



Esferas de homología

Juan Antonio Delgado Tejada



Esferas de homología

Juan Antonio Delgado Tejada

Trabajo de fin de grado que forma parte de los requisitos para la obtención del título de Grado en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Dirigido por

Ramón Jesús Flores Díaz

Abstract

In this Final Undergraduate Project we will deal with Homology Spheres, spaces with the same integer homology groups of the n -sphere but not homeomorphic to it in general. After introducing some required notions of Homotopy Theory, we will study in great detail the Poincaré sphere (also called Poincaré dodecahedron), the first historic example of an homology sphere. Later, other examples will be described, as Brieskorn manifolds or Seifert spheres. We will also discuss Dehn Surgery, a technique of great importance in Geometric Topology, that in particular is useful to construct any homology 3-sphere which possess a structure of closed manifold.

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se estudiarán las esferas de homología, espacios cuyos grupos de homología entera coinciden con los de una n -esfera pero en general no son homeomorfos a ella. Tras la introducción de algunos conceptos básicos requeridos de Teoría de Homotopía, estudiaremos con detenimiento la esfera o dodecaedro de Poincaré, el primer ejemplo histórico de esfera de homología, y otros ejemplos de importancia como las variedades de Brieskorn o las esferas de Seifert. Además, describiremos con cierto detalle la cirugía de Dehn, una técnica de enorme importancia en Topología Geométrica que en particular posibilita la construcción de cualquier 3-esfera de homología que tenga estructura de variedad cerrada.

Índice general

Introducción	1
0. Introducción a la Teoría de Homotopía	5
0.1. CW-complejos	5
0.2. Grupos de homotopía	8
0.3. Espacios recubridores	9
0.4. Fibrados	12
1. Esferas de Homología	15
1.1. La definición de esfera de homología	15
1.2. Propiedades	16
1.3. Panorama histórico	18
2. Esfera de Poincaré	21
2.1. Primera construcción	21
2.2. El grupo fundamental de la esfera de Poincaré	24
2.2.1. Caminos borde	24
2.2.2. Cálculo del grupo fundamental	26

II ESFERAS DE HOMOLOGÍA

2.3.	Propiedades del grupo binario icosaedral	29
2.4.	Grupos de homología	32
2.5.	Otras descripciones de la esfera de Poincaré	34
2.5.1.	Cociente de la 3-esfera por la acción del grupo binario icosaedral	34
2.5.2.	La esfera de Poincaré mediante <i>plumbing</i> en el grafo E_8 . . .	35
2.5.3.	La esfera de Poincaré como recubridor de un nudo	36
3.	3-esferas de homología y espacios de Moore	39
3.1.	Variedades de Brieskorn	39
3.2.	Esferas de homología de Seifert	42
3.3.	Cirugía de Dehn sobre nudos	45
3.4.	Espacios de Moore	47
3.5.	Conclusión	49

Introducción

El principal objetivo de la Topología es clasificar los espacios topológicos en clases de homeomorfía. Para cualquier clase de espacios más o menos rica, este objetivo suele resultar demasiado ambicioso, por lo cual normalmente, como paso previo, uno debe responder preguntas más modestas como: dados dos espacios concretos X e Y , ¿cómo puedo decidir si son homeomorfos o no? En general, uno puede enfrentarse a esta cuestión de dos maneras, dependiendo de la intuición que posea sobre su respuesta. Si se cree que los espacios van a ser homeomorfos, se intenta demostrar explícitamente la existencia de un homeomorfismo; en caso contrario, se busca un invariante (topológico, algebraico, homotópico, geométrico...) que posea uno y sólo uno de los dos espacios, para descartar la posibilidad de homeomorfismo.

En esta situación se hallaba Henri Poincaré, el gran pionero de la Topología (y de muchos otros campos), alrededor de 1900. Siendo consciente de que las superficies cerradas estaban esencialmente clasificadas, subió una dimensión y se planteó si sería posible también clasificar las 3-variedades cerradas. Consciente de la dificultad del problema al que se enfrentaba, planteó una pregunta mucho más específica: ¿serán homeomorfas dos variedades que tengan los grupos de homología de la 3-esfera? En un principio Poincaré pensaba que la conjetura sería cierta, pero poco después descubrió un contraejemplo, que posteriormente ha pasado a ser conocido como esfera o dodecaedro de Poincaré. La táctica para ver que este espacio no es homeomorfo a la esfera (a pesar de tener la misma homología) fue probar que su grupo fundamental no es trivial. A partir de este punto Poincaré refinó su pregunta, añadiendo la hipótesis de que la variedad sea simplemente conexa, para así completar la formulación de la celeberrima *conjetura de Poincaré*. En la sección 1.3 ofrecemos más detalles sobre todo esto.

La esfera de Poincaré aparece de este modo como el primer ejemplo *exótico* de n -esfera de homología, i.e. un espacio con la homología de una n -esfera (en este caso

para $n = 3$) que no es homeomorfo a ella. Estos espacios constituyen el principal objeto de estudio del presente trabajo, en el que proponemos describirlos, mostrar algunas de sus principales propiedades y sobre todo construir de modo explícito bastantes ejemplos concretos de ellos. En el camino, se utilizarán algunas herramientas de gran interés en Topología Algebraica, Topología Geométrica y Teoría de Nudos. A continuación ofrecemos un resumen del contenido de cada uno de los capítulos del trabajo.

ne saurait donc en déduire $C_2 \equiv 0$, $C_4 \equiv 0$, ni a fortiori déduire ces deux équivalences de (2) et de (3) seulement.

Il y a donc deux cycles de \mathcal{V} qui ne sont pas équivalents à zéro; donc \mathcal{V} n'est pas simplement connexe.

En d'autres termes, le groupe fondamental de \mathcal{V} ne saurait se réduire à la substitution identique, puisqu'il contient comme sous-groupe le groupe icosaédrique.

Il resterait une question à traiter :

Est-il possible que le groupe fondamental de \mathcal{V} se réduise à la substitution identique, et que pourtant \mathcal{V} ne soit pas simplement connexe?

En d'autres termes, peut-on tracer les cycles K'_1 et K'_2 de telle façon qu'ils ne soient pas bouclés et ne se coupent pas; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0, \quad K''_1 \equiv K''_2 \equiv 0$$

entraînent les équivalences

$$C_1 \equiv C_2 \equiv C_3 \equiv C_4 \equiv 0$$

et que cependant la surface \mathcal{W} ne puisse pas être regardée comme homéomorphe à elle-même de telle façon qu'aux cycles C_1, C_2, C_3, C_4 correspondent les cycles C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 ; que les équivalences

$$K'_1 \equiv K'_2 \equiv 0$$

entraînent $C'_1 \equiv C'_2 \equiv 0$ et réciproquement; et qu'enfin les équivalences

Figura 1: Fragmento del *Cinquième complément à l'Analysis situs* donde se enuncia la conjetura de Poincaré por primera vez

En el capítulo cero, de naturaleza introductoria, describimos una serie de conceptos clásicos de Topología Algebraica que serán necesarios durante el trabajo. Comenzamos con los CW-complejos, que constituyen la estructura básica de los espacios que manejamos; a continuación los grupos de homotopía de orden superior, que generalizan la idea de grupo fundamental a dimensiones más altas, y que nos serán necesarios sobre todo a través de las aplicaciones del teorema de Hurewicz; los espacios recubridores, que aparecen en el trabajo tanto en su versión clásica como ramificada, y los fibrados, cruciales en las construcciones explícitas de los últimos capítulos. Aquí es importante remarcar que en este trabajo se asumen como conocidos los contenidos de Topología que se imparten en la carrera, así que este capítulo debe verse como una ampliación sucinta pero necesaria de dichos contenidos.

En el capítulo uno presentamos las esferas de homología, el objeto central de nuestro trabajo. Tras presentar y comentar la definición que adoptamos de ellas (ya que no existe un consenso total sobre qué condiciones hay que imponer en la definición), recorreremos algunas de sus propiedades, en relación a sumas conexas, suspensiones, orientabilidad y dualidad. Al final del capítulo ofrecemos un panorama histórico de cómo surgió el concepto, un recorrido por la investigación que generó la mencionada conjetura de Poincaré y un pequeño resumen de las líneas de investigación actuales sobre esferas de homología.

El capítulo dos está dedicado en su totalidad a la esfera de Poincaré, que ocupa un papel central en la teoría tanto por su importancia histórica, que ya hemos comentado, como por su ubicuidad, ya que admite un gran número de descripciones diferentes que involucran muchas de las técnicas que se usan en este contexto. Tras ofrecer una primera construcción, desarrollamos la técnica de los complejos de superficie [Sei] para calcular su grupo fundamental, y ofrecemos una breve panorámica de las principales propiedades de dicho grupo. A partir de este cálculo obtenemos la homología del espacio, probando de esta manera que la esfera de Poincaré es en efecto una esfera de homología. En la parte final del capítulo, seguimos a Kirby-Scharlemann [Kir] para mostrar descripciones de este objeto mediante un cociente de una acción sobre un grupo de Lie, vía operaciones con fibrados, y como recubridor de un nudo tórico.

En el tercer y último capítulo estudiamos otros ejemplos de esferas de homología, concentrándonos en la dimensión 3. Comenzamos con las variedades de Brieskorn, construidas como intersecciones de hipersuperficies y esferas complejas; luego se ofrece una descripción topológica (vía fibrados) de las esferas de Seifert, y a continuación describimos la cirugía de Dehn sobre nudos y enlaces, que es la herramienta más potente de que se dispone para construir esferas de homología, con profusión de ejemplos concretos. En la parte final nos ocupamos de la generalización del concepto de esfera de homología que ofrecen los espacios de Moore, y concluimos el trabajo orientando al lector sobre qué temas debe elegir para profundizar en la exposición necesariamente elemental que se ofrece en este trabajo.

Esta Memoria está estructurada en capítulos y secciones. En general, al principio de cada sección se ofrecen las referencias en las que nos hemos basado para escribir dicha sección. Así, debe entenderse que las demostraciones que no están reseñadas de modo explícito en el texto aparecen en la sección de referencia correspondiente. Hemos obrado de este modo para no sobrecargar de detalles innecesarios y referencias bibliográficas excesivas una exposición que, como se le supone a un Trabajo de Fin de Grado, debe poseer una longitud limitada. Esperamos en cualquier caso haber sido

4 ESFERAS DE HOMOLOGÍA

capaces de transmitir de modo claro y suficientemente riguroso los contenidos del trabajo.

Nota. A lo largo del trabajo, y salvo mención explícita en contra, "variedad" quiere decir "variedad topológica".

0 | Introducción a la Teoría de Homotopía

En este primer capítulo daremos unas nociones generales de Teoría de Homotopía que posteriormente nos serán de utilidad en los siguientes capítulos. Introduciremos los CW-complejos, los grupos de homotopía, los espacios recubridores y los fibrados.

0.1 CW-complejos

Desde que fueron introducidos por J.H.C. Whitehead en los años 50, los CW-complejos se revelaron como un marco especialmente adecuado para desarrollar Teoría de Homotopía. Estas estructuras combinatorias, que se construyen esencialmente pegando esferas, presentan gran flexibilidad, pues permiten representar la mayor parte de los espacios de interés en este contexto, y en particular generalizan los complejos simpliciales, evitándose con su uso muchas de las complicaciones técnicas derivadas de las triangulaciones.

En este trabajo supondremos siempre que los espacios son Hausdorff y poseen el tipo de homotopía de un CW-complejo. Además, la estructura combinatoria será especialmente relevante en el cálculo del grupo fundamental de la esfera de Poincaré y en las pruebas de existencia de espacios de Moore. A continuación ofrecemos un repaso de las principales definiciones que utilizaremos; una referencia extensiva son los capítulos 5 y 6 del libro de Switzer [\[Swi\]](#).

Comenzamos definiendo los complejos celulares.

| Definición 0.1. Definimos un *complejo celular* sobre un espacio topológico X como una colección $K = \{e_\alpha^n\}$ de subconjuntos de X , donde $n \in \mathbb{Z}$ y $\alpha \in \Lambda$, un conjunto

de índices. A los conjuntos e_α^n se los denomina *celdas de dimensión n* , o *n -celdas*. El conjunto de celdas de dimensión menor o igual que n se denota K^n y se denomina *n -esqueleto* de K , y su unión se denota $|K^n|$. Se define también el borde ∂e_α^n de una n -celda como la intersección $e_\alpha^n \cap |K^{n-1}|$, y el interior de e_α^n como $e_\alpha^n \setminus \partial e_\alpha^n$. Además deben verificarse las siguientes condiciones:

- X es la unión de todas las celdas de K .
- La intersección de los interiores de dos celdas es siempre vacía.
- Para cada celda e_α^n existe una aplicación *característica*

$$f_\alpha^n : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$$

que es epiyectiva y restringe a un homeomorfismo en los interiores de D^n y e_α^n .

Por la compacidad de D^n y la tercera condición, tenemos que las celdas son compactas. Con la hipótesis de que nuestro espacio es Hausdorff, tenemos que las celdas son siempre cerradas. La definición de esqueleto permite restringirse a celdas con dimensión acotada.

A continuación discutiremos brevemente las posibles relaciones entre las celdas de un complejo celular.

| Definición 0.2. Diremos que una celda e_β^m es *cara inmediata* de otra celda e_α^n si su interior tiene intersección no vacía con e_α^n . Asimismo, se dice que e_β^m es *cara* de e_α^n si existe una sucesión finita de celdas $\{e_\beta^m = e_{\beta_0}^{m_0}, e_{\beta_1}^{m_1}, \dots, e_{\beta_s}^{m_s} = e_\alpha^n\}$, cada una cara inmediata de la posterior, que comienza en e_β^m y concluye en e_α^n . Las celdas que no son cara de ninguna otra celda se denominan *principales*.

Ahora ya podemos dotar a los complejos celulares de una topología.

| Definición 0.3. Dado un espacio topológico X , una estructura de CW-complejo sobre X es un complejo celular K sobre X tal que cada n -celda tiene un número finito de caras, y K tiene la topología débil inducida por X .

Como ha quedado dicho más arriba, los CW-complejos generalizan la noción de complejo simplicial, pues todo complejo simplicial posee una estructura celular derivada de las relaciones de inclusión entre sus caras. Asimismo, puede probarse que toda variedad topológica es del tipo de homotopía de un CW-complejo [Mil].

Intuitivamente, los CW-complejos se construyen mediante un pegado sucesivo de esferas. A continuación estableceremos esta noción de modo riguroso.

Definición 0.4. Sea una aplicación continua $g : S^{n-1} \rightarrow X$. El *cono de la aplicación g* se define como el cociente de pegar X con el cono CS^{n-1} a través de g , y se denota $X \cup_g CS^{n-1}$. A la aplicación g se llama la *aplicación de pegado*. La restricción $f : CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$ de la aplicación cociente $X \vee CS^{n-1} \rightarrow X \cup_g CS^{n-1}$ inducida por g es un homeomorfismo en el interior del cono y se llama *aplicación característica de la celda*.

Nota 0.1. De un modo análogo se define el *cilindro* de la aplicación g .

Proposición 0.1. Sea la siguiente sucesión encajada de espacios

$$X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset X^{n+1} \subset \dots$$

de manera que $X^{-1} = \emptyset$ y X^{n+1} se obtiene del anterior mediante pegado de n -celdas. Si dotamos a la unión X de los X^n con la topología débil, las celdas pegadas sucesivamente dotan a X de estructura de CW-complejo.

A continuación veremos que la continuidad de aplicaciones entre CW-complejos también puede verificarse celda a celda.

Definición 0.5. Sea X un CW-complejo, Y un espacio topológico cualquiera, $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre ellos. Entonces la aplicación f es continua si y sólo si $f|_{e_\alpha^n} : e_\alpha^n \rightarrow Y$ es continua para cada una de las celdas $\{e_\alpha^n\}$.

Nota 0.2. Una aplicación $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ es continua si y sólo si lo es respecto a cada $e_\alpha^n \times [0, 1]$, es decir, $F|_{e_\alpha^n \times [0, 1]} : e_\alpha^n \times [0, 1] \rightarrow Y$ es continua.

Se pueden definir sin ningún problema las correspondientes estructuras de sub-complejo celular y sub-CW-complejo, así como estructuras celulares para pares, productos, conos, suspensiones, etc. También se pueden definir acciones de grupos sobre CW-complejos imponiendo la restricción de que las acciones permuten las celdas.

Concluimos nuestra introducción a los CW-complejos describiendo brevemente la *homología* celular, que es la noción más adecuada de homología en este contexto. Sea pues X un CW-complejo, X^n su n -esqueleto, $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$ el conjunto de n -celdas y $\{f_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$ las correspondientes aplicaciones características para un conjunto de índices A_n . Definimos el *grupo abeliano de n -cadenas celulares* $C_n^{cw}(X)$ como el grupo abeliano libre con una base dada por las celdas $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in A_n}$. El operador borde $\partial_n : C_n^{cw}(X) \rightarrow C_{n-1}^{cw}(X)$ actúa sobre los elementos de la base como $\partial_n(e_j^n) = \sum_{i \in A_{n-1}} c_{ij}^n e_i^{n-1}$ siendo los c_{ij}^n *números de incidencia*: dada la aplicación característica f_j^n , se define c_{ij}^n como el grado de la composición de $\partial f_j^n : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ con la aplicación cociente $X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_i^{n-1})$. En estas condiciones, la composición

de dos bordes consecutivos es la aplicación trivial, y se define la *homología celular* de X como la homología del complejo de cadenas resultante.

Nota 0.3. Como la homología celular cumple las propiedades de homotopía, escisión, exactitud y dimensión, se trata sencillamente de una versión de la homología ordinaria, y en particular coincide con la homología simplicial sobre complejos simpliciales. Ver ([Hat], Teorema 4.59).

0.2 Grupos de homotopía

Continuamos esta sección preliminar con una breve descripción de los grupos de homotopía superior. La referencia principal para esta sección será el capítulo 4 de [Hat], donde se ofrece una exposición detallada. En este trabajo, estos grupos aparecerán sobre todo en relación con algunas aplicaciones de los teoremas clásicos de Hurewicz y Whitehead, que incluimos al final de esta sección, y en el cálculo de la homología de las variedades de Brieskorn.

Sea (X, x_0) un espacio con punto base. Consideramos, para todo $n \geq 1$, el conjunto $[S^n, X]_*$ de clases de homotopía con punto base de aplicaciones de la n -esfera en X . Se puede dotar a estos conjuntos de estructura de grupo del siguiente modo: dadas dos aplicaciones $f, g : S^n \rightarrow X$, definimos el producto fg mediante la composición $S^n \rightarrow S^n \vee S^n \rightarrow X$ donde la primera aplicación contrae el ecuador a un punto y la segunda es la suma puntual $f \vee g$.

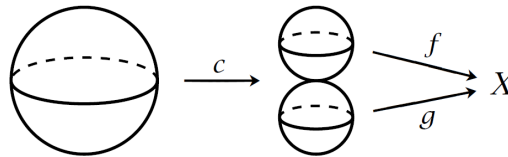


Figura 1: Ilustración del producto anteriormente definido.

Se comprueba sin dificultad que de esta manera se ha definido una estructura de grupo en $[S^n, X]_*$; dicho grupo se denota $\pi_n(X, x_0)$, y se denomina n -ésimo grupo de homotopía de X . El primer grupo de homotopía es el bien conocido grupo fundamental; si $n \geq 2$, se puede probar que estos grupos son siempre abelianos. Asimismo, al igual que ocurre con el grupo fundamental, el tipo de isomorfismo de $\pi_n(X, x_0)$ no depende para ningún n del punto base tomado si el espacio X es arco-conexo; en este caso se suele escribir sencillamente $\pi_n(X)$.

A continuación enunciamos dos de los principales teoremas que relacionan la homotopía y la homología de un espacio. El primero es el teorema de Hurewicz, que relaciona los grupos correspondientes en dimensiones bajas:

Teorema 0.1. *Sea $n \geq 2$, X un espacio $(n - 1)$ -conexo. Entonces el homomorfismo de Hurewicz $h_q : \pi_q(X) \rightarrow H_q(X)$ es biyectivo si $q = n$ y epiyectivo si $q = n + 1$. Además, h_1 es epiyectivo, e induce un isomorfismo $\pi_1^{ab}(X) \simeq H_1(X)$.*

Demostración. La definición del homomorfismo de Hurewicz y la prueba del teorema pueden encontrarse respectivamente en 10.23 y 10.25 de [Swi].

El teorema de Whitehead, por su parte, establece que los grupos de homología determinan el tipo de homotopía en CW-complejos 1-conexos.

Teorema 0.2. *Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre CW-complejos simplemente conexos inducen una equivalencia de homotopía si*

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

es un isomorfismo para cada n .

Demostración. Ver Corolario 4.33 en [Hat].

Concluimos el capítulo definiendo los espacios de Eilenberg-MacLane, de suma importancia en Teoría de Homotopía.

Definición 0.6. *Sea $n \geq 1$, G un grupo que suponemos abeliano si $n \geq 2$. Un espacio de Eilenberg-MacLane para G y n es un CW-complejo conexo $K(G, n)$ tal que $\pi_n(K(G, n)) = G$, $\pi_i(K(G, n)) = 0$ para $i \neq n$.*

Para todo G y n en las condiciones del enunciado existe un modelo para $K(G, n)$. Además, dos modelos para $K(G, n)$ son siempre del mismo tipo de homotopía. Ver [Hat] 1.B y 4.2.

0.3 Espacios recubridores

Otro objeto clásico de teoría de homotopía que aparece en este trabajo son los espacios recubridores, tanto en su versión estándar como en su versión ramificada. Aunque tangencialmente, aparecerán en nuestro trabajo en la justificación de la orientabilidad de la esfera de Poincaré, en la descripción de este objeto como cociente de

un grupo de Lie compacto, y en la construcción de esferas de homología como recubridores ramificados de nudos. En esta sección ofrecemos las definiciones necesarias para seguir el texto; un tratamiento más detallado puede encontrarse en el capítulo 5 de [Mas] para los recubridores estándar, y en [Pie] para los ramificados. Estas son las referencias que hemos seguido en esta sección, donde en particular se encuentran las demostraciones de los resultados que se citan más abajo.

Para evitar problemas técnicos, en el resto de esta sección asumimos que los espacios que aparecen son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Comenzamos con la definición de recubridor:

Definición 0.7. Consideramos una aplicación continua $p : Y \rightarrow X$ entre espacios. Se dirá que la aplicación p es recubridora si todo punto de X posee un entorno abierto U de modo que $p^{-1}(U)$ descompone como unión disjunta $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ de abiertos de Y , y tal que para todo α $p|_{U_{\alpha}}$ es un homeomorfismo entre U_{α} y U . Se dirá entonces que el par (Y, p) es un espacio recubridor de X .

Cuando la aplicación recubridora es obvia, es habitual referirse al espacio X como recubridor. Asimismo, se deduce inmediatamente de la definición que p es epiyectiva y homeomorfismo local.

La idea intuitiva de espacio recubridor es empalmar adecuadamente copias del espacio base, de modo que a nivel local se respete la estructura topológica del mismo. El ejemplo no trivial más sencillo es probablemente la aplicación $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ que define el grado. El lector puede encontrar otros ejemplos en ([Mas], 5.2).

El siguiente resultado está en la base de casi todas las propiedades importantes de los recubridores:

Proposición 0.2. Sea un recubridor $p : Y \rightarrow X$, $y_0 \in Y$. Se tiene que para todo camino $f : I \rightarrow X$ tal que $f(0) = p(y_0)$ hay un único camino $g : I \rightarrow Y$ con $g(0) = y_0$ y tal que $p \circ g = f$.

Como consecuencia de este resultado, todas las antiimágenes por la aplicación recubridora de puntos de X poseen el mismo cardinal, llamado *número de hojas* del recubridor.

Veamos ahora una importante resultado que relaciona el grupo fundamental de un espacio con el de su espacio recubridor.

Teorema 0.3. Sea (Y, p) un recubridor de un espacio X , $y_0 \in Y$, $x_0 = p(y_0)$. Se tiene que el homomorfismo inducido $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo. Además,

los subgrupos $p_*\pi_1(Y, y_0)$ constituyen, para todo $\bar{y} \in p^{-1}(x_0)$, una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

En particular, las inclusiones de subgrupos en el grupo fundamental de un espacio dan lugar a una jerarquía entre los recubridores:

Proposición 0.3. Sean dos recubridores $p_1 : Y_1 \rightarrow X$, $p_2 : Y_2 \rightarrow X$, con $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$ y tales que $p_1(y_1) = p_2(y_2)$. Se tiene que existe un homomorfismo $f : (Y_1, p_1) \rightarrow (Y_2, p_2)$ tal que el triángulo correspondiente conmuta y $f(y_1) = y_2$, si y sólo si $p_{1*}(\pi_1(Y_1, y_1))$ es un subgrupo de $\pi_1(Y_2, y_2)$. Además, la existencia de f implica que (Y_1, f) es un espacio recubridor de Y_2 .

Puede probarse que a cada clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1 X$ le corresponde un recubridor de X . Así, al recubridor que corresponde al subgrupo trivial se lo llama *recubridor universal* de X y se lo denota \tilde{X} . El recubridor universal es simplemente conexo y recubre a cualquier otro recubridor de X .

Una última propiedad que utilizaremos en el trabajo es la siguiente. Sea un recubridor $p : Y \rightarrow X$, y consideramos un elemento $[\alpha]$ de $\pi_1(X, x_0)$ y un punto y tal que $p(y) = x_0$. La proposición 0.2 implica que existe una única clase de caminos $[\hat{\alpha}]$ tal que $p_*(\hat{\alpha}) = \alpha$ y $\hat{\alpha}(0) = y$. Se puede definir entonces la acción (a derecha) de $\pi_1(X, x_0)$ sobre la fibra $p^{-1}(x_0)$ como $y \cdot [\alpha] = \hat{\alpha}(1)$. Se comprueba sin dificultad que esta definición es correcta y en efecto define una acción. En particular, esta acción es transitiva y el grupo de isotropía de y es $p_*\pi_1(Y, y)$. Por tanto, cuando Y es el recubridor universal \tilde{X} de X , la acción es libre y define una acción de $\pi_1(X)$ sobre el propio \tilde{X} , cuyo espacio de órbitas es X .

Para concluir esta sección, vamos a definir los recubridores ramificados. Recordemos que un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico se dice *diseminado* si su clausura tiene interior vacío.

Definición 0.8. Una aplicación continua y sobreyectiva $p : Y \rightarrow X$ es un recubridor ramificado si existe un conjunto diseminado $\Delta \subset X$ de modo que la restricción de p a $p^{-1}(X \setminus \Delta)$ es una proyección recubridora.

A los puntos de $Y \setminus \Delta$ se los llama *puntos regulares*, mientras que a los de Δ se los denomina *puntos singulares* o *puntos de ramificación*. El número de hojas del recubridor ramificado es por definición el número de hojas del recubrimiento asociado a los puntos regulares. Obsérvese que los recubridores clásicos corresponden al caso en que $\Delta = \emptyset$.

El ejemplo no trivial más sencillo de estos objetos es probablemente la proyección $p : S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$, que es un recubridor ramificado de dos hojas. La imagen por p del punto común a las dos circunferencias es el único punto de ramificación del recubridor, mientras que el resto de los puntos de S^1 son regulares. A lo largo de este trabajo aparecerán diferentes recubridores ramificados de nudos.

Los recubridores ramificados son importantes, además de en Topología Algebraica, en Geometría Algebraica, Teoría de Números y Análisis Complejo, ya que son básicos en la teoría de superficies de Riemann. Una aproximación concisa e interesante desde el punto de vista topológico puede encontrarse, como ya hemos dicho anteriormente, en [Pie].

0.4 Fibrados

Concluimos este capítulo introductorio estudiando la noción de fibrado, que será clave en la construcción de algunos de los modelos de esferas de homología que trataremos en los siguientes capítulos. Las referencias para este capítulo son el capítulo 2 de [Spa] para fibrados generales y el capítulo 1 de [Hat2] para fibrados vectoriales.

Comenzamos pues estableciendo la definición de fibrado:

Definición 0.9. Consideramos espacios topológicos B y F . Un fibrado (E, B, p) sobre una base B con fibra F viene dado por un espacio E , llamado espacio total, y una aplicación continua $p : E \rightarrow B$ tal que para cada $x \in B$ existe un entorno abierto U de x para el cual $p^{-1}(U)$ es homeomorfo a $U \times F$, y tal que p restringida a $p^{-1}(U)$ es la proyección sobre U .

Expresado de un modo más gráfico, para cada $x \in B$, existe un abierto U entorno de x en B y un homeomorfismo ϕ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U & & \end{array}$$

Dado un entorno U como en la definición, al homeomorfismo $\phi : U \times F \simeq p^{-1}(U)$ se le llama *trivialización local* del fibrado. Las trivializaciones locales describen la estructura local de E . Asimismo, cuando F posee estructura de espacio vectorial y las

trivializaciones locales restringen a isomorfismos lineales sobre cada punto del abierto respectivo, el fibrado se denomina *fibrado vectorial*.

A continuación describiremos los morfismos entre fibrados:

| Definición 0.10. Una aplicación entre dos fibrados (E_1, B_1, p_1) y (E_2, B_2, p_2) viene dada por un par de aplicaciones continuas (f_E, f_B) que hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{f_E} & E_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f_B} & B_2 \end{array}$$

y tales que las aplicaciones inducidas entre fibras son homeomorfismos. Si f_E y f_B también lo son, se dice que (f_E, f_B) es un isomorfismo de fibrados.

A continuación vamos a describir algunos ejemplos de fibrados que tendrán importancia en el resto del trabajo:

- El *fibrado producto*, dado por $E = F \times B$ y siendo $p : E \rightarrow B$ la segunda proyección.
- Dada una variedad diferenciable M y su espacio tangente TM , el *fibrado tangente* (E, M, p) viene dado por

$$E = \{(x, v) \mid x \in M, v \in T_x M\},$$

con $p(x, v) = x$. Se trata de un fibrado vectorial cuyas fibras tienen la misma dimensión que la variedad.

- Sea $M \subset \mathbb{R}^m$ una variedad diferenciable de dimensión $n < m$, sea de nuevo TM su espacio tangente, y sea TM^\perp su ortogonal en \mathbb{R}^m . El fibrado *normal* a la variedad en \mathbb{R}^m es el fibrado (E, M, p) , con

$$E = \{(x, v) \mid x \in M, v \in T_x M^\perp\},$$

y $p(x, v) = x$. También es un fibrado vectorial, y sus fibras tienen dimensión $m - n$.

- Dado un fibrado vectorial (E, B, p) , la *sección cero* del fibrado es la aplicación $s : B \rightarrow E$ que envía cada punto $b \in B$ en el 0 de $p^{-1}(b)$. En estas condiciones, se define el fibrado esférico asociado a (E, B, p) como el cociente $S(E)$ de $E \setminus s(B)$ por la relación de equivalencia que identifica vectores proporcionales en cada fibra, y estando la aplicación $p' : S(E) \rightarrow B$ inducida por p .

- En las condiciones del ejemplo anterior, definimos el fibrado de discos como aquel cuyo espacio total $D(E)$ es el cociente de $S(E) \times [0, 1]$ obtenido al identificar los puntos de $S(E) \times \{0\}$ cuya imagen por s es la misma, y cuya proyección $p' : D(E) \rightarrow B$ viene de nuevo inducida por p .

Para concluir este capítulo preliminar, describimos una operación que permite definir nuevos fibrados a través de aplicaciones continuas a la base de un fibrado dado.

| Definición 0.11. *Sea un fibrado (E, B, p) y una aplicación continua $\phi : \bar{B} \rightarrow B$ desde otro espacio \bar{B} . Definimos el fibrado pull-back de (E, B, p) a lo largo de ϕ como el fibrado $(\bar{E}, \bar{B}, \bar{p})$ tal que*

$$\bar{E} = \{(\bar{b}, e) \mid \phi(\bar{b}) = p(e)\} \subseteq \bar{B} \times E,$$

y cuya aplicación asociada es $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow \bar{B}$ dada por $\bar{p}(\bar{b}, e) = \bar{b}$.

Se puede demostrar que esto es efectivamente un fibrado con la misma fibra que el fibrado original. Se cumple que dos aplicaciones $f, g : \bar{B} \rightarrow B$ homotópicas producen fibrados pull-back isomorfos (ver [Ste], I.11.5).

1 | Esferas de Homología

En este capítulo introducimos las esferas de homología, objeto principal de estudio en nuestro trabajo. Definiremos el concepto de esfera de homología, se probarán varias propiedades y se ofrecerá una panorámica histórica del rol que han desempeñado en el desarrollo de la Topología Algebraica y Geométrica.

En este capítulo nos hemos guiado por diversas fuentes. Para no sobrecargar la bibliografía, citaremos únicamente las más relevantes.

1.1 La definición de esfera de homología

Este trabajo está dedicado al estudio de las esferas de homología, así que hay que comenzar clarificando el concepto que vamos a tratar. No existe unanimidad sobre qué se considera una esfera de homología, pero la noción más comúnmente aceptada es la siguiente:

Definición 1.1. Sea $n \geq 1$. Un espacio X se dice n -esfera de homología si $H_0(X) = H_n(X) = \mathbb{Z}$ y $H_i(X) = 0$ en otro caso.

Así, una esfera de homología es un espacio cuyos grupos de homología son isomorfos índice a índice a los de la esfera, pero que en principio no tiene que ser ni siquiera homotópicamente equivalente a ella. Como ya hemos indicado en la introducción y desarrollamos más abajo en la sección 1.3, las esferas de homología surgen en el trabajo de Poincaré en el contexto de la teoría de variedades, y se han mostrado como objetos de gran importancia en topología geométrica y de baja dimensión. Por ello, en este contexto, los autores a menudo asumen que las esferas de homología han de ser variedades cerradas (ver por ejemplo [Sav]). Aunque a priori nosotros asumamos en este trabajo la definición menos restrictiva, no conviene perder de vista que

todos los ejemplos que describimos en los capítulos 2 y 3 (excepto algunos de la sección 3) poseen de hecho estructura de variedad cerrada. En gran parte, el desarrollo de la teoría ha venido soportado en el conocimiento de estos objetos en dimensión 3.

Frecuentemente, y en especial en el ámbito de la homotopía racional, conviene considerar una ampliación del concepto, hablando de R -esferas de homología para un cierto grupo R que hace el papel de \mathbb{Z} en la definición clásica. Trataremos este caso en la sección 3, dedicada a espacios de Moore.

1.2 Propiedades

A continuación vamos a enumerar algunas de las propiedades más relevantes de las esferas de homología.

Suspensiones. La operación suspensión es la manera más directa de que crear nuevas esferas de homología a partir de otras ya conocidas:

Proposición 1.1. Si X es una n -esfera de homología, ΣX es a su vez una $(n+1)$ -esfera de homología.

Demostración. Basta recordar que para cualquier espacio X existe siempre un isomorfismo de suspensión en homología reducida $\tilde{H}_i(X) \simeq \tilde{H}_{i+1}(\Sigma X)$ para todo $i \geq 0$. La proposición es consecuencia inmediata de este resultado.

|

Una pregunta interesante es cómo de exóticas pueden ser las esferas que se generen al suspender. En este sentido, el siguiente teorema (que se considera folklore) ofrece una respuesta a priori bastante sorprendente.

Teorema 1.1. Sea M una esfera de homología no simplemente conexa de dimensión mayor o igual que 3. Entonces la suspensión de M no puede ser una variedad topológica.

Idea de la demostración. Obsérvese que para $n \geq 3$, cada punto de \mathbb{R}^n posee un entorno arbitrariamente pequeño que es simplemente conexo. Sin embargo, esto no puede ocurrir para entornos arbitrariamente pequeños de cualquiera de los dos puntos singulares de la suspensión ΣM . Ver ([Dav], ejemplo 10.4.9).

A simple vista, pues, parece que iterando suspensiones se van a poder obtener múltiples esferas de homología exóticas. Sin embargo, esto no va a ocurrir en general, como establece el celeberrimo teorema de la doble suspensión de Cannon-Edwards [Can].

| Teorema 1.2. *La doble suspensión de cualquier n -esfera de homología es homeomorfa a S^{n+2} .*

La demostración de este teorema queda fuera de las posibilidades de este trabajo.

Sumas conexas. Sabemos que la suma conexa es un método estándar de crear nuevas variedades a partir de otras. Esto también es válido en el caso de las esferas de homología.

Proposición 1.2. Sean M_1 y M_2 dos n -esferas de homología, $n \geq 2$, que sean variedades cerradas. Entonces $M_1 \sharp M_2$ es de nuevo una n -esfera de homología.

Demostración. Sea D la n -bola que es removida de M_1 y M_2 para realizar la suma conexa. Teniendo en cuenta que una n -esfera de homología menos un disco siempre es un espacio contráctil, el correspondiente homomorfismo de conexión de Mayer-Vietoris $H_i(X) \rightarrow H_{i-1}(\partial D)$ es un isomorfismo para todo i . Como ∂D es una $(n-1)$ -esfera, hemos concluido.

|

Así, la suma conexa es una operación interna entre las n -esferas de homología que son variedades cerradas. Recíprocamente, una n -esfera de homología en estas condiciones se dice *prima* o *irreducible* si no puede ponerse como suma conexa no trivial de n -esferas de homología. Toda esfera de homología que es variedad cerrada es suma conexa esencialmente única de esferas irreducibles.

Orientabilidad. Si M es una n -variedad cerrada que es una esfera de homología, es siempre orientable. Es consecuencia de [Hat], Teorema 3.26, junto con el hecho de que por definición de esfera de homología, $H_n(M) = \mathbb{Z}$.

Dualidad. Las R -esferas de homología son la contrapartida homológica de los espacios de Eilenberg-MacLane, que como vimos en la definición 0.6 son espacios con un único grupo de homotopía no nulo. Esto es una manifestación de un fenómeno general en Teoría de Homotopía conocido con *dualidad de Eckmann-Hilton*, que establece

que múltiples objetos y construcciones poseen cierto nivel de dualidad. Por ejemplo, dado un espacio X tal que su primer grupo de homología sea R , siempre existe una aplicación $M \rightarrow R$ que es isomorfismo en el H_1 . Recíprocamente, si el grupo fundamental de X es G , existe una aplicación $X \rightarrow K(G, 1)$ que es isomorfismo en π_1 . O también, el fenómeno dual de que la suspensión de una esfera de homología vuelva a serlo (como hemos visto más arriba) es que el espacio de lazos (con la topología compacta-abierta) de un espacio de Eilenberg-MacLane vuelve a serlo. Seguramente, la mayor violación de este principio de dualidad es la no conmutatividad del π_1 .

1.3 Panorama histórico

Aunque ni siquiera la definición formal de superficie cerrada estaba todavía fijada con total rigor a finales del siglo XIX, el concepto estaba muy claro, y también el teorema de clasificación era básicamente conocido después de los trabajos de Moebius, Jordan y von Dyck. Era lógico que Henri Poincaré, el matemático más ilustre de la época, autor de innumerables contribuciones en campos tan distantes como el Análisis, los Sistemas Dinámicos, las Ecuaciones en Derivadas Parciales o la Geometría, diera un paso más y tratara de dar el siguiente paso: la clasificación de las 3-variedades.

Una de las características del teorema de clasificación de superficies cerradas es que dos superficies conexas son homeomorfas si y sólo si son del mismo tipo de homotopía. En particular, si una tal superficie es homotópicamente equivalente a la esfera, debe ser homeomorfa a ella. Poincaré juzgó acertadamente que resolver la pregunta análoga en dimensión 3 sería un buen test para averiguar la viabilidad de la clasificación. El problema es que en ese momento (última década del siglo XIX) la definición de homotopía tampoco está fijada. Unos años antes, el matemático italiano Enrico Betti había definido los números que hoy llevan su nombre, y que suponían en ese momento el embrión de la noción de homología. Fue el propio Poincaré el que llevó a cabo la formalización de dicho concepto, y en particular dedujo que debía de ser lo que hoy conocemos como un invariante homotópico. Este hecho le llevó a conjeturar en el año 1900 que toda variedad con los mismos grupos de homología de S^3 debería ser en realidad homeomorfa a la propia S^3 . Sin embargo, él mismo se dio cuenta poco después de que la conjetura era falsa, cuando descubrió la esfera que lleva su nombre, y que su grupo fundamental (concepto que acababa de desarrollar) es no trivial, lo cual automáticamente implica que dicha esfera no puede ser homeomorfa a S^3 ; sin embargo, sí que era cierto que sus grupos de homología eran los mismos que los de S^3 . Por tanto, se había descubierto la primera 3-esfera de homología exótica.

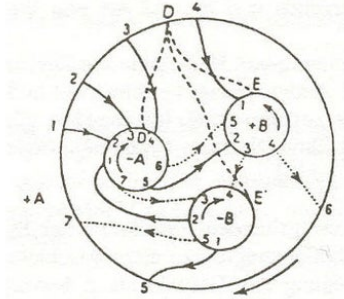


Figura 1.1: Boceto original de la esfera de Poincaré

El descubrimiento de la esfera de Poincaré llevó a este brillante matemático a reformular su conjetura, añadiendo la hipótesis de conexión simple a la ya formulada sobre homología para en particular descartar ese contraejemplo. El enunciado estándar de la conjetura, equivalente al anterior, es:

“¿Existe una 3-variedad cerrada y simplemente conexa que sea homotópicamente equivalente a S^3 pero no homeomorfa a ella?”

Este fue el problema que resolvió Perelman [Per] usando el flujo de Ricci y que, en particular, supuso el paso decisivo para cerrar la clasificación de las estructuras geométricas sobre las 3-variedades ([Mor2]), que esencialmente resolvió el problema de clasificación de 3-variedades cerradas. Cien años después¹.

Los esfuerzos para resolver la conjetura dieron lugar a una línea de investigación propia, las conjeturas de Poincaré generalizadas, donde se intentan resolver análogos de la pregunta de Poincaré para dimensiones superiores y variedades de tipos más generales. Por ejemplo, Smale y Freedman recibieron la medalla Fields por resolver el análogo de la pregunta de Poincaré para $n > 4$ y $n = 4$, respectivamente. Asimismo, el camino hacia una demostración de la conjetura y el área de investigación que surgió a su alrededor dejó, además de muchas pruebas falsas, contribuciones tan importantes como la variedad de Whitehead, las esferas exóticas (en sentido diferenciable), las variedades de homología, el trabajo de Preissmann, Riley y sobre todo Thurston sobre

¹Junto a la formulación de la conjetura, Poincaré añadió proféticamente: “Esta pregunta nos llevará muy lejos”.

variedades hiperbólicas, etc. La conjetura de Poincaré funcionó como un estímulo de enorme potencia sobre varias generaciones de geómetras y topólogos. Un buen resumen de este largo proceso es el artículo [Mil6].

En relación a las esferas de homología, la investigación se ha centrado sobre todo en dos aspectos, frecuentemente interrelacionados. Por un lado, en la búsqueda de esferas exóticas, especialmente en dimensión 3, en parte por su relación con la teoría de singularidades; las variedades de Brieskorn, las esferas de Seifert y los ejemplos obtenidos mediante cirugía que ofrecemos el último capítulo son productos básicos de esta investigación. En dimensiones superiores, aparte del resultado de suspensiones de esferas de homología que no son variedades topológicas, podemos mencionar los trabajos de Ratcliffe-Tschantz, Sato o Suciu sobre 4-esferas, o de Mazur para esferas en dimensión mayor que son borde de otras variedades.

Por otro lado, se ha desarrollado una potente línea de investigación en el desarrollo de invariantes de 3-esferas de homología, que precisan y a la vez dejan patente la importancia de estos objetos en ramas de las Matemáticas tan variadas como la teoría de nudos, la homotopía racional, la teoría de variedades, la teoría de Morse o la geometría simpléctica, incluso con aplicaciones en Física. En las conclusiones del trabajo ofrecemos una lista de posibles temas para quien desee profundizar en la teoría. En el libro de Saveliev [Sav] se ofrece una buena panorámica de todos estos invariantes, con multitud de referencias.

2 | Esfera de Poincaré

Como ya hemos comentado, la esfera o dodecaedro de Poincaré constituyó el primer ejemplo de esfera de homología exótica, i.e. no homeomorfa a la esfera. Dada su importancia histórica y su importancia en diferentes campos de la Matemática y la Física (ver los comentarios finales del capítulo), le dedicamos un estudio detallado. El análisis que vamos a llevar a cabo se desglosa de la siguiente manera. Comenzaremos con la descripción geométrica más simple de este objeto; a continuación calcularemos su grupo fundamental, recordando previamente el método de cálculo basado en caminos borde sobre CW-complejos de dimensión dos; describiremos brevemente este grupo, el *grupo binario icosaedral*, desde una perspectiva algebraica; calcularemos la homología de nuestro espacio, demostrando de este modo que es una 3-esfera de homología, y concluiremos ofreciendo varias descripciones alternativas de nuestro espacio. Las referencias generales de este capítulo son el libro de Seifert-Threlfall [Sei] y el artículo de Kirby-Scharlemann [Kir]. Al comienzo de cada sección concretaremos estas referencias.

2.1 Primera construcción

En esta sección seguiremos ([Kir], sección 1.5) para la descripción de la esfera de Poincaré, y ([Bjo], sección 4) para la triangulación.

Como ha quedado dicho, comenzamos describiendo el que va a ser nuestro objeto de interés en este capítulo, la esfera de Poincaré. El punto de partida de la construcción es un dodecaedro regular, sólido platónico de doce caras, treinta aristas y veinte vértices, por supuesto homeomorfo a la bola cerrada en \mathbb{R}^3 . Consideramos la relación de equivalencia sobre los puntos de las caras del dodecaedro, generada por relacionar caras opuestas después de un giro de $\pi/5$ radianes a través del eje, siempre en el mis-

mo sentido. Al espacio cociente por esta relación se le llama esfera o dodecaedro de Poincaré, quien la definió de esta manera. En lo sucesivo representaremos este objeto mediante la letra P .

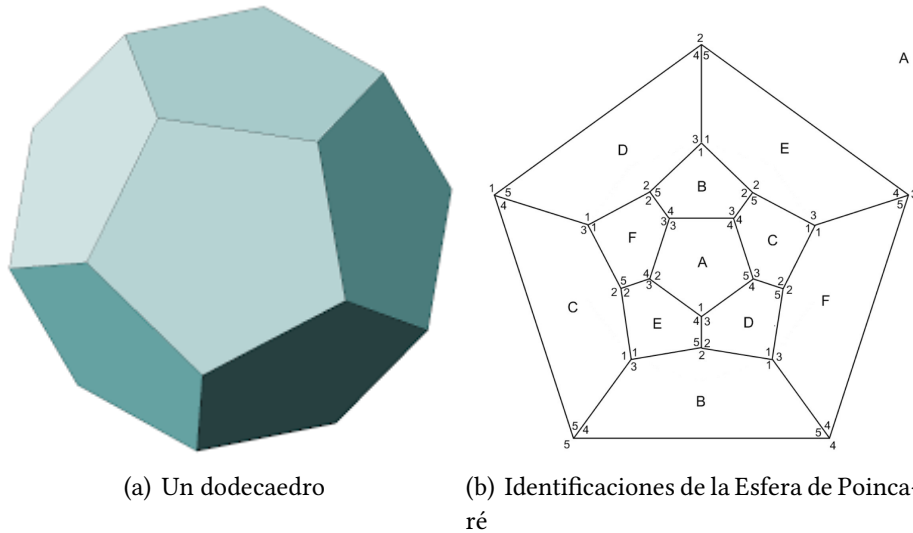


Figura 2.1: Ilustraciones para entender la esfera de Poincaré.

Gran parte de la importancia de la esfera de Poincaré se deriva del hecho de que posee estructura de 3-variedad topológica. Para verlo, vamos a describir a continuación una triangulación explícita de este objeto, que puede encontrarse, como ya hemos dicho, en [Bjo].

Comenzamos con nuestro dodecaedro y triangulamos su frontera introduciendo un punto medio por cada par de pentágonos opuestos identificados. En el interior del dodecaedro colocamos un icosaedro de tal forma que los vértices del icosaedro coincidan con los puntos medios de los pentágonos. Por cada vértice del icosaedro formamos a continuación un cono sobre cada pentágono triangulado. Por cada arista del icosaedro introducimos un tetraedro que está determinado por dicha arista y la arista que separa los dos pentágonos vecinos correspondientes.

Análogamente, para cada triángulo en la frontera del icosaedro tomamos el tetraedro que está compuesto por triángulos y el vértice de intersección de sus tres correspondientes triángulos vecinos.

Finalmente, triangulamos el interior del icosaedro introduciendo un punto medio y tomando el cono sobre la frontera y de centro dicho punto medio. Esta triangulación es compatible con las identificaciones, y produce a su vez una triangulación

de la esfera de Poincaré con un total de 24 vértices, 154 aristas, 260 triángulos y 130 tetraedros.

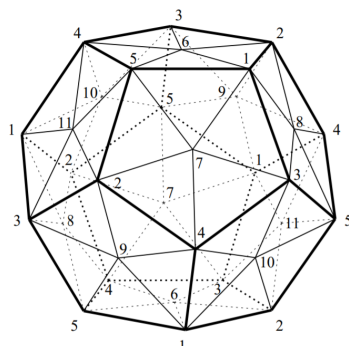


Figura 2.2: Triangulación de la esfera de Poincaré.

Nota 2.1. En el artículo que hemos mencionado se construye una triangulación con 16 vértices, 106 aristas, 180 triángulos y 90 tetraedros, y se conjetura si dicha triangulación es la triangulación con menos símlices que puede obtenerse de la esfera de Poincaré. Hemos preferido describir la anterior por poseer un mayor número de simetrías, ya que por ejemplo, es invariante bajo la acción del grupo alternado A_5 sobre el dodecaedro.

El motivo de haber construido una triangulación efectiva de la esfera de Poincaré es el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en ([Sei], sección 60, Teorema I):

Teorema 2.1. *Un espacio producido por la identificación dos a dos de las caras de un poliedro sólido es una 3-variedad si y sólo si su característica de Euler es cero.*

Como consecuencia, obtenemos inmediatamente el resultado que queremos.

Corolario 2.1. La esfera de Poincaré es una 3-variedad.

Demostración. La triangulación descrita prueba que

$$\chi(P) = 24 - 154 + 260 - 130 = 0.$$

Por tanto, el resultado se tiene por la proposición anterior. |

En las siguientes secciones calcularemos el grupo fundamental y la homología ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} de esta variedad.

2.2 El grupo fundamental de la esfera de Poincaré

A continuación vamos a calcular el grupo fundamental de la esfera de Poincaré. Para ello, utilizaremos un método de cálculo a partir del método de los *caminos borde* (*edge path* en inglés), que trataremos a continuación.

2.2.1 Caminos borde

La principal referencia para esta sección es ([Sei], secciones 45-46), y en ella los complejos celulares de dimensión n serán llamados simplemente n -complejos. A las 1-celdas las llamaremos *aristas*, que pueden empezar y terminar en el mismo punto.

Definición 2.1. Sea X un 1-complejo donde todas las aristas están orientadas. Un camino borde en X consiste en una sucesión finita $a_1^{\epsilon_1} \dots a_n^{\epsilon_n}$ de aristas a_i con exponentes ϵ_i iguales a 1 o -1 (en función de la orientación), de modo que el punto final de cada arista coincide con el punto inicial de la siguiente. El camino borde se dice cerrado si la arista a_n termina en el punto O donde empieza la arista a_1 ; en este caso diremos que el camino borde está basado en O .

Los objetos en los que basaremos nuestro estudio del grupo fundamental son los complejos de superficie, que constituyen una clase de 2-complejos:

Definición 2.2. Un complejo de superficie es un 1-complejo X al que se han pegado un número finito de 2-celdas a través de caminos borde no triviales.

En particular, un 1-complejo es en particular un complejo de superficie "degenerado".

A continuación vamos a definir una estructura de grupo sobre los caminos borde cerrados de un complejo de superficie X basados en un punto O . Para ello, definimos la relación de equivalencia generada por:

- Dos caminos borde basados en O están relacionados si obtenemos uno a partir de otro insertado o quitando una palabra del tipo aa^{-1} .
- Un camino borde cerrado que sea la frontera de un disco en X es equivalente al camino cerrado trivial consistente en su punto base.

Las operaciones que acabamos de describir se llaman *deformaciones combinatorias*. Al cociente del conjunto de caminos borde cerrados basados en O por la anterior relación de equivalencia se lo denomina \mathcal{F}_k , y no es difícil ver que la yuxtaposición de caminos lo dota de estructura de grupo. Obsérvese que en este grupo el elemento neutro es el camino constante O , y el inverso de un camino es recorrerlo en sentido opuesto. El siguiente resultado muestra la utilidad de este grupo en nuestro contexto.

Proposición 2.1. El grupo \mathcal{F}_k es isomorfo al grupo fundamental del CW-complejo asociado al complejo de superficie X basado en O .

El isomorfismo aquí viene dado por la aplicación $\mathcal{F}_k \rightarrow X$ que lleva cada camino borde en \mathcal{F}_k en el subespacio de X definido por las aristas del camino. De este modo, hemos definido un análogo combinatorio del grupo fundamental. Vamos a definir a continuación un conjunto de generadores y relaciones de \mathcal{F}_k que nos será de utilidad en nuestro cálculo. Abusando un poco de la notación, denotaremos en lo que sigue del mismo modo a un camino borde cerrado en X basado en O y a su clase en \mathcal{F}_k . Asimismo, en lo que sigue nos referiremos a los caminos borde simplemente como caminos.

Vamos primero con los generadores. Consideramos todas las aristas $\{a_1, \dots, a_n\}$ del complejo X , cada una con su orientación correspondiente, y fijamos para cada vértice v del complejo un camino desde O hasta v , que llamaremos el *camino auxiliar* a v . Entonces, para cada a_i definimos el camino cerrado A_i basado en O como la yuxtaposición del camino auxiliar de O al vértice inicial de a_i , la propia a_i y el inverso del camino auxiliar al punto final de a_i . Se prueba sin dificultad que cualquier elemento de \mathcal{F}_k se puede poner como producto de los A_i , ya que si $a_{l_1}^{\epsilon_1} \dots a_{l_k}^{\epsilon_k}$ representa un elemento de \mathcal{F}_k , $A_{l_1}^{\epsilon_1} \dots A_{l_k}^{\epsilon_k}$ representa al mismo elemento. Por tanto $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ es un conjunto de generadores de \mathcal{F}_k . Nótese que puede haber generadores redundantes.

Pasemos a las relaciones; para ello, consideremos las dos siguientes familias de identificaciones entre generadores de \mathcal{A} :

- Para todo $i \leq n$, si A_i se escribe como una sucesión $a_{l_1}^{\epsilon_1} \dots a_{l_k}^{\epsilon_k}$ de aristas orientadas, entonces A_i representa el mismo elemento que $A_{l_1}^{\epsilon_1} \dots A_{l_k}^{\epsilon_k}$.
- Si $a_{l_1}^{\epsilon_1} \dots a_{l_k}^{\epsilon_k}$ es el borde de un disco en X , entonces $A_{l_1}^{\epsilon_1} \dots A_{l_k}^{\epsilon_k}$ representa al elemento trivial.

Todas estas identificaciones son correctas en el grupo \mathcal{F}_k debido al hecho ya mencionado de que, si $a_{l_1}^{\epsilon_1} \dots a_{l_k}^{\epsilon_k}$ es un elemento de \mathcal{F}_k , $A_{l_1}^{\epsilon_1} \dots A_{l_k}^{\epsilon_k}$ representa al mismo

elemento. La prueba de que estas relaciones son suficientes para caracterizar el grupo \mathcal{F}_k es rutinaria y puede encontrarse en la mencionada sección 46 de [Sei].

Obsérvese que tanto los generadores como las relaciones que acabamos de obtener pueden extraerse sin dificultad de la estructura de celdas del complejo de superficie en el que estamos interesados. Por tanto, ahora disponemos de un método puramente combinatorio para calcular el grupo fundamental de un complejo de superficie.

2.2.2 Cálculo del grupo fundamental

La principal referencia para esta sección es el epígrafe 62 del libro [Sei].

En la sección anterior hemos abordado el problema de cómo calcular de modo combinatorio el grupo fundamental de un complejo de superficie. Como la esfera de Poincaré es una 3-variedad, necesitamos un modo de relacionar su grupo fundamental con el grupo fundamental de algún complejo de superficie. Esta relación viene dada por el siguiente resultado:

| Teorema 2.2. *Sea M una 3-variedad obtenida a partir de identificaciones en el borde ∂A de un poliedro sólido A . Entonces el grupo fundamental de M es isomorfo al grupo fundamental del complejo de superficie X_M obtenido al realizar las identificaciones en el borde del poliedro.*

Demostración. La demostración se basa principalmente en demostrar los dos siguientes enunciados:

- I) Todo lazo ω en M basado en un punto de X_M es deformable a un lazo en X_M .
- II) Si un lazo ω en X_M es nul-homotópico en M , también lo es en X_M .

|

Ambas afirmaciones se prueban, a su vez, considerando la antiimagen del lazo ω en el poliedro A , proyectando dicha antiimagen sobre el borde del poliedro desde un punto del interior que no pertenezca al lazo y ejecutando de nuevo la identificación; este proceso produce un lazo ω' en X_M y una homotopía entre ω y ω' que no mueve el punto base. Más detalles en la sección mencionada de [Sei].

Ahora ya disponemos de casi todas las herramientas necesarias para calcular el grupo fundamental de la esfera de Poincaré; sólo falta una descripción de la estructura

del borde de este espacio como complejo de superficie, que de todos modos puede obtenerse sin dificultad vista más arriba de la construcción de dicha esfera como espacio de identificaciones. Encontramos dicha estructura de modo explícito en el siguiente dibujo:

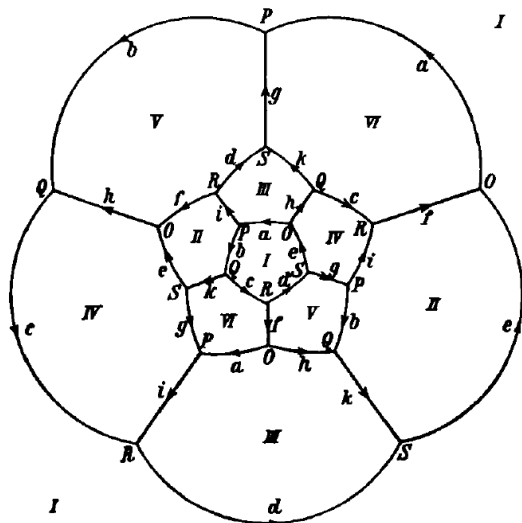


Figura 2.3: Representación de la esfera de Poincaré (Seifert-Threlfall).

Ya podemos abordar el cálculo. De ahora en adelante denotamos por X_P al complejo de superficie procedente de las identificaciones del dodecaedro de Poincaré. Como acabamos de ver, P y X_P tienen el mismo grupo fundamental. Así, vamos a describir los generadores de X_P que fueron denotados por $\{A_i\}$ en el capítulo anterior, y que aquí denotamos por letras mayúsculas. La estructura de complejo de superficie de X_P descrita en el dibujo tiene diez aristas, así que aparecen diez generadores:

$$\begin{aligned}
 A &= aa^{-1} & B &= abh^{-1} & C &= hcf & D &= f^{-1}dd^{-1}f \\
 E &= f^{-1}de & F &= f^{-1}f & G &= (f^{-1}d)ga^{-1} & H &= hh^{-1} \\
 J &= aif & K &= hkd^{-1}f.
 \end{aligned}$$

Las relaciones de Tipo I del epígrafe anterior se derivan de las igualdades anteriores cambiando en el lado derecho de las ecuaciones las letras minúsculas por letras mayúsculas. Tras realizar estos cambios, se obtiene que $A = D = F = H = 1$.

Asimismo, recorriendo los bordes de los pentágonos obtenemos las seis relaciones de Tipo II:

$$\begin{aligned} ABCDE = 1 \quad BKEF^{-1}J^{-1} = 1 \quad AJDK^{-1}H^{-1} = 1 \\ CJ^{-1}G^{-1}EH = 1 \quad BH^{-1}F^{-1}DG = 1 \quad AG^{-1}K^{-1}CF = 1 \end{aligned}$$

Se pueden eliminar G y K , de modo que:

$$BCE = 1 \quad BJEJ^{-1} = 1 \quad CJ^{-1}BE = 1 \quad BJ^{-1}C = 1$$

A su vez, de la primera y la cuarta relación se deduce:

$$E = C^{-1}B^{-1} \quad J = CB$$

Podemos usar estas igualdades para eliminar E y J de la segunda y la tercera relación, obteniendo

$$BCBC^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1 \quad (2.1)$$

$$CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} = 1 \quad (2.2)$$

Ahora introduciremos la expresión (2) en (1) en la posición indicada por el punto en la expresión (1). En lugar de (1) obtenemos la relación

$$BCBC^{-1} \cdot CB^{-1}C^{-1}BC^{-1}B^{-1} \cdot B^{-2}C^{-1} = 1$$

y después de simplificar, queda

$$B^2C^{-1}B^{-3}C^{-1} = 1$$

Introducimos ahora un nuevo generador U en (1) y (2) dado por $U = C^{-1}B$ y eliminamos C :

$$\begin{aligned} B^2 \cdot B^{-1}UB^{-3} \cdot B^{-1}U = 1 \\ U^{-1}B \cdot B^{-1} \cdot B^{-1}U \cdot B \cdot B^{-1}U \cdot B^{-1} = 1, \end{aligned}$$

con lo cual

$$B^4 = UBU, \quad U^2 = BUB,$$

y obtenemos finalmente

$$\pi_1(P) = \pi_1(X_P) = \langle B, U \mid B^5 = (BU)^2 = U^3 \rangle,$$

que es lo que queríamos calcular. El grupo obtenido es bien conocido, se le denomina *grupo binario icosaedral*, y se lo denota I^* , $2I$ o sencillamente $(2, 3, 5)$, por los primos que dividen a su orden. Se trata de un grupo con propiedades muy interesantes, algunas de las cuales veremos en la siguiente sección, antes de pasar al cálculo de los grupos de homología de P .

2.3 Propiedades del grupo binario icosaedral

Para esta sección no hemos seguido una referencia fija, aunque dos aproximaciones complementarias a la estructura de este grupo pueden encontrarse en [Ade] y [Cox]. Como referencia sobre resultados elementales de Teoría de Grupos hemos seguido [Dum], y para grupos de matrices [Hal].

Comenzamos este epígrafe comentando algunas definiciones equivalentes del grupo binario icosaedral. Para empezar, es pertinente estudiar su relación con el grupo *icosaedral*, que es el nombre que recibe el grupo alternado A_5 cuando se interpreta como el grupo de simetrías que conservan la orientación en un icosaedro regular. El grupo I^* es un *doble recubridor* de A_5 , en el sentido de que existe un epimorfismo $I^* \rightarrow A_5$ cuyo núcleo es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$. Es interesante mencionar aquí también que el grupo icosaedral es también doblemente recubierto por el producto $\mathbb{Z}/2 \times A_5$, que en este contexto se denomina grupo icosaedral total o *full icosahedral group*. En este caso, el generador de $\mathbb{Z}/2$ representa una inversión del icosaedro.

A continuación vamos a ver que I^* aparece como subgrupo de los cuaterniones, ver detalles en [Con]. Recuérdese que los cuaterniones pueden representarse como sumas formales

$$h = a + bi + cj + dk,$$

donde a, b, c y d son números reales, $1, i, j$ y k son elementos básicos y el producto está inducido por el producto de números reales y las siguientes relaciones para la multiplicación en la base:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Con este producto, los cuaterniones constituyen un grupo no conmutativo; de hecho, con la suma adquieren también estructura de cuerpo, que contiene a \mathbb{C} de modo natural. Esta estructura, descubierta por Hamilton, es de enorme importancia en Matemáticas, con implicaciones especialmente en Análisis, Teoría de Números y Topología, y también en Física. En particular, en el contexto de este trabajo, es interesante mencionar que están directamente implicados en la multiplicación que dota a la 3-esfera de estructura de grupo de Lie.

Veamos ahora el grupo binario icosaedral dentro de los cuaterniones. Se definen los *cuaterniones de Hurwitz* como

$$H = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \cup \{1/2\}\},$$

e I^* puede definirse como la unión de las unidades de Hurwitz dadas por

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, (\pm 1 \pm i \pm j \pm k)/2\}$$

y los cuaterniones obtenidos por una permutación par de las cuatro coordenadas 0, 1, φ y φ^{-1} , donde φ denota el número áureo, en la expresión

$$(0 \pm i \pm \varphi^{-1}j \pm \varphi k)/2.$$

Una tercera interpretación del grupo I^* es como grupo finito de matrices. Recordemos que dado el cuerpo \mathbb{F}_q de q elementos, el grupo lineal $GL(n, q)$ es el grupo multiplicativo de matrices cuadradas de dimensión n sobre un cuerpo con determinante no nulo. Igualmente, el grupo especial lineal $SL(n, q)$ es el subgrupo de $GL(n, q)$ dado por las matrices con determinante igual a 1. En estas condiciones, puede probarse (ver Lema 1.10 en [Mor]) que el grupo binario icosaedral es isomorfo a $SL(2, 5)$.

A partir de estas interpretaciones, es fácil ver que el orden de I^* es 120. Por ejemplo, sabemos que el orden del grupo simétrico S_5 es 120, y que A_5 , su subgrupo de permutaciones de orden par, es de índice dos en S_5 , y por tanto de orden 60. Como tenemos una sucesión exacta (i.e. una *extensión*)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow I^* \rightarrow A_5 \rightarrow 0,$$

es inmediato deducir que el orden del grupo binario icosaedral es 120. Por otra parte, una fórmula bien conocida en grupos de matrices establece que

$$|SL(n, q)| = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (q^n - q^j)}{q - 1},$$

lo cual implica

$$|I^*| = |SL(2, 5)| = \frac{\prod_{j=0}^1 (5^2 - 5^j)}{5 - 1} = \frac{(5^2 - 1)(5^2 - 5)}{5 - 1} = \frac{480}{4} = 120.$$

Las identificaciones anteriores también permiten establecer rápidamente que I^* es un grupo no abeliano. Si utilizamos de nuevo el isomorfismo con $SL(2, 5)$, basta observar por ejemplo que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Análogamente, observando la interpretación del grupo I^* como subgrupo de los cuaterniones, tenemos que los elementos básicos de \mathbb{H} están en I^* , $ij = k$ y $ji = -k$.

Como veremos un poco más adelante, la siguiente propiedad será importante a la hora de calcular la homología de la esfera de Poincaré. Recuérdese que un grupo es *perfecto* si su abelianizado es el grupo trivial.

Proposición 2.2. I^* es perfecto.

Demostración. Consideramos la siguiente presentación del abelianizado de I^* :

$$\langle s, t \mid s^5 = (st)^2 = t^3, st = ts \rangle$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} s^2 t^2 = t^3 &\Rightarrow t^2 s^2 = t^3 \Rightarrow s^2 = t \\ s^5 s^{-2} t^{-2} = 1 &\Rightarrow s^3 t^{-2} = 1 \Rightarrow s^3 s^{-4} = 1 \Rightarrow s^{-1} = 1 \Rightarrow s = 1 \end{aligned}$$

Y por tanto $t = s^2 = 1$, luego el abelianizado del grupo binario icosaedral es el grupo trivial. |

Una vez hemos visto que el grupo es perfecto, la siguiente pregunta es si el grupo es *cuasi-simple*, o sea, perfecto y tal que su grupo de automorfismos internos es simple. Recordemos que un automorfismo de un grupo se dice *interno* si viene dado por conjugación por un elemento del grupo. Estos automorfismos forman un grupo (inducido por el producto en el grupo) que suele denominarse $\text{Inn}(G)$. Es sencillo ver que dos elementos del grupo inducen el mismo automorfismo interno si y sólo si se diferencian en un elemento del centro del grupo. Por tanto, para decidir si I^* es cuasi-simple, necesitamos conocer su centro.

Proposición 2.3. El grupo $Z = \{\pm 1\}$ es el centro de I^* .

Demostración. Podemos utilizar de nuevo la identificación de nuestro grupo binario icosaedral con $SL(2, 5)$. Es un hecho general para grupos especiales lineales con coeficientes en un cuerpo que los elementos del centro son siempre matrices diagonales. Ahora, una simple inspección de las matrices diagonales de $SL(2, 5)$ prueba que el centro de este grupo está constituido por $\{Id, -Id\}$, y por tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}/2$. |

Ahora ya podemos probar la cuasi-simplicidad de nuestro grupo:

Corolario 2.2. I^* es un grupo cuasi-simple.

Demostración. Como I^* es de orden 120 y su centro es de orden 2, su grupo de automorfismos internos tiene orden 60. Los grupos de orden 60 están enumerados, y el único entre ellos que es perfecto es el alternado A_5 , que de hecho es simple. Como I^* es perfecto y todo cociente de un grupo perfecto lo sigue siendo, obtenemos que $\text{Inn}(I^*) \simeq A_5$, que es simple, con lo cual concluimos la demostración. Otra vía para realizarla es probar que el núcleo del recubridor $I^* \rightarrow A_5$ que hemos descrito más arriba es de hecho el centro del grupo binario icosaedral. |

Por supuesto I^* no es simple, porque su centro es no trivial y el centro de un grupo siempre es normal en él.

Al final de este capítulo, en las construcciones alternativas de la esfera de Poincaré, aparecerán algunas propiedades adicionales de I^* como subgrupo de algunos grupos de Lie compactos; ver sección 2.5.1.

2.4 Grupos de homología

En este epígrafe hemos seguido de nuevo la sección 62 de [Sei].

Utilizando los resultados obtenidos hasta ahora, en esta sección probaremos que la esfera de Poincaré es una 3-esfera de homología, o lo que es lo mismo, que $H_0(P, \mathbb{Z}) = H_3(P, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ y $H_i(P, \mathbb{Z}) = 0$ para cualquier otro i . En lo sucesivo, suprimiremos los coeficientes de la notación de la homología, cuando dichos coeficientes sean los números enteros.

Comenzamos analizando los casos sencillos. Como P es conexo, $H_0(P) = \mathbb{Z}$, y como P es una variedad de dimensión 3, $H_i(P) = 0$ si $i > 3$. Asimismo, hemos probado en la sección anterior que el grupo fundamental de la esfera de Poincaré es perfecto, luego su abelianizado es trivial. Por tanto, de acuerdo con el teorema de Hurewicz (teorema 0.1), $H_1(P) = 0$. Una demostración topológica directa de que el primer grupo de homología es el abelianizado del grupo fundamental puede encontrarse en ([Sei], sección 48, Teorema III).

Nos queda estudiar los casos $i = 2$ e $i = 3$. Para ello, haremos uso de la siguiente versión reducida del famoso teorema de dualidad de Poincaré:

| Teorema 2.3. *Consideramos una variedad cerrada y orientable M de dimensión n , $k < n/2$. Entonces si $H_k(M)$ es libre de torsión, $H_k(M)$ y $H_{n-k}(M)$ son grupos isomorfos.*

La versión general del teorema necesita cohomología, que no trataremos en este trabajo, pero asumiendo la condición de ausencia de torsión en la homología (que es suficiente para nuestros fines) el resultado admite la formulación arriba expuesta. El lector puede consultar una demostración del resultado general en ([Hat], sección 3.3), mientras que la deducción de la formulación anterior a partir del resultado general es consecuencia del teorema de coeficientes universales ([Hat], teorema 3.2).

Como la homología de la esfera de Poincaré cumple las condiciones de nuestra versión de la dualidad de Poincaré, sólo debemos justificar que esta 3-variedad es orientable. Recordemos que una variedad M es orientable si existe una elección de un generador de $H_n(M, M \setminus \{p\})$ para un cierto punto p (una *orientación local*) que puede extenderse de modo coherente a lo largo de toda la variedad. En la siguiente sección veremos que la esfera de Poincaré puede construirse como cociente de una acción libre por rotaciones de su grupo fundamental sobre la 3-esfera (de hecho, es la acción canónica sobre el recubridor universal), así que podemos invocar ([Thu], ej. 4.4.2), que establece que cualquier cociente de la 3-esfera por un subgrupo finito de este tipo es una variedad orientable. En particular, estas 3-variedades se llaman *variedades esféricas*.

Uniendo todos los argumentos posteriores, hemos demostrado:

| Teorema 2.4. *La esfera de Poincaré es una 3-esfera de homología.*

Obsérvese que P no puede ser homeomorfa a la 3-esfera, porque su grupo fundamental es no trivial. Además, puede probarse ([Sei], comentario 33) que la esfera de Poincaré es la única 3-esfera de homología cuyo grupo fundamental es finito y no trivial.

2.5 Otras descripciones de la esfera de Poincaré

En esta última sección seguiremos el trabajo clásico de Kirby-Scharlemann [Kir] para presentar otras maneras de construir la esfera de Poincaré. La construcción como cociente del dodecaedro que describimos al principio del capítulo fue históricamente la primera y posee una fuerte carga intuitiva, pero ahora veremos que uno puede aproximarse a este objeto desde puntos de vista muy diferentes. En el último capítulo la esfera de Poincaré volverá a aparecer como ejemplo de otras construcciones más generales de 3-esferas de homología.

En esta sección pretendemos presentar las principales ideas involucradas en estas construcciones de la esfera de Poincaré. La prueba rigurosa de que todas estas definiciones definen el mismo espacio puede encontrarse en el mencionado artículo [Kir].

2.5.1 Cociente de la 3-esfera por la acción del grupo binario icosaedral

En esta sección describimos la esfera de Poincaré como un cociente de la 3-esfera bajo la acción del grupo binario icosaedral, que ya estudiamos en el epígrafe 2.3. Seguimos aquí [Kir], 1.4.

Comenzamos recordando que para cualquier n positivo, se define el grupo especial unitario $SU(n)$ como el grupo de transformaciones unitarias $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ que actúa en \mathbb{C}^2 por la derecha vía transformaciones de Moebius. Esto es, si $u = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ con $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$, se tiene que $u(z, w) = (z, w) \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Esta acción de $SU(2)$ sobre \mathbb{C}^2 conmuta con la multiplicación compleja llevando líneas en líneas, y por consiguiente define una acción sobre $\mathbb{C}^1 \cup \{\infty\}$. La identificación de este espacio con la esfera S^2 vía proyección estereográfica induce una aplicación $q : SU(2) \rightarrow SO(3)$ (recuérdese que

en general $SO(n)$ puede verse como el grupo de las isometrías de \mathbb{R}^n que preservan orientación). Esta aplicación es un recubridor de dos hojas, ya que

$$q^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cup \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ahora, como el grupo alternado A_5 es el grupo de simetrías del icosaedro, se puede representar como un subgrupo discreto de $SO(3)$, y su levantamiento a $SU(2)$ vía el recubridor de dos hojas que acabamos de describir es precisamente I^* ; el epimorfismo correspondiente $I^* \rightarrow A_5$ ya fue descrito en la sección 2.3. Ahora, la acción natural de $SU(2)$ sobre S^3 induce por restricción una acción del grupo binario icosaedral sobre S^3 , y el cociente de S^3 por esa acción es precisamente la esfera de Poincaré, como queríamos ver.

Nota 2.2. Como $SO(3) < SO(4)$, el resultado ya mencionado de Thurston-Levi ([Thu] ej. 4.4.2) y la descripción de la esfera de Poincaré que acabamos de mostrar prueban que este espacio es una 3-variedad esférica, y por tanto orientable.

2.5.2 La esfera de Poincaré mediante *plumbing* en el grafo E_8

Durante esta sección seguimos de nuevo el artículo [Kir], en esta ocasión en su sección 1.1.

A continuación desarrollamos la construcción de la esfera de Poincaré mediante un proceso de combinación de fibrados llamado *plumbing* (en inglés, “fontanería”), inventado por J. Milnor [Mil2]. Dados dos fibrados de discos $E_1 \rightarrow M_1$ y $E_2 \rightarrow M_2$ sobre dos n -variedades diferenciables, consideramos para $i = 1, 2$ un punto $x_i \in M_i$, y un entorno en E_i de la fibra de x_i difeomorfo a un producto de bolas $B_i \times B_i$. Ahora consideramos difeomorfismos $h_1 : B_1 \rightarrow B_2$ y $h_2 : B_1 \rightarrow B_2$, tales que ambos mantengan o reviertan la orientación, y definimos la aplicación $f : B^1 \times B^1 \rightarrow B^2 \times B^2$ como $f(x, y) = (h_1(y), h_2(x))$. El espacio cociente de $E_1 \sqcup E_2$ por las identificaciones que induce f se llama *plumbing* de los fibrados a través de f .

Consideramos $p : T^4 \rightarrow S^2$, el fibrado de discos tangente a S^2 , dotado de la orientación que implica $\chi(T^4) = -2$. Como el fibrado es localmente trivial, para toda celda B^2 en la base del fibrado tenemos un difeomorfismo $\phi : p^{-1}(B^2) \simeq (B^2 \times B^2)$ que produce la restricción de p al componer con la segunda proyección $B^2 \times B^2$.

Ahora, si tomamos dos copias disjuntas T_1 y T_2 del espacio total del fibrado anterior, podemos realizar el *plumbing* a través de la aplicación f que intercambia las dos

coordenadas. Iterando el proceso sobre ocho copias del fibrado según el esquema que se presenta en el siguiente dibujo

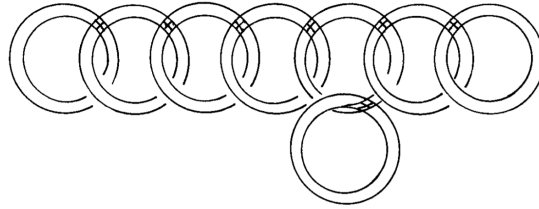


Figura 2.4: Disposición de los ocho fibrados.

obtenemos una variedad de dimensión 4 cuyo borde es homeomorfo a la esfera de Poincaré.

Por último, es interesante mencionar que dado un *plumbing* sucesivo de fibrados, se define su grafo asociado como aquel que tiene un vértice por cada fibrado, y existe arista entre dos vértices si se ha realizado *plumbing* con los fibrados correspondientes a ellos. En este sentido, la esfera de Poincaré se obtiene mediante un *plumbing* asociado al grafo E_8 .

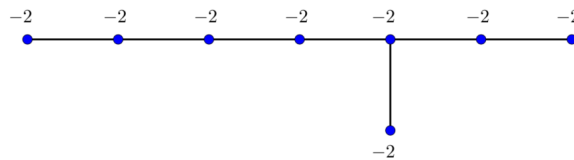


Figura 2.5: Grafo E_8

2.5.3 La esfera de Poincaré como recubridor de un nudo

La última construcción alternativa de la esfera de Poincaré que vamos a describir la presenta como un recubridor de un cierto nudo en S^3 , así que comenzamos esta última sección con algunos conceptos de teoría de nudos que serán necesarios en lo que sigue. Seguimos la exposición de ([Kir], sección 1.8).

| Definición 2.3. Sean X, Y dos espacios topológicos y $f(x), g(x)$ aplicaciones continuas entre ellos. Diremos que $f(x)$ y $g(x)$ son *isotópicas* si existe una homotopía $H(x, t)$ tal que $H(x, t_0)$ es una inmersión para todo t_0 .

Como puede verse, la noción de isotopía implica que la deformación de la imagen de f en la imagen de g debe realizarse mediante inmersiones, y por tanto supone un concepto más restrictivo que la simple homotopía.

Definición 2.4. Un nudo es una clase de isotopía de inmersiones de S^1 en una 3-variedad.

Obsérvese que dos tales inmersiones son siempre homotópicas. Por otro lado, y a menos que haya mención en contra, los nudos que consideraremos vivirán en S^3 . En particular, los nudos que consideraremos en este epígrafe serán nudos tóricos:

Definición 2.5. Definimos el (p, q) nudo tórico, siendo (p, q) primos entre sí, como la clase de isotopía de una curva cerrada que recorre el toro dando p vueltas alrededor del agujero central con q revoluciones en la dirección perpendicular a éste.

El primer ejemplo de nudo no trivial pertenece a esta familia:

Ejemplo 2.1. Al $(2, 3)$ nudo toro se le denomina *nudo trébol*.



Figura 2.6: Nudo trébol.

Formulados estos conceptos previos, vamos a describir cómo es el recubridor ramificado de n hojas sobre un nudo en S^3 . En particular, vamos a ver que para alguna trivialización del fibrado normal del nudo K

$$\begin{aligned} T: S^1 \times B^2 &\longrightarrow S^3 \\ T(S^1 \times 0) &= K \end{aligned}$$

existe una aplicación $f: S^3 - K \longrightarrow S^1$ única salvo homotopía, de modo que la restricción $fT|_{S^1 \times \partial B^2}$ es la segunda proyección $p_2: S^1 \times \partial B^2 \longrightarrow \partial B^2$. Sea E el espacio total del fibrado normal por discos de K . Por representabilidad de Brown ([Hat], 4.E), si F es una fibra de este fibrado, la inclusión $F \hookrightarrow S^3 - K$ induce un isomorfismo $[S^3 - K, S^1] \cong [F, S^1]$. Por tanto, un generador f de $[S^3 - K, S^1]$ se corresponde con una aplicación $F \rightarrow S^1$ de grado 1.

Como variar la trivialización $T: S^1 \times B^2 \longrightarrow S^3$ modifica (para $b \in \partial B^2$) el grado de la composición $(S^1 \times \{b\}) \xrightarrow{T} E \xrightarrow{f} S^1$ por múltiplos del grado de f (que es

uno), podemos escoger T tal que $T: S^1 \times B^2 \rightarrow S^3$ sea de grado 0. Pero la aplicación $p_2: S^1 \times \partial B^2 \rightarrow \partial B^2 \cong S^1$ es también de grado 1 en $F = (s \times \partial B^2)$ y de grado 0 en $(S^1 \times b)$. Como las dos aplicaciones son homotópicas en el 1-esqueleto de E , son homotópicas en E , y podemos tomar T tal que $f|_{TS^1 \times \partial B^2} = p_2$.

Definimos a continuación el recubrimiento ramificado de n hojas \widehat{X}_n de K . Sea V el fibrado sobre $S^3 - K$ obtenido mediante *pull-back* de f y el recubridor de n hojas de S^1 :

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & S^1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ S^3 - K & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Un entorno del infinito en V es homeomorfo a $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$, y por tanto podemos volver a coser el nudo K para obtener la variedad \widehat{X}_n . La proyección φ define una aplicación $\widehat{\varphi}: \widehat{X}_n \rightarrow S^3$ que es un homeomorfismo sobre $\widehat{\varphi}^{-1}(K)$ y un recubridor de n hojas en el resto.

La esfera de Poincaré es un caso concreto de la construcción que acabamos de ver. Concretamente, se describe como el recubridor ramificado de 5 hojas del nudo trébol (orientado a derecha), y también como el recubridor ramificado de 2 hojas del $(3, 5)$ nudo tórico, o como el recubridor ramificado de 3 hojas del $(2, 5)$ nudo.

Nota 2.3. Lo expuesto anteriormente, junto con el resto de las construcciones de la esfera de Poincaré que aparecerán como casos particulares de los métodos generales del próximo capítulo, da una idea de la variedad de contextos en los que este objeto ha ido haciendo su aparición. De todos ellos, quizá el más inesperado ha resultado ser la propuesta de algunos investigadores en Cosmología y Astrofísica, como J. Luminet [Lum], de que la esfera de Poincaré quizá codifica la forma del universo. Su idea se basa en análisis que muestran fluctuación en las temperaturas (a gran escala) en la radiación de fondo cósmica; ver también [Dum] desde un punto de vista más divulgativo.

3 | 3-esferas de homología y espacios de Moore

Este último capítulo estará centrado en su mayor parte en diferentes métodos para construir 3-esferas de homología. Comenzamos con las variedades de Brieskorn, que se obtienen como el entorno de una singularidad en un cierto espacio complejo. A continuación trataremos las esferas de homología de Seifert, que aunque también admiten una caracterización en función de singularidades, serán descritas de manera topológica. La parte más extensa del capítulo se dedica a desarrollar la cirugía de Dehn sobre nudos y enlaces, la herramienta más potente de la que se dispone para construir este tipo de espacios, y en particular a describir un buen número de ejemplos concretos que se construyen de este modo. En este sentido, es interesante mencionar que la esfera de Poincaré puede ser construida por cualquiera de estos métodos. La parte final del capítulo está dedicada a los espacios de Moore, que generalizan la noción de esfera de homología desde un punto de vista puramente homotópico, y permiten adquirir una perspectiva más global de estos conceptos.

Las principales referencias de este capítulo serán la tesis [Ueb], que contiene toda la información que necesitamos sobre variedades de Brieskorn, y sobre todo el libro [Sav], referencia fundamental en el estudio de las 3-esferas de homología.

3.1 Variedades de Brieskorn

El primer ejemplo de esfera de homología que vamos a tratar procede de la Geometría Algebraica, y se construye a través de las variedades definidas por E. Brieskorn [Bri] en 1966:

Definición 3.1. Sea n un número natural y $a = (a_0, \dots, a_n)$ una $(n + 1)$ -tupla de

enteros con $2 \leq a_i$ para todo $0 \leq i \leq n$. Consideramos la siguiente hipersuperficie singular

$$V(a) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_0^{a_0} + \cdots + z_n^{a_n} = 0\}$$

que llamaremos espacio de Brieskorn de a , y definimos la *variedad de Brieskorn* asociada como

$$\Sigma = \Sigma(a) = \Sigma(1_0, \dots, a_n) = V(a) \cap S^{2n+1}.$$

Obsérvese que la variedad de Brieskorn asociada a (a_0, \dots, a_n) tiene dimensión $2n - 1$.

Desde su aparición, las variedades de Brieskorn han sido importantes en el estudio de las esferas exóticas (tanto desde el punto de vista topológico como diferenciable), y recientemente han aparecido en contextos relacionados con la topología de contacto y la topología simpléctica. Un tratamiento extensivo puede hallarse en [Ueb], que también ha sido nuestra referencia principal en este epígrafe.

Para identificar las variedades de Brieskorn que proporcionan ejemplos de esferas de homología, hay que conocer la estructura homotópica de estos espacios. En primer lugar, es un resultado clásico ([Mil3], Teorema 5.2) que toda variedad de Brieskorn Σ de dimensión $2n - 1$ es $(n - 2)$ conexa. Por tanto, aplicando el teorema de Hurewicz (0.1) obtenemos que $H_i(\Sigma) = 0 \forall i = 1, \dots, n - 2$. Ahora, teniendo en cuenta que las variedades de Brieskorn son orientables, el teorema de dualidad de Poincaré que ya hemos visto más arriba prueba que $H_i(\Sigma) = 0 \forall i = n + 1, \dots, 2n - 1$. Un razonamiento análogo establece que $H_0(\Sigma) \cong H_{2n-1}(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$. Luego quedan por esclarecer los casos correspondientes a los índices $n - 1$ y n .

Por tanto, los únicos grupos que quedan por estudiar son H_{n-1} y H_n . Obsérvese que Σ será una esfera de homología cuando estos grupos de homología sean triviales. Para realizar el cálculo, nos basamos en el siguiente algoritmo, que puede encontrarse en [Ran].

Algoritmo de Randell. Definimos $I = \{0, 1, \dots, n\}$ e $I_t = \{i_1, \dots, i_t\}$ un subconjunto de t elementos de I . El rango de la parte libre de $H_{n-1}(\Sigma)$, que denotaremos κ , viene dado por la siguiente fórmula:

$$\kappa = \kappa(\Sigma) = \text{rango } H_{n-1}(\sigma) = \sum_{I_t \subseteq I} (-1)^{n+1-t} \frac{\prod_{i \in I_t} a_i}{\text{mcm}_{j \in I_t} a_j}$$

Falta describir la torsión. Para ello vamos a definir la siguiente función C , en la que

$\mathcal{P}(I)$ representa el conjunto potencia de I :

$$\begin{aligned} C : \mathcal{P}(I) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ C(\emptyset) &= \text{mcd}_{i \in I} a_i \\ C(I_s) &= \frac{\text{mcd}_{i \in I \setminus I_s} a_i}{\prod_{I_t \subsetneq I_s} C(I_t)} \end{aligned}$$

Asumimos la convención $\text{mcd}_{i \in \emptyset} a_i = 1$. Denotamos entonces $\kappa(I_t) = \kappa(\Sigma(a_{i_1}, \dots, a_{i_t}))$ y

$$k(I_t) := \begin{cases} \kappa(I_t) & \text{si } n + 1 - t \text{ es impar} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y definimos

$$\begin{aligned} d_j &:= \prod_{\substack{I_s \subsetneq I \\ \kappa(I_s) \geq j}} C(I_s) \\ r &:= \max_{I_s \subsetneq I} k(I_s) \end{aligned}$$

A partir de este razonamiento, se obtiene:

Teorema 3.1. *Sea $\Sigma(a_0, \dots, a_n)$ una variedad de Brieskorn; entonces el grupo de homología $H_{n-1}(\Sigma)$ con coeficientes en \mathbb{Z} viene dado por*

$$H_{n-1}(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^{\kappa} \oplus \mathbb{Z}/d_1 \oplus \dots \mathbb{Z}/d_r$$

Finalmente, usando la versión general de la dualidad de Poincaré ([Hat], sección 3.3) y el teorema de coeficientes universales ([Hat], teorema 3.2) tenemos que $H_n(\Sigma) \cong \mathbb{Z}^{\kappa}$.

Utilizando los cálculos anteriores, Brieskorn caracteriza todas las n -variedades de Brieskorn que son esferas de homología. No se toma en cuenta el caso $n = 2$ en que las variedades no son simplemente conexas.

Teorema 3.2. *Sea $\Sigma = \Sigma(a_0, \dots, a_n)$ para $n \geq 3$; se tiene que Σ es una esfera de homología si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. Hay dos exponentes a_i y a_j que son primos con el resto de exponentes.
2. Existe un exponente a_k que es primo con todos los demás exponentes.
3. Existe un conjunto $(a_{j_1}, \dots, a_{j_r})$ con $r \geq 3$ impar tal que cada a_{j_k} es primo con cualquier exponente que no esté en el conjunto, y $\text{mcd}(a_{j_k}, a_{j_l}) = 2$ para todo $k \neq l$.

Para finalizar esta sección, recordamos dos importantes resultados de Milnor que describen interesantes propiedades de las variedades de Brieskorn. La referencia es el artículo [Mil4].

| Teorema 3.3. *La variedad de Brieskorn $\Sigma(p, q, r)$ es homeomorfa al r -recubridor ramificado del (p, q) -nudo toro.*

| Teorema 3.4. *Sea $\Sigma(p, q, r)$ una variedad de Brieskorn. Entonces se tiene una y sólo una de las siguientes condiciones.*

1. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ es un cociente de $SU(2)$ por un subgrupo finito.
2. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ es el cociente de un grupo de Heisenberg por un retículo.
3. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ es el cociente de $SL(2, \mathbb{R})$ por un retículo.

Se puede probar ([Kir], sección 2) que la esfera de Poincaré es precisamente la variedad de Brieskorn $\Sigma = \Sigma(2, 3, 5)$. En este contexto, el teorema anterior de Brieskorn establece que efectivamente es una esfera de homología, el primer teorema de Milnor que es el 5-recubridor ramificado del $(2, 3)$ -nudo tórico (como vimos en la sección 2.5.3), y el segundo teorema de Milnor que es el cociente de $SU(2)$ bajo la acción de un subgrupo finito (ver 2.5.1), que es de hecho el grupo binario icosaedro. De hecho $\Sigma(2, 3, 5)$ es la única esfera de homología de Brieskorn que cumple esta caracterización.

3.2 Esferas de homología de Seifert

En esta sección nuestra referencia será [Sav], sección 1.1.4.

El objetivo de este epígrafe es construir las *esferas de homología de Seifert* de manera topológica. Consideramos n discos D_i disjuntos sobre una esfera, y denotamos por F al espacio resultante de extraer de la esfera los interiores de dichos discos; este espacio es homotópicamente equivalente, por tanto, a la suma puntual de $(n - 1)$ -circunferencias si $n > 1$, o al punto si $n = 1$. Ahora consideramos un fibrado $W \rightarrow F$ con fibra S^1 y característica de Euler b , y fijamos una trivialización del fibrado sobre el borde ∂F . El borde de W , por tanto, viene dado por n toros $\partial D_i \times S^1$.

Consideramos ahora n pares (a_k, n_k) de enteros primos entre sí, y pegamos n toros sólidos en las componentes del borde de W de manera que si α genera $H_1(S^1 \times$

1) y β genera $H_1(\{1\} \times S^1)$, la clase $a_k\alpha + b_k\beta$ es trivial en $H_1(D_k \times S^1)$ después del pegado. El resultado de este pegado es una variedad cerrada que denotamos $M(b; (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))$. Es interesante mencionar aquí que para cada $a_k \geq 2$, el subespacio $\{0\} \times S^1 \subset \partial D_i \times S^1$ se llama *fibra singular de grado a_k* ; aparecerá más adelante, cuando construyamos esferas de homología de Seifert con cirugía de Dehn sobre estas fibras.

A partir del grupo fundamental de W y las amalgamas asociadas a los pegados de toros, se puede calcular el grupo fundamental de M , que admite una presentación

$$\pi_1(M) = \langle x_1, \dots, x_n, h \mid h \text{ central, } x_k^{a_k} = h^{-b_k}, x_1, \dots, x_n = h^{-b} \rangle.$$

Aquí los x_k están asociados a los bordes de los D_k y h al generador del grupo fundamental de la fibra S^1 . Teniendo en cuenta que el primer grupo de homología es el abelianizado del grupo fundamental, $H_1(M)$ es isomorfo al conúcleo del homomorfismo:

$$f : \mathbb{Z}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$f(x) = Ax,$$

siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & b \end{pmatrix}$$

Utilizando de nuevo dualidad de Poincaré, deducimos que M será una 3-esfera de homología si y sólo si $H_1(M) = 0$. Esto es equivalente a que el conúcleo del homomorfismo anterior sea trivial, lo cual ocurre cuando $\det A = \pm 1$. Calculamos el determinante de la matriz A . Se comprueba fácilmente que

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a_1 a_2 (b - \sum_{k=1}^2 b_k / a_k)$$

Lo hemos probado para $n = 2$, así que supongamos cierta la fórmula para $n - 1$ y

veremos que se verifica también para n . Se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & b \end{vmatrix} = \\
 & = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & b \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & b_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & b \end{vmatrix} = \\
 & = a_1 a_2 \cdots a_n \sum_{k=2}^n (b - b_k/a_k) - a_2 \cdots a_n b_1 = a_1 \cdots a_n \sum_{k=1}^n (b - b_k/a_k)
 \end{aligned}$$

Si elegimos la orientación tal que $\det(A) = 1$, el cálculo anterior implica que la condición para que el conúcleo anterior sea trivial (y por tanto la variedad sea una esfera de homología) es que los a_k y b_k verifiquen la ecuación:

$$a_1 a_2 \cdots a_n \sum_{k=1}^n (b_k/a_k) = 1 + b a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Se verifica que para que los a_k cumplan la ecuación tienen que ser primos entre sí. Además, reduciendo la ecuación anterior mod a_k para todo k , obtenemos que cada b_k está determinado por a_k módulo a_k . Más aún, se puede probar usando cálculo de Kirby [Kir2], que dos esferas de homología de Seifert $M(b; (a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))$ y $M'(b'; (a_1, b'_1), \dots, (a_n, b'_n))$ son homeomorfas vía un homeomorfismo que preserve la orientación si y sólo si $b'_k = b_k \text{ mod } a_k$. Finalmente, se pueden escoger los b_k de modo que $b = 0$. Como la ecuación anterior está fijada para cualquier variedad de este tipo, obtenemos que las esferas de homología de Seifert solamente dependen de la n -tupla (a_1, \dots, a_n) .

Concluimos esta sección mencionando que las esferas de homología de Seifert pueden construirse también como intersecciones de superficies complejas con la esfera unidad (a la manera de las variedades de Brieskorn), a partir de 3-variedades

cerradas y orientadas que admiten una acción libre de S^1 (variedades fibradas de Seifert) o como espacios homogéneos. En particular, la esfera de Poincaré es la esfera de homología de Seifert $M(-1, (2, 1), (3, 1), (5, 1))$. El lector interesado puede acudir a las referencias que aparecen en la sección mencionada de [Sav].

3.3 Cirugía de Dehn sobre nudos

En este epígrafe vamos a describir una de las formas más clásicas y habituales de construir nuevas variedades a partir de otras, la *cirugía de Dehn*. En esta sección seguiremos básicamente las secciones 1.1.5 y 1.1.6 de [Sav].

Consideramos un nudo k en una 3-variedad cerrada orientable M . Abusando de notación, identificaremos los nudos con su clase de isotopía. Denotamos por $N(k)$ a un entorno tubular cerrado del nudo en la variedad M . Si extraemos el toro $\partial N(k)$ de la variedad M , obtenemos dos variedades: el exterior del entorno $M \setminus \partial N(k)$, que llamaremos exterior del nudo y denotaremos K , y el interior del entorno, homeomorfo al interior $D^2 \times S^1$ de un toro sólido. Al grupo fundamental del exterior del nudo lo llamaremos *grupo del nudo*.

Ahora pegamos de nuevo el toro sólido a M , pero utilizando para pegar un homeomorfismo arbitrario $\partial D \times S^1 \rightarrow \partial K$. Esta es la operación llamada *cirugía de Dehn*, que produce una 3-variedad cerrada Q que en general no es homeomorfa a M . El homeomorfismo h lleva la circunferencia $\partial D^2 \times \{1\}$ en una curva cerrada simple c en ∂K , que determina Q si el nudo está fijo.

Asumimos ahora que k es un nudo en S^3 , de modo que K retrae con deformación sobre la circunferencia y , por tanto, posee su homología. Denominamos *meridiano* a una curva simple cerrada m en ∂K cuya imagen genera la homología de K . Es fácil ver que salvo isotopía, hay una única curva simple cerrada l sobre ∂K que es homológicamente trivial en K . A esta curva se la llamará *longitud canónica*. Los ciclos asociados a estas curvas generan el primer grupo de homología del toro ∂K , y además están orientadas salvo cambio simultáneo de orientación.

El homeomorfismo h descrito arriba tiene como imagen una cierta curva c cuya clase en $H_1(\partial K)$ es $pm + ql$, para ciertos $p, q \in \mathbb{Z}$. En este caso se dice que la variedad Q ha sido obtenida mediante *p/q-cirugía* en S^3 a lo largo del nudo k , y se suele denotar $S^3 + (p/q)k$. Cuando $q \in \{-1, 0, 1\}$ la cirugía se denomina *entera* y en caso contrario *racional*. Obsérvese que $q = 0$ implica que la cirugía es trivial, ya que en este caso

$Q = S^3$. Asimismo, como la construcción es independiente de la orientación de las curvas, $S^3 + (p/q)k$ y $S^3 + (-p/q)k$ son la misma variedad. Se puede probar sin dificultad a partir de la construcción que $H_1(S^3 + p/q \cdot k) = \mathbb{Z}/|p|$, y esto implica automáticamente que $S^3 + 1/q \cdot k$ es una esfera de homología, pues $H_1(S^3 + 1/q \cdot k) = 0$ y también $H_2(S^3 + 1/q \cdot k)$, por dualidad de Poincaré.

Para concluir, mostramos cómo obtener diferentes ejemplos de esferas de homología a través de la cirugía de Dehn.

Ejemplo 3.1. La esfera de Poincaré se obtiene mediante (-1) -cirugía de Dehn sobre el nudo trébol orientado hacia la izquierda. La misma variedad con la orientación opuesta puede obtenerse a través de 1 -cirugía sobre el nudo trébol orientado hacia la derecha.

Ejemplo 3.2. Las esferas de homología de Brieskorn de la forma $\Sigma(p, q, pqn - 1)$ se obtienen mediante $-1/n$ -cirugía sobre el (p, q) nudo tórico orientado hacia la izquierda, y las esferas de homología de Brieskorn de la forma

$$\Sigma(p, q, pqn + 1)$$

se obtienen mediante $(-1/n)$ -cirugía sobre el (p, q) nudo tórico orientado hacia la derecha.

Estas dos construcciones agotan todas las posibles esferas de homología que pueden obtenerse mediante cirugía de Dehn sobre un nudo tórico. En particular, es interesante mencionar aquí que las esferas de homología de Brieskorn de la forma $\Sigma(2, 3, 6n + 1)$ pueden obtenerse mediante $(-1/n)$ -cirugía sobre el nudo tórico $(2, 3)$ orientado hacia la derecha, pero también mediante 1 -cirugía sobre el nudo *twist* de tipo $(2n + 2)_1$ (que en el caso $n = 1$, es la figura ocho). Por tanto, cirugías de Dehn sobre diferentes nudos tóricos pueden dar lugar a la misma variedad.

Ejemplo 3.3. Sea k_n la fibra singular de grado a_n en una esfera de homología de Seifert $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$, definida más arriba. Entonces, si aplicamos $(-1/m)$ -cirugía sobre k_n obtenemos otra esfera de homología de Seifert, cuyos invariantes a_k son $(a_1, \dots, a_n + m \cdot a)$ siendo $a = a_1 \cdots a_{n-1}$.

Ejemplo 3.4. Un nudo k en una esfera de homología Σ se dice trivial si puede ser representado como el nudo trivial en S^3 en una descomposición como suma conexa $\Sigma = \Sigma \# S^3$. Realizando cirugía sobre k en la suma conexa obtenemos la variedad $\Sigma \# \Sigma'$, donde Σ' se obtiene a su vez mediante cirugía sobre k en S^3 . Asimismo, es posible probar también [Gor] que la variedad obtenida al realizar cirugía no trivial sobre un nudo no trivial de S^3 no puede ser nunca homeomorfa a S^3 , y por el teorema de Poincaré-Perelman, ni siquiera homotópicamente equivalente.

A pesar de lo que pueda parecer por la profusión de ejemplos, no todas las esferas de homología pueden obtenerse mediante cirugía de Dehn sobre nudos de S^3 . En este sentido, puede consultarse el ejemplo de Auckly [Auc]. No se sabe siquiera si todas las esferas de homología de Brieskorn pueden obtenerse de esta manera. Por tanto, queda una última pregunta por responder: ¿existe alguna técnica que permita construir cualquier 3-esfera de homología?

La respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, y la herramienta que permite alcanzar este objetivo es la generalización de la cirugía de Dehn sobre nudos a la cirugía de Dehn sobre enlaces. Recordemos que un *enlace* en una variedad cerrada y orientada M es sencillamente una colección de nudos disjuntos dos a dos. Realizar cirugía de Dehn sobre un enlace L en una variedad M es realizar cirugía de Dehn sobre cada uno de los nudos que constituyen el enlace. Así, la cirugía sobre un enlace compuesto por m nudos está caracterizada por una tupla $(p_1/q_1, \dots, p_m/q_m)$ cuyas componentes son números racionales o (formalmente) $1/0$. Como en el caso de nudos, la cirugía se denomina *entera* si todos los componentes de la tupla son enteros, y *racional* en otro caso.

El siguiente resultado de Lickorish y Wallace [Lic] contiene la respuesta a la pregunta anterior.

| Teorema 3.5. *Toda 3-variedad orientable cerrada puede obtenerse mediante cirugía de Dehn sobre un enlace en S^3 .*

En particular, como las 3-esferas de homología son 3-variedades orientables cerradas, pueden siempre construirse de este modo.

El teorema anterior generó gran interés, y desde su publicación se han sucedido los trabajos que precisan estas construcciones, así como los enlaces más adecuados para realizar las pertinentes cirugías. El lector interesado puede acudir a las referencias brindadas en la mencionada sección 1.1.6 de [Sav], donde también se puede encontrar una demostración concisa de este resultado.

3.4 Espacios de Moore

La principal referencia para esta sección ha sido [Hat], 2.40 y 4.34.

Hemos definido las esferas de homología como espacios que poseen un único grupo de homología reducida no nulo, que es isomorfo a \mathbb{Z} . Esta formulación de la defi-

nición sugiere una generalización inmediata: dado un grupo abeliano R , una R -esfera de homología será una variedad con un único grupo de homología reducida no nulo e isomorfo a R . Algunos espacios de vital importancia en teoría de homotopía, como los planos proyectivos y sus suspensiones (para $R = \mathbb{Z}/2$), los espacios lenticulares y sus suspensiones (para $R = \mathbb{Z}/p$, p primo) o las esferas racionales (para $R = \mathbb{Q}$), son ejemplos de R -esferas de homología. Describamos a continuación un modelo concreto para una 3-esfera de homología racional:

Ejemplo 3.5. Recuérdense que obtuvimos la esfera de Poincaré identificando las caras opuestas del dodecaedro tras un giro de $\pi/5$ radianes de dichas caras. Se puede comprobar que los únicos giros restantes tales que esta identificación produce una 3-variedad cerrada son los de $2\pi/5$ y $3\pi/5$ radianes. En el primer caso, la variedad cociente recibe el nombre de *dodecaedro de Seifert-Weber*, y es una 3-esfera de homología racional. En el segundo, el cociente es el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^3$, que no es una esfera de homología, ya que $H_1(\mathbb{R}P^3)$ es no nulo.

En el contexto de Teoría de Homotopía, las R -esferas de homología reciben tradicionalmente el nombre de *espacios de Moore*, y nuestro objetivo será mostrar cómo se construyen de modo genérico.

Definición 3.2. Sea $n \geq 1$ y G un grupo, abeliano si $n \geq 2$. Un *espacio de Moore* $M(G, n)$ es un CW -complejo X tal que:

- $H_n(X) = H_0(X) = G^{ab}$.
- $H_i(X) = 0$ si $i \neq 0, n$.
- $\pi_1 X = G$ si $n = 1$.

Obsérvese que, con esta definición, un espacio de Moore $M(G, 1)$ es siempre una G^{ab} -esfera de homología y viceversa; la única particularidad de la noción de espacio de Moore es que, en el caso en que $n = 1$, se especifica también quién debe ser el grupo fundamental. Como nuestro fin es mostrar la existencia de R -esferas de homología, vamos a asumir ahora que G es un grupo abeliano.

Proposición 3.1. Si G es un grupo abeliano y $n \geq 1$, existe un modelo para $M(G, n)$.

Demostración. Tomamos un conjunto S de generadores de G , y un epimorfismo $F \rightarrow G$ desde un grupo abeliano libre F de rango $|S|$. Denotamos por K al núcleo del epimorfismo anterior, que también es un grupo abeliano libre por ser subgrupo de un grupo abeliano libre. Escogemos una base $\{y_\beta\}$ de K y una base $\{x_\alpha\}$ de F , de modo que cada y_β es una combinación lineal $y_\beta = \sum d_{\beta\alpha} x_\alpha$. Si definimos $X^n = \bigvee_\alpha S_\alpha^n$

una suma puntual de n -esferas indizadas por α , se tiene que $H_n(X^n) = F$. Ahora le pegamos a X^n celdas e_β^{n+1} , indizadas por β , usando aplicaciones $f_\beta : S^n \rightarrow X^n$ de modo que la composición con cada proyección $X^n \rightarrow S_n^\alpha$ tenga grado $d_{\beta\alpha}$. El espacio X obtenido al realizar todos estos pegados es la cofibra homotópica de la aplicación $X^n = \bigvee_\beta S_\beta^n \rightarrow X^n = \bigvee_\alpha S_\alpha^n$ que definen los pegados, y la sucesión de Mayer-Vietoris prueba que tiene la homología deseada. Por tanto, X es un modelo para $M(G, 1)$. |

Exponemos a continuación algunos comentarios de interés relacionados con esta demostración:

- Una modificación del argumento, razonando con grupos libres en lugar de con grupos abelianos libres, permite probar la existencia de $M(G, 1)$ para todo G .
- La demostración es válida independientemente del cardinal de G .
- Dados G y $n \geq 2$, existe un único modelo simplemente conexo para $M(G, n)$ salvo homotopía. Dado otro modelo $M'(G, n)$ también simplemente conexo, existe siempre una aplicación $M(G, n) \rightarrow M'(G, n)$ que es la identidad en π_n , y por tanto en H_n . La unicidad es ahora consecuencia del teorema de Whitehead 0.2.

En el caso $n = 1$, los modelos para $M(G, 1)$ no son en general únicos salvo homotopía, como prueba la existencia de espacios acíclicos no contráctiles. Un *espacio acíclico* puede definirse como un espacio de Moore $M(G, 1)$ con G perfecto. Por supuesto, el punto es el modelo canónico, pero hay muchos otros acíclicos con homotopía no trivial. Por ejemplo, el 2-esqueleto P^2 de la esfera de Poincaré es un espacio acíclico no contráctil, pues posee dimensión 2 y la inclusión $P^2 \rightarrow P$ induce isomorfismo en homología y grupo fundamental. Asimismo, cualquier esfera de homología a la que se haya retirado un punto es un espacio acíclico, y pueden construirse acíclicos a través de extensiones apropiadas de grupos perfectos. Los espacios acíclicos tienen gran importancia en Topología, por ejemplo en relación a la construcción plus de Quillen, la teoría K o el teorema de Kan-Thurston. Ver [Far] o [Ber] para más información.

3.5 Conclusión

En este trabajo se ha intentado ofrecer una introducción accesible de índole topológica al tema de las esferas de homología. Asimilado nuestro contenido, el lector

ya estará preparado para profundizar en aspectos más sofisticados de la teoría y sus implicaciones, entre los que se cuentan:

- Los invariantes de Casson y Rokhlin.
- Estructura topológica de las suspensiones.
- Teoría de Galewski-Stern sobre variedades de dimensión baja.
- Los invariantes de Walker y Lescop.
- Teoría gauge.
- Homología de Floer.
- Las esferas exóticas de Milnor.

Como ya ha quedado dicho durante el trabajo, una gran referencia para introducirse en muchos de estos temas es el libro de Saveliev [[Sav](#)]. También recomendamos el artículo [[Mil5](#)], donde se traza un panorama histórico de la teoría, con énfasis en el aspecto diferenciable, que no ha sido desarrollado en este trabajo.

Bibliografía

- [Ade] A. Adem and R.J. Milgram. *Cohomology of finite groups* Vol. 309. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Auc] D. Auckly. *Surgery numbers of 3-manifolds: a hyperbolic example*. Geometric topology (Athens, GA, 1993) 2 (1997): 21-34.
- [Ber] A. J. Berrick. *An approach to algebraic K-theory*. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [Bjo] A. Björner, and F. H. Lutz. *Simplicial manifolds, bistellar flips and a 16-vertex triangulation of the Poincaré homology 3-sphere*. Experimental Mathematics 9 (2000): 275-289.
- [Bri] E. V. Brieskorn. *Examples of singular normal complex spaces which are topological manifolds*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 55 (1966): 1395.
- [Can] J. W. Cannon. $\Sigma^2 H^3 = S^5/G$. Rocky Mountain Journal of Mathematics 8 (1978): 527-532.
- [Con] J. H. Conway and D. A. Smith. *On quaternions and octonions*. CRC Press, 2003.
- [Cox] H. S. Coxeter and W. O. Moser. *Generators and relations for discrete groups* Vol.14. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Dav] M. Davis and J. H. Coates. *The geometry and topology of Coxeter groups* No. 32. Princeton University Press, 2008.
- [Dum] I. Dumé Is the universe a dodecahedron? Physics World. On internet <https://physicsworld.com/a/is-the-universe-a-dodecahedron>, 2003.
- [Far] E. Farjoun. *Acyclic spaces*. Topology 11 (1972): 339–348.

- [Gor] McA. C. Gordon and J. Luecke. *Knots are determined by their complements*. Journal of the American Mathematical Society 2 (1989): 371-415.
- [Hal] B. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction* Graduate Texts in Mathematics, 222 (2nd ed.), Springer, 2015.
- [Hat] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [Hat2] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. On Internet <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VB.pdf>, 2003.
- [Kir] R. C. Kirby and M. G. Scharlemann. *Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere*. Geometric topology. Academic Press, 1979. Págs. 113-146.
- [Kir2] R. C. Kirby. *A calculus for framed links in S^3* . Inventiones Mathematicae 45 (1978): 35-56.
- [Lic] W. B. R. Lickorish. *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*. Annals of Mathematics 76 (1962): 531-540.
- [Lum] J. P. Luminet, J. R. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, and J. P. Uzan. *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background*. Nature 425 (2003): 593-595.
- [Mas] W. S. Massey. *Algebraic topology: an introduction*. New York: Springer, 1967.
- [Mil] J. Milnor. *On spaces having the homotopy type of a CW-complex*. Transactions of the American Mathematical Society 90 (1959): 272-280.
- [Mil2] J. Milnor. *On simply-connected 4-manifolds*. Symposium Internacional de Topología Algebraica, México, 1958, 122-128.
- [Mil3] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. No. 61. Princeton University Press, 1968.
- [Mil4] J. Milnor. *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p, q, r)$* . Knots, groups and 3-manifolds (1975): 175-225.
- [Mil5] J. Milnor. *Differential topology 46 years later*. Notices American Mathematical Society 58 (2011): 804-809.
- [Mil6] J. Milnor. *Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*. Notices American Mathematical Society 50 (2003): 1226-1233.

- [Mor] M. Morimoto and K. Uno. *Remarks on one fixed point A 5-actions on homology spheres*. Algebraic Topology Poznań 1989. Springer, Berlin, Heidelberg, 1991. Págs. 337-364.
- [Mor2] J. Morgan and G. Tian. *The geometrization conjecture*. Clay Mathematics Monographs, 5, American Mathematical Society, 2014.
- [Per] G. Perelman. *Finite extinction time for the solutions of the Ricci flow on certain three-manifolds*. Preprint, 2003; arXiv:math.DG/0307245.
- [Pie] A. Piękosz. *Basic definitions and properties of topological branched coverings*. Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center 8 (1996): 359-370.
- [Ran] R. C. Randell. *The homology of generalized Brieskorn manifolds*. Topology 14 (1975): 347-355.
- [Sav] N. Saveliev. *Invariants of Homology 3-spheres* Vol. 140. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Sei] H. Seifert and W. Threlfall. *A textbook of Topology*. Academic Press, 1980.
- [Spa] E. H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1989.
- [Ste] N. Ste. *The Topology of Fibre Bundle*. Princeton University Press, 1951.
- [Swi] R. M. Switzer. *Algebraic topology-homotopy and homology*. Springer, 2017.
- [Thu] W. P. Thurston and S. Levy. *Three-dimensional geometry and topology*. Vol. 1. Edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series, 35, 2014.
- [Ueb] P. Uebele. *Symplectic homology of Brieskorn manifolds*. Tesis doctoral, Augsburg, 2016.