El teorema de Hartman-Grobman

Adrián Hidalgo Plaza

El teorema de Hartman-Grobman

Adrián Hidalgo Plaza

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por

Antonio Suárez Fernández

Índice general

English Abstract

The stability theory of differential equations studies variations in the solutions of Cauchy Problems under small perturbations of initial conditions.

The objective of this document is to study a classic result about of stability of differential equations. The Hartman-Grobman Theorem. We give a proof of the theorem for autonomous differential equation.

The theorem states that the behavior of a dynamical system in a domain near a hyperbolic equilibrium point is qualitatively the same as the behavior of its linearization near this equilibrium point, where hyperbolicity means that no eigenvalue of the linearization has real part equal to zero.

It is a important result because through the theorem, the stability of many autonomous systems is characterized for the stability of the simpler linearization of the systems.

1 Introducción.

En este capítulo vamos a ilustrar la finalidad de este trabajo fin de grado, y también vamos a describir a grandes rasgos todos los puntos que conforman dicho documento.

La finalidad del documento no es otra que enunciar y probar un resultado acerca de la estabilidad (en el sentido de Liapunov) de los sistemas diferenciales: el Teorema de Hartman-Grobman.

El Teorema de Hartman-Grobman establece que, si estamos ante un sistema diferencial autónomo de la forma

$$y' = f(y)$$

donde $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \; N \geq 1, \; N \in \mathbb{Z}, \; f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, e $y_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto crítico para dicho sistema diferencial, cumpliendo que el jacobiano de f evaluado en el punto y_0 (denotado $Df(y_0)$) tiene todos sus autovalores con parte real distinta de cero, entonces se tiene que existe un entorno de y_0, pongámosle U, y un entorno de $0, \; V$, donde los sistemas diferenciales

$$y' = f(y),$$

$$y' = Df(y_0)y.$$

ambos restringidos a U y V respectivamente, son topológicamente conjugados.

A grandes rasgos, que ambos sistemas restringidos a U y V respectivamente, sean topólogicamente conjugados quiere decir que existe un homeomorfismo h entre U y V tal que h "lleva" soluciones del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(y), & f : U \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ y(t_0) = z, & \text{donde } \; t_0 \in \mathbb{R}, \;\; z \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.1}$$

a soluciones del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = Df(y_0)y, \quad Df(y_0) : V \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ y(t_0) = h(z). \end{cases} \tag{1.2}$$

Esto es, si denotamos $\varphi(t; t_0, z)$, $\psi(t; t_0, h(z))$ como las soluciones maximales de (1.1) y (1.2) respectivamente, entonces h lleva soluciones en el sentido de que se tiene que el intervalo maximal de ambas soluciones φ, ψ coincide, y, además, si denotamos por $I(t_0, z)$ a dicho intervalo maximal, se tiene también :

$$h(\varphi(t; t_0, z)) = \psi(t; t_0, h(z)), \ \ \forall t \in I(t_0, z).$$

Por ello, el segundo capítulo del documento : "2. Resultados Previos de Ecuaciones Diferenciales." lo vamos a dedicar en parte a repasar definiciones y resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales, como lo son por ejemplo formalizar lo que llamamos problema de Cauchy, o el conocido Teorema de Picard. Y en la otra parte a repasar también definiciones y resultados básicos acerca de la teoría de estabilidad (en el sentido de Liapunov) de los sistemas diferenciales ordinarios. Por ejemplo, definiremos formalmente la noción de equilibrio, equilibrio estable, equilibrio uniformemente estable, equilibrio atractivo, equilibrio uniformemente atractivo, equilibrio asintóticamente estable y equilibrio uniformemente asintóticamente estable. Veremos que muchos de estos conceptos son equivalentes cuando tratamos con un sistema diferencial autónomo. También caracterizaremos estos conceptos cuando estemos tratando con un sistema diferencial lineal de coeficientes constantes. Nótese que es lo oportuno, ya que con el Teorema de Hartman-Grobman, lo que pretendemos es "llevarnos" soluciones de un sistema diferencial autónomo no lineal, a soluciones del sistema diferencial autónomo lineal

$$y' = Df(y_0)y.$$

Por otro lado, nos podríamos preguntar : ¿Qué tiene que ver la estabilidad con el Teorema de Hartman-Grobman?. Pues bien, expliquémoslo. En cierto modo, el Teorema de Hartman-Grobman lo podemos entender como un resultado superior al conocido Teorema de Primera Aproximación o Principio de Linealización que enunciaremos y probaremos en el punto "4. El Teorema de Primera Aproximación o Principio de Linealización." del documento. A groso modo, el Teorema de Primera Aproximación dice que, considerando de nuevo un sistema diferencial autónomo no lineal de la forma

$$y' = f(y)$$

(donde f habría de ser C^1 en su dominio de definición), entonces se tendría que, bajo ciertas condiciones, si 0 es un equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema lineal

$$y' = Df(y_0)y,$$

entonces y_0 sería un equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema diferencial

$$y' = f(y).$$

O, si en cambio existiera un autovalor de $Df(y_0)$ con parte real estrictamente positiva, entonces y_0 sería inestable.

Esto proporcionaría una gran ventaja a la hora de estudiar la establidad de y_0 en $y' = f(y),$ ya que, bajo ciertas condiciones (que se expondrán formalmente en el punto 4. del documento), podremos caracterizarla a partir del signo de la parte real de los autovalores del jacobiano $Df(y_0)$.

Estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio y_0 se resume en estudiar como actúan las soluciones del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = z. \end{cases}$$

que comienzan "cerca" del equilibrio y_0. La definición de equilibrio no es más que y_0 satisfasga $f(y_0) = 0,$ y, por tanto, $\varphi_0(t) = y_0$ sería solución del problema de Cauchy anterior. Nótese que no estamos especificando para qué valores de t está definida φ_0. Nos encargaremos de formalizarlo y no dejar pasar ningún detalle por alto a lo largo del documento.

Continuando, estudiar la estabilidad de y_0 a groso modo consiste en conocer como actúan las soluciones que parten cerca de y_0, (es decir, con z tal que la distancia entre z e y_0 es pequeña). En este sentido, podemos entender que el Teorema de Primera Aproximación trata de estudiar la estabilidad de y_0 a través de la aproximación lineal de $y' = f(y),$ esta es, $y' = Df(y_0)y$.

Ahora bien, el Teorema de Hartman-Grobman nos proporciona un paso más. Ya que, bajo ciertas condiciones, establecemos que $y' = f(y)$ e $y' = Df(y_0)$ son topológicamente conjugados. Es un resultado más avanzado que el Principio de Linealización debido a que, además de proporcionarnos poder estudiar la estabilidad de y_0 en $y' = f(y)$ en función de $y' = Df(y_0)y,$ el Teorema de Hartman-Grobman nos proporciona también entornos de y_0 y 0 donde podemos conocer como actúa una solución de $y' = f(y)$ "cercana" a y_0 mediante su imagen a través de la función h que llamaremos conjugación topológica.

Detallemos un poco más esta parte porque es realmente interesante y es el objetivo principal de este trabajo. Como mencionamos al principio de la introducción, que ambos sistemas sean topologicamente conjugados en entornos U y V básicamente significa que

$$h(\varphi(t; t_0, z)) = \psi(t; t_0, h(z))$$

donde φ y ψ son soluciones de los problemas de Cauchy (1.1) y (1.2) respectivamente. h es un homeomorfismo, es decir, es biyectiva, continua, y con inversa continua. Gracias a ello podemos conocer cómo actúa $\varphi(t; t_0, z)$ cuando z se encuentra cerca de y_0 en función de cómo actúa $\psi(t; t_0, h(z))$ cerca del 0, ya que, por ser h un homeomorfismo, nos asegura que $\psi(t; t_0, h(z))$ va a partir cerca de 0 (esto es, que la distancia entre $\psi(t_0; t_0, h(z))$ y 0 va a ser pequeña si la distancia entre z y y_0 lo es). Recalcar que por las propiedades de h, se tiene que $h(y_0) = 0$.

Continuemos echándole un vistazo al documento antes de adentrarnos en él. El punto "3. La forma canónica real de Jordan." se antoja imprescindible, ya que las hipótesis tanto del Teorema de Primera Aproximación como del Teorema de Hartman-Grobman se hacen sobre los autovalores del jacobiano $Df(y_0)$. Esta sección consitirá pues en desarrollar una serie de resultados pertenecientes al algebra lineal en los que nos apoyaremos para probar el Principio de Linealización y el Teorema de Hartman-Grobman.

En el capítulo "4.El Teorema de Primera Aproximación o Principio de Linealización" nos encargaremos de enunciar y probar el resultado.

Este teorema expone que, si consideramos de nuevo el sistema diferencial

$$y' = f(y),$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, con Ω abierto, $f \in C^1(\Omega)$ entonces :

1. Si $Df(y_0)$ tiene todos sus autovalores con parte real estrictamente negativa, entonces y_0 es un equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable.
2. Si existe un autovalor de $Df(y_0)$ con parte real estrictamente positiva, entonces y_0 es un equilibrio inestable.

Una observación importante es que para el Teorema de Primera Aproximación necesitamos que f esté definida y sea C^1 sobre un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Para el Teorema de Hartman-Grobman que veremos en este documento necesitamos en cambio $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \ C^1(\mathbb{R}^N)$. Todos estos detalles están expuesto de forma clara y formal a lo largo del documento, sin dejar un ápice de duda.

En el capítulo "5.El Teorema de Hartman-Grobman" comenzaremos dando definiciones formales como "punto de equilibrio hiperbólico", "funciones topológicamente conjugadas", o "sistemas diferenciales topológicamente conjugados". Todo ello necesario para la prueba del teorema estrella de este documento.

Para dicha prueba, nos apoyaremos sobre un resultado que será de vital importancia : " El Teorema de Linealización Global de Hartman ".

El teorema nos dice que, si tenemos una matriz B de tamaño $N \times N$ no singular y tal que todos sus autovalores tienen módulo distinto de 1, entonces existe una constante $\varepsilon > 0$ que solo depende de B, tal que si $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función continua, acotada y globalmente lipschitziana con constante de lipschitz menor que ε, entonces T y $T + g$ son funciones topológicamente conjugadas. Donde T denota la aplicación lineal :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ y &\longmapsto T(y) = By. \end{aligned}$$

Precisar que dos funciones $J : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N, \ K : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,$ sean topológicamente conjugadas significa que existe un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que :

$$(\phi \circ J)(y) = (K \circ \phi)(y), \ \ \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Gracias al Teorema de Linealización Global de Hartman probaremos el Teorema de Hartman-Grobman, finalizando el punto 5. y, con ello, el documento.

Sin más preludios, demos inicio al documento.

2 Resultados previos de Ecuaciones Diferenciales

2.1 Introducción. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Antes de adentrarnos en la finalidad de este trabajo, el Teorema de Hartman-Grobman y sus aplicaciones, conviene repasar las definiciones y resultados fundamentales de la teoría de Ecuaciones Diferenciales.

En concreto, dedicaremos este primer capítulo a realizar un breve resumen (pero necesario) sobre las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Todos los resultados y definiciones de esta sección han sido obtenidos de los apuntes de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del grado de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Dichos apuntes fueron presentados por los profesores Francisco Guillén González, José Antonio Langa Rosado y Antonio Suárez Fernández, todos pertenecientes al departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Númerico de la Universidad de Sevilla.

Definición 2.1 (SDOs y EDOs).

1. *Sistema Diferencial Ordinario (SDO) de primer orden y dimensión* $N \geqslant 1$ *:*

$$F(t, y, y') = 0,$$

donde $F : O \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *es una función continua en el abierto* O*.*
***NOTA** : Diremos que el SDO de primer orden y dimensión* N *está escrito en forma*

normal si podemos despejar y' de la ecuación anterior. Es decir, si tenemos :

$$y' = f(t, y), \tag{2.1}$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una función continua en el abierto Ω.
***NOTA** : Cuando tenemos $N = 1$ hablamos de Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).*

2. *Ecuación Diferencial Ordinaria de orden n :*

$$H(t, y, y', \ldots, y^{n)}) = 0,$$

donde $H : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el abierto Ω.
***NOTA** : Análogamente al SDO, diremos que la EDO de orden n está escrita en forma normal si podemos despejar $y^{n)}$ de la ecuación anterior. Es decir, si tenemos*

$$y^{n)} = h(t, y, y', \ldots, y^{n-1)}), \tag{2.2}$$

donde $h : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el abierto Ω.

Observación 2.1.

En el problema planteado por la definición anterior, t es la variable independiente y, por consiguiente, y es la variable dependiente.
Buscamos encontrar una función $y(t)$ que satisfasga las ecuaciones dadas en la definición (2.1). Formalicemos pues el concepto de solución de un Sistema Diferencial Ordinario y de una Ecuación Diferencial Ordinaria.

Definición 2.2 (Solución de SDOs y EDOs).

1. *Diremos que el par (I, φ), donde $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, es solución del SDO* (2.1) *si cumple :*
   a) $\varphi \in C^1(I)^N$.
   b) $(t, \varphi(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in I$.
   c) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \forall t \in I$.
2. *Análogamente, diremos que el par (I, φ), donde $I \subset \mathbb{R}$, $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, es solución de la ecuación diferencial ordinaria* (2.2) *si cumple :*
   a) $\varphi \in C^n(I)$.
   b) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{n-1)}(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I$.
   c) $\varphi^{n)}(t) = h(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{n-1)}(t)) \quad \forall t \in I$.

Definición 2.3 (Problema de Cauchy para SDO).

Defininimos el problema de Cauchy (PC) para el SDO $y' = f(t,y)$ *como :*

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *es tal que* $f \in C^0(\Omega)$*, con* $(t_0, y_0) \in \Omega$.

Teorema 2.1 (TEOREMA DE PICARD).

Consideremos el Problema de Cauchy (2.3)*, con f satisfaciendo* $f \in C^0(\Omega) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$ *y* $(t_0, y_0) \in \Omega$*. Entonces existen un entorno* $I = (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$ *de* t_0 *y una función* $\varphi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *tales que el par* (I, φ) *es la única solución del Problema de Cauchy en el intervalo* I.

Demostración.

Su prueba se puede encontrar en los apuntes de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Concretamente, la demostración del teorema se puede consultar en los apuntes correspondientes al Tema 2 "Análisis local del problema de Cauchy", en la página 23 de dicho documento.

Definición 2.4 (Solución maximal del (PC)).

En las condiciones del ***Teorema de Picard****, diremos que el par* $(I(t_0, y_0), \varphi(t; t_0, y_0))$ *es la solución maximal del Problema de Cauchy, donde :*

1. $I(t_0, y_0) \subset \mathbb{R}$ *es el mayor intervalor abierto de* $\mathbb{R}$ *donde existe* φ *tal que* (I, φ) *es solución del Problema de Cauchy* (2.3).
2. $\varphi(t; t_0, y_0) : I(t_0, y_0) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *es la única función tal que el par formado por* $(I(t_0, y_0), \varphi(t; t_0, y_0))$ *es solución del problema de Cauchy.*

Observación 2.2.

Una observación importante es que el **Teorema de Picard**, junto con otros resultados de prolongación de soluciones de un problema de Cauchy (PC), nos proporcionan la existencia y unicidad de la solución maximal del (PC).

Finalicemos la sección con el siguiente lema, el cual es bastante famoso y usado en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Lema 2.1 (Lema de Gronwall).

Sean $v(t), k(t) \in C^0([a,b])$ con $k(t) > 0$ en (a,b) y sean $h \in \mathbb{R}$, $t_0 \in [a,b]$. Si $v(t) \leq h + \int_{t_0}^{t} k(s)v(s)ds$ entonces $v(t) \leq he^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}$, $\forall t \in [t_0, b]$.

Demostración.

Su prueba se puede encontrar en los apuntes de la asignatura Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Concretamente, la demostración del teorema se puede consultar en los apuntes correspondientes al Tema 3 "Análisis global del problema de Cauchy", en la página 35 de dicho documento. ∎

2.2 Definiciones y resultados acerca de la Estabilidad de los Sistemas Diferenciales.

La finalidad de este documento no es otra que enunciar y probar el Teorema de Hartman-Grobman. El teorema es un resultado que pertenece a la teoría de estabilidad en el sentido de Liapunov de los sistemas diferenciales. Por ello, necesitamos una serie de definiciones y resultados que veremos a continuación, todos ellos obtenidos de los apuntes de la asignatura Ampliación de Ecuaciones Diferenciales del grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, elaborados por el profesor Manuel González Burgos, del departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis numérico.

De ahora en adelante, supondremos las siguientes hipótesis sobre las que nos apoyaremos a lo largo del documento.

Consideremos un abierto no vacío Ω contenido en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $N \in \mathbb{Z}$, esto es, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, y una función f definida en el abierto Ω tal que :

$$\begin{cases} B_\rho \subset \Omega \\ f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ f(y_0) = 0 \ \text{ para algún } \ y_0 \in \mathbb{R}^N \\ f \in C^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.4}$$

Donde $B_\rho = B(y_0; \rho) \subset \mathbb{R}^N$, denota la bola de centro y_0 y radio $\rho \in (0, \infty]$. Con estas hipótesis vamos a trabajar sobre el sistema diferencial autónomo en Ω :

$$y' = f(y) \tag{2.5}$$

y sobre el problema de Cauchy autónomo :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = z \text{ con } (t_0, z) \in \mathbb{R} \times \Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

NOTA 1. Para las definiciones y resultados que vamos a enunciar a continuación, generalmente se necesita menos regularidad para la función f. En realidad bastaría con $f \in Lip_{loc}(\Omega)$ ya que estamos tratando con un sistema autónomo. En nuestro caso, le exigimos regularidad a la función f por pura comodidad, ya que necesitamos dicha regularidad en el Teorema de Hartman-Grobman.

NOTA 2. También cabe mencionar que el motivo de tratar un sistema diferencial autónomo es el mismo que el expuesto en la nota anterior. El Teorema de Hartman-Grobman se enuncia sobre un sistema diferencial de este tipo.

Definición 2.5 (Equilibrio o punto crítico del SDO (2.5)).

Sea $a \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(a) = 0$. Se dice que la solución constante $\varphi(t) = a \ \forall t \in \mathbb{R}$ de (2.5) *es un equilibrio o punto crítico de dicho SDO.*

Observación 2.3.

Bajo nuestras hipótesis (2.4), la función $\varphi(t) = y_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ es un equilibrio del SDO (2.5). Por ello, a dicho equilibrio lo vamos a denotar como φ_0.

Definición 2.6 (Estabilidad).

Diremos que φ_0 es un equilibrio estable (en el sentido de Liapunov) del SDO (2.5) *si $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ y $\forall \varepsilon \in (0, \rho)$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \rho)$ tal que, si $z \in B(y_0, \delta)$ entonces, se tiene :*

1. $I(t_0, z) \supset [t_0, \infty)$.
2. $|\varphi(t; t_0, z) - \varphi_0| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, \infty)$.

En caso contrario diremos que φ_0 es un equilibrio inestable.

NOTA. En la definición anterior, $(I(t_0, z), \varphi(t; t_0, z))$ denota la solución maximal del PC (2.6).

Definición 2.7 (Estabilidad Uniforme).

Diremos que φ_0 *es un equilibrio uniformemente estable del SDO* (2.5) *si* $\forall \varepsilon \in (0, \rho)$ *existe* $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \rho)$ *tal que , si* $z \in B(y_0, \delta)$ *entonces se tiene :*

1. $I(t_0, z) \supset [t_0, \infty) \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}$.
2. $|\varphi(t; t_0, z) - \varphi_0| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, \infty)$.

Gracias a la siguiente proposición, se tiene como consecuencia que los conceptos de estabilidad y estabilidad uniforme son equivalentes para el caso de un sistema diferencial autónomo.

Proposición 2.1.

En las condiciones (2.4) y considerando el Problema de Cauchy (2.6), sea $z \in B(y_0, z)$, entonces, se tiene:

1. $I(t_0, z) = t_0 + \underbrace{I(0, z)}_{(\alpha,\beta)} = (t_0 + \alpha, t_0 + \beta)$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ $(\alpha < \beta)$.
2. $\varphi(t; t_0, z) = \varphi(t - t_0, 0, z) \quad \forall t \in I(t_0, z)$

Demostración.

Su prueba se puede encontrar en los apuntes de la asignatura "Ampliación de Ecuaciones Diferenciales" del grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Concretamente, la demostración del teorema se puede consultar en la página 16 de dichos apuntes.

Corolario 2.1.

Para el sistema diferencial autónomo (2.5), las definiciones de estabilidad y estabilidad uniforme son equivalentes.

Pasemos ahora a definir los conceptos, en el sentido de Liapunov, de equilibrio atractivo y uniformemente atractivo.

Definición 2.8 (Equilibrio atractivo).

Diremos que el equilibrio φ_0 *es atractivo si* $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ *existe* $\delta \in (0, \rho)$ *tal que, si* $z \in B(y_0, \delta)$, *entonces :*

1. $I(t_0, z) \supset [t_0, \infty)$.

2. $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t; t_0, z) = y_0$

Definición 2.9 (Equilibrio uniformemente atractivo).

Diremos que el equilibrio φ_0 *es uniformemente atractivo si existe* $\delta \in (0, \rho)$ *tal que, si* $z \in B(y_0, \delta)$, *entonces :*

1. $I(t_0, z) \supset [t_0, \infty) \ \forall t_0 \in \mathbb{R}$.
2. $\forall \varepsilon > 0$ *existe* $T = T(\varepsilon) > 0$ *tal que* $|\varphi(t; t_0, z) - \varphi_0| \leq \varepsilon$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ *y* $\forall t \geq t_0 + T$.

De forma análoga para los conceptos de estabilidad y estabilidad uniforme, tenemos el siguiente corolario :

Corolario 2.2.

Para el sistema diferencial autónomo (2.5), las definiciones de atractividad y atractividad uniforme son equivalentes.

Continuemos dando dos resultados que caracterizan los conceptos de estabilidad de un equilibrio para el caso de los sistemas diferenciales lineales de coeficientes constantes $y' = Ay$.

Ambos resultados son necesarios para la demostración del Teorema de Primera Aproximación.

Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz de dimensión $N \times N$, y consideremos el sistema lineal $y' = Ay$.

NOTA. Mencionar que seguimos en las condiciones (2.4), con $\Omega = \mathbb{R}^N$ e $y_0 = 0$ un punto de equilibrio para $y' = Ay$.

Teorema 2.2.

Sea $F(t)$ *una matriz fundamental para el sistema* $y' = Ay$. *Entonces :*

1. $\varphi_0 = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ *es un equilibrio (uniformemente) estable para el sistema* $y' = Ay$ *si y solo si* $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ *se tiene que :*

$$\sup_{t\in[t_0,\infty)} \|F(t)\| < \infty$$

2. $\varphi_0 = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ *es un equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable si y solo si existen constantes* $C, \alpha > 0$ *tales que :*

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\| \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}, \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall t > t_0.$$

Demostración.

Su prueba se puede encontrar en los apuntes de la asignatura "Ampliación de Ecuaciones Diferenciales" del grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla. Concretamente, la demostración del teorema se puede consultar en la página 17 de dichos apuntes.

NOTA. En el teorema anterior, $\|F(t)\|$ denota cualquier norma matricial.

El siguiente teorema se tiene como consecuencia del teorema (2.2).

Teorema 2.3.

La solución $\varphi_0 = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ *del sistema* $y' = Ay$ *es un equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de* A *tienen parte real estrictamente negativa.*

3 La forma canónica real de Jordan.

Este capítulo se antoja imprescindible para las pruebas tanto del Teorema de Primera Aproximación como del Teorema de Hartman-Grobman. Necesitamos una serie de resultados y conocimientos sobre álgebra lineal que expondremos en este capítulo.

Todos los resultados de esta sección han sido obtenidos de la referencia [5] de la bibliografía. Concretamente, en la sección "18. Cálculo de la exponencial de una matriz. La forma canónica de Jordan." la cual comienza en la página 111. También parte de los resultados han sido obtenidos de la referencia [4]. Específicamente en "Chapter 6. Linear systems and canonical forms of operators.", que comienza en la página 110.

Son resultados técnico de algebra lineal, por lo que no se van a realizar sus pruebas ya que no es esa la finalidad de este documento. En cualquier caso, se pueden consultar en las referencias citadas.

En lo que sigue, V denotará un espacio vectorial real o complejo (según iremos indicando) de dimensión finita.

Definición 3.1.

Sea $T : V \longrightarrow V$ *una aplicación lineal. Y sea* λ *un autovalor de* T *de multiplicidad algebraica* r*. Entonces definimos el autoespacio generalizado de* T *correspondiente a* λ *como :*

$$S(T, \lambda) = Ker(T - \lambda I)^r,$$

donde I *denota la aplicación identidad, y donde* $Ker(T - \lambda I)^r$ *denota el núcleo de* $(T - \lambda I)^r$, *es decir :*

$$Ker(T - \lambda I)^r = \{v \in V \ \ \textit{tales} \ \ \textit{que} \ \ (T - \lambda I)^r(v) = 0\}.$$

Teorema 3.1.

Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal (o bien V un espacio vectorial real y T una aplicación lineal tal que todos sus autovalores son reales). Entonces la dimensión de cada uno de sus autoespacios generalizados coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor correspondiente y, denotando $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los autovalores de T, se tiene que :

$$V = S(T, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(T, \lambda_k).$$

Además, $T(S(T, \lambda_j)) \subset S(T, \lambda_j), \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$. Esto es, los autoespacios generalizados son invariantes por T.

Teorema 3.2.

Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sus autovalores reales con multiplicididades algebraicas $r_1, \dots, r_m$ respectivamente. Y sean $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_n, \bar{\mu}_n$ sus autovalores complejos (donde $\bar{\mu}_i$ denota el conjugado de μ_i) con multiplicidades algebraicas $q_1, \dots, q_n$ respectivamente. Entonces :

$$V = S(T, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus S(T, \lambda_m) \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_n,$$

donde $E_i = (S(T, \mu_i) \oplus S(T, \bar{\mu}_i)) \cap V \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Observación 3.1.

Remarcar que todos los subespacios que aparecen en la suma directa del anterior teorema, son invariantes por la aplicación lineal T.

Teorema 3.3.

Sea V un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita y sea $T : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ los autovalores de T, con multiplicidades algebraicas $r_1, \dots, r_m$. Entonces se tiene que λ_i es el único autovalor de la aplicación lineal $T_{|S(T,\lambda_i)} : S(T, \lambda_i) \longrightarrow S(T, \lambda_i)$, y su multiplicidad algebraica sigue siendo r_i, para cualquier $i \in \{1, \dots, m\}$, donde $T_{|S(T,\lambda_i)}$ denota la aplicación lineal T restringida al subespacio $S(T, \lambda_i)$.

Corolario 3.1.

En las condiciones del Teorema (3.2). Se tiene que $\mu_i, \bar{\mu}_i$ son los únicos autovalores de la aplicación lineal $T_{|E_i} : E_i \longrightarrow E_i$, con multiplicidades algebraicas respectivas $r_i, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

4 El Teorema de Primera Aproximación o Principio de Linealización.

En este capítulo trataremos de probar un resultado previo al Teorema de Hartman-Grobman; el Teorema de Primera Aproximación.

Continuamos trabajando sobre las hipótesis ya expuestas en los capítulos anteriores. Aunque no está de más hacerles una breve mención de nuevo :

Supongamos $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega)$, con Ω abierto y tal que $B(y_0, \rho) \subset \Omega$ donde y_0 es un punto de equilibrio del sistema diferencial $y' = f(y)$.

El Teorema de Primera Aproximación tiene como objetivo "aproximar" el sistema diferencial no lineal $y' = f(y)$ mediante otro que sí sea lineal, es decir, de la forma $y' = Ay$, con A una matriz cuadrada (y constante) de dimensión $N \times N$. Hablamos de aproximar en el sentido de poder estudiar la estabilidad del punto crítico y_0 en función de la estabilidad del punto crítico nulo del sistema diferencial lineal $y' = Ay$. Recordemos además, que para el caso de sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes, los conceptos de estabilidad del equilibrio nulo equivalen a ciertas propiedades de los autovalores de la matriz A.

Sin más rodeos, enunciemos y probemos el teorema.

Teorema 4.1 (De Primera Aproximación).

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Omega)$ *con* Ω *abierto y tal que* $B(y_0, \rho) \subset \Omega$, *con* $\rho \in (0, \infty]$ *y* $y_0 \in \Omega$ *siendo un punto de equilibrio del sistema* $y' = f(y)$. *Supongamos también que el jacobiano* $Df(y_0)$ *tiene todos los autovalores con parte real distinta de cero. Entonces :*

1. *Si todos los autovalores de la matriz jacobiana* $Df(y_0)$ *tienen parte real estrictamente negativa, entonces la solución* $\varphi_0(t) = y_0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ *es un equilibrio asintóticamente estable (equivalentemente uniformemente asintóticamente estable) para el sistema diferencial* $y' = f(y)$.

2. *Si existe un autovalor de* $Df(y_0)$ *con parte real estrictamente positiva, entonces* φ_0 *es inestable.*

Demostración.

Probemos primero el apartado 1 del teorema.

Podemos suponer que $y_0 = 0$, ya que los conceptos de estabilidad de y_0 para $y' = f(y)$ equivalen al de 0 para $y' = f(y - y_0)$.

Como $f \in C^1(\Omega)$ sabemos que existe una única solución maximal $\varphi(t; t_0, z)$, $t \in I(t_0, z)$, $\forall (t_0, z) \in \Omega$ de $y' = f(y)$.

También, gracias a que $f \in C^1(\Omega), y_0 = 0 \in \Omega$ tenemos que

$$f(y) = f(0) + Df(0)(y - 0) + R(y) = Df(0)y + R(y),$$

donde $R \in C^0(\Omega)$ satisface

$$\lim_{y \to 0} \frac{|R(y)|}{|y|} = 0,$$

y donde $Df(0)$ denota el jacobiano de la función $f \in C^1(\Omega)$ en el punto 0. En la igualdad anterior también hemos usado que $f(0) = 0$.

Denotando $A = Df(0)$, por las hipótesis del teorema tenemos que todos los autovalores de A tienen parte real estrictamente negativa, por lo que, haciendo uso del Teorema (2.3) tenemos que $\varphi_0 = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ es un equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable para el sistema $y' = Ay$.

Primero vamos a probar que existen $\tilde{C} > 0, \tilde{\gamma} \in (0, \rho)$ y $\tilde{\alpha} > 0$ tales que :
1. $I(t_0, z) \supset [t_0, \infty] \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall z \in B(0, \tilde{\gamma})$.
2. $|\varphi(t; t_0, z)| \leq \tilde{C}|z|e^{-\tilde{\alpha}(t - t_0)}, \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall z \in B(0, \tilde{\gamma}), \ \ \forall t \geq t_0$.

Sea $F \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{N \times N})$ una matriz fundamental para el sistema $y' = Ay$. Como φ_0 es un equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable, tenemos por el Teorema (2.2) que existen constantes positivas C, α tales que $F(t)$ satisface :

$$\|F(t)F(t_0)^{-1}\| \leq Ce^{-\alpha(t - t_0)}, \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall t > t_0.$$

Sea $(t_0, z) \in \mathbb{R} \times \Omega$, y consideremos $\varphi(t; t_0, z)$ definida en $I(t_0, z)$ la solución maximal de :

$$y' = f(y) = Df(0)y + R(y) = Ay + R(y).$$

Como $\varphi(t; t_0, z)$ es por definición la solución maximal del PC :

$$\begin{cases} y' = Ay + R(y) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

tenemos :

$$\begin{cases} \varphi'(t; t_0, z) = A\varphi(t; t_0, z) + R(\varphi(t; t_0, z)) \ \ \forall t \in I(t_0, z) \\ \varphi(t_0; t_0, z) = z \end{cases}$$

Denotando ahora $b(t) = R(\varphi(t; t_0, z)) \in C^0(I(t_0, z))$ podemos ver de forma análoga a lo anterior que $\varphi(t; t_0, z)$ es solución de :

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

Usando la fórmula general para sistemas diferenciales lineales de este tipo tenemos :

$$\varphi(t; t_0, z) = F(t)F(t_0)^{-1}z + \int_{t_0}^{t} F(t)F(s)^{-1}b(s)ds, \ \ \forall t \in I(t_0, z).$$

Queremos determinar $\tilde{C}, \tilde{\gamma}$ y $\tilde{\alpha}$ que satisfagan las dos propiedades anteriores. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $\lim\limits_{y \to 0} \frac{R(y)}{|y|} = 0$, entonces, por definición de límite, exite $\mu \in (0, \rho)$ tal que

$$|R(y)| \leq \varepsilon |y| \ \ \forall y \in B(0, \mu). \tag{4.1}$$

En primer lugar nos vamos a centrar en encontrar $\tilde{\gamma} \in (0, \rho)$ tal que , si $z \in B(0, \tilde{\gamma})$ entonces :

$$|\varphi(t; t_0, z)| \leq \mu \ \ \forall t \in I(t_0, z) \cap [t_0, \infty).$$

Para hacer menos engorrosa la escritura, vamos a definir $u(t) = |\varphi(t; t_0, z)|$ con $t \in I(t_0, z) \cap [t_0, \infty)$.

Si escojemos $\tilde{\gamma} < \mu$, tenemos trivialmente $u(t_0) = |z| \leq \tilde{\gamma} < \mu$. Ahora bien, por reducción al absurdo, supongamos que existe $t^* \in I(t_0, z) \cap [t_0, \infty)$ tal que $u(t) > \mu$. Es trivial que $u \in C^0(I(t_0, z) \cap [t_0, \infty)$ ya que la función norma $|\cdot|$ es continua. Luego, por la continuidad de u existe $T \in [t_0, t^*)$ tal que

$$u(T) = \mu \ \ y \ \ u(t) < \mu \ \ \forall t \in [t_0, T).$$

Sea $t \in [t_0, T]$. Así

$$\begin{cases} u(t) = |\varphi(t; t_0, z)| = |F(t)F(t_0)^{-1}z + \int_{t_0}^{t} F(t)F(s)^{-1}b(s)ds| \\ \leq \|F(t)F(t_0)^{-1}\||z| + \int_{t_0}^{t} \|F(t)F(s)^{-1}\||b(s)|ds \\ \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}|z| + C\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|ds \end{cases}.$$

En la desigualdad anterior hemos usado , por un lado la fórmula para $\varphi(t; t_0, z)$, por otro, la desigualdad triangular, y también que se tiene

$$|\int_a^b g(t)dt| \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

Además hemos usado una norma matricial $\|\cdot\|$ consistente con la norma vectorial $|\cdot|$. Por último, para la última desigualdad hemos usado la caracterización de equilibrio (uniformemente) asintóticamente estable de $y' = Ay$ para la matriz fundamental $F(t)$.

Por otro lado, como $t \in [t_0, T]$ tenemos que $u(t) \leq \mu$. Luego, $u(s) \in B(0, \mu)$ y por lo tanto podemos usar (4.1), obteniendo :

$$u(t) \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}|z| + C\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|b(s)|ds \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}|z| + C\varepsilon\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds.$$

Aún más, multiplicando por $e^{\alpha t} > 0$ obtenemos :

$$e^{\alpha t}u(t) \leq Ce^{\alpha t_0}|z| + C\varepsilon\int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}u(s)ds, \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Estamos en las condiciones de usar el lema de Gronwall (lema (2.1)) , con lo que :

Tomando pues $v(t) = e^{\alpha t}u(t)$ y $k(t) = C\varepsilon$ tenemos :

$$e^{\alpha t}u(t) \leq Ce^{\alpha t_0}|z|e^{C\varepsilon(t-t_0)} = C|z|e^{-(\alpha - C\varepsilon)(t-t_0)} \;\; \forall t \in [t_0, T].$$

Finalmente, si tomamos $\varepsilon = \frac{\alpha}{2C}$ obtenemos :

$$u(t) := |\varphi(t; t_0, z)| \leq C|z|e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \;\; \forall t \in [t_0, T]. \tag{4.2}$$

Aplicando la desigualdad anterior en el punto $t = T$, y recordadando que $z \in B(0, \tilde{\gamma})$ tenemos en particular :

$$\mu = u(T) \leq C|z|e^{-\frac{\alpha}{2}(T-t_0)} \leq C\tilde{\gamma} < \mu.$$

Siempre que escojamos $\tilde{\gamma} \in (0, \rho) \cap (0, \frac{\mu}{C})$. Obteniendo pues el absurdo.

Acabamos de probar que, tomando $\varepsilon = \frac{\alpha}{2C}$ y $\tilde{\gamma}$ cumpliendo $0 < \tilde{\gamma} < \text{mín}\left\{\rho, \mu, \frac{\mu}{C}\right\}$ tenemos que se cumple

$$|\varphi(t; t_0, z)| \leq \mu < \rho \ \ \forall t \in I(t_0, z) \cap [t_0, \infty).$$

lo cual implica $[t_0, \infty) \subset I(t_0, z)$ como queríamos probar.

Pasemos a probar ahora :

$$|\varphi(t; t_0, z)| \leq \tilde{C}|z|e^{-\tilde{\alpha}(t-t_0)}, \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall z \in B(0, \tilde{\gamma}), \ \ \forall t \geq t_0.$$

Anteriormente hemos probado que existe $\mu \in (0, \rho)$ tal que existe $\tilde{\gamma} \in (0, \rho)$ cumpliéndose que, si $z \in B(0, \tilde{\gamma})$ se tiene :

$$|\varphi(t; t_0, z)| \leq \mu \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in I(t_0, z) \cap [t_0, \infty).$$

Además, como hemos probado que $[t_0, \infty) \subset I(t_0, z) \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \forall z \in B(0, \tilde{\gamma})$, podemos afirmar pues que :

$$|\varphi(t; t_0, z)| \leq \mu \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in [t_0, \infty).$$

De forma análoga a la prueba de $[t_0, \infty) \subset I(t_0, z)$, podemos probar que :

$$e^{\alpha t}u(t) \leq Ce^{\alpha t_0}|z| + C\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}u(s)ds, \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in [t_0, \infty).$$

y de nuevo, aplicando el Lema de Gronwall :

$$e^{\alpha t}u(t) \leq Ce^{\alpha t_0}|z|e^{C\varepsilon(t-t_0)} = C|z|e^{-(\alpha - C\varepsilon)(t-t_0)} \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ \forall t \in [t_0, \infty).$$

Tomando $\varepsilon = \frac{\alpha}{2C}$ y como en todo momento $z \in B(0, \tilde{\gamma})$, entonces :

$$|\varphi(t; t_0, z)| \leq C\tilde{\gamma}e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in [t_0, \infty).$$

Solo basta tomar $\tilde{C} = C\tilde{\gamma}, \ \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{2}$ y con ello ya hemos probado que existen $\tilde{C} > 0, \tilde{\gamma} \in (0, \rho)$ y $\tilde{\alpha} > 0$ tales que :

1. $I(t_0, z) \supset [t_0, \infty] \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R} \ \ \forall z \in B(0, \tilde{\gamma})$.
2. $|\varphi(t; t_0, z)| \leq \tilde{C}|z|^{-\tilde{\alpha}(t-t_0)}, \ \ \forall t_0 \in \mathbb{R}, \ \ \forall z \in B(0, \tilde{\gamma}), \ \ \forall t \geq t_0$.

Es trivial que estas dos condiciones implican que el equilibrio nulo $\varphi_0(t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$ es (uniformemente) asintóticamente estable, con lo que finaliza la prueba del apartado 1 del teorema.

Procedamos a la prueba del apartado 2 del teorema ;

Vamos a probar que si existe un autovalor de $Df(0)$ con parte real estrictamente positiva, entonces 0 es un punto de equilibrio inestable para el sistema $y' = f(y)$.
NOTA. La demostración requiere de resultados técnicos de álgebra lineal que a lo largo de la prueba iremos enunciando y usando. Además, para esta prueba, por necesidad de la notación, usaremos $\|\cdot\|$ para denotar una norma vectorial, en vez de $|\cdot|$ como veníamos usando anteriormente.

Como $f \in C^1(\Omega)$, tenemos que el jacobiano de la función f en el punto 0, denotado $Df(0)$, está bien definido.

Considerando la aplicación lineal

$$\begin{aligned} Df(0)\colon \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto Df(0)\cdot x \end{aligned}$$

Tenemos por los resultados del punto "3. La forma canónica real Jordan." que $\mathbb{R}^N$ admite una descomposición $\mathbb{R}^N = E_1 \oplus E_2$ a través de $Df(0)$, donde E_1, E_2 son (auto)espacios invariantes por $Df(0)$. Esto significa que E_1, E_2 son en efecto $\mathbb{R}-$espacios vectoriales y que $Df(0)(E_1) \subset E_1, Df(0)(E_2) \subset E_2$. También, por el punto 3. del documento, la descomposición anterior es tal que todos los autovalores de la aplicación lineal $C = Df(0)_{|E_1}$ tienen parte real estrictamente positiva, y tal que $D = Df(0)_{|E_2}$ tiene todos los autovalores con parte real estrictamente negativa. Las aplicaciones anteriores C, D denotan la aplicación $Df(0)$ restringida a los subespacios E_1, E_2 respectivamente.

Sea $a > 0$ tal que todos los autovalores de C tienen parte real estrictamente mayor que a. Tenemos entonces que existe una norma euclídea en E_1 tal que :

$$\langle Cz, z\rangle \geq a\|z\|^2 \;\; \forall z \in E_1, \tag{4.3}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto escalar. Análogamente, para cualquier $b > 0$ existe una norma euclídea en E_2 tal que :

$$\langle Dz, z\rangle < b\|z\| \;\; \forall z \in E_2. \tag{4.4}$$

Podemos escoger b tal que :

$$0 < b < a.$$

Ahora bien, tenemos la suma directa $\mathbb{R}^N = E_1 \oplus E_2$, la cual podemos entender como un producto cartesiano $\mathbb{R}^N = E_1 \times E_2$ mediante el uso de coordenadas. Así, podemos poner $z \in \mathbb{R}^N$, $z = (x, y) \in E_1 \times E_2$. También, mediante las normas dadas en E_1, E_2 podemos definir una norma en $E_1 \times E_2$ de la siguiente forma :

$$\|z\| = \|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}.$$

Como $f \in C^1(\Omega)$, $0 \in \Omega$ y $f(0) = 0$ por ser 0 un punto de equilibrio, usando el desarrollo de Taylor de f alrededor del 0 tenemos :

$$f(z) = f(0) + Df(0)(z - 0) + Q(z) = Df(0)z + Q(z)$$

donde Q verifica $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\|Q(z)\|}{\|z\|} = 0$.

Por definición de límite, $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B(0, \delta)$ entonces se tiene :

$$\|Q(z)\| \leq \varepsilon \|z\|. \tag{4.5}$$

Mediante el uso de coordenadas respecto a la suma directa, y por el desarrollo de Taylor de la función f, reescribimos f de la siguiente manera :

$$f(z) = f(x, y) = (Cx + R(x, y), Dy + S(x, y))$$

con R y S cumpliendo $(R(x, y), S(x, y)) = Q(x, y) = Q(z)$.

Denotemos $f_1(x, y) = Cx + R(x, y)$, $f_2(x, y) = Dy + S(x, y)$. Así, $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

Definimos el cono $\Delta = \{ \ (x, y) \in E_1 \times E_2$ tales que $\|x\| \geq \|y\| \}$.

Vamos a necesitar del siguiente lema para probar la inestabilidad del punto de equilibrio 0.

Lema 4.1. Existe $\tilde{\gamma} > 0$ tal que si $z \in \Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\gamma})$ entonces se tiene :

1. $\langle x, f_1(x, y) \rangle - \langle y, f_2(x, y) \rangle > 0$ si $x \neq 0$.
2. Existe $\alpha > 0$ tal que $\langle f(z), z \rangle \geq \alpha \|z\|^2$.

Probemos primero la inestabilidad del punto 0, y dejemos para el final la prueba del lema.

Sea $g : E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Notemos que $g \in C^1(E_1 \times E_2), g^{-1}([0,\infty)) = \Delta$, y que $g^{-1}(0)$ es la frontera del cono Δ.

Además, si $z = (x,y) \in \Omega$ entonces :

$$Dg(z)(f(z)) = Dg(x,y)(f_1(x,y), f_2(x,y)) = \langle x, f_1(x,y)\rangle - \langle y, f_2(x,y)\rangle.$$

De donde tenemeos que, si $x \neq 0$ y $z = (x,y) \in \Omega \cap \Delta \cap B(0,\tilde{\delta})$, según el lema visto :

$$Dg(x,y)(f_1(x,y), f_2(x,y)) = \langle x, f_1(x,y)\rangle - \langle y, f_2(x,y)\rangle > 0.$$

Esto implica que g es creciente sobre una solución $\varphi(t;t_0,z)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, $z \in \Omega \cap \Delta \cap B(0,\tilde{\delta})$, que se contenga en $\Omega \cap \Delta \cap B(0,\tilde{\delta})$, ya que por la regla de la cadena, $\frac{d}{dt}(g(\varphi(t;t_0,z)) = Dg(\varphi(t;t_0,z))(f(\varphi(t;t_0,z)))$. Esto implica que ninguna solución que comience en $z \in \Omega \cap \Delta \cap B(0,\tilde{\delta})$ puede salir de Δ sin haber salido antes de $\Omega \cap B(0,\tilde{\gamma})$.

Veamos ahora qué podemos obtener del segundo apartado del lema. Si $z \in \Omega \cap \Delta \cap B(0,\tilde{\delta})$ entonces $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I(t_0,z)$:

$$\langle f(\varphi(t;t_0,z)), \varphi(t;t_0,z)\rangle = \langle \varphi'(t;t_0,z), \varphi(t;t_0,z)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t;t_0,z)\|^2.$$

Luego, mientras $\varphi(t;t_0,z) \in \Omega \cap \Delta \cap B(0,\tilde{\delta})$, por el lema tenemos :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t;t_0,z)\|^2 \geq \alpha\|\varphi(t;t_0,z)\|^2.$$

Como 0 es un punto de equilibrio, tenemos que $\varphi_0(t) = \varphi(t;t_0,0) = 0 \ \forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Esto implica que $\varphi(t;t_0,z) \neq 0 \ \forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I(t_0,z)$ si $z \neq 0$, $z \in \Omega$. De la desigualdad anterior obtenemos pues, si además $z \neq 0$:

$$\frac{\frac{d}{dt}\|\varphi(t;t_0,z)\|^2}{\|\varphi(t;t_0,z)\|^2} \geq 2\alpha,$$

$$\frac{d}{dt}log(\|\varphi(t;t_0,z)\|^2) \geq 2\alpha,$$

$$log(\|\varphi(t;t_0,z)\|^2) \geq 2\alpha t - 2\alpha t_0 + log(\|\varphi(t_0;t_0,z)\|^2),$$

$$log(\|\varphi(t;t_0,z)\|^2) \geq 2\alpha t - 2\alpha t_0 + log(\|z\|^2),$$

$$\|\varphi(t;t_0,z)\|^2 \geq \|z\|^2 e^{2\alpha(t-t_0)}.$$

Tenemos pues que si $z \neq 0,\ z \in \Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\delta})$ entonces $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, y, mientras que $\varphi(t; t_0, z) \in \Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\delta})$:

$$\|\varphi(t; t_0, z)\| \geq \|z\| e^{\alpha(t-t_0)}.$$

Acabamos de probar que toda solución no trivial $\varphi(t; t_0, z),\ z \neq 0,\ z \in \Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\gamma})$, que comienza en $\Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\gamma})$, se aleja exponencialmente del 0 mientras esté definida y mientras esté contenida en $\Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\gamma})$.

Ya estamos en condiciones de deducir la inestabilidad del punto de equilibrio 0.

Sea $0 < \tilde{\varepsilon} < \rho,\ t_0 \in \mathbb{R}$. Probemos que no existe $0 < \gamma < \tilde{\varepsilon},\ \gamma = \gamma(\tilde{\varepsilon}, t_0)$ tal que si $z \in B(0, \gamma)$ entonces se tiene que $[t_0, \infty) \subset I(t_0, z)$, y que $\|\varphi(t; t_0, z)\| < \varepsilon$.

Escogiendo $\tilde{\varepsilon} < \tilde{\delta}$ tenemos que si $z \in B(0, \gamma)$ entonces, gracias a las dos conclusiones que hemos sacado a partir del lema, existe $t^* \in I(t_0, z)$ tal que, o bien $d(\varphi(t^*; t_0, z), \Omega) = 0$ (puede ocurrir si $B(0, \tilde{\delta}) \not\subseteq \Omega$), lo que implicaría que $[t_0, \infty) \not\subseteq I(t_0, z)$, o bien $\|\varphi(t^*; t_0, z)\| = \tilde{\delta}$, lo que implircaría $\|\varphi(t^*; t_0, z)\| > \varepsilon$. Acabamos de probar la inestabilidad del punto de equilibrio 0.

Demostrando el lema, quedaría finalizada la prueba del teorema. Vamos a ello. Probemos primero el punto 2 del lema.

Sea $z = (x, y) \in \Omega \cap \Delta \cap B(0, \tilde{\delta})$.

$$\langle f(z), z \rangle = \langle Cx, x \rangle + \langle Dy, y \rangle + \langle Qz, z \rangle.$$

con lo que, haciendo uso de (4.3), (4.4) y (4.5) :

$$\langle f(z), z \rangle \geq a\|x\|^2 - b\|y\|^2 - \varepsilon\|z\|^2.$$

Por otro lado, en Δ tenemos :

$$\|x\| \geq \|y\| \ ,\ \|x\|^2 \geq \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \geq \frac{1}{2}\|z\|^2.$$

Luego :

$$\langle f(z), z \rangle \geq (\frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \varepsilon)\|z\|^2.$$

Ecogiendo $\varepsilon > 0$ y $\tilde{\delta} = \delta$ tales que $\alpha = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \varepsilon > 0$ quedaría probada la segunda parte del lema.

Para probar el punto 1 del lema, nótese que :

$$\langle x, f_1(x,y)\rangle - \langle y, f_2(x,y)\rangle = \langle Cx, x\rangle - \langle Dy, y\rangle + \langle x, R(x,y)\rangle - \langle y, S(x,y)\rangle.$$

pero

$$|\langle x, R(x,y)\rangle - \langle y, S(x,y)\rangle| \leq |\langle x, R(x,y)\rangle| + |\langle y, S(x,y)\rangle| \leq 2|\langle z, Q(z)\rangle|.$$

Y basta proceder como en el punto 2 del lema. ∎

5 El Teorema de Hartman-Grobman.

En el capítulo anterior enunciamos y demostramos el Teorema de Primera Aproximación o Principio de Linealización. La razón de ello es que lo podemos considerar como un resultado previo al Teorema de Hartman-Grobman. Esto es, el Teorema de Hartman-Grobman nos va a proporcionar un paso más acerca de lo que ocurre en un entorno de un punto de equilibrio y_0 del sistema diferencial $y' = f(y)$.

A lo largo del capítulo supondremos las siguientes hipótesis, usuales en el documento. Consideramos una función $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, con $y_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(y_0) = 0$, esto es, y_0 es un punto de equilibrio para el sistema $y' = f(y)$.

Como en todo el documento, vamos a trabajar sobre el problema de Cauchy autónomo :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = z \ \text{ con } \ (t_0, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \end{cases}$$

5.1 Definiciones y resultados previos.

Definición 5.1 (Punto crítico hiperbólico).

Diremos que el punto de equilibrio y_0 *del sistema diferencial* $y' = f(y)$ *es un punto de equilibrio hiperbólico si todos los autovalores del jacobiano* $Df(y_0)$ *tienen parte real no nula. Por consiguiente, diremos que un matriz cuadrada* A *es hiperbólica si todos sus autovalores tienen parte real no nula.*

Definición 5.2 (Homeomorfismo entre subconjuntos de $\mathbb{R}^N$).

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$. *Diremos que* Ω *y* Γ *son homeomorfos si existe una* *función* $\phi : \Omega \longrightarrow \Gamma$ *tal que* ϕ *es continua, biyectiva, y su inversa también es continua. A la función* ϕ *la llamamos homeomorfismo entre* Ω *y* Γ*.*

Definición 5.3.

Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \Omega,\ \ g : \Gamma \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \Gamma$ *ambas continuas. Diremos que* f *y* g *son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo* ϕ *entre* Ω *y* Γ, $\phi : \Omega \longrightarrow \Gamma$, *tal que* $(\phi \circ f)(x) = (g \circ \phi)(x)$ *para todo* $x \in \Omega$. *Al homeomorfismo* ϕ *le llamaremos conjugación topológica entre* f *y* g*.*

Definición 5.4 (Sistemas diferenciales topológicamente conjugados).

Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,\ \ g : \Gamma \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N,\ \ f \in C^1(\Omega),\ \ g \in C^1(\Omega)$. *Diremos que los sistemas diferenciales :*

$$y' = f(y)$$

$$y' = g(y)$$

son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo ϕ *entre* Ω *y* Γ *tal que* $\phi(\varphi(t; t_0, z)) = \psi(t, t_0, \phi(z))$ *para todo* $t_0 \in \mathbb{R},\ z \in \Omega,$ *y para todo* $t \in I(t_0, z)$, *cumpliéndose también* $I(t_0, z) = I(t_0, \phi(z))$. *Donde :*

1. $(I(t_0, z), \varphi(t; t_0, z)),\ \ t_0 \in \mathbb{R}, z \in \Omega,$ *denota la solución maximal de PC :*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

2. $(I(t_0, \phi(z)), \psi(t; t_0, \phi(z))),\ \ t_0 \in \mathbb{R}, \phi(z) \in \Gamma,$ *denota la solución maximal de PC :*

$$\begin{cases} y' = g(y) \\ y(t_0) = \phi(z) \end{cases}$$

NOTA. La definición anterior también es válida para $f \in C^0(\Omega),\ \ g \in C^0(\Gamma)$.

A continuación daremos una serie de resultados que necesitaremos para la prueba del teorema de Hartman-Grobman.

Lema 5.1.

Sea $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz cuadrada de orden N. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ los autovalores de A con multiplicidades algebraicas $r_1, \dots, r_s$ respectivamente. Entonces $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_s}$ son los autovalores de e^A, con multiplicidades algebraicas $r_1, \dots, r_s$ respectivamente. e^A denota la exponencial de la matrix A.

Demostración.

Su prueba se puede consultar en la referencia [5] de la bibliografía. Concretamente en la página 305.

Definición 5.5.

Diremos que una matriz $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es hiperbólica discreta si es una matriz no singular y tal que todos sus autovalores tienen módulo distinto de 1.

NOTA. Nótese que una matriz B hiperbólica discreta no tiene por qué ser hiperbólica en el sentido de la definición (5.1).

Sea pues $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz hiperbólica discreta, y sean $\lambda_1, \dots \lambda_m$ sus autovalores con multiplicidades algebraicas respectivas $r_1, \dots, r_m$. Denotando $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ la aplicación lineal asociada a B y haciendo uso del teorema (3.2) y resultados posteriores, tenemos la siguiente descomposición :

$$\mathbb{R}^N = E_< \oplus E_>$$

Donde :

$$E_< = \bigoplus_{|\lambda_i|<1} S(T, \lambda_i) \cap \mathbb{R}^N$$

es la suma directa de los autoespacios generalizados de T correspondientes a los autovalores de T de módulo menor que 1 intersecados con $\mathbb{R}^N$, y donde :

$$E_> = \bigoplus_{|\lambda_i|>1} S(T, \lambda_i) \cap \mathbb{R}^N$$

es la suma directa de los autoespacios generalizados de T correspondientes a los autovalores de T de módulo mayor que 1 intersecados con $\mathbb{R}^N$.

Vamos a considerar las aplicaciones $T_< := T_{|E_<} : E_< \longrightarrow E_<$, $T_> := T_{|E_>} : E_> \longrightarrow E_>$, las cuales están bien definidas, y tienen como autovalores los autovalores de T de módulo menor que 1 y mayor que 1 respectivamente, junto con sus multiplicidades algebraicas, como hemos visto en la sección de la forma canónica de Jordan.

NOTA. Como B es una matriz hiperbólica discreta, entonces el 0 no puede ser un autovalor de B, y por consiguiente, tampoco de T (los autovalores de B y T son los mismos, por ello es equivalente hablar de autovalores de B o de T). Esto implica que el 0 tampoco es autovalor ni de $T_<$ ni de $T_>$.

Observación 5.1.

Que la aplicación T no tenga autovalores igual a 0 implica que T es una aplicación lineal biyectiva, es decir, un homomorfismo biyectivo, es decir, un isomorfismo. Por consiguiente, las aplicaciones $T_<$ y $T_>$ también son isomorfismos.

Definición 5.6 (Norma asociada a una Base).

Sea $V \subset \mathbb{R}^N$ *un subespacio vectorial de dimensión finita, y sea* $B = \{v_1, ..v_m\}$ *una base de V. Sean* $x_B = (x_1, \dots, x_m)$, $y_B = (y_1, \dots, y_m)$ *las coordenadas de* $x, y \in V$ *respecto de* B. *Definimos el producto escalar respecto de* B *en* V *como :*

$$\langle x, y \rangle_B = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

y la norma asociada :

$$\|x\|_B = \sqrt{\langle x, x \rangle_B}.$$

Observación 5.2.

La comprobación de que el producto escalar definido anteriormente es en efecto un producto escalar es trivial. En lo que sigue, y mientras no se diga lo contrario, usaremos la norma así definida.

Observación 5.3.

Es bien conocido que dado un espacio vectorial real de dimensión finita V, cualquier aplicación lineal $T : V \longrightarrow V$ es continua. Además, denotando $\mathscr{L}(V)$ como el espacio vectorial real de las aplicacione lineales y continuas $T : V \longrightarrow V$, tenemos que $(\mathscr{L}(V), \|\cdot\|_{\mathscr{L}(V)})$ es un espacio métrico con la norma :

$$\|T\|_{\mathscr{L}(V)} = \sup_{\|x\|_B \leq 1, x \in V} \|T(x)\|_B,$$

donde B es una base de V. Nótese que la composición de funciónes continuas

$$\|\cdot\|_B \circ T(\cdot)$$

es una función continua, y además $\bar{B}(0,1)\cap V \subset \mathbb{R}^N$ es cerrado por ser intersección de cerrados, ya que todos los subespacios vectoriales de dimensión finita son cerrados. Además, es obvio que $\bar{B}(0,1)\cap V$ está acotado. Por ello :

$$\|T\|_{\mathscr{L}(V)} = \max_{\|x\|_B \leq 1, x\in V} \|T(z)\|_B.$$

Nota. En lo que sigue, usaremos sendas normas $\|\cdot\|_B, \|\cdot\|_{\mathscr{L}(V)}$ y omitiremos los subíndices cuando no haya lugar a duda.

Teníamos una matriz $B \subset \mathbb{R}^{N\times N}$ hiperbólica discreta, y $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ la aplicación lineal asociada a B. Con ello, obtuvimos la siguiente descomposición :

$$\mathbb{R}^N = E_< \oplus E_>,$$

donde definimos las aplicaciones lineales $T_<, \ T_>$.

Proposición 5.1.

Existen bases $B_<, \ B_>$ de $E_<, \ E_>$ respectivamente, tales que se verifica

$$\max\{\|T_<\|_{\mathscr{L}(E_<)}, \|T_>^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_>)}\} < 1.$$

Donde para $\|T_<\|_{\mathscr{L}(E_<)}, \ \|T_>^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_>)}$ hemos usado las normas $\|x\|_{B_<}, \ \|x\|_{B_>}$ respectivamente.

Demostración.

Su prueba se puede consultar en la referencia [5] de la bibliografía. Concretamente en la página 306.

5.2 El Teorema de Linealización Global de Hartman.

En esta sección del documento enunciaremos un teorema al que llamaremos Teorema de Linealización de Hartman, y del que nos ayudaremos para probar el Teorema de Hartman-Grobman.

Vamos a trabajar apoyándonos sobre lo que hemos construído en el punto "5.1 Definiciones y resultados previos." de este documento.

NOTACIÓN.
Usaremos las siguientes notaciones de aquí en adelante.

$$\mathscr{C} := \{u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ ,continuas}\}.$$

Es decir, el conjunto de aplicaciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$ continuas (y no necesariamente lineales).

$$\mathscr{A} := \{u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ ,continuas y acotadas}\}.$$

Es decir, el conjunto de aplicaciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$ continuas y acotadas.

Observación 5.4.

En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes. Por ello, el que una función $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ esté acotada no depende de la norma concreta que se use. De cualquier modo, nosotros usaremos las normas definidas en la definición (5.6) y a partir de las cuales enunciamos la proposición (5.1).

Observación 5.5.

$(\mathscr{A}, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach con la norma :

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \|u(x)\|, \quad u \in \mathscr{A}.$$

Es decir, es un espacio métrico completo con la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Sin embargo, necesitamos una norma en $\mathscr{A}$ que sea equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ y que sea de mejor uso en la descomposición $\mathbb{R}^N = E_< \oplus E_>$.

Podemos entender la suma directa $\mathbb{R}^N = E_< \oplus E_>$ como el producto cartesiano $\mathbb{R}^N = E_< \times E_>$ mediante el uso de las bases $B_<, \; B_>$ encontradas en la Proposición (5.1).

Consideremos pues las proyecciones naturales:

$$\begin{aligned} p_< : \mathbb{R}^N &\longrightarrow E_< \\ x &\longmapsto p_<(x) = x_{B_<}. \end{aligned}$$

Donde $x_{B_<}$ denota las coordenadas correspondientes a $E_<$ de las coordenadas de x respecto de la base $B_< \cup B_>$. De forma análoga definimos $p_>$.

$$\begin{aligned} p_> : \mathbb{R}^N &\longrightarrow E_> \\ x &\longmapsto p_>(x) = x_{B_>}. \end{aligned}$$

NOTA. Las aplicaciones $p_<,\ p_>$ son ambas lineales. Además son aplicaciones entre espacios vectoriales de dimensión finita, por tanto son continuas. Como $u \in \mathscr{A}$ entonces u es acotada y continua, con lo que las composiciones $p_< \circ u,\ p_> \circ u$ son ambas continuas y acotadas. Podemos definir pues las aplicaciones lineales :

$$\begin{aligned} P_< : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A} \\ u &\longmapsto P_<(u) = p_< \circ u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_> : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A} \\ u &\longmapsto P_>(u) = p_> \circ u. \end{aligned}$$

Lema 5.2.

El espacio vectorial $\mathscr{A}$ admite la siguiente descomposición en suma directa $\mathscr{A} = P_<(\mathscr{A}) \oplus P_>(\mathscr{A})$.

Demostración.

Se obtiene a partir de la descomposición $\mathbb{R}^N = E_< \oplus E_>$.

Definición 5.7.

Definimos la siguiente norma en $\mathscr{A}$.

$$\|u\|_{\mathscr{A}} = \text{máx}\{\|P_<(u)\|_\infty, \|P_<(u)\|_\infty\},\ \ u \in \mathscr{A}.$$

Proposición 5.2.

Las normas $\|\cdot\|_\infty$ $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ son equivalentes.

Demostración.

Sea $u \in \mathscr{A}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u\|_\infty &= \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|u(x)_{B_<\cup B_>}\|_{B_<\cup B_>} \\ &\leq \frac{1}{2}(\|P_<(u)\|_\infty + \|P_>(u)\|_\infty) \\ &\leq \|u\|_{\mathscr{A}} \\ &\leq \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Donde cabe recordar que en $\mathbb{R}^N$ estamos usando la norma definida en (5.6) respecto de la base $B_< \cup B_>$.

Todas las desigualdades dadas son triviales, excepto la última. Argumentémosla.

$$\|u\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|u(x)\|_{B_<\cup B_>}.$$

Ahora bien :

$$\|u\|_{\mathscr{A}} := \max\{\|P_<(u)\|_\infty, \|P_<(u)\|_\infty\}.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\|P_i(u)\|_\infty &= \|p_i \circ u\|_\infty \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|(p_i \circ u)(x)\|_{B_i} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|u(x)_{B_i}\|_{B_i} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|u(x)_{B_<\cup B_>}\|_{B_<\cup B_>} \\
&= \|u\|_\infty, \quad i =<,> .
\end{aligned}$$

Queda la prueba concluida. ▮

Observación 5.6.

Hemos probado que las normas $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$ son equivalentes en $\mathscr{A}$. Como $(\mathscr{A}, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, entonces $(\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{A}})$ también lo es.

Estamos en condiciones de enunciar y probar el Teorema de Linealización Global de Hartman.

Teorema 5.1 (Teorema de linealización Global de Hartman).

Sea $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz hiperbólica discreta. Existe una constante $\varepsilon > 0$, que depende solo de B, tal que si $g \in \mathscr{A}$ es una función globlalmente lipschitziana con constante de lipschitz menor que ε, entonces T y $T+g$ son topológicamente conjugadas, donde $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ denota la aplicación lineal asociada a B. Es más, existe una única conjugación topológica ϕ entre ambos tal que $\phi - Id \in \mathscr{A}$.

Demostración.

Consideremos como es habitual a $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ como la aplicación lineal asociada a B.

Probaremos que si $\beta = \max\{\|T_<\|_{\mathscr{L}(E_<)}, \|T_>^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_>)}\}$, entonces podemos tomar $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{1-\beta, \|T^{-1}\|^{-1}_{\mathscr{L}(E_<\times E_>)}\}$.

NOTA. $\|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_< \times E_>)} \neq 0$, ya que T no es la aplicación nula.

NOTA. Nótese que, por la Proposición (5.1), $\beta < 1$, con lo que $\varepsilon > 0$.

Sea pues $g \in \mathscr{A}$ una función lipschitziana con constante de lipchitz $\lambda < \varepsilon$. Esto significa que

$$\|g(y_1) - g(y_2)\|_{B_< \cup B_>} \leq \lambda \|y_1 - y_2\|_{B_< \cup B_>}.$$

Veamos primero que $T + g$ es un homeomorfismo.

<u>Biyectivo.</u>

Sea $z \in \mathbb{R}^N$. Queremos ver que existe un único $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $T(x) + g(x) = z$. La ecuación anterior la podemos reescribir como $x = T^{-1}(z - g(x))$. Recordar que T^{-1} está bien definido, puesto que B es una matriz hiperbólica discreta.

Fijado $z \in \mathbb{R}^N$, que $T + g$ sea biyetiva equivale a que la función f_z :

$$\begin{aligned} f_z : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x &\longmapsto f_z(x) = T^{-1}(z - g(x)) \end{aligned}$$

tenga un único punto fijo para todo $z \in \mathbb{R}^N$. Por ello, vamos a necesitar del Teorema del Punto Fijo de Banach.

Teorema 5.2 (Punto Fijo de Banach).

Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Y sea* $f : X \longrightarrow X$ *una aplicación globalmente lipschitziana con constante de lipschitz* $\lambda \in [0, 1)$ *. Entonces* f *posee un único punto fijo.*

Basta probar pues que f_z es una función lipschitziana con constante de lipschitz perteneciente al intervalo $[0, 1)$.

$$\begin{aligned} \|f_z(x_1) - f_z(x_2)\|_{B_< \cup B_>} &= \|T^{-1}(z - g(x_1)) - T^{-1}(z - g(x_2))\|_{B_< \cup B_>} \\ &= \|T^{-1}(g(x_1) - g(x_2))\|_{B_< \cup B_>} \\ &\leq \|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_< \times E_>)} \|g(x_1) - g(x_2)\|_{B_< \cup B_>} \\ &\leq \lambda \|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_< \times E_>)} \|x_1 - x_2\|_{B_< \cup B_>} \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|_{E_< \cup E_>}. \end{aligned}$$

En las desigualdades anteriores hemos usado que T^{-1} es un isomorfismo. Tambien que g es una función globlamente lipschitziana, y la elección de ε teniéndose que $\lambda < \varepsilon$.

Acabamos de probar que $T+g$ es biyectiva. Luego tiene inversa, la cual vamos a denotar $x(z) = (T+g)^{-1}(z)$.

<u>Continua.</u>

Para probar que $T+g$ es un homeomorfismo sólo nos queda probar que tanto $T+g$ como su inversa $(T+g)^{-1}$ son funciones continuas.

Como tanto T como g son continuas, entonces es trivial que $T+g$ es continua.

Ahora bien, sean $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$.

$$\begin{aligned}
\|x(z_1) - x(z_2)\|_{E_< \cup E_>} &= \|f_{z_1}(x(z_1)) - f_{z_2}(x(z_2))\|_{E_< \cup E_>} \\
&= \|f_{z_1}(x(z_1)) - f_{z_1}(x(z_2)) + f_{z_1}(x(z_2)) - f_{z_2}(x(z_2))\|_{E_< \cup E_>} \\
&\leq \|f_{z_1}(x(z_1)) - f_{z_1}(x(z_2))\|_{E_< \cup E_>} + \\
&+ \|f_{z_1}(x(z_2)) - f_{z_2}(x(z_2))\|_{E_< \cup E_>} \\
&= \|f_{z_1}(x(z_1)) - f_{z_1}(x(z_2))\|_{E_< \cup E_>} + \\
&+ \|T^{-1}(z_1 - z_2)\|_{E_< \cup E_>} \\
&\leq \frac{1}{2}\|x(z_1) - x(z_2)\|_{E_< \cup E_>} + \\
&+ \|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_< \times E_>)}\|z_1 - z_2\|_{E_< \cup E_>}.
\end{aligned}$$

Para las desigualdades e igualdades anteriores hemos usado la desigualdad triangular y la definición y propiedades de f_z. Tenemos pues que para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$:

$$\|x(z_1) - x(z_2)\|_{E_< \cup E_>} \leq 2\|T^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_< \times E_>)}\|z_1 - z_2\|_{E_< \cup E_>}.$$

Acambamos que probar que $x(z)$ es una función globalmente lipschitziana, lo cual implica continuidad.

Ahora bien, supongamos que somos capaces de probar que si $g, k \in \mathscr{A}$ son funciones globalmente lipschitzianas ambas con constante de lipschitz $\lambda < \varepsilon$, entonces existe una única función $K = K(g,k) \in \mathscr{C}$ (la cual "depende" de g y k) tal que $K - Id \in \mathscr{A}$ y $(T+g) \circ K = K \circ (T+k)$.

En particular, si $k \equiv 0$, esto es, poniendo $a = K(g,0)$, tendríamos :

$$(T+g) \circ a = a \circ T. \tag{5.1}$$

Análogamente para $b = K(0, g)$:

$$T \circ b = b \circ (T + g).$$

Y usando ambas igualdades :

$$(T + g) \circ a \circ b = a \circ T \circ b = a \circ b \circ (T + g).$$

Además, teniendo en cuenta que $a - Id,\ b - Id \in \mathscr{A}$, entonces, poniendo $u = a - Id,\ v = b - Id$ tendríamos $a = u + Id,\ b = v + Id,$ con $u, v \in \mathscr{A}$. Por ello:

$$\begin{aligned}(a \circ b)(x) &= ((Id + u) \circ (Id + v))(x) \\ &= (Id + u)(x + v(x)) \\ &= x + v(x) + u(x + v(x)).\end{aligned}$$

Es decir,

$$a \circ b = (Id + u) \circ (Id + v) = Id + v + u \circ (Id + v) := Id + w$$

con

$$w = v + u \circ (Id + v).$$

Es trivial que $w \in \mathscr{A}$ gracias a que $u, v \in \mathscr{A}$.

En conclusión, a partir de :

$$(T + g) \circ a \circ b = a \circ b \circ (T + g).$$

y de :

$$a \circ b = Id + w.$$

tenemos pues que $a \circ b = K(g, g)$ valdría. Por otro lado, trivialmente, $K(g, g) = Id$ también valdría. Por la unicidad de K, obtenemos $a \circ b = Id$.

Es decir, b es la función inversa de a. En particular, poniendo $\phi = a$, ϕ sería un homeomorfismo de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$ que cumple $\phi - Id = u \in \mathscr{A}$. Además, como ϕ verifica (5.1), tenemos que ϕ es una conjugación topológica entre T y $T + g$. Y, por la unicidad de K, ϕ sería la conjugación topológica deseada por el teorema.

La prueba del teorema queda entonces limitada a probar que dadas funciones $g, k \in \mathscr{A}$ globalmente lipschitzianas con constante de lipschitz $\lambda < \varepsilon$, enontces existe una única función $K = K(g, k) \in \mathscr{C}$ tal que $K - Id \in \mathscr{A}$ y $(T + g) \circ K = K \circ (T + k)$.

Sean pues $g, k \in \mathscr{A}$ funciones globalmente lipschitzianas con constante de lipschitz $\lambda < \varepsilon$. Probemos que existe una único función $u \in \mathscr{A}$ tal que :

$$(T+g) \circ (Id+u) = (Id+u) \circ (T+K). \tag{5.2}$$

Al principio de la prueba vimos que $T+k$ es un homeomorfismo. Luego la ecuación (5.2) es equivalente a :

$$\begin{aligned} Id+u &= (T+g)\circ(Id+u)\circ(T+k)^{-1} \\ &= g\circ(Id+u)\circ(T+k)^{-1} + T\circ[(T+k)^{-1} + u\circ(T+k)^{-1}] \\ &= g\circ(Id+u)\circ(T+k)^{-1} + T\circ(T+k)^{-1} + T\circ u\circ(T+k)^{-1}. \end{aligned}$$

En la ecuación anterior también hemos usado la linealidad de T. Y, reemplazando Id *por* $(T+k)\circ(T+k)^{-1}$, en el primer miembro de la igualdad, tenemos :

$$\begin{aligned} u &= T\circ u\circ(T+k)^{-1} + g\circ(Id+u)\circ(T+k)^{-1} + T\circ(T+k)^{-1} \\ &\quad -(T+k)\circ(T+k)^{-1} \\ &= T\circ u\circ(T+k)^{-1} + g\circ(Id+u)\circ(T+k)^{-1} - k\circ(T+k)^{-1} \\ &= T\circ u\circ(T+k)^{-1} + G(u). \end{aligned}$$

donde :

$$G(u) = g\circ(Id+u)\circ(T+k)^{-1} - k\circ(T+k)^{-1}.$$

Y a partir de la cual definimos :

$$\tilde{F}(u) = T\circ u\circ(T+k)^{-1} + G(u).$$

Nótese que $\tilde{F}(u) \in \mathscr{A}$. Es continua por ser composición de funciones continuas. Veamos que es acotada. Como g, k son acotadas, entonces $G(u)$ se resume en la resta de dos funciones acotadas, luego es acotada. Por otro lado, si probamos que $T\circ u\circ(T+k)^{-1}$ es acotada, entonces $\tilde{F}(u)$ será acotada por ser suma de dos funciones acotadas.

Como u es acotada, entonces existe $M > 0$ tal que :

$$\|u\circ(T+k)^{-1}(x)\|_{B_< \cup B_<} \leq M \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Y, por ser T lineal y continua, existe $C > 0$ tal que :

$$\|T(x)\|_{B_< \cup B_<} \leq C\|x\|_{B_< \cup B_<} \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Luego tenemos, $\forall x \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \|T \circ u \circ (T+k)^{-1}(x)\|_{B_< \cup B_<} &\leq C\|u \circ (T+k)^{-1}(x)\|_{B_< \cup B_<} \\ &\leq CM. \end{aligned}$$

Acabamos de probar que $\tilde{F}(u) \in \mathscr{A}, \ \forall u \in \mathscr{A}$. Por tanto, la función $\tilde{F} : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ está bien definida.

Si probamos que existe un único punto fijo de $\tilde{F}$, habremos concluido la prueba del teorema.

Para probar que existe un único punto fijo de $\tilde{F}$, necesitamos hacer uso de muchos de los resultados dados en este documento.

Recordemos que en la presente sección vimos el lema (5.2). Por ello, podemos descomponer $\mathscr{A} = P_<(\mathscr{A}) \oplus P_>(\mathscr{A})$. donde $P_<, \ P_>$ están definidas de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} P_< : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A} \\ u &\longmapsto P_<(u) = p_< \circ u, \\ P_> : \mathscr{A} &\longrightarrow \mathscr{A} \\ u &\longmapsto P_>(u) = p_> \circ u, \end{aligned}$$

donde $p_<, \ p_>$ denotan las proyecciones naturales, también definidas anteriormente.

Denotaremos pues $P_<(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_<, \ P_>(\mathscr{A}) = \mathscr{A}_>$. Así $\mathscr{A} = \mathscr{A}_< \oplus \mathscr{A}_>$.

Por tanto, encontrar un único $u \in \mathscr{A}$ que sea fijo para $\tilde{F}$, es decir, u satisfaciendo $\tilde{F}(u) = u$, equivale a que se verifique simultáneamente :

$$P_<(u) = P_<(\tilde{F}(u)), \tag{5.3}$$

$$P_>(u) = P_>(\tilde{F}(u)). \tag{5.4}$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}P_<(T\circ u\circ(T+k)^{-1}) &= p_<\circ T\circ u\circ(T+k)^{-1}\\ &= p_<\circ T\circ(p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}\\ &+ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1})\\ &= p_<\circ T\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}\\ &+ p_<\circ T\circ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1}\\ &= p_<\circ T_<\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}\\ &+ p_<\circ T_>\circ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1}\\ &= T_<\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}.\end{aligned}$$

NOTA. En la igualdad anterior estamos haciendo uso de la suma directa $\mathscr{A}=\mathscr{A}_<\oplus\mathscr{A}_>$, en el sentido de que podemos considerar cualquier $u\in\mathscr{A}$ como la suma de su parte correspondiente a $\mathscr{A}_<$, y su parte correspondiente a $\mathscr{A}_>$. Es decir, $u=P_<(u)+P_>(u)$. También hemos usados las aplicaciones $T_<$, $T_>$ definidas sobre $E_<$, $E_>$ respectivamente.

Argumentemos la última igualdad, que a priori parece de mayor complejidad. El segundo miembro de la suma es 0 debido a que $T_>:E_>\longrightarrow E_>$, con lo que, si $\tilde{u}\in\mathscr{A}_>$, entonces $p_<(\tilde{u})\equiv 0$ obteniéndose $p_<\circ T_>\circ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1}=0$. Además, si $\hat{u}\in\mathscr{A}_<$, entonces $p_<(\hat{u})=\hat{u}$. Luego $p_<\circ T_<\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}=T_<\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}$.

Análogamente,

$$P_>(T\circ u\circ(T+k)^{-1})=T_>\circ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1}.$$

Luego, usando la linealidad de $P_<$ y $P_>$, las igualdades (5.3), (5.4) equivalen respectivamente a :

$$P_<(u)=T_<\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}+p_<\circ G(u), \tag{5.5}$$

$$P_>(u)=T_>\circ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1}+p_>\circ G(u). \tag{5.6}$$

Definimos pues,

$$F_<(u):=T_<\circ p_<\circ u\circ(T+k)^{-1}+p_<\circ G(u).$$

Por otro lado, usando la ecuación (5.6), tenemos :

$$T_>\circ p_>\circ u\circ(T+k)^{-1}=p_>\circ u-p_>\circ G(u).$$

Componiendo a la izquierda con $T_>^{-1}$ y a la derecha con $T+k$:

$$P_>(u) = T_>^{-1} \circ p_> \circ u \circ (T+k) - T_>^{-1} \circ p_> \circ G(u) \circ (T+k). \tag{5.7}$$

Definimos pues,

$$F_<(u) := T_>^{-1} \circ p_> \circ u \circ (T+k) - T_>^{-1} \circ p_> \circ G(u) \circ (T+k).$$

Observemos que $F_< : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}_<,\ \ F_> : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}_>.$

Así, definiendo $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{A}$ mediante $F(u) = F_<(u) + F_>(u)$, tenemos que las ecuaciones (5.3), (5.4) equivalen a encontrar un único $u \in \mathscr{A}$ tal que $F(u) = u$.

Probemos pues que F tiene un único punto fijo. Recordemos que $(\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{A}})$ es un espacio de Banach.

De nuevo, queremos usar el Teorema del Punto Fijo de Banach (Teorema (5.2)).

Todo se resume a probar que F es globalmente lipschitziana con constante de lipschitz perteneciente al intervalo $[0,1)$.

Sean $u, v \in \mathscr{A}$. Pongamos $y = (T+k)^{-1}(x)$ y $z = (T+k)(x)$, con $x \in \mathbb{R}^N$. Recordemos también que $\beta = \text{máx}\{\|T_<\|_{\mathscr{L}(E_<)}, \|T_>^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_>)}\}$. Entonces :

$$\begin{aligned} \|F_<(u)(x) - F_>(u)(x)\|_{B_<} &\leq \beta\|(p_< \circ u)(y) - (p_< \circ v)(y)\|_{B_<} \\ &\quad + \|p_<\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^N, E_<)}\|g(y+u(y)) - g(y+v(y))\|_{B_<} \\ &\leq \beta\|p_< \circ (u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty. \end{aligned}$$

NOTA. En la desigualdad anterior la norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^N, E_<)}$ denota la norma usual en el espacio de las funciones lineales y continuas de $\mathbb{R}^N$ en $E_<$. Además, recalcar que hemos usado, por ejemplo, que $p_<$ es una aplicación lineal y continua, de la cual se comprueba trivialmente que $\|p_<\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^N, E_<)} = 1$, y que g es una función globalmente lipachitziana con constante de lipschitz λ.

Análogamente ;

$$\begin{aligned} \|F_>(u)(x) - F_>(v)(x)\|_{B_>} &\leq \beta\|(p_> \circ u)(z) - (p_> \circ v)(z)\|_{B_>} \\ &\quad + \|T_>^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_>)}\|p_>\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^N, E_>)}\|g(x+u(x)) - g(x-v(x)\|_{B_>} \\ &\leq \beta\|p_> \circ (u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty. \end{aligned}$$

NOTA. En la última desigualdad hemos usado que $\|p_>\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^N, E_>)} = 1$, y que gracias a la Proposición (5.1), $\|T_>^{-1}\|_{\mathscr{L}(E_>)} < 1$

Ahora bien, en la demostracion de la Proposición (5.2) vimos que

$$\|u\|_\infty \leq 2\|u\|_{\mathscr{A}}, \quad \forall u \in \mathscr{A}.$$

Luego, usando las desigualdades obtenidas, se tiene que :

$$\begin{aligned} \|F_<(u) - F_<(v)\|_\infty &\leq \beta\|p_< \circ (u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \\ &\leq (\beta + 2\lambda)\|u-v\|_{\mathscr{A}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|F_>(u) - F_>(v)\|_\infty &\leq \beta\|p_> \circ (u-v)\|_\infty + \lambda\|u-v\|_\infty \\ &\leq (\beta + 2\lambda)\|u-v\|_{\mathscr{A}}. \end{aligned}$$

Además, como $F_<(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}_<, \quad F_>(\mathscr{A}) \subset \mathscr{A}_>,$ entonces :

$$\|p_< \circ [F(u) - F(v)]\|_\infty = \|F_<(u) - F_<(v)\|_\infty,$$

$$\|p_> \circ [F(u) - F(v)]\|_\infty = \|F_>(u) - F_>(v)\|_\infty.$$

Y por la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathscr{A}}$:

$$\|F(u) - F(v)\|_{\mathscr{A}} \leq (\beta + 2\lambda)\|u-v\|_{\mathscr{A}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{A}.$$

Como $(\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{A}})$ es un espacio de Banach y $\beta + 2\lambda < 1$ por la elección del ε. Entonces, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, F tiene un único punto fijo. Lo que finaliza la prueba del teorema. ∎

5.3 El Teorema de Hartman-Grobman.

Aún vamos a requerir de dos lemas más para enunciar y probar el ansiado Teorema de Hartman-Grobman.

Lema 5.3.

Sea $\alpha > 0$. Sea $r_\alpha : \mathbb{R}^N \longrightarrow \bar{B}(0, \alpha)$ la función definida para cualquier $x \in \mathbb{R}^N$ como :

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq \alpha, \\ \frac{\alpha x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| \geq \alpha. \end{cases}$$

A r_α la vamos a llamar retracción radial. Se tiene entonces que r_α es una función globalmente lipschitziana con constante de lipschitz igual a 2.

Demostración.

Su prueba se puede consultar en la referencia [5] de la bibliografía : *Ecuaciones diferenciales : cómo aprenderlas, cómo ensenarlas.* Concrétamente en la página 313.

NOTA. En el lema anterior, $\|\cdot\|$ denota cualquier norma en $\mathbb{R}^N$, y $\bar{B}(0,\alpha)$ denota la bola cerrada centrada en 0 y de radio α.

Lema 5.4.

Sean $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ una matriz cuadrada de orden N, y $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una función globalmente lipschitziana. Consideremos el problema de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = Ay + g(y), \\ y(0) = z. \end{cases}$$

donde $z \in \mathbb{R}^N$. Entonces, para cualquier $z \in \mathbb{R}^N$, se tiene, para la solución maximal del problema de Cauchy, $(I(0,z), \varphi(t;0,z))$, que :

1. $I(0,z) = \mathbb{R}$.
2. $\varphi(t;0,z) = e^{tA}z + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\varphi(s;0,z))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Su prueba se puede consultar en la referencia [5] de la bibliografía : *Ecuaciones diferenciales : cómo aprenderlas, cómo ensenarlas.* Concrétamente en la página 313.

Observación 5.7.

En las condiciones de lema anterior. Considerando el problema de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = Ay + g(y), \\ y(t_0) = z. \end{cases}$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^N$. Recordemos que gracias a la proposición (2.1), la cual es válida si $A + g \in C^0(\mathbb{R}^N)$, y en nuestro caso lo tenemos, entonces :

1. $I(t_0,z) = t_0 + \underbrace{I(0,z)}_{(\alpha,\beta)} = (t_0+\alpha, t_0+\beta)$ donde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ $(\alpha < \beta)$.
2. $\varphi(t;t_0,z) = \varphi(t-t_0,0,z) \quad \forall t \in I(t_0,z)$

Así, conociendo $(I(0,z), \varphi(t;0,z))$, tenemos caracterizadas todas las soluciones maximales. Es por ello que vamos a referirnos solo a $(I(0,z), \varphi(t;0,z))$, ya que en función de ella tenemos caracterizadas todas las demás.

Estamos en condiciones de enunciar y probar el Teorema de Hartman-Grobman.

Teorema 5.3 (Teorema de Hartman-Grobman).

Sea $y_0 \in \mathbb{R}^N$ un punto crítico hiperbólico del sistema diferencial $y' = f(y)$, donde $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces existen entornos U de y_0 y V de 0 tales que los sistemas diferenciales :

$$y' = f(y)$$

$$y' = Df(y_0)y$$

(con f y $Df(y_0)$ restringidas respectivamente a U y V) son topológicamente conjugados.

Demostración.

Probemos primero que los sistemas diferenciales $y' = f(y)$, $y' = \tilde{f}(y) := f(y - y_0)$ son topológicamente conjugados por la traslación $h(y) = y - y_0$.

Es trivial que la traslación $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es un homeomorfismo. Veamos que si $(I(0,z), \varphi(t;0,z))$, $(I(0,h(z)), \psi(t;0,h(z)))$, $z \in \mathbb{R}^N$, denotan la soluciones maximales de $y' = f(y)$, $y' = f(y + y_0)$, respectivamente, entonces $h(\varphi(t;0,z)) = \psi(t;0,h(z))$ para cualquier $t \in I(0,z)$, y además se tiene $I(0,z) = I(0,h(z))$.

Ahora bien,

$$h(\varphi(t;0,z)) = \varphi(t;0,z) - y_0, \quad \forall t \in I(0,z).$$

Y claramente $(I(0,z), \varphi(t;0,z) - y_0)$ es la solución maximal del PC :

$$\begin{cases} y' = f(y + y_0) \\ y(0) = z - y_0 = h(z) \end{cases}$$

Nótese además que $Df(y_0) = D\tilde{f}(0)$, luego podemos suponer sin perdida de generalidad que $y_0 = 0$.

Denotaremos a partir de ahora $A = Df(0)$, y a L como su aplicación lineal asociada.

Fijemos $\lambda > 0$, y $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^N$. Veamos que existe un $\alpha > 0$ suficientemente pequeño de forma que la función $u(y) = f(y) - Df(0)y$ en $\bar{B}(0,\alpha)$ es globlalmente lipschitziana con constante de lipschitz $\frac{\lambda}{2}$.

Como $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, entonces, escogiendo cualquier norma matricial $\|\cdot\|$, tenemos que $Df(z)$ es continua en $\mathbb{R}^N$, y, en particular, en 0, en el sentido de que para $\frac{\lambda}{2}$, existe $\alpha > 0$ tal que, si $z \in \bar{B}(0,\alpha)$, entonces se tiene

$$\|Df(z) - Df(0)\| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Ahora bien, $Du(z) = Df(z) - Df(0)$. Luego $\|Du(z)\| \leq \frac{\lambda}{2}$, $\forall z \in \bar{B}(0,\alpha)$. Vamos a utilizar el siguiente teorema, el cual es una derivación del teorema del valor medio.

Teorema 5.4.

Sea $\Delta \subset \mathbb{R}^N$ *un conjunto convexo, y* $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(\Delta)$. *Entonces, si* $a, b \in \Delta$ *:*

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \|Df(c)\|\|a - b\|$$

para algún $c \in [a,b]$, *donde* $[a,b]$ *denota el segmento que une* a *con* b, *y la norma matricial y vectorial han de ser consistentes.*

Haciendo uso del teorema, como $\bar{B}(0,\alpha)$ es un conjunto convexo, y, escogiendo una norma matricial y vectorial tales que ambas sean consistentes, tenemos :

$$\|u(x) - u(y)\| \leq \frac{\lambda}{2}\|x - y\| \ \ \forall x, y \in \bar{B}(0,\alpha).$$

Acabamos de probar que u es globalmente lipschitziana en $\bar{B}(0,\alpha)$, con constante de lipschitz $\frac{\lambda}{2}$.

Consideremos a continuación la retracción radial r_α. Y definamos $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ mediante $g(y) = u(r_\alpha(y))$, la cual está bien definida, ya que $r_\alpha(\mathbb{R}^N) \subset \bar{B}(0,\alpha)$. Como u y r_α tienen constantes de lipschitz $\frac{\lambda}{2}$ y 2 respectivamente (el último gracias al Lema (5.3)), entonces es trivial verifica que g es globalmente lipschitziana con constante de lipschitz λ.

Por otro lado, como $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, usando el desarrollo de Taylor de primer orden, tenemos que $(L + g) = f(y)$ para todo $y \in \bar{B}(0,\alpha)$.

Nuestro objetivo es probar que los sistemas diferenciales $y' = f(y)$, e $y' = Ay$ son topológicamente conjugados cuando los vemos restringidos a entornos U, V del origen.

Para ello lo que haremos será probar que existe una conjugación topológica global $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ entre $y' = Ay + g(y)$ e $y' = Ay$. Esto es más que suficiente, ya que, si dos sistemas diferenciales autónomos definidos respectivamente en abiertos $\varOmega \subset \mathbb{R}^N$, $\varGamma \subset \mathbb{R}^N$, son topológicamente conjugados a través de un homeomorfismo $k : \varOmega \longrightarrow \varGamma$, es trivial comprobar que entonces ambos sistemas diferenciales pero ahora con sus funciones restringidas a abiertos $U \subset \varOmega$, $k(U) \subset \varGamma$, respectivamente, son topólogicamente conjugados con el homeomorfimos k restringido al abierto U.

En nuestro caso, una vez probado que los sistemas diferenciales $y' = Ay + g(y)$ e $y' = Ay$ son topológicamente conjugados a traves de un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, bastará tomar un entorno U cualquiera de 0 pero tal que $U \subset \bar{B}(0, \alpha)$, y hacer $V = h(U)$, ya que $L + g = f$ en $\bar{B}(0, \alpha)$.

Por tanto la prueba queda reducida a probar que $y' = Ay + g(y)$ e $y' = Ay$ son topológicamente conjugados a traves de un homeomorfismo h.

Vamos a ello. Sea $(I(0, z), \varphi(t; 0, z))$ la solución maximal del problema de Cauchy, para $z \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} y' = Ay + g(y) \\ y(0) = z \end{cases}$$

En virtud del Lema (5.4), tenemos que $I(0, z) = \mathbb{R}$, y que, para todo $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^N$:

$$\varphi(t; 0, z) = e^{tA} z + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\varphi(s; 0, z)) ds. \tag{5.8}$$

Como g es una función globalmente lipschitziana con constante de lipschitz λ, y usando la expresión (5.8), tenemos, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$:

$$\|\varphi(t; 0, x) - \varphi(t; 0, y)\| \leq e^{t\|A\|} \|x - y\| + \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} \lambda \|\varphi(s; 0, x) - \varphi(s; 0, y)\| ds.$$

Equivalentemente :

$$e^{-t\|A\|} \|\varphi(t; 0, x) - \varphi(t; 0, y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t e^{-s\|A\|} \lambda \|\varphi(s; 0, x) - \varphi(s; 0, y)\| ds, \tag{5.9}$$

para cada $t \geq 0$, y para cada $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Fijemos $x, y \in \mathbb{R}^N$, y consideremos la función $v : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como sigue :

$$v(t) := \|x - y\| + \int_0^t e^{-s\|A\|}\lambda\|\varphi(s;0,x) - \varphi(s;0,y)\|ds.$$

Entonces ;

$$v'(t) = \lambda e^{-t\|A\|}\|\varphi(t;0,x) - \varphi(t;0,y)\|.$$

Gracias a la desigualdad (5.9),

$$v'(t) \leq \lambda v(t), \;\; \forall t \geq 0.$$

Vamos usar el siguiente lema :

Lema 5.5.

Sean $t_1, \in \mathbb{R}$, $t_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $t_1 < t_2$, e $y : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $y'(t) \leq Ly(t)$ para cada $t \in [t_1, t_2]$, con L una constante. Entonces $y(t) \leq y(t_1)e^{L(t-t_1)}$, para todo $t \in [t_1, t_2]$.

Aplicando el lema tenemos :

$$v(t) \leq v(0)e^{\lambda t}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Combinando ambas desigualdades :

$$\frac{1}{\lambda}v'(t) \leq v(t) \leq v(0)e^{\lambda t}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Esto es :

$$e^{-t\|A\|}\|\varphi(t;0,x) - \varphi(t;0,y)\| \leq v(t) \leq \|x - y\|e^{\lambda t}, \;\; \forall t \geq 0.$$

Tenemos pues, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, y para todo $t \geq 0$:

$$\|\varphi(t;0,x) - \varphi(t;0,y)\| \leq \|x - y\|e^{(\lambda + \|A\|)t}. \tag{5.10}$$

Combinando las expresiones (5.8) y (5.10), tenemos para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, y para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\|(\varphi(t;0,x) - e^{tA}x) - (\varphi(t;0,y) - e^{tA}y)\| &\leq \int_0^t e^{(t-s)\|A\|}\lambda\|\varphi(s;0,x) - \varphi(s;0,y)\|ds \\ &\leq \lambda\|x - y\|e^{t\|A\|}\int_0^t e^{\lambda s}ds \\ &= \|x - y\|e^{t\|A\|}(e^{\lambda t} - 1).\end{aligned}$$

Es decir, para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, y para todo $t \geq 0$,

$$\|(\varphi(t;0,x) - e^{tA}x) - (\varphi(t;0,y) - e^{tA}y)\| \leq \|x - y\|e^{t\|A\|}(e^{\lambda t} - 1). \tag{5.11}$$

Observemos también que la función g es continua (ya que es globalmente lipschitziana), y acotada, ya que u es continua y r_α es acotada. Esto es, $g \in \mathscr{A}$.

Además, por la expresión (5.8), para todo $z \in \mathbb{R}^N$, y para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\|\varphi(t;0,z) - e^{tA}z\| \leq \|g\|_\infty \ |\int_0^t e^{|t-s|\|A\|}ds|.$$

Con lo que obtenemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t;0,z) - e^{tA}z \in \mathscr{A}$.

NOTA. Estamos viendo a $\varphi(t;0,z) - e^{tA}z$ como una función de la variable $z \in \mathbb{R}^N$. Esto es, fijada $t \in \mathbb{R}$,

$$z \in \mathbb{R}^N \longmapsto \varphi(t;0,z) - e^{tA}z.$$

$\varphi(t;0,z) - e^{tA}z \in \mathscr{A}$. Argumentémoslo. Gracias a la expresión :

$$\|\varphi(t;0,z) - e^{tA}z\| \leq \|g\|_\infty \ |\int_0^t e^{|t-s|\|A\|}ds|, \ \ \forall t, \ \ \forall z$$

tenemos que en efecto $\varphi(t;0,z) - e^{tA}z$ está acotada. La continuidad se tiene gracias al siguiente resultado.

Teorema 5.5 (Dependencia Continua Estado Inicial).

Fijado $t \in \mathbb{R}$, *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, si* $x, y \in \mathbb{R}^N$ *cumplen* $\|x - y\| \leq \delta$, *entonces* $\|\varphi(t;0,x) - \varphi(t;0,y)\| \leq \varepsilon$.

Estamos entrando en la última fase de la demostración.

Por hipótesis del teorema, $y_0 = 0$ es un punto crítico hiperbólico para el sistema diferencial $y' = f(y)$. Denotemos $B = e^A$. Entonces, por el Lema (5.1), tenemos que, si $r_1, \ldots, r_m$ son los autovalores de A, entonces $e^{r_1}, \ldots, e^{r_m}$ son los autovalores de B (contando multiplicidades). Por definición de ser 0 un punto crítico hiperbólico, A tiene todos sus autovalores con parte real estrictamente negativa. En particular, B es una matriz hiperbólica discreta.

A continuación, volveremos a usar los resultados de la sección donde nos encontramos, como ya hicimos en el Teorema de Linealización Global de Hartman. Por ello, usaremos la misma notación y las mismas normas que usamos previamente para enunciar y probar el Teorema de Linealización de Hartman.

Como previamente, denotaremos por T a la aplicación lineal asociada a B.

Solo vamos a introducir una nueva notación. A partir de ahora vamos a utilizar la siguiente notación : $\varphi_t(y) := \varphi(t; 0, y)$. Así, fijado $t \in \mathbb{R}$, podemos considerar, como antes, la función (cuya variable es y) $\varphi_t : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

Como λ es arbitrario, podemos tomarlo tan pequeño como quisieramos para que la función $\tilde{g} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $\tilde{g} := \varphi_1 - T$ sea globalmente lipschitziana con constante de lipschitz tan pequeña como se quisiera. Esto es debido a que, por la desigualdad (5.11), se tiene que $\tilde{g}$ es una función globalmente lipschitziana con constante de lipschitz $e^{\|A\|}(e^{\lambda} - 1)$.

Anteriormente en la prueba, también vimos que $\tilde{g} \in \mathscr{A}$. Luego cumplimos las hipótesis requeridas y podemos aplicar el Teorema de Linealización Global de Hartman, con lo que tenemos que T, y $\varphi_1 = T + \tilde{g}$ son topológicamente conjugados. Y sabemos que existe una única conjugación topológica h entre T y φ_1 tal que $h - Id \in \mathscr{A}$.

Denotando $T_t = e^{tA}$. Como $h \circ T = \varphi_1 \circ h$, entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \circ (\varphi_t \circ h \circ T_{-t}) &= \varphi_{t+1} \circ h \circ T_{-1} \\
&= \varphi_t \circ \varphi_1 \circ h \circ T_{-t} \\
&= \varphi_t \circ h \circ T \circ T_{-1} \\
&= (\varphi_t \circ h \circ T_{-t}) \circ T.
\end{aligned}$$

Para concluir la prueba del teorema vamos a requerir de un último resultado.

Teorema 5.6.

En las condiciones que nos encontramos. Se tiene que φ_t y T_{-t} son homeomorfismos de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$.

Entonces, gracias a este teorema y a la igualdad anterior, $\varphi_t \circ h \circ T_{-t}$ es también una conjugación topológica entre T y φ_1. Ahora bien,

$$\varphi_t \circ h \circ T_{-t} - Id = (\varphi_t - T_t) \circ h \circ T_{-t} + T_t \circ (h - Id) \circ T_{-t} -$$

Como sabemos que $\varphi_t - T_t$, $h - Id \in \mathscr{A}$, entonces $\varphi_t \circ h \circ T_{-t} - Id \in \mathscr{A}$.

Por la unicidad del Teorema de Linealización Global de Hartman, $\varphi_t \circ h \circ T_{-t} = h$. Esto es, $\varphi_t \circ h = h \circ e^{tA}$.

Nótese que $(\mathbb{R}, e^{tA}z)$ es la solución maximal del PC :

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = z \end{cases}$$

Luego, para cualquier $z \in \mathbb{R}^N$, tenemos, $(\mathbb{R}, e^{tA}z)$ y $(\mathbb{R}, \varphi_t(z))$. Esto es, ambos intervalos maximales de las soluciones maximales, coinciden y son igual a $\mathbb{R}$.

Y por último, gracias a $\varphi_t \circ h = h \circ e^{tA}$, acabamos de probar que los sistemas diferenciales $y' = Ay$ y $y' = Ay + g(y)$ son topológicamente conjugados. Lo que finaliza la prueba del teorema. ∎

Bibliografía

[1] Apuntes de la asignatura "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias" del grado de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, presentados por Francisco Guillén González, José Antonio Langa Rosado y Antonio Suárez Fernández.

[2] Apuntes de la asignatura "Ampliación de Ecuaciones Diferenciales" del grado en Matemáticas de la Universidad de Sevilla, presentados por Manuel González Burgos.

[3] Hale, Jack K. *Ordinary differential equations.*

Wiley-Interscience. New York, 1969.

[4] Hirsch, Morris W. Smale, Stephen. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.*

Academic Press. New York, 1974.

[5] Jiménez López, Víctor. *Ecuaciones diferenciales : cómo aprenderlas, cómo ensenarlas.*

Universidad de Murcia, Servicio de Publicaciones. Murcia, 2000.

[6] Robinson, Clark. *Dynamical systems : stability, symbolic dynamics, and chaos.*

CRC Press. Florida, 1995.