la relación de equivalencia anterior puede definirse equivalentemente como

$$\mu \sim \nu \Leftrightarrow \mu - \nu = \lambda, \quad \lambda \in \overline{H_0^1}.$$

La pregunta ahora es: ¿cómo es posible aprovechar esta visión? Nuestro objetivo será usar esta relación de equivalencia para dotar a $\mathscr{K}$ de la estructura de un espacio vectorial normado completo, es decir, verlo como un espacio de Banach. Para ello, definimos lo siguiente.

Definición 4.2.1. *Sea* $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$ *el conjunto de clases de equivalencia de la forma*

$$[\mu] := \mu + \overline{H_0^1}, \quad \mu \in \mathbf{M}.$$

Dadas dos medidas $\mu, \nu \in \mathbf{M}$ *y dado un escalar* $\alpha \in \mathbb{C}$*, definimos sobre* $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$ *las siguientes operaciones:*

(a) Una suma interna, dada por

$$[\mu] + [\nu] := [\mu + \nu].$$

(b) Un producto por escalares, dado por

$$\alpha [\mu] := [\alpha\mu].$$

Lo relevante de las operaciones anteriores es lo siguiente.

Lema 4.2.2. *Las operaciones anteriores están bien definidas, y dotan a* $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$ *de la estructura de un espacio vectorial.*

Demostración. Comenzamos viendo que las operaciones están bien definidas, es decir, no dependen del representante elegido de la clase de equivalencia. Para ello, sean $[\mu_1] = [\mu_2]$ y $[\nu_1] = [\nu_2]$ elementos de $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$. Se tiene que

$$[\mu_1] + [\nu_1] = [\mu_1 + \nu_1] = \mu_1 + \nu_1 + \overline{H_0^1}.$$

Más allá de esto, nótese que si $[\mu_1] = [\mu_2]$, entonces ha de existir $\lambda_\mu \in \overline{H_0^1}$ de manera que $\mu_1 = \mu_2 + \lambda_\mu$. Por analogía, ha de existir $\lambda_\nu \in \overline{H_0^1}$ de manera que $\nu_1 = \nu_2 + \lambda_\nu$. Por tanto

$$[\mu_1] + [\nu_1] = \mu_2 + \lambda_\mu + \nu_2 + \lambda_\nu + \overline{H_0^1}.$$

Pero nótese que $\lambda_\mu + \lambda_\nu \in \overline{H_0^1}$, que es un espacio vectorial. Por tanto, el conjunto anterior es equivalente a

$$[\mu_1] + [\nu_1] = \mu_2 + \nu_2 + \overline{H_0^1} = [\mu_2 + \nu_2] = [\mu_2] + [\nu_2] \, .$$

Eso justifica que la suma de dichos elementos está bien definida.

De manera análoga se procede con el producto por escalares. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $[\mu_1] = [\mu_2] \in \overline{H_0^1}$, entonces

$$\alpha\,[\mu_1] = [\alpha\mu_1] = \alpha\mu_1 + \overline{H_0^1}.$$

Pero si $[\mu_1] = [\mu_2]$, entonces ha de existir $\lambda_\mu \in \overline{H_0^1}$ de manera que $\mu_1 = \mu_2 + \lambda_\mu$. Se deduce, por tanto, que

$$\alpha\,[\mu_1] = \alpha\mu_2 + \alpha\lambda_\mu + \overline{H_0^1} = \alpha\mu_2 + \overline{H_0^1} = [\alpha\mu_2] = \alpha\,[\mu_2] \, ,$$

donde hemos utilizado, de nuevo, que $\alpha\lambda_\mu + \overline{H_0^1} = \overline{H_0^1}$. Esto confirma que el producto por escalares también está bien definido.

Una vez visto que la definición de las operaciones son correctas, es fácil comprobar que $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$ satisface la axiomática (asociatividad, existencia de elementos neutros,...) referente a los espacios vectoriales, puesto que sus operaciones están definidas a partir de las operaciones de $\mathbf{M}$, que ya sabemos que es un espacio vectorial.

□

Una vez sentadas las bases de nuestro objetivo, podemos enunciar lo siguiente.

Teorema 4.2.3. *La aplicación* $\|\cdot\| : \mathbf{M}/\overline{H_0^1} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$\|[\mu]\| := \text{ínf}\left\{\|\mu + \lambda\|_{\mathbf{M}} : \lambda \in \overline{H_0^1}\right\}, \quad [\mu] \in \mathbf{M}/\overline{H_0^1},$$

es una norma que dota a $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$ *de la estructura de un espacio de Banach.*

La prueba del resultado que acabamos de enunciar se deduce de un hecho más general propio del Análisis Funcional, el cual nos encaminamos a mostrar.

Lema 4.2.4. *Un espacio normado* X *es un espacio de Banach si y solo si para toda sucesión* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ *con* $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ *convergente se tiene que* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *converge en* X*.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio de Banach, y sea una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ convergente. En ese caso, las sumas parciales $\sum_{n=1}^{N} x_n$ (para $N \in \mathbb{N}$) forman una sucesión de Cauchy. Pero entonces, dado que X es completo, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Recíprocamente sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ una sucesión de Cauchy. En ese caso, podemos encontrar $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, con $n_0 < n_1$, de manera que

$$\|x_{n_1} - x_{n_0}\| < 1/2.$$

Más aún, también podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$, con $n_2 > n_1$, de manera que

$$\|x_{n_2} - x_{n_1}\| < 1/4.$$

Siguiendo por inducción, puede encontrarse una subsucesión x_{n_k} de la sucesión original de manera que

$$\left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| < 1/2^k.$$

Pero entonces, se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\|$ es convergente. Por hipótesis, $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ también ha de serlo. Pero la sucesión de sumas parciales de la serie anterior no es más que

$$\sum_{k=1}^{K} x_{n_k} - x_{n_{k-1}} = x_{n_K} - x_{n_0}.$$

Esto implica que la subsucesión x_{n_k} converge en X. Pero entonces, por ser la sucesión original de Cauchy, esta ha de converger. Aún más, como la sucesión original era una sucesión de Cauchy arbitraria, entonces X ha de ser completo. $\square$

Lema 4.2.5. *Sea X un espacio de Banach, e $Y \subseteq X$ un subespacio vectorial cerrado. Sea X/Y el espacio de clases de equivalencia*

$$[x] = x + Y, \quad x \in X.$$

Si dotamos a X/Y de operaciones análogas a las dadas en la Definición 4.2.1, entonces la aplicación $\|\cdot\| : X/Y \to \mathbb{R}$ dada por

$$\|[x]\| := \inf \{\|x + y\| : y \in Y\},$$

es una norma sobre X/Y. Es más, dicha norma dota a X/Y de la estructura de un espacio de Banach.

Demostración. Para ver que nuestra definición genera una norma, hemos de comprobar que satisface las propiedades pertinentes (positiva, desigualdad triangular,...). No obstante, la mayoría de ellas son consecuencia directa de que la norma se define en base a la norma utilizada para X. La única que presenta una dificultad técnica es mostrar que si $\|[x]\| = 0$, entonces $[x] = [0]$. Para ello, notamos que:

$$\|[x]\| = \text{ínf}\{\|x + y\| : y \in Y\} = d(x, Y) = 0.$$

Pero hemos de recordar que Y es un subespacio vectorial cerrado de X. Por tanto, lo anterior implica que $x \in Y$. Pero entonces $[x] = [0]$, tal y como se quería.

Resta ver la completitud de la norma. Para ello, sea una sucesión en X/Y, digamos $\{[x_n] : x_n \in X, n \in \mathbb{N}\} \subseteq X/Y$, de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|$ converge. Nótese que, para ver que X/Y es un espacio de Banach, el Lema 4.2.4 asegura que basta ver que $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ converge en X/Y.

Para ver esto último, dado que la norma en X/Y se define a través de un ínfimo, notamos que ha de existir $x_n^* \in [x_n]$ de manera que

$$\|x_n^*\| \leq 2\,\|[x_n]\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En ese caso, como $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|$ es convergente, la desigualdad anterior prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\|$ también ha de converger. En ese caso, como X es un espacio de Banach, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*$ converge en X, digamos a $x \in X$. Pero entonces, se tiene

$$\|[x_n] - [x]\| = \|[x_n^*] - [x]\| = \text{ínf}\{\|x_n^* - x - y\| : y \in Y\} \leq \|x_n^* - x\|.$$

Por tanto, la convergencia de x_n^* a x en X implica la de $[x_n]$ a $[x]$ en X/Y. □

Demostración del Teorema 4.2.3. Nótese que, en virtud del lema anterior, basta ver que $\overline{H_0^1}$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathbf{M}$. Como es claro que respeta las operaciones de $\mathbf{M}$ como espacio vectorial, es un subespacio vectorial. Resta ver que es cerrado. Para ello, comenzamos recordando que si $\mu \in \overline{H_0^1}$, entonces ha de existir $\phi \in H_0^1(\mathbb{T})$ de manera que $d\mu = \bar{\phi}dm$. En ese caso

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n \overline{\phi(\xi)} dm(\xi) = \overline{\int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^{-n} \phi(\xi)\, dm(\xi)} = \overline{\hat{\phi}(-n)}.$$

Por tanto, $\overline{H_0^1}$ puede identificarse con el subconjunto de medidas de $\mathbf{M}$ cuyos coeficientes de Fourier $\hat{\mu}(n)$ son nulos para $n \geq 0$.

Con esto en mente, para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 0$, construimos las aplicaciones $T_n \colon \mathbf{M} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$T_n(\mu) := \hat{\mu}(n), \quad \mu \in \mathbf{M}.$$

Obsérvese que

$$|T_n(\mu)| = |\hat{\mu}(n)| = \left| \int_{\mathbb{T}} \bar{\xi}^n d\mu(\xi) \right| \leq \int_{\mathbb{T}} d|\mu|(\xi) = \|\mu\|_{\mathbf{M}}.$$

Por tanto, las aplicaciones T_n son funcionales continuos de $\mathbf{M}$ en $\mathbb{C}$, a través de los cuales podemos escribir que

$$\overline{H_0^1} = \bigcap_{n \geq 0} T_n^{-1}(\{0\}).$$

Esto justifica que $\overline{H_0^1}$ es cerrado en $\mathbf{M}$. □

Dentro de este marco teórico, parece natural identificar a cada transformada $K\mu \in \mathscr{K}$ con su conjunto de equivalencia $[\mu] \in \mathbf{M}/\overline{H_0^1}$. En este sentido, la aplicación

$$K\mu \in \mathscr{K} \mapsto [\mu] \in \mathbf{M}/\overline{H_0^1}$$

es un isomorfismo (es lineal, puesto que K lo es, y es biyectivo por la Proposición 2.3.6). Es por ello que damos la siguiente definición.

Definición 4.2.6. *Sea $f = K\mu \in \mathscr{K}$ una transformada de Cauchy. Entonces se define la norma de f como*

$$\|f\|_{\mathscr{K}} := \|[\mu]\|.$$

Nótese que la definición anterior dota a $\mathscr{K}$ de la estructura de un espacio normado. Aún más, y esta es la meta de nuestro razonamiento, la definición anterior hace que K sea un isomorfismo isométrico entre $\mathscr{K}$ y $\mathbf{M}/\overline{H_0^1}$. Esto convierte a $\mathscr{K}$, dotado de dicha norma, y gracias al teorema que acabamos de presentar, en un espacio de Banach.

4.3. Propiedades de la norma

En la sección anterior dotamos a $\mathscr{K}$ de una norma que lo hacía completo. No obstante, esta norma está "escrita" en términos de $\overline{H_0^1}$, aunque vimos que la relación de equivalencia que inducía esta asignación de norma podía definirse independientemente de tal espacio haciendo uso de la transformada de Cauchy. La siguiente proposición justifica que la norma también puede definirse de tal manera.

Proposición 4.3.1. *Sea $f = K\mu$ una transformada de Cauchy, con $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Entonces, se tiene la igualdad*

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \operatorname{ínf}\left\{\|\nu\|_{\mathbf{M}} : \nu \in R_f\right\}.$$

Demostración. La igualdad propuesta consiste en una simple reescritura de $\|f\|_{\mathscr{K}} = \|[\mu]\|$ vía la Proposición 2.3.6. En este sentido, recuérdese que si $f = K\mu$, entonces

$$\begin{aligned}
\nu \in R_f \Leftrightarrow & K\nu = K\mu \\
\Leftrightarrow & K(\nu - \mu) = 0 \\
\Leftrightarrow & \nu - \mu \in \overline{H_0^1} \\
\Leftrightarrow & \nu = \mu + \lambda \text{ para cierta medida } \lambda \in \overline{H_0^1}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|\nu\|_{\mathbf{M}} = \|\mu + \lambda\|_{\mathbf{M}} \text{ para cierta medida } \lambda \in \overline{H_0^1}.$$

En ese caso, recordando la definición de $\|[\mu]\|$, se tiene el resultado. □

La reinterpretación de la norma de $\mathscr{K}$ que ofrece la proposición anterior proporciona la idea de nuestro siguiente resultado.

Proposición 4.3.2. *Sea $f = K\mu$ una transformada de Cauchy. Entonces*

$$|f(0)| \leq \|f\|_{\mathscr{K}}.$$

Demostración. Comenzamos notando, a través de la Proposición 2.2.4, que

$$f(0) = \hat{\mu}(0).$$

Con esto en mente, vemos que

$$|f(0)| = |\hat{\mu}(0)| = \left|\int_{\mathbb{T}} d\mu(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{T}} d|\mu|(\xi) = \|\mu\|_{\mathbf{M}}.$$

De hecho, nótese que lo anterior es una propiedad no solo de μ, sino de cualquier medida $\nu \in R_f$. Por tanto, se tiene que

$$|f(0)| \leq \operatorname{ínf}\left\{\|\nu\|_{\mathbf{M}} : \nu \in R_f\right\} = \|f\|_{\mathscr{K}}.$$

□

Nótese que existen casos donde es fácil ver que la desigualdad utilizada en el teorema anterior es, en realidad, una igualdad. Esto nos lleva al siguiente resultado.

Proposición 4.3.3. *Sea $f = K\mu$ una transformada de Cauchy, para cierta medida positiva $\mu \in \mathbf{M}$. Entonces*

$$f(0) = \|f\|_{\mathscr{K}} = \|\mu\|_{\mathbf{M}}.$$

Demostración. Comenzamos notando, por definición, que $\mu \in R_f$. Por tanto, se deduce directamente que

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \text{ínf}\left\{\|\nu\|_{\mathbf{M}} : \nu \in R_f\right\} \leq \|\mu\|_{\mathbf{M}}.$$

En cuanto a la desigualdad contraria, como μ es una medida positiva, se tiene, vía la Proposición 2.2.4, que

$$f(0) = \hat{\mu}(0) = \int_{\mathbb{T}} d\mu(\xi) = \|\mu\|_{\mathbf{M}}.$$

En ese caso, nótese que $f(0)$ es real y positivo, así que, a partir del resultado anterior, se deduce que

$$\|\mu\|_{\mathbf{M}} = f(0) \leq \|[\mu]\| = \|f\|_{\mathscr{K}}.$$

□

4.4. Estudio de la convergencia

En este capítulo, hasta ahora, hemos dotado a $\mathscr{K}$ de una norma que lo hace completo, de manera que podemos ver a $\mathscr{K}$ como un espacio de Banach. Además, hemos estudiado algunas propiedades de tal norma.

Es interesante, en lo que sigue, apreciar la siguiente interpretación de la Proposición 4.3.3: existen ciertas transformadas de Cauchy $f \in \mathscr{K}$ cuya norma, que está definida a través de un ínfimo, se alcanza en alguna medida $\mu \in R_f$. Más precisamente, esto ha sido probado para transformadas de medidas positivas, y se verá también, más adelante en el texto, para medidas singulares respescto de m, concretamente en la Proposición 4.5.2. No obstante, esto es una propiedad general, que podemos enunciar de la siguiente manera.

Proposición 4.4.1. *Para cada transformada de Cauchy $f \in \mathscr{K}$ existe una única medida $\mu \in R_f$ de manera que se tiene la igualdad*

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \|\mu\|_{\mathbf{M}}.$$

Este resultado puede deducirse a partir del siguiente.

Teorema 4.4.2. *Dada una función $f \in L^1(\mathbb{T})$, existe una única función $h \in H^1(\mathbb{T})$ de manera que se verifica la igualdad*

$$\|f - h\|_{L^1(\mathbb{T})} = \text{ínf}\left\{\|f - g\|_{L^1(\mathbb{T})} : g \in H^1(\mathbb{T})\right\}.$$

La dificultad técnica de ambos resultados hace que no podamos abordar sus pruebas en este texto. Pueden verse en [2, p. 86] y [2, p. 84], respectivamente. Aún así, la Proposición 4.4.1 es de sumo interés, puesto que justifica la elección que hemos hecho para dotar a $\mathscr{K}$ de una norma. Esto puede verse en el siguiente resultado.

Proposición 4.4.3. *Sea $\{f_n\} \subseteq \mathscr{K}$ una sucesión que converge a $f \in \mathscr{K}$ en la topología dada por la norma de dicho espacio. En ese caso, la sucesión $\{f_n\}$ tiende a f uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.*

Demostración. Comenzamos observado que para cada $n \in \mathbb{N}$, por linealidad, ha de ser que $f - f_n \in \mathscr{K}$. En ese caso, por la Proposición 4.4.1, ha de existir $\mu_n \in \mathbf{M}$ (más concretamente, $\mu \in R_{f-f_n}$) de manera que

$$\|f - f_n\|_{\mathscr{K}} = \|\mu_n\|_{\mathbf{M}}.$$

Más aún, recordando la desigualdad dada al inicio de la Sección 2.4, lo anterior permite ver que

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \frac{\|\mu_m\|_{\mathbf{M}}}{1 - |z|} = \frac{\|f - f_n\|_{\mathscr{K}}}{1 - |z|}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Si ahora escogemos $X \subseteq \mathbb{D}$ un compacto, entonces sabemos que ha de existir $0 < r < 1$ de manera que todo $z \in X$ cumple $|z| \leq r$. Entonces, podemos apreciar que

$$\frac{1}{1 - |z|} \leq \frac{1}{1 - r}, \quad z \in X.$$

Con esto en mente, se tiene que

$$|f(z) - f_n(z)| \leq C \|f - f_n\|_{\mathscr{K}}, \quad z \in X.$$

Nótese que la cota anterior es independiente de z, por lo que se deduce que

$$\sup_{z\in X} |f(z) - f_n(z)| \leq C \|f - f_n\|_{\mathscr{K}} .$$

De la desigualdad anterior se deduce la convergencia uniforme en X de la convergencia en norma de $\mathscr{K}$. Aún más, como X es un compacto cualquiera contenido en $\mathbb{D}$, se tiene el resultado. □

El resultado que acabamos de mostrar justifica la elección de la norma con la que hemos dotado a $\mathscr{K}$: la convergencia en norma preserva la convergencia uniforme en compactos.

Esta propiedad es clave en el estudio de las familias de funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, y por tanto, es de entender que la norma escogida es una norma "razonable" para $\mathscr{K}$, dada la relación de este espacio con los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$.

4.5. Descomposición

En esta sección vamos a aprovechar el teorema de descomposición de Lebesgue para desentrañar la estructura del espacio de las transformadas de Cauchy. En este sentido, comenzamos observando los siguientes resultados.

Lema 4.5.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida singular respecto de m, y sea $\nu \in \mathbf{M}$ una medida absolutamente continua respecto de m. En ese caso, se tiene que*

$$\|\mu + \nu\|_{\mathbf{M}} = \|\mu\|_{\mathbf{M}} + \|\nu\|_{\mathbf{M}} .$$

Demostración. Puesto que μ es singular respecto de m, han de existir dos borelianos A y B disjuntos, contenidos en $\mathbb{T}$, de manera que

$$m(A) = |\mu|(B) = 0.$$

En ese caso, puesto que ν es absolutamente continua ha de ser

$$0 \leq |\nu|(A) \leq |\nu(A)| = 0.$$

Con estas dos propiedades en mente, es claro que

$$\|\mu\|_{\mathbf{M}} = |\mu|(\mathbb{T}) = |\mu|(A), \quad \|\nu\|_{\mathbf{M}} = |\nu|(\mathbb{T}) = |\nu|(B).$$

Por tanto, dado que A y B son disjuntos, a partir de lo anterior es una mera observación que

$$\|\mu + \nu\|_{\mathbf{M}} = |\mu + \nu|(\mathbb{T}) = |\mu|(A) + |\nu|(B) = \|\mu\|_{\mathbf{M}} + \|\nu\|_{\mathbf{M}} .$$

□

Proposición 4.5.2. *Sea $f = K\mu$ una transformada de Cauchy, con $\mu \in \mathbf{M}$ una medida singular respecto de m. Entonces*

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \|\mu\|_{\mathbf{M}} .$$

Demostración. La prueba se reduce a calcular

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \text{ínf} \left\{ \|\mu + \lambda\|_{\mathbf{M}} : \lambda \in \overline{H_0^1} \right\} .$$

Para ello, expresemos $\lambda = \overline{\phi} dm$ para cierta $\phi \in H_0^1 (\mathbb{T})$ (recordemos que λ es absolutamente continua respecto de m). En ese caso, como μ es singular respecto de m, el Lema 4.5.1 implica que

$$\|\mu + \lambda\|_{\mathbf{M}} = \|\mu\|_{\mathbf{M}} + \|\lambda\|_{\mathbf{M}} = \|\mu\|_{\mathbf{M}} + \left\|\overline{\phi}\right\|_{L^1(\mathbb{T})} .$$

Así que

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \text{ínf} \left\{ \|\mu\|_{\mathbf{M}} + \left\|\overline{\phi}\right\|_{L^1(\mathbb{T})} : \phi \in H_0^1 (\mathbb{T}) \right\} = \|\mu\|_{\mathbf{M}} ,$$

puesto que $\left\|\overline{\phi}\right\|_{L^1(\mathbb{T})} \geq 0$, con $\left\|\overline{\phi}\right\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0$ para $\phi \equiv 0$. □

Nótese que el resultado anterior es del "mismo tipo" que la Proposicion 4.3.3. Es decir, puede interpretarse de nuevo en base a la visión de que la transformada de Cauchy de una medida singular respecto de m alcanza su norma en dicha medida.

La demostración anterior nos da la idea del siguiente resultado.

Proposición 4.5.3. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Sea $\mu = \mu_a + \mu_s$ su descomposición de Lebesgue, donde μ_a es absolutamente continua respecto de m y μ_s es singular respecto de m. Entonces, se tiene que*

$$\|K\mu\|_{\mathscr{K}} = \|K\mu_a\|_{\mathscr{K}} + \|K\mu_s\|_{\mathscr{K}} = \|K\mu_a\|_{\mathscr{K}} + \|\mu_s\|_{\mathbf{M}} .$$

Demostración. Basta calcular

$$\|K\mu\|_{\mathscr{K}} = \text{ínf} \left\{ \|\mu + \lambda\|_{\mathbf{M}} : \lambda \in \overline{H_0^1} \right\} = \text{ínf} \left\{ \|\mu_a + \mu_s + \lambda\|_{\mathbf{M}} : \lambda \in \overline{H_0^1} \right\} .$$

Ahora bien, como μ_s es singular y $\mu_a + \lambda$ es asbolutamente continua, entonces

$$\|\mu_s + \mu_a + \lambda\|_{\mathbf{M}} = \|\mu_s\|_{\mathbf{M}} + \|\mu_a + \lambda\|_{\mathbf{M}} .$$

Así que

$$\|K\mu\|_{\mathscr{K}} = \|\mu_s\|_{\mathbf{M}} + \text{ínf} \left\{ \|\mu_a + \lambda\|_{\mathbf{M}} : \lambda \in \overline{H_0^1} \right\} = \|\mu_s\|_{\mathbf{M}} + \|K\mu_a\|_{\mathscr{K}} .$$

□

Nótese que el resultado anterior expresa que la norma con la que equipamos al espacio de transformadas de Cauchy es tal que separa las transformadas en dos tipos, los cuales definimos de la siguiente manera.

Definición 4.5.4. *Dentro del espacio de transformadas de Cauchy, $\mathscr{K}$, definimos los siguientes subespacios*

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_a &:= \{K\mu : \mu \in \mathbf{M} \text{ es absolutamente continua respecto de } m\}, \\ \mathscr{K}_s &:= \{K\mu : \mu \in \mathbf{M} \text{ es singular respecto de } m\}.\end{aligned}$$

Con esto en mente, y gracias a la descomposición de Lebesgue (Teorema 1.3.4), podemos ver que si μ es una medida, entonces existen una única medida μ_a absolutamente continua respecto de m, y otra única medida μ_s singular respecto de m, de manera que, en base a los resultados anteriores, se satisface

$$K\mu = K\mu_s + K\mu_a,$$

$$\|K\mu\|_{\mathscr{K}} = \|K\mu_s\|_{\mathscr{K}} + \|K\mu_a\|_{\mathscr{K}} = \|\mu_s\|_{\mathbf{M}} + \|K\mu_a\|_{\mathscr{K}}.$$

En ese sentido, nótese que

$$K\mu_s \in \mathscr{K}_s, \quad K\mu_a \in \mathscr{K}_a.$$

Por tanto, $\mathscr{K}$ puede descomponerse algebraicamente en la suma directa de $\mathscr{K}_a$ y $\mathscr{K}_s$. Además, dicha descomposición respeta la norma con la que hemos dotado al espacio.

Yendo más allá, puede verse con los razonamiento anteriores que $\mathscr{K}_s$ es isométricamente isomorfo al subespacio de medidas en $\mathbf{M}$ que son singulares respecto de m (Proposición 4.5.2), mientras que $\mathscr{K}_a$ es isométricamente isomorfo a $L^1(\mathbb{T})/\overline{H_0^1}$.

4.6. Comentarios finales

Este capítulo pretende ser una revisión de los conceptos que pueden encontrarse en [2, p. 83-88]. Su interés radica, fundamentalmente, en la visión del espacio de transformadas de Cauchy como un espacio de Banach.

En particular, resultan en interesantes los resultados que se encuentran en [2, p. 95-98], donde se usa la descomposición dada en la Sección 4.5 para discutir que $\mathscr{K}_a$ es separable y construir, de hecho, una base de Schauder para tal espacio.

Capítulo 5

La transformada de Cauchy exterior

5.1. Introducción

En este capítulo se introduce el concepto de transformada de Cauchy exterior, realizando un estudio análogo al que se realizó de la transformada de Cauchy. Esta similitud lleva a encontrar nuevas relaciones entre estas transformadas y la transformada de Poisson que también introdujimos anteriormente.

Más aún, estudiando el comportamiento de la transformada de Poisson en la frontera del disco (para lo cual abordamos el estudio de la derivada de una medida de $\mathbf{M}$) se consigue dar una fórmula explícita para los límites radiales de las transformadas de Cauchy. Esto último se utiliza para deducir otros resultados.

5.2. Definición

Comenzamos observando que, aunque originalmente definimos la transformada de Cauchy (Definición 2.2.1) como una función sobre $\mathbb{D}$, igualmente se podría haber elegido tratar el siguiente concepto.

Definición 5.2.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Se llama transformada de Cauchy exterior de μ a la función definida en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ por*

$$K_e\mu(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi}z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Obsérvese que muchas de las propiedades iniciales que dedujimos para la transformada de Cauchy no hacían uso explícito de que la transformada fuese una función sobre $\mathbb{D}$, sino más bien sobre un dominio que no contenía ningún punto de $\mathbb{T}$. Esto mismo es cierto para la transformada de Cauchy exterior, por lo que los siguientes resultados siguen siendo ciertos, adaptando las pruebas ya realizadas.

Proposición 5.2.2. *La transformada de Cauchy exterior de cualquier medida $\mu \in \mathbf{M}$ existe y es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

Aún más, se tiene la acotación

$$|(K_e\mu)(z)| \leq \frac{\|\mu\|_{\mathbf{M}}}{|z|-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

En particular, se cumple

$$\lim_{z \to \infty} (K_e\mu)(z) = 0.$$

Demostración. Comenzamos observando que

$$\left|1 - \bar{\xi}z\right| \geq |1 - |z|| = |z| - 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \xi \in \mathbb{T}.$$

En ese caso,

$$|(K_e\mu)(z)| = \left|\int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi}z}\right| \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{d|\mu|(\xi)}{|z|-1} = \frac{\|\mu\|_{\mathbf{M}}}{|z|-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Basta tomar límite cuando $z \to \infty$ en la desigualdad del anterior para ver que $(K_e\mu)(\infty) = 0$.

Nótese que lo anterior prueba que la integral que define a la transformada exterior en cada punto de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ converge, y por tanto, la transformada está bien definida.

Resta, entonces, ver que efectivamente la transformada define una función holomorfa. Para ello, comenzaremos trabajando con la función dada por $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \mapsto K_e\mu(1/z)$. Veremos, de hecho, que esta función es holomorfa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Esto justifica que $K_e\mu$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, con una singularidad en ∞. Pero tal singularidad es evitable, pues hemos visto que $K_e\mu$ tiene límite (que es nulo) en el infinito. Construimos, entonces, la función $f\colon \mathbb{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = (K_e\mu)(1/z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{1 - \bar{\xi}/z} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi z}{\xi z - 1} d\mu(\xi), \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.$$

Definimos, también, $f(0) := 0$.

De manera análoga a como ya hicimos en la Proposición 2.2.2, recordamos que, si $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces se tiene la convergencia uniforme de la serie geométrica dada por

$$\frac{z}{z-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

En ese caso, para $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ cualquiera, construimos

$$f_n(\xi) = -(\xi z)^n, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Por la convergencia uniforme, ya sabemos que las operaciones de suma e integración conmutan, lo que nos permite ver que

$$\begin{aligned}(K_e\mu)(1/z) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi z}{\xi z - 1} d\mu(\xi) = -\int_{\mathbb{T}} \sum_{n=1}^{\infty} (\xi z)^n \, d\mu(\xi) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{\mathbb{T}} \xi^n d\mu(\xi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(-n) z^n, \quad z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Es decir

$$(K_e\mu)(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(-n)}{z^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Nótese que la serie anterior se corresponde con el polinomio de Taylor de $K_e\mu$ centrado en $z = \infty$. Además ya hemos visto, en otras ocasiones, que $|\hat{\mu}(-n)| \leq \|\mu\|_{\mathbf{M}}$. Por tanto, la serie anterior converge en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Esto justica que $K_e\mu$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, o equivalemente, holomorfa. □

En la prueba del resultado anterior hemos llegado a un resultado análogo a la Proposición 2.2.4 si analizamos la transformada de Cauchy exterior en infinito.

Corolario 5.2.3. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Los coeficientes de Taylor (centrados en $z = \infty$) de la función $K_e\mu$ son los opuestos de los coeficientes de Fourier de la medida μ con $n < 0$, y nulo para $n = 0$. Es decir*

$$(K_e\mu)(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(-n)}{z^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Como ya hicimos con la transformada de Cauchy, es fácil ver que el anterior resultado implica el siguiente.

Corolario 5.2.4. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Los coeficientes de Taylor (centrados en $z = \infty$) de $K_e\mu$ están acotados.*

Demostración. La prueba es análoga a la realizada en el Corolario 2.2.5. □

5.3. Relación con la transformada de Poisson

En la Proposición 2.2.4 y en la Proposición 5.2.3 hallamos los polinomios de Taylor correspondientes a la transformada de Cauchy y a la transformada de Cauchy exterior. Análogamente, en la Proposición 3.3.3, hallamos una representación en forma de serie de la transformada de Poisson. La comparación de todas estas expresiones nos lleva al siguiente resultado, que será útil en lo venidero.

Proposición 5.3.1. *Sea* $\mu \in \mathbf{M}$ *una medida. Sea* $0 < r < 1$ *y* $\xi \in \mathbb{T}$. *Se cumple*

$$(K\mu)(r\xi) - (K_e\mu)(\xi/r) = (P\mu)(r\xi).$$

Demostración. En la Proposición 2.2.4 se obtuvo

$$(K\mu)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Análogamente, en la Proposición 5.2.3 se obtuvo

$$(K_e\mu)(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(-n)}{z^n}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

Tomando $0 \leq r < 1$ y $\xi \in \mathbb{T}$, y con lo anterior, podemos expresar

$$(K\mu)(r\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) r^n \xi^n.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(K_e\mu)(\xi/r) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{\mu}(-n)}{\xi^n/r^n} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(-n) \xi^{-n} r^n \\
&\underset{m=-n}{=} -\sum_{m=-\infty}^{-1} \hat{\mu}(m) r^{-m} \xi^m.
\end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones, se obtiene

$$(K\mu)(r\xi) - (K_e\mu)(\xi/r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(n) r^{|n|} \xi^n = (P\mu)(r\xi),$$

tal y como se obtuvo en la Proposición 3.3.3. □

5.4. Comportamiento en la frontera

En esta sección aprovecharemos la relación que hemos encontrado entre las tres diferentes transformadas que hemos tratado en el trabajo para analizar el comportamiento fronterizo de la transformada de Cauchy exterior. En este sentido, nos interesa presentar el siguiente resultado.

Proposición 5.4.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida, y sea $K_e\mu$ su transformada de Cauchy exterior. Dado $0 < p < 1$, se tiene que*

$$\sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} \left|(K_e\mu)\left(\overline{\xi}/r\right)\right|^p dm\,(\xi) < \infty.$$

Por tanto, la función $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$F(z) := \begin{cases} 0, & z = 0, \\ (K_e\mu)\,(1/z)\,, & z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \end{cases}$$

es una función de $H^p\,(\mathbb{D})$ para $0 < p < 1$.

Demostración. Comenzamos viendo que F es holomorfa. Se sigue, desde la Proposición 5.2.2, que es holomorfa en $\mathbb{D}\setminus\{0\}$. Sin embargo, como ya vimos que $(K_e\mu)\,(\infty) = 0$, la singularidad en $z = 0$ es evitable, y se tiene que F es holomorfa en todo $\mathbb{D}$ si definimos $F(0) = K_e\mu(\infty) = 0$.

Resta, entonces, acotar las medias integrales de F. Para ello, dado cualquier $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, observamos que se tiene que

$$\begin{aligned} (K\mu)(1/z) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-\overline{\xi}/z}\,d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi z}{\xi z - 1}\,d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{\xi z - 1 + 1}{\xi z - 1} d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{T}} d\mu(\xi) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\xi z - 1}\,d\mu(\xi) \\ &= \mu(\mathbb{T}) + \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\xi z - 1}\,d\mu(\xi) \\ &= \mu(\mathbb{T}) - \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1-\xi z}\,d\mu(\xi). \end{aligned}$$

Como $\mu(\mathbb{T}) \in \mathbb{C}$ es una constante, para probar el resultado basta ver que la función

$$z \in \mathbb{D} \mapsto H(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{1 - \xi z} \, d\mu(\xi)$$

esté en $H^p(\mathbb{D})$. Para ello observamos que, suponiendo μ es una medida positiva, se tiene que

$$\Re(H(z)) = \int_{\mathbb{T}} \Re\left(\frac{1}{1 - \xi z}\right) d\mu(\xi),$$

donde

$$\Re\left(\frac{1}{1 - \xi z}\right) = \frac{1 - \Re(\xi z)}{|\xi z - 1|^2} > 0,$$

puesto que

$$\Re(\xi z) < 1, \quad z \in \mathbb{D}, \, \xi \in \mathbb{T}.$$

Por tanto, el resultado puede deducirse siguiendo las mismas ideas que en la demostración del Teorema 2.4.2: se prueba que es cierto para medidas positivas (como se deduce del Corolario 2.4.4), y se genereliza, por linealidad, usando la descomposición de Jordan (Proposición 1.3.5) para una medida cualquiera. $\square$

El resultado que acabamos de ver sugiere que podemos volver a usar la estructura de los espacios de Hardy para deducir la existencia de límites radiales para la transformada de Cauchy exterior, de manera análoga a como ya lo hicimos en la Sección 2.4.

En este sentido, nos interesa definir el siguiente concepto.

Definición 5.4.2. *Sea $0 < p \leq \infty$. Notaremos por $H^p\left(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}\right)$ al conjunto de funciones $f\colon \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ de manera que la función $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$g(z) := \begin{cases} f(\infty), & z = 0, \\ f(1/z), & z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

es una función de $H^p(\mathbb{D})$.

La Proposición 5.4.1 puede resumirse ahora en que toda transformada de Cauchy exterior pertenece a $H^p\left(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}\right)$ (para $0 < p < 1$), lo cual resulta un resultado análogo al Teorema 2.4.2.

Al conjunto $H^p\left(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}\right)$ se le puede dotar de la estructura de espacio vectorial, e incluso podemos normarlo de manera completa, resultando un espacio de Banach. No obstante, no desarrollaremos esta idea, puesto que solo lo utilizaremos de una forma técnica para enunciar el siguiente resultado.

Proposición 5.4.3. *Sea una función* $f \in H^p\left(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}\right)$*. Entonces* f *posee límite no tangencial en casi todo* $\xi \in \mathbb{T}$ *(en el sentido de la medida Lebesgue). Es decir, para todo* $\xi \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto de medida Lebesgue nula, y para todo* $\alpha > 1$*, existe*

$$f^*(\xi) := \lim_{\substack{z \to \xi \\ z^{-1} \in \Gamma_\alpha(\xi)}} f(z),$$

donde

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \xi| < \alpha(1 - |z|)\},$$

y $f^*(\xi)$ *es independiente de* α*.*

En particular, para todo $\xi \in \mathbb{T}$ *salvo un conjunto de medida Lebesgue nula, existe el límite radial de* f *en* ξ*, cumpliendo*

$$f^*(\xi) = \lim_{r \to 1^+} f(r\xi).$$

Demostración. Sea una función $f \in H^p\left(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}\right)$. Construyamos la función $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) := \begin{cases} f(\infty), & z = 0, \\ f(1/z), & z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Es claro que, por definición, ha de ser $g \in H^p(\mathbb{D})$. Entonces, el Teorema 1.5.6 garantiza que g posee límite no tangencial en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida Lebesgue). En particular, todo lo enunciado en el resultado se deduce del Teorema 1.5.6 sin más que aplicar la conveniente transformación $z \in \mathbb{D} \mapsto 1/z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}$. □

5.5. Comportamiento en la frontera de la transformada de Poisson

La relación dada en la Proposición 5.3.1 nos ha permitido deducir la existencia de límites no tangenciales en $\mathbb{T}$ para la transformada de Cauchy exterior. No obstante, parece que aún podemos extraer más información de dicha igualdad si nos centramos en caracterizar el comportamiento de la transformada de Poisson en la frontera. Es ese el objetivo de esta sección, para el cual definimos lo siguiente.

Definición 5.5.1. *Dado* $\alpha > 1$*, y dada una función* $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$*, definimos su función maximal no tangencial como la función* $N_\alpha f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$(N_\alpha f)(\xi) := \sup_{z \in \Gamma_\alpha(\xi)} |f(z)|, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

donde

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \xi| < \alpha(1 - |z|)\}.$$

Análogamente, definimos su función maximal radial como la función $M_{rad}f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$(M_{rad}f)(\xi) := \sup_{0 \le r < 1} |f(r\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Los conceptos anteriores se relacionan de la siguiente manera.

Lema 5.5.2. *Sea* $\alpha > 1$. *Sea* $\mu \in \mathbf{M}$ *una medida, y sea* $u = P\mu$ *su transformada de Poisson. En ese caso, se tiene:*

(a) Para todo $\xi \in \mathbb{T}$ *se cumple:*

$$(M_{rad}u)(\xi) \le (N_\alpha u)(\xi).$$

(b) Dado $\alpha > 1$, *la función* $z \mapsto \dfrac{|z - |z||}{1 - |z|}$ *está acotada sobre* $\Gamma_\alpha(1)$.

(c) Si además μ *es positiva, entonces existe* $c_\alpha > 0$ *de manera que para todo* $\xi \in \mathbb{T}$ *se cumple:*

$$c_\alpha(N_\alpha u)(\xi) \le (M_{rad}u)(\xi).$$

Demostración. (a) Es consecuencia de que, para todo $\xi \in \mathbb{T}$, se tiene que $r\xi \in \Gamma_\alpha(\xi)$ para todo $\alpha > 1$.

(b) Sea $\alpha > 1$. Comenzamos notando que la función dada está acotada en cada disco de centro el origen y radio $0 < r < 1$ cualquiera. En ese caso, dado que la clausura de $\Gamma_\alpha(1)$ y $\mathbb{T}$ solo se cortan en $z = 1$, para ver que la función es acotada en $\Gamma_\alpha(1)$, basta ver que

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Gamma_\alpha(\xi)}} \frac{|z - |z||}{1 - |z|} < \infty.$$

Para ver esto último, expresamos

$$f(z) := \frac{|z - |z||}{1 - |z|} = \frac{d(z, |z|)}{1 - |z|}.$$

Con esto en mente, es claro que para dos complejos cualesquiera con el mismo módulo, la función f crece con el valor absoluto del argumento principal de z. Es decir

$$f\left(re^{i\theta}\right) \le f\left(re^{i\theta'}\right), \quad \text{si } 0 \le |\theta| \le |\theta'| \le \pi. \tag{5.1}$$

En ese caso, sea un entorno reducido de 1 en $\Gamma_\alpha(1)$, es decir, un conjunto de tipo

$$G_r = \Gamma_\alpha(1) \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < r\},$$

para r suficientemente pequeño. Por la propiedad de monotonía vista en (5.1), así como por la forma geométrica de G_r, puede verse que dado $z \in G_r$ existe $w \in \partial G_r$, con $|z| = |w|$, de manera que $f(z) \leq f(w)$. Además, si $|z-1|$ es suficientemente pequeño, entonces w se tiene que $w \in \partial\Gamma_\alpha(1)$. En ese caso, se ha de tener que

$$|w-1| = \alpha(1-|w|),$$

o equivalentemente

$$|w| = 1 - \frac{|w-1|}{\alpha}.$$

Una vez visto esto, es fácil notar que

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Gamma_\alpha(1)}} \frac{|z-|z||}{1-|z|} &\leq \lim_{\substack{z\to 1\\ z\in G_r}} \frac{|z-|z||}{1-|z|} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{\left|z-1+\dfrac{|z-1|}{\alpha}\right|}{1-|z|} \\
&\leq \lim_{z\to 1} \frac{\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)|z-1|}{1-|z|} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{1+\dfrac{1}{\alpha}}{\dfrac{1}{|z-1|} - \left|\dfrac{z}{z-1}\right|} = 0.
\end{aligned}$$

Como ya comentamos, esto termina la demostración.

Para ilustrar la demostración, incluimos la siguiente figura.

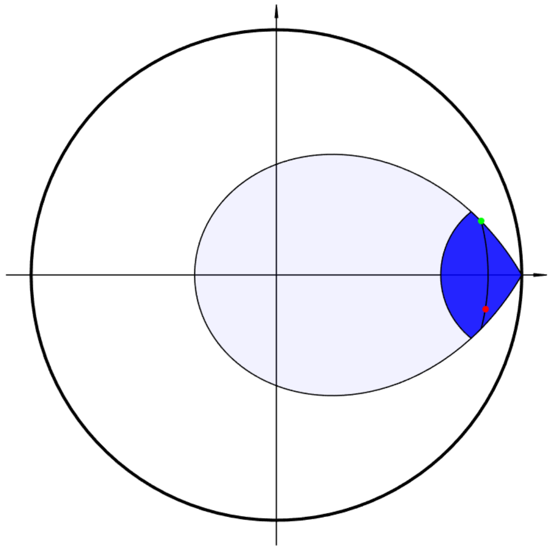

Figura 5.5.3: Ilustración de la región $\Gamma_\alpha(1)$ para $\alpha = 2$, así como del entorno G_r para $r = 0{,}3$. Sobre la imagen es fácil ver que es cierta la propiedad que hemos comentado: al punto rojo $z \in G_r$ le podemos hacer corresponder un punto verde $w \in \partial\Gamma_\alpha(1)$ con $|z| = |w|$.

(c) Comenzaremos probando que la desigualdad propuesta es cierta para $\xi = 1$. Es decir, vamos a probar que para todo $\alpha > 1$ existe $c_\alpha > 0$ de manera que

$$c_\alpha \sup_{z\in\Gamma_\alpha(1)} |u(z)| \leq \sup_{0\leq r<1} |u(r)|, \tag{5.2}$$

donde

$$\Gamma_\alpha(1) = \{z \in \mathbb{D} : |z-1| < \alpha(1-|z|)\}.$$

Para ello, dado que μ es positiva y el núcleo de Poisson es una función no negativa, es suficiente mostrar que para todo $\alpha > 1$ existe $c_\alpha > 0$ cumpliendo

$$c_\alpha P_z(\xi) \leq P_{|z|}(\xi), \quad z \in \Gamma_\alpha(1), \xi \in \mathbb{T}.$$

De hecho, si demostramos esta última desigualdad, se seguiría la desigualdad

(5.2) sin más que integrar respecto de μ, puesto que entonces se tendría que

$$\begin{aligned} c_\alpha \left|u(z)\right| &= c_\alpha \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi) d\mu(\xi) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} P_{|z|}(\xi) d\mu(\xi) \\ &= \left|u(|z|)\right| = \left|u(r)\right|, \end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad (5.2) sin más que tomar supremo en $\Gamma_\alpha(1)$.

Pero obsérvese que

$$\begin{aligned} c_\alpha P_z\left(\xi\right) \leq P_{|z|}\left(\xi\right) &\iff c_\alpha \frac{1-|z|^2}{|\xi - z|^2} \leq \frac{1-|z|^2}{\left|\xi - |z|\right|^2} \\ &\iff c_\alpha \left|\xi - |z|\right|^2 \leq \left|\xi - z\right|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, nos restringiremos a probar esta última desigualdad. Para ello, notamos que gracias a (b) existe cierta constante $\gamma_\alpha > 0$ de manera que

$$\frac{\left|z - |z|\right|}{1-|z|} \leq \gamma_\alpha, \quad z \in \Gamma_\alpha\left(1\right).$$

En ese caso, se tiene

$$\begin{aligned} \left|\xi - |z|\right| &\leq \left|\xi - z\right| + \left|z - |z|\right| \\ &\leq \left|\xi - z\right| + \gamma_\alpha \left(1 - |z|\right) \\ &\leq \left|\xi - z\right| \left(1 + \gamma_\alpha\right). \end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad (5.2) es cierta sin más que tomar $c_\alpha = \left(1+\gamma_\alpha\right)^{-2}$.

Por último, notamos que el caso general (i.e. con $\xi \in \mathbb{T}$ cualquiera) se deduce del caso probado sin más que aplicarle a la demostración realizada "un giro". De manera más rigurosa, sea $\xi \in \mathbb{T}$. Definamos la medida

$$\nu_\xi\left(B\right) := \mu\left(\xi B\right), \quad B \in \mathscr{B}_o\left(\mathbb{T}\right).$$

Si notamos $v := P(\nu_\xi)$ a su transformada de Poisson, entonces ya sabemos que existe $c_\alpha > 0$ de manera que

$$c_\alpha(N_\alpha v)(1) \leq (M_{rad} v)(1).$$

Con esto en mente, nótese que

$$\begin{aligned}
c_\alpha(N_\alpha u)(\xi) &= c_\alpha \sup_{z\in\Gamma_\alpha(\xi)} \left| \int_{\mathbb{T}} P_z(\zeta) d\mu(\zeta) \right| \\
&\underset{\zeta=\xi\gamma}{=} c_\alpha \sup_{z\in\Gamma_\alpha(\xi)} \left| \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi\gamma) d\mu(\xi\gamma) \right|
\end{aligned}$$

Pero

$$P_z(\xi\gamma) = \frac{1-|z|^2}{|\xi\gamma - z|^2} = \frac{1-|z|^2}{\left|\gamma - \bar{\xi}z\right|^2} = P_{\bar{\xi}z}(\gamma).$$

Luego

$$\begin{aligned}
c_\alpha(N_\alpha u)(\xi) &= c_\alpha \sup_{z\in\Gamma_\alpha(\xi)} \left| \int_{\mathbb{T}} P_{\bar{\xi}z}(\gamma) d\mu(\xi\gamma) \right| \\
&\underset{w=\bar{\xi}z}{=} c_\alpha \sup_{w\in\Gamma_\alpha(1)} \left| \int_{\mathbb{T}} P_w(\gamma) d\nu(\gamma) \right| \\
&= c_\alpha(N_\alpha v)(1) \\
&\leq (M_{rad}v)(1) \\
&= \sup_{0\leq r<1} \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma) d\nu(\gamma) \right| \\
&\underset{\zeta=\xi\gamma}{=} \sup_{0\leq r<1} \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(\bar{\xi}\zeta) d\nu(\bar{\xi}\zeta) \right| \\
&= \sup_{0\leq r<1} \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(\gamma) d\nu(\gamma) \right| \\
&\underset{\zeta=\xi\gamma}{=} \sup_{0\leq r<1} \left| \int_{\mathbb{T}} P_{r\xi}(\zeta) d\mu(\zeta) \right| \\
&= (M_{rad}u)(\xi).
\end{aligned}$$

□

En la búsqueda de nuevas desigualdades técnicas que nos ayuden a alcanzar nuestro objetivo, definimos lo siguiente.

Definición 5.5.4. *Dada una medida $\mu \in \mathbf{M}$, definimos la función maximal de μ como la función $M\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$(M\mu)(\xi) := \sup \frac{|\mu|(I)}{m(I)}, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

donde $I \subseteq \mathbb{T}$ es cualquier arco abierto de la forma $I = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\xi - \zeta| < \alpha\}$ para algún $0 < \alpha \leq 2$, o bien $I = \mathbb{T}$.

Ahora podemos ver el siguiente resultado técnico.

Lema 5.5.5. *Sea $\alpha > 1$. Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida positiva, y sea $u = P\mu$ su transformada de Poisson. En ese caso, dado $\xi \in \mathbb{T}$, se cumple que*

$$(M_{rad}u)(\xi) \leq (M\mu)(\xi).$$

Demostración. Tal y como hicimos en la demostración del Lema 5.5.2, basta ver que la desigualdad es cierta para $\xi = 1$. Por tanto, lo que queremos mostrar es

$$\int_{\mathbb{T}} P_r(\xi)\, d\mu(\xi) \leq (M\mu)(1), \quad 0 \leq r < 1.$$

Para ello, fijemos $0 \leq r < 1$. Recuérdese que

$$P_r(\xi) = \frac{1 - r^2}{|\xi - r|^2}, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

Con ello se ve fácilmente que $P_r(\xi) = P_r\left(\overline{\xi}\right)$ para todo $\xi \in \mathbb{T}$, que P_r posee su máximo en $\xi = 1$, y que además decrece según aumenta el valor absoluto del argumento de ξ, es decir

$$P_r\left(e^{i\theta}\right) \geq P_r(e^{i\theta'}) \text{ si } |\theta| \leq |\theta'| \text{ para } \theta, \theta' \in (-\pi, \pi].$$

Con estas propiedades en mente, escogemos $n - 1$ arcos abiertos $I_j \subseteq \mathbb{T}$ de la forma

$$I_j = \left\{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : |\theta| < \alpha_j\right\},$$

para algún $0 < \alpha_j \leq \pi$, de manera que

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_{n-1}.$$

Además, escogemos $I_n = \mathbb{T}$. Por otro lado, denotamos

$$h_j := \inf_{\xi \in I_j} P_r(\xi) > 0.$$

De esta manera, si denotamos por χ_j a la función característica de I_j, construimos

$$F(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1})\, \chi_j(\xi), \quad \xi \in \mathbb{T},$$

donde imponemos $h_{n+1} = 0$.

Nótese que, de las propiedades de monotonía de P_r, así como de la construcción de los arcos I_j, se deduce que $h_j - h_{j+1} \geq 0$. Por tanto, F es una función positiva. Además, si $\xi \in \mathbb{T}$ cumple $\xi \in I_i$ pero $\xi \notin I_{i-1}$ (tomando $I_0 = \emptyset$, si necesario), entonces

$$F(\xi) := \sum_{j=i}^{n} (h_j - h_{j+1}) = h_j.$$

De todo esto se deduce la acotación $0 \leq F \leq P_r$ en $\mathbb{T}$.

Una vez realizada esta construcción, notamos que, por definición, para todos los anteriores arcos abiertos se ha de tener

$$\mu(I_j) \leq (M\mu)(1)\, m(I_j).$$

En ese caso, podemos desarrollar

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} F(\xi)\, d\mu(\xi) &= \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1})\, \mu(I_j) \\
&\leq (M\mu)(1) \sum_{j=1}^{n} (h_j - h_{j+1})\, m(I_j) \\
&= (M\mu)(1) \int_{\mathbb{T}} F(\xi)\, dm(\xi) \\
&\leq (M\mu)(1) \int_{\mathbb{T}} P_r(\xi)\, dm(\xi) \\
&= (M\mu)(1), \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la Proposición 3.3.4.

Ahora observamos que, por la construcción de F, podemos elegir los arcos I_j de manera que F se aproxime a P_r tanto como queramos. En sentido riguroso lo haremos de la siguiente manera:

Por un lado, nótese que P_r es continua sobre $\mathbb{T}$, que es compacto, luego P_r es uniformemente continua.

Por otro lado, notemos que, por como hemos construido los arcos abiertos I_j (para $1 \leq j \leq n-1$), se tiene

$$\partial I_j = \left\{\xi, \overline{\xi}\right\}, \quad \xi = e^{i\alpha_j}.$$

Con esto, y en base a las propiedades de monotonía de P_r, es fácil concluir que, para $1 \leq j \leq n-1$, se tiene que

$$h_j = P_r\left(e^{i\alpha_j}\right).$$

En el caso $j = n$, recuérdese que impusimos que $I_n = \mathbb{T}$, y por tanto

$$h_n = P_r\left(-1\right).$$

En base a todo esto, sea $\xi \in \mathbb{T}$. Ha de existir $1 \leq j \leq n$ de manera que $\xi \in I_j \setminus I_{j-1}$. En ese caso, se tiene

$$\left|F\left(\xi\right) - P_r\left(\xi\right)\right| = \left|h_j - P_r\left(\xi\right)\right| = \left|P_r\left(e^{i\alpha_j}\right) - P_r\left(\xi\right)\right|,$$

donde tomamos $\alpha_n = \pi$ si es necesario.

Y ahora podemos ver la propiedad de aproximación que adelantábamos: si escogemos los arcos I_j de manera que sus puntos frontera $e^{i\alpha_j}$ disten entre sí menos que lo necesario, se deduce de la continuidad uniforme de P_r el hecho de que F converge uniformemente a P_r, a medida que los arcos I_j conforman una partición más fina de $\mathbb{T}$. En base a esto, tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} P_r\left(\xi\right) dm\left(\xi\right) - \int_{\mathbb{T}} F\left(\xi\right) dm\left(\xi\right)\right| &\leq \int_{\mathbb{T}} \left\|P_r - F\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} dm\left(\xi\right) \\ &= \left\|P_r - F\right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \to 0.\end{aligned}$$

Y por tanto, la desigualdad que buscábamos, a saber,

$$\int_{\mathbb{T}} P_r\left(\xi\right) d\mu\left(\xi\right) \leq \left(M\mu\right)\left(1\right), \quad 0 \leq r < 1,$$

se deduce del paso al límite de la desigualdad vista en (5.3). □

Lema 5.5.6. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$. Sea $M\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ la función maximal de μ. Entonces $M\mu$ es una función medible.*

Demostración. Comenzamos notando que si μ es la medida nula, entonces $M\mu$ es constantemente nula, y por tanto, medible.

En ese caso, podemos suponer que μ no es la medida nula. Sabemos que para ver que $M\mu$ es medible basta ver que la preimagen por $M\mu$ de todo intervalo abierto de la forma $(\lambda, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ es medible. En particular, bastará ver que es abierta.

Para ello, sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \leq 0$, entonces, como $M\mu$ es una función que solo toma valores positivos, es claro que

$$\left\{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu\left(\zeta\right) > \lambda\right\} = \mathbb{T},$$

y por tanto, $\{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu(\zeta) > \lambda\}$ es abierto.

Resta probar el resultado si $\lambda > 0$. Si $\{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu(\zeta) > \lambda\}$ es vacío, entonces hemos terminado, puesto que es abierto. En otro caso, tomemos $\xi_0 \in \{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu(\zeta) > \lambda\}$. Nótese que entonces, por definición, ha de existir $\alpha > 0$ con
$$\frac{|\mu|(I(\xi_0, \alpha))}{m(I(\xi_0, \alpha))} > \lambda,$$
donde $I(\xi_0, \alpha)$ denota un arco de la forma
$$I(\xi_0, \alpha) = \{\xi \in \mathbb{T} : |\xi - \xi_0| < \alpha\}.$$
En ese caso, escogemos $t > \lambda$ de manera que
$$|\mu|(I(\xi_0, \alpha)) = tm(I(\xi_0, \alpha)).$$
Fijemos también $\beta > 0$ de manera que
$$\alpha + \beta < \alpha t/\lambda.$$
Nótese que esto es posible para β arbitrariamente pequeño, puesto que sabemos que $t/\lambda > 1$, luego $\alpha < \alpha t/\lambda$.

Con todo esto en mente, notamos que si ξ es un punto de $\mathbb{T}$ cumpliendo que $|\xi - \xi_0| < \beta$, entonces
$$I(\xi_0, \alpha) \subseteq I(\xi, \alpha + \beta).$$
En ese caso, usando las propiedades de la medida Lebesgue respecto de las rotaciones y las homotecias, se tiene que
$$\begin{aligned} |\mu|(I(\xi, \alpha + \beta)) \geq & |\mu|(I(\xi_0, \alpha)) \\ = & tm(I(\xi_0, \alpha)) \\ = & [t\alpha/(\alpha + \beta)]\, m(I(\xi, \alpha + \beta)) \\ > & \lambda m(I(\xi, \alpha + \beta)). \end{aligned}$$
Es decir,
$$\frac{|\mu|(I(\xi, \alpha + \beta))}{m(I(\xi, \alpha + \beta))} > \lambda.$$
En ese caso, $\xi \in \{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu(\zeta) > \lambda\}$. Pero como ξ era un punto cualquiera de $\mathbb{T}$ cumpliendo $|\xi - \xi_0| < \beta$, se deduce que
$$I(\xi_0, \beta) \subseteq \{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu(\zeta) > \lambda\}.$$
Nótese que esto prueba que el conjunto $\{\zeta \in \mathbb{T} : M\mu(\zeta) > \lambda\}$ es abierto. $\square$

Ahora ya estamos preparados para afrontrar el primer resultado sobre la existencia de límites no tangenciales de la transformada de Poisson. Para ello, necesitaremos el siguiente concepto.

Definición 5.5.7. *Dada una medida* $\mu \in \mathbf{M}$*, definimos la derivada de* μ *como la función* $D\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$(D\mu)(\xi) := \lim \frac{\mu(I)}{m(I)}, \quad \xi \in \mathbb{T},$$

donde el límite se toma a medida que los arcos abiertos $I \subseteq \mathbb{T}$ *de la forma* $I = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\xi - \zeta| < \alpha\}$ *para algún* $0 < \alpha \leq 2$ *convergen a su centro, es decir,*

$$(D\mu)(\xi) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\mu(\{\zeta \in \mathbb{T} : |\xi - \zeta| < \alpha\})}{m(\{\zeta \in \mathbb{T} : |\xi - \zeta| < \alpha\})}, \quad \xi \in \mathbb{T}.$$

En lo que nos concierne, la importancia de la derivada de una medida radica en el siguiente resultado.

Teorema 5.5.8. *Sea* $\mu \in \mathbf{M}$ *una medida positiva. Supongamos que* $\xi \in \mathbb{T}$ *es tal que* $(D\mu)(\xi) = 0$*. En ese caso, la integral de Poisson de* μ *posee límite no tangencial nulo en* ξ*.*

Demostración. Sea $\xi \in \mathbb{T}$ tal que $(D\mu)(\xi) = 0$. En ese caso, dado $\epsilon > 0$, por definición, ha de existir un arco abierto centrado en ξ de la forma

$$I_0 = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\xi - \zeta| < \alpha_0\},$$

para algún $\alpha_0 > 0$ con la propiedad de que si $I \subseteq I_0$ es otro arco de este tipo, entonces $\mu(I) < \epsilon m(I)$.

Aprovechando esto, construyamos μ_0 la medida restricción de μ a I_0, es decir

$$\mu_0(B) := \mu(B \cap I_0), \quad B \in \mathbb{B}_o(\mathbb{T}).$$

Sea $\mu_1 := \mu - \mu_0$. Nótese, dado que μ es una medida positiva, μ_1 y μ_0 también lo son. Denotemos $u_i := P\mu_i$ (para $i = 0$ o $i = 1$) la correspondiente transformada de Poisson.

Por un lado, sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\Gamma_\alpha(\xi)$ convergiendo a ξ. En ese caso, a partir de cierto punto, todo z_n dista tan poco como queramos de ξ, y por tanto, dista más que una cierta cantidad positiva de $\mathbb{T} \setminus I_0$. Esto implica, vía la Proposición 3.3.4, que P_{z_n} tiende uniformemente a 0 en $\mathbb{T} \setminus I_0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto

$$\begin{aligned}
|u_1(z_n)| &= (P\mu_1)(z_n) \\
&= \int_{\mathbb{T}} P_{z_n}(\zeta) d\mu_1(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}\setminus I_0} P_{z_n}(\zeta)\, d\mu(\zeta) \\
&\leq \sup_{\zeta\in\mathbb{T}\setminus I_0} P_{z_n}(\zeta)\, \|\mu\|_{\mathbf{M}} \to 0, \text{ si } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Por otro lado, combinando el Lema 5.5.2 y el Lema 5.5.5, se tiene que para todo $\alpha > 0$ existe $c_\alpha > 0$ de manera que, haciendo uso de la primera parte de la prueba, se tiene

$$c_\alpha (N_\alpha u_0)(\xi) \leq (M\mu_0)(\xi) \leq \epsilon.$$

No obstante, por definición, se tiene

$$u_0(z) \leq (N_\alpha u_0)(\xi), \quad z \in \Gamma_\alpha(\xi).$$

Combinando ambos resultados, se tiene que

$$u_0(z_n) \leq \epsilon / c_\alpha.$$

En particular, se deduce que

$$u_0(z_n) \to 0, \text{ si } n \to \infty.$$

Por tanto, notando que $\mu = \mu_0 + \mu_1$, se tiene que $P\mu = u_0 + u_1$, y por tanto, para cualquier sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Gamma_\alpha(\xi)$ (con $\alpha > 1$) se tiene que

$$(P\mu)(z_n) \to 0, \text{ si } n \to \infty.$$

Por tanto, $P\mu$ posee límite no tangencial nulo en $\xi \in \mathbb{T}$. □

El resultado anterior parece vincular los límites no tangenciales de la transformada de Poisson de una cierta medida positiva con la derivada de la medida. Es por ello que extendemos el estudio de este concepto con los siguientes resultados.

Proposición 5.5.9. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Supongamos que es absolutamente continua respecto de m, es decir, supongamos que existe $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $d\mu = f dm$. En ese caso, se tiene que $D\mu = f$ en casi todo (en el sentido de la medida de Lebesgue).*

Antes de ver la prueba de tal resultado necesitamos recordar un concepto de la teoría de espacios de Lebesgue.

Definición 5.5.10. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ una función. Se dice que $\xi = e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ es un punto de Lebesgue de f si*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} |f(\zeta) - f(\xi)| \, dm(\zeta) = 0,$$

donde

$$I_\alpha = \left\{ e^{i\theta'} \in \mathbb{T} : |\theta - \theta'| < \alpha \right\},$$

para $0 < \alpha < \pi$.

El siguiente teorema se aborda cuando se estudia la diferenciación de la integral de Lebesgue.

Teorema 5.5.11. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ una función. Entonces, casi todo punto de $\mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue) es un punto de Lebesgue de f. En particular, para casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue) se tiene que*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} f(\zeta) \, dm(\zeta) = f(\xi).$$

A partir de él podemos dar la demostración requerida.

Demostración de la Proposición 5.5.9. Con la notación de la Definición 5.5.10, obsérvese que para $\xi \in \mathbb{T}$ podemos escribir

$$(D\mu)(\xi) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\mu(I_\alpha)}{m(I_\alpha)} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} f(\zeta) \, dm(\zeta).$$

Pero si $\xi \in \mathbb{T}$ es un punto de Lebesgue, se tiene que

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} f(\zeta) dm(\zeta) - f(\xi) \right| = \\ &\qquad = \left| \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} [f(\zeta) - f(\xi)] \, dm(\zeta) \right| \leq \\ &\qquad \leq \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} |f(\zeta) - f(\xi)| \, dm(\zeta) \to 0, \text{ si } \alpha \to 0^+. \end{aligned}$$

Por tanto, en todo punto de Lebesgue de f se tiende $D\mu = f$. Se sigue, entonces, el resultado requerido a partir del Teorema 5.5.11. $\square$

En el caso de medidas singulares respecto de m, procedemos de la siguiente manera.

Lema 5.5.12. *Sea I la unión de una colección finita de arcos $I(\xi_i, \alpha_i)$, para $1 \leq i \leq N$, de la forma*

$$I(\xi_i, \alpha_i) = \{\xi \in \mathbb{T} : |\xi - \xi_i| < \alpha_i\}.$$

Entonces, existe $S = \{j_1, j_2, \ldots\} \subseteq \{1, \ldots, N\}$ de manera que:

(a) Los arcos $I(\xi_j, \alpha_j)$ con $j \in S$ son disjuntos.

(b) Se tiene la contención

$$I \subseteq \bigcup_{j \in S} I(\xi_j, 3\alpha_j).$$

(c) Se tiene la desigualdad

$$m(I) \leq 3 \sum_{j \in S} m(I(\xi_j, \alpha_j)).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que los arcos $I(\xi_i, \alpha_i)$ están ordenados de manera que $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$. En ese caso, imponemos $j_1 = 1$. Una vez hecho esto, descartamos todo arco $I(\xi_i, \alpha_i)$ $(i \neq j_1)$ que tenga intersección no vacía con $I(\xi_{j_1}, \alpha_{j_1})$. De entre los restantes, escogemos, de nuevo, aquel cuyo coeficiente α_i sea mayor, digamos, $I(\xi_k, \alpha_k)$ (para algún k con $2 \leq k \leq N$). En ese caso, tomamos $j_2 = k$, y volvemos a descartar aquellos arcos que tengan intersección no vacía con $I(\xi_{j_2}, \alpha_{j_2})$. Reiterando este proceso un número finito de pasos, definimos una subcolección de arcos $I(\xi_j, \alpha_j)$ con $j \in S = \{j_1, j_2, \ldots\}$.

Una vez hecho esto, se tiene que:

(a) Los arcos $I(\xi_j, \alpha_j)$ con $j \in S$ son disjuntos por construcción.

(b) Afirmamos que para todo i con $1 \leq i \leq N$ existe $j \in S$ de manera que $I(\xi_i, \alpha_i) \subseteq I(\xi_j, 3\alpha_j)$. Esto es suficiente para comprobar lo requerido. Para justificar la afirmación inicial, nótese que si $i \in S$, entonces basta tomar $j = i$. En otro caso, por construcción, ha de existir $j \in S$ con $I(\xi_i, \alpha_i) \cap I(\xi_j, \alpha_j)$ no vacío, de lo cual también se deduce lo requerido fácilmente.

(c) Se deduce de la contención del apartado anterior, haciendo uso de que los arcos son disjuntos, y notando que

$$m(I(\xi_j, 3\alpha_j)) = 3m(I(\xi_j, \alpha_j)).$$

□

Lema 5.5.13. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Sea $\lambda > 0$. En ese caso, se tiene*

$$m\left(\{\xi \in \mathbb{T} : M\mu\left(\xi\right) > \lambda\}\right) \leq \frac{3}{\lambda} \left\|\mu\right\|_{\mathbf{M}}.$$

Demostración. En primer lugar, recordamos que en el Lema 5.5.6 ya hemos justificado que $M\mu$ es una función medible. Es por ello que la medida Lebesgue de los conjuntos dados en el enunciado de este resultado están bien definidos.

Más allá de eso, notemos que si $\{\xi \in \mathbb{T} : M\mu\left(\xi\right) > \lambda\}$ es vacío, entonces el enunciado es cierto. Por tanto, supongamos que tal conjunto no es vacío, y sea K un subconjunto compacto no vacío suyo. Sea $\xi \in K$ un punto cualquiera. Nótese que, entonces, ha de existir un arco abierto I_ξ, centrado en ξ, de manera que

$$\left|\mu\right|\left(I_\xi\right) > \lambda m\left(I_\xi\right).$$

Nótese que entonces la familia $\{I_\xi\}$ construida al considerar todos los puntos $\xi \in K$ es un conjunto de abiertos que recubren a K. Al ser K compacto, existe un subconjunto finito $R \subseteq K$ de manera que la familia $\{I_\xi\}$ con $\xi \in R$ también recubre a K.

En este punto, y aludiendo al Lema 5.5.12, encontramos un subconjunto $S \subseteq R$ de manera que los arcos $\{I_\xi\}$ con $\xi \in S$ son disjuntos y cumplen, debido a su construcción, que

$$m\left(K\right) \leq 3 \sum_{\xi \in S} m\left(I_\xi\right) \leq \frac{3}{\lambda} \sum_{\xi \in S} \left|\mu\right|\left(I_\xi\right) \leq \frac{3}{\lambda} \left\|\mu\right\|_{\mathbf{M}}.$$

Como $K \subseteq \{\xi \in \mathbb{T} : M\mu\left(\xi\right) > \lambda\}$ era un compacto cualquiera, el resultado se sigue sin más que tomar supremo en la desigualdad anterior, dada la regularidad interior de la medida Lebesgue. □

Proposición 5.5.14. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Supongamos que μ es singular respecto de m. En ese caso, se tiene que $D\mu = 0$ en casi todo (en el sentido de la medida de Lebesgue).*

Demostración. Para comenzar, es claro que, mediante la descomposición de Jordan (Proposición 1.3.5), basta probar el resultado para medidas singulares y positivas.

Por ellos, sea μ singular y positiva. Dado que μ es singular con respecto a m, han de existir dos borelianos A y B disjuntos de manera que $A \cup B = \mathbb{T}$, cumpliendo $m(A) = |\mu|(B) = 0$. En ese caso, fijado $\epsilon > 0$, podemos encontrar un conjunto compacto $K \subseteq A$ (por tanto, $m(K) = 0$) con $|\mu|(K) > \|\mu\|_{\mathbf{M}} - \epsilon$.

Con esto en mente, construimos la medida $\mu_1 \in \mathbf{M}$ dada por

$$\mu_1(C) := \mu(K \cap C), \quad C \in \mathscr{B}_o(\mathbb{T}),$$

así como $\mu_2 := \mu - \mu_1$. Nótese que, por construcción,

$$\|\mu_2\|_{\mathbf{M}} = |\mu|(\mathbb{T} \setminus K) < \epsilon.$$

Con esto en mente, tomemos $\xi \notin K$. Al ser K compacto, ha de tenerse $d(\xi, K) > 0$. En ese caso, podemos encontrar arcos abiertos centrados en ξ, $I(\xi, \alpha)$, suficientemente pequeños, de manera que su intersección con K sea vacía. En ese caso, ha de ser $\mu_1(I(\xi, \alpha)) = 0$, y por tanto es claro que

$$\limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{\mu(I(\xi, \alpha))}{m(I(\xi, \alpha))} = \limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{\mu_2(I(\xi, \alpha))}{m(I(\xi, \alpha))} \leq M\mu_2(\xi),$$

donde

$$I(\xi, \alpha) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\zeta - \xi| < \alpha\}.$$

Por claridad, notemos

$$\overline{D\mu}(\xi) := \limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{\mu(I(\xi, \alpha))}{m(I(\xi, \alpha))}.$$

Entonces, la desigualdad anterior prueba que

$$\left\{\xi \in \mathbb{T} : \overline{D\mu}(\xi) > \lambda\right\} \subseteq K \cup \{\xi \in \mathbb{T} : M\mu_2(\xi) > \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Entonces, dado que $m(K) = 0$, el Lema 5.5.13 implica que

$$m\left(\left\{\xi \in \mathbb{T} : \overline{D\mu}(\xi) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{3}{\lambda}\|\mu_2\|_{\mathbf{M}} < \frac{3}{\lambda}\epsilon, \quad \lambda > 0.$$

Por tanto, dado que en la última desigualdad los coeficientes $\epsilon > 0$ y $\lambda > 0$ son arbitrarios, se deduce que para casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue) se cumple

$$\overline{D\mu}(\xi) = \limsup_{\alpha \to 0^+} \frac{\mu(I(\xi, \alpha))}{m(I(\xi, \alpha))} = 0$$

Esto prueba el resultado. $\square$

Combinando los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema, que caracteriza el valor de la derivada de una medida.

Proposición 5.5.15. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Sea $\mu = \mu_a + \mu_s$ su descomposición de Lebesgue, donde μ_a es absolutamente continua respecto de m, y μ_s es singular respecto de m. Entonces $D\mu = D\mu_a$ en casi todo (en el sentido de la medida de Lebesgue).*

Demostración. Se sigue de combinar la Proposición 5.5.9 y la Proposicion 5.5.14. □

Ahora ya podemos usar todo lo aprendido para generalizar el Teorema 5.5.8, mostrando una caracterización de los límites no tangenciales de la transformada de Poisson.

Teorema 5.5.16. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Sea $P\mu$ su transformada de Poisson. Entonces $P\mu$ posee límites no tangenciales en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue). De hecho, su límite no tangencial es $D\mu$ en casi todo (en el sentido de la medida de Lebesgue).*

Demostración. Comenzamos realizando la descomposición de Lebesgue de μ, es decir, encontrando una medida μ_a absolutamente continua respecto de m, y μ_s una medida singular respecto de m, de manera que $\mu = \mu_a + \mu_s$.

Por un lado, sabemos que ha de existir una función $f \in L^1(\mathbb{T})$, de manera que $d\mu_a = f dm$. En ese caso, fijado un punto de Lebesgue de f, digamos, $\xi_0 \in \mathbb{T}$, podemos construir la función $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{T})$ dada por

$$\tilde{f}(\xi) := f(\xi) - f(\xi_0), \quad \xi \in \mathbb{T},$$

Nótese que entonces, por definición, se tiene que

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} |f(\xi) - f(\xi_0)|\, dm(\xi) = \\ &\qquad = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{m(I_\alpha)} \int_{I_\alpha} |\tilde{f}(\xi)|\, dm(\xi) = 0, \end{aligned}$$

donde hemos adoptado la notación introducida en la Definición 5.5.10.

Esto último implica que, si definimos una medida $\nu \in \mathbf{M}$ dada por $d\nu = |\tilde{f}|\, dm$, entonces esta medida es positiva, con $(D\nu)(\xi_0) = 0$. En ese caso, vía el Teorema 5.5.8, la transformada de Poisson $P\nu$ posee límite no tangencial nulo en ξ_0.

Pero entonces, nótese que

$$\begin{aligned}
|(P(f - f(\xi_0))\, dm)(z)| &= \left| \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\,(f(\xi) - f(\xi_0))\, dm(\xi) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\, |\tilde{f}(\xi)|\, dm(\xi) \\
&= \left(P|\tilde{f}|\, dm \right)(z), \quad z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Por tanto, sin más que tomar límite no tangencial cuando $z \to \xi_0$, se deduce que $(P(f - f(\xi_0))\, dm)$ también posee límite no tangencial nulo en ξ_0. Pero

$$\begin{aligned}
(P(f - f(\xi_0))\, dm)(z) &= (Pf dm)(z) - \int_{\mathbb{T}} P_z(\xi)\, f(\xi_0)\, dm(\xi) \\
&= (P\mu_a)(z) - f(\xi_0), \quad z \in \mathbb{D},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la Proposición 3.3.4. Con esta igualdad, y con lo demostrado anteriormente, se ve que $P\mu_a$ posee límite no tangencial en ξ_0, y este vale precisamente $f(\xi_0)$. Esta situación se da en casi todo $\mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue), tal y como se deduce del Teorema 5.5.11.

Por otro lado, en cuando a la parte singular de μ, basta usar la descomposición de Jordan de manera que

$$\mu_s = (\mu_1 - \mu_2) + i\,(\mu_3 - \mu_4),$$

donde cada medida μ_i es positiva y singular. En ese sentido, se tiene que

$$P\mu_s = P\mu_1 - P\mu_2 + iP\mu_3 - iP\mu_4,$$

donde cada una de las transformadas $P\mu_i$, combinando la Proposición 5.5.8 y la Proposición 5.5.14, poseen límite no tangencial nulo en casi todo $\mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue).

Para deducir el resultado, basta ver que $P\mu = P\mu_a + P\mu_s$, y por todo lo visto, se tiene que, en casi todo $\mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue) existe el límite no tangencial de $P\mu$ y es igual a $f = D\mu_a = D\mu$, en casi todo $\mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue). $\square$

5.6. Caracterización de los límites radiales

Obviando la relevancia que los resultados de la sección anterior puedan poseer por sí mismos, la razón principal por la que los hemos abordado es para poder comprender el siguiente resultado, conocido como el teorema del salto de Fatou.

Teorema 5.6.1. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Para casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue) se tiene que*

$$\lim_{r\to 1^-} \left[(K\mu)(r\xi) - (K_e\mu)(\xi/r) \right] = (D\mu)(\xi).$$

Demostración. Se sigue de la relación encontrada en la Proposición 5.3.1, teniendo en cuenta que el límite radial de la transformada de Poisson:

$$\lim_{r\to 1^-} (P\mu)(r\xi) = (D\mu)(\xi),$$

para casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue), como se deduce en el Teorema 5.5.16. □

El resultado anterior supone el "broche" al estudio que se comenzó en la Sección 2.4, donde se dedujo la existencia de límite no tangenciales para la transformada de Cauchy. Aquí hemos dado una expresión explícita para su valor.

Además, el resultado anterior nos permite ver una caracterización de cuando una transformada de Poisson es una función holomorfa a través de la transformada de Cauchy:

Proposición 5.6.2. *Sea $\mu \in \mathbf{M}$ una medida. Son equivalentes:*

(a) $\lim_{r\to 1^-} (K\mu)(r\xi) = (D\mu)(\xi)$ *para casi todo $\xi \in \mathbb{T}$ (en el sentido de la medida de Lebesgue).*

(b) $K_e\mu = 0$ *en todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

(c) La transformada de Poisson de μ es una función holomorfa sobre $\mathbb{D}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b). Por el teorema del salto de Fatou (Teorema 5.6.1), ha de ser que

$$\lim_{r\to 1^-} K_e\mu(\xi/r) = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{T}.$$

En ese caso, la función $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = K_e\mu(1/z)$ pertenece a $H^p(\mathbb{D})$ para $0 < p < 1$ (Proposición 5.4.3), y cumple que

$$\lim_{r\to 1^-} f(r\xi) = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{T}.$$

Como consecuencia, por el Teorema 1.5.6, f es nula. Por lo tanto, también lo es $K_e\mu$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Basta observar que si $K_e\mu$ es nula, entonces la relación dada en la Proposición 5.3.1 expresa que la transformada de Poisson de μ coincide con la transformada de Cauchy de μ, que es una función holomorfa.

(c) $\Rightarrow$ (a). Si la transformada de Poisson de μ es una función holomorfa, entonces, a la vista de la expresión en serie dada en la Proposición 3.3.3, ha de ser $\hat{\mu}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n < 0$. En ese caso, la Proposición 5.2.3 asegura que la función $K_e\mu$ es nula. Por tanto, la propiedad (a) se sigue de tomar límite en la relación dada en la Proposición 5.3.1. $\square$

Nótese que el resultado anterior nos permite dar una prueba del teorema de caracterización de funciones de $H^p(\mathbb{T})$ que enunciabamos en los preliminares, el Teorema 1.5.10.

Demostración del Teorema 1.5.10. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Supongamos que $f \in H^p(\mathbb{T})$. En ese caso, por definición, existe $F \in H^p(\mathbb{D})$ de manera que f es el límite no tangencial de F en si todo $\mathbb{T}$. Aún más, la Proposición 1.5.3 deja ver que $F \in H^1(\mathbb{D})$. En ese caso, el Teorema 2.5.1 justifica que, en casi todo $\xi \in \mathbb{T}$, se tiene

$$\lim_{r \to 1^-} K(fdm)(r\xi) = \lim_{r \to 1^-} F(r\xi) = f(\xi) = D(fdm)(\xi),$$

donde también hemos hecho uso de la Proposición 5.5.9.

Nótese que, en aplicación de la Proposición 5.6.2, esto implica que la transformada de Cauchy exterior de la medida fdm es idénticamente nula. Pero, en aplicación del Corolario 5.2.3, esto significa que $\widehat{fdm}(n) = \hat{f}(n) = 0$, si $n < 0$.

Recíprocamente, dado $1 \leq p \leq \infty$, sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(n) = 0$ si $n < 0$. En ese caso, ya hemos visto que la transformada de Cauchy exterior de la medida fdm es idénticamente nula. Con esto en mente, sea $F := K(fdm)$ la correspondiente transformada de Cauchy. Nótese que, por la Proposición 3.4.1, F coincide con la transformada de Poisson de fdm. Pero entonces, la transformada de Poisson de fdm es una función holomorfa (esto también se podría deducir de la Proposición 5.6.2) y, según el Teorema 3.4.5, ha de ser de clase $H^p(\mathbb{D})$. En ese caso, lo mismo se deduce para F.

Aún más, el Teorema 5.5.16 justifica que f es el límite no tangencial de F en casi todo $\mathbb{T}$. Por tanto, por definición, se tiene que $f \in H^p(\mathbb{T})$. $\square$

5.7. Comentarios finales

Este capítulo consiste en una revisión de los sucintos conceptos dados de [2, p. 54-56] sobre el teorema del salto de Fatou. Para poder profundizar en el entendimiento del mismo, es conveniente seguir el estudio de la transformada de Poisson que se realiza en [8, p. 239-245].

Bibliografía

[1] Joseph A. Cima, Alec L. Matheson, and William T. Ross. The cauchy transform (expository paper). `https://facultystaff.richmond.edu/~wross/PDF/cauchy.pdf`.

[2] Joseph A. Cima, Alec L. Matheson, and William T. Ross. *The Cauchy Transform.* American Mathematical Society (Mathematical Surveys and Monographs 125), 2006.

[3] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable I.* Springer (Graduate Texts in Mathematics 11), 1978.

[4] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable II.* Springer (Graduate Texts in Mathematics 159), 1995.

[5] Peter L. Duren. *Theory of H^p Spaces.* Dover Publications (Pure and Applied Mathematics 38), 1970.

[6] Kenneth Hoffman. *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice-Hall, 1962.

[7] William T. Ross. Making the case for cauchy transforms. `https://facultystaff.richmond.edu/~wross/PDF/Pomona-C.pdf`.

[8] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, Inc., 1987.