FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

INTRODUCCIÓN A LAS VARIEDADES DE EINSTEIN

Memoria realizada por Israel Bellanato Núñez

Dirigido por Dr. Alfonso Carriazo Rubio

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio introductorio de la teoría de variedades de Einstein. Para ello, primero se lleva a cabo un repaso de los aspectos más relevantes de la teoría general de variedades diferenciables, así como un primer acercamiento a la geometría semi-Riemanniana.

Habiendo introducido las variedades de Einstein, se enlazarán con la Teoría de la Relatividad General y, de forma más específica, con las ecuaciones del campo de Einstein.

Abstract

This project is focused on studying, at an introductory level, the theory of Einstein manifolds. Prior to that, a review of the most relevant topics of the theory of differentiable manifolds and a comprehensive, basic study of semi-Riemannian geometry will be covered.

Having introduced Einstein manifolds, the link between them and the Theory of General Relativity and, more specifically, the Einstein field equations, will be adressed.

Índice general

Introducción

Si existe una ecuación análoga a la de Poisson en Relatividad General, ésta habrá de ser una ecuación tensorial para el tensor de potencial gravitatorio $g_{\mu\nu}$, en cuyo lado derecho ha de tenerse el tensor de energía de la materia. En el lado izquierdo de la ecuación necesitamos un tensor diferencial derivado de $g_{\mu\nu}$. El objetivo es determinar este tensor de forma precisa. Está completamente determinado por las tres condiciones siguientes:

1. *El tensor en cuestión no debe contener derivadas de $g_{\mu\nu}$ que sean de orden superior a 2.*

2. *El tensor debe depender linealmente de las derivadas segundas.*

3. *La divergencia del tensor debe ser idénticamente nula.*

Albert Einstein, Princeton, 1921.

Estas palabras de Albert Einstein constituyen el objetivo esencial del estudio que vamos a realizar: obtener de forma puramente geométrica la ecuación que rige la Teoría de la Relatividad General.

Einstein consiguió identificar la curvatura del espacio-tiempo con la acción de la gravedad sobre el mismo. Este hecho, contrastado a día de hoy en numerosas ocasiones, fue tremendamente revolucionario en la época, y aún hoy resulta, cuanto menos, sorprendente.

Y es que verdaderamente se tienen implicaciones sorprendentes, como es el hecho de que la gravedad, considerada una fuerza entre un par de cuerpos con masa, afecta a la trayectoria de los fotones que viajan por el espacio, pero los fotones no tienen masa. ¿Cómo es esto posible?

Uno de los primeros experimentos realizados en el estudio de la Teoría de la Relatividad General se dedica al análisis de este fenómeno. En él, se mide la posición de estrellas lejanas en el espacio cuando hay eclipse solar, y se compara con la posición que se obtiene en una noche usual. El resultado obtenido es que las posiciones no coinciden, dado que la acción gravitatoria del Sol, al curvar el espacio-tiempo que lo rodea, da lugar a que las trayectorias de los fotones procedentes de estas estrellas se curven, de forma que la posición que se percibe de las estrellas en la Tierra queda distorsionada.

En la construcción que llevaremos a cabo, repasaremos los resultados esenciales e imprescindibles que se tienen de variedades diferenciables, así como algún resultado de cálculo en variedades.

A continuación, construiremos la geometría semi-Riemanniana, que nos proporcionará las herramientas necesarias para el estudio que queremos realizar.

Por último, pasaremos a la definición y estudio de un tipo especial de variedades semi-Riemannianas, las conocidas como variedades de Einstein, que dan nombre a este escrito, y veremos que son aquellas en las que la teoría de la Relatividad funciona de forma adecuada.

Así, nuestro objetivo es doble: por una parte, hemos de determinar cómo son los espacios en los que la Relatividad funciona de forma adecuada; por otra, hemos de determinar el tensor que Einstein buscaba, desde un enfoque totalmente geométrico, para hallar la ecuación del campo gravitatorio.

No quisiera acabar sin agradecer su apoyo durante estos años a todos los que me han acompañado: mi familia, mis amigos y compañeros de clase, y especialmente a mi tutor, Alfonso Carriazo, que me ha dado la oportunidad de hacer un trabajo a mi medida, sobre un tema que verdaderamente me entusiasma, colaborando conmigo durante dos años, permitiéndome estudiar el contenido más avanzado, estimulante e interesante que he podido adquirir después de 5 años yendo de una facultad a otra.

Capítulo 1

Preliminares: Variedades Diferenciables

Para llegar a abordar los conceptos más avanzados de la teoría de variedades semi-Riemannianas, es primero necesaria una profunda comprensión de la teoría general de variedades diferenciables (correspondiente en gran medida al contenido estudiado en la asignatura Variedades Diferenciables del Grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla). Este capítulo se centra en dicho estudio básico, poniendo el foco en todo momento en los conceptos más interesantes para construir los capítulos posteriores.

Las demostraciones correspondientes a los resultados de este capítulo pueden encontrarse en los apuntes de la asignatura *Variedades Diferenciables* [1] de la US, y en el capítulo 1 de *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity* [2].

1.1. Variedades diferenciables

En esta sección nos centraremos en llegar al concepto de variedad diferenciable. Antes de empezar hay que notar que diremos que una aplicación es diferenciable si es de clase $\mathcal{C}^\infty$. Por otra parte, al tratar con espacios topológicos $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$, escribiremos simplemente $\mathcal{S}$.

Comencemos entonces definiendo la noción más elemental con la que trabajaremos: la *carta*.

Definición 1.1.1 Consideremos un espacio topológico $\mathcal{S}$. Diremos que (U, φ) es una *carta* de dimensión m de $\mathcal{S}$ si U es un abierto de $\mathcal{S}$ y $\varphi : U \to \mathbf{R^m}$ es un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi(U)$, que es abierto de $\mathbf{R}^m$. Llamaremos *dominio de la carta* a U y *aplicación coordenada* a φ.

Definición 1.1.2 Consideremos la carta $(\mathbf{R}^m, id = (u^1, ..., u^m))$ en $\mathbf{R}^m$, con $u^i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ las funciones que actúan sobre $p = (p_1, ..., p_m) \in \mathbf{R}^m$ según $u^i(p) = p_i$ para todo $i = 1, ..., m$. Diremos que las funciones u^i son las *funciones coordenadas naturales de* $\mathbf{R}^m$.

Definición 1.1.3 Dado un punto $p \in U$, se llama *coordenadas locales* de p respecto de la carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ a $(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \varphi(p) \in \varphi(U)$. Por otra parte, se denomina *funciones coordenadas* (o *funciones componentes*) a $x^1, ..., x^m$, donde $x^i = u^i \circ \varphi$ para todo $i = 1, ..., m$. Así, $x^i(p) = \lambda_i$ para todo $i = 1, ..., m$.

Definición 1.1.4 Consideremos dos cartas (U, φ) y (V, ψ) de $\mathcal{S}$. Se dirá que son *compatibles* si $U \cap V = \emptyset$, o si $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ y $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ son diferenciables.

Llegados a este punto, estamos en disposición de definir el concepto de atlas.

Definición 1.1.5 Se define un *atlas* $\mathcal{A}$ (de dimensión m) de un espacio topológico $\mathcal{S}$ como un conjunto de cartas de $\mathcal{S}$ (todas de dimensión m), $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$, compatibles entre sí y tales que $\mathcal{S} = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$.

Definición 1.1.6 Diremos que (U, φ) es una *carta compatible con un atlas* $\mathcal{A}$ si es compatible con todas las cartas de dicho atlas.

Definición 1.1.7 Un atlas $\mathcal{A}$ se dice *maximal* si contiene a todas las cartas que son compatibles con $\mathcal{A}$.

Veamos ahora la propiedad de Hausdorff, que nos permite llegar, finalmente, al concepto de variedad diferenciable.

Definición 1.1.8 Se dice que un atlas $\mathcal{A}$ verifica la *propiedad de Hausdorff* si para todos $p, q \in \mathcal{S}$, existen $(U, \varphi), (V, \psi)$ cartas compatibles con $\mathcal{A}$ tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.1.9 Una *variedad diferenciable de dimensión* m es un par $(\mathbf{M}, \mathcal{A})$ donde M es un espacio topológico dotado de un atlas numerable $\mathcal{A}$ que verifica la propiedad de Hausdorff.

Con frecuencia denotaremos a la variedad $(M, \mathcal{A})$ por M^m, donde m es la dimensión de la variedad y el atlas $\mathcal{A}$ no se da explícitamente.

Lema 1.1.10 Todo atlas $\mathcal{A}$ de una variedad diferenciable M está contenido en un único atlas maximal $\mathcal{A}^+$.

Definición 1.1.11 Diremos que (U, φ) es *carta de una variedad diferenciable* M si está en su atlas maximal $\mathcal{A}^+$.

Veamos ahora algunos ejemplos de variedades diferenciables.

Ejemplo 1.1.12 Si consideramos la carta $(\mathbf{R^m}, id)$ con $id : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ la identidad, tendremos una variedad diferenciable con un atlas de una sola carta.

Ejemplo 1.1.13 Para la esfera $S^m \subseteq \mathbf{R}^{m+1}$ se pueden utilizar las proyecciones estereográficas, dadas por las cartas (U_+, φ_+) y (U_-, φ_-), para las que se escribe:

$$U_+ = \{p = (x_1, ..., x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} \neq 1\},$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_+ : & U_+ & \longrightarrow & \mathbf{R}^m \\ & (x_1, ..., x_{m+1}) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{1-x_{m+1}}, ..., \frac{x_1}{1-x_{m+1}}\right) \end{array},$$

$$U_- = \{p = (x_1, ..., x_{m+1}) \in S^m \mid x_{m+1} \neq -1\},$$

$$\begin{array}{cccc} \varphi_- : & U_- & \longrightarrow & \mathbf{R}^m \\ & (x_1, ..., x_{m+1}) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{1+x_{m+1}}, ..., \frac{x_1}{1+x_{m+1}}\right) \end{array}.$$

Ejemplo 1.1.14 Las superficies regulares son variedades diferenciables de dimensión 2 (2-variedades), con lo que tenemos que el toro, el cilindro, las hipercuádricas, etc. son variedades diferenciables.

Cerramos esta sección con el siguiente resultado, que nos permitirá obtener variedades a partir de otras.

Lema 1.1.15 Si M^m y N^n son variedades diferenciables, $M \times N$ es variedad diferenciable de dimensión $m + n$.

1.2. Aplicaciones diferenciables

Cabe preguntarse, llegados a este punto, cómo funcionan las aplicaciones definidas sobre una variedad diferenciable M. Empezaremos por el caso más sencillo: las funciones $f : M \to \mathbf{R}$. Se dice que f es *diferenciable* si para toda carta (U, φ) de M se tiene que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}$ es diferenciable. Hay que notar que $f \circ \varphi^{-1}$ es la expresión en coordenadas de f, y denotaremos $\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbf{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$.

Definición 1.2.1 Consideremos dos variedades diferenciables M^m y N^n. Se dice que $f : M \to N$ es una *aplicación diferenciable en un punto* $p \in M$ si para toda carta (V, ψ) de N con $f(p) \in V$, se tiene que existe una carta (U, φ) de M con $p \in U$ y $f(U) \subseteq V$ tal que $\overline{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es diferenciable, teniéndose así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "\bar{f}"] & \psi(V) \end{tikzcd}$$

Se dirá que f *es diferenciable en* M si lo es para todo $p \in M$.

Pasemos ahora a definir la noción de difeomorfismo.

Definición 1.2.2 Se dice que una aplicación $f : M \to N$ es *difeomorfismo* si es biyectiva, diferenciable y tiene inversa diferenciable.

Proposición 1.2.3 Las cartas son difeomorfismos.

A continuación exponemos un resultado que será recurrente en futuras demostraciones.

Lema 1.2.4 Dado un entorno U de un punto $p \in M$, existen un abierto $V \subseteq U$ con $p \in V$ y una función $f \in \mathcal{F}(M)$, a la que llamaremos *función meseta en* p, verificando:

1. $f(q) \in (0, 1)$ para todo $q \in M$,
2. $f(q) = 1$ para todo $q \in V \subseteq U$,
3. $supp(f) = \{p \in M \mid f(p) \neq 0\} \subset U$.

1.3. El espacio tangente

Definición 1.3.1 Una función $v : \mathcal{F}(M) \to \mathbf{R}$ es un *vector tangente* a $\mathbf{M}$ en el punto $p \in M$ si:

1. Es $\mathbf{R}$-lineal: $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$ para todos $a, b \in \mathbf{R}$, y para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$.
2. Verifica la condición de Leibniz: $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$ para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Obsérvese que hemos axiomatizado el concepto de vector tangente al identificarlo con las derivaciones sobre la variedad M. En lugar de haber hecho esto, podría haberse considerado que el vector tangente a una variedad M en un punto p de la misma es la clase de equivalencia de las curvas que pasan por dicho punto (siendo la relación de equivalencia aquella por la cual tomando una cierta carta (U, φ) con $p \in U$ se tiene que dos curvas α y β con origen en p están relacionadas si y solo si $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$).

Definición 1.3.2 Se dice *espacio tangente a la variedad M en el punto $p \in M$* a:

$$T_pM = \{v : \mathcal{F}(M) \to \mathbf{R} \mid v \text{ es vector tangente a } M \text{ en } p\}.$$

Por la definición dada de vector tangente a la variedad en un punto, resulta trivial que el espacio tangente a la variedad en un punto posee estructura de espacio vectorial:

Lema 1.3.3 El espacio tangente T_pM tiene estructura de espacio vectorial.

Definición 1.3.4 Se llama *fibrado tangente de la variedad M^m* a:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Lema 1.3.5 El fibrado tangente TM tiene estructura de $2m$-variedad.

Podemos definir ahora las derivadas parciales en un punto $p \in M$ como sigue:

Definición 1.3.6 Sean (U, φ) una carta de M con $p \in U$, $\varphi = (x^1, ..., x^m)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$. Se define:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)),$$

donde u^i es la i-ésima función coordenada de $\mathbf{R}^m$.

Escribiremos entonces la *derivada parcial* según:

$$\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbf{R}.$$

Proposición 1.3.7 Dado $p \in M^m$, las derivadas parciales $\partial_i|_p$ $(i = 1, ..., m)$ son vectores tangentes a la variedad en el punto p.

Lema 1.3.8 Dado $v \in T_pM$:

1. Si $f, g \in \mathcal{F}(M)$ verifican $f = g$ en cierto entorno U de p, entonces $v(f) = v(g)$.
2. Si $h \in \mathcal{F}(M)$ es constante en un entorno U de p, entonces $v(h) = 0$.

Esto lleva al hecho de que los vectores tangentes tienen carácter local,

A continuación estudiaremos un resultado de vital importancia: el *Teorema de la base.*

Teorema 1.3.9 (Teorema de la base) Sean (U, φ) una carta de M con $p \in U$, $\varphi = (x^1, ..., x^m)$, tendremos que $\mathcal{B} = \{\partial_i|_p\}_{i=1,...,m}$ es base de T_pM y

$$v = \sum_{i=1}^{m} v(x^i)\partial_i|_p,$$

para todo $v \in T_pM$.

1.4. La diferencial

Pasamos ahora al estudio de cómo se transforman los vectores tangentes a través de aplicaciones entre variedades. Para ello, definimos la diferencial de una aplicación diferenciable.

Definición 1.4.1 Sea $f : M \to N$ diferenciable. Para cada $p \in M$ se define la *diferencial de f en p* como

$$\begin{array}{rccl} df_p : & T_pM & \longrightarrow & T_{f(p)}N \\ & v & \longmapsto & v_f \end{array},$$

donde v_f viene dado por

$$\begin{array}{rccl} v_f : & \mathcal{F}(N) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & g & \longmapsto & v(g \circ f) \end{array}.$$

Así, df_p queda caracterizada por

$$df_p(v)(g) = v(g \circ f),$$

para todo $v \in T_pM$, y para toda $g \in \mathcal{F}(N)$.

Hay que notar que se sigue de esto que la diferencial es una aplicación lineal. De hecho, en el siguiente lema se calcula su matriz jacobiana.

Lema 1.4.2 Sea $f : M^m \to N^n$ diferenciable. Si consideramos una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ de M con $p \in U$ y $(V, \psi = (y^1, ..., y^n))$ carta de N con $f(p) \in V$, se tiene:

$$df_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p) \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_{f(p)} \qquad (j = 1, ..., m).$$

A la matriz de df_p respecto de estas cartas, dada por $J_pf = \left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}(p)\right)_{i,j}$, con $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$, se le llama *matriz jacobiana de f en p* relativa a tales cartas.

Definición 1.4.3 Se define el *rango* de $f \in \mathcal{F}(M)$ en $p \in M$, $rg\ f(p)$, como el rango de la matriz jacobiana J_pf.

Definición 1.4.4 Se dice que una variedad diferenciable M es *orientable* si existe un conjunto de cartas $\mathcal{O}$ cuyos abiertos sean recubrimiento de M y tal que para todo par de cartas en $\mathcal{O}$ el determinante de la matriz jacobiana sea positivo.

Lema 1.4.5 Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son diferenciables, para todo $p \in M$ se tiene:

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Teorema 1.4.6 Sea $f : M \to N$ diferenciable. Entonces df_p será isomorfismo si y solo si existe un entorno V de $p \in M$ tal que $f|_V$ es difeomorfismo de V en su imagen $f(V)$, que será entorno de $f(p) \in N$.

Introduzcamos ahora unas aplicaciones que resultarán de gran utilidad en apartados posteriores: las *inmersiones* y las *sumersiones*.

Definición 1.4.7 Una aplicación diferenciable $f : M^m \to N^n$ es una inmersión (sumersión) en $p \in M$ si $rg\ f(p) = m$ ($rg\ f(p) = n$). Diremos que f es inmersión (sumersión) en M si lo es para todo $p \in M$.

Nótese entonces que si f es inmersión en p, entonces $m < n$; y si f es sumersión en p, $m > n$.

Veamos una última proposición que será clave en la siguiente sección.

Proposición 1.4.8 Sea $f : M \to N$ diferenciable. Si df_p es inyectiva (sobreyectiva) para todo $p \in M$, tendremos que f es inmersión (sumersión).

1.5. Subvariedades

Pasamos ahora a introducir la noción de subvariedad.

Definición 1.5.1 Se dice que una variedad P es subvariedad de otra variedad M si:

1. P es subespacio topológico de M.
2. La inclusión $i : P \hookrightarrow M$ es inmersión.

Lema 1.5.2 Si P es subvariedad de M y $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $f|_P \in \mathcal{F}(P)$.

Introducimos ahora un resultado por el cual podemos obtener subvariedades a partir de aplicaciones diferenciables entre variedades.

Teorema 1.5.3 Sean $f : M^m \to N^n$ diferenciable y $P^k \subseteq N^n$ una subvariedad. Si f es submersión en todos los puntos de $f^{-1}(P)$, entonces $f^{-1}(P)$ es una subvariedad de dimensión $m - n + k$.

1.6. Campos vectoriales

Introduzcamos ahora los campos vectoriales, y veamos su relación con las derivaciones, que también definiremos a continuación.

Definición 1.6.1 Un *campo vectorial* X es una aplicación que a cada punto $p \in M$ le asigna un vector $X_p \in T_pM$. Podemos entender así el campo X como la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} X: & M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & X_p \end{array},$$

verificando $\pi \circ X = id$, donde $\pi : TM \to M$ es la proyección $\pi(v_p) = p$.

Definición 1.6.2 Sean X campo vectorial en M y $f \in \mathcal{F}(M)$. Se define

$$(Xf)(p) = X_p(f),$$

para todo $p \in M$. De esta forma, se dice que X es diferenciable si Xf lo es para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.

Proposición 1.6.3 Para X, Y campos vectoriales cualesquiera en M y $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene:

1. $(fX)_p = f(p)X_p$ para todo $p \in M$.
2. $(X + Y)_p = X_p + Y_p$ para todo $p \in M$.

Lema 1.6.4 El conjunto de los campos diferenciables sobre M, al que denotaremos por $\mathcal{X}(M)$, es un módulo sobre el anillo $\mathcal{F}(M)$ con las operaciones mencionadas.

Proposición 1.6.5 Para una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ de M, se tiene que $\partial_i : U \to TU$ dada por $\partial_i(p) = \partial_i|_p$ es un campo vectorial diferenciable para todo $i = 1, ..., m$. Además, por el teorema de la base, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$ se tiene:

$$X = \sum_{i=1}^{m} (Xx^i)\partial_i \quad \text{en todo } U.$$

Definición 1.6.6 Una *derivación* sobre $\mathcal{F}(M)$ es una aplicación $\mathcal{D} : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ tal que:

1. Es $\mathbf{R}$-lineal: $\mathcal{D}(af + bg) = a\mathcal{D}(f) + b\mathcal{D}(g)$ para todos $a, b \in \mathbf{R}$, y para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

2. Verifica la condición de Leibniz: $\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g)$ para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Con lo que se ha construido hasta ahora, se tiene que los campos tangentes $X \in \mathcal{X}(M)$ se comportan como derivaciones al actuar sobre aplicaciones $f \in \mathcal{F}(M)$. De hecho, tendremos que la aplicación $f \to Xf$ es la derivada de f en la dirección del campo X.

Es importante notar también el siguiente resultado, pues en adelante trataremos los campos como derivaciones cuando sea necesario.

Lema 1.6.7 Toda derivación $\mathcal{D}$ proviene de una campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$.

Definamos ahora una operación con la que trabajaremos regularmente: el *corchete de Lie*.

Definición 1.6.8 Se define el *corchete de Lie* como

$$\begin{array}{rccc} [\cdot,\cdot]: & \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{X}(M) \\ & [X,Y] & \longrightarrow & XY - YX \end{array},$$

de modo que se tendrá

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf),$$

para todo $p \in M$, y para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.

Lema 1.6.9 El corchete verifica las siguientes propiedades sobre $\mathcal{X}(M)$:

1. Es $\mathbf{R}$-bilineal:
$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$
$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z],$$
para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, y para todos $a, b \in \mathbf{R}$.

2. Es antisimétrico:
$$[X, Y] = -[Y, X],$$
para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

3. Verifica la identidad de Jacobi;
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$
para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Haciendo uso del corchete de Lie podemos definir la derivada de Lie.

Definición 1.6.10 Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, definimos la *derivada de Lie* como el operador L_X verificando:

1. $L_X(f) = Xf$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.
2. $L_X(Y) = [X, Y]$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$.

Nótese que se tiene la propiedad
$$L_X(fY) = (Xf)Y + fL_X(Y),$$
pues resulta sencillo probar que
$$[X, fY] = (Xf)Y + f[X, Y].$$

Por último, hay que notar que la diferencial de una aplicación diferenciable $f : M \to N$ lleva vectores tangentes a M en vectores tangentes a N, pero en general esto no se puede aplicar para sobre campos vectoriales. Nos dedicamos a continuación a salvar esta dificultad introduciendo el concepto de campos f-relacionados.

Definición 1.6.11 Dados $X \in \mathcal{X}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(M)$ y $f : M \to N$ diferenciable, se dice que X e Y están f-relacionados ($X \overset{f}{\sim} Y$) si se verifica que $df_p(X_p) = Y_{f(p)}$ para todo $p \in M$, es decir, si el siguiente diagrama, en el cual la aplicación $df : TM \to TN$ viene dada por $df(v_p) = df_p(v_p)$ para todo $v_p \in TM$, es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "X"'] & N \arrow[d, "Y"] \\ TM \arrow[r, "df"] & TN \end{tikzcd}$$

En caso de que f fuera difeomorfismo en el diagrama anterior, se tendría que para $X \in \mathcal{X}(M)$ existe un único campo $Y \in \mathcal{X}(N)$ f-relacionado con X dado por $Y = df \circ X \circ f^{-1}$. Además, en tal caso, la aplicación inducida por tal composición, $f_* : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$, es isomorfismo de espacios vectoriales.

Lema 1.6.12 Dos campos $X \in \mathcal{X}(M)$ e $Y \in \mathcal{X}(N)$ están f-relacionados si y solo si $X(g \circ f) = Yg \circ f$ para todo $g \in \mathcal{F}(N)$.

1.7. 1-formas

Para introducir el concepto de 1-forma es preciso saber primero qué es el espacio cotangente a una variedad en un punto.

Definición 1.7.1 Se dice *espacio cotangente* a una variedad M en un punto $p \in M$ al dual del espacio tangente en dicho punto. De este modo, el espacio cotangente viene dado por:

$$T_pM^* = \{f : T_pM \to \mathbf{R} \mid f \text{ es lineal}\}.$$

Definición 1.7.2 Se llama *fibrado cotangente de la variedad M* a:

$$TM^* = \bigcup_{p \in M} T_pM^*.$$

Definición 1.7.3 Una *1-forma* θ en una variedad M es una aplicación que a cada punto $p \in M$ le asigna un elemento θ_p del espacio cotangente T_pM^*:

$$\begin{array}{rccc} \theta : & M & \longrightarrow & TM^* \\ & p & \longrightarrow & \theta_p \end{array},$$

verificando $\pi^* \circ \theta = id$, donde $\pi^* : TM^* \to M$ es la proyección $\pi^*(\theta_p) = p$.

Definición 1.7.4 Sean θ una 1-forma en M y $X \in \mathcal{X}(M)$. Se define

$$(\theta X)(p) = \theta_p(X_p),$$

para todo $p \in M$. De este modo, se dice que θ es una 1-forma diferencial si θX es diferenciable para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Así, podemos identificar el espacio de las 1-formas con el de las aplicaciones lineales de $\mathcal{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$. Tendremos además el siguiente lema.

Lema 1.7.5 El conjunto de las 1-formas diferenciales sobre M, $\mathcal{X}^*(M)$, es un módulo sobre $\mathcal{F}(M)$ con las siguientes operaciones:

1. $(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p$ para todas $\theta, \omega \in \mathcal{X}^*(M)$, y para todo $p \in M$.
2. $(f\theta)_p = f(p)\theta_p$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$, y para todo $p \in M$.

Definición 1.7.6 Se define la *diferencial* de $f \in \mathcal{F}(M)$ como la 1-forma df verificando $df(X) = X(f)$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Habiendo definido la diferencial de una función, podemos estudiar el siguiente resultado.

Proposición 1.7.7 Para una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ de M, se tiene que dx^i es 1-forma diferencial en U para todo $i = 1, ..., m$. Más aún, $\{dx^1, ..., dx^m\}$ constituye la base dual a $\{\partial_1, ..., \partial_m\}$, teniéndose $dx^i(\partial_j) = \delta_{ij}$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Corolario 1.7.8 De la proposición anterior, se sigue que

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta(\partial_i) dx^i \quad \text{en todo } U.$$

En particular, para $f \in \mathcal{F}(M)$, se tiene

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad \text{en todo } U.$$

Lema 1.7.9 La diferencial verifica las siguientes propiedades:

1. La aplicación $d : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{X}^*(M)$ es $\mathbf{R}$-lineal.

2. Se verifica la regla del producto:

$$d(fg) = gdf + fdg \quad \text{para todas } f, g \in \mathcal{F}(M)$$

3. Si $f \in \mathcal{F}(M)$ y $h \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, entonces $d(h(f)) = h'(f)df$.

1.8. Tensores

En este apartado introduciremos la noción de campo tensorial y estudiaremos algunos resultados técnicos que nos serán de utilidad posteriormente.

Definición 1.8.1 Consideremos $V_1, ..., V_s, W$ módulos sobre el anillo K. Sabiendo que $V_1 \times ... \times V_s$ es también módulo sobre K, diremos que

$$A : V_1 \times ... \times V_s \to W$$

es K-*multilineal* si A es K-lineal por componentes, es decir, si para todo $i \in \{1, ..., s\}$ se tiene que para $v \in V_i$, $v_j \in V_j$ $(j \neq i)$, la aplicación

$$v \mapsto A(v_1, ..., v_{i-1}, v, v_{i+1}, ..., v_s)$$

es K-lineal.

Definición 1.8.2 Si V es módulo sobre K, se define su módulo dual como:

$$V^* = \{A : V \to K \mid A \text{ es } K\text{-lineal}\},$$

que efectivamente es módulo con la suma de elementos de V^* y el producto por elementos de K.

Denotaremos $V_1 \times ... \times V_s = V^s$ siempre que $V_i = V$ para todo $i \in \{1, ..., s\}$.

Definición 1.8.3 Dados $r, s \geq 0$, no ambos nulos, una aplicación K-multilineal $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ se dice *tensor de tipo* (r, s) sobre V.

Definición 1.8.4 Un *campo tensorial* A sobre una variedad M es un tensor sobre $\mathcal{X}(M)$. Así, un campo tensorial de tipo (r, s) será de la forma

$$A : \mathcal{X}^*(M)^r \times \mathcal{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M).$$

De este modo, para 1-formas $\theta^1, ..., \theta^r$, y campos $X_1, ..., X_s$, tendremos:

$$A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s) \in \mathcal{F}(M).$$

En adelante, diremos que las 1-formas son covariantes y los campos contravariantes (más adelante se introducirán estas nociones de manera más formal). Así, como sobre cada una de las r primeras componentes A actúa como un campo, θ^i ocupa la i-ésima componente contravariante; mientras que como A actúa como 1-forma sobre cada una de las últimas s componentes, X_j ocupa la j-ésima componente covariante.

Se denota el conjunto de campos tensoriales de tipo (r, s) sobre una variedad M por $\mathcal{T}_s^r(M)$. Por abuso de lenguaje, con frecuencia llamaremos tensores a los campos tensoriales.

Aunque solo podemos sumar tensores del mismo tipo, el producto de tensores puede llevarse a cabo con independencia de los tipos definiéndolo como sigue.

Definición 1.8.5 Sean $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ y $B \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}(M)$. Se define el *producto tensorial de A y B* como:

$$A \otimes B : \mathcal{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathcal{X}(M)^{s+s'} \to \mathcal{F}(M),$$

donde

$$(A \otimes B)(\theta^1, ..., \theta^{r+r'}, X_1, ..., X_{s+s'}) =$$
$$= A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)B(\theta^{r+1}, ..., \theta^{r+r'}, X_{s+1}, ..., X_{s+s'}).$$

En caso de que $B \in \mathcal{T}^0_0(M)$, $B = f \in \mathcal{F}(M)$, y se define $A \otimes f = f \otimes A = fA$.

Veamos ahora ciertas propiedades relevantes para distintos tipos de tensores:

1. Si ω es una 1-forma diferenciable sobre M, se tiene que $X \to \omega(X)$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal entre $\mathcal{X}(M)$ y $\mathcal{F}(M)$, lo que resulta en un tensor $(0,1)$. Así, todo tensor $(0,1)$ proviene de una 1-forma, con lo que podemos escribir $\mathcal{T}^0_1(M) = \mathcal{X}^*(M)$.

2. Si X es un campo sobre M, definamos

   $$X(\theta) = \theta(X) \;\text{ para todo } \theta \in \mathcal{X}^*(M).$$

   Esta aplicación $X : \mathcal{X}^*(M) \to \mathcal{F}(M)$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal, de modo que tenemos un tensor $(1,0)$. Así, de forma análoga al caso previo, escribimos $\mathcal{T}^1_0(M) = \mathcal{X}(M)$.

3. Sea $A : \mathcal{X}(M)^s \to \mathcal{X}(M)$ una aplicación $\mathcal{F}(M)$-multilineal, y definamos $\overline{A} : \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ como el tensor $(1,s)$ dado por

   $$\overline{A}(\theta, X_1, ..., X_s) = \theta(A(X_1, ..., X_s)).$$

   Por abuso de lenguaje, diremos con frecuencia que A es un tensor.

4. A los tensores de tipo $(0,s)$ los llamaremos covariantes, y a los de tipo $(r,0)$ con $r > 0$, contravariantes. Esto hace que las 1-formas y las funciones reales sean covariantes, mientras que los campos son contravariantes. Nótese que el producto de un tensor covariante y otro contravariante es conmutativo.

A continuación, introducimos un resultado que nos permite entender los tensores como campos (en el sentido de los campos vectoriales).

Proposición 1.8.6 Todo tensor $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ tiene un valor A_p en cada punto $p \in M$ dado por la función

$$A_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbf{R},$$

definida como sigue: para $\alpha^1, ..., \alpha^r \in T_pM^*$, $v_1, ..., v_s \in T_pM$, tendremos

$$A_p(\alpha^1, ..., \alpha^r, v_1, ..., v_s) = A(\theta^1, ..., \theta^r, X_1, ..., X_s)(p),$$

con $\theta^1, ..., \theta^r$ 1-formas cualesquiera con $\theta^i|_p = \alpha^i$ $(i = 1, ..., r)$, $X_1, ..., X_s$ campos vectoriales cualesquiera con $X_i|_p = v_i$ $(i = 1, ..., s)$.

Por otra parte, es preciso estudiar la expresión en coordenadas de un tensor dado.

Definición 1.8.7 Sea $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ una carta de M. Dado un tensor $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$, las componentes de A relativas a (U, φ) son las funciones reales dadas por:

$$A^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} = A(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_s}),$$

para todos $i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_s \in \{1, ..., m\}$.

Nótese que esto será congruente con las expresiones de campos (tensores de tipo $(1, 0)$) y 1-formas (tipo $(0, 1)$), de manera que se tengan:

$$\theta = \textstyle\sum_i \theta(\partial_i)dx^i = \sum_i \theta_i dx^i, \qquad X = \sum_i X(dx^i)\partial_i = \sum_i X^i \partial_i.$$

Un caso especialmente interesante sería el de un tensor $(1, s)$ dado como $A : \mathcal{X}(M)^s \to \mathcal{X}(M)$, para el cual

$$A(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_s}) = \sum_j A^j_{i_1,...,i_s} \partial_j,$$

pues para $\overline{A} \in \mathcal{T}_s^1(M)$ queda:

$$\overline{A}(dx^j, \partial_{i_1}, ..., \partial_{i_s}) = dx^j(A(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_s})) = \sum_k A^k_{i_1,...,i_s} dx^j(\partial_k) = A^j_{i_1,...,i_s}.$$

Por otra parte, la evaluación de un tensor sobre 1-formas y campos puede describirse en coordenadas como sigue (hagamos como ejemplo un tensor $(1,1)$):

$$A(\theta, X) = \sum_{i,j} A(dx^i, \partial_j)\theta_i X^j = \sum_{i,j} A^i_j \theta_i X^j.$$

Hay que destacar también que mientras que las componentes de la suma de tensores es la suma de las componentes, para el producto se tiene:

$$(A \otimes B)^{i_1,\dots,i_{r+r'}}_{j_1,\dots,j_{s+s'}} = A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} B^{i_{r+1},\dots,i_{r+r'}}_{j_{s+1},\dots,j_{s+s'}}.$$

Habiendo discutido esto, podremos expresar tensores en coordenadas locales para una carta dada según el resultado siguiente.

Lema 1.8.8 Dada una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ de M, para $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$ se tiene, en el abierto U:

$$A = \sum A^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_s} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}.$$

En el caso particular de los tensores covariantes (de tipo $(0,s)$ con $s \geq 0$), si tenemos una aplicación diferenciable $\phi : M \to N$, podemos pasar los tensores de N a M. Para ello, introducimos el *pullback*.

Definición 1.8.9 Sean $f : M \to N$ diferenciable y $A \in \mathcal{T}^0_s(N)$ con $s \geq 1$. Consideremos $f^* : \mathcal{T}^0_s(N) \to \mathcal{T}^0_s(M)$ cumpliendo

$$(f^*A)_p(v_1, ..., v_s) = A_{f(p)}(df_p v_1, ..., df_p v_s),$$

para todos $v_i \in T_pM$, $p \in M$. Se dice que f^*A es el *pullback de* A, que es un tensor $(0,s)$ sobre T_pM.

Lema 1.8.10 Se tienen las siguientes propiedades:

1. Para $f : M \to N$ diferenciable, $f^* : \mathcal{T}^0_s(N) \to \mathcal{T}^0_s(M)$ es $\mathbf{R}$-lineal para todo $s \geq 0$, y se verifica

   $$f^*(A \otimes B) = f^*A \otimes f^*B$$

   para tensores covariantes arbitrarios.

2. Para $f : M \to N$ y $g : N \to P$ diferenciables tendremos que

   $$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : \mathcal{T}^0_s(P) \to \mathcal{T}^0_s(M) \quad \text{para todo } s \geq 0.$$

Capítulo 2

Variedades Semi-Riemannianas

Tras hacer un repaso de variedades diferenciables, estudiemos ahora las variedades semi-Riemmanianas, que no son más que variedades diferenciables sobre las que se define una métrica, concepto que veremos más adelante, pero que básicamente dota al espacio de la noción de distancia. Esto permitirá estudiar propiedades más profundas que, llegado el momento, nos llevarán al estudio de las variedades de Einstein y la Teoría de la Relatividad General.

Este capítulo está basado en los capítulos 2 y 3 de [2], los capítulos 5 y 6 de *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds* [3], y el capítulo 12 de *Introduction to Electrodynamics* [4].

2.1. El producto escalar

Para llegar al concepto de métrica, primero hemos de estudiar lo que es una *forma bilineal simétrica* (en adelante, FBS).

Definición 2.1.1 Dado un espacio vectorial V, una *FBS* $b : V \times V \to \mathbf{R}$ es una función $\mathbf{R}$-bilineal verificando $b(v, w) = b(w, v)$ para $v, w \in V$. Además:

1. b es definida positiva (negativa) si se tiene $b(v, v) > 0$ ($b(v, v) < 0$) para todo $v \neq 0$.

2. b es semidefinida positiva (negativa) si se tiene $b(v, v) \geq 0$ ($b(v, v) \leq 0$) para todo $v \in V$.

3. b es no degenerada si $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$.

Diremos que una FBS es *definida* si es definida positiva o negativa, *semidefinida* si es semidefinida positiva o negativa, y *no definida* en cualquier otro caso.

Nótese que las FBS tienen carácter local, de modo que para $W \subseteq V$, tendremos que $b|_W(v,w) = b(v,w)$ para todos $v, w \in W$. Del mismo modo, si b es (semi)definida (positiva o negativa), entonces $b|_W$ también lo es.

Definición 2.1.2 Se llama *índice ν de una FBS b* al mayor entero que coincide con la dimensión de un subespacio W de V en el cual $b|_W$ es definida negativa.

Definición 2.1.3 Se dice *forma cuadrática asociada a b* a $q : V \to \mathbf{R}$, con $q(v) = b(v,v)$.

Nótese que, por la identidad de polarización, no se pierde información al trabajar con q en lugar de b, pues

$$b(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)).$$

Definición 2.1.4 Sean $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ base del espacio vectorial V y b una FBS. La *matrix de b relativa a $\mathcal{B}$* viene dada por $b(e_i, e_j) = (b_{ij})$, y es simétrica por ser b simétrica.

Hay que notar que se puede construir b a partir de (b_{ij}) a través de

$$b(v,w) = \sum_{i,j} b_{ij} v_i w_j,$$

donde $v = \sum_i v_i e_i$, $w = \sum_j w_j e_j$.

Lema 2.1.5 Una FBS es no degenerada si y solo si su matriz relativa a una base es invertible independientemente de la base.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ una base arbitraria de V. Para $v \in V$ tendremos que $b(v,w) = 0$ para todo $w \in V$ si y solo si $b(v, e_i) = 0$ para todo $i = 1, .., m$. Pero como (b_{ij}) es simétrica, tenemos que

$$b(v, e_i) = b\left(\sum_j v_j e_j, e_i\right) = \sum_j b_{ij} v_j.$$

De este modo, b es degenerada si y solo si existen $v_1, ..., v_m$ no todos nulos tales que $\sum_j b_{ij} v_j = 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Pero esto equivale a que las columnas de (b_{ij}) sean linealmente dependientes, lo cual se tiene si y solo si (b_{ij}) es singular. Así, b será no degenerada si y solo si (b_{ij}) es no singular. ■

Llegados a este punto, introducimos la noción de producto escalar.

Definición 2.1.6 Diremos que una FBS g sobre un espacio vectorial V es un *producto escalar* si es no degenerada.

Es habitual definir el producto escalar como una FBS definida positiva (que es un caso particular de las FBS no degeneradas), pero en geometría semi-Riemanniana se relaja la definición por las propiedades que se obtienen al hacerlo, las cuales surgirán más adelante.

Ejemplo 2.1.7 El caso más simple de producto escalar no definido es el que se obtiene si, trabajando con el producto escalar usual en $\mathbf{R}^m$, cambiamos el signo a una de sus componentes (digamos la primera por comodidad), de modo que para $v = (v_1, ..., v_m)$, $w = (w_1, ..., w_m) \in \mathbf{R}^m$ se tenga:

$$v \cdot w = -v_1 w_1 + \sum_{i=2}^{m} v_i w_i.$$

Definición 2.1.8 Diremos que $v, w \in V$ son *ortogonales*, $v \perp W$, si se tiene que $g(v, w) = 0$. Más aún, diremos que dos subconjuntos $A, B \subseteq V$ son *ortogonales* entre sí, $A \perp B$, si se tiene que $g(v_A, v_B) = 0$ para todos $v_A \in A$, $v_B \in B$.

Nótese que al haber relajado la noción de producto escalar, ahora surge la posibilidad de que el ángulo entre dos vectores ortogonales no sea recto, e incluso no esté bien definido, como en el caso que exponemos a continuación.

Consideremos el producto escalar definido en el ejemplo previo sobre $\mathbf{R}^3$ y trabajemos sobre la base habitual. Tendremos que $g(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = -1 + 1 = 0$, de modo que $(e_1 + e_2) \perp (e_1 + e_2)$. Sin embargo, hemos tomado el mismo vector dos veces, con lo que el ángulo es nulo, pero los vectores son ortogonales.

Definición 2.1.9 Se define el *ortogonal* de un subespacio vectorial W de V como:

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp W\}.$$

Hay que precisar que no tendría sentido llamar a $W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W, pues resulta evidente con el ejemplo visto que no siempre se tiene $W + W^{\perp} = V$.

Veamos a continuación dos propiedades esenciales del ortogonal.

Lema 2.1.10 Sea W subespacio de un espacio vectorial con producto escalar V. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $dimW + dimW^{\perp} = m = dimV$.
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Demostración.

1. Sea $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ una base de V tal que $\mathcal{B}_k = \{e_1, ..., e_k\}$ sea base de W. Dado $v \in V$ con $v \neq 0$, resulta que $v \in W^{\perp}$ si y solo si para todo $i = 1, ..., k$ se tiene

$$g(v, e_i) = g\left(\sum_{j=1}^{m} v_j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^{m} g_{ij} v_j = 0,$$

que es un sistema de k ecuaciones en m variables. Ahora bien, por la prueba del Lema 2.1.5, al ser g producto escalar resulta que las filas de (g_{ij}) son linealmente independientes, de modo que estamos ante un espacio de soluciones de dimensión $m - k$. Y por construcción, tal espacio es $W^{\perp}$, con lo que $dimW + dimW^{\perp} = k + (m-k) = m = dimV$.

2. Si $v \in W$, es trivial que $v \perp W^{\perp}$, pero entonces $v \in (W^{\perp})^{\perp}$, con $(W^{\perp})^{\perp} = \left\{v \in V \mid v \perp W^{\perp}\right\}$. Así, $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

Por otra parte, podemos escribir

$$dimW + dimW^{\perp} = m \quad dimW^{\perp} + dim(W^{\perp})^{\perp} = m\ ,$$

Lo que nos lleva a $dimW = dim(W^{\perp})^{\perp}$, y de este modo, $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

Queda así probado el lema. ■

Corolario 2.1.11 Si V es espacio vectorial con producto escalar, $V^{\perp} = 0$.

Nótese que, por abuso de lenguaje, escribiremos con frecuencia 0 en lugar de $\{0\}$.

Definición 2.1.12 Se dice que un subespacio vectorial $W \subseteq V$ es (no) degenerado si $g|_W$ es (no) degenerado.

Un ejemplo de subespacio degenerado se puede derivar del Ejemplo 2.1.7 si tomamos $W = \langle e_1 + e_2 \rangle$, pues para todos $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ se tiene

$$g(\alpha(e_1 + e_2), \beta(e_1 + e_2)) = -\alpha\beta + \alpha\beta = 0.$$

Para saber si un subespacio es no degenerado tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.1.13 Un subespacio W de un espacio vectorial con producto escalar V es no degenerado si y solo si $V = W \oplus W^{\perp}$.

Demostración. Por el lema anterior, y por el Teorema de la Dimensión del álgebra lineal tendremos que

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = dimW + dimW^{\perp} = dimV = m,$$

con lo que

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = m.$$

De este modo, se tiene que $W + W^{\perp} = V$ si y solo si $W \cap W^{\perp} = 0$, y así, $W \oplus W^{\perp} = V$ y $W \cap W^{\perp} = 0$ son equivalentes. Pero sabemos que $W \cap W^{\perp} = \{v \in W \mid v \perp W\}$, con lo que $W \cap W^{\perp} = 0$ equivale a la no degeneración de W. ■

Corolario 2.1.14 Como $(W^{\perp})^{\perp} = W$, entonces $W^{\perp}$ es no degenerado si y solo si W lo es.

Definición 2.1.15 Se define la *norma de un vector* v como $|v| = \sqrt{|g(v,v)|}$. Un vector es *unitario* si su norma es 1, lo que equivale a $g(v,v) = \pm 1$. Un conjunto de vectores ortogonales unitarios se dice *ortonormal*.

Nótese que todo conjunto ortonormal de la misma dimensión del espacio vectorial es base del espacio. De hecho, es interesante resaltar el siguiente resultado.

Lema 2.1.16 Todo espacio vectorial $V \neq 0$ tiene una base ortonormal.

Demostración. Como g es no degenerado por ser producto escalar, existe $v \in V$ tal que $g(v,v) \neq 0$, de modo que podemos tomar el vector unitario $e_1 = \frac{v}{|v|}$. Ahora bien, si consideramos $W = \langle v_1 \rangle$, tenemos un subespacio no degenerado de V, y por el Corolario 2.1.14, tenemos que $W^{\perp}$ también es no degenerado, con lo que existe $v' \in W^{\perp}$ tal que $g(v',v') \neq 0$, con lo que podremos tomar $e_2 = \frac{v'}{|v'|}$ y considerar a partir de ahora $W = \langle e_1, e_2 \rangle$, pues $e_1 \perp e_2$. Así, si iteramos este proceso llegaremos a $dimW = m = dimV$ y $dim(W^{\perp}) = 0$, de modo que se acaba teniendo $W = V$, con $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ base ortonormal por construcción. ■

Llegamos así a un concepto crucial en geometría semi-Riemanniana: la signatura.

Definición 2.1.17 La matriz del producto escalar g en una base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ viene dada por

$$g_{ij} = g(e_i, e_j) = \epsilon_j \delta_{ij},$$

donde $\epsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1$. Se dice *signatura* del producto escalar g al vector $(\epsilon_1, ..., \epsilon_m)$.

Exponemos a continuación dos resultados interesantes relacionados con la signatura.

Lema 2.1.18 Sea $\{e_1, ..., e_m\}$ una base ortonormal para V. Entonces para todo $v \in V$ se tiene

$$v = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(v, e_i) e_i.$$

Demostración. Notemos que para todo $j = 1, ..., m$ podemos escribir:

$$g\left(v - \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(v, e_i) e_i, e_j\right) = g(v, e_j) - \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(v, e_i) g(e_i, e_j) =$$

$$= g(v, e_j) - \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i^2 g(v, e_i) \delta_{ij} = 0.$$

De este modo, al ser g no degenerado, resulta que $v - \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(v, e_i) e_i = 0$, con lo que queda probado el resultado. ■

Lema 2.1.19 Para toda base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ de V, el número de -1 en la signatura $(\epsilon_1, ..., \epsilon_m)$ es el índice ν de V. Con frecuencia nos referiremos al índice de g como $\nu = indV$.

Demostración. Podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que los k primeros ϵ_i verifican $\epsilon_i = -1$. Así, si g es definido, tendremos que el resultado será trivial, pues si g es definido positivo, en la signatura sólo se tienen signos positivos; y si es definido negativo, sólo se tienen signos negativos.

En el caso de que g no sea definido, resulta obvio que g sí es definido negativo en el subespacio $S = \langle e_1, ...e_k \rangle$, de modo que $k \leq \nu$.

Para ver la otra desigualdad, consideremos $W \subseteq V$ un subespacio arbitrario donde g sea definido negativo, y definamos la proyección ortogonal sobre S como la aplicación lineal $\pi : W \to S$ dada por

$$\pi(w) = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i g(w, e_i) e_i = -\sum_{i=1}^{k} g(w, e_i) e_i.$$

De este modo, si probamos que π es inyectiva, obtendremos $dimW \leq dimS = k$, con lo que al elegirse W de forma arbitraria, resultaría $\nu \leq k$. Bastará así con ver que $ker\pi = 0$.

Dado $w \in W$, si $\pi(w) = 0$, podemos escribir

$$w = \sum_{i=k+1}^{m} g(w, e_i) e_i.$$

Pero como g es definido negativo en W, resulta que

$$0 \geq g(w, w) = g\left(\sum_{i=k+1}^{m} g(w, e_i) e_i, \sum_{j=k+1}^{m} g(w, e_j) e_j \right) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{m} \sum_{j=k+1}^{m} g(w, e_i) g(w, e_j) \delta_{ij} = \sum_{i=k+1}^{m} g(w, e_i)^2.$$

Así, $g(w, e_i) = 0$ para $i = k + 1, ..., m$, con lo que se tiene $w = 0$, luego $ker\pi = 0$. ■

2.2. Variedades semi-Riemannianas

Pasamos, al fin, a la introducción de las variedades semi-Riemannianas en este camino hacia la Teoría General de la Relatividad.

En 1928, Carl Friedrich Gauss provó su *Theorema Egregium* que, en resumidas cuentas, afirmaba que la curvatura de una superficie puede determinarse a través de la medida de distancias de caminos sobre dicha superficie.

Años después, en 1954, Bernhard Riemann, destacado alumno de Gauss, inició el desarrollo de una teoría de superficies en dimensiones superiores que acabaría convirtiéndose en lo que hoy conocemos como geometría Riemanniana.

Con la formalización matemática de la Teoría de la Relatividad General de Einstein, llegaría la necesidad de debilitar las propiedades del producto escalar, pasando este de ser definido positivo a ser no degenerado. Esto es lo que hemos hecho en la sección previa, y nos lleva finalmente a la geometría semi-Riemanniana.

Definición 2.2.1 Un *tensor métrico* g (o una *métrica*) sobre una variedad diferenciable M es un tensor $(0, 2)$ simétrico y no degenerado en M que tiene índice constante.

Así, $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ asigna a cada punto $p \in M$ un producto escalar g_p en T_pM, y el índice de g_p es siempre ν, independientemente del $p \in M$ tomado. Con frecuencia escribiremos g en lugar de g_p por abuso de notación.

Definición 2.2.2 Se define una *variedad semi-Riemanniana* como el par (M, g) constituido por una variedad diferenciable y una métrica sobre la misma.

Es preciso notar que habitualmente llamaremos M a la variedad semi-Riemanniana por simplicidad, aunque dos métricas diferentes puedan definir distintas variedades semi-Riemannianas a partir de una variedad diferenciable.

Definición 2.2.3 Se dice *índice* de una variedad semi-Riemanniana M^m al índice ν de su métrica g (que es el índice de todos los productos escalares g_p que se obtienen sobre M). Nótese que $\nu = 0, ..., m$. Si $\nu = 0$, se dice que M es una *variedad Riemanniana*; y si $\nu = 1$ y $m \geq 2$, que es una *variedad de Lorentz*.

Con frecuencia utilizaremos la notación alternativa para g, dada por $g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbf{R}$ para vectores tangentes (donde escribimos g en lugar de g_p por abuso de notación), y $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$ en el caso de campos vectoriales.

Consideremos ahora una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ de M. Las componentes del tensor métrico g en U vendrán dadas por:

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle,$$

con $i, j = 1, ..., m$. Así, para campos $X = \sum_i X^i \partial_i$, $Y = \sum_j Y^j \partial_j$, tendremos:

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle = \left\langle \sum_i X^i \partial_i, \sum_j Y^j \partial_j \right\rangle = \sum_{ij} X^i Y^j \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \sum_{ij} g_{ij} X^i Y^j.$$

Por otra parte, como g_p es no degenerado, para cada punto $p \in M$ resulta que la matriz $(g_{ij}(p))$ es invertible. Denotaremos $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, y al ser las matrices simétricas, $g_{ij} = g_{ji}$ y $g^{ij} = g^{ji}$.

Con todo, hay que notar que el tensor métrico puede expresarse en U según:

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Ejemplo 2.2.4 El espacio Euclídeo $\mathbf{R}^m$.

Si consideramos el producto escalar habitual en $\mathbf{R}^m$, tendremos que para dos vectores $v, w \in \mathbf{R}^m$

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{m} v^i w^i.$$

Pero recordemos que existe un isomorfismo lineal entre $\mathbf{R}^m$ y $T_p\mathbf{R}^m$ para todo $p \in \mathbf{R}^m$, llevando $v \in \mathbf{R}^m$ en $v_p = \sum_i v^i \partial_i$. Así, el producto escalar usual en $\mathbf{R}^m$ da lugar al tensor métrico en $\mathbf{R}^m$ dado por:

$$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum_{i=1}^{m} v^i w^i.$$

Ejemplo 2.2.5 El espacio semi-Euclídeo $\mathbf{R}^m_\nu$.

Este caso es análogo al anterior; solo que hay que cambiarle el signo a las primeras ν componentes, de modo que se tiene el tensor de índice ν dado por:

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{i=\nu+1}^{m} v^i w^i.$$

Hay que destacar que si $\nu = 0$ este ejemplo se reduce al caso anterior. Sin embargo, si $\nu = 1$ tenemos un *m-espacio de Minkowski*, y en el caso $m = 4$, tenemos el espacio-tiempo relativista usual, en el cual se hay tres dimensiones espaciales y una temporal, que es la que da lugar a que el índice no sea nulo.

En estos espacios podemos expresar el tensor métrico de forma más sencilla si tomamos

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i = 1, ..., \nu \\ 1 & \text{si} \quad i = \nu + 1, ..., m \end{cases},$$

de modo que se pueda escribir:

$$g = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i du^i \otimes du^i,$$

donde las u^i son las funciones coordenadas naturales en $\mathbf{R}^m$.

La importancia del índice de una variedad semi-Riemanniana se tiene por lo siguiente.

Definición 2.2.6 Dado un vector v tangente a M diremos que es:

1. *Espacial* si $\langle v, v \rangle > 0$ ó $v = 0$.

2. *Temporal* si $\langle v, v \rangle < 0$ y $v \neq 0$.

3. *Luminoso* o *nulo* si $\langle v, v \rangle = 0$.

La nomenclatura dada a los distintos tipos de vectores se deriva de la representación del Cono de luz (o Cono de Minkowski) en la Teoría de la Relatividad Especial, que resulta útil para tratar la idea de causalidad (para ver si dos procesos distintos que se dan lugar en dos puntos, iguales o no, del espacio-tiempo, pueden tener relación).

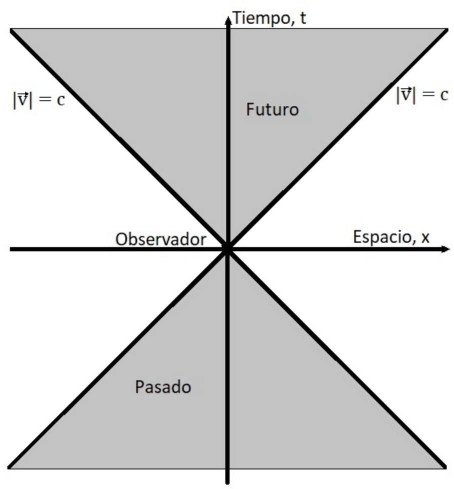

Figura 2.1: Cono de Minkowski.

En resumidas cuentas, esta representación surge al considerar al observador en el origen del espacio-tiempo, de modo que los vectores luminosos forman un cono cuyo vértice es precisamente el origen. Estos vectores caracterizan las direcciones en las que solo puede viajar la luz a velocidad c. Tal cono divide el espacio en dos zonas: la espacial, hacia la cual se mueve el observador; y la temporal, inaccesible para el observador (tendría que moverse a una velocidad $v > c$ para acceder a ella). El Principio de Causalidad establece que el observador solo puede percibir sucesos que se encuentren en la zona espacial del espacio-tiempo, pues en otro caso la luz que le llegaría del suceso que viese tendría que viajar con $v > c$, lo cual no es posible. Así, dos sucesos en el espacio de Minkowski solo pueden estar relacionados si para un suceso dado en el origen, el otro se halla en la zona espacial. Hay que notar que siempre podemos considerar uno de los sucesos en el origen y trabajar con coordenadas relativas a dicho suceso.

Así, el índice da el número de dimensiones temporales que se tienen en la variedad en cuestión.

Introduzcamos ahora la noción de subvariedad semi-Riemanniana.

Definición 2.2.7 Sean P subvariedad de una variedad semi-Riemanniana M con métrica g y $j : P \hookrightarrow M$ la inclusión. Tendremos que si el pullback $j^*(g)$ es un tensor métrico en P, entonces P es *subvariedad semi-Riemanniana de* M.

Nótese que la restricción de que el pullback de g sea un tensor métrico en P resulta imprescindible al poder degenerarse la métrica a través del pullback, de modo que dejaría de ser una métrica como tal.

Veamos como se obtienen entonces variedades semi-Riemannianas producto con el siguiente lema.

Lema 2.2.8 Sean M y N variedades semi-Riemannianas con métricas g_M y g_N. Consideremos las proyecciones $\pi : M \times N \to M$ y $\sigma : M \times N \to N$, y definamos $g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N)$. Entonces g es un tensor métrico en $M \times N$, con lo que $M \times N$ es una variedad semi-Riemanniana.

Demostración. Consideremos $v, w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, de modo que se tenga:

$$g(v, w) = g_M(d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(w)) + g_N(d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(w)).$$

Así, g es simétrico. Hay que ver ahora la no degeneración de g.

Supongamos que $g(v, w) = 0$ para todo $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$. Entonces, si $w \in T_{(p,q)}M$, se tiene que $d\sigma_{(p,q)}(w) = 0$, luego $g_N(d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(w)) = 0$, y como $g(v, w) = 0$, resulta que $g_M(d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(w)) = 0$. Ahora bien, como esto se tiene para todo $w \in T_{(p,q)}(M \times N)$, vemos que $d\pi_{(p,q)}(w)$ nos da todos los posibles vectores de T_pM, con lo que por la no degeneración de g_M ha de tenerse que $d\pi_{(p,q)}(v) = 0$, de modo que $v = 0$. Esto se puede hacer de forma análoga para $w \in T_{(p,q)}N$, obteniéndose que $d\sigma_{(p,q)}(v) = 0$ y, consecuentemente, que $v = 0$. Queda así probada la no degeneración de g. ■

Este resultado nos permite llegar a que para el espacio semi-Euclídeo $\mathbf{R}^m_\nu$:

$$\mathbf{R}^m_\nu = \mathbf{R}^\nu_\nu \times \mathbf{R}^{m-\nu}.$$

2.3. La conexión de Levi-Civita

Consideremos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. En esta sección se busca un nuevo campo $\nabla_X Y \in \mathcal{X}(M)$ cuyo valor en cada $p \in M$ indique la variación de Y en la dirección de X_p. Podemos definirlo de forma natural sobre $\mathbf{R}^m_\nu$ como sigue.

Definición 2.3.1 Sean $u^1, ..., u^m$ las coordenadas naturales sobre $\mathbf{R}^m_\nu$. Dados X e $Y = \sum_i Y^i \partial_i$ campos en $\mathbf{R}^m_\nu$, se define la *derivada covariante natural de* Y *respecto de* X como:

$$\nabla_X Y = \sum_i X(Y^i)\partial_i.$$

Sin embargo, nuestro interés reside en la extensión de esta noción a una variedad semi-Riemanniana M. Para ello, definimos el concepto de conexión a continuación.

Definición 2.3.2 Una *conexión* ∇ en una variedad semi-Riemanniana M es una aplicación $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ tal que:

1. $\nabla_X Y$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal en X:

   $$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y,$$

   para todos $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ y para todas $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

2. $\nabla_X Y$ es $\mathbf{R}$-lineal en Y:

   $$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2,$$

   para todos $a, b \in \mathbf{R}$, y para todos $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

3. Se tiene la regla del producto en el argumento:

   $$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$$

   para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.

Se dice que $\nabla_X Y$ es la *derivada covariante de* Y *respecto de* X *para la conexión* ∇.

Nótese que la propiedad (1) hace que $\nabla_X Y$ sea un tensor sobre X, pero por la propiedad (3) se tiene que no es un tensor sobre Y.

Definamos ahora un concepto esencial en lo que sigue.

Definición 2.3.3 Se dice *tensor de torsión* de una conexión ∇ sobre una variedad semi-Riemanniana M a la aplicación $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Se expone a continuación un resultado que es necesario para llegar a la conexión de Levi-Civita.

Proposición 2.3.4 Sean M una variedad semi-Riemanniana y $X \in \mathcal{X}(M)$. Definamos $X^* \in \mathcal{X}^*(M)$ la 1-forma dada por $X^*(Y) = \langle X, Y\rangle$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$. Entonces, la aplicación $X \to X^*$ es un isomorfismo $\mathcal{F}(M)$-lineal entre $\mathcal{X}(M)$ y $\mathcal{X}^*(M)$.

Demostración. Al ser la métrica $\mathcal{F}(M)$-lineal en sus dos componentes, resulta evidente que X^* es $\mathcal{F}(M)$-lineal, con lo que es una 1-forma, y también que la aplicación $X \to X^*$ también es $\mathcal{F}(M)$-lineal. Así, sólo hay que probar que la aplicación $X \to X^*$ es isomorfismo. Para ello bastará con ver que para toda $\theta \in \mathcal{X}^*(M)$ existe un único $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que $\theta(Y) = \langle X, Y\rangle$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$.

Para ver la unicidad bastará con probar que dados $X, X' \in \mathcal{X}(M)$, si $\langle X, Y\rangle = \langle X', Y\rangle$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$, entonces $X = X'$.

Nótese que $\langle X - X', Y\rangle = 0$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$, de modo que $\langle X_p - X'_p, Y_p\rangle = 0$ para todo $p \in M$ y para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$. Entonces, por la no degeneración de la métrica, $X_p = X'_p$ para todo $p \in M$. De este modo, $X = X'$, y queda probada la unicidad.

Veamos ahora la existencia. Bastará con probar que existe un campo X definido en una carta $(U, \varphi = (x^1, ..., x^m))$ de M tal que se cumple lo buscado. Localmente podemos escribir $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$. Consideremos entonces

$X = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\partial_j$. Se tiene que:

$$\langle X, \partial_k\rangle = \sum_{i,j} g^{ij}\theta_i\langle\partial_j, \partial_k\rangle = \sum_{i,j}\theta_i g^{ij} g_{jk} = \sum_i \theta_i\delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k),$$

de modo que por $\mathcal{F}(M)$-linealidad se tiene que $\theta(Y) = \langle X, Y\rangle$ para todo campo Y en U. ■

Pasamos ahora al estudio de uno de los resultados centrales de la geometría semi-Riemanniana: el *Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann.*

Teorema 2.3.5 (**Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann**) Dada una variedad semi-Riemanniana M, existe una única conexión tal que:

1. Es libre de torsión:
$$T(X, Y) = 0,$$
para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

2. Es compatible con la métrica:
$$X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$
para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

A ∇ se le llama *conexión de Levi-Civita de* M, y queda caracterizada por la *fórmula de Koszul*:

$$2\langle\nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle$$

$$-\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Demostración. Probemos primero la unicidad. Para ello, si consideramos campos arbitrarios $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, se tiene por (2) que:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle\nabla_Y Z, X\rangle +$$

$$+\langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle\nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle =$$

$$= \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, \nabla_X Y \nabla_Y X\rangle.$$

Ahora bien:

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_X Y - \nabla_X Y = 2\nabla_X Y - [X, Y],$$

lo que lleva a:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, 2\nabla_X Y - [X, Y]\rangle,$$

y despejando se obtiene:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle -$$

$$-\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle,$$

la fórmula de Koszul. Así, ver la unicidad de ∇ equivale a probar la unicidad de $\nabla_X Y$ en el caso que nos ocupa, pero en la proposición previa ya observamos que si $\langle X, Y\rangle = \langle X', Y\rangle$ para todo $Y \in \mathcal{X}(M)$, entonces $X = X'$. Así, se tiene la unicidad de ∇.

Estudiemos ahora la existencia. Para ello, fijemos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ arbitrarios y consideremos:

$$\theta(Z) = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle.$$

Al ser $\mathcal{F}(M)$-lineal, θ es una 1-forma, y por la proposición previa se tiene que existe un único campo, al que llamaremos $\nabla_X Y$, tal que $\theta(Z) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle$ para todo $Z \in \mathcal{X}(M)$. Ya tenemos ∇ caracterizada por la fórmula de Koszul. Probemos que ∇ es conexión de acuerdo con la Definición 2.3.2:

1. Veamos que es $\mathcal{F}(M)$-lineal sobre X. Es trivial que trabajando con la identidad de Koszul se obtiene que $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$ para todos $X_1, X_2, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Por otra parte, dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$, tendremos:

$$2\langle \nabla_{fX} Y, Z\rangle = fX\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, fX\rangle - Z\langle fX, Y\rangle -$$

$$-\langle fX, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, fX]\rangle + \langle Z, [fX, Y]\rangle =$$

$$= fX\langle Y, Z\rangle + (Yf)\langle Z, X\rangle + fY\langle Z, X\rangle - (Zf)\langle X, Y\rangle - fZ\langle X, Y\rangle -$$

$$-f\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, (Zf)X + f[Z, X]\rangle + \langle Z, -(Yf)X + f[X, Y]\rangle =$$

$$= 2\langle f\nabla_X Y, Z\rangle.$$

2. La **R**-linealidad en Y es trivial trabajando con la identidad de Koszul como en (1).

3. Veamos la regla del producto. Para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$2\langle \nabla_X fY, Z\rangle = X\langle fY, Z\rangle + fY\langle Z, X\rangle - Z\langle X, fY\rangle -$$

$$-\langle X, [fY, Z]\rangle + \langle fY, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, fY]\rangle =$$

$$= fX\langle Y, Z\rangle + (Xf)\langle Y, Z\rangle + fY\langle Z, X\rangle - fZ\langle X, Y\rangle - (Zf)\langle X, Y\rangle -$$

$$-\langle X, -(Zf)Y + f[Y, Z]\rangle + f\langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, (Xf)Y + f[X, Y]\rangle =$$

$$= 2\langle f\nabla_X Y + (Xf)Y, Z\rangle.$$

Tenemos así que ∇ es conexión. Veamos que es la de Levi-Civita. Para ello hemos de probar las propiedades (1) y (2) enunciadas en el teorema:

1. Probemos que ∇ es libre de torsión, $T(X, Y) = 0$, lo cual equivale a que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Así, dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$:

$$2\langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle =$$

$$= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle -$$

$$-Y\langle X, Z\rangle - X\langle Z, Y\rangle + Z\langle Y, X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle =$$

$$= 2\langle [X, Y], Z\rangle.$$

2. En cuanto a la compatibilidad de la métrica, para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + 2\langle Y, \nabla_X Z\rangle =$$

$$= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle +$$

$$+X\langle Z, Y\rangle + Z\langle Y, X\rangle - Y\langle X, Z\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle =$$

$$= 2X\langle Y, Z\rangle.$$

Queda así demostrado el teorema. ■

Introduzcamos ahora la derivada covariante y las formas de conexión, conceptos que serán imprescindibles en las páginas siguientes y en los que es crucial la comprensión de la conexión de Levi-Civita.

Definición 2.3.6 Sean $A \in \mathcal{T}_s^1(M)$ y $X \in \mathcal{X}(M)$. Se define la *derivada covariante de A en la dirección de X* como el tensor $\nabla_X A \in \mathcal{T}_s^1(M)$, dado por:

$$(\nabla_X A)(Y_1, ..., Y_s) = \nabla_X(A(Y_1, ..., Y_s)) -$$
$$- \sum_{i=1}^{s} A(Y_1, ..., Y_{i-1}, \nabla_X Y_i, Y_{i+1}, ..., Y_s).$$

Nótese que en la definición se trabaja con la identificación habitual de los tensores de tipo $(1, s)$, pero lo escrito también es válido para tensores de tipo $(0, s)$. Además, podemos definir el tensor $\nabla A \in \mathcal{T}_{s+1}^1(M)$ (y análogamente $\nabla A \in \mathcal{T}_{s+1}^0(M)$ para $A \in \mathcal{T}_s^0(M)$) según:

$$(\nabla A)(X, Y_1, ..., Y_s) = (\nabla_X A)(Y_1, ..., Y_s).$$

Para ver el carácter local de la derivada covariante basta con probar que $(\nabla_X A)_p(Y_1, ..., Y_s)$ depende únicamente de $(Y_i)_p$, con $i = 1, ..., s$. Para ello, bastará con probar que

$$(\nabla_X A)(Y_1, ..., fY_j, ..., Y_s) = f(\nabla_X A)(Y_1, ..., Y_s),$$

para toda $f \in \mathcal{F}(M)$.

Esto es sencillo, pues aplicando la definición previa y las propiedades de la conexión de Levi-Civita:

$$(\nabla_X A)(Y_1, ..., fY_j, ..., Y_s) = \nabla_X(A(Y_1, ..., fY_j, ..., Y_s)) -$$
$$- \sum_{i \neq j} fA(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_s) - A(Y_1, ..., \nabla_X(fY_j), ..., Y_s) =$$
$$= \nabla_X(fA(Y_1, ..., Y_s)) - f \sum_{i \neq j} A(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_s) -$$
$$-A(Y_1, ..., f\nabla_X Y_j + (Xf)Y_j, ..., Y_s) = (Xf)A(Y_1, ..., Y_s) +$$
$$+f\nabla_X(A(Y_1, ..., Y_s)) - f \sum_{i=1}^{s} A(Y_1, ..., \nabla_X Y_i, ..., Y_s) -$$
$$-(Xf)A(Y_1, ..., Y_s) = f(\nabla_X A)(Y_1, ..., Y_s).$$

2.4. El tensor de curvatura

En el estudio de la geometría de curvas y superficies surge de forma natural la noción de curvatura, pero en variedades no resulta tan trivial llegar a ella. Fue Riemann quién, gracias a la formulación del *Theorema Egregium* de Gauss, generalizó el concepto a variedades. Tal generalización se basa en lo que sigue: para las derivadas de Lie se tiene que $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$, con lo que si $[X,Y] = 0$, entonces $[L_X, L_Y] = 0$. Sin embargo, para ∇_X no ocurre esto, luego $\nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y] \neq 0$, y es esta diferencia lo que medirá la curvatura.

Lema 2.4.1 Sea M una variedad semi-Riemanniana con conexión de Levi-Civita ∇. El *tensor de curvatura*, dado por $R : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M)$, con

$$R_{XY}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

es un tensor (1,3) sobre M.

Demostración. Como $R : \mathcal{X}(M)^3 \to \mathcal{X}(M)$, de ser R $\mathcal{F}(M)$-multilineal, podremos verlo como un tensor (1,3). La $\mathcal{R}$-linealidad resulta trivial a partir de las propiedades de la conexión ∇. Por otra parte:

1. Los casos $R_{X,fY}Z = fR_{XY}Z$ y $R_{fX,Y}Z = fR_{XY}Z$ son análogos, con lo que veremos sólo uno de ellos:

$$R_{fX,Y}Z = [\nabla_{fX}, \nabla_Y]Z - \nabla_{[fX,Y]}Z = \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_{fX}Z -$$

$$-\nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}Z = f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - f\nabla_{[X,Y]}Z + (Yf)\nabla_X Z =$$

$$= f\nabla_X\nabla_Y Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + (Yf)\nabla_X Z = fR_{XY}Z.$$

2. En el caso $R_{XY}(fZ) = fR_{XY}Z$ se tiene:

$$R_{XY}(fZ) = \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ) =$$

$$= \nabla_X(Yf)Z + \nabla_X(f\nabla_Y Z) - \nabla_Y(Xf)Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) -$$

$$-([X,Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z = (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z +$$

$$+(Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z -$$

$$-(Yf)\nabla_X Z - f\nabla_X\nabla_Y Z - (XYf)Z + (YXf)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z =$$

$$= f([\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z) = fR_{XY}Z.$$

Queda así probado el carácter tensorial de R. ∎

En ocasiones se utilizará la notación $R(X,Y)Z = R_{XY}Z$.

Es preciso destacar que, de forma análoga a lo que ocurre con la métrica, al tensor de curvatura se le asocian operadores

$$\begin{array}{rccl} R_{vw}: & T_p(M) & \longrightarrow & T_p(M) \\ & u & \longmapsto & R_{vw}u, \end{array}$$

para todo $p \in M$ y para todos $v, w \in T_p(M)$. A estos operadores se les llama *operadores de curvatura*.

A continuación, se exponen algunas propiedades de la curvatura que serán de interés en lo que sigue.

Proposición 2.4.2 Dados $X, Y, Z, V, W \in \mathcal{X}(M)$, se verifican las propiedades:

1. Antisimetría en X e Y:

$$R_{XY}Z = -R_{YX}Z.$$

2. Primera identidad de Bianchi:

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0.$$

3. Segunda identidad de Bianchi:

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V) + (\nabla_Y R)(Z,X,V) + (\nabla_Z R)(X,Y,V) = 0.$$

4. El tensor curvatura es antiadjunto respecto de la métrica:

$$\langle R_{XY}V, W\rangle = -\langle R_{XY}W, V\rangle.$$

5. Simetría por pares:

$$\langle R_{XY}V, W\rangle = \langle R_{VW}X, Y\rangle.$$

Demostración. Empecemos destacando que, como tanto la derivada covariante ∇_X como los corchetes tienen carácter local, podemos tomar los campos básicos (las parciales), de modo que los corchetes se anulen para todo par de campos. Se tiene así:

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X,$$

y además, para la curvatura:

$$R_{XY}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z.$$

Pasemos a probar las propiedades enunciadas.

1. Por definición se tiene:

$$R_{XY}Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z = -[\nabla_Y, \nabla_X]Z - \nabla_{-[Y,X]}Z =$$

$$= -[\nabla_Y, \nabla_X]Z + \nabla_{[Y,X]}Z = -R_{YX}Z.$$

2. Para la primera identidad de Bianchi hacemos:

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X +$$

$$+\nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X +$$

$$+\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_X \nabla_Y Z = 0.$$

3. Los tres sumandos se desarrollan según:

$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) = \nabla_X(\nabla_Y \nabla_Z V - \nabla_Z \nabla_Y V) - R_{(\nabla_X Y)Z}V -$$

$$R_{Y(\nabla_X Z)}V - \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X V + \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X V.$$

$$(\nabla_Y R)(Z, X, V) = \nabla_Y(\nabla_Z \nabla_X V - \nabla_X \nabla_Z V) - R_{(\nabla_Y Z)X}V -$$

$$-R_{Z(\nabla_Y X)}V - \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y V + \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y V.$$

$$(\nabla_Z R)(X, Y, V) = \nabla_Z(\nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V) - R_{(\nabla_Z X)Y}V -$$

$$-R_{X(\nabla_Z Y)}V - \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z V + \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z V.$$

De este modo, si sumamos las tres igualdades obtenemos la segunda identidad de Bianchi.

4. Para ver que $\langle R_{XY}V, W\rangle = -\langle R_{XY}W, V\rangle$, por linealidad en la métrica y en el tensor de curvatura, bastará con probar que $\langle R_{XY}Z, Z\rangle = 0$, siendo $Z = V + W$. Así:

$$\langle R_{XY}Z, Z\rangle = \langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle =$$

$$= X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}XY\langle Z, Z\rangle - \frac{1}{2}YX\langle Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X, Y]\langle Z, Z\rangle = 0.$$

5. Por una parte, se tiene que

$$\langle R_{XY}V, W\rangle = -\langle R_{YX}V, W\rangle = \langle R_{XV}Y, W\rangle + \langle R_{VY}X, W\rangle,$$

$$\langle R_{XY}V, W\rangle = -\langle R_{XY}W, V\rangle = \langle R_{YW}X, V\rangle + \langle R_{WX}Y, V\rangle,$$

con lo que:

$$2\langle R_{XY}V, W\rangle = \langle R_{XV}Y, W\rangle + \langle R_{VY}X, W\rangle + \langle R_{YW}X, V\rangle + \langle R_{WX}Y, V\rangle.$$

Por otra parte:

$$\langle R_{VW}X, Y\rangle = -\langle R_{WV}X, Y\rangle = \langle R_{VX}W, Y\rangle + \langle R_{XW}V, Y\rangle,$$

$$\langle R_{VW}X, Y\rangle = -\langle R_{VW}Y, X\rangle = \langle R_{WY}V, X\rangle + \langle R_{YV}W, X\rangle,$$

de modo que:

$$2\langle R_{VW}X, Y\rangle = \langle R_{VX}W, Y\rangle + \langle R_{XW}V, Y\rangle + \langle R_{WY}V, X\rangle + \langle R_{YV}W, X\rangle =$$

$$= \langle R_{XV}Y, W\rangle + \langle R_{VY}X, W\rangle + \langle R_{YW}X, V\rangle + \langle R_{WX}Y, V\rangle = 2\langle R_{XY}V, W\rangle.$$

Hemos probado así todas las propiedades enunciadas. ■

Corolario 2.4.3 Se tienen las mismas propiedades para los operadores de curvatura, pues los vectores tangentes se pueden extender a campos vectoriales.

2.5. Curvatura seccional

Recordemos que al trabajar sobre superficies surgía la noción de curvatura de Gauss (o curvatura intrínseca). La generalización de la curvatura de Gauss a variedades semi-Riemannianas surge de la identificación de la Segunda Forma Fundamental con el tensor de curvatura, y la Primera Forma Fundamental con la función $Q : (T_pM)^2 \to \mathbf{R}$, dada por

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

Para precisar esto, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.5.1 Dado $p \in M$, se llama *plano tangente* de M en p a cualquier subespacio de dimensión 2 de T_pM. Denotaremos los planos tangentes por Π.

Definición 2.5.2 Un plano tangente Π se dice *no degenerado* si el producto escalar asociado a la métrica g de la variedad es no degenerado.

El siguiente resultado es trivial a partir del Lema 2.1.5.

Lema 2.5.3 Un plano tangente Π de una variedad diferenciable M es no degenerado si y sólo si $Q(v, w) \neq 0$ para toda base $\{v, w\}$ de Π.

Con todo lo visto, ya podemos definir la curvatura seccional.

Definición 2.5.4 Dado Π plano tangente no degenerado de M con base $\{v, w\}$, se define la *curvatura seccional de* Π como:

$$K_\Pi = \frac{\langle R_{vw}w, v\rangle}{Q(v, w)}.$$

Nótese que si v y w son ortonormales, entonces

$$K_\Pi = \frac{\langle R_{vw}w, v\rangle}{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle},$$

y si tomamos los vectores de una base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$, tendremos

$$K_{ij} = \epsilon_i\epsilon_j\langle R_{e_ie_j}e_j, e_i\rangle.$$

Lema 2.5.5 La curvatura seccional es independiente de la base de Π tomada.

Demostración. Si consideramos dos bases de Π dadas por $\{v, w\}$ y $\{v', w'\}$, tendremos que existen $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tales que

$$v = av' + bw' \ ; \ w = cv' + dw',$$

donde $ad - bc \neq 0$. De este modo, teniendo en cuenta que $R_{xx}z = 0$ y $\langle R_{xy}z, z\rangle = 0$ por las propiedades (2) y (3) de la Proposición 2.4.2 resulta que

$$\langle R_{vw}v, w\rangle = (ad - bc)^2 \langle R_{v'w'}v', w'\rangle,$$
$$Q(v, w) = (ad - bd)^2 Q(v', w'),$$

con lo que K_Π no depende de la elección de la base. ∎

Por último, introduzcamos un tipo de variedades muy particulares que surgen a partir de la curvatura seccional.

Definición 2.5.6 Se dice que M es un *espacio de curvatura constante* si K_Π es constante, es decir, si $K_\Pi = K'_\Pi$ para todos Π, Π' planos tangentes a M.

2.6. El tensor de Ricci

Pasamos así a la última sección de este capítulo, en la que introduciremos los conceptos de tensor de Ricci y curvatura escalar. Ambas nociones resultan cruciales en el estudio y entendimiento de las variedades de Einstein y, posteriormente, de la Teoría de la Relatividad General.

Comencemos estudiando la noción de contracción (o traza) de un tensor.

Definición 2.6.1 Sea $A \in \mathcal{T}^1_1(M)$, de modo que $A_p : T_pM \to T_pM$ para todo $p \in M$. Se define la *contracción* (o *traza*) de A_p como el escalar

$$CA_p = Tr(A_p) = \sum_i \epsilon_i \langle A_p e_i, e_i\rangle,$$

donde $\{e_1, ..., e_m\}$ es base ortonormal de T_pM, con $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Nótese que entonces, este mismo resultado se tiene localmente para campos vectoriales, pues podemos extender los vectores de la base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ para obtener un conjunto de campos ortonormales $\{E_1, ..., E_m\}$ tales que $(E_i)_p = e_i \in T_pM$ y $\langle E_i, E_j \rangle = \epsilon_i \delta_{ij}$ para todos $i, j = 1, ..., m$. A tal conjunto de campos lo llamaremos *referencia local ortonormal*. En este caso, la contracción de A viene dada por la función:

$$CA = Tr(A) = \sum_i \epsilon_i \langle AE_i, E_i \rangle.$$

Definición 2.6.2 Sea $A \in \mathcal{T}^1_s(M)$. Se define la *i-ésima contracción de A* como el tensor $C_iA \in \mathcal{T}^0_{s-1}(M)$ dado por

$$C_iA(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_s) = \sum_j \epsilon_j \langle A(X_1, ..., X_{i-1}, E_j, X_{i+1}, ..., X_s), E_j \rangle,$$

donde $\{E_1, ..., E_m\}$ es una referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

En el caso particular de los tensores covariantes, definiremos las contracciones como sigue.

Definición 2.6.3 Sean $A \in \mathcal{T}^0_s(M)$ e $i, j = 1, ..., m$ con $i \neq j$. Se define la *contracción ij-ésima de A* como el tensor $C_{ij}A \in \mathcal{T}^0_{s-2}(M)$ dado por

$$C_{ij}A(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ..., X_s) =$$

$$= \sum_k \epsilon_k A(X_1, ..., X_{i-1}, E_k, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, E_k, X_{j+1}, ..., X_s),$$

donde $\{E_1, ..., E_m\}$ es una referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

En el caso de que $A \in \mathcal{T}^0_2(M)$, sólo se tendrá la contracción 12, y también podremos llamarla traza, notando $C_{12}A = TrA$.

Veamos ahora las formas de conexión.

Definición 2.6.4 Se llama *formas de conexión* a las 1-formas ω_i^j que verifican

$$\nabla_X E_i = \sum_j \omega_i^j(X) E_j,$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$ y para todo $i = 1, ..., m$, con $\{E_1, ..., E_m\}$ referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

La siguiente propiedad resultará muy útil más adelante, especialmente en el siguiente capítulo.

Proposición 2.6.5 Las formas de conexión verifican $\epsilon_j \omega_i^j = -\epsilon_i \omega_j^i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Demostración. Consideremos $X \in \mathcal{X}(M)$ arbitrario:

$$0 = \nabla_X \langle E_i, E_j \rangle = X\langle E_i, E_j \rangle = \langle \nabla_X E_i, E_j \rangle + \langle E_i, \nabla_X E_j \rangle =$$

$$= \langle \sum_k \omega_i^k(X) E_k, E_j \rangle + \langle E_i, \sum_k \omega_j^k(X) E_k \rangle = \sum_k \omega_i^k(X)\epsilon_j \delta_{kj} + \sum_k \omega_j^k(X)\epsilon_i \delta_{ik} =$$

$$= \epsilon_j \omega_i^j(X) + \epsilon_i \omega_j^i(X).$$

Así, al ser X arbitrario, $\epsilon_j \omega_i^j = -\epsilon_i \omega_j^i$. ∎

Definimos a continuación una serie de operadores que serán de interés en lo que sigue.

Definición 2.6.6 Se dice *gradiente de una función* $f \in \mathcal{F}(M)$ al campo $gradf \in \mathcal{X}(M)$ verificando

$$\langle gradf, X \rangle = df(X) = Xf,$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Definición 2.6.7 Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, la *divergencia de* X viene dada por la función

$$divX = \sum_i \epsilon_i \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle,$$

donde $\{E_1, ..., E_m\}$ es una referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Definición 2.6.8 Dado $A \in \mathcal{T}_2^0(M)$ simétrico, se define la *divergencia de A* como la 1-forma
$$(divA)(X) = \sum_i \epsilon_i (\nabla_{E_i} A)(X, E_i),$$
donde $\{E_1, ..., E_m\}$ es una referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Veamos un resultado que es de suma importancia en el siguiente capítulo, pero no probaremos por ir más allá de los objetivos de este escrito, pues solamente lo usaremos como herramienta técnica.

Teorema 2.6.9 (Teorema de Gauss-Stokes) Sean (M, g) una variedad semi-Riemanniana compacta y orientada con o sin borde, y ν el campo vectorial normal unitario a lo largo de ∂M (si ∂M es no vacío), con la orientación inducida por la de ∂M. Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ arbitrario. Entonces

$$\int_M div(X) dV_M = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dV_{\partial M},$$

y en particular, el lado izquierdo de la igualdad se anula si ∂M es vacío o si X se anula en todo ∂M.

Podemos definir, llegados a este punto, el tensor de Ricci y la curvatura seccional.

Definición 2.6.10 Se define el *tensor de Ricci* como la primera contracción del tensor de curvatura, $Ric = C_1 R \in \mathcal{T}_2^0(M)$. De este modo se tiene

$$Ric(X, Y) = C_1 R_{ZX} Y = \sum_i \epsilon_i \langle R_{E_i X} Y, E_i\rangle,$$

donde $\{E_1, ..., E_m\}$ es una referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Definición 2.6.11 La *curvatura escalar* se define como la contracción 12 del tensor de Ricci, $S = C_{12}Ric \in \mathcal{F}(M)$, de modo que

$$S = \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \langle R_{E_i E_j} E_j, E_i \rangle,$$

donde $\{E_1, ..., E_m\}$ es una referencia local ortonormal con $\langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}\epsilon_i$ para todos $i, j = 1, ..., m$.

Nótese que si evaluamos la curvatura escalar en un punto $p \in M$ en el que la referencia local ortonormal tomada antes sea válida, considerando $(E_i)_p = e_i \in T_pM$ para todo $i = 1, ..., m$, tendremos

$$S(p) = \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \langle R_{e_i e_j} e_j, e_i \rangle = \sum_j \epsilon_j Ric(e_j, e_j) = \sum_{i \neq j} K_{ij},$$

donde K_{ij} es la curvatura seccional del plano tangente Π_{ij} generado por e_i y e_j.

Se deduce así que $Ric(e_j, e_j) = \sum_{i \neq j} \epsilon_j K_{ij}$. Nótese que esto puede extenderse a campos si definimos la curvatura seccional sobre ellos.

Veamos un resultado que nos será útil en el siguiente capítulo.

Lema 2.6.12 Dados $A \in \mathcal{T}_s^1(M)$ y $X \in \mathcal{X}(M)$, se tiene la conmutatividad dada por $C_i(\nabla_X A) = \nabla_X(C_i A)$.

Demostración. Realizaremos la prueba para tensores de tipo $(1, 1)$ por ser más clara la notación. Para tensores $(1, s)$ con $s > 1$ bastará con contraer fijando los argumentos de las componentes que no se contraigan.

Se tiene que $CA = \sum_i \epsilon_i \langle AE_i, E_i \rangle$, con lo que:

$$\nabla_X(CA) = \sum_i \epsilon_i \left[\langle \nabla_X(AE_i), E_i \rangle + \langle AE_i, \nabla_X E_i \rangle \right].$$

Por otra parte:

$$C(\nabla_X A) = \sum_i \epsilon_i \langle (\nabla_X A)E_i, E_i \rangle = \sum_i \epsilon_i \left[\langle \nabla_X(AE_i), E_i \rangle - \langle A(\nabla_X E_i), E_i \rangle \right].$$

De este modo, para probar el resultado bastará con comprobar:

$$\sum_i \epsilon_i \left[\langle AE_i, \nabla_X E_i\rangle + \langle A(\nabla_X E_i), E_i\rangle\right] = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\omega_j^i = -\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}\omega_i^j = -\epsilon_i\epsilon_j\omega_i^j$, se tiene:

$$\sum_i \epsilon_i\langle AE_i, \nabla_X E_i\rangle + \sum_i \epsilon_i\langle A(\nabla_X E_i), E_i\rangle =$$

$$= \sum_i \epsilon_i\langle AE_i, \sum_j \omega_i^j(X)E_j\rangle + \sum_i \epsilon_i\langle A(\sum_j \omega_i^j(X)E_j), E_i\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i\omega_i^j(X)\langle AE_i, E_j\rangle + \sum_{i,j} \epsilon_j\omega_j^i(X)\langle AE_i, E_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i\omega_i^j(X)\langle AE_i, E_j\rangle - \sum_{i,j} \epsilon_j^2\epsilon_i\omega_i^j(X)\langle AE_i, E_j\rangle = 0.$$

Queda así probado el resultado. ■

Capítulo 3

Variedades de Einstein

En este capítulo llegamos, finalmente, al estudio de las variedades de Einstein. Estudiaremos algunas de sus propiedades y, a partir de ellas, construiremos la ecuación del campo gravitatorio, explicando además cómo el resultado matemático encaja con la realidad física, llegando así a la que es la base de la Teoría de la Relatividad General. Para ello, recordemos las palabras con las que empezó este escrito:

Si existe una ecuación análoga a la de Poisson en Relatividad General, ésta habrá de ser una ecuación tensorial para el tensor de potencial gravitatorio $g_{\mu\nu}$, en cuyo lado derecho ha de tenerse el tensor de energía de la materia. En el lado izquierdo de la ecuación necesitamos un tensor diferencial derivado de $g_{\mu\nu}$. El objetivo es determinar este tensor de forma precisa. Está competamente determinado por las tres condiciones siguientes:

1. *El tensor en cuestión no debe contener derivadas de $g_{\mu\nu}$ que sean de orden superior a 2.*

2. *El tensor debe depender linealmente de las derivadas segundas.*

3. *La divergencia del tensor debe ser idénticamente nula.*

Albert Einstein, Princeton, 1921.

Ya estamos en disposición de afrontar este problema: buscar el tensor descrito por Einstein para la ecuación del campo gravitatorio. Será en esa búsqueda en la que desarrollemos nuestro estudio de las variedades de Einstein.

Este capítulo está basado en el capítulo 12 de [2] y en los capítulos 6 y 8 de [3].

3.1. Variedades de Einstein

Comencemos por ver qué son las variedades de Einstein.

Definición 3.1.1 Dada una variedad semi-Riemanniana (M, g), se dice que M es una *variedad de Einstein* (y g es una *métrica de Einstein*) si existe $\lambda \in \mathcal{F}(M)$ tal que:

$$Ric = \lambda g.$$

Nótese que al contraer la expresión anterior se obtiene:

$$S = \lambda m.$$

Se tiene entonces que el ejemplo trivial de variedad de Einstein se da para $\lambda = 0$, teniéndose así $Ric = 0$. A estas variedades se les llama *variedades llanas de Ricci*.

Veamos ahora una propiedad interesante de las variedades de Einstein.

Teorema 3.1.2 Sea (M, g) una variedad de Einstein conexa de dimensión $m \geq 3$ con $Ric = \lambda g$. Entonces λ es constante. Más aún, si $m = 3$, (M, g) es un espacio de curvatura constante.

Demostración. Notemos que $div(Ric) = div(\frac{S}{2}g)$, y como M es variedad de Einstein, $S = \lambda m$. De este modo

$$div(Ric) = div(\lambda g) = div\left(\frac{S}{2}g\right) = div\left(\frac{\lambda m}{2}g\right) = \frac{m}{2}div(\lambda g),$$

pero si consideramos $X \in \mathcal{X}(M)$ arbitrario, se tiene

$$div(\lambda g)(X) = \sum_i \epsilon_i(\nabla_{E_i}(\lambda g))(X, E_i) = \sum_i \epsilon_i E_i(\lambda)\langle X, E_i\rangle = X(\lambda),$$

con lo que
$$X(\lambda) = \frac{m}{2} X(\lambda),$$
para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

De esta manera, o bien $m = 2$, o $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Como tenemos por hipótesis que $m \geq 3$, estamos en el caso con $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Así, al tenerse esto para todo campo en la variedad, resulta que λ es localmente constante, y como M es conexa, tendremos que es constante en toda M.

En el caso particular dado por $m = 3$, si consideramos una referencia ortonormal E_1, E_2, E_3, tendremos:

$$\begin{aligned} Ric(E_1, E_1) &= \epsilon_1 K_{12} + \epsilon_1 K_{13}, \\ Ric(E_2, E_2) &= \epsilon_2 K_{12} + \epsilon_2 K_{23}, \\ Ric(E_3, E_3) &= \epsilon_3 K_{13} + \epsilon_3 K_{23}. \end{aligned}$$

Por otra parte, por ser $Ric = \lambda g$:

$$Ric(E_1, E_1) = \epsilon_1 \lambda; \quad Ric(E_2, E_2) = \epsilon_2 \lambda; \quad Ric(E_3, E_3) = \epsilon_3 \lambda.$$

Nos queda así el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda & = & K_{12} & + & K_{13} & & \\ \lambda & = & K_{12} & & & + & K_{23} \\ \lambda & = & & & K_{13} & + & K_{23}. \end{array}$$

La solución se halla fácilmente, y viene dada por $K_{12} = K_{13} = K_{23} = \frac{\lambda}{2}$, y como la referencia ortonormal es arbitraria, se deduce que K_Π es constante, con lo que M es un espacio de curvatura constante. ■

Hemos de destacar que los espacios de curvatura constante también son espacios de Einstein, pero no lo probaremos aquí por precisarse un estudio en mayor profundidad de la noción de curvatura seccional. Este resultado puede encontrarse desarrollado en [3].

Introduzcamos ahora un lema que nos permite llegar al que se conoce como tensor de gravitación de Einstein. En él, demostramos diversas propiedades de simetría de la derivada covariante del tensor de curvatura, con lo que es de esperar que se parezcan a las propiedades de simetría de dicho tensor.

Lema 3.1.3 Dados $X, Y, Z, V, W \in \mathcal{X}(M)$, se verifican las siguientes propiedades:

1. $(\nabla_X R)(Y, Z, V) = -(\nabla_X R)(Y, Z, V)$.

2. $\langle(\nabla_X R)(Y, Z, V), W\rangle = -\langle(\nabla_X R)(Z, Y, W), V\rangle$.

3. $\langle(\nabla_X R)(Y, Z, V), W\rangle = \langle(\nabla_X R)(V, W, Y), Z\rangle$.

4. $Tr(\nabla_X Ric) = 2(div(Ric))(X)$.

Demostración. Probaremos todas las propiedades a partir de la definición de derivada covariante, las propiedades del tensor de curvatura y la conmutatividad de contracciones y derivadas covariantes.

1.
$$(\nabla_X R)(Y, Z, V) = \nabla_X(R_{YZ}V) - R_{(\nabla_X Y)Z}V - R_{Y(\nabla_X Z)}V - R_{YZ}(\nabla_X V) =$$
$$= -\nabla_X(R_{ZY}V) + R_{Z(\nabla_X Y)}V + R_{(\nabla_X Z)Y}V + R_{ZY}(\nabla_X V) =$$
$$= -(\nabla_X R)(Z, Y, V).$$

2.
$$\langle(\nabla_X R)(Y, Z, V), W\rangle = \langle\nabla_X(R_{YZ}V), W\rangle - \langle R_{(\nabla_X Y)Z}V, W\rangle -$$
$$-\langle R_{Y(\nabla_X Z)}V, W\rangle - \langle R_{YZ}(\nabla_X V), W\rangle = X\langle R_{YZ}V, W\rangle - \langle R_{YZ}V, \nabla_X W\rangle +$$
$$+\langle R_{(\nabla_X Y)Z}W, V\rangle + \langle R_{Y(\nabla_X Z)}W, V\rangle + \langle R_{YZ}W, \nabla_X V\rangle = X\langle R_{YZ}V, W\rangle +$$
$$+\langle R_{YZ}(\nabla_X W), V\rangle + \langle R_{(\nabla_X Y)Z}W, V\rangle + \langle R_{Y(\nabla_X Z)}W, V\rangle - X\langle R_{YZ}V, W\rangle -$$
$$-\langle\nabla_X(R_{YZ}W), V\rangle = -\langle(\nabla_X R)(Y, Z, W), V\rangle.$$

3.

$$\langle(\nabla_X R)(Y,Z,V),W\rangle = \langle\nabla_X(R_{YZ}V),W\rangle - \langle R_{(\nabla_X Y)Z}V,W\rangle -$$
$$-\langle R_{Y(\nabla_X Z)}V,W\rangle - \langle R_{YZ}(\nabla_X V),W\rangle = X\langle R_{YZ}V,W\rangle - \langle R_{YZ}V,\nabla_X W\rangle -$$
$$-\langle R_{VW}(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle R_{VW}Y,Z\rangle - \langle R_{(\nabla_X V)W}Y,Z\rangle = X\langle R_{VW}Y,Z\rangle -$$
$$-\langle R_{V(\nabla_X W)}Y,Z\rangle - \langle R_{VW}(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle R_{VW}Y,\nabla_X Z\rangle - \langle R_{(\nabla_X V)W}Y,Z\rangle =$$
$$= \langle\nabla_X(R_{VW}Y),Z\rangle + \langle R_{VW}Y,\nabla_X Z\rangle - \langle R_{(\nabla_X V)W}Y,Z\rangle - \langle R_{V(\nabla_X W)}Y,Z\rangle -$$
$$-\langle R_{VW}(\nabla_X Y),Z\rangle - \langle R_{VW}Y,\nabla_X Z\rangle = \langle(\nabla_X R)(V,W,Y),Z\rangle.$$

4. Recordemos que $Tr(\nabla_X Ric) = Tr(C_1(\nabla_X R))$. Ahora bien:

$$Tr((C_1(\nabla_X R))(Y,Z)) = Tr\left(\sum_i \epsilon_i\langle(\nabla_X R)(E_i,Y,Z),E_i\rangle\right) =$$
$$= \sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon_j\langle(\nabla_X R)(E_i,E_j,E_j),E_i\rangle =$$
$$= -\sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon_j[\langle(\nabla_{E_i}R)(E_j,X,E_j),E_i\rangle + \langle(\nabla_{E_j}R)(X,E_i,E_j),E_i\rangle] =$$
$$= \sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon_j[\langle(\nabla_{E_i}R)(E_j,X,E_i),E_j\rangle + \langle(\nabla_{E_j}R)(E_i,X,E_j),E_i\rangle] =$$
$$= 2\sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon_j\langle(\nabla_{E_i}R)(E_j,X,E_i),E_j\rangle = 2\sum_i \epsilon_i(C_1(\nabla_{E_i}R))(X,E_i) =$$
$$= 2\sum_i \epsilon_i(\nabla_{E_i}(C_1 R))(X,E_i) = 2\sum_i \epsilon_i(\nabla_{E_i}Ric)(X,E_i) =$$
$$= 2(div(Ric))(X).$$

Quedan así probadas todas las propiedades. ■

Llegados a este punto, definimos el tensor de Einstein, que es el tensor que buscamos para la parte geométrica de la ecuación del campo gravitatorio. Veremos también ahora una de las propiedades que se le exigen: tener divergencia nula.

Definición 3.1.4 Se llama *tensor de gravitación de Einstein* a $G \in \mathcal{T}_2^0(M)$, dado por:

$$G = Ric - \frac{S}{2}g.$$

Teorema 3.1.5 La divergencia del tensor de gravitación es nula, es decir:

$$div(Ric) = div\left(\frac{S}{2}g\right).$$

Demostración. Por el Lema 3.1.2, sabemos que $(div(Ric))(X) = \frac{1}{2}Tr(\nabla_X Ric)$. Además, se tiene que $Tr(\nabla_X Ric) = \nabla_X(Tr(Ric)) = \nabla_X S$, pues por una parte

$$Ric(Y,Z) = \sum_i \epsilon_i \langle R_{E_iY}Z, E_i\rangle,$$

lo que lleva a

$$(\nabla_X Ric)(Y,Z) = \sum_i \epsilon_i[\langle \nabla_X(E_{E_iY}Z), E_i\rangle - \langle R_{E_i(\nabla_X Y)Z,E_i}\rangle - \langle R_{E_iY}(\nabla_X Z), E_i\rangle],$$

de modo que nos queda

$$Tr(\nabla_X Ric) =$$
$$= \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j[\langle \nabla_X(R_{E_iE_j}E_j), E_i\rangle - \langle R_{E_i(\nabla_X E_j)}E_j, E_i\rangle - \langle R_{E_iE_j}(\nabla_X E_j), E_i\rangle].$$

Por otra parte

$$Tr(Ric(Y,Z)) = \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \langle R_{E_iE_j}E_j, E_i = S\rangle,$$

con lo que

$$\nabla_X(Tr(Ric)) = \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j[\langle \nabla_X(R_{E_iE_j}E_j), E_i\rangle - \langle R_{(\nabla_X E_i)E_j}E_j, E_i\rangle -$$
$$-\langle R_{E_i(\nabla_X E_j)}E_j, E_i\rangle - \langle R_{E_iE_j}(\nabla_X E_j), E_i\rangle - \langle R_{E_iE_j}E_j, \nabla_X E_i\rangle].$$

De esta manera, si $\langle R_{(\nabla_X E_i)E_j}E_j, E_i\rangle = \langle R_{E_iE_j}E_j, \nabla_X E_i\rangle$, quedará visto que $Tr(\nabla_X Ric) = \nabla_X(Tr(Ric)) = \nabla_X S$, pero resulta que:

$$\langle R_{(\nabla_X E_i)E_j}E_j, E_i\rangle = \langle R_{E_jE_i}(\nabla_X E_i), E_j\rangle = \langle R_{E_iE_j}E_j, \nabla_X E_i\rangle.$$

De esta forma, $div(Ric) = \frac{1}{2}\nabla_X S$.

Por último, se tiene:

$$div(\frac{S}{2}g)(X) = \frac{1}{2}div(Sg)(X) = \frac{1}{2}\sum_i \epsilon_i(\nabla_{E_i}(Sg))(X, E_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \epsilon_i[S(\nabla_{E_i}g)(X, E_i) + (\nabla_{E_i}S)g(X, E_i)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \epsilon_i[S(E_i\langle X, E_i\rangle - \langle\nabla_{E_i}X, E_i\rangle - \langle X, \nabla_{E_i}E_i\rangle) + (\nabla_{E_i}S)\langle X, E_i\rangle] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i \epsilon_i(\nabla_{E_i}S)\langle X, E_i\rangle = \frac{1}{2}(\nabla_X S).$$

Queda así probado que $div(Ric) = div(\frac{S}{2}g)$. ∎

El tensor de gravitación de Einstein surgirá en la siguiente sección de forma natural cuando estudiemos el funcional de Hilbert-Einstein, y veremos que este es el tensor que Einstein buscaba para la ecuación del campo gravitatorio.

3.2. El funcional de Hilbert-Einstein

En la concepción newtoniana de la gravedad se asume que es la masa de un cuerpo lo que hace que éste actúe como fuente de gravedad o se vea afectado por la gravedad de otro cuerpo (ambas cosas implican lo mismo, pues la gravedad se considera como fuerza de interacción).

Sin embargo, existen hechos experimentales que no son consistentes con este resultado. Un ejemplo de ello es que los haces de luz procedentes de estrellas lejanas se curvan por la atracción gravitatoria generada por cuerpos celestes cercanos a su trayectoria, pero los fotones que los componen no tienen masa.

Albert Einstein propuso que lo que en realidad ocurre es que la gravedad no surge por el hecho de que un cuerpo tenga masa, sino por la energía-momento del cuerpo (recordemos la famosa relación entre masa en reposo y energía, dada por el propio Einstein, $E = mc^2$). Además, afirmó que la gravedad debía estar en tal caso asociada a la curvatura del espacio-tiempo.

La cuestión es entonces, ¿existen ecuaciones que relacionen la gravedad (curvatura) y la materia?

La respuesta, como es predecible llegados a este punto, es que sí. A través de las Ecuaciones de Einstein se obtiene una expresión que relaciona el denominado tensor de energía-momento (asociado a la materia) con la curvatura.

En lo que sigue llegaremos a dicha expresión de forma geométrica, trabajando con el Principio de Mínima Acción sobre el denominado funcional de Hilbert-Einstein (que se define a continuación), buscando la métrica para la cual la curvatura (gravedad) sea lo más uniforme posible sobre la variedad en la que se trabaja (el espacio-tiempo).

Definición 3.2.1 Sea (M, g) una variedad semi-Riemanniana y consideremos el elemento de volumen en dicha variedad $dV_g = \sqrt{|det g_{ij}|}dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^m$. Se definen, para g variable, los funcionales:

1. *Volumen de M*:
$$Vol(M) = \int_M dV_g.$$

2. *Curvatura escalar total de g*, o *funcional de Hilbert-Einstein*:
$$S(g) = \int_M S_g dV_g.$$

En lo que sigue, nuestro objetivo será resolver el problema variacional dado por $\delta S = 0$ (Principio de Mínima Acción).

Definición 3.2.2 Sea (M,g) una variedad semi-Riemanniana. Se define la *variación de la métrica en la dirección de* h como

$$g_t = g + th,$$

donde $t \in \mathbf{R}$ y $h \in \mathcal{T}_2^0(M)$ es simétrico.

Nótese que al ser g una métrica no degenerada, tendremos que g_t también lo será para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dado ϵ suficientemente pequeño.

Notemos que la derivada de $S(g_t)$ respecto de t puede verse como la derivada direccional de S en la dirección de h en el punto g, y así el problema variacional dado por $\delta S(g) = 0$ equivale a estudiar el problema

$$\frac{d}{dt} S(g_t)|_{t=0} = 0,$$

para todo $h \in \mathcal{T}_2^0(M)$.

Se podría decir en tal caso que S es estacionario para la métrica g. Asumiendo este hecho, podemos trabajar para hallar el gradiente del funcional S.

Para ver esto, primero demostraremos dos lemas que resultarán cruciales.

Lema 3.2.3 Sea dV_t el elemento de volumen de $g_t = g + th$ con $dV_0 = dV_g$. Entonces:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (dV_t) = \frac{1}{2} Tr_g h \; dV_g.$$

Demostración. Ya hemos visto que en coordenadas locales se tiene:

$$dV_g = \sqrt{|detg_{ij}|} dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^m.$$

Esto lleva a:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (dV_t) = \lim_{t \to 0} \frac{dV_t - dV_g}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\sqrt{|Det(g_{ij}^{(t)})|} - \sqrt{|Det(g_{ij})|} \right) dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^m =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|Det(g_{ij}^{(t)})|'}{2\sqrt{|Det(g_{ij}^{(t)})|}} dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^m \approxeq$$

$$\approxeq \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}(|Det(g_{ij}^{(t)})| - |Det(g_{ij})|)\frac{1}{\sqrt{|Det(g_{ij})|}} dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^m =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}(|Det(g_{ij}^{(t)})||Det(g^{ij})| - 1)\sqrt{|Det(g_{ij})|} dx^1 \otimes \cdots \otimes dx^m =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t}\left(\left|Det\left(\sum_j g_{ij}^{(t)} g^{jk}\right)\right| - 1\right) dV_g.$$

Ahora bien, como

$$\sum_j g_{ij}^{(t)} g^{jk} = \sum_j (g_{ij} + th_{ij})g^{jk} = \delta_{ik} + t\sum_j h_{ij}g^{jk},$$

resulta que

$$Det\left(\sum_j g_{ij}^{(t)} g^{jk}\right) = Det\left(\delta_{ik} + t\sum_j h_{ij}g^{jk}\right) =$$

$$= 1 + t\ Tr_g h + t^2(\cdots) + ... + t^m(\cdots),$$

con lo que nos queda:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(dV_t) = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(1+t\ Tr_g h+t^2(\cdots)+...+t^m(\cdots)-1)dV_g = \frac{1}{2}Tr_g h\ dV_g.$$

Queda así probado el lema. ■

De este modo, tendremos que dV_t será estacionario si y sólo si $Tr_g h = 0$. Estudiemos ahora el otro lema.

Lema 3.2.4 Sean ∇^t la conexión de Levi-Civita de $g_t = g+th$ y R^t el tensor de curvatura de g_t, con $\nabla^0 = \nabla$ y $R^0 = R$. Dados $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $g\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nabla^t_X Y, Z\right) = \frac{1}{2}\left[(\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(Z,X) + (\nabla_Z h)(X,Y)\right].$
2. La aplicación $\nabla'_h(X,Y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nabla^t_X Y$ es un tensor de tipo $(1,2)$ simétrico en X e Y.
3. $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(R^t_{XY}Z) = (\nabla_X \nabla'_h)(Y,Z) - (\nabla_Y \nabla'_h)(X,Z).$

Demostración.

1. Por la fórmula de Koszul:

$$2g_t(\nabla^t_X Y, Z) = X(g_t(Y,Z)) + Y(g_t(Z,X)) - Z(g_t(X,Y)) -$$

$$-g_t(X,[Y,Z]) + g_t(Y,[Z,X]) + g_t(Z,[X,Y]).$$

Ahora bien, $g_t = g + th$, con lo que $th = g_t - g$, de modo que:

$$g_t(\nabla^t_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) = \frac{t}{2}[X(h(Y,Z)) + Y(h(Z,X)) - Z(h(X,Y)) -$$

$$-h(X,\nabla_Y Z) + h(X,\nabla_Z Y) + h(Y,\nabla_Z X) - h(Y,\nabla_X Z) +$$

$$+h(Z,\nabla_X Y) - h(Z,\nabla_Y X)] = \frac{t}{2}[X(h(Y,Z)) - h(Y,\nabla_X Z) + h(Z,\nabla_X Y) +$$

$$+Y(h(Z,X)) - h(Z,\nabla_Y X) - h(X,\nabla_Y Z) - Z(h(X,Y)) + h(X,\nabla_Z Y) +$$

$$+h(Y,\nabla_Z X)] = th(Z,\nabla_X Y) + \frac{t}{2}[X(h(Y,Z)) - h(Y,\nabla_X Z) - h(Z,\nabla_X Y) +$$

$$+Y(h(Z,X)) - h(Z,\nabla_Y X) - h(X,\nabla_Y Z) -$$

$$-Z(h(X,Y)) + h(X,\nabla_Z Y) + h(Y,\nabla_Z X)].$$

Y como sabemos que $(\nabla_X h)(Y,Z) = X(h(Y,Z)) - h(Y,\nabla_X Z) - h(Z,\nabla_X Y)$, se tiene:

$$g_t(\nabla^t_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) =$$

$$= th(Z,\nabla_X Y) + \frac{t}{2}[(\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(Z,X) - (\nabla_Z h)(X,Y)].$$

Además, $g_t(\nabla^t_X Y, Z) = g(\nabla^t_X Y, Z) + th(\nabla^t_X Y, Z)$, y así:

$$g(\nabla^t_X Y - \nabla_X Y, Z) = \frac{t}{2}[(\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(Z,X) - (\nabla_Z)(X,Y)].$$

Podemos concluir entonces:

$$g\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \nabla^t_X Y, Z\right) = \lim_{t\to 0} g\left(\frac{\nabla^t_X Y - \nabla_X Y}{t}, Z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\nabla_X h)(Y,Z) + (\nabla_Y h)(Z,X) + (\nabla_Z h)(X,Y)\right].$$

2. El carácter tensorial de la expresión desarrollada en la prueba de la propiedad anterior nos lleva a que ∇'_h sea un tensor de tipo $(1,2)$. En cuanto a la simetría, se tiene trivialmente de la misma expresión.

3. Por la definición del tensor de curvatura tenemos:

$$R^t_{XY}Z - R_{XY}Z = \nabla^t_X\nabla^t_Y Z - \nabla^t_Y\nabla^t_X Z - \nabla^t_{[X,Y]}Z -$$

$$-\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z = \nabla^t_X(\nabla^t_Y - \nabla_Y)Z - \nabla^t_Y(\nabla^t_X - \nabla_X)Z +$$

$$+(\nabla^t_X - \nabla_X)\nabla_Y Z - (\nabla^t_Y - \nabla_Y)\nabla_X Z - (\nabla^t_{[X,Y]} - \nabla_{[X,Y]})Z.$$

Tomando ahora límite:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(R^t_{XY}Z) = \nabla_X(\nabla'_h(Y,Z)) - \nabla_Y(\nabla'_h(X,Z)) + \nabla'_h(X,\nabla_Y Z) -$$

$$-\nabla'_h(Y,\nabla_X Z) - \nabla'_h([X,Y],Z) = \nabla_X(\nabla'_h(Y,Z)) - \nabla'_h(Y,\nabla_X Z) -$$

$$-\nabla'_h(\nabla_X Y, Z) - \nabla_Y(\nabla'_h(X,Z)) + \nabla'_h(X,\nabla_Y, Z) - \nabla'_h(\nabla_Y X, Z) =$$

$$= (\nabla_X\nabla'_h)(Y,Z) - (\nabla_Y\nabla'_h)(X,Z).$$

Queda así probado el lema. ■

Llegados a este punto, estamos en disposición de determinar el "gradiente" de $S(g)$, entendiéndolo como la derivada direccional de $S(g_t)$ en la dirección de h, con h arbitrario.

Teorema 3.2.5 (**Variación del funcional de Hilbert-Einstein.**)
Sea (M,g) una variedad semi-Riemanniana compacta y orientable, y sea $g_t = g + th$ la variación de la métrica g. Si denotamos la curvatura escalar de g_t por S_t, entonces:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} S(g_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_M S_t dV_t = \left\langle \frac{S}{2}g - Ric, h\right\rangle_g,$$

para todo h.

Demostración. Hay que notar que hemos escrito, para dos tensores simétricos de tipo $(0,2)$

$$\langle A, B\rangle_g = \int_M \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j A(E_i, E_j) B(E_j, E_i) dV_g,$$

con $\{E_1, ..., E_m\}$ referencia local ortonormal. En cada punto de M esta expresión es simplemente la traza de AB expresada en esta referencia.

Para expresar S_t como traza, tomaremos $\{E_1^t, ..., E_m^t\}$, referencia ortonormal con respecto a g_t. De este modo:

$$S_t = \sum_j \epsilon_j Ric^t(E_j^t, E_j^t) = \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j g_t(R^t_{E_i^t E_j^t} E_j^t, E_i^t).$$

Hemos de notar dos consideraciones relevantes:

1. $g_t(E_i^t, E_j^t) = \epsilon_i \delta_{ij}$ lleva a

$$\frac{dg_t}{dt}(E_i^t, E_j^t) + g_t\left(\frac{dE_i^t}{dt}, E_j^t\right) + g_t\left(E_i^t, \frac{dE_j^t}{dt}\right) = 0,$$

   con lo que teniendo en cuenta que $g_t = g + th$, para $t = 0$ tendremos:

$$\sum_{i,j} h(E_i, E_j) = -2 \sum_{i,j} g_t\left(\left.\frac{dE_i^t}{dt}\right|_{t=0}, E_j\right).$$

2. Teniendo en cuenta que $\nabla_X E_j = \sum_i \omega_j^i(X) E_i$, para todo tensor simétrico A se tiene

$$\sum_j A(\nabla_X E_j, E_j) = \sum_{i,j} \omega_j^i(X) A(E_i, E_j) = 0,$$

   pues A es simétrico en i y j, y ω_j^i es antisimétrico.

A partir de esto, y del lema previo, obtenemos

$$\left.\frac{dS_t}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\left[\sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j g_t(R^t_{E_i^t E_j^t} E_j^t, E_i^t)\right] =$$

$$= \sum_{i,j} \left[h(R_{E_iE_j}E_j, E_i) + g\left(\left.\frac{dR^t}{dt}\right|_{t=0} (E_i, E_j)E_j, E_i \right) + \right.$$

$$+g\left(R\left(\left.\frac{dE_i^t}{dt}\right|_{t=0}, E_j \right) E_j, E_i \right) + g\left(R\left(E_i, \left.\frac{dE_j^t}{dt}\right|_{t=0} \right) E_j, E_i \right) +$$

$$\left. +g\left(R_{E_iE_j} \left.\frac{dE_j^t}{dt}\right|_{t=0}, E_i \right) + g\left(R_{E_iE_j}E_j, \left.\frac{dE_i^t}{dt}\right|_{t=0} \right) \right] =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \left[h(R_{E_iE_j}E_j, E_i) + 2g\left(R_{E_iE_j}E_j, \left.\frac{dE_i^t}{dt}\right|_{t=0} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i,j} \left[g((\nabla_{E_i}\nabla'_h)(E_j, E_j), E_i) - g((\nabla_{E_j}\nabla'_h)(E_i, E_j), E_i) \right] +$$

$$+2\sum_j \epsilon_j Ric\left(\left.\frac{dE_j^t}{dt}\right|_{t=0}, E_j \right) =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j \left[g((\nabla_{E_i}\nabla'_h)(E_j, E_j), E_i) - g((\nabla_{E_j}\nabla'_h)(E_i, E_j), E_i) \right] +$$

$$+2\sum_{j,k} \epsilon_j\epsilon_k Ric(E_k, E_j) g\left(\left.\frac{dE_j^t}{dt}\right|_{t=0}, E_k \right) =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j [g(\nabla_{E_i}(\nabla'_h(E_j, E_j)), E_i) - 2g((\nabla'_h(\nabla_{E_i}E_j, E_j)), E_i) -$$

$$-g((\nabla_{E_j}\nabla'_h)(E_i, E_j), E_i)] - \sum_{j,k} \epsilon_j\epsilon_k Ric(E_k, E_j) h(E_j, E_k) =$$

$$= \sum_j div(\nabla'_h(E_j, E_j)) - \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j g((\nabla_{E_j}\nabla'_h)(E_i, E_j), E_i) -$$

$$- \sum_{j,k} \epsilon_j\epsilon_k Ric(E_k, E_j) h(E_j, E_k),$$

donde hemos utilizado:

$$Ric\left(\left.\frac{dE_j^t}{dt}\right|_{t=0}, E_j \right) = \sum_i \epsilon_i g\left(R\left(E_j, \left.\frac{dE_j}{dt}\right|_{t=0} \right) E_j, E_i \right) =$$

$$= \sum_i \epsilon_i g\left(R_{E_jE_i}E_i, \left.\frac{dE_j}{dt}\right|_{t=0} E_j, E_i \right) =$$

$$= \sum_{i,k,l} \epsilon_i \epsilon_k \epsilon_l g(R_{E_j E_i} E_i, E_k) g \left(\left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{t=0}, E_l \right) g(E_k, E_l) =$$

$$= \sum_{i,k,l} \epsilon_i \epsilon_k^2 \epsilon_l \delta_{kl} g(R_{E_j E_i} E_i, E_k) g \left(\left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{t=0}, E_l \right) =$$

$$= \sum_{i,k} \epsilon_i \epsilon_k g(R_{E_i E_j} E_k, E_i) g \left(\left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{t=0}, E_k \right) =$$

$$= \sum_{k} \epsilon_k Ric(E_j, E_k) g \left(\left. \frac{dE_j}{dt} \right|_{t=0}, E_k \right).$$

Hay que notar que el segundo término de la expresión obtenida también es una divergencia, en este caso, del campo vectorial $(C\nabla'_h)^{\#}$, que está asociado al tensor $C\nabla'_h$ a través de la relación dada por

$$g((C\nabla'_h)^{\#}, X) = (C\nabla'_h)(X),$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Nótese que $(C\nabla'_h)(X) = \sum_i \epsilon_i g(\nabla'_h(E_i, X), E_i)$. Tenemos

$$\sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j \nabla_{E_j} g(\nabla'_h(E_i, E_j), E_i) =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j [g(\nabla_{E_j}(\nabla'_h(E_i, E_j)), E_i) + g(\nabla'_h(E_i, E_j), \nabla_{E_j} E_i)] =$$

$$= \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j [g((\nabla_{E:j} \nabla'_h)(E_i, E_j), E_i) + g(\nabla'_h(\nabla_{E_j} E_i, E_j), E_i) +$$

$$+ g(\nabla'_h(E_i, \nabla_{E_j} E_j), E_i) + g(\nabla'_h(E_i, E_j), \nabla_{E_j} E_i)],$$

de modo que, aplicando lo que sabemos sobre formas de conexión:

$$\sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j g((\nabla_{E_j} \nabla'_h)(E_i, E_j), E_i) = \sum_j \epsilon_j \nabla_{E_j} \sum_i \epsilon_i g(\nabla'_h(E_i, E_j), E_i) -$$

$$- \sum_{i,j} \epsilon_i \epsilon_j [g(\nabla'_h(\nabla_{E_j} E_i, E_j), E_i) + g(\nabla'_h(E_i, \nabla_{E_j} E_j), E_i) +$$

$$+g(\nabla'_h(E_i,E_j),\nabla_{E_j}E_i)] = \sum_j \epsilon_j[\nabla_{E_j}((C\nabla'_h)(E_j)) - (C\nabla'_h)(\nabla_{E_j}E_j)]-$$

$$-\sum_{i,j}\epsilon_i\epsilon_j[g(\nabla'_h(\nabla_{E_j}E_i,E_j),E_i) + g(\nabla'_h(E_i,E_j),\nabla_{E_j}E_i)] =$$

$$= \sum_j \epsilon_j[\nabla_{E_j}g((C\nabla'_h)^{\#},E_j) - g((C\nabla'_h)^{\#},\nabla_{E_j}E_i)]-$$

$$-\sum_{i,j,k}\epsilon_i\epsilon_j[g(\nabla'_h(\omega_i^k(E_j)E_k,E_j),E_i) + g(\nabla'_h(E_i,E_j),\omega_i^k(E_j)E_k)] =$$

$$= \sum_j \epsilon_j g(\nabla_{E_j}(C\nabla'_h)^{\#},E_j) - \sum_{i,j,k}\epsilon_j[\epsilon_i\omega_i^k(E_j)g(\nabla'_h(E_k,E_j),E_i)+$$

$$+\epsilon_k\omega_k^i(E_j)g(\nabla'_h(E_k,E_j),E_i)] = div(C\nabla'_h)^{\#}-$$

$$-\sum_{i,j,k}\epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k[\epsilon_i^2\epsilon_k\omega_i^k(E_j) + \epsilon_i\epsilon_k^2\omega_k^i(E_j)]g(\nabla'_h(E_k,E_j),E_i) =$$

$$= div(C\nabla'_h)^{\#} - \sum_{i,j,k}\epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k[\epsilon_k\omega_i^k(E_j) + \epsilon_i\omega_k^i(E_j)]g(\nabla'_h(E_k,E_j),E_i) =$$

$$= div(C\nabla'_h)^{\#}.$$

Nos queda así:

$$\int_M \left.\frac{dS_t}{dt}\right|_{t=0} dV = \int_M \left[\sum_j \epsilon_j div(\nabla'_h(E_j,E_j)) - div(C\nabla'_h)^{\#} - \right.$$

$$\left. -\sum_{j,k}\epsilon_j\epsilon_k Ric(E_k,E_j)h(E_j,E_k)\right] dV.$$

Ahora bien, aplicando el teorema de Gauss-Stokes, se anulan los dos primeros términos de la igualdad, lo que nos lleva a:

$$\int_M \left.\frac{dS_t}{dt}\right|_{t=0} dV = -\int_M \sum_{j,k}\epsilon_j\epsilon_k Ric(E_k,E_j)h(E_j,E_k).$$

Todo lo visto resulta de este modo en:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\int_M S_t dV_t = \int_M \left.\frac{dS_t}{dt}\right|_{t=0} dV + \int_M S\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(dV_t) =$$

$$= \int_M \left[\frac{S}{2} Tr_g h - \sum_{j,k} \epsilon_j \epsilon_k Ric(E_k, E_j) h(E_j, E_k) \right] =$$

$$= \int_M \sum_{j,k} \epsilon_j \epsilon_k \left[\frac{S}{2} g(E_k, E_j) - Ric(E_k, E_j) \right] h(E_j, E_k) dV =$$

$$= \left\langle \frac{S}{2} g - Ric, h \right\rangle_g .$$

Así, el teorema queda demostrado. ■

Hay que notar que lo mismo se obtiene si M es compacto con ∂M no vacío, siempre que $h = 0$ en un entorno de ∂M.

También ha de destacarse que el funcional S podría haberse considerado para variedades no compactas, lo que es de gran relevancia en la Teoría de la Relatividad. En tal caso hay que considerar $S(g)$ como integral impropia y $h = 0$ (de modo que $g_t = g$) fuera de cierto compacto. Así, al aplicar el teorema de Gauss-Stokes los términos que incluyen divergencias se anulan también en este caso, obteniéndose el mismo resultado.

Es muy importante observar que al obtener

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} S(g_t) = \left\langle \frac{S}{2} g - Ric, h \right\rangle_g ,$$

para todo h definido como hemos visto, tendremos que $\delta S(g) = 0$ si y sólo si:

$$\left\langle \frac{S}{2} g - Ric, h \right\rangle_g = 0.$$

Nuestro objetivo pasa a ser ahora averiguar en qué situaciones se tiene tal resultado.

Hay que observar también que hemos obtenido el tensor de gravitación, $G = Ric - \frac{S}{2} g$, como el "gradiente"del funcional de Hilbert-Einstein.

Tendremos así que la métrica del espacio-tiempo para la cual la curvatura será lo mas uniforme posible será aquella para la que se satisfaga la ecuación previa. Nuestro objetivo es ahora determinar tal métrica.

Con lo que hemos visto se puede probar que, para $m = 2$, $\frac{S}{2}g - Ric = 0$, con lo que el funcional $S(g)$ es localmente constante. Sin embargo, el universo que habitamos no es una variedad de dimensión 2, sino al menos una de dimensión 4 (espacio-tiempo), de modo que hemos de trabajar en dimensiones superiores.

En tales dimensiones ($m \geq 3$), la situación es muy diferente, pues el funcional de Hilbert-Einstein rara vez es constante. En lugar de esto, Si $S(g)$ es estacionario ($\delta S(g) = 0$), se obtienen situaciones que no son triviales.

De esta forma, nuestro propósito ahora será averiguar los espacios en los que habremos de trabajar para resolver el problema de la gravedad planteado por Einstein y dar con las ecuaciones del campo gravitatorio. Podremos decir así, cuando acabemos esta sección, que habitamos una variedad de Einstein.

Nótese que consideraremos que el espacio-tiempo que habitamos tiene volumen estacionario frente a variaciones de la métrica como la estudiada.

Todo surge del siguiente corolario.

Corolario 3.2.6 Sea M una variedad semi-Riemanniana compacta de dimensión $m \geq 3$, y sea g la métrica de M. Considerando la variación $g_t = g + th$, donde $h \in \mathcal{T}_2^0(M)$ es simétrico y arbitrario tendremos:

1. $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} S(g_t) = 0$ para todo h si y sólo si $Ric_g = 0$.

2. $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} S(g_t) = 0$ para todo h con la condición $Vol(M_t) = \int_M dV_t = cte$ si y sólo si (M, g) es una variedad de Einstein.

Demostración.

1. Estudiamos la condición

$$\left\langle \frac{S}{2}g - Ric, h \right\rangle_g = 0,$$

para todo h.

Por la no degeneración de $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$, esto equivale a que el tensor de gravitación se anule:

$$G = \frac{S}{2}g - Ric = 0.$$

De aquí, al tomar trazas, se obtiene:

$$\frac{S}{2}n - S = 0,$$

con lo que $S = 0$, pues $n \geq 3$.

Así, tenemos que $Ric_g = 0$.

2. Por la regla de los multiplicadores de Lagrange, hemos de investigar la independencia lineal de los gradientes de S y de Vol. Notemos que:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Vol(g_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_M dV_t = \int_M \frac{1}{2} Tr_g h \; dV_g =$$

$$= \frac{1}{2}\int_M \sum_{i,j} \epsilon_i\epsilon_j g(E_i,E_j)h(E_i,E_j)dV_g = \frac{1}{2}\langle g,h\rangle_g.$$

Así, tendremos que $\left\langle \frac{S}{2}g - Ric, h\right\rangle_g = 0$ para todo h con $\langle g,h\rangle_g = 0$ si y sólo si $\frac{S}{2}g - Ric$ y g son linealmente independientes como tensores, lo cual equivale a que $Ric = \lambda g$ para cierta $\lambda \in \mathcal{F}(M)$. Así, se tiene lo pedido si y sólo si g es métrica de Einstein, es decir, si y sólo si (M,g) es variedad de Einstein.

Queda así probado el corolario. ■

Nótese que, al igual que cuando estudiamos la variación del funcional de Hilbert-Einstein, podríamos haber trabajado en variedades no compactas, obteniendo el mismo resultado.

Llegamos de esta forma a que $\delta S(g) = 0$ con $Vol(M_t) = cte$ si y sólo si tenemos que M es variedad de Einstein.

3.3. La ecuación del campo gravitatorio

Llegados a este punto, estamos en disposición de escribir la ecuación que rige la gravedad. Así, la relevancia física del tensor de gravitación surge de su aplicación en la ecuación del campo, pues aparece de forma natural como "gradiente"del funcional de Hilbert-Einstein y verifica las condiciones que impuso sobre dicho término de la ecuación.

La condición sobre la divergencia del tensor de gravitación la hemos probado anteriormente. En cuanto a las condiciones que hacen referencia a las derivadas del tensor métrico, hay que notar que las componentes del tensor de curvatura pueden expresarse a partir de los símbolos de Christoffel (que se tienen a partir de las derivadas de los coeficientes métricos) y sus derivadas, y como el tensor G se obtiene a partir de g y contracciones del tensor de curvatura, se verifican las propiedades exigidas.

La ecuación del campo gravitatorio para una variedad de Einstein (M, g) queda, de este modo

$$Ric - \frac{S}{2} g = T,$$

donde T es el tensor de energía-momento, que ha de verificar $div(T) = 0$, lo que nos dará las leyes del movimiento de la materia producida por el tensor T.

A menudo la ecuación se escribe con una constante multiplicativa 8π que acompaña a T, pero nosotros la obviamos por simplicidad.

Una forma de interpretar la ecuación de la gravedad es viendo g como variable y T como un valor dado. Así, en el vacío, al no haber materia, se tiene $T = 0$, lo que nos lleva a:

$$Ric - \frac{S}{2} g = 0,$$

y como estamos en un espacio de Einstein $(Ric = \lambda g)$, se tiene que:

$$\lambda = \frac{S}{2}.$$

Esto implica, por una parte, $S = 2\lambda$; y por otra, $S = \lambda m$ (contrayendo $Ric = \lambda g$, como se indicó al inicio del capítulo). Así, como sabemos que en el espacio-tiempo usual se tiene dimensión $m = 4$, se deduce que $\lambda = S = 0$, de modo que se tiene que $Ric = 0$.

Estas son las llamadas *variedades especiales de Einstein*, que son variedades llanas de Ricci. Un ejemplo de ellas es el *espacio de Lorentz-Minkowski*, que tiene curvatura nula (es llano), y por ende, $Ric = 0$. Este espacio constituye el modelo fundamental de la Teoría Especial de la Relatividad.

Bibliografía

[1] A. Quintero, J. Camacho, A. Gutiérrez, C. J. Ruiz-Henestrosa. *Variedades Diferenciables*. Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2019.

[2] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*. Academic Press, San Diego, 1983.

[3] W. Kühnel. *Diferential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds*. American Mathematical Society, Providence, 2015.

[4] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, New Jersey, 1999.