

# Trabajo Fin de Máster

## Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

### Implementación de un sistema de medida de fuerzas en una prensa de forja

Autor: Luis Herrera Chilla

Tutor: Luis Valentín Bohórquez Jiménez

**Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2021





Trabajo Fin de Máster  
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

# **Implementación de un sistema de medida de fuerzas en una prensa de forja**

Autor:

Lui Herrera Chilla

Tutor:

Luis Valentín Bohórquez Jiménez

Profesor Contratado Doctor

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2021



Trabajo Fin de Máster: Implementación de un sistema de medida de fuerzas en una prensa de forja

Autor: Luis Herrera Chilla

Tutor: Luis Valentín Bohórquez Jiménez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2021

El Secretario del Tribunal



*A mi familia*

*A mis maestros*



# Agradecimientos

---

A mi familia, que siempre ha sido pilar principal y apoyo incondicional, especialmente mis padres y hermanos, María José y Juan Gustavo, Ángela y José Carlos.

A Scherezade, manantial de valores puros, pieza clave para mi persona, “*bonzai*”.

A mis amigos, que siempre me soportan.

A todos mis profesores, en el colegio, en el instituto, en el Grado, en el Máster... gracias por contribuir a desarrollar una mejor versión de mí, apasionándome por el saber, y sobre todo gracias por ser pilar fundamental de conocimiento y sabiduría en esta sociedad con los valores cambiados.

A Luis mi tutor, por su paciencia, comprensión e interés, gracias por darme la oportunidad de realizar este trabajo.

A Laura, sus conversaciones constructivas, me hicieron conocerme más, ¿50€? ¡Ni tan caro!

*Luis Herrera Chilla*

*Sevilla, 2021*



# Resumen

---

Este proyecto se basa en conseguir abordar y dar respuesta a un problema mediante diferentes vías, dicho problema es medir la fuerza que ejerce una prensa al realizar una estampa de una pieza de un material concreto.

Para alcanzar dicho objetivo se hacen uso de multitud de herramientas diferentes, ya que intervienen una gran variedad de conocimientos aplicables para poder dar solución.

Primera vía obtener la fuerza mediante el camino teórico, se hace el estudio de estampado de la prensa, y se obtiene una primera referencia teórica de la fuerza que produce la máquina al realizar una estampa.

Segunda vía, obtener la fuerza por el camino de la mecánica de elementos finitos computacional. En este camino actuamos de la siguiente manera, se realiza un diseño de la prensa usando el programa CATIA, los elementos diseñados se exportarán al software de elementos finitos Deform-3D donde se realizarán los distintos análisis de fuerza, replicando el problema real.

Tercera vía, obtener la fuerza mediante el camino experimental, en esta vía no realizaremos el experimento final, pero sí diseñaremos como ha de hacerse y los elementos que tendríamos que usar para conseguir la respuesta de la fuerza que ejerce la máquina.

Con los estudios en el Deform-3D, vamos a conseguir la información necesaria para la elección tanto de la geometría como de los diferentes tipos de materiales a usar en el experimento real.

En el experimento práctico se añadirán dos nuevos elementos a la prensa, uno al que llamaremos punzón será un material con alto límite elástico, ya que será el encargado de realizar la deformación plástica del otro nuevo elemento al que llamaremos placa blanda, con un límite elástico que dependerá de los estudios previamente realizados. Mediante el experimento práctico y midiendo la deformación plástica lograda en la placa blanda obtenemos la fuerza proporcionada por la máquina estampadora.



# Abstract

---

This project is based on managing to respond to a problem through different ways, this problem is measuring the force exerted by a press when making a stamp of a piece of a specific material.

To achieve this objective, a multitude of different tools are used, since a great variety of applicable knowledge intervenes in order to provide a solution.

First way to obtain the force is through the theoretical path, we have to study the press stamping, and then we will get a first theoretical reference of the force produced by the machine when make a stamp.

Second way, obtain the force by the way of computational finite element mechanics. In this way we act as follows, a press design is made using the CATIA program, the designed elements will be exported to the Deform-3D finite element software where the different force analyzes will be carried out, replicating the real problem.

Third way, obtain the force through the experimental way, in this way we will not carry out the final experiment, but we will design how it should be done and the elements that we would have to use to get the response of the force exerted by the machine.

With the studies in the Deform-3D, we are going to obtain the necessary information for the choice of both the geometry and the different types of materials to be used in the real experiment.

In the practical experiment, two new elements will be added to the press machine, one that we will call a punch will be a material with a high elastic limit, since it will be in charge of carrying out the plastic deformation of the other new element that we will call a soft plate, with an elastic limit, that will depend on the studies previously carried out. Through practical experiment and by measuring the plastic deformation achieved in the soft plate, we obtain the force provided by the stamping machine.



<b>Agradecimientos</b>	<b>ix</b>
<b>Resumen</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiii</b>
<b>Índice</b>	<b>xv</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xvii</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xix</b>
<b>Notación</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2 Introducción</b>	<b>5</b>
<b>3 Teoría de la plasticidad</b>	<b>7</b>
3.1 <i>Introducción</i>	7
3.2 <i>Definición de criterio de plastificación</i>	8
3.3 <i>Evidencias experimentales</i>	13
3.3.1 <i>Simetría en la plastificación</i>	13
3.3.2 <i>Independencia de la constante hidrostática</i>	13
3.3.3 <i>Isotropía plástica</i>	14
3.3.4 <i>Ensayos</i>	15
3.4 <i>Características generales</i>	15
3.5 <i>Criterio de Tresca</i>	22
3.6 <i>Criterio de von Mises</i>	22
3.7 <i>Comparación con experimentos</i>	23
3.8 <i>Aplicabilidad para el diseño de nuestro experimento</i>	24
<b>4 Teoría de la estampación</b>	<b>27</b>
4.1 <i>Introducción</i>	27
4.2 <i>Características de la forja</i>	27
4.3 <i>Importancia de la rebaba en el proceso de forja</i>	28
4.4 <i>Determinación de la geometría de la zona de rebaba</i>	29
4.5 <i>Espesores de la sección de cierre de la matriz</i>	30
4.6 <i>Tolerancias de forja</i>	31
4.7 <i>Etapas de conformado durante la forja</i>	32
4.8 <i>Eliminación de la rebaba</i>	33
4.9 <i>Cálculo de la fuerza para nuestro problema</i>	33
4.10 <i>Aplicabilidad del capítulo para el diseño del experimento práctico</i>	38
<b>5 Diseño CAD de la máquina estampadora</b>	<b>43</b>
5.1 <i>Introducción</i>	43
5.2 <i>Maqueta 3D original</i>	43
5.3 <i>Ubicación del punzón y de la placa blanda</i>	50
5.4 <i>Maqueta 3D con la solución para el experimento real</i>	52
<b>6 Simulación M.E.F. con Deform-3D</b>	<b>55</b>

6.1	<i>Introducción</i>	55
6.2	<i>Simulación virtual del problema</i>	55
6.3	<i>Resultado fuerza simulación con elementos finitos</i>	59
6.4	<i>Comparación de los resultados de fuerza por los dos métodos usados</i>	62
6.5	<i>Resultado energía simulación con elementos finitos</i>	64
6.6	<i>Simulación virtual del experimento</i>	67
6.7	<i>Relación Fuerza-Desplazamiento</i>	76
<b>7</b>	<b>Conclusiones y mejoras</b>	<b>77</b>
<b>8</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

---

# ÍNDICE DE TABLAS

---

1	Tabla 4.9.1. (Tabla 9-2 Schey-Procesos de manufactura-3° edición)	37
2	Tabla 4.10.1. Características metales. Fentes: (*) <a href="http://www.goodfellow.com">http://www.goodfellow.com</a> ;(**) Alacer Mas S.L. ;(***) Ferros Texar S.L.	40
3	Gráfico 6.3.1. Fuerza vs deformación	61
4	Gráfico 6.5.1. Energía vs deformación	66
5	Gráfico 6.7.1. Relación Fuerza vs Desplazamiento	76



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1	Figura 3.2.1. Esquema general del Problema Elástico	8
2	Figura 3.2.2. Diagramas tensión-deformación	10
3	Figura 3.3.2.1. Curvas Fuerza-Deformación para un acero de 0.2% de carbono,	13
4	Figura 3.4.1. Sólido bajo presión hidrostática	16
5	Figura 3.4.2. Descomposición vector tensión en esférico y desviador	19
6	Figura 3.4.3. Representación criterio Tresca	20
7	Figura 3.4.4. Representación en el espacio tensional de las superficies de rotura y plastificación	21
8	Figura 3.7.1. Representación de experimentos de Lode	23
9	Figura 3.7.2. Resultados experimentos de Taylor y Quinney	24
10	Figura 3.7.3. Resultados obtenidos por Lianis y Ford	24
11	Figura 3.8.1. Diagrama tensión-deformación teóricos	25
12	Figura 4.3.1. a) Forjado de una pieza simple b) Variación de carga durante la carrera para forjar la pieza	29
13	Figura 4.4.1 Configuración del canal de rebaba	30
14	Figura 4.6.1. Tolerancias de forja para mecanizado de acabado	31
15	Figura 4.7.1. Secuencia de una forja de biela	32
16	Figura 4.9.1. Geometría de la probeta antes del proceso	34
17	Figura 4.9.2. Geometría de la probeta después del proceso (1)	34
18	Figura 4.9.3. Geometría de la probeta después del proceso (2)	34
19	Figura 4.9.4. Geometría de la probeta después del proceso (3)	35
20	Figura 4.9.5. Momento de la posición más elevada de la estampa	36
21	Figura 4.9.6. Momento del impacto de la estampa	37
22	Figura 4.10.1. Ubicación relativa entre el punzón y la placa blanda	39
23	Figura 4.10.2. Área de la cara del punzón	40
24	Figura 5.2.1. Máquina estampadora real (1)	43
25	Figura 5.2.2. Máquina estampadora real (2)	44
26	Figura 5.2.3. Máquina estampadora real (3)	44
27	Figura 5.2.4. Máquina estampadora real (4)	44
28	Figura 5.2.5. Máquina estampadora real (5)	44
29	Figura 5.2.6. Maqueta 3D de la estampadora (1)	45
30	Figura 5.2.7. Maqueta 3D de la estampadora (2)	45
31	Figura 5.2.8. Maqueta 3D de la estampadora (3)	46
32	Figura 5.2.9. Maqueta 3D de la estampadora (4)	46
33	Figura 5.2.10. Maqueta 3D de la estampadora (5)	47
34	Figura 5.2.11. Maqueta 3D de la estampadora (6)	47

35	Figura 5.2.12. Maqueta 3D de la estampadora (7)	48
36	Figura 5.2.13. Maqueta 3D de la estampadora (8)	48
37	Figura 5.2.14. Maqueta 3D de la estampadora (9)	49
38	Figura 5.2.15. Maqueta 3D de la estampadora (10)	49
39	Figura 5.3.1. Ubicación relativa punzón-placa blanda maqueta 3D (1)	50
40	Figura 5.3.1. Ubicación relativa punzón-placa blanda maqueta 3D (2)	50
41	Figura 5.3.3. Geometría con cotas del punzón y de la placa blanda	51
42	Figura 5.3.4. Mejor ubicación de la placa blanda y el punzón	51
43	Figura 5.4.1. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (1)	52
44	Figura 5.4.2. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (2)	52
45	Figura 5.4.3. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (3)	53
46	Figura 5.4.4. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (4)	53
47	Figura 5.4.5. Modificación de las mordazas exteriores (1)	54
48	Figura 5.4.6. Modificación de las mordazas exteriores (2)	54
49	Figura 6.2.1. Estructura esquematizada del programa realizado en Deform 3D	55
50	Figura 6.2.2. Probeta real vs Deform 3D	56
51	Figura 6.2.3. Mallado de la probeta	57
52	Figura 6.2.4. Estampa superior real vs Deform 3D	57
53	Figura 6.2.5. Estampa inferior Deform 3D	58
54	Figura 6.2.6. Estampas y probeta antes de la simulación	58
55	Figura 6.3.1. Simulación del problema fuerza vs deformación (1)	59
56	Figura 6.3.2. Simulación del problema fuerza vs deformación (2)	59
57	Figura 6.3.3. Simulación del problema fuerza vs deformación (3)	59
58	Figura 6.3.4. Simulación del problema fuerza vs deformación (4)	59
59	Figura 6.3.5. Simulación del problema fuerza vs deformación (5)	60
60	Figura 6.3.6. Simulación del problema fuerza vs deformación (6)	60
61	Figura 6.3.7. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (1)	60
62	Figura 6.3.8. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (2)	60
63	Figura 6.3.9. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (3)	60
64	Figura 6.3.10. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (4)	60
65	Figura 6.3.11. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (5)	61
66	Figura 6.3.12. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (6)	61
67	Figura 6.5.1. Simulación del problema energía vs deformación (1)	64
68	Figura 6.5.2. Simulación del problema energía vs deformación (2)	64
69	Figura 6.5.3. Simulación del problema energía vs deformación (3)	64
70	Figura 6.5.4. Simulación del problema energía vs deformación (4)	64
71	Figura 6.5.5. Simulación del problema energía vs deformación (5)	65
72	Figura 6.5.6. Simulación del problema energía vs deformación (6)	65
73	Figura 6.5.7. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (1)	65

74	Figura 6.5.8. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (2)	65
75	Figura 6.5.9. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (3)	65
76	Figura 6.5.10. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (4)	65
77	Figura 6.5.11. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (5)	66
78	Figura 6.5.12. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (6)	66
79	Figura 6.6.1. Estructura esquematizada del programa, replica del experimento Deform 3D	67
80	Figura 6.6.2. Mallado fino en la placa blanda	68
81	Figura 6.6.3. Punzón	69
82	Figura 6.6.4. Bancada	69
83	Figura 6.6.5. Conjunto de elementos que constituyen la simulación	70
84	Figura 6.6.6. Simulación del experimento (1)	71
85	Figura 6.6.7. Simulación del experimento (2)	71
86	Figura 6.6.8. Simulación del experimento (3)	72
87	Figura 6.6.9. Simulación del experimento (4)	72
88	Figura 6.6.10. Geometría final constatada del punzón y de la placa blanda	73
89	Figura 6.6.11. Error, simulación Deform 3D (1)	74
90	Figura 6.6.12. Error, simulación Deform 3D (2)	75
91	Figura 6.6.13. Error, simulación Deform 3D (3)	75



# Notación

---

$\sigma$	Tensión
$u$	Desplazamiento
$\varepsilon$	Deformación
$C_{ijkl}$	Tensor de constantes elásticas
$V$	Volumen
$X$	Fuerza por unidad de volumen (Sólo en el capítulo 3)
$S$	Superficie
$t$	Fuerza por unidad de superficie (Sólo en el capítulo 3)
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$G$	Módulo de cizalladura
$\sigma_E$	Límite elástico
$\sigma_u$	Límite de fluencia
$\emptyset$	Función de plastificación
$P, p$	Presión
$\tau$	Tensión tangencial
$\varepsilon_{ij}^0, \sigma_{ij}^0$	Tensores esféricos
$\varepsilon_{ij}^d, \sigma_{ij}^d$	Tensores desviadores
$I_{ij}$	Invariante
$\mu$	Parámetro de Lode
$E$	Módulo de Young (Sólo en el capítulo 3)
$n_{ij}$	Vector normal
$N_{ij}$	Vector gradiente normal a la superficie de plastificación
$\varepsilon^e$	Deformación elástica
$\varepsilon^p$	Deformación plástica
$T_f$	Espesor de la rebaba
$W_f$	Peso del material forjado
$T_w$	Espesor de membrana
$r$	Radio
$A$	Área
$h$	Altura
$x$	Longitud
$v$	Velocidad

a	Aceleración
F	Fuerza
E	Energía

# 1 OBJETIVOS

---

Este proyecto se basa en conseguir abordar y dar respuesta a un problema mediante diferentes vías, dicho problema es medir la fuerza que ejerce una máquina estampadora al realizar una estampa de una pieza de un material concreto.

Para alcanzar dicho objetivo se hacen uso de multitud de herramientas diferentes, ya que intervienen una gran variedad de conocimientos aplicables para poder dar solución.

En el recorrido de conseguir los objetivos de este proyecto se necesitan ir alcanzando hitos intermedios, los cuales vamos a numerar y explicar de forma breve a continuación.

## **-Objetivo 1. Estudio teórico de plasticidad.**

El primer objetivo que se tiene que cumplir es conseguir la base teórica suficiente, tanto matemática como física (teoría de la plasticidad), para poder comprender de forma perfecta los distintos fenómenos que surgen o pueden surgir en los ensayos de plasticidad en metales.

Para ganar ese conocimiento al principio del proyecto se diseñará una parte con toda la información básica sobre la teoría de la plasticidad.

Una vez conseguido el conocimiento suficiente no sólo para entender el fenómeno de la plasticidad de los metales, sino también para tomar con criterio y raciocinio las diferentes decisiones que deben ir siendo elegidas a lo largo de este proyecto como por ejemplo, a la hora de elegir de forma correcta el tipo de material y la mejor geometría de los elementos nuevos que se añadirán a la estampadora en el experimento final para poder medir la fuerza que la máquina ejerce en hacer una estampa de un material concreto.

Al final de este primer capítulo se podrá empezar a tener una idea del tipo de material que debemos usar, tanto para la placa blanda como para el punzón.

## **-Objetivo 2. Estudio teórico del estampado.**

De la misma forma que en el hito anterior, en este segundo objetivo hay que conseguir los diferentes conocimientos básicos sobre la teoría de estampado, matemática y física, para de esta forma conocer y entender dicho proceso correctamente.

Para obtener este conocimiento en el proyecto se diseñará una parte con toda la información básica sobre la teoría de estampado.

Debemos de tener conocimiento teórico sobre el estampado de metales, porque obviamente para cada fase del proyecto se va usar esta teoría de forma directa o indirecta, como por ejemplo en el primer estudio teórico de la

fuerza que ejerce la máquina o en el momento de análisis con el software de elementos finitos.

Al final de este segundo capítulo obtenemos la fuerza que ejerce la máquina de forma teórica y además se podrá acortar la búsqueda del tipo de material que tenemos que usar tanto para la placa blanda como para el punzón y sus respectivas geometrías, para el diseño del experimento.

### **-Objetivo 3. Diseño de la máquina de estampado y diseño de la solución.**

En la primera parte de este objetivo mediante el uso del programa CATIA diseñaremos todas las piezas de la máquina y el conjunto completo. Como para cualquier estudio ingenieril es necesario tener una maqueta 3D para poder entender y ver de forma más clara y óptima cualquier solución, sea gráfica o no.

En la segunda parte de este objetivo con el programa CATIA también se concebirá una solución de diseño para la inclusión de los dos nuevos elementos que formarán parte de la máquina. Esos dos nuevos elementos de la prensa serán, uno al que uno llamaremos punzón y estará conformado de un material con alto límite elástico, ya que será el encargado de realizar la deformación plástica del otro nuevo elemento al que llamaremos placa blanda, con un límite elástico más bajo que el del punzón. Las primeras características tanto de tipo de material como de geometría vienen dadas por los primeros estudios teóricos realizados en el objetivo 2, pero como la mayoría de los proyectos en ingeniería son procesos iterativos, con lo que si en la parte del objetivo 4 que nos ofrecerá unos resultados más exactos se aleja de los primeros cálculos pues obviamente se modificará lo que sea necesario, ya sea la primera elección de material o de geometría hasta que se solucione el problema y se pueda seguir avanzando en el proyecto.

Después de este capítulo tenemos que ser capaces de elegir la mejor ubicación de la placa blanda y el punzón, para el experimento, además de poder seleccionar casi con exactitud la morfología de ambos.

### **-Objetivo 4. Análisis de elementos finitos.**

En este objetivo se usará el software de elementos finitos Deform-3D. Con este programa de MEF se importarán las diferentes partes de la máquina de CATIA para ser usadas en el análisis de elementos finitos. Con los diferentes análisis realizados conseguimos como objetivo principal la fuerza que ejerce la prensa al realizar una estampa de un material concreto. Además podemos detallar y verificar el tipo de material a usar en el experimento real y su geometría, tanto del punzón como de la placa blanda.

En este capítulo se podrá conseguir el conocimiento necesario para dejar cerrada la geometría y el tipo de material, para el experimento práctico, de la placa blanda y del punzón. Además nos dará una solución exacta de la fuerza ejercida por la máquina y la deformación que se producirá en la placa blanda, lo que usaremos para saber qué tipo de sujeciones serán necesarias para mantener la estabilidad y que no haya movimiento relativo en ningún momento en el conjunto, (lo más seguro es que se utilicen unos muelles, pero ya se desarrollará en los futuros capítulos).

### **-Objetivo 5. Preparación para el experimento práctico.**

El experimento consiste, en el que la máquina estampadora trabajando normalmente (al hacer una estampa) transmita la fuerza a un punzón (rígido) y este a una placa blanda que se deformará.

En este último objetivo del proyecto, dicho objetivo se va a ir alcanzando de forma paralela con los estudios y análisis anteriormente descritos, se introducirán las soluciones de diseños realizadas para la inclusión del punzón y de la placa blanda en la máquina de estampado. Una vez completado lo anterior se realizará la preparación para el experimento práctico, y si dicho experimento se realiza, con las diferentes medidas de las deformaciones plásticas realizadas a la palca blanda después de un estampado de la prensa se culminará consiguiendo los resultados de fuerzas exactos realizados por la máquina, cumpliendo con el objetivo final a través de un completo camino en el que se usan distintas disciplinas para dar solución a un problema.



## 2 INTRODUCCIÓN

---

Para poder resolver problemas ingenieriles hay que aunar diferentes campos de la ciencia de los cuales podemos extraer las distintas ecuaciones que describen dicho problema y que en la mayoría de los casos llegan a ser muy difíciles de resolver. El trabajo del ingeniero no sólo es conseguir resolverlas, si no también comprenderlas y saber interpretarlas, para poder de esta forma entender de forma perfecta el funcionamiento del sistema analizado.

Desde el origen de la ingeniería se han usado diversos modelos tanto matemáticos como físicos simplificados, para poder llegar a conseguir resultados con las herramientas tecnológicas de las que se disponían en cada momento de la historia, y que además dichos modelos han sido capaces de obtener resultados muy correctos. A pesar de todo, la tecnología avanza de una forma vertiginosa e imparable, apoyándonos en ella podemos llegar a resolver los cálculos de modelos más complejos, menos simplificados, de una manera más precisa para así conseguir llevar al límite a la ciencia.

Dentro de los avances tecnológicos más importantes relacionados con la ingeniería, fue el hallazgo de la computación, ya que desencadenó el desarrollo de la tecnología de una forma rápida, global y sin límites, hacia como la conocemos hoy en día. Esta evolución en la computación desembocó en poder crear métodos numéricos avanzados capaces de resolver problemas de gran dificultad en un periodo temporal muy corto, haciendo mucho más sencillo el trabajo a desempeñar por los ingenieros. Los progresos computacionales que facilitaron en gran medida la labor de los ingenieros no sólo se quedaron en la creación de métodos numéricos, más adelante en el tiempo se inventaron diferentes herramientas que consiguieron como la mayoría de los avances tecnológicos, poder desarrollar los diferentes trabajos de una forma más óptima, rápida, exacta y menos tediosa. Es el caso de las herramientas de diseño asistido por ordenador (CAD), fabricación asistida por ordenador (CAM), ingeniería asistida por ordenador (CAE)...

Uno de los métodos numéricos que se desarrollaron fue el Método de los Elementos Finitos (MEF), introducido por Alexander Hrennikoff y Richard Courant a principios de la década de 1940 y desarrollado y optimizado por diversos científicos durante la segunda mitad del siglo XX y que, en la actualidad, sigue evolucionando.

Por otro lado el CAD fue principalmente inventado por Pierre Bézier, un ingeniero francés de las “Arts et Métiers ParisTech”. Bézier desarrolló los principios fundamentales del CAD con su programa UNISURF en 1966.

En el desarrollo de este proyecto se utilizan diferentes campos de la ciencia, como en la mayoría de los proyectos ingenieriles, como se ha expuesto anteriormente en la parte de los objetivos se empieza por comprender la teoría tanto del fenómeno a estudiar, plastificación, como del proceso realizado por la prensa, estampado de metal, para posteriormente poder usar los diferentes software de CAD y de MEF para los pertinentes análisis a realizar; finalmente con dichos estudios y conseguida toda la información necesaria se obtiene la fuerza que ejerce la estampadora, y también se podría realizar el experimento práctico con todo lo anterior conseguido.

Este Trabajo Fin de Máster es muy completo por todas las competencias diferentes que reúne, además es un

buen ejemplo de cómo se puede dar solución a un problema de ingeniería. Este es el perfecto ejemplo de proyecto de ingeniería, ya que comienza con una pregunta de ¿cómo calcular la fuerza de la prensa de estampado?, y para dar respuesta a la pregunta y por tanto solución al problema tenemos que diseñar un camino con los recursos y conocimientos que posee un ingeniero, empezando primero por el uso de las distintas teorías que describen y caracterizan el proceso del estampado y combinándolo con la teoría de la plasticidad para conseguir el fin deseado, añadiendo el uso de software de CAD y MEF para los análisis pertinentes y finalizar con un posible experimento práctico.

# 3 TEORÍA DE LA PLASTICIDAD

---

En este capítulo asentaremos las bases teóricas del conocimiento de la plasticidad para poder tener un entendimiento de lo sucedido en el problema que nos ataña.

## 3.1 Introducción

Partiendo de un estado indeformado, la relación entre tensiones y deformaciones en los sólidos, concretamente en los metales, es lineal y elástica para un determinado rango de tensiones y deformaciones. Lineal hace referencia que para cada valor de tensión depende linealmente de cada valor de deformación, y viceversa. Elástica expresa que las deformaciones sufridas son reversibles, pudiéndose recuperar de forma completa al suprimir las acciones exteriores, y no habiendo por tanto disipación de energía. En este intervalo las deformaciones y desplazamientos son muy pequeños, lo que en la práctica se asocia a la hipótesis de la elasticidad lineal con la de pequeños desplazamientos y deformaciones, en este intervalo son de aplicación las ecuaciones de la Teoría Clásica de la Elasticidad.

No obstante, en ingeniería con el uso cotidiano de diversos materiales en la realidad se presentan situaciones en las que algunas partes de un sólido sufren lo que se denomina “plastificación”, término que podría definirse de forma genérica como una fase del comportamiento del sólido en la que deja de ser válida la ley lineal elástica de comportamiento, apareciendo unas deformaciones permanentes que se denominarán, deformaciones plásticas. Dichas deformaciones plásticas pueden ser buscadas a propósito o que aparezcan de una forma indeseable.

Ejemplos de plastificaciones buscadas serían laminado, forja, extrusión, mecanizado..., en los cuales partimos de un material con una forma inicial y se desea conformar con una forma final diferente, por tanto para conseguir dicho fin hay que realizarles unas deformaciones permanentes, es decir plásticas. Otro ejemplo típico que se engloba dentro de este grupo sería el diseño plástico de estructuras de barras, porque en esas estructuras se permite la plastificación total de algunas secciones de las barras. Cabe destacar que en un diseño elástico clásico el estado límite admitido es el fin del comportamiento elástico. Por lo que, en el análisis elástico, las máximas cargas admitidas son aquellas que provocan que el punto más solicitado del sólido llegue a la plastificación. El análisis elástico es muy conservador por lo general, porque un sólido no pierde su capacidad de resistir cuando uno de sus puntos plastifica. Por tanto al hacer este tipo de análisis no vamos a poder conseguir información sobre cuál es el nivel de cargas máxima que soporta un sólido, no pudiendo estimar si las cargas actuantes están cercas o lejos de las cargas de agotamiento total del sólido. Un análisis plástico del mismo permite estimar cual es la máxima carga que soporta y da una idea más precisa de la reserva de resistencia que aún posee el sólido. Al hacer uso de un análisis plástico, estamos optimizando y llegando a conseguir una información sobre la carga que puede soportar el sólido mucho más detallada que siendo tan conservadores y usando solo el estudio elástico, de esta forma podemos obtener mucho más rendimiento de los diferentes materiales a la hora de usarlos y conseguir cotas superiores de eficiencia.

En cuanto a las deformaciones plásticas que aparecen de forma indeseable habría que indicar todas las situaciones que involucren la presencia de grietas en el sólido. La Mecánica de la Fractura se encarga del estudio del comportamiento de sólidos que contienen grietas. Debido a que la presencia de una grieta produce la aparición de valores muy altos de tensión, por tanto esto involucra que la plastificación esté de forma

inevitable en sólidos con grietas. Las grietas también son responsables del comportamiento de un sólido cuando está sometido a un alto número de ciclos de carga, esto lo engloba el estudio de la Fatiga. Finalmente, la Soldadura es otra situación en la que aparecen plastificaciones indeseables, ya que las altas temperaturas que se desarrollan en el proceso crean plastificaciones locales.

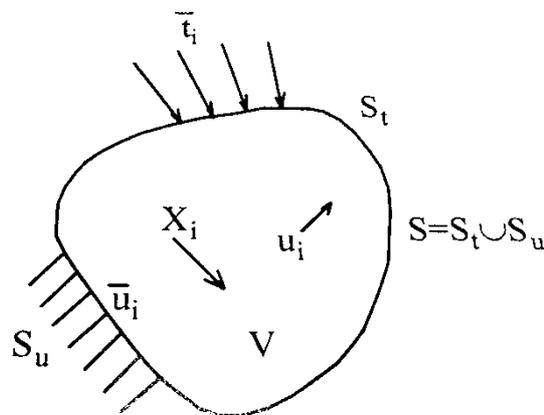
De todas formas, ya sean las plastificaciones buscadas o indeseables, es obvio que se necesita desarrollar un modelo matemático del comportamiento plástico mecánico de sólidos que en algunos de sus puntos hayan superado el periodo de comportamiento elástico, y este es el objetivo de la Teoría de la Plasticidad. Sólo se considerarán materiales metálicos, y se admitirá por tanto las hipótesis de sólido isótropo (es decir, que la ley de comportamiento es invariante ante cambios de ejes), de comportamiento elástico y lineal en el periodo previo a producirse la plastificación. Así como la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones, lo que tiene como consecuencia que la geometría deformada se aproxima por la indeformada a efectos de aplicación de las ecuaciones básicas.

La Teoría de la Plasticidad está formada por dos partes fundamentales: en primer lugar, el establecimiento de un criterio de plastificación, que permita decidir cuando un punto deja de comportarse elásticamente y pasa a comportarse plásticamente; estos criterios son el objeto de este tema. En segundo lugar, habrá que desarrollar unas ecuaciones de comportamiento que relacionan las tensiones con las deformaciones en un punto plastificado.

## 3.2 Definición de criterio de plastificación

Ecuaciones diferenciales básicas del modelo lineal elástico de un sólido con pequeñas deformaciones y desplazamientos.

Dado un sólido de volumen  $V$ , y contorno  $S$  Figura 3.2.1, en el que las acciones son fuerzas por unidad de volumen  $X_i$  en  $V$ , fuerzas por unidad de superficie  $\bar{t}_i$  en  $S_t$ , y desplazamientos prescritos  $\bar{u}_i$  en  $S_u$  ( $S = S_t \cup S_u$ ), las ecuaciones básicas que deben satisfacer el vector de desplazamientos  $u_i$  y los tensores simétricos de tensiones y deformaciones  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$ , son:



1 Figura 3.2.1. Esquema general del Problema Elástico

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \text{ en } V \quad (3.2.1a)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \text{ en } S_t \quad (3.2.1b)$$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ en } V \quad (3.2.2a)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ en } S_u \quad (3.2.2b)$$

Ecuaciones de comportamiento:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.2.3a)$$

Con:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}, C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.2.3b,c)$$

Las ecuaciones (3.2.1) representan el equilibrio en el volumen y en el contorno, mientras que las ecuaciones (3.2.2) representan la compatibilidad en el volumen y en el contorno. El tensor de constantes elásticas  $C_{ijkl}$  de las ecuaciones de comportamiento (3.2.3a) cumple las ecuaciones (3.2.3b) y (3.2.3c), las primeras debidas a la simetría de  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}$ ; las segundas son satisfechas si se admite la existencia de la función densidad de energía de deformación. En el caso isótropo, al que nos referimos siempre en estas notas,  $C_{ijkl}$  contiene sólo dos constantes elásticas, que pueden ser, por ejemplo,  $G$  (Módulo de cizalladura) y  $\nu$  (Coeficiente de Poisson) y tiene la forma:

$$C_{ijkl} = G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (3.2.3d)$$

Del que se obtiene la ley de comportamiento isotrópa:

$$\sigma_{ij} = 2G(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \quad (3.2.3e)$$

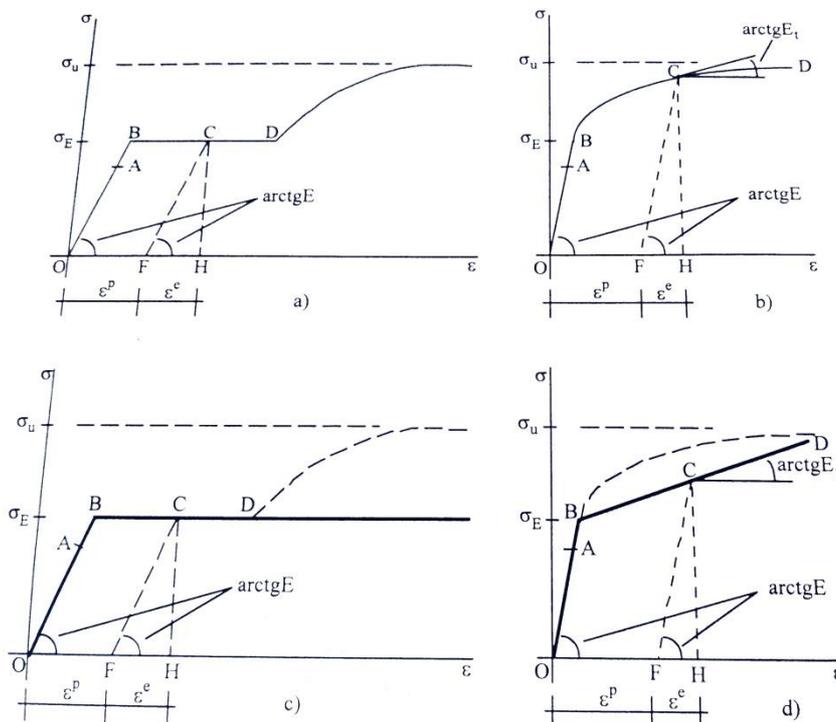
Está claramente demostrado que en el ensayo de tracción llega un momento en el cual deja de ser válida para un determinado valor de las tensiones la relación lineal entre tensiones y deformaciones y que a partir de ahí el material pasa a comportarse de forma totalmente diferente. Para un ensayo de tracción monodimensional es bastante sencillo realizar el cálculo experimental del límite de la tensión para el que la relación lineal inicial deja de ser válida, y se denomina límite elástico ( $\sigma_e$ ).

Dos comportamientos tipo se pueden presentarse a partir de aquí: un escalón de fluencia en el que aumenta la deformación a tensión constante, seguido de un periodo de endurecimiento (Figura 3.2.2a) ó un endurecimiento no lineal sin escalón de fluencia (Figura 3.2.2b). El primero es propio de aceros suaves al carbono, que presentan una gran ductibilidad, llegando en rotura a una deformación del orden del 30% o mayor, el segundo se presenta en aleaciones de metales como el aluminio o el titanio, y en aceros de alta aleación, que no presentan escalón de fluencia, y cuya deformación en rotura suele estar entre el 15 y el 20%.

En el uso práctico se recurren a esquematizaciones de los diagramas anteriores, que dan como fin buscado dos modelos básicos: el modelo elastoplástico perfecto (MEPP) y el modelo elastoplástico con endurecimiento (MEPE), mostrados con esquemas linealizados en las Figuras 3.2.2c y 3.2.2d. En el primero, se desprecia el recorrido de endurecimiento posterior de estos aceros (línea de puntos), que provee una reserva adicional de resistencia no contemplada en el modelo elastoplástico perfecto; en el segundo, la curva de comportamiento en el etapa de estado plástico (línea de puntos) se ha aproximado por un sólo tramo lineal, si bien es posible hacer una aproximación multilineal o directamente no lineal que aproxime con la precisión deseada una curva real.

Brevemente nos referiremos a los materiales elastoplásticos perfectos como “no endurecibles” o “no rigidizables” y a los materiales elastoplásticos con endurecimiento como “endurecibles” o “rigidizables”.

Como se puede observar en las funciones de comportamiento, a partir del límite elástico deja de ser válida la correspondencia lineal entre tensiones y deformaciones y aparece el fenómeno de la irreversibilidad. En cambio en el período elástico la eliminación de las tensiones elimina también las deformaciones (camino OAO en las gráficas de la Figura 3.2.2), una disminución de tensiones en periodo plástico provoca una descarga por una línea perceptiblemente paralela al



2 Figura 3.2.2. Diagramas tensión-deformación

tramo elástico (líneas CF en la Figura 3.2.2). Un incremento a posteriori de la tensión recorre nuevamente la línea FC y el tramo CD. Si desde el punto F se continúa disminuyendo la tensión se produce, en materiales con endurecimiento, una plastificación en compresión para un nivel de tensiones inferior al del punto C, fenómeno que es conocido como efecto Bauschinger, en honor a su descubridor en 1886. En el modelo elastoplástico perfecto se admite que la plastificación en compresión se produce para el mismo nivel de tensiones existente previamente en tracción, es decir para  $\sigma = -\sigma_E$ .

Cabe nombrar que en el MEPP (Figura 3.2.2c), para poder parar en un momento dado el experimento en un punto como por ejemplo el C, es necesario que dicho experimento de tracción se realice con “control en desplazamientos”, eso significa que lo que se controla en el experimento es el desplazamiento relativo de los cabezales, y si en el punto C se decae dicho desplazamiento, se recorre la línea de descarga CF. Si el ensayo se realiza con “control de carga”, en el punto B las deformaciones crecerían instantáneamente hasta el punto D en el diagrama real, o hasta la deformación de rotura en el diagrama elastoplástico perfecto ideal.

La Figura 3.2.2 enseña las más importantes peculiaridades del fenómeno plástico. Primeramente la eliminación de las acciones externas puede no excluir las deformaciones, pudiendo quedar en el sólido deformaciones plásticas irreversibles que se denominan deformaciones residuales (tramo OF en la Figura 3.2.2); en situaciones reales con estados generales de tensión (multidimensionales), las deformaciones residuales irán acompañadas de tensiones residuales. Segundo, la irreversibilidad del proceso hace perder la relación biunívoca entre las tensiones y las deformaciones, que define un proceso elástico. Ahora teniendo un valor de tensión (deformación), pueden llegar a existir infinitos en la deformación (tensión), que podrían asociarse a aquél. No existe como se ha dicho anteriormente una relación única tensión-deformación y por tanto el estado final al que se llega es dependiente de la historia pasada de carga a que está sometido cada punto, es decir, del desarrollo de las tensiones y deformaciones que en él se han producido. Asimismo, la pérdida de linealidad en la relación tensión-deformación hace que no se pueda aplicar el principio de superposición: el efecto de varias cargas no es la superposición de los efectos individuales creados por cada una de ellas. Queda bastante claro a partir de estas hipótesis que la evolución plástica de un punto de un sólido sólo podrá simularse relacionando las variaciones de las tensiones con las variaciones de las deformaciones. Esta relación deberá ser integrada a lo largo de toda la historia de carga para obtener los valores totales de las tensiones y las deformaciones.

En el caso del ensayo monodimensional de tracción es inmediato definir la condición para que un punto esté plastificado. Así, considérese la situación más general de la Figura 3.2.2d. La ecuación de la recta BCD será, descomponiendo la deformación  $\varepsilon$  en elástica (FH) más plástica (OF):

$$\sigma = E_t \varepsilon + b = E_t (\varepsilon^e + \varepsilon^p) + b = E_t \left( \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^p \right) + b \quad (3.2.4a)$$

Obligando a que pase por el punto B ( $\sigma = \sigma_e, \varepsilon^p = 0$ ) se obtiene  $b = \frac{\sigma_E(E-E_t)}{E}$ ; despejando  $\sigma$ :

$$\sigma = \sigma_E + \frac{E E_t}{E - E_t} \varepsilon^p \quad (3.2.4b)$$

A partir de la ecuación anterior, definimos la “función de plastificación de un material endurecible,  $\Phi = (\sigma, \varepsilon)$ ” que caracteriza cuando un punto está en estado plástico:

$$\Phi(\sigma, \varepsilon^p) = \sigma - \left( \sigma_E + \frac{E E_t}{E - E_t} \varepsilon^p \right) \leq 0 \quad (3.2.5a)$$

Si  $\emptyset(\sigma, \varepsilon^p) < 0$  el punto está en período elástico. Cuando  $\emptyset(\sigma, \varepsilon^p) = 0$  el punto está plastificado y puede desarrollarse deformación plástica. Nótese que la ecuación (3.2.5a) es válida para cuerpos elastoplásticos perfectos haciendo  $E_t = 0$ , lo que permite definir la “función de plastificación de un material elastoplástico perfecto,  $\emptyset(\sigma)$ ”, que no depende de las deformaciones plásticas:

$$\emptyset(\sigma) = \sigma - \sigma_E \leq 0 \quad (3.2.5b)$$

Obviamente al comenzar a aumentar la tensión en un material endurecible virgen (es decir, sin tensiones ni deformaciones residuales), todos los puntos tienen primero un periodo de comportamiento elástico, con  $\varepsilon^p = 0$ , y la función de plastificación durante ese periodo vale:

$$\emptyset(\sigma, 0) = \sigma - \sigma_E \leq 0 \quad (3.2.5c)$$

Y comprobando las ecuaciones (3.2.5b) y (3.2.5c) se deduce que

$$\emptyset(\sigma, 0) = \emptyset(\sigma) \quad (3.2.5d)$$

ecuación que refleja, sencillamente, que hasta llegar a la plastificación (tramos OB de la Figura 3.2.2), no hay ninguna diferencia entre el MEPP y el MEPE. Es obvio que las ecuación (3.2.5) son válidas en la zona de tracción. Para poder recoger la plastificación en la zona de compresión, las ecuaciones habrán de ser modificadas. Mientras que este cambio es trivial en el caso del modelo elastoplástico perfecto, en el modelo elastoplástico con endurecimiento, las diferentes modificaciones dependerán del comportamiento del material y de si se va a tener en cuenta o no el efecto Bauschinger que se mencionó.

Un criterio de plastificación es la generalización a situaciones multidimensionales de las ecuación (3.2.5). Si son  $\sigma_{ij}$  y  $\varepsilon_{ij}^p$  las correspondientes variables tridimensionales (3D), las ecuaciones (3.2.5b) y (3.2.5a) se generalizan a:

$$\emptyset(\sigma_{ij}) \leq 0 \quad (3.2.6a)$$

$$\emptyset(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \leq 0 \quad (3.2.6b)$$

siendo la primera válida para el MEPP y la segunda para el MEPE. Al igual que en el caso 1D, si  $\emptyset < 0$  un punto está en estado elástico, habiendo plastificado cuando  $\emptyset = 0$ . La ecuación (3.2.5d) se generaliza en la forma:

$$\emptyset(\sigma_{ij}) = \emptyset(\sigma_{ij}, 0) \quad (3.2.6c)$$

Nuestro objetivo en este tema es la obtención de la función  $\emptyset(\sigma_{ij})$ , válida para cualquier estado tensional en el MEPP, y para el MEPE.

### 3.3 Evidencias experimentales

Actualmente todavía no existe ninguna teoría fiable que, a partir de la estructura microscópica de un metal, permita deducir la función  $\Phi(\sigma_{ij})$  que estamos buscando. Por tanto estas funciones tienen una base empírica, pretendiendo mostrar una serie de hechos experimentales.

#### 3.3.1 Simetría en la plastificación

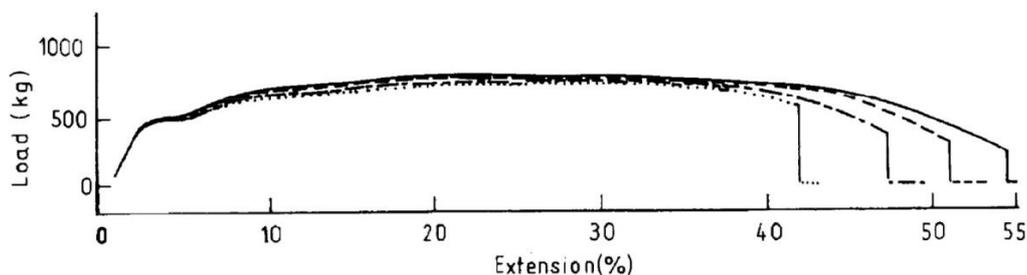
Si se ensaya el material virgen (sin tensiones ni deformaciones residuales) a tracción y a compresión se encuentra que la plastificación se produce para el mismo nivel de tensiones  $\sigma_E$ . Por tanto  $\Phi(\sigma_{ij}) = \Phi(-\sigma_{ij})$  esto implica que la función de plastificación sea:

$$\Phi(\sigma) = |\sigma| - \sigma_E \quad (3.3.1.1)$$

#### 3.3.2 Independencia de la constante hidrostática

Esta idea fue clave para construir los criterios de plastificación en materiales metálicos. Su inicio trata de los trabajos de Bridgman, que en 1952 analizó el comportamiento en un ensayo de tracción de metales sometidos a compresiones hidrostáticas, hallando que el límite elástico y el punto del comienzo del endurecimiento por deformación eran prácticamente insensibles al valor de la compresión hidrostática. El único efecto visible de ésta era un incremento de la deformación en la rotura de la probeta usada, es decir que se incrementaba la ductilidad del material.

Como se observa en la Figura 3.3.2.1 los ensayos llevados a cabo por Brandes (1970), la deformación en rotura aumenta al aumentar la compresión hidrostática, previsiblemente, ya que esta acción favorece a “cerrar” los defectos internos del sólido (microgrietas, poros, etc); en cambio como se comentó anteriormente, el límite elástico y el periodo de fluencia no varía con la compresión hidrostática.



(.....) atmosférica; (- . - . -) 4000 Kg/cm<sup>2</sup>; (- - - -) 6000 Kg/cm<sup>2</sup>; (\_\_\_\_) 7000 Kg/cm<sup>2</sup>.

3 Figura 3.3.2.1. Curvas Fuerza-Deformación para un acero de 0.2% de carbono, obtenidas bajo distintas compresiones hidrostáticas

En otros experimentos iguales pero esta vez con tracciones hidrostáticas muestran una disminución de la ductilidad, un estado de tritricción hidrostática, produce para un cierto valor de las tensiones, una rotura frágil sin plastificación previa, causada por separación de planos atómicos.

Si  $\sigma_{ij}^{1D}$  es el tensor de tensiones en el ensayo (monodimensional) de tracción o compresión, la independencia de la plastificación respecto a los estados hidrostáticos implica que  $\Phi(\sigma_{ij})$  debe cumplir  $\Phi(\sigma_{ij}^{1D}) = \Phi(\sigma_{ij}^{1D} + \sigma_{ij}^h)$ , siendo  $\sigma_{ij}^h$  un tensor hidrostático arbitrario. Admitiendo que dicha independencia es válida para cualquier estado tensional tridimensional  $\sigma_{ij}$ , generalizamos la ecuación anterior imponiendo que la función de plastificación debe cumplir:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \Phi(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^h) \quad (3.3.2.1)$$

### 3.3.3 Isotropía plástica

Si de un material virgen elásticamente isótropo se extraen varias probetas con distintas orientaciones, todas dan el mismo diagrama monodimensional  $\sigma - \varepsilon$  y por ende el mismo límite elástico  $\sigma_E$ , esto indica que dicho material es plásticamente isótropo, siendo irrelevante el sistema de ejes en que se analice la plastificación. Lo anterior se generaliza de forma matemática al caso 3D imponiendo que la función  $\Phi(\sigma_{ij})$  ha de ser invariante ante cambios de ejes del tensor  $\sigma_{ij}$ , es decir que si  $\sigma'_{ij}$  es el tensor expresado en unos ejes  $x'_i = (i = 1,2,3)$  ha de cumplirse que:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \Phi(\sigma'_{ij}) \quad (3.3.3.1a)$$

para lo cual  $\Phi(\sigma_{ij})$  ha de ser función sólo de los invariantes del tensor de tensiones,  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , es decir :

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \Phi(I_1, I_2, I_3) \quad (3.3.3.1b)$$

con:

$$I_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.3.3.2a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{I_1^2}{2} = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (3.3.3.2b)$$

$$I_3 = \text{Determinante}(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - I_1\left(\frac{I_1^2}{3} + I_2\right) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 \quad (3.3.3.2c)$$

Las primeras ecuaciones son válidas para cualquier referencia de ejes y las últimas sólo en ejes principales, siendo  $\sigma_i (i = 1,2,3)$  las tensiones principales. Se ve que, utilizando las ecuaciones (3.3.3.2) la ecuación (3.3.3.1b) podría ser puesta sólo en función de las tensiones principales. Es decir, la hipótesis de isotropía plástica implica que la función de plastificación puede expresarse sólo en función de las tres tensiones

principales:

$$\phi(\sigma_{ij}) = \phi(I_1, I_2, I_3) = \phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.3.3.3)$$

### 3.3.4 Ensayos

Los criterios de plastificación se evidencian al comparar sus resultados con los logrados de estudios experimentales. En relación a estados monodimensionales, deben representar los resultados de los ensayos de tracción y compresión (es decir, que se produzca la plastificación para  $\sigma = \pm\sigma_E$ ). En cuanto a experimentos bidimensionales, son conocidos los realizados por Lode en 1926, sobre tubos de pared delgada sometidos a tracción y presión interna. Estudios similares fueron realizados por Taylor y Quinney en 1931, poniendo a prueba tubos de pared delgada a tracción y torsión. Otra variante de ensayos fue la llevada a cabo por Lianis y Ford (1957) que experimentaron con una pletina con dos entallas asimétricas, lo que consigue obtener estados combinados de tensiones y controlar la posible anisotropía del material.

Finalmente, aludimos un rasgo que se hizo visible en los distintos experimentos de plastificación de metales: la deformación plástica se produce muy aproximadamente a volumen constante. Recordando que en la teoría de pequeñas deformaciones el cambio de volumen unitario que crea un tensor de deformaciones es igual a su primer invariante, esto implica que debe cumplirse:

$$d\varepsilon_{kk}^p = 0 \quad (3.3.4.1)$$

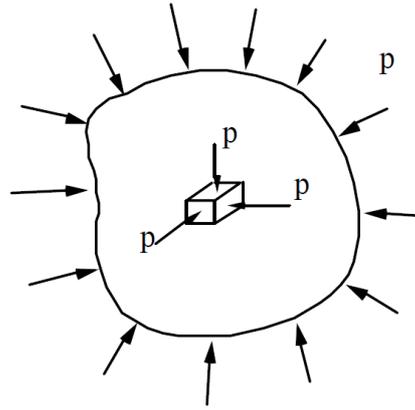
## 3.4 Características generales

Las demostraciones experimentales expuestas en el anterior apartado imponen un conjunto de condiciones a la función  $\phi(\sigma_{ij})$ . Concretamente la independencia de las tensiones hidrostáticas y la simetría de plastificación limitan, como veremos, las distintas posibilidades de las funciones de plastificación.

La compresión hidrostática se produce cuando un sólido se sumerge en un fluido a una profundidad mucho mayor que sus dimensiones. Se produce en ese momento una compresión  $p$  de valor aproximadamente constante normal al contorno en todo punto de éste Figura 3.4.1

Es fácilmente comprobable que la solución  $\sigma_{ij}^h = -p\delta_{ij}$  verifica todas y cada una de las ecuaciones elásticas y por ende, el teorema de unicidad, es la solución del problema. Efectivamente dicho tensor satisface equilibrio y compatibilidad, pues estas ecuaciones contienen derivadas primeras y segundas de  $\sigma_{ij}$ , respectivamente, y están igualadas a cero si no hay fuerzas de volumen. Además, se cumplen las condiciones de contorno ( $\sigma = -p$ ,  $\tau = 0$  en todo punto de éste) pues el tensor  $\sigma_{ij}^h$  es un tensor diagonal esférico, invariante por tanto ante los cambios de ejes y cuyos círculos de Mohr se reducen a un punto. Así, calculando el vector de tensiones en un punto arbitrario del contorno, de normal  $n_i$ , se tiene:

$$t_i = \sigma_{ij}^h n_j = -p\delta_{ij} n_j = -pn_i$$



4 Figura 3.4.1. Sólido bajo presión hidrostática

mientras que la componente normal  $\sigma$  vale:

$$\sigma = t_i n_i = -p n_i n_i = -p$$

y el vector tensión normal sería  $-p n_i$ , que coincide con  $t_i$ , lo que implica que  $\tau = 0$ . Por tanto  $\sigma_{ij}^h = -p \delta_{ij}$  es la solución exacta al problema de la compresión hidrostática, y la independencia de la componente hidrostática implica, usando la ecuación (3.3.2.1), que la función de plastificación debe cumplir:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \Phi(\sigma_{ij} + a \delta_{ij}) \quad (3.4.1)$$

siendo “a” una constante arbitraria.

Si bien los criterios de plastificación se dan normalmente en tensiones, es claro que el fenómeno de la plastificación debe estar asociado físicamente a las deformaciones. ¿Qué deformaciones crea un tensor hidrostático? Para contestar a esta pregunta, se puede aplicar la ley de comportamiento inversa, obtenida a partir de la ecuación (3.3.3.1):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.4.2)$$

Sustituyendo  $\sigma_{ij}^h = -p \delta_{ij}$  obtenemos:

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{1}{2G} \left( -p \delta_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} 3p \delta_{ij} \right) = -\frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} p \delta_{ij} = -\beta p \delta_{ij} \quad (3.4.3a)$$

lo cual era un resultado esperable: una compresión hidrostática crea una deformación hidrostática, definida por un tensor esférico que transforma cada elemento cúbico diferencial de volumen en otro homotético del primero, en el que todas las aristas se han acortado la misma distancia y de la misma forma. O sea, que  $\varepsilon_{ij}^h$  convierte cubos y no crea deformaciones angulares, es decir que modifica el volumen del sólido global, transformándolo en otro homotético del inicial pero con la misma forma. Se deduce por tanto que los cambios de volumen hidrostáticos (CVH) no originan plastificación en los metales. A partir de la ecuación (3.4.3a) se

tiene, contrayendo índices:

$$\varepsilon_{kk}^h = -\beta p \delta_{kk} = -3\beta p \rightarrow \varepsilon_{ij}^h = \frac{\varepsilon_{kk}^h}{3} \delta_{ij} \quad (3.4.3b)$$

en la que se comprueba que el cambio de volumen hidrostático (CVH) es proporcional al primer invariante  $\varepsilon_{kk}^h$  del tensor  $\varepsilon_{ij}^h$ , lo que sugiere descomponer el tensor de deformaciones totales  $\varepsilon_{ij}$  en suma de dos tensores, de forma que uno cree todo el CVH y el otro no origine ningún CVH:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) = \varepsilon_0 \delta_{ij} + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}) = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^d \quad (3.4.4)$$

En la que se han definido la “deformación hidrostática  $\varepsilon_0$ ” ( $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}$ ), el “tensor esférico,  $\varepsilon_{ij}^0$ ” y el “tensor desviador,  $\varepsilon_{ij}^d$ ”. De la ecuación (3.4.4) se deduce que:

$$\varepsilon_{kk}^d = \left( \varepsilon_{kk} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{kk} \right) = 0; \quad \varepsilon_{kk}^0 = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{kk} = \varepsilon_{kk} \quad (3.4.5a,b)$$

por tanto el tensor esférico crea todo el CVH debido a  $\varepsilon_{ij}$ , mientras que el tensor desviador tiene nulo su primer invariante ( $\varepsilon_{kk}^d = 0$ ), debido a lo cual no crea CVH, siendo entonces el único responsable de la plastificación. Asimismo, es interesante observar que esto sucede en cualquier sistema de ejes en el que se estudie la deformación; justamente, por una parte,  $\varepsilon_{ij}^0$ , es un tensor esférico invariante ante los cambios de ejes, y por otra, el tensor desviador  $\varepsilon_{ij}^d$ , tiene nulo su primer invariante en cualquier sistema de ejes. La deformación originada por el tensor desviador se suele designar como “cambio de forma”, dicha terminología está asociada al hecho siguiente: cualquier tensor desviador muestra un estado de deformación tangencial pura, lo que significa que existen infinitos sistemas de ejes en los cuales las componentes diagonales (deformaciones normales) del tensor son cero, siendo exclusivamente no nulas las componentes tangenciales. Ya que estas componentes sólo hacen girar los lados de un elemento, no cambian su volumen, dando lugar por tanto a lo que se ha nombrado como cambio de forma. En consecuencia dichos cambios de forma son los autores de la plastificación de los metales.

Asociada a la descomposición (3.4.4) en deformaciones existe otra análoga en tensiones:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}) = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^d, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (3.4.6a,b)$$

Aplicando la ley de comportamiento se obtiene la relación entre tensiones y deformaciones esféricas y desviadoras:

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{1}{\beta} \varepsilon_{ij}^0, \quad \sigma_{ij}^d = 2G \varepsilon_{ij}^d \quad (3.4.7a,b)$$

como se puede ver las tensiones esféricas sólo crean CVH, no originan plastificación, y que las tensiones desviadoras solo crean cambios de forma, y son las responsables de la plastificación; de nuevo, esto es para cualquier sistema de ejes.

En el espacio definido, la región  $\phi(\sigma_{ij}) < 0$  (puntos en estado elástico) contiene los puntos del interior de la superficie, la región  $\phi(\sigma_{ij}) = 0$  (puntos en estado plástico) representa el contorno de la región; designaremos “superficie de plastificación” a ese contorno. Si bien lo normal es analizar las características geométricas de la superficie de plastificación en ejes principales, es beneficioso, por generalidad, efectuar este estudio en el espacio general de 6 componentes. Para ello primeramente, vamos a discutir qué tipo de superficie es  $\phi(\sigma_{ij}) = 0$ . Por tanto, expresemos el valor de la función de plastificación en un entorno infinitesimal  $d\sigma_{ij}$  del punto genérico  $\sigma_{ij}$ :

$$\phi(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = \phi(\sigma_{ij}) + d\phi(\sigma_{ij}) = \phi(\sigma_{ij}) + \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (3.4.8a)$$

En este momento, formulemos una variación de tensiones en la dirección hidrostática, definida por el vector  $(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ , como  $d\sigma_{ij} = da\delta_{ij}$ , siendo “da” un infinitésimo arbitrario, y usemos la ecuación (3.4.1) y la (3.4.8a):

$$\phi(\sigma_{ij} + da \delta_{ij}) = \phi(\sigma_{ij}) = \phi(\sigma_{ij}) + \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} da \delta_{ij} \rightarrow \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} \delta_{ij} = 0 \quad (3.4.8b)$$

Mirar que, dada una superficie de plastificación  $\phi(\sigma_{ij}) = 0$ , las derivadas parciales de la ecuación (3.4.8b) representan, en el espacio de tensiones, las componentes del vector gradiente, que es un vector normal a la superficie de plastificación y dirigido hacia el exterior de dicha superficie en el punto  $\sigma_{ij}$ . Denominaremos  $N_{ij}(\sigma_{ij})$  a dicho vector:

$$N_{ij}(\sigma_{ij}) = \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} \quad (3.4.8c)$$

La ecuación (3.4.8b) se escribe ahora, usando la ecuación (3.4.8c):

$$N_{ij}\delta_{ij} = \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} \delta_{ij} = \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{11}} + \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{22}} + \frac{\partial\phi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{33}} = N_{11} + N_{22} + N_{33} = N_{kk} = 0 \quad (3.4.8d)$$

ecuación que expresa que, en todo punto de  $\phi(\sigma_{ij}) = 0$ , el vector gradiente  $N_{ij}$  (normal a la superficie de plastificación) es ortogonal a la dirección hidrostática  $\delta_{ij}$ , lo cual es la definición natural de un cilindro (no necesariamente de base circular) cuyo eje es dicha dirección hidrostática. Obsérvese también que los vectores esférico y desviador son ortogonales, pues su producto escalar es cero:

$$\sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^d \sigma_0 \delta_{ij} = \sigma_0 \sigma_{kk}^d = 0 \quad (3.4.8e)$$

es decir que el vector desviador lleva una dirección perpendicular a la dirección hidrostática (eje del cilindro).

La condición de isotropía en la plastificación ecuación (3.3.3.1b), junto con la de independencia del tensor hidrostático ecuación (3.3.2.1), permite deducir que la función de plastificación ha de ser función sólo de los

invariantes del tensor desviador. La definición de estos invariantes, que denominaremos  $J_i$ , se obtiene de las ecuaciones (3.3.3.2) usando las componentes de  $\sigma_{ij}^d$  en una vez de las de  $\sigma_{ij}$ , y teniendo en cuenta que por definición  $J_1 = \sigma_{kk}^d = 0$ . Las expresiones de dichos invariantes en ejes cualesquiera y en ejes principales, y su valor en función de los invariantes de  $\sigma_{ij}$  son:

$$J_1 = \sigma_{kk}^d = 0; \quad J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d = \frac{1}{2} \sigma_i^d \sigma_i^d; \quad J_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij}^d \sigma_{jk}^d \sigma_{ki}^d = \sigma_1^d \sigma_2^d \sigma_3^d \quad (3.4.9a,b,c)$$

$$J_1 = 0; \quad J_2 = \frac{I_2^2}{3} + I_2; \quad J_3 = \frac{2I_1^3}{27} + \frac{I_1 I_2}{3} + I_3 \quad (3.4.9d,e,f)$$

Por tanto la expresión general de una superficie de plastificación cilíndrica de eje la dirección hidrostática es:

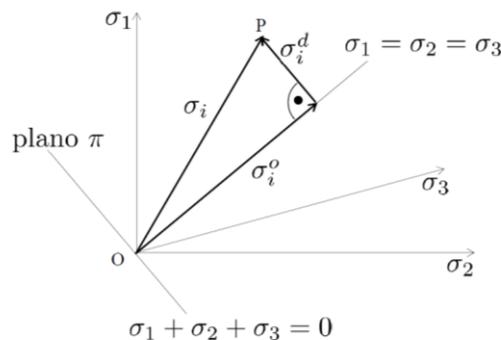
$$\phi(\sigma_{ij}) = \phi(\sigma_{ij}^d) = \phi(J_2, J_3) = \phi(J_2, -J_3) = 0 \quad (3.4.9g)$$

Nótese que de las ecuaciones (3.4.9b) y (3.4.9c) se deduce que  $J_2(-\sigma_{ij}^d) = J_2(\sigma_{ij}^d)$ , y  $J_3(-\sigma_{ij}^d) = -J_3(\sigma_{ij}^d)$ ; por tanto, para satisfacer la condición de simetría ecuación (3.3.1.1)  $\phi(J_2, J_3)$  debe ser una función par de  $J_3$ , que cumpla la tercera igualdad de la ecuación (3.4.9g).

El “espacio de tensiones principales” permite ilustrar las interpretaciones geométricas anteriores en un espacio real de 3 dimensiones. En dicho espacio, cada estado tensional viene representado por un punto P asociado a un vector  $\sigma_i = (\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3)^T$  y la función  $\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \phi(\sigma_i) = 0$  representa la superficie de plastificación. La descomposición del vector  $\sigma_i$  en esférico y desviador, con  $\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ :

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 \\ \sigma_2 - \sigma_0 \\ \sigma_3 - \sigma_0 \end{pmatrix} = \sigma_i^0 + \sigma_i^d \quad (3.4.10)$$

La ecuación (3.4.10) se representa gráficamente en la Figura 3.4.2, en la que el punto P representa el vector  $\sigma_i$ .

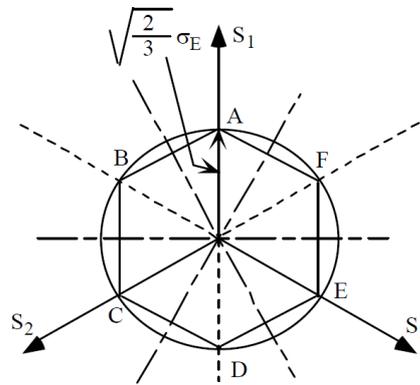


5 Figura 3.4.2. Descomposición vector tensión en esférico y desviador

De nuevo, y de la misma forma que sucedía en el espacio de 6 dimensiones,  $\sigma_i^0$  es perpendicular a  $\sigma_i^d$ , pues su producto escalar vale  $\sigma_i^0 \sigma_i^d = \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\sigma_0) = 0$ . La componente  $\sigma_i^0$  está obviamente sobre la

triseatriz ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), luego  $\sigma_i^d$  es perpendicular a la triseatriz. La plastificación no depende de  $\sigma_i^0$  y  $\emptyset(\sigma_i) = 0$  ha de ser una superficie cilíndrica de eje la triseatriz, que queda por tanto perfectamente definida a partir de su curva generatriz, lograda intersectando la superficie con un plano perpendicular a la triseatriz. Se denomina plano  $\pi$  (Figura 3.4.2) al plano perpendicular a la triseatriz que pasa por el origen (de ecuación  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ), y “curva de plastificación” a la intersección de la superficie  $\emptyset(\sigma_i) = 0$  con dicho plano; la curva de plastificación es la curva generatriz de la superficie de plastificación cilíndrica.

La simetría de plastificación ecuación (3.3.1.1), junto con la ecuación (3.3.2.1), implican que  $\emptyset(\sigma_i^d) = \emptyset(-\sigma_i^d)$ , lo que significa que la curva de plastificación ha de tener simetría radial. En la Figura 3.4.3 se muestra el plano  $\pi$  y la proyección sobre él de los ejes  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , que se han denominado  $S_1, S_2, S_3$  para distinguir las componentes proyectadas de las reales. La relación es  $S_1 = \sqrt{2/3}\sigma_i$ . Obsérvese que los vectores desviadores se ven en verdadera magnitud en el plano  $\pi$ .



6 Figura 3.4.3. Representación criterio Tresca

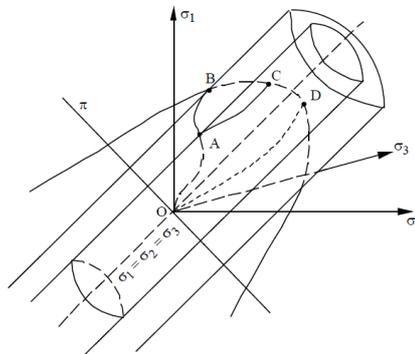
Se demuestra que la curva de plastificación tiene simetría radial si es simétrica respecto a los ejes  $S_i$  y a sus bisectrices (de punto y raya en la Figura 3.4.3). Además, para reproducir los resultados de los ensayos de tracción y compresión (una tensión distinta de cero, las otras nulas), la curva de plastificación debe cortar a los ejes  $S_i$  en los puntos  $\pm\sqrt{2/3}\sigma_E$  (puntos A-F de la Figura 3.4.3). Implantemos ahora otra peculiaridad de la curva de plastificación que se demostrará posteriormente: el área encerrada por la curva de plastificación ha de ser una región convexa, que se define como aquella en que cualquier recta que une dos puntos arbitrarios de la misma está contenida íntegramente dentro de la región. En la Figura 3.4.3 se exponen dos formas potenciales de la curva de plastificación: un hexágono y un círculo; estas son ciertamente las curvas de plastificación utilizadas para metales.

La realidad en el espacio de tensiones principales sería como se puede ver en la Figura 3.4.4, en la que se muestra una superficie de plastificación y una posible superficie de rotura, para reflejar el hecho experimental de que una tritración acaba provocando una rotura frágil del material, sin plastificación previa. En compresión, la superficie de plastificación se extiende indefinidamente, y no es cortada por la superficie de rotura.

La Figura 3.4.4 permite analizar las posibles formas de comportamiento de un sólido. Si la trayectoria de tensiones es OA el comportamiento sería elástico hasta llegar al punto A, en que se produce la plastificación.

Si el material es elastoplástico ideal la superficie de plastificación es invariante, lo que representa la generalización a 3D del tramo horizontal por  $\sigma_E$  de la situación 1D (Figura 3.2.2c). A partir de A, el estado

tensional debe desarrollarse moviéndose sobre la superficie de plastificación, hasta lograr la rotura en algún punto como por ejemplo el C, que pertenezca a la intersección de la superficie de rotura con la superficie original de plastificación.



7 Figura 3.4.4. Representación en el espacio tensional de las superficies de rotura y plastificación

Si el material del sólido presenta endurecimiento la superficie de plastificación se irá modificando de tamaño y/o posición en el subespacio de tensiones, lo que representa la generalización a 3D del tramo de endurecimiento de la situación 1D, en que el límite elástico efectivo aumenta con la deformación (Figura 3.2.2d). Para que el punto A permanezca plastificado ha de evolucionar de forma que se mantenga continuamente en la superficie de plastificación cambiante, (trayectoria AB), hasta que la trayectoria de tensiones intersece a la superficie de rotura con la superficie de plastificación actual que pase por el punto B.

En los dos ejemplos tenidos en cuenta anteriormente, a lo largo de las trayectorias AB y AC se producirán deformaciones plásticas que preceden a la rotura, que se denomina “dúctil”.

Si la trayectoria de carga es la OD, con una gran componente de tritricción, se alcanza antes la superficie de rotura que la superficie de plastificación, produciéndose una rotura sin deformaciones plásticas previas, que se denomina “frágil”.

Distingamos que aun teniendo un material capacidad para desarrollar deformación plástica antes de la rotura, su comportamiento (dúctil o frágil) depende del estado tensional. En el diseño deben evitarse los estados de tensiones de (o próximos a) tritricciones.

Por último hay que decir que existen materiales que no tienen capacidad de desarrollar deformaciones plásticas antes de la rotura, como la fundición o las fibras de vidrio o carbono, lo que en la representación anterior estaría asociado a una superficie de rotura interior a la superficie de plastificación.

De forma hidrostática se han sugerido una amplia variedad de criterios de plastificación, pero la inmensa mayoría no satisfacen las características generales establecidas en este apartado. Los dos criterios que cumplen estas condiciones y que son los utilizados actualmente para la plastificación de metales son el de Tresca y el de von Mises.

### 3.5 Criterio de Tresca

Se enuncia así: la plastificación de un punto se produce cuando la tensión tangencial máxima alcanza un valor crítico. Este valor se obtiene haciendo que se satisfagan los resultados del ensayo de tracción.

La tensión tangencial máxima en función de las tensiones principales viene dada por:

$$\tau_{m\acute{a}x} = M\acute{a}x\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}\right) \quad (3.5.1)$$

y en un ensayo de tracción se tiene que  $\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_E}{2}$ , quedando la condición de plastificación asociada al criterio de Tresca en ejes principales se escribe como:

$$\emptyset(\sigma_i) = M\acute{a}x(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) - \sigma_E \quad (3.5.2)$$

Lo que esas ecuaciones describen es una superficie alrededor de la diagonal principal con forma hexagonal, el hexágono de la Figura 3.4.3.

### 3.6 Criterio de von Mises

En 1903, Beltrami propuso que la plastificación de un punto se originaba cuando la energía de deformación por unidad de volumen alcanzaba un valor crítico. Si bien este criterio no se ajusta a las evidencias experimentales comentadas anteriormente, abrió un camino que fue seguido rápidamente. Al parecer fue Huber, en 1904, quien dio el enunciado físico de lo que hoy en día se conoce como criterio de von Mises: la plastificación de un punto se produce cuando la energía de deformación debida al cambio de forma alcanza un valor crítico. Huber no demostró su enunciado en ecuaciones. En 1913, von Mises, tratando de eliminar las discontinuidades en la normal de la superficie de no regular de Tresca, propuso como superficie de plastificación un cilindro que la circunscribiera y Hencky, en 1924, demostró que ambos enfoques conducían al mismo criterio. La curva de plastificación asociada es por tanto el círculo de la Figura 3.4.3.

Tal como fue introducido por von Mises, el criterio se expresa simplemente diciendo que la plastificación se produce cuando el módulo del vector desviador alcanza un valor crítico, que para ajustarse al ensayo de tracción, vale  $\sqrt{2/3}\sigma_E$  (ver Figura 3.4.3). Por tanto el criterio se escribe en ejes principales en la forma:

$$|\sigma_i^d| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_E \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}\sigma_i^d\sigma_i^d} = \sigma_E \quad (3.6.1)$$

A partir de su definición es obvio que esta superficie es cilíndrica y tiene la simetría radial requerida.

En ejes principales la función de plastificación según von Mises quedaría:

$$\phi(\sigma_i) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_2 - \sigma_3)]} - \sigma_E \quad (3.6.2)$$

### 3.7 Comparación con experimentos

Sólo nos queda por comprobar la concordancia de los resultados de estos criterios con los experimentos realizados creando estados bidimensionales de tensión, que fueron comentados anteriormente.

Lode realizó sus ensayos en 1926 sometiendo tubos de pared delgada a tracción y presión interna; los materiales usados fueron acero, cobre y níquel. Lode realizó sus ensayos para investigar la influencia de la tensión principal intermedia en la plastificación. Así, si es  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , se estudió el valor  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_E}$  frente a un “parámetro de Lode,  $\mu$ ”, definido según:

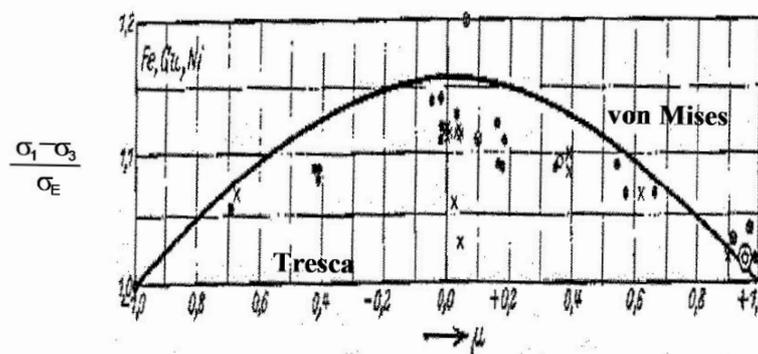
$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (3.7.1)$$

Puede observarse que  $\mu$  es independiente de los estados hidrostáticos, pues no cambia su valor al sustituir  $\sigma_i$  por  $\sigma_i + a$ . Para compresión pura ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$ )

$\mu = 1$ ; para tracción pura ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ),  $\mu = -1$  y para tensión tangencial pura ( $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$ ),  $\mu = 0$ . Variando los valores de la tracción y la presión interna, se obtuvieron distintos valores de  $\mu$ , desde -1 a 1. Estos valores experimentales se compararon con los criterios de Tresca y von Mises escritos en función del parámetro de Lode:

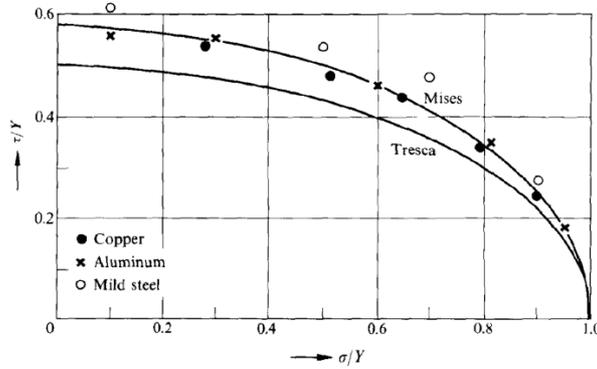
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_E} = 1 \text{ (Tresca)}; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_E} = \frac{2}{\sqrt{3 + \mu^2}} \text{ (von Mises)} \quad (3.7.2 \text{ a, b})$$

La Figura 3.7.1 muestra los resultados obtenidos, que muestran una gran dispersión. Ni obstante, se aprecia que la tensión intermedia  $\sigma_2$  sí tiene efecto en la plastificación, y que los resultados se ajustan mucho mejor al criterio de von Mises que al de Tresca.



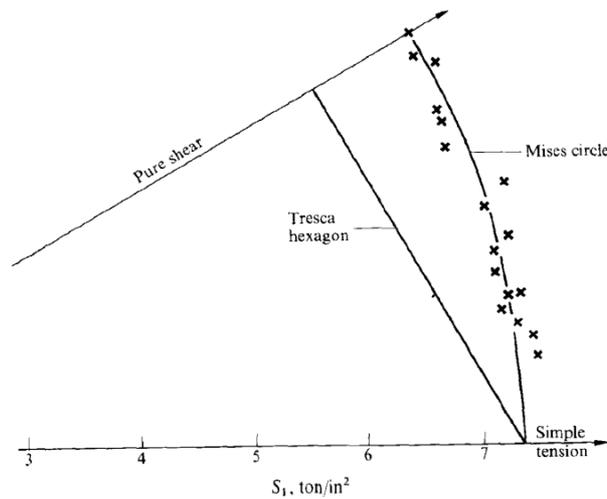
8 Figura 3.7.1. Representación de experimentos de Lode

La Figura 3.7.2 muestra los resultados de Taylor y Quinney (1931), obtenidos también con tubos de pared delgada sometidos ahora a tracción y torsión (con  $Y = \sigma_E$ ). Nuevamente, los resultados para los tres materiales mostrados (cobre, aluminio y acero suave) se ajustan mejor a la elipse de von Mises que a la de Tresca.



9 Figura 3.7.2. Resultados experimentos de Taylor y Quinney

Por último, la Figura 3.7.3 muestra los resultados obtenidos por Lianis y Ford (1957) usando una pletina rectangular con entallas. El material usado fue aluminio puro especialmente tratado para dar un claro límite elástico. La representación mostrada es un sector de 30° en el plano  $\pi$  y nuevamente puede observarse un claro ajuste al criterio de von Mises.



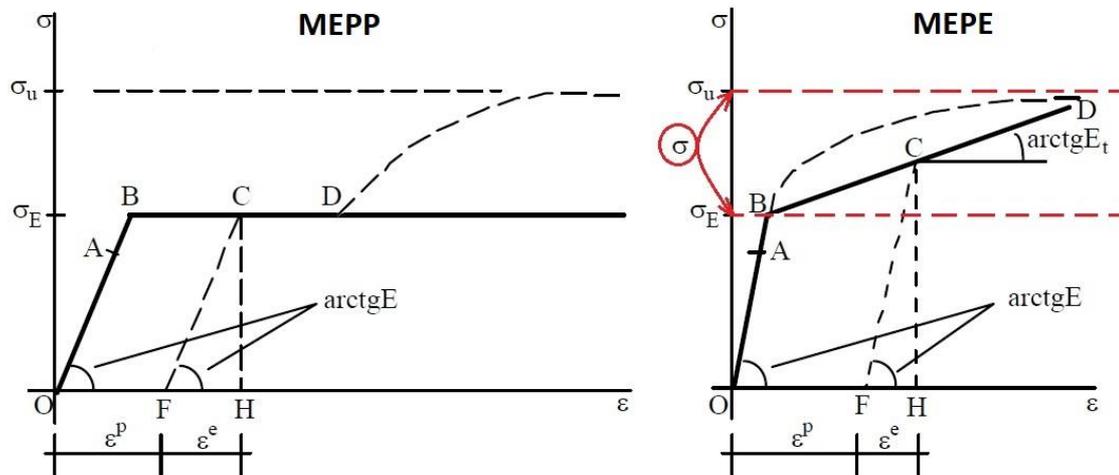
10 Figura 3.7.3. Resultados obtenidos por Lianis y Ford

Cabe por tanto concluir que, con muy buena aproximación, el criterio de von Mises controla la plastificación de los metales.

### 3.8 Aplicabilidad para el diseño de nuestro experimento

Es necesario realizar un apartado resumen del capítulo de plasticidad para resaltar con las partes de mayor importancia y que nos son de más aplicabilidad a nuestro proyecto. Una de estas sería el análisis para ir escogiendo el tipo de material que tiene ser escogido por sus características elásticas y plásticas, tanto para la

placa blanda como para el punzón, obviamente ya habiendo asentado las bases de conocimiento básicos sobre el fenómeno de la plastificación.



11 Figura 3.8.1. Diagrama tensión-deformación teóricos

Lo primero es definir de qué tipo de material debe ser el punzón y esta parte no tiene complicación, tenemos que buscar un material que no se deforme cuando la estampadora ejerza fuerza sobre él cuando ésta trabaje, mientras que el punzón sí sea capaz de deformar a la placa blanda. Para ello lo que buscamos es que el límite elástico del material del punzón sea muy alto, que  $\sigma_E(\text{punzón}) > \sigma_u(\text{placa blanda})$ . Esto seguramente lo consigamos con un acero de alta aleación; aunque va a estar en función del material de la placa y de la morfología del punzón, ya que la tensión suministrada tanto para la placa blanda como para el punzón es función del área, pero eso ya se definirá en futuros capítulos.

La segunda pregunta que nos tenemos que hacer y responder para definir ahora la placa blanda es, qué tipo de material nos interesa más según su plastificación, ¿un MEPP (ejemplo: aceros suaves al carbono) o un MEPE (ejemplo: aleaciones de metales como el aluminio o el titanio, y en aceros de alta aleación)?, dicha respuesta es fácil, queremos un material elastoplástico con endurecimiento (MEPE), ya que necesitamos un material para nuestra placa que al conseguir sobrepasar  $\sigma_E$  pero no superar  $\sigma_u$ , cuando se le aplique una tensión concreta  $\sigma_E < \sigma < \sigma_u$ , esta tensión produzca una deformación  $\epsilon^p$  que sea única para esa tensión aplicada. De esta manera evitamos el problema que nos podría llegar a ocasionar el escalón de fluencia del MEPP, como podemos observar en la Figura 3.8.1.

Escoger un MEPE para la placa concreto ahora mismo nos sería imposible debemos seguir acercándonos más y recabar más información necesaria, pero si podríamos anticipar que seguramente sea un tipo de aluminio, ya que hay muchas categorías de este tipo de material como por ejemplo con una amplia escala de límites elásticos y además son muy comunes, lo que nos daría facilidad de encontrarlo.

Sintetizando:

- 1.) El material del punzón es función de la fuerza de la estampadora y del material que conforma la placa blanda.

$$\sigma_E(\text{punzón}) > \sigma_u(\text{placa blanda})$$

- 2.) El material que estamos buscando para la placa blanda es un MEPE, pero éste va a depender de la presión que se le ejerza ya que dicha presión generada tiene que ser mayor que  $\sigma_E$  y a la vez menor que  $\sigma_u$ , la presión que se le genera a la placa blanda depende de la fuerza de la máquina y también del área del punzón, que es el elemento que la va a deformar.
  
- 3.) La fuerza que ejerce la máquina estampadora es el siguiente paso, por tanto en las siguientes etapas cuando consigamos acercarnos a la fuerza que desarrolla la máquina podemos seguir avanzando en la elección de materiales.

# 4 TEORÍA DE LA ESTAMPACIÓN

---

## 4.1 Introducción

La forja, es un proceso que puede usarse para producir una amplia variedad de piezas en la mayoría de los metales. Las forjas se producen en tamaños que van desde unos pocos milímetros de dimensión máxima hasta 3 metros o más en algunos casos. Los principios y las prácticas de forjado en caliente se han establecido desde el siglo XIX, pero obviamente se han hecho mejoras en los equipos, lubricantes y en la capacidad de procesar los materiales más difíciles de forjar desde entonces. El procedimiento básico para la forja en caliente es relativamente sencillo. El caldo de metal en forma de barra o tocho se calienta primero en el rango de temperatura de trabajo para mejorar la ductilidad. Luego, el material se comprime o se martilla en una serie de troqueles de acero para herramientas para convertir el material en la forma final. El exceso de material en forma de rebaba se produce como una parte necesaria de la forja, y la etapa de procesamiento final es eliminar la rebaba para obtener el acabado de la pieza forjada. La forja en caliente es un proceso de forma casi neta, pero todas las piezas forjadas requieren un mecanizado posterior, en particular para superficies que deben ubicarse con otras superficies durante el ensamblaje final de un producto.

## 4.2 Características de la forja

La mayoría de las piezas forjadas requieren una serie de estampas, llamadas preformas, para convertir el material de stock inicial en la forma forjada de acabado. El número de preformas requeridas depende de varios factores, incluida la forma general, la complejidad de la forma y el material de la pieza.

La complejidad de la forja se ve incrementada por varias características, que incluyen:

- La presencia de secciones delgadas en la parte.
- Grandes cambios en el área transversal de la pieza.
- Formas de piezas que requieren que la línea de separación del troquel se pueda girar

Los principales tipos de procesos básicos de forja se conocen como forja abierta o cerrada. En la forja abierta, se utiliza una serie de estampas relativamente simples para formar el forjado final incrementalmente con un gran número de golpes. Este proceso es en gran medida una versión más automatizada de las antiguas operaciones de tipo herrero que se han utilizado durante siglos. La discusión en este capítulo no incluye la forja abierta, ya que el proceso se usa para formar formas finales relativamente crudas, pero la discusión está dedicada a la forja cerrada, que se usa para la fabricación de una amplia gama de formas de piezas.

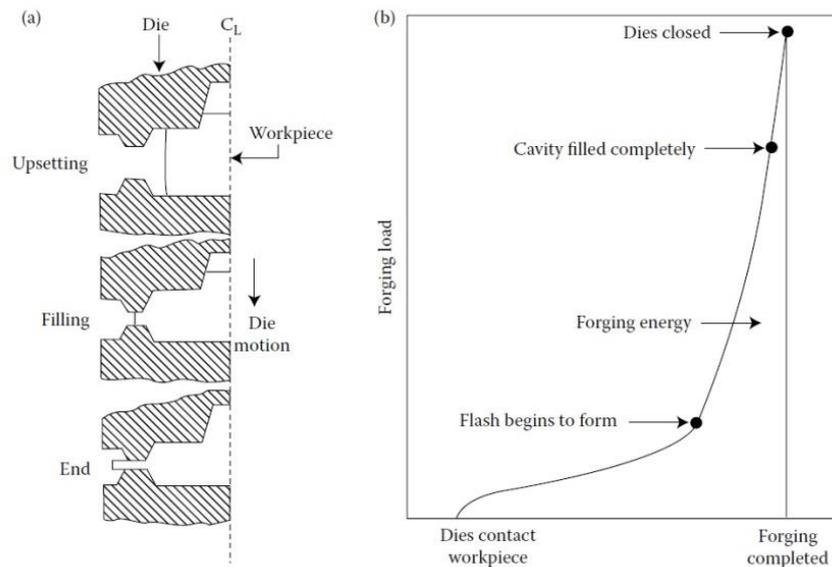
En la forja cerrada, se utiliza una serie de troqueles conformados para convertir el stock inicial en la forma forjada de acabado. El término “forja cerrada” es un nombre poco apropiado, ya que las cavidades de las estampas no están completamente cerradas y el material en forma de rebaba fluye hacia afuera en la línea de separación durante las etapas finales de la forja. Esta rebaba es una parte crítica del proceso de forjado, y el control adecuado de la rebaba es esencial para asegurar el llenado de la matriz. Dentro de la forja cerrada, se usan otros dos términos: forja bloqueada y forja de precisión. Las piezas de forja bloqueada, en comparación

con las piezas forjadas convencionales, tienen secciones más gruesas y radios más generosos. Porque la forma de rendimiento anterior a la impresión final se denomina tradicionalmente bloqueador. Los forjados bloqueadores son más fáciles de formar que los forjados convencionales equivalentes, ya que requieren menos etapas de formación y cargas más bajas. Se usan a veces cuando se requieren pequeñas cantidades de piezas, para reducir los costos de la matriz, o en materiales difíciles de moldear, cuando es difícil obtener secciones delgadas u otros problemas. Los forjados bloqueadores requieren un mecanizado posterior para alcanzar la forma final de la pieza que los forjados convencionales.

Las piezas forjadas de precisión son partes formadas con secciones más delgadas y tolerancias más cercanas que las piezas forjadas convencionales equivalentes, es decir, más cercanas a la forma neta. Tales piezas forjadas requieren un procesamiento cuidadoso, y las cargas máximas durante las etapas finales de conformación son 2.5 a 3 veces más altas que las experimentadas para forja convencional equivalente. Por lo tanto, se requiere un equipo más grande y un posicionamiento más preciso de morir a morir. Aunque el término precisión de forjado implica una precisión más cercana que la que se obtiene normalmente para cualquier material, en la práctica, los forjados de precisión se producen con mayor frecuencia en aleaciones ligeras (aleaciones de aluminio, aleaciones de magnesio, etc.) que en otros materiales.

### 4.3 Importancia de la rebaba en el proceso de forja

La rebaba producida durante la forja cerrada es material de desecho y en muchos casos puede tener un volumen que sea más del 50% del volumen de la pieza final. La cantidad de rebaba producida aumenta con la complejidad de la pieza. Sin embargo, la producción de rebaba es una parte necesaria del proceso, y su control es esencial para garantizar un buen llenado del troquel, especialmente para características de forma alta y delgada. La Figura 4.3.1 muestra la deformación que tiene lugar durante la forja de una forja asimétrica de eje relativamente simple. Al inicio de la deformación, el material de stock inicial se altera, y la carga de forja correspondiente es relativamente baja. La deformación volumétrica más natural entre las matrices y el material fluye lateralmente, es la que diseña una forma aplanada. Sin embargo, si se debe forzar al material a moverse hacia las extremidades de la cavidad del troquel, este flujo lateral de material debe restringirse. Este es el papel de la formación de rebaba. Un canal de rebaba estrecho alrededor de la línea dividida de las matrices restringe el flujo lateral del material. En las etapas finales del cierre de la matriz, el material se extruye a través del canal de rebaba alrededor de la cavidad de forja. A medida que avanza la deformación, la brecha de estrechamiento entre los canales de rebaba comienza a restringir el flujo lateral de material, a través del aumento de la fricción y otras fuerzas. La carga de forjado comienza a aumentar y la presión dentro de la matriz aumenta. Este aumento de presión hace que el material fluya hacia atrás en la dirección del cierre de la matriz y en las extremidades de la cavidad de la matriz. En la etapa final del cierre del troquel, la carga de forja alcanza su pico y esto corresponde al llenado completo del troquel. En este punto, la última parte de la rebaba se comprime a través del canal. La selección de los valores apropiados para la geometría de la superficie de la rebaba (separación y anchura) es fundamental para un buen llenado de la matriz durante la forja, sin cargas de forja excesivas ni presiones de cavidad.



12 Figura 4.3.1. a) Forjado de una pieza simple b) Variación de carga durante la carrera para forjar la pieza

#### 4.4 Determinación de la geometría de la zona de rebaba

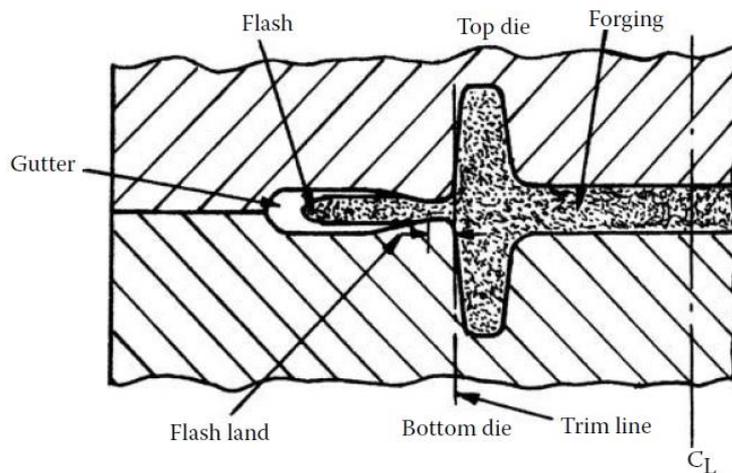
La Figura 4.4.1 muestra una disposición típica de la rebaba y el canal de desagüe de la rebaba en una forja. El canal debe ser lo suficientemente grande para acomodar toda la rebaba producida. La elección del ancho y grosor adecuado del canal es una parte importante del diseño del proceso de forja. Si la geometría es incorrecta, es posible que las matrices no se llenen por completo o que las cargas de forja se vuelvan excesivas. Además, el área proyectada de la rebaba en la zona de desagüe generalmente se incluye en el área total proyectada de la pieza para la estimación de las cargas de forja requerida y por lo tanto es un factor determinante en la selección del equipo para el procesamiento. La determinación de las dimensiones de la zona de rebaba se ha basado en la experiencia con forjados de un tipo similar. Como resultado, hay una serie de fórmulas empíricas disponibles para la geometría de la zona de rebaba.

$$\text{Espesor de la rebaba, } T_f = 1,13 + 0,0789V^{0,5} - 0,000134V \quad (4.4.1)$$

$$\text{Ratio de la zona de rebaba, } \frac{W_f}{T_f} = 3 + 1,2e^{-0,00857V} \quad (4.4.2)$$

$V \rightarrow$  volumen del material forjado

$W_f \rightarrow$  peso del material forjado



13 Figura 4.4.1 Configuración del canal de rebaba

Los costos del material en forja se determinan por el peso de la forja terminada y el material desperdiciado en el procesamiento de la pieza. Las pérdidas de material se deben principalmente a la rebaba producida durante el forjado, pero pueden ocurrir más pérdidas debido a la formación de incrustaciones para aquellos materiales que se pueden llegar a oxidar significativamente durante el calentamiento y, para piezas forjadas con martillo, debido a los extremos de la barra, y así sucesivamente. La estimación de la rebaba para una forja particular es difícil y generalmente se basa en la experiencia con la fabricación de piezas forjadas de un tipo similar. La cantidad de rebaba producida varía con la forma de la pieza, y existen dos enfoques sistemáticos básicos para estimar la cantidad de la misma que se ha utilizado.

1. Uso de datos estadísticos que proporcionan proporciones promedio del peso bruto al peso neto de piezas forjadas para diferentes clases de partes y pesos.
2. Uso de valores promedio de la cantidad de rebaba por unidad de longitud de zona de la rebaba para diferentes pesos de forja.

## 4.5 Espesores de la sección de cierre de la matriz

Las secciones delgadas tienen una gran área proyectada de la rebaba en la dirección del cierre de la matriz. Estas partes a menudo se diseñan en las partes por su fuerza y otras razones, a menudo acompañadas de costillas periféricas. Estas bandas aumentan considerablemente los requisitos de carga durante las operaciones de forja debido a las grandes áreas de contacto del troquel, que aumentan las velocidades de enfriamiento, la fricción, etc. Si la pieza terminada tiene orificios pasantes para ser forjados, entonces estos deben rellenarse con bandas en la línea de separación del troquel y luego estas bandas se eliminan mediante cizallamiento (perforación) durante el proceso de remoción instantánea. El material de estas zonas es material de desecho adicional y se suma al costo del material por pieza. El grosor apropiado de las bandas depende del área proyectada de los orificios a rellenar, tal como indica la ecuación (4.5.1).

$$\text{Web Espesor, } T_w(\text{mm}) = 3,54A_H^{0,227} \quad (4.5.1)$$

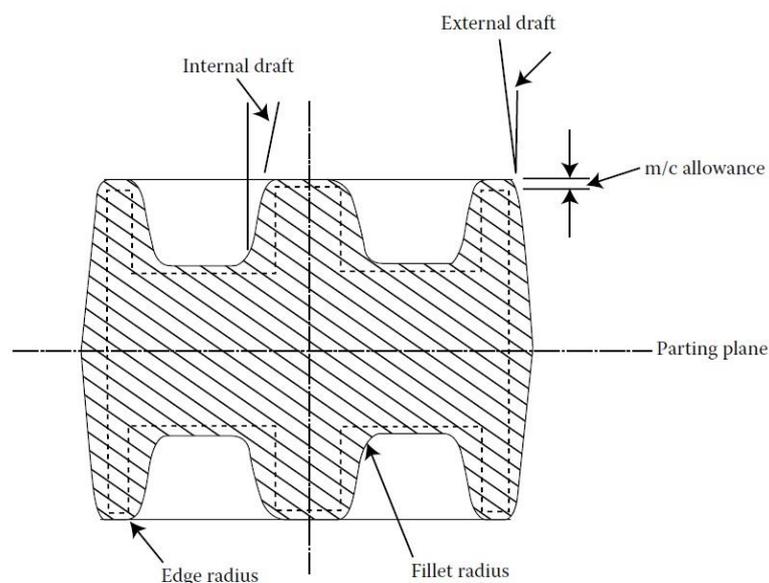
$A_H \rightarrow$  área en  $cm^2$  de los orificios

## 4.6 Tolerancias de forja

Las piezas producidas por forjado en caliente requieren mecanizado en superficies que se ubican con otras piezas en un producto final. Por lo tanto, las características detalladas de la forma de una forja se desarrollan a partir de la parte mecanizada requerida mediante la adición de varias tolerancias a las superficies mecanizadas, aunque algunas de estas tolerancias también forman parte del diseño de forja para superficies que no se mecanizarían. La Fig.2.3 muestra la sección transversal de una forja simple, que se supone que se mecaniza en todas partes. El primer margen agregado a la superficie mecanizada es un acabado o margen de mecanizado. Esta cantidad es adicional a las tolerancias dimensionales y debe ser suficiente para obtener una superficie limpia después del mecanizado final. El margen para el mecanizado depende de varios factores, pero particularmente de la cantidad de oxidación que resulta del calentamiento de la pieza hasta la temperatura de forjado. El nivel de oxidación depende del tipo de material y del tamaño total de la forja.

El calado es una tolerancia de ángulo que se agrega a las superficies paralelas a la dirección de cierre de la matriz para facilitar la liberación de la pieza de la matriz después de forjar. En general, los márgenes de tiro en las superficies interiores son mayores que los de las superficies exteriores debido a la tendencia de la parte a encogerse en las proyecciones en la matriz cuando se produce el enfriamiento.

Finalmente, todos los bordes y esquinas de la pieza deben tener radios agregados. Estos radios son necesarios para ayudar al flujo de material y garantizar un buen llenado de la matriz. Además, las esquinas afiladas en las matrices pueden provocar una falla prematura de la matriz debido a la fractura como resultado de las concentraciones de tensión asociadas, las tensiones elevadas.



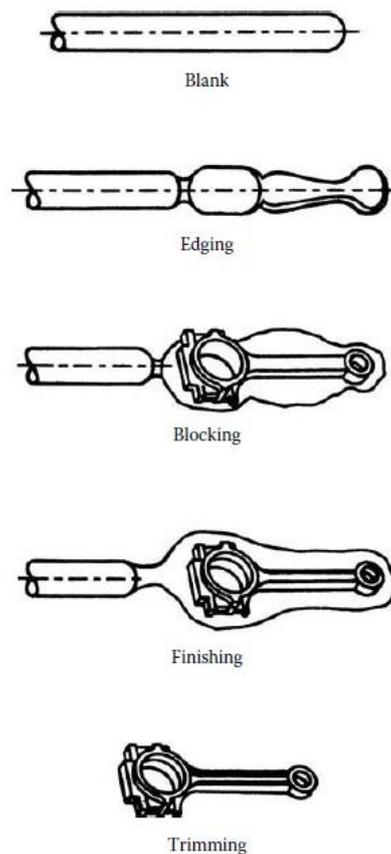
14 Figura 4.6.1. Tolerancias de forja para mecanizado de acabado

## 4.7 Etapas de conformado durante la forja

En la práctica, muy pocas piezas forjadas se producen en la etapa indicada en la Figura 4.3.1. Esto generalmente resulta en cantidades excesivas de flash para asegurar el llenado de la matriz y / o grandes cargas de matriz.

Por lo tanto, en la mayoría de los casos, una serie de operaciones de preformado son necesarias para acercarse gradualmente el material de serie a la forma terminada antes de la última etapa de formación en la cavidad de acabado (acabado). El número y el tipo de operaciones de preformado dependen en gran medida de la forma de forja terminada. La Figura 4.7.1 muestra una secuencia típica para una simple forja de biela.

En la mayoría de los casos, el punto de inicio de la forja es una forma simple, ya sea una longitud de barra de sección redonda o cuadrada o una palanquilla cortada de la barra. El objeto del preformado es redistribuir el material de stock para que se corresponda más estrechamente con la forma acabada. El diseño de las preformas sigue siendo una especie de "arte negro", que depende en gran medida de las habilidades de personal experimentado. Se ha avanzado en la aplicación de los análisis de plasticidad de elementos finitos y límite superior para el diseño de preformas, pero esto todavía es un tema de investigación.



15 Figura 4.7.1. Secuencia de una forja de biela

## 4.8 Eliminación de la rebaba

La etapa final en la forja en caliente es la eliminación del flash para obtener la forja final. La rebaba a eliminar es material de desecho y puede ser más del 50% del material utilizado para algunas piezas forjadas. Por lo general, esta rebaba se elimina con un troquel de corte, que la corta en la línea de separación de la forja. Las redes en cualquier agujero pasante también se perforan al mismo tiempo. El corte de la rebaba generalmente se realiza en una prensa mecánica adyacente a la máquina principal de forja, con la forja aún caliente. En algunos casos, se puede hacer recorte, cuando la parte está fría. La operación y las matrices utilizadas son similares para el recorte de la rebaba en frío y caliente, pero las cargas de la prensa son más altas para el recorte en frío. También la rebaba puede eliminarse mediante una operación de mecanizado, como el corte con cinta, pero esto es lento y relativamente caro, en consecuencia, la sierra de cinta solo debe considerarse para pequeñas cantidades de piezas o para algunos forjados más grandes.

Los troqueles de corte y perforación tienen un borde cortante que corresponde a la línea de separación de la forja. Por lo tanto, la complejidad se incrementa por la necesidad de una línea de separación arrancada. El punzón correspondiente fuerza la forja a través del troquel de corte para eliminar la rebaba, y el diseño del punzón debe ser tal que se pueda lograr sin distorsión o daño a la pieza forjada.

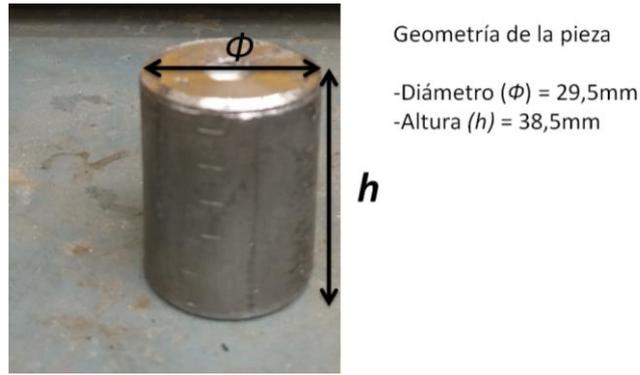
## 4.9 Cálculo de la fuerza para nuestro problema

En este apartado vamos a poder conseguir la fuerza que ejerce la máquina en el proceso de estampado mediante el cálculo teórico, primera vía. Además, conseguiremos los datos necesarios para poder modelar la máquina estampadora en el software de MEF (Deform-3D). Con esos datos obtenidos de la fuerza vamos a poder elegir una gama concreta de tipos de materiales para la placa blanda y una geometría concreta de punzón que produzca una tensión que deseamos.

No hay un método sencillo y a la vez satisfactorio para calcular las presiones y las fuerzas de las matrices de impresión en parte porque la tasa de deformación varía mucho en las distintas partes de la pieza de trabajo. Un método aproximado es el siguiente que se ha seguido:

### PASO 1

Calcular la altura promedio a través del volumen  $V$  y el área total proyectada  $A_t$  de la pieza de trabajo (completa con el área del canal de rebaba).



16 Figura 4.9.1. Geometría de la probeta antes del proceso

La Figura 4.9.1 es de la descripción de la geometría de la pieza de trabajo antes de que se le realice la estampación.

Las Figuras 4.9.2, 4.9.3 y 4.9.4 son de la pieza resultante de la estampa, y en las cuales se describen la geometría tanto de la pieza completa como de la rebaba, datos que son necesarios para los cálculos a realizar para obtener la altura promedio ( $h_{prom}$ ).



Diámetro ( $\phi$ ) = 60mm

17 Figura 4.9.2. Geometría de la probeta después del proceso (1)



Longitud de la rebaba ( $l_r$ ) = 10mm

18 Figura 4.9.3. Geometría de la probeta después del proceso (2)

Altura de la rebaba ( $h_r$ ) = 3 mm

19 Figura 4.9.4. Geometría de la probeta después del proceso (3)

Con los datos de la primera imagen obtenemos el volumen total de la pieza de trabajo.

$$V_t = bh = (\pi r^2)h = \left[ \pi \left( \frac{29.5 \text{ mm}}{2} \right)^2 \right] 38.5 \text{ mm} = 26314.47094 \text{ mm}^3 \approx 26314.5 \text{ mm}^3 \quad (4.9.1)$$

Con los datos de la segunda imagen, obtenemos el área proyectada de la pieza de trabajo, englobando el área de la rebaba.

$$A_t = (\pi r_t^2) = \pi \left( \frac{60 \text{ mm}}{2} \right)^2 = 2827.43339 \approx 2827.4 \text{ mm}^2 \quad (4.9.2)$$

A continuación vamos a calcular el porcentaje de volumen de la pieza que se transforma en rebaba una vez realizada la estampa. Para ello empezaremos calculando el área de la pieza que ocupa la rebaba.

$$\begin{aligned} \text{Área de la rebaba } (A_{rebaba}) &= \text{Área total } (A_t) - \text{Área total sin la rebaba } (A_{t_{\text{sin rebaba}}}) = \\ A_{rebaba} &= (\pi r_t^2) - (\pi r_{t_{\text{sin rebaba}}}^2) = \pi \left( \frac{60}{2} \right)^2 - \pi \left( \frac{60-20}{2} \right)^2 = 1570.796 \approx 1570.8 \text{ mm}^2 \quad (4.9.3) \end{aligned}$$

La altura de la rebaba ( $h_r$ ) es prácticamente constante alrededor de la pieza y es de 3 mm procedemos al cálculo de volumen de la rebaba.

$$V_{rebaba} = A_{rebaba} \times h_r = 1570.8 \times 3 = 4712.39 \text{ mm}^3 \quad (4.9.4)$$

$$\% \text{ de volumen de rebaba} = \frac{V_{rebaba}}{V_t} \times 100 = \frac{4712.39}{26314.5} \times 100 = 17.907 \% \approx 17.91 \% \quad (4.9.5)$$

Y por tanto el porcentaje de volumen de pieza que se transforma en rebaba es del 17.91 %.

En esta última ecuación,  $A_t^*$  se refiere al  $A_t$  pero en proporción del porcentaje de volumen de pieza que no es

rebaba.

$$A_t^* = \frac{A_t}{100} x (100 - 17.91) = \frac{2827.4}{100} x 82.09 = 2321.01266 \text{ mm}^2 \approx 2321 \text{ mm}^2 \quad (4.9.6)$$

$$h_{prom} = \frac{V_t}{A_t^*} = \frac{26314.5 \text{ mm}^3}{2321 \text{ mm}^2} = 11.337 \text{ mm} \approx 11.34 \text{ mm} \quad (4.9.7)$$

Finalmente obtenemos la  $h_{prom} = 11.34 \text{ mm}$ .

## PASO 2

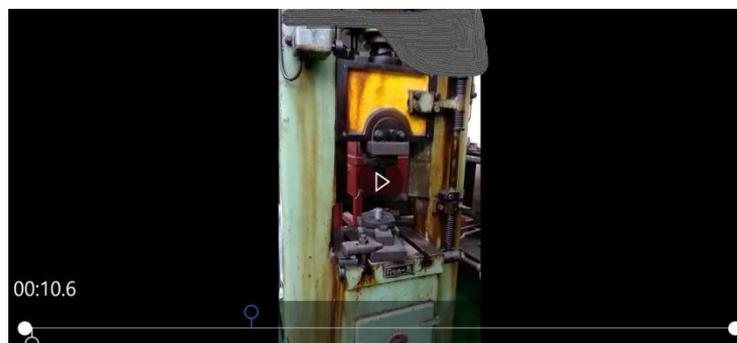
-Obtener la deformación promedio que se determina a partir de la altura inicial  $h_0 = h$  y de la altura promedio.

$$\varepsilon_{prom} = \ln\left(\frac{h_0}{h_{prom}}\right) = \ln\left(\frac{38.5 \text{ mm}}{11.34 \text{ mm}}\right) = 1.222 \approx 1.22 \quad (4.9.8)$$

## PASO 3

-Cálculo de la tasa promedio de deformación que se obtiene a partir de la altura promedio ( $h_{prom}$ ) y de la velocidad a la que viaja la prensa al llegar a impactar con la pieza, ( $v$ ).

Primero vamos a calcular de la forma más aproximada posible la velocidad a la que la estampa llega a impactar con la pieza, para ello, midiendo el recorrido que realiza la estampa que es de  $x = 19 \text{ cm} = 190 \text{ mm}$  y con el uso de una herramienta de cámara súper lenta, con la que se grabó el proceso nos da el tiempo que tarda en bajar la estampa desde su posición más elevada (en el vídeo es cuando lleva 10.6 segundos), hasta que baja y choca contra la pieza (en el vídeo es cuando lleva 11.4 segundos) por tanto el tiempo que tarda en bajar la estampa es de  $t = 0.8 \text{ s}$ . Esto lo podemos observar a continuación en las Figuras 4.9.5 y 4.9.6. Y en el vídeo que se incluye del proceso completo de la estampa “video estampa”.



20 Figura 4.9.5. Momento de la posición más elevada de la estampa



21 Figura 4.9.6. Momento del impacto de la estampa

Para el cálculo de la velocidad consideraremos que el movimiento de bajada de la estampa es un movimiento uniformemente acelerado, por tanto usando sus ecuaciones obtenemos, la aceleración y posteriormente la velocidad.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow 190 \text{ mm} = 0 + 0 t + \frac{1}{2} a 0.8^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = 593.75 \text{ mm/s}^2 \approx 594 \text{ mm/s}^2 \text{ (4.9.9)}$$

$$v = v_0 + a t = 0 + 594 \times 0.8 = 475.2 \text{ mm/s} \approx 475 \text{ mm/s} \text{ (4.9.10)}$$

Una vez hemos obtenido la velocidad ya podemos calcular la tasa de deformación promedio.

$$\dot{\epsilon}_{prom} = \frac{v}{h_{prom}} = \frac{475 \text{ mm/s}}{11.34 \text{ mm}} = 41.88713 \frac{1}{s} \approx 41.9 \frac{1}{s} \text{ (4.9.11)}$$

## PASO 4

-La presión promedio de la matriz se establece multiplicando el esfuerzo de fluencia por un factor  $Q_c$  que tiene en cuenta la complejidad de la forma. Su valor se extrae de la tabla 9-2; note que la presión pico se desarrolla muy rápido cuando se llenan los detalles de la matriz.

Forma forjada	$Q_c$	$Q_{fe}$
Sencilla, sin rebaba	3 - 5	2.0 - 2.5
Sencilla, con rebaba	5 - 8	3
Compleja (costillas altas, almas delgadas), con rebaba	8 - 12	4

1 Tabla 4.9.1. (Tabla 9-2 Schey-Procesos de manufactura-3º edición)

Para nuestro caso estamos en el supuesto de una forja sencilla con rebaba, por tanto nuestra  $Q_{fe}$  será 3,  $Q_{fe} = 3$ ; y nuestra  $Q_c$ , estará entre 5 y 8, pero fijándonos en ejemplos del libro Schey-Procesos de manufactura-3ª edición, creemos que podemos usar un  $Q_c = 5$ .

### PASO 5

-Para calcular la fuerza de forjado que se requiere primero tenemos que obtener el valor de la tensión de fluencia del material de trabajo que estamos usando, en nuestro caso es plomo (Pb), los datos obtenidos son de la tabla 8-3 del libro Schey-Procesos de manufactura-3ª edición, son los valores de las constantes  $C$  y  $m$ , que son  $C = 10$  y  $m = 0.1$ , para el plomo (Pb) usado en un amplio rango de temperatura, para nuestro caso es de 20°C, valor que está dentro de ese rango, con las constantes y con la tasa de deformación promedio obtenida anteriormente calculamos:

$$\sigma_f = C(\dot{\epsilon}_{prom})^m = 10x(41.9)^{0.1} = 14.5285 \approx 14.53 \text{ MPa} \quad (4.9.12)$$

Con  $\sigma_f$  calculada puedo proceder a la fuerza que necesita la máquina para hacer la estampa completa de mi pieza.

$$P = \sigma_f Q_c A_t = 14.53 \text{ [MPa]} \cdot 5 \text{ [MPa]} \cdot 2827.4 \text{ [mm}^2\text{]} = 205410.61 \text{ N} \approx 205411 \text{ N} \quad (4.9.13)$$

$$P[\text{KN}] = 205.411 \text{ KN} \approx \mathbf{205.411 \text{ KN}}$$

$$P[\text{N}] = P[\text{kg}] \cdot g(\text{gravedad})$$

$$P[\text{kg}] = \frac{205411[\text{N}]}{9.8[\text{m/s}^2]} = 20960.31 \text{ kg} = 20.96 \text{ T} \approx 21 \text{ T}$$

De esta forma llegamos a conseguir el primer objetivo de nuestro proyecto, el cálculo teórico de la fuerza de la estampadora, en realizar una estampa de plomo, dicha fuerza es **205.411 KN**.

## 4.10 Aplicabilidad del capítulo para el diseño del experimento práctico

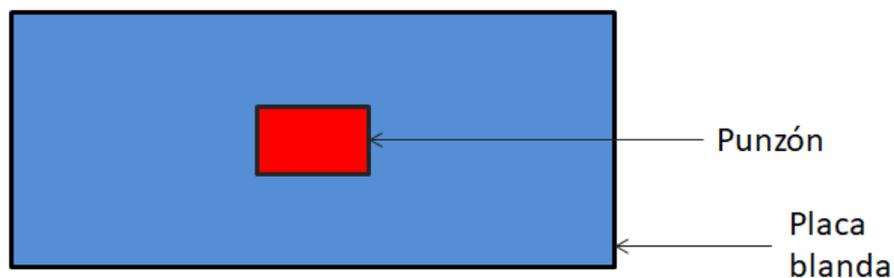
### Geometrías y materiales del punzón y de la placa blanda

En este capítulo hemos podido obtener mediante la teoría de la forja la fuerza de una forma teórica de la estampadora al realizar una forja con una probeta de plomo. Con esta fuerza obtenida podemos dar una aproximación bastante exacta de las geometrías y de los materiales que tenemos que usar tanto para la placa blanda como para el punzón.

Empezaremos diseñando la geometría del punzón y de la placa blanda, para ello lo que vamos hacer es optimizar y simplificar lo máximo posible en las geometrías, por varios factores que influyen:

- a) Facilidad en el diseño de los diferentes elementos, para todo el uso que se va hacer de ellos en cuanto a diseño y colocación en la maqueta 3D.
- b) Facilidad en los cálculos a realizar para conseguir las fuerzas aplicadas, tanto para los cálculos previos para seleccionar las diferentes áreas a usar, como para los cálculos computacionales.
- c) Facilidad para fabricar los prototipos para el experimento práctico, y este es el punto más importante con diferencia, ya que es el factor que más limita, y tener una geometría sencilla fácil de fabricar es clave. Por ejemplo fabricar una placa (prisma rectangular) es algo muy sencillo.

Por tanto vamos a usar unas geometrías de prismas rectangulares, porque cumplen con todos los hitos comentados anteriormente, obviamente el área de la base de la placa blanda será mucho mayor que el del punzón para evitar que aparezcan nuevas condiciones de contorno. Esto será explicado con más detalle en el capítulo de la simulación con elementos finitos, pero la idea es que la placa blanda sea mucho más grande que el punzón, eso es con lo que nos tenemos que quedar. La disposición de la placa blanda y el punzón sería tal como podemos ver en la figura 4.10.1, que representa una proyección en planta de cómo se situarían. Una vez seleccionado la forma geométrica tenemos que seleccionar las dimensiones para acabar con el diseño de la geometría.



22 Figura 4.10.1. Ubicación relativa entre el punzón y la placa blanda

Como sabemos los diferentes tipos de metales están estandarizados con sus características como límite elástico, límite de fluencia... en unidades de tensión (MPa) como podemos ver en la tabla 4.10.1, con lo que para poder comparar que tensión es la que va a provocar el punzón sobre la placa blanda tendremos que hablar en unidades de presión para poder hacer la comparativa y poder seleccionar el material adecuado.

Para comenzar usaremos como material del punzón un acero de alto límite elástico (Acero S550MC (1.0986)), cuyo límite elástico sea superior al límite de fluencia de la placa blanda y la presión ejercida por la estampadora no llegue a su límite elástico tampoco. Y vamos a usar como material de la placa blanda un aluminio de los que hemos recopilado en la tabla 4.10.1, porque hay una gran variedad de ellos según sus límites elásticos, además es un material elastoplástico con endurecimiento tal como hablamos en el tercer capítulo y existe una gran facilidad de encontrar este material en el mercado.

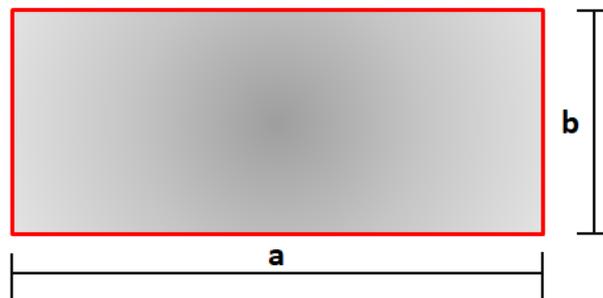
MATERIAL	LÍMITE ELÁSTICO ( $\sigma_E$ )	LÍMITE DE FLUENCIA ( $\sigma_{MÁX}$ )
(*) Pb	5.5 MPa	12 MPa
(**) Al 6061-0	55 MPa	125 MPa
(**) Al 6061-T4	140 MPa	235 MPa
(**) Al 6061-T6	270 MPa	310 MPa
(***) Acero S550MC (1.0986)	550 MPa	600-760 MPa

2 Tabla 4.10.1. Características metales. Fuentes: (\*) <http://www.goodfellow.com>; (\*\*) Alacer Mas S.L.; (\*\*\*) Ferros Texar S.L.

Primero vamos a pasar la fuerza obtenida en el proceso de la forja a unidades de presión, usando la siguiente ecuación.

$$P = \frac{F}{A} \quad (4.10.1)$$

Donde el área se calcula como  $A = a \cdot b$ , una representación de la cara del punzón sería la figura 4.10.2.



23 Figura 4.10.2. Área de la cara del punzón

Y donde la fuerza sería  $F = 205411 \text{ N}$  en la estampación global, pero dicha estampación consta de varios golpes (tres golpes efectivos según podemos observar en el vídeo que adjunto como “vídeo estampa”), por lo que esa cantidad tenemos que dividirla por 3 para obtener la fuerza por golpe, ya que necesitamos que la placa blanda se deforme en cada golpe de forma plástica, de lo contrario no se deformará en el experimento si solo la mantenemos en el rango de deformación elástica en cada golpe, como bien hemos explicado en el capítulo 3.

Por tanto, nos queda que la fuerza de cada golpe sería 68470 N aproximadamente.

Con la fuerza por golpe (68470 N), y el límite elástico del punzón, Acero S550MC (1.0986) (550 MPa) obtenemos aplicando la ecuación 4.10.1 el área limitante de la cara del punzón, para que no se deforme.

$$A \geq \frac{F}{P} \rightarrow A \geq \frac{68470 \text{ N}}{550 \text{ MPa}} \rightarrow A \geq 124.5 \text{ mm}^2$$

El área límite del punzón sería de unos  $125 \text{ mm}^2$  que es lo equivalente a un cuadrado de lado  $l \geq \sqrt{125 \text{ mm}^2} \rightarrow l \geq 11.18 \text{ mm}$ , un punzón de estas dimensiones tan pequeñas sería un elemento complicado para trabajar. Vamos a usar un ejemplo con un punzón de lado  $l = 33 \text{ mm}$ , que sería un punzón manejable y con un tamaño razonable, con este punzón obtendríamos que se ejercería una presión sobre la placa blanda de:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{68470 \text{ N}}{33^2 \text{ mm}^2} = 62.87 \text{ MPa}$$

Con este resultado si nos vamos a la tabla 4.10.1 y se tiene que cumplir  $\sigma_E < P < \sigma_{M\acute{A}X}$ , para conseguir deformación plástica y no llegue al límite de fluencia, con este área de punzón el material único que podemos escoger sería el Al 6061-0. Por lo que vamos a escoger como material de la placa blanda el Al 6061-0, para poder tener un punzón de un tamaño con el que podemos trabajar cómodamente.

Una vez escogidos los materiales del punzón (Acero S550MC (1.0986)) y el de la placa blanda (Al 6061-0), la geometría con la que vamos a construirlos (prismas rectangulares), el área de la cara del punzón ( $a = 1089 \text{ mm}^2$ ) y el área de la placa blanda que va a ser mucho más grande en comparación para que no afecte las condiciones de contorno, la disposición en la que los vamos a colocar, faltaría solamente definir los espesores de ambos y su situación en la máquina estampadora.

**-Punzón** → Material (Acero S550MC (1.0986)), área de su base ( $a = 1089 \text{ mm}^2$ ), espesor ?

**-Placa blanda** → Material (Al 6061-0), área de su base ( $a \gg 1089 \text{ mm}^2$ ), espesor ?

En el siguiente capítulo realizaremos la maqueta en 3D de la estampadora y la maqueta 3D con la solución de diseño, en esta última incluiremos el punzón y la placa blanda. Con lo que en el siguiente capítulo terminaremos de definir lo que nos ha faltado en este, los espesores y la ubicación dentro de la máquina de los nuevos elementos para la realización del experimento, y de esta forma ya tendríamos todo preparado para poder hacer la réplica del experimento con el software de elementos finitos.



# 5 DISEÑO CAD DE LA MÁQUINA ESTAMPADORA

## 5.1 Introducción

En este capítulo vamos realizar el diseño 3D de la estampadora en un software de diseño, CATIA, para así tener una maqueta 3D de la máquina. Con dicha maqueta 3D vamos a poder exportar los diferentes elementos al Deform 3D, realizar el estudio MEF y conseguir la solución de nuestro problema, la fuerza ejercida por la máquina en el estampado. También con el diseño virtual podemos decidir el lugar más idóneo para la ubicación de la placa blanda y el punzón para el posible experimento real, con lo que en este capítulo tendremos el diseño original de la estampadora y el diseño con las inclusiones de algunos elementos nuevos para la realización del experimento real.

## 5.2 Maqueta 3D original

Realizaremos un estudio de campo en el cual realizaremos diferentes croquis con las medidas necesarias para poder realizar la reproducción virtual de todos y cada uno de los elementos que componen la estampadora, para así conseguir reproducir una maqueta virtual de la misma. A continuación vamos a incluir una serie de figuras de la máquina real y de su diseño virtual, realizado en CATIA.



24 Figura 5.2.1. Máquina estampadora real (1)



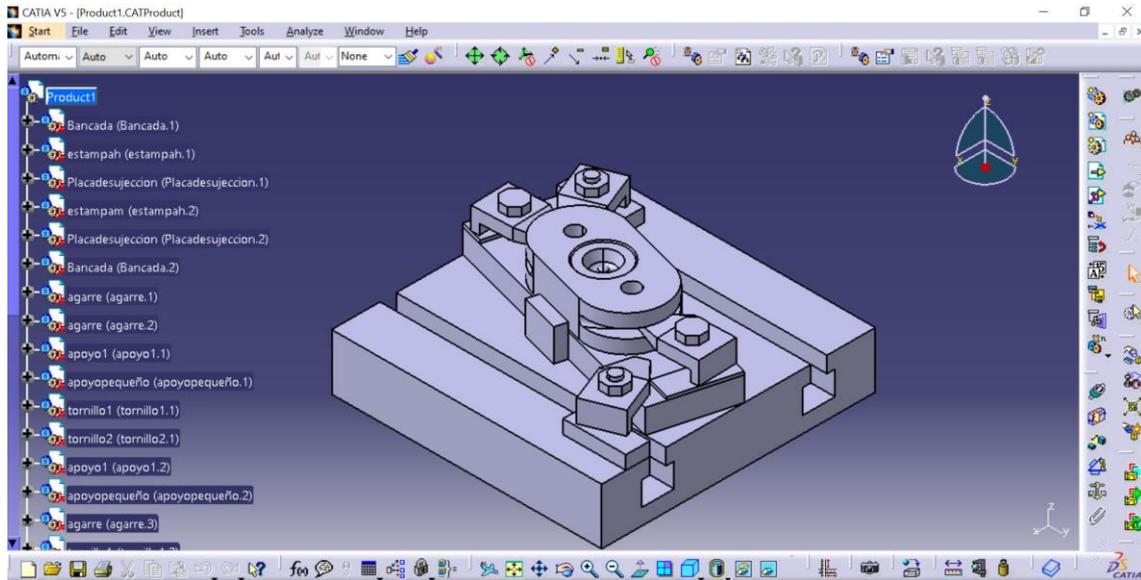
25 Figura 5.2.2. Máquina estampadora real (2)

26 Figura 5.2.3. Máquina estampadora real (3)

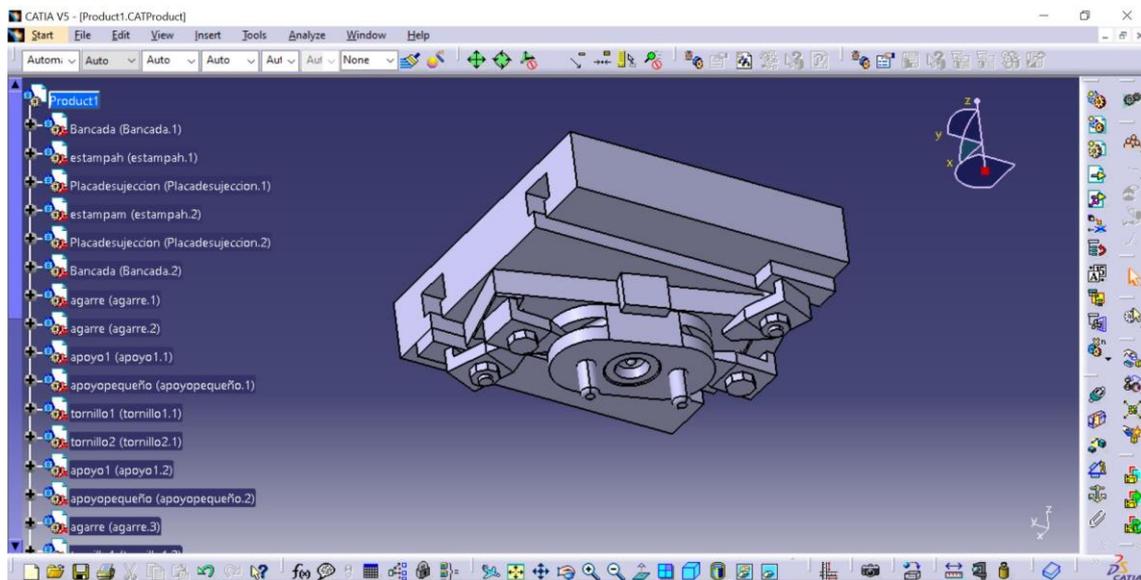


27 Figura 5.2.4. Máquina estampadora real (4)

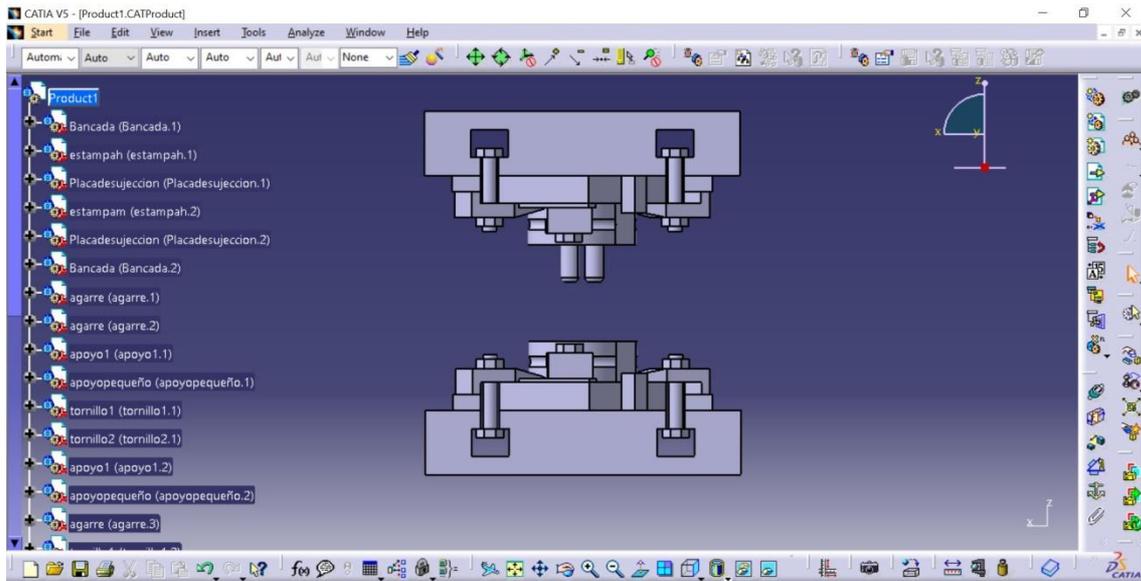
28 Figura 5.2.5. Máquina estampadora real (5)



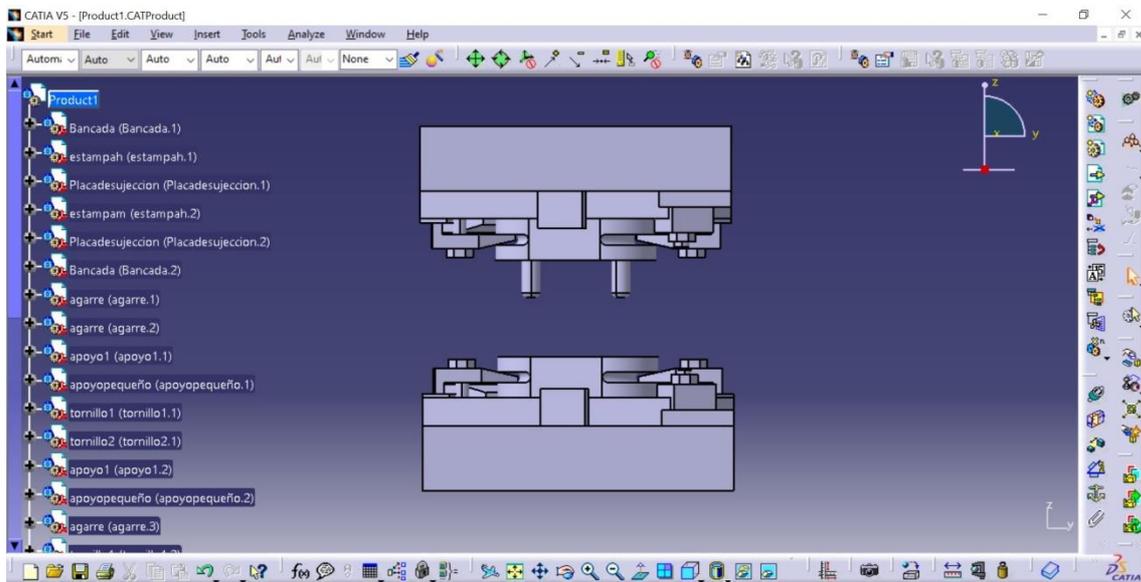
29 Figura 5.2.6. Maqueta 3D de la estampadora (1)



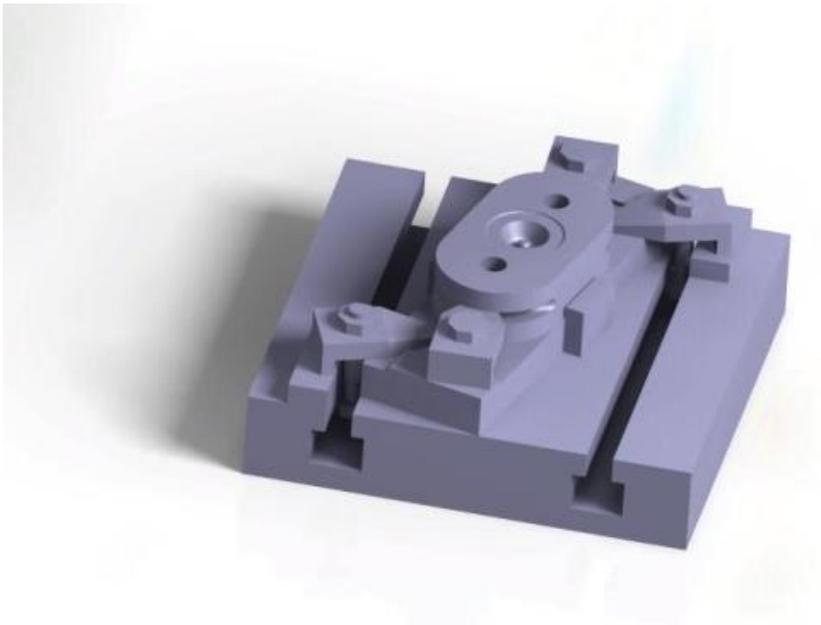
30 Figura 5.2.7. Maqueta 3D de la estampadora (2)



31 Figura 5.2.8. Maqueta 3D de la estampadora (3)



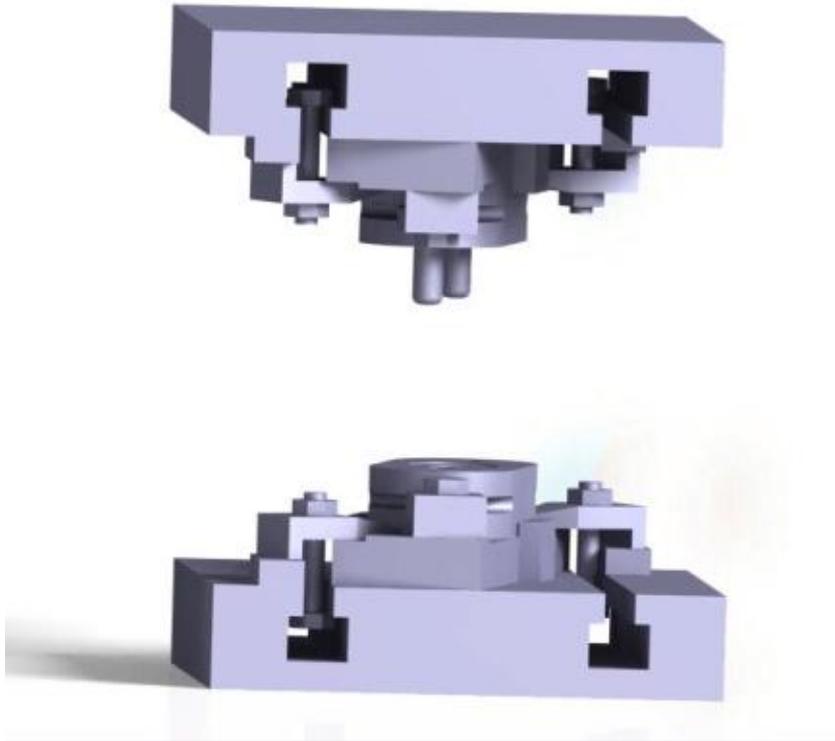
32 Figura 5.2.9. Maqueta 3D de la estampadora (4)



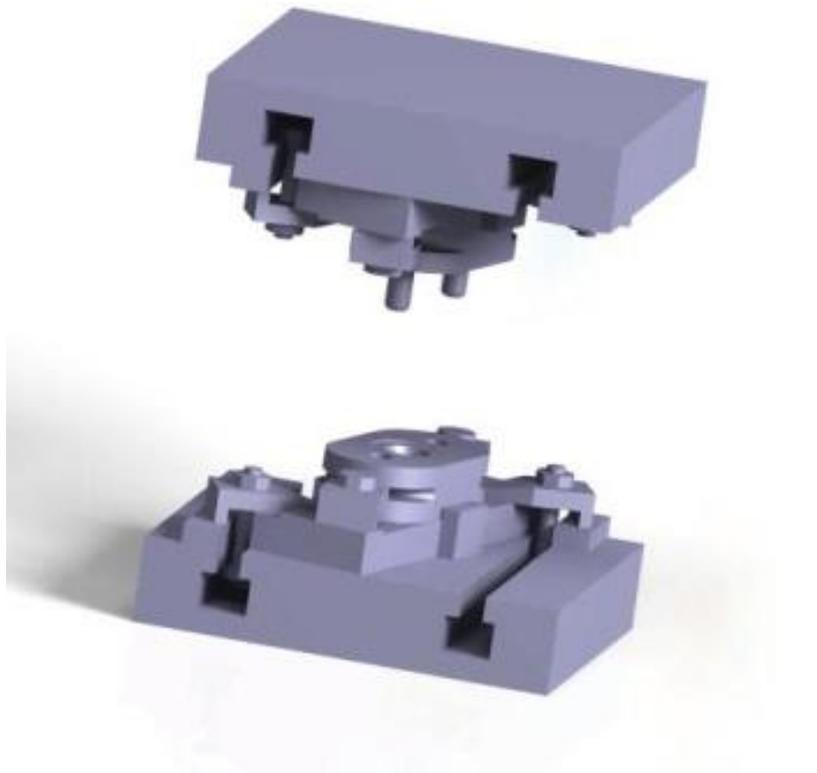
33 Figura 5.2.10. Maqueta 3D de la estampadora (5)



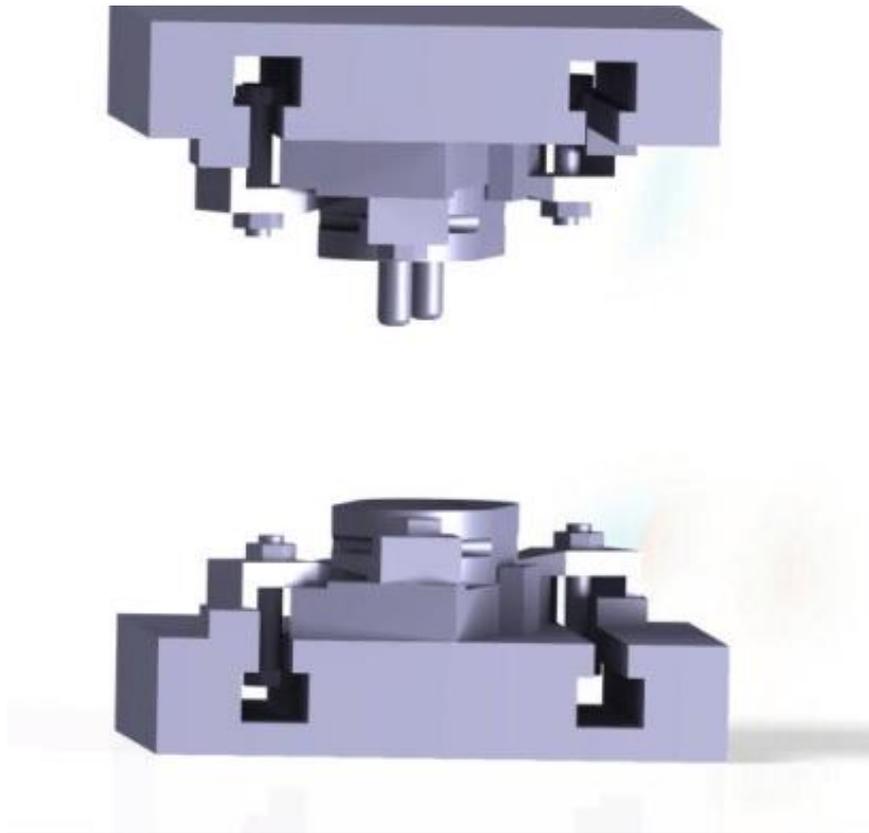
34 Figura 5.2.11. Maqueta 3D de la estampadora (6)



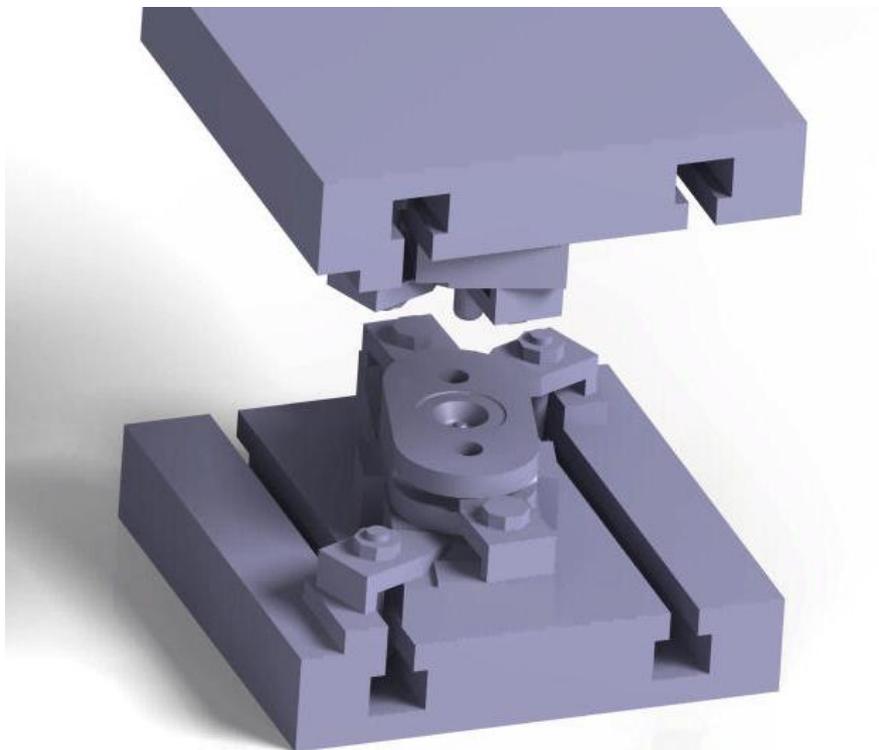
35 Figura 5.2.12. Maqueta 3D de la estampadora (7)



36 Figura 5.2.13. Maqueta 3D de la estampadora (8)



37 Figura 5.2.14. Maqueta 3D de la estampadora (9)



38 Figura 5.2.15. Maqueta 3D de la estampadora (10)

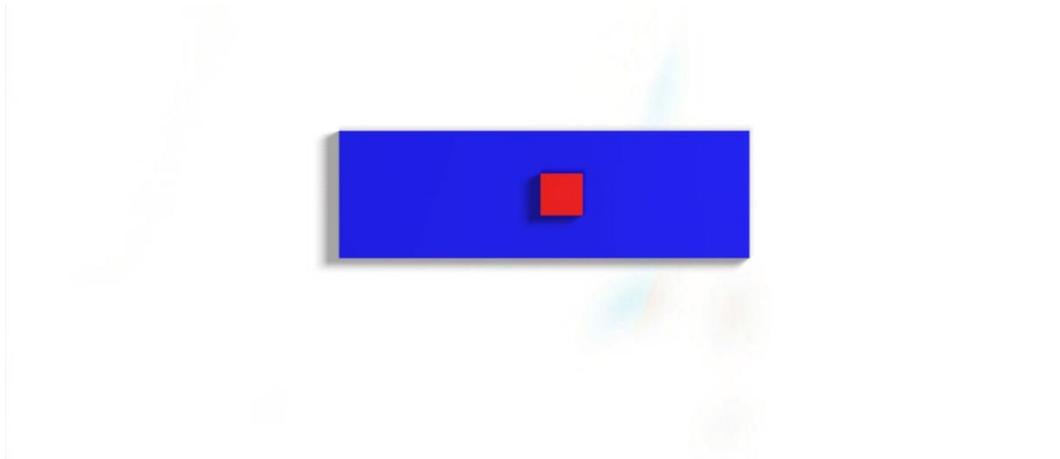
### 5.3 Ubicación del punzón y de la placa blanda

En el apartado anterior podemos observar el diseño virtual realizado, y con ese diseño vamos a poder realizar el estudio computacional de elementos finitos y dar respuesta a nuestra pregunta principal de la fuerza ejercida por la máquina. Pero en este apartado vamos a seguir seleccionando todos los parámetros para poder tener todo perfectamente dispuesto para el posible experimento.

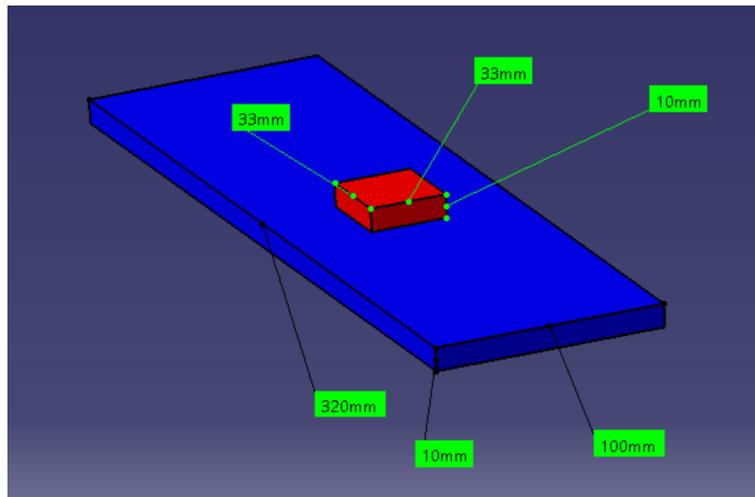
En este caso después de ver la estampadora físicamente somos capaces terminar de diseñar las geometrías tanto del punzón como de la placa blanda y su ubicación en la máquina para la práctica experimental.



39 Figura 5.3.1. Ubicación relativa punzón-placa blanda maqueta 3D (1)



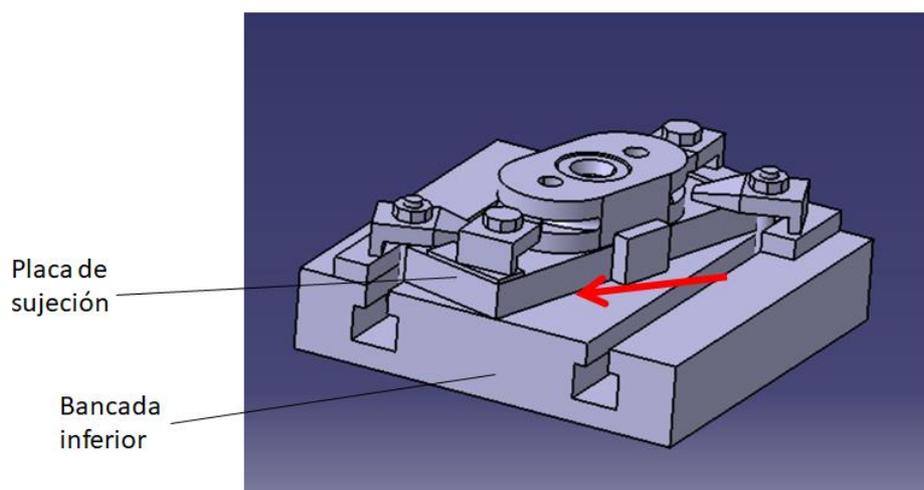
40 Figura 5.3.1. Ubicación relativa punzón-placa blanda maqueta 3D (2)



41 Figura 5.3.3. Geometría con cotas del punzón y de la placa blanda

En la figura 5.3.3 podemos ver ya las geometrías completas del punzón (elemento de color rojo), y de la placa blanda (elemento de color azul), hemos decidido poner de espesor 10 mm a cada elemento ya que seguramente va a ser suficiente en comparación con la deformación que se va a provocar. De todas formas como se comentó en capítulos anteriores, la resolución de problemas en ingeniería aunque se razonen todos los pasos y decisiones tomadas, es un proceso iterativo, con lo que en el siguiente capítulo en el estudio de elementos finitos con el Deform-3D haremos la comprobación final, simulación del problema, y observaremos si esa geometría es la ideal o si por el contrario tenemos que modificarla.

Ahora como último paso tenemos que seleccionar la ubicación de nuestros dos elementos en la máquina de estampación. Como se puede observar en la figura 5.3.4 el lugar que indica la flecha roja, entre la placa de sujeción y la bancada inferior, sería el más idóneo por dos motivos principales, que tiene suficiente espacio para colocar la placa blanda y por la facilidad de ubicación ahí, ya que solo haría falta quitar las dos mordazas exteriores para realizar la colocación.

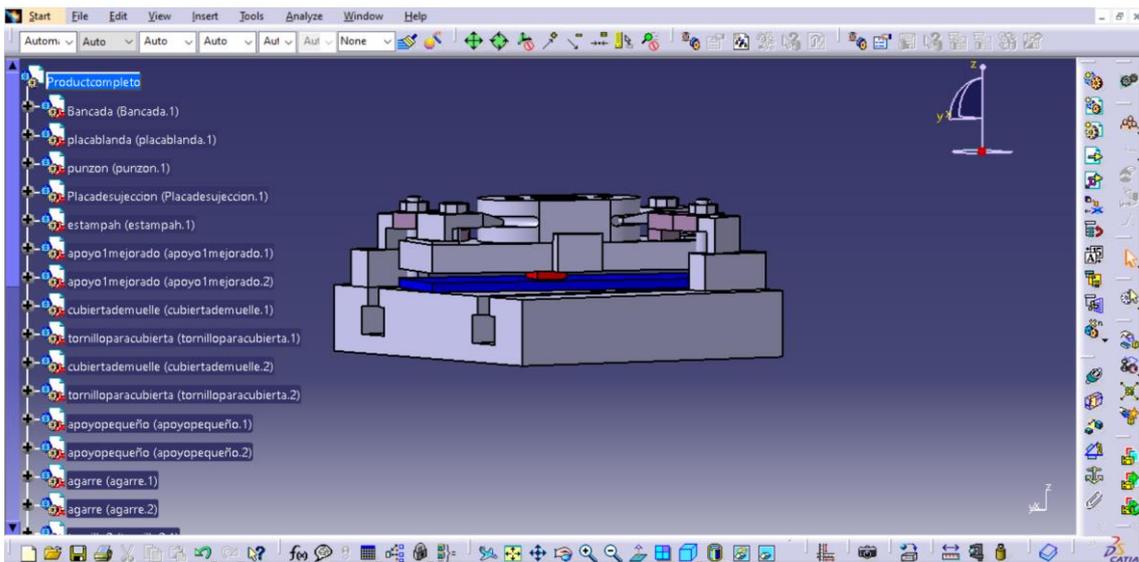


42 Figura 5.3.4. Mejor ubicación de la placa blanda y el punzón

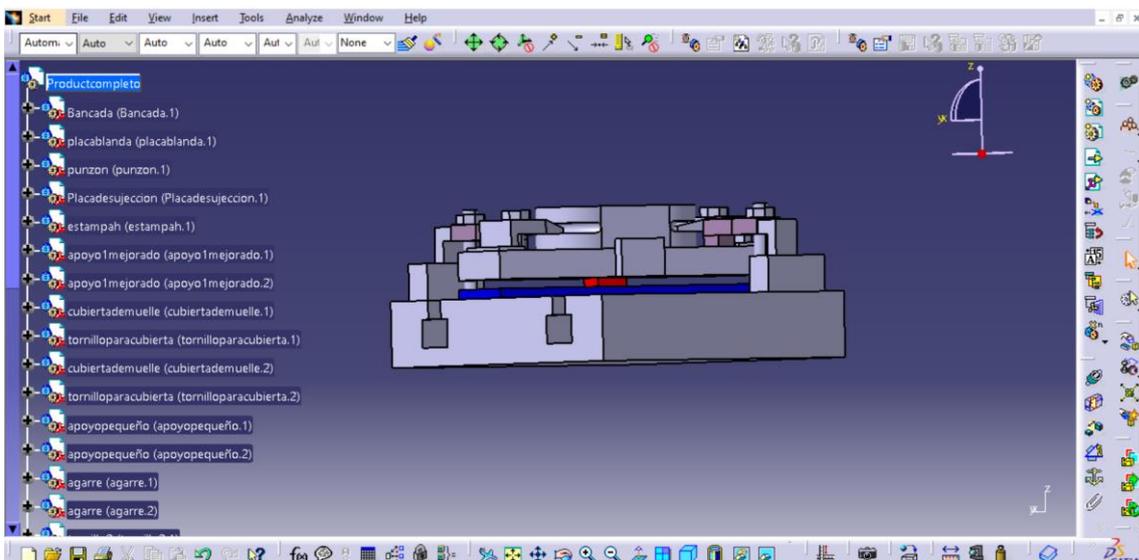
## 5.4 Maqueta 3D con la solución para el experimento real

En este apartado vamos a confeccionar de forma virtual la solución de diseño incluyendo la placa blanda y el punzón en el conjunto de la máquina estampadora. De esta manera dejamos lista la maqueta 3D para poder usarla en el software de elementos finitos y dar el visto bueno final a la elección de geometrías y materiales.

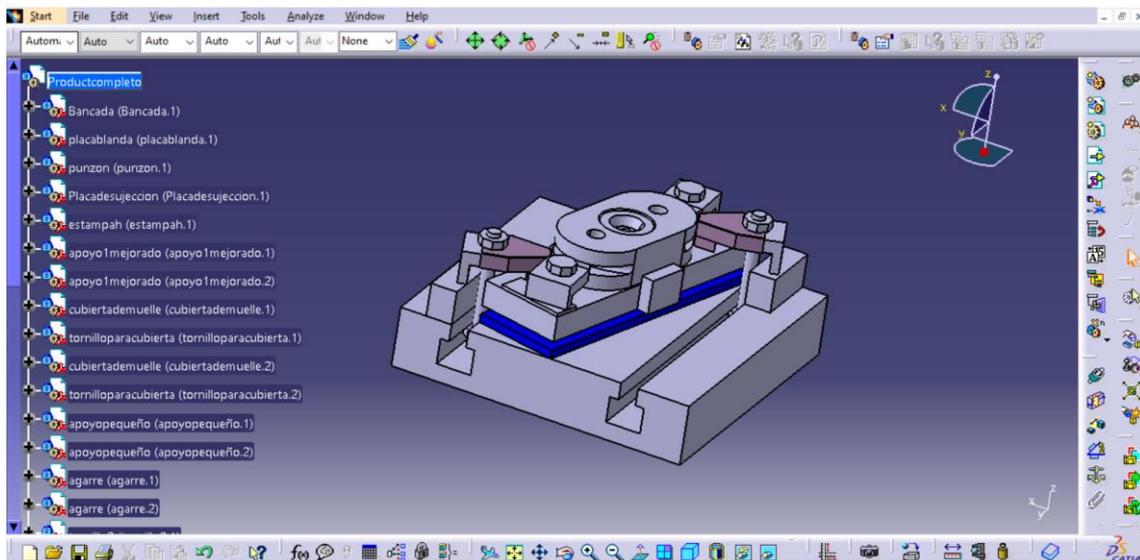
A continuación vamos a ver unas figuras con los nuevos elementos, la parte superior de la máquina no variará solo la parte inferior y es la que representamos.



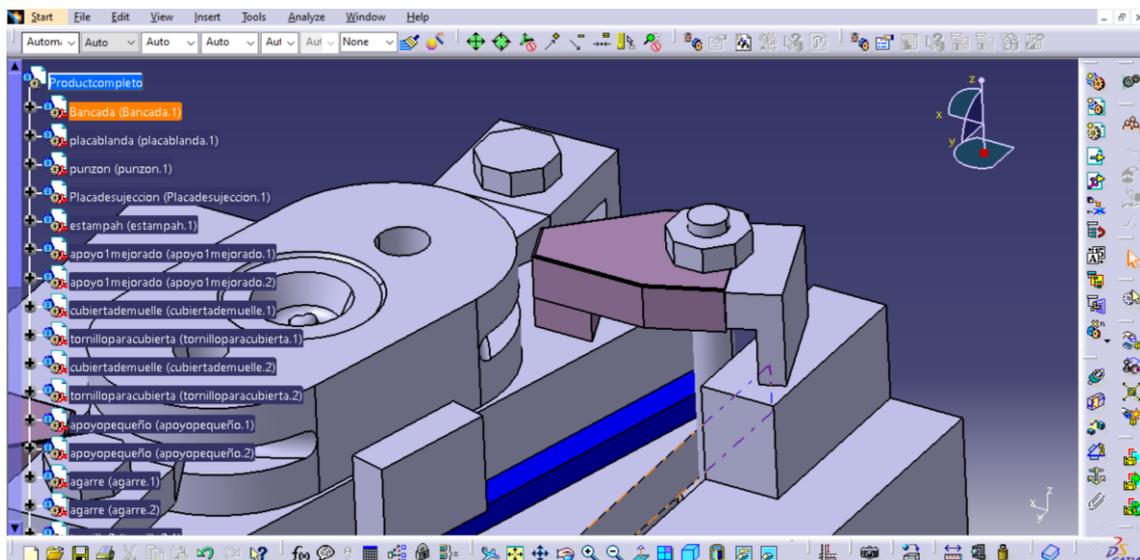
43 Figura 5.4.1. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (1)



44 Figura 5.4.2. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (2)

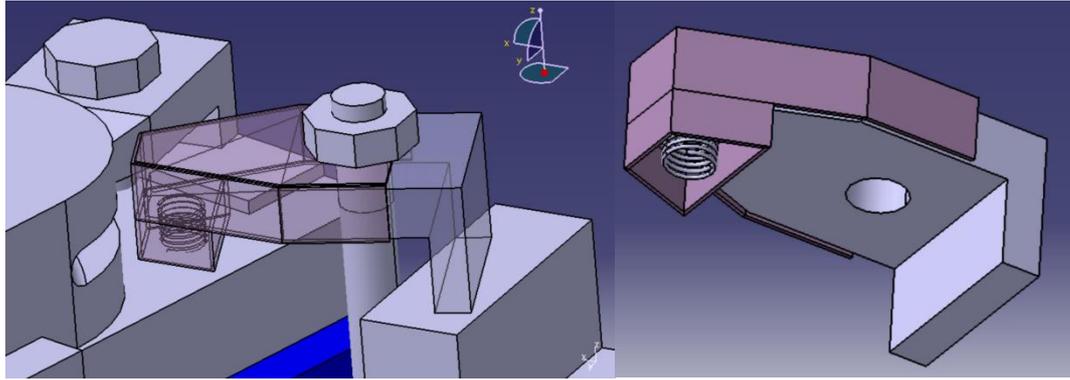


45 Figura 5.4.3. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (3)



46 Figura 5.4.4. Maqueta 3D con la placa blanda y el punzón (4)

Como podemos ver, además de que hemos incluido el punzón y la placa blanda tenemos un nuevo elemento en las mordazas exteriores, en la figura 5.4.4, 5.4.5 y 5.4.6 podemos observarlo perfectamente. En dichas mordazas hay una cubierta exterior, y en la punta de esas cubiertas hay unos muelles, figura 5.4.5 y 5.4.6, esos muelles son para que con cada golpe dado por la estampadora que produzca una deformación plástica en la placa blanda, esos muelles hagan presión suficiente para que eviten el movimiento relativo entre el punzón y la placa blanda, y de esta manera se pueda cumplir que en todos los golpes el punzón está presionando siempre los mismos puntos de la placa blanda.



47 Figura 5.4.5. Modificación de las mordazas exteriores (1)

48 Figura 5.4.6. Modificación de las mordazas exteriores (2)

Con el cumplimiento de este capítulo ya tenemos la maqueta 3D para el estudio computacional de MEF para obtener la fuerza ejercida por la estampadora, pero también hemos realizado un estudio y hemos diseñado una solución para poder realizar el experimento de forma real.

# 6 SIMULACIÓN M.E.F. CON DEFORM-3D

## 6.1 Introducción

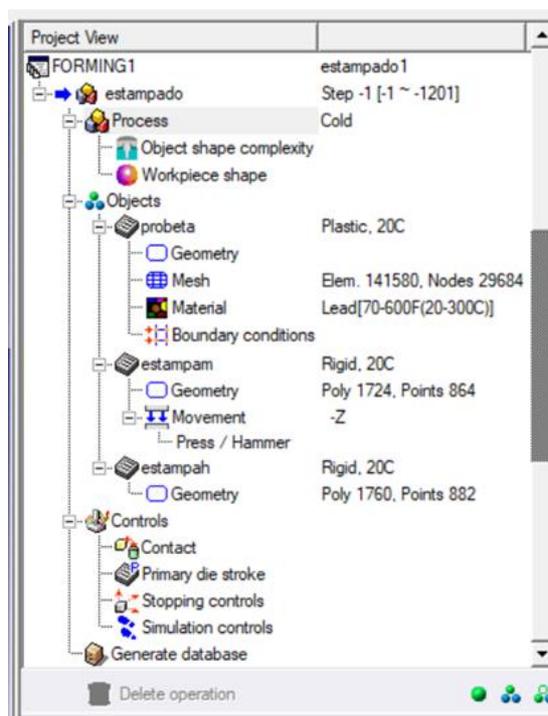
Los procesos de fabricación necesitan herramientas de cálculo altamente potentes para resolver todo tipo de problemas relacionados. Una de las más fiables y usadas por los ingenieros es el método de los elementos finitos.

En el presente estudio se va a llevar a cabo mediante el uso del software Deform-3D, este capítulo final va a constar de dos apartados, el primero la simulación real del problema y del cual obtendremos la respuesta a la fuerza ejercida por la máquina, y el segundo apartado que sería la simulación del experimento real, del cual obtendremos la verificación de que todos los elementos seleccionados cumplen con su función y son los correctos para realizar el ensayo.

## 6.2 Simulación virtual del problema

En este apartado vamos a realizar la simulación del problema de la estampación de una probeta de plomo (Pb), para conseguir obtener la fuerza que necesita la máquina en realizar dicho proceso y compararemos el resultado con el teórico anteriormente conseguido.

Primero vamos a comenzar con las decisiones que se toman en el software de MEF (Deform 3D) para modelar el proceso:



49 Figura 6.2.1. Estructura esquematizada del programa realizado en Deform 3D

Como podemos observar en la figura anterior, figura 6.2.1, tenemos un esquema de decisiones tomadas extraído directamente del Deform 3D, con dichas decisiones podemos conseguir la simulación del problema real.

### Process:

En este punto vamos a definir los puntos clave del proceso.

1. Definimos el proceso a realizar “Formming” (Conformado).
2. En frío.
3. Usaremos unos objetos de complejidad moderada y con una exactitud de resolución del software, moderada también (es lo que te propone el software por defecto).
4. Trabajaremos con el diseño completo de los elementos que intervienen en el problema, dichos elementos serán importados de CATIA, ya los habíamos diseñado en el capítulo anterior.

### Objects:

En este punto vamos a definir los diferentes elementos que intervienen en el proceso.

1. Probeta

Es la pieza de trabajo que va a ser deformada. Figura 6.2.2. Este elemento es de plomo, este material lo podemos importar con todas sus características mecánicas y físicas de la librería del Deform 3D.



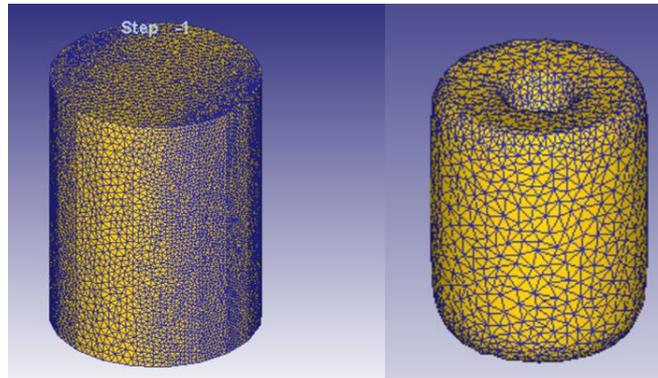
50 Figura 6.2.2. Probeta real vs Deform 3D

Una vez hemos definido la geometría de la pieza y su material, procedemos a una de las partes claves en la simulación con software de elementos finitos, la selección de la malla a usar.

En todos los problemas de ingeniería en los que se utiliza el método de elementos finitos para su resolución es de capital importancia generar una malla ajustada a dicho problema.

El software Deform 3D crea un mallado automáticamente según él considere que es más adecuado. Si fuese necesario, los usuarios del programa pueden establecer su propio mallado, ajustando más elementos en las zonas más afectadas en la deformación.

En este trabajo se ha realizado con un ordenador personal y la aplicación de un mallado muy exhaustivo en la primera fase de la simulación ha conllevado un aumento demasiado considerable del tiempo de simulación. Por tanto, no se ha podido elevar la malla tanto como se desea. Porque es obvio que una malla con mayor número de elementos va a conseguir una solución más detallada del proceso, pero si tenemos que invertir horas en una iteración en lugar de minutos para ajustar un Newton de fuerza arriba o abajo en la solución final del problema se pierde el sentido ingenieril, en el cual siempre valoramos una optimización tiempo, exactitud de la solución.

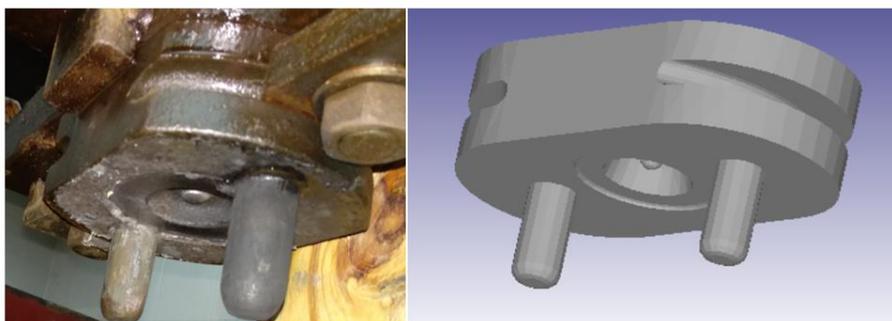


51 Figura 6.2.3. Mallado de la probeta

En la figura anterior, figura 6.2.3, podemos ver el mallado al inicio del proceso, en el cual se usó una malla con 141580 elementos y 29684 nodos, pero debido a la gran cantidad de tiempo invertido por iteración e incluso la incapacidad de la computadora para realizar los cálculos pertinentes y quedarse bloqueada, por tanto fuimos ajustando la malla hasta conseguir una, que nos pudiese ofrecer una optimización en la que el tiempo por iteración no fuese excesivo, algo parecido a lo que nos ofrecía el programa por defecto que sería 18547 elementos y 4219 nodos, es la segunda malla de la figura 6.2.3.

## 2. Estampa Superior

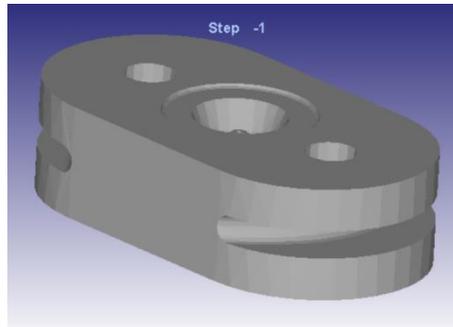
En el programa realizado la hemos llamado “estampam”, es el elemento móvil que ejercerá la fuerza y deformará a la probeta en el proceso de la estampación. Es una pieza rígida indeformable, y en el movimiento que le imponemos va a ser de bajada hasta que toque con la estampa inferior, y de esa manera conseguir la deformación completa de la probeta. La figura 6.2.4 es la comparación real vs Deform 3D de la estampa superior.



52 Figura 6.2.4. Estampa superior real vs Deform 3D

### 3. Estampa inferior

En el programa realizado por mí la he llamado “estampah”, es el elemento inmóvil que se sitúa en la parte inferior y deformará a la probeta en el proceso de la estampación junto con la estampa superior. Es una pieza rígida indeformable.

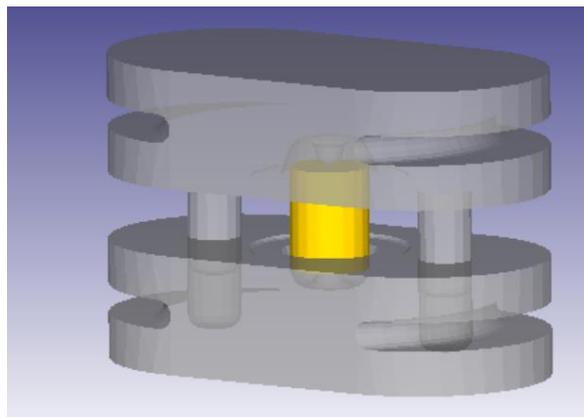


53 Figura 6.2.5. Estampa inferior Deform 3D

#### **Controls:**

En este punto vamos definimos las posición de los diferentes elementos que intervienen en la simulación, como podemos ver en la figura 6.2.6, así como que el movimiento que se va a realizar, que será hasta que se toquen las estampas, y cada cuanto se va a realizar una “save” en las iteraciones del proceso.

Este “save” es muy importante a la hora de la simulación gráfica porque son los pasos que vamos a poder ir viendo visualmente en la simulación y porque nos va a dar una serie de puntos de regreso a los que poder volver y realizar de nuevo el problema con los mismos u otros parámetros.



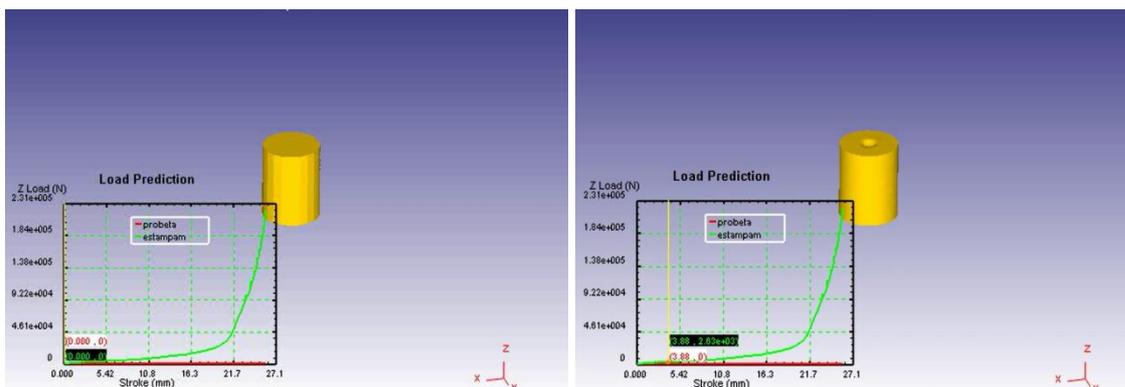
54 Figura 6.2.6. Estampas y probeta antes de la simulación

Una vez definido el problema completo realizamos la simulación.

### 6.3 Resultado fuerza simulación con elementos finitos

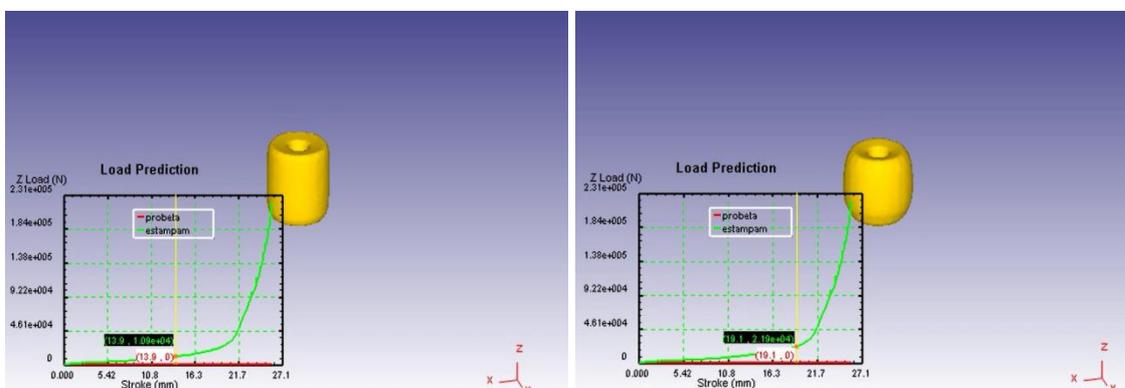
Una vez realizada la simulación vamos a representar los resultados obtenidos y como conseguimos el fin buscado de la fuerza total que ejerce la máquina.

Primero vamos a representar una concatenación de imágenes de la deformación de la probeta con respecto a la fuerza necesaria ejercida para dicha deformación en cada momento y posteriormente otra concatenación a la cual le incluimos una gráfica de la tensión sufrida en cada parte de la probeta, obtenidas de unos videos simulación del proceso.



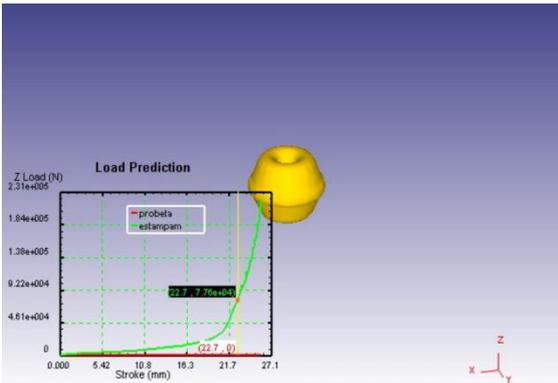
55 Figura 6.3.1. Simulación del problema fuerza vs deformación (1)

56 Figura 6.3.2. Simulación del problema fuerza vs deformación (2)

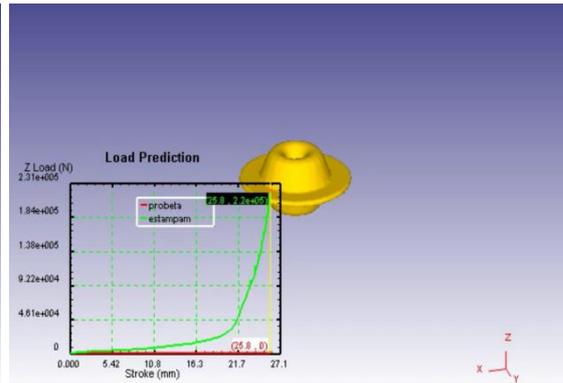


57 Figura 6.3.3. Simulación del problema fuerza vs deformación (3)

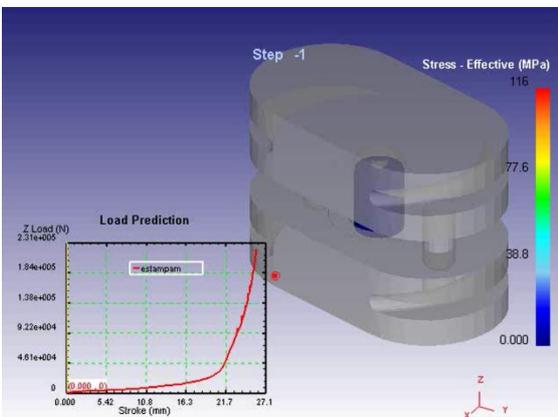
58 Figura 6.3.4. Simulación del problema fuerza vs deformación (4)



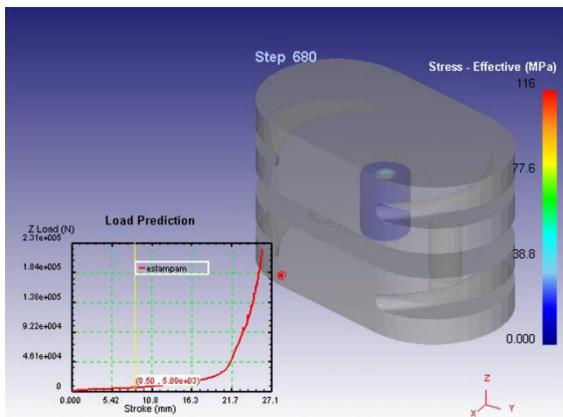
59 Figura 6.3.5. Simulación del problema fuerza vs deformación (5)



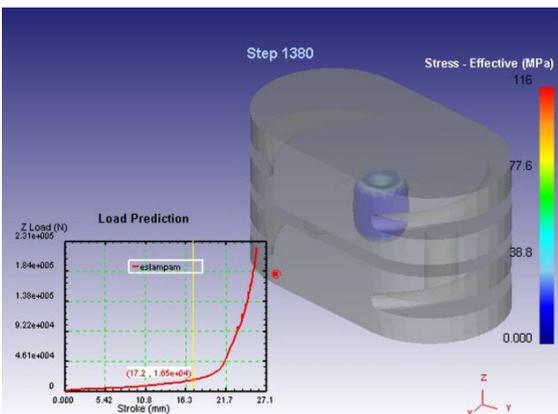
60 Figura 6.3.6. Simulación del problema fuerza vs deformación (6)



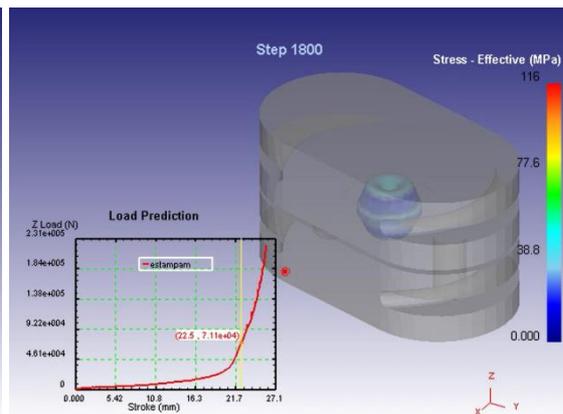
61 Figura 6.3.7. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (1)



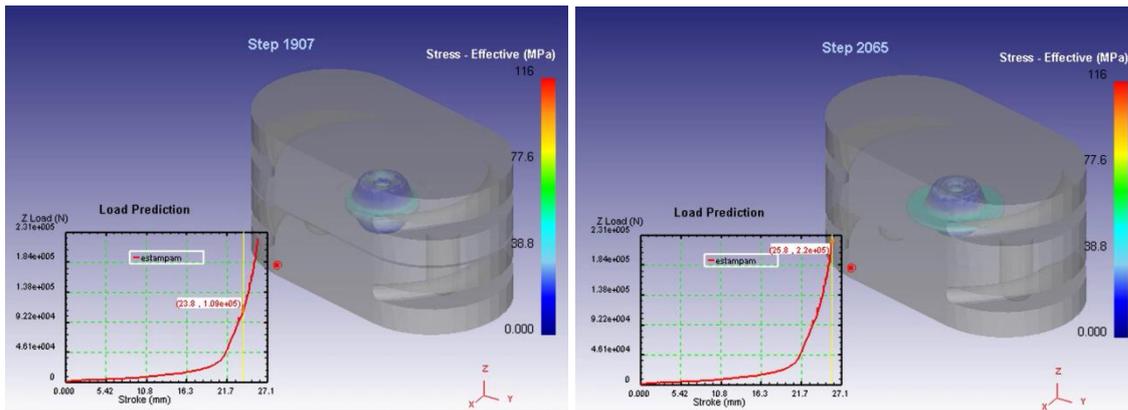
62 Figura 6.3.8. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (2)



63 Figura 6.3.9. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (3)



64 Figura 6.3.10. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (4)

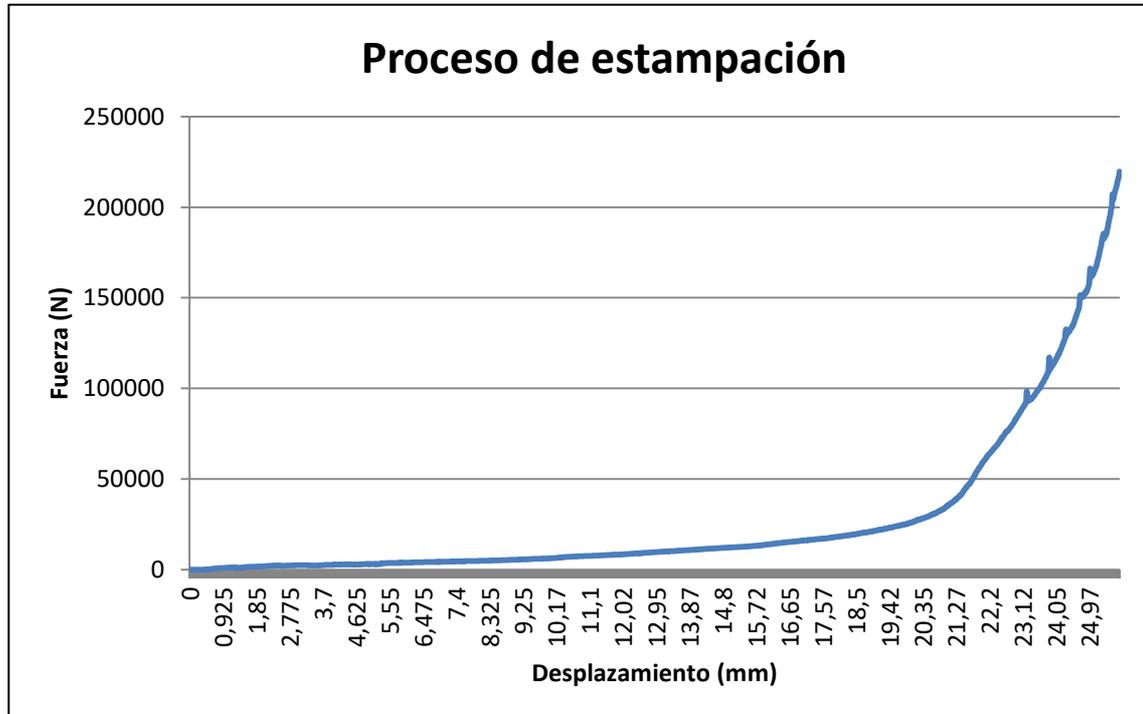


65 Figura 6.3.11. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (5)

66 Figura 6.3.12. Simulación del problema fuerza vs deformación y tensión (6)

Una vez realizada la simulación en el software MEF, Deform 3D, extraemos un archivo .txt en el cual vamos a tener todos los datos de deformación en milímetros y fuerza en Newton por iteración, que van a ser exactamente 2066, que son las iteraciones realizadas. Con lo que vamos a tener 2066 iteraciones, 2066 datos de desplazamiento en milímetros y 2066 datos de fuerza instantánea ejercida para cada iteración en Newton.

Por tanto con ese archivo la fila de datos de la última iteración nos dará la fuerza que ejerce la máquina para la deformación de la probeta, para mayor facilidad de observarlo, realizaremos el tratamiento de datos del archivo extraído en otro software, Excel.



3 Gráfico 6.3.1. Fuerza vs deformación

Como podemos observar en el anterior gráfico 6.3.1, tenemos una línea azul que es la función que representan los datos obtenidos por la simulación en el Deform 3D.

Por tanto para conseguir la respuesta del problema de la fuerza total ejercida por la estampadora en el proceso completo de la realización de la estampa de plomo tendríamos que irnos al último punto de fuerza representado por la función cuando se termina de realizar la estampa, que sería concretamente **219593 N**. Como podemos ver en las figuras 6.3.6 y 6.3.12 en las gráficas de dichas ilustraciones se observa este dato pero redondeado y para tener todo los decimales completos realizamos la parte de tratamiento de datos.

La fuerza total utilizada por la estampadora es de **219593 N**.

## 6.4 Comparación de los resultados de fuerza por los dos métodos usados

En la parte teórica obtuvimos que la fuerza que ejercía la estampadora era **205411 N** y en esta parte de simulación hemos obtenido que la fuerza es **219593 N**, una diferencia de 14182 N que es un resultado muy próximo, con lo que podemos concluir que en ambos procesos hemos realizados correctamente cada hipótesis.

Como en la simulación del software obtenemos una fuerza mayor a la obtenida de forma teórica, realizaremos de nuevo los cálculos en la cual habíamos usado la fuerza total de estampación para diseñar la placa y el punzón para asegurarnos que aunque haya aumentado la fuerza en 14182 N, las decisiones de materiales y geometrías siguen siendo las correctas.

“Recordando en el capítulo 4 apartado 10, usamos exactamente la tabla siguiente, tabla 4.10.1.

<i>MATERIAL</i>	<i>LÍMITE ELÁSTICO (<math>\sigma_E</math>)</i>	<i>LÍMITE DE FLUENCIA (<math>\sigma_{MÁX}</math>)</i>
<i>(*) Pb</i>	<i>5.5 MPa</i>	<i>12 MPa</i>
<i>(**) Al 6061-0</i>	<i>55 MPa</i>	<i>125 MPa</i>
<i>(**) Al 6061-T4</i>	<i>140 MPa</i>	<i>235 MPa</i>
<i>(**) Al 6061-T6</i>	<i>270 MPa</i>	<i>310 MPa</i>
<i>(***) Acero S550MC (1.0986)</i>	<i>550 MPa</i>	<i>600-760 MPa</i>

Tabla 4.10.1. Características metales Fuentes: (\*) <http://www.goodfellow.com>; (\*\*) Alacer Mas S.L.; (\*\*\*) Ferros Texar S.L.

Primero vamos a pasar la fuerza obtenida en la simulación (**219593 N**) a unidades de presión, usando la siguiente ecuación.

$$P = \frac{F}{A} \quad (4.10.1)$$

Donde el área se calcula como  $A = a \cdot b$ , una representación de la cara del punzón sería la figura 4.10.2.

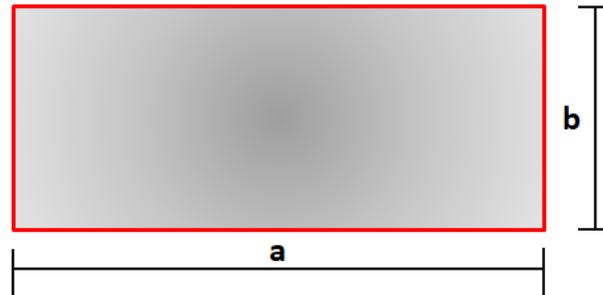


Figura 4.10.2. Área de la cara del punzón

Y donde la fuerza sería  $F = 219593 \text{ N}$  en la estampación global, pero dicha estampación consta de varios golpes (tres golpes efectivos según podemos observar en el vídeo que adjunto como “vídeo estampa”), por lo que esa cantidad tenemos que dividirla por 3 para obtener la fuerza por golpe, ya que necesitamos que la placa blanda se deforme en cada golpe de forma plástica, de lo contrario no se deformará en el experimento si solo la mantenemos en el rango de deformación elástica en cada golpe, como bien hemos explicado en el capítulo 3.

Por tanto, nos queda que la fuerza de cada golpe sería  $73198 \text{ N}$  aproximadamente.

Con la fuerza por golpe ( $73198 \text{ N}$ ), y el límite elástico del punzón, Acero S550MC (1.0986) ( $550 \text{ MPa}$ ) obtenemos aplicando la ecuación 4.10.1 el área limitante de la cara del punzón.

$$A \geq \frac{F}{P} \rightarrow A \geq \frac{73198 \text{ N}}{550 \text{ MPa}} \rightarrow A \geq 133.1 \text{ mm}^2$$

El área límite del punzón sería de unos  $133.1 \text{ mm}^2$  que es lo equivalente a un cuadrado de lado  $l \geq \sqrt{133.1 \text{ mm}^2} \rightarrow l \geq 11.54 \text{ mm}$ , un punzón de estas dimensiones tan pequeñas sería un elemento complicado para trabajar. Vamos a usar un ejemplo con un punzón de lado  $l = 33 \text{ mm}$ , que sería un punzón manejable y con un tamaño razonable, con este punzón obtendríamos que se ejercería una presión sobre la placa blanda de:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{73198 \text{ N}}{33^2 \text{ mm}^2} = 67.22 \text{ MPa}$$

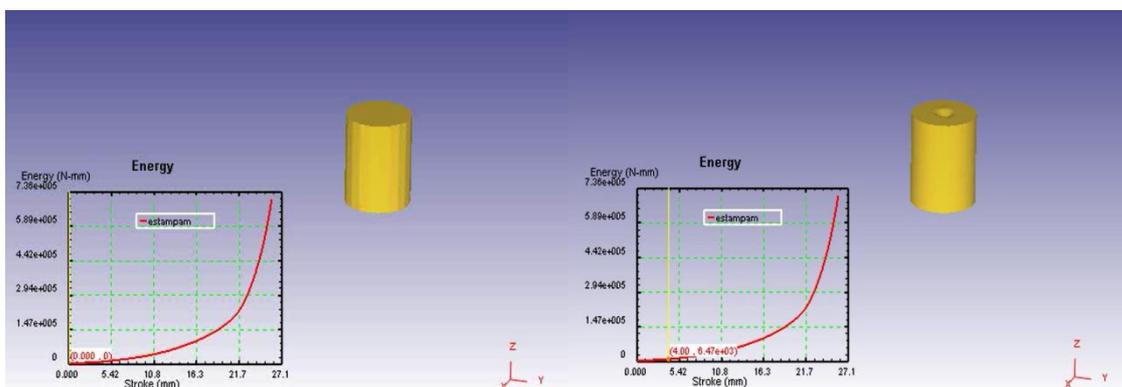
Con este resultado si nos vamos a la tabla 4.10.1 y se tiene que cumplir  $\sigma_E < P < \sigma_{M\grave{A}X}$ , para conseguir deformación plástica y no llegue al límite de fluencia, con este área de punzón el material único que podemos escoger sería el Al 6061-0. Por lo que vamos a escoger como material de la placa blanda el Al 6061-0, para poder tener un punzón de un tamaño con el que podemos trabajar cómodamente.”

Después de rehacer los cálculos de la parte donde tenemos que usar la nueva fuerza total por ser más restrictiva concluimos que con el margen que había es suficiente, con lo que no cambia en nada la parte de las decisiones tomadas en cuanto geometría y material de la placa blanda y el punzón.

## 6.5 Resultado energía simulación con elementos finitos

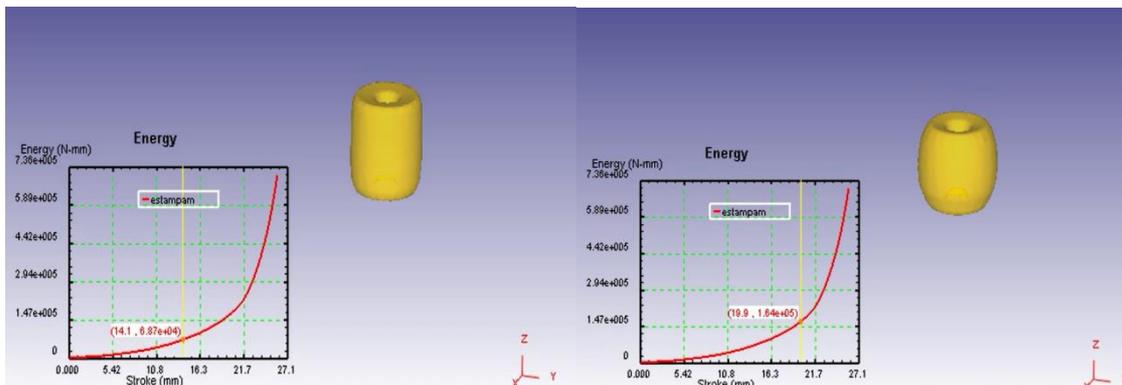
Este apartado es similar al de cómo se obtiene la fuerza, pero en este caso usaremos la obtención de la energía para usarlo en la simulación del experimento, ya que necesitamos la cantidad de energía invertida para poder modelar el martillo/estampadora que vamos a usar en la última simulación, eso ya lo explicaremos en el último punto.

Primero vamos a representar una concatenación de imágenes de la deformación de la probeta con respecto a la energía necesaria ejercida para dicha deformación en cada momento y posteriormente otra concatenación a la cual le incluimos una gráfica de la tensión sufrida en cada parte de la probeta, obtenidas de unos videos simulación del proceso.



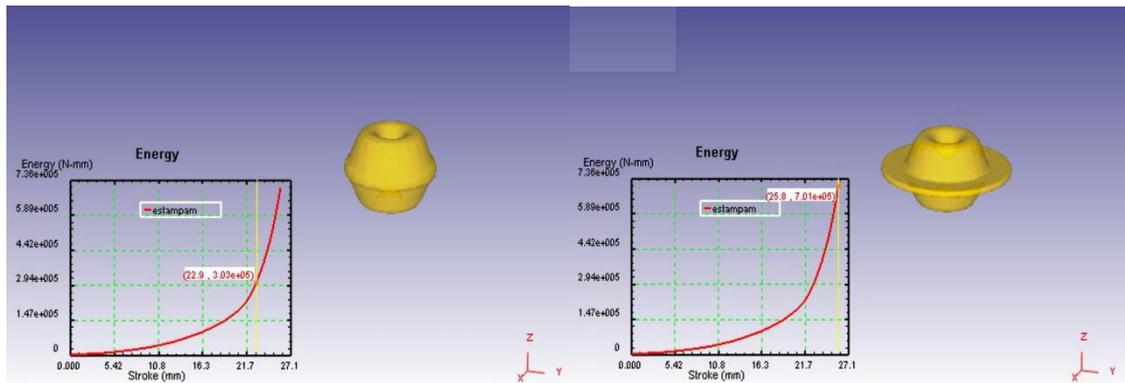
67 Figura 6.5.1. Simulación del problema energía vs deformación (1)

68 Figura 6.5.2. Simulación del problema energía vs deformación (2)



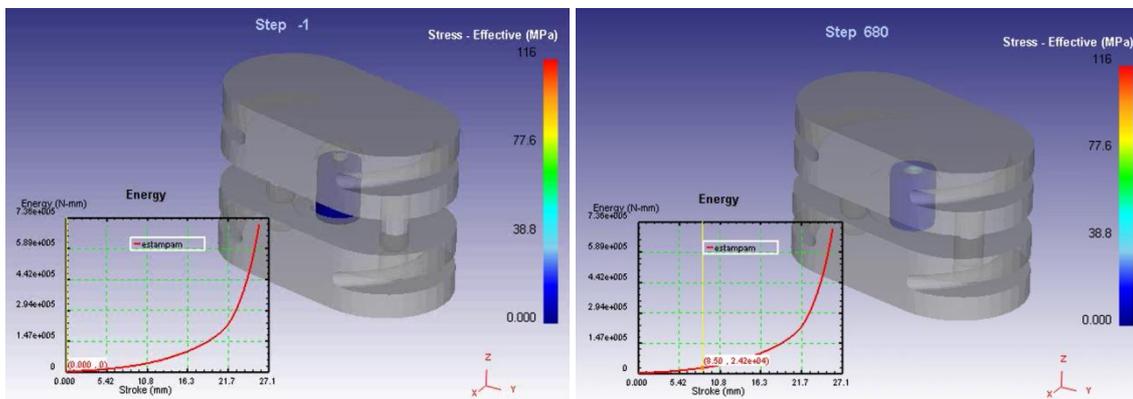
69 Figura 6.5.3. Simulación del problema energía vs deformación (3)

70 Figura 6.5.4. Simulación del problema energía vs deformación (4)



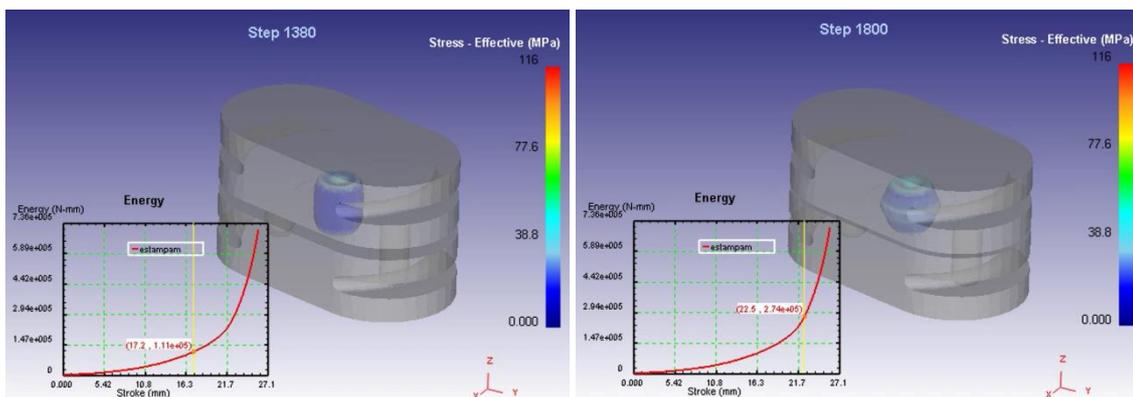
71 Figura 6.5.5. Simulación del problema energía vs deformación (5)

72 Figura 6.5.6. Simulación del problema energía vs deformación (6)



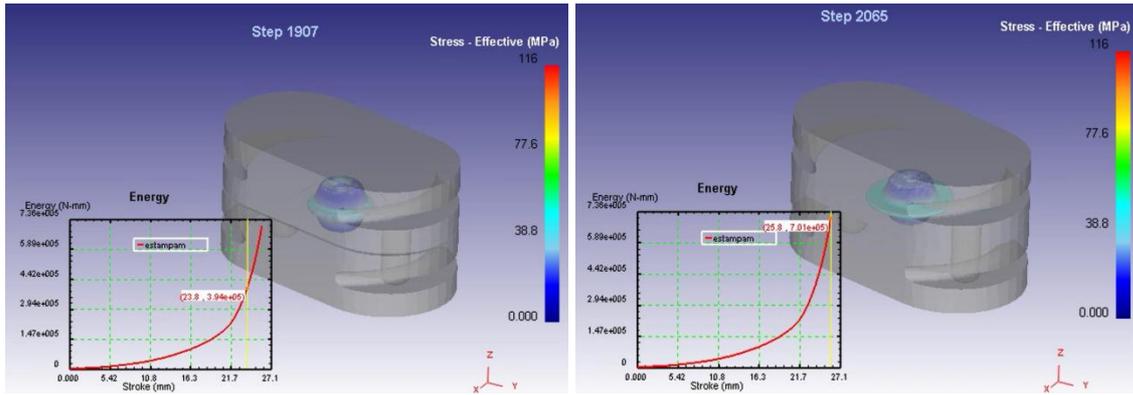
73 Figura 6.5.7. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (1)

74 Figura 6.5.8. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (2)



75 Figura 6.5.9. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (3)

76 Figura 6.5.10. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (4)



77 Figura 6.5.11. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (5)

78 Figura 6.5.12. Simulación del problema energía vs deformación y tensión (6)

Una vez realizada la simulación en el software MEF, Deform 3D, extraemos un archivo .txt en el cual vamos a tener todos los datos de deformación en milímetros y energía en Newton por milímetro en cada iteración, que van a ser exactamente 2066, que son las iteraciones realizadas. Con lo que vamos a tener 2066 iteraciones, 2066 datos de desplazamiento en milímetros y 2066 datos de energía instantanea ejercida para cada iteración en Newton por milímetro.

Por tanto con ese archivo la fila de datos de la última iteración nos dará la energía que ejerce la máquina para la deformación de la probeta, para mayor facilidad de observarlo, realizaremos el tratamiento de datos del archivo extraido en otro software, Excel.



4 Gráfico 6.5.1. Energía vs deformación

Como podemos observar en el anterior gráfico 6.5.1, tenemos una línea azul que es la función que representan los datos obtenidos por la simulación en el Deform 3D.

Por tanto para conseguir la respuesta del problema de la energía total ejercida por la estampadora en el proceso completo de la realización de la estampa de plomo tendríamos que irnos al último punto de fuerza representado por la función cuando se termina de realizar la estampa, que sería concretamente **701187 N·mm**. Como podemos ver en las figuras 6.5.6 y 6.5.12 en las gráficas de dichas ilustraciones se observa este dato pero redondeado y para tener todo los decimales completos realizamos la parte de tratamiento de datos.

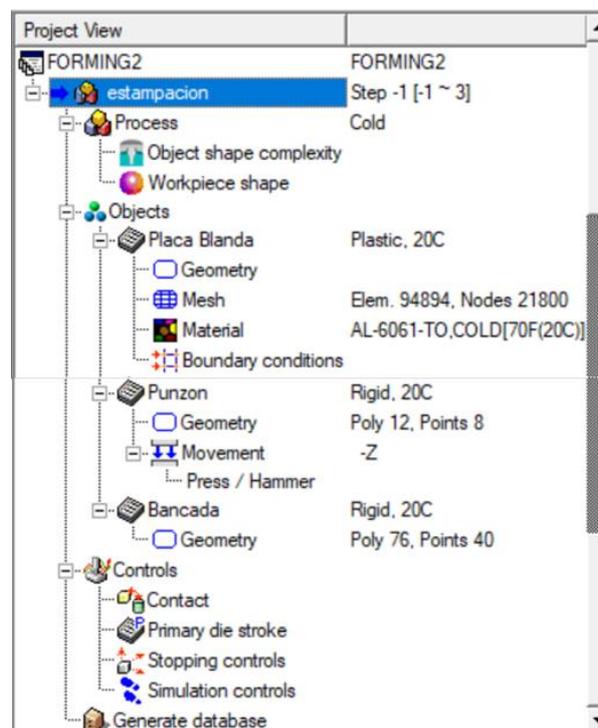
La energía total utilizada por la estampadora es de **701187 N·mm**.

## 6.6 Simulación virtual del experimento

En este último apartado vamos a verificar si las decisiones de diseño (geometría y materiales), de los elementos nuevos que vamos a incluir en la máquina estampadora, son correctas. De esta manera confirmamos que podemos realizar el experimento tal como lo hemos planteado.

La simulación en el Deform 3D se va hacer de forma análoga a como se ha hecho anteriormente pero cambiando los elementos que intervienen en el problema.

Vamos a comentar de forma rápida el problema que vamos a simular:



79 Figura 6.6.1. Estructura esquematizada del programa, replica del experimento Deform 3D

### Process:

En este punto vamos a definir los puntos clave del proceso.

1. Definimos el proceso a realizar “Formming” (Conformado).

2. En frío.
3. Usaremos unos objetos de complejidad moderada y con una exactitud de resolución del software, moderada también (es lo que te propone el software por defecto).
4. Trabajaremos con el diseño completo de los elementos que intervienen en el problema, dichos elementos serán importados de CATIA, ya los habíamos diseñado en el capítulo anterior.

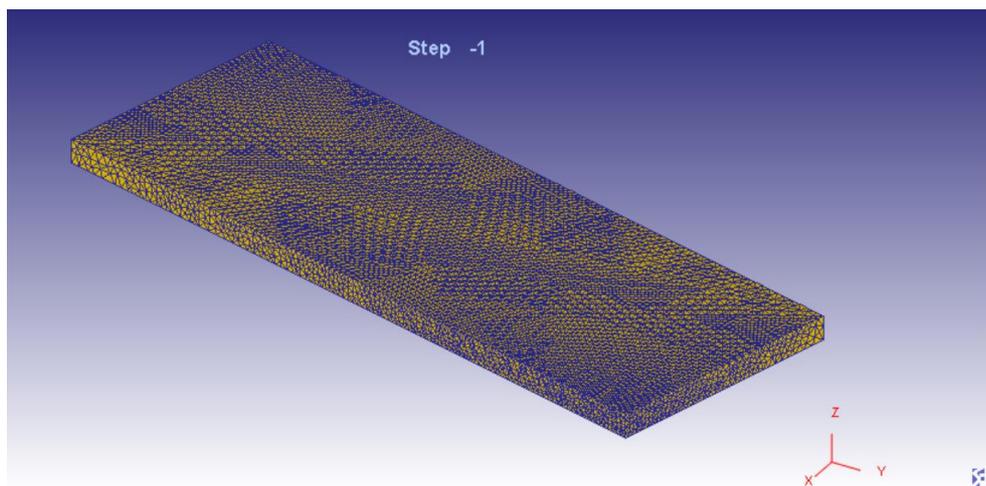
### Objects:

En este punto vamos a definir los diferentes elementos que intervienen en el proceso.

#### 1. Placa blanda

Es la pieza de trabajo que va a ser deformada, y con dicha deformación vamos a calcular la fuerza que ejerce la estampadora. Este elemento es de aluminio (Al 6061-T0), este material lo podemos importar con todas sus características mecánicas y físicas de la librería del Deform 3D.

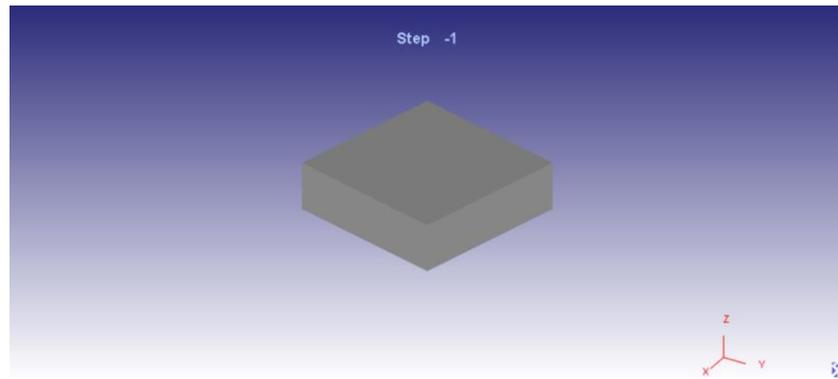
Como este problema es muy simple podemos escoger la malla más detallada que existe para la placa blanda, figura 4.32, que sería una malla de 94894 elementos y 21800 nodos.



80 Figura 6.6.2. Mallado fino en la placa blanda

#### 2. Punzón

En el programa es el elemento móvil, figura 4.33 que ejercerá la fuerza y deformará a la placa blanda en el proceso de la estampación. Es una pieza rígida indeformable, y el movimiento que le imponemos va a ser de bajada, vamos a modelarlo como un martillo, para que sea como en el experimento real, y por tanto tendrá que recorrer 190 mm tres veces que son los tres golpes efectivos del experimento real.



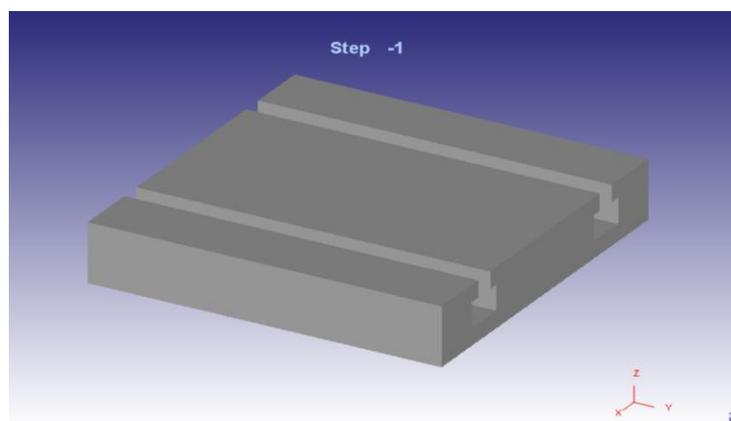
81 Figura 6.6.3. Punzón

Hipótesis para modelar el martillo, que dará 3 golpes:

- Eficiencia → Escogemos una eficiencia del **100%** porque se tiene que suministrar al completo la energía, ya que esa es la energía efectiva del proceso anterior.
- Energía → Escogemos la energía en función de la energía total obtenida con la simulación del problema anterior, que sería 701187 N·mm dividido por 3, ya que en el problema real y como observamos en el video “video estampa” la estampadora da 3 golpes efectivos para realizar el trabajo, por tanto nuestro martillo tendrá una energía de **233729** N·mm por golpe, obviamente nuestra simulación constará de 3 golpes.
- Masa → La masa va a ser  $m \approx 70 \text{ kg}$ , es el peso de la parte superior de la estampadora, y lo calculamos con CATIA, la parte superior es de acero y por tanto desde el software ponemos que es de acero y vemos el peso que tiene.

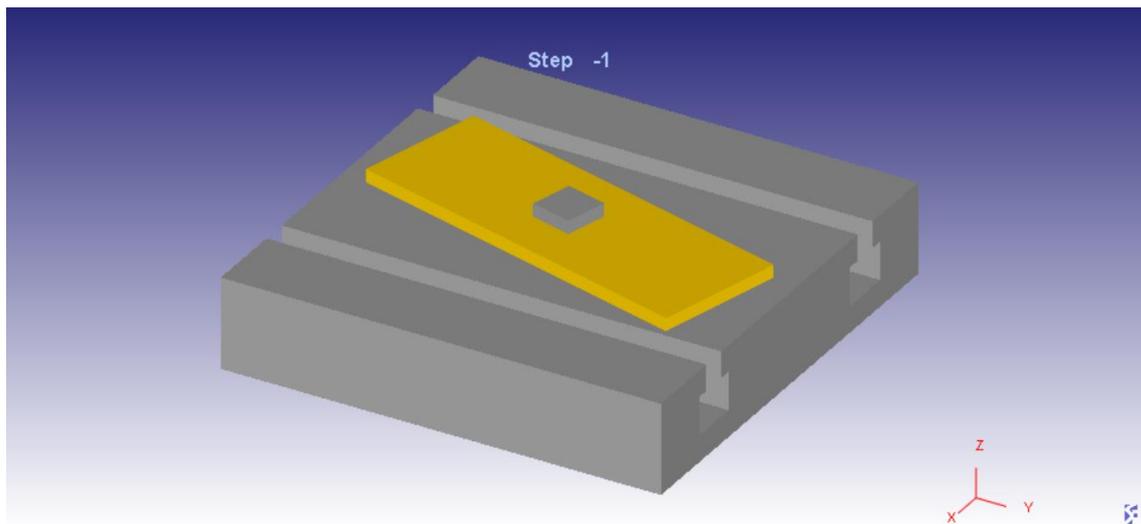
### 3. Bancada

Es el elemento inmóvil que se sitúa en la parte inferior y deformará a la probeta en el proceso de la estampación junto con el punzón. Es una pieza rígida indeformable.



82 Figura 6.6.4. Bancada

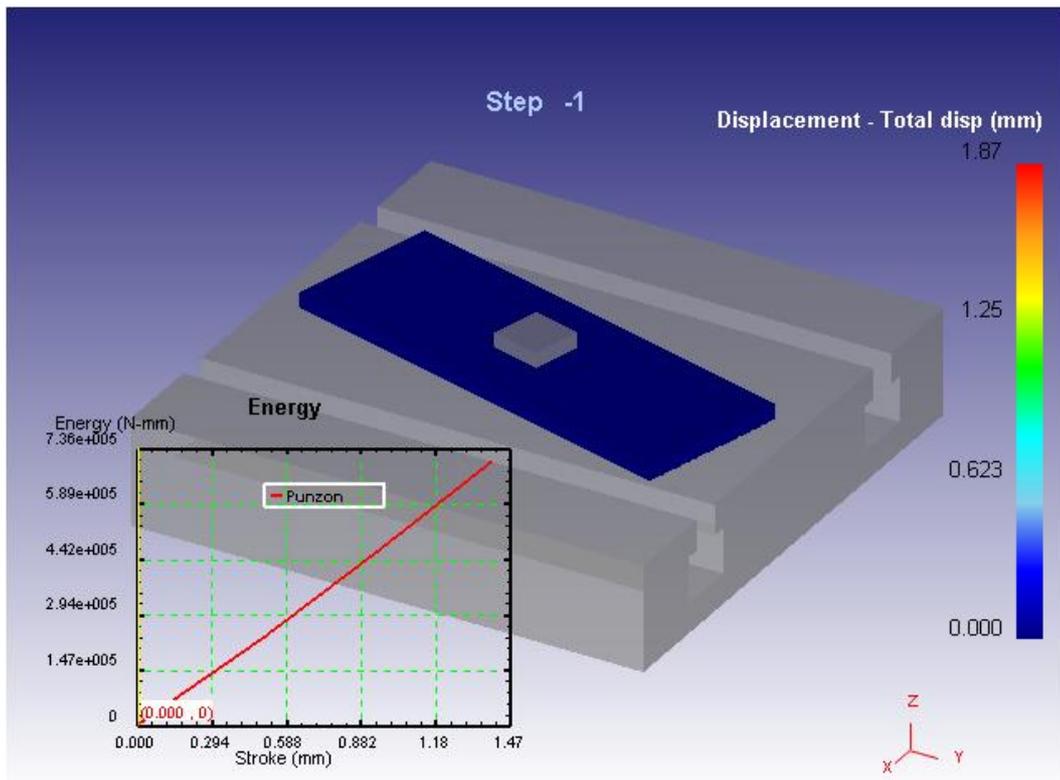
La configuración de todos los elementos que envuelven el problema quedaría de esta manera, figura 6.6.5.



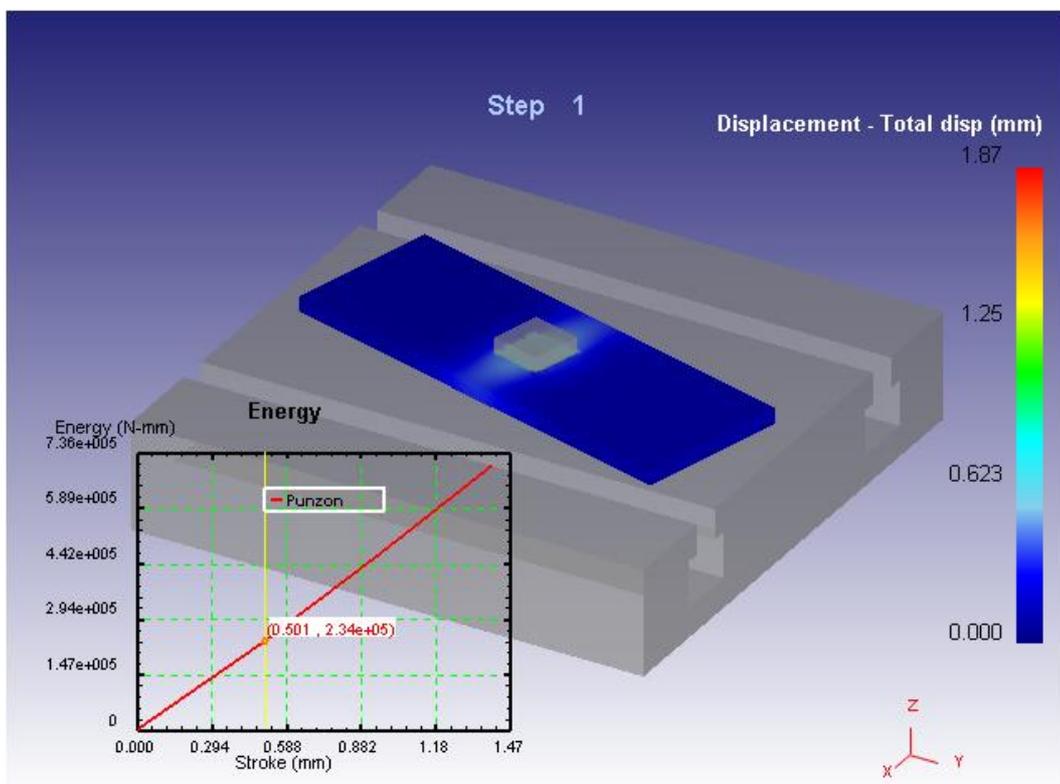
83 Figura 6.6.5. Conjunto de elementos que constituyen la simulación

Una vez realizada la simulación en el software MEF, Deform 3D, procedemos a realizar el análisis de los datos, vamos a representar cuatro figuras, en las que se van a representar la deformación y la fuerza, en los diferentes estados del experimento.

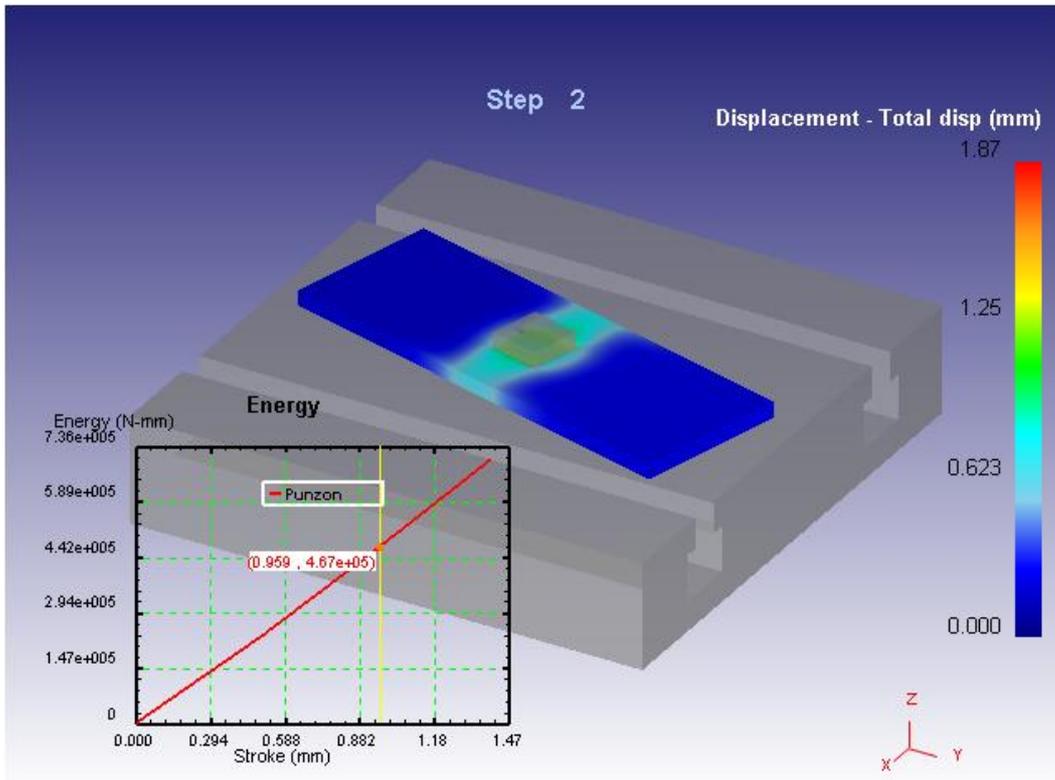
- Figura 4.36, antes de ningún golpe.
- Figura 4.37, tras el primer golpe.
- Figura 4.38, tras el segundo golpe.
- Figura 4.39, tras el tercer y último golpe.



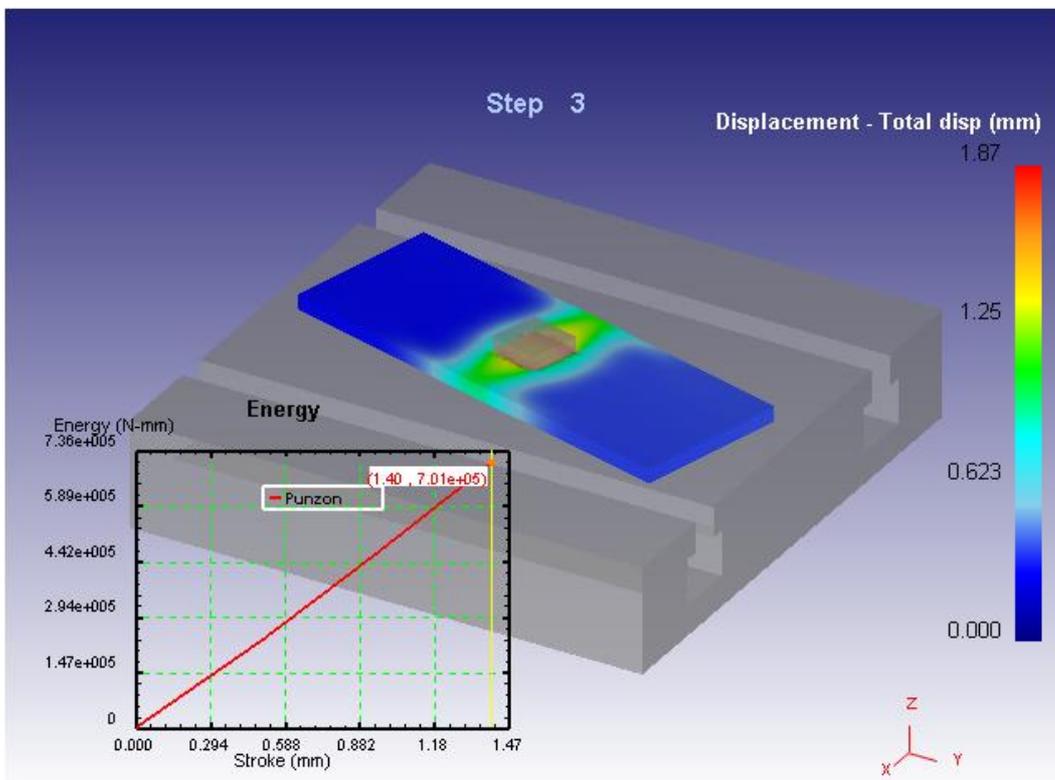
84 Figura 6.6.6. Simulación del experimento (1)



85 Figura 6.6.7. Simulación del experimento (2)



86 Figura 6.6.8. Simulación del experimento (3)



87 Figura 6.6.9. Simulación del experimento (4)

Para finalizar vamos a razonar los datos obtenidos del análisis, en los cuales vamos a centrarnos en la deformación de la placa blanda.

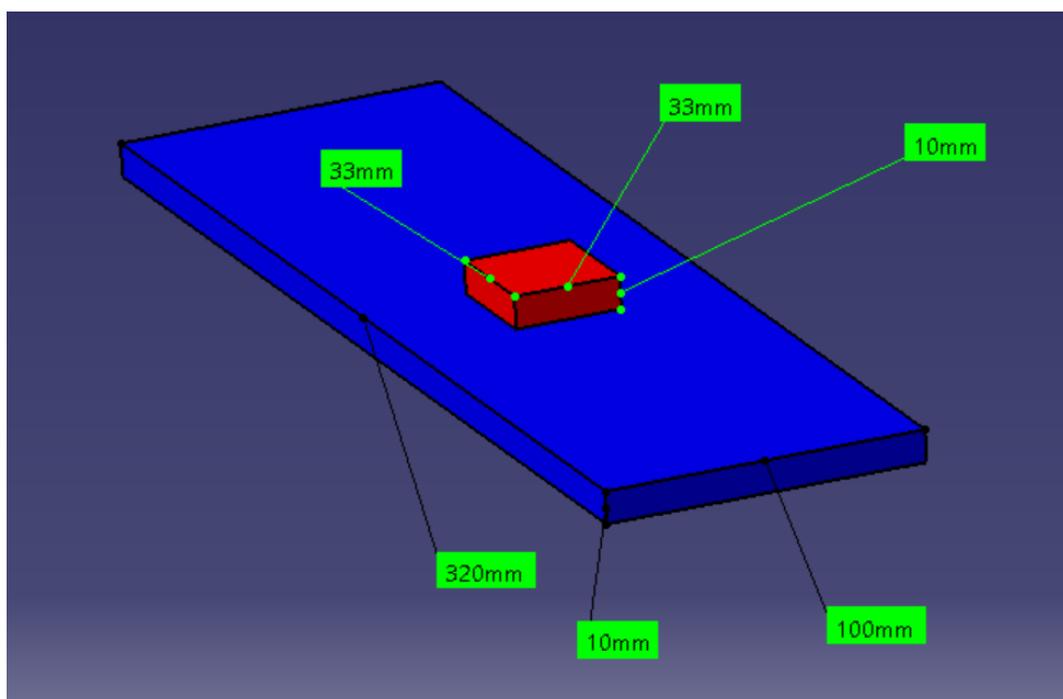
- Golpe 1 → Deformación de 0.501 mm
- Golpe 2 → Deformación de 0.458 mm, tras el golpe 2 la deformación total es 0.959mm
- Golpe 3 → Deformación de 0.441 mm, tras el golpe 3 la deformación total es 1.40 mm

Lo primero que observamos es que cada golpe deforma menos que el anterior, eso es porque hemos escogido un material elastoplástico con endurecimiento, un tipo de aluminio, y que las deformaciones en la placa blanda son notables, o sea que se pueden medir, y a la vez que no son excesivas. Podemos concluir que los elementos que vamos a usar para el experimento real quedan perfectamente definidos en todos los ámbitos. Definidos en la ubicación que van a ocupar en la estampadora, capítulo 3. Y definidos en geometría y materiales:

**-Punzón**→ Material (Acero S550MC (1.0986)), área de su base ( $a = 1089 \text{ mm}^2$ ) y lado ( $l = 33\text{mm}$ ) y espesor 10 mm

**-Placa blanda**→ Material (Al 6061-0), área de su base ( $a = 100\text{mm} \cdot 320\text{mm}$ ) y espesor 10 mm

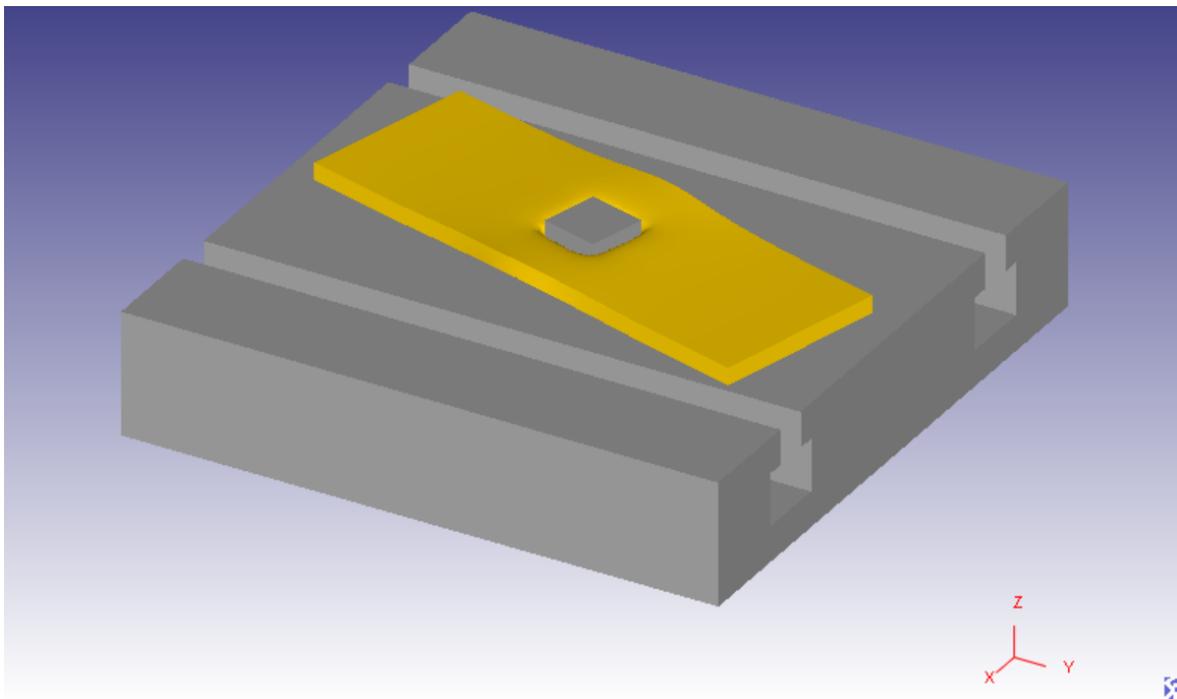
La geometría la podemos observar en la figura 3.18, que corroboramos que es perfecta para la realización del experimento real.



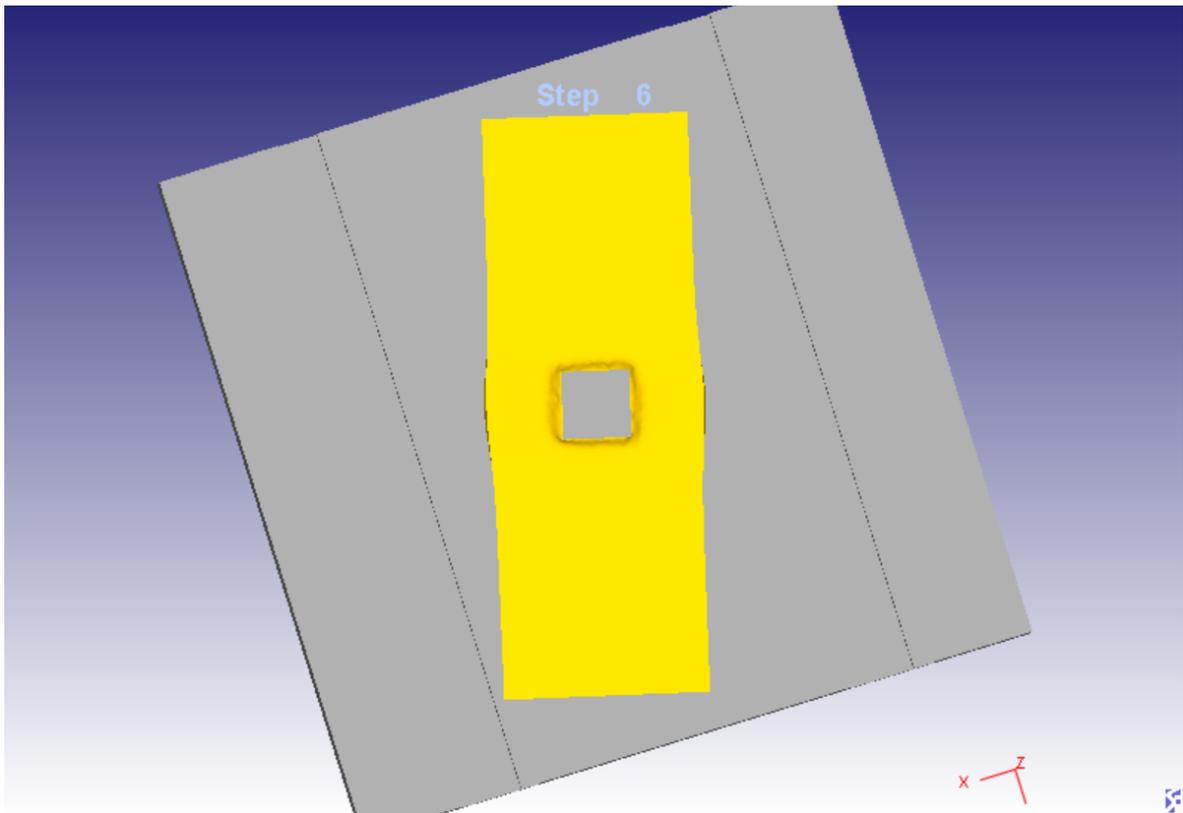
88 Figura 6.6.10. Geometría final constatada del punzón y de la placa blanda

En el caso de que hubiéramos usado una hipótesis errónea en la definición de los nuevos elementos a usar en el experimento (punzón y placa blanda). Lo hubiéramos notado en la simulación de elementos finitos, tal y como mostramos en las figuras 6.6.11, 6.6.12 y 6.6.13. En dichas figuras podemos ver los errores de hipótesis:

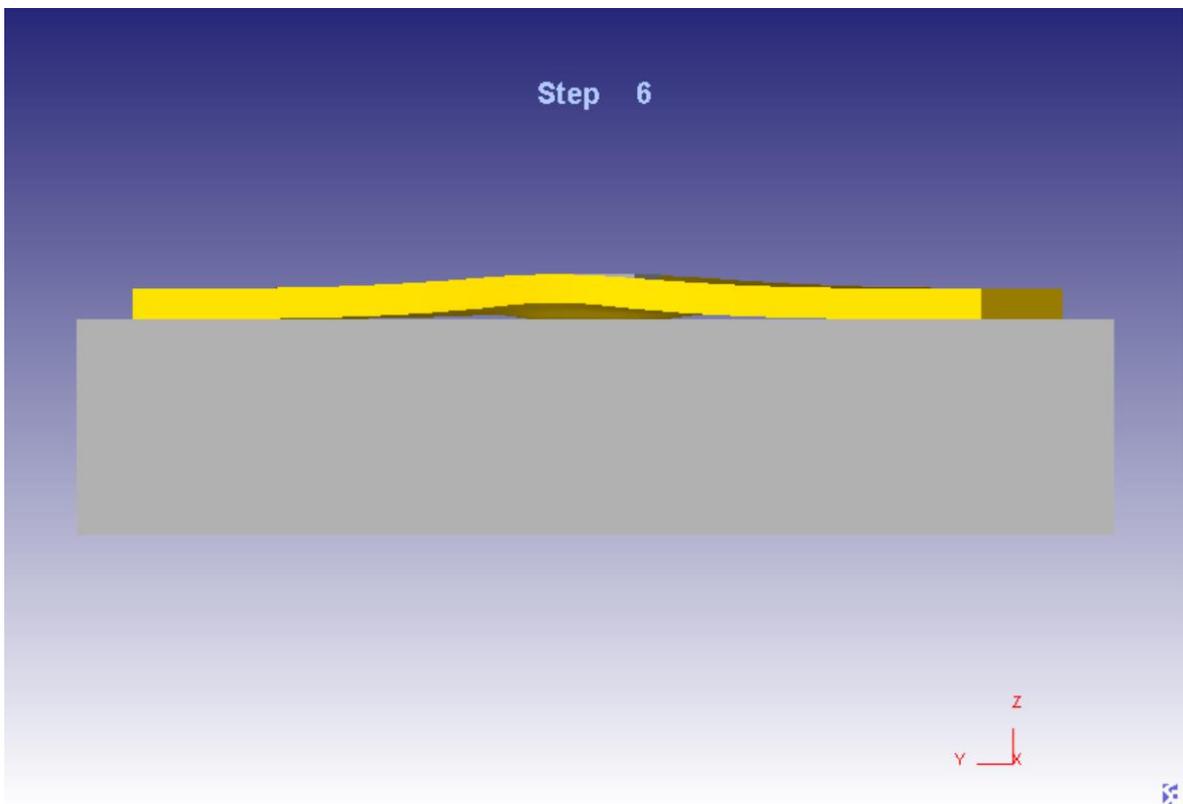
- Elección de un material con un límite elástico demasiado bajo para la placa blanda, en la figura 6.6.13. podemos observar cómo pandea hacia arriba la placa blanda y deja de estar en contacto con la bancada, debido a la gran deformación sufrida.
- Por lo mismo que se comenta anteriormente o si hubiésemos elegido un área de la placa blanda no lo suficientemente grande como para evitar que influya en ella el área del punzón se pueden obtener unos abombamientos en la placa blanda a la altura del punzón mirando en planta, tal como observamos en la figura 6.6.12.



89 Figura 6.6.11. Error, simulación Deform 3D (1)



90 Figura 6.6.12. Error, simulación Deform 3D (2)



91 Figura 6.6.13. Error, simulación Deform 3D (3)

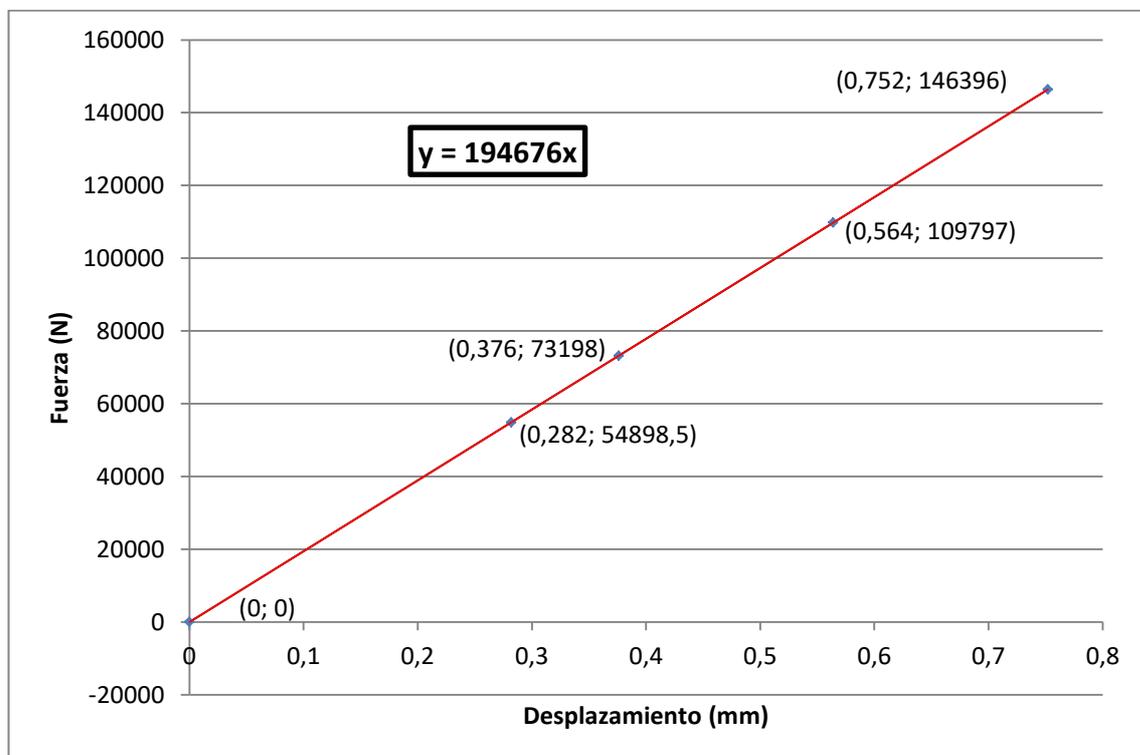
## 6.7 Relación Fuerza-Desplazamiento

En este apartado vamos a buscar una relación directa entre la fuerza y el desplazamiento, para conseguir un sistema de cálculo de fuerza de la máquina estampadora. Dicho sistema será conformado a partir de la deformación sufrida por la placa blanda debido al punzón después de un golpe de la máquina estampadora y a partir de esa deformación vamos a poder predecir la fuerza del impacto.

Lo que hemos realizado son varios estudios, semejantes a los del apartado 6.6, porque usamos la misma configuración dentro del programa (Deform 3D), pero hemos ido variando la fuerza ejercida por el martillo (punzón) y por tanto, hemos observado una deformación diferente para cada fuerza usada en los múltiples ejemplos.

Una vez acabado todos los estudios, representamos los resultados en una gráfica para ver la relación que existe entre ellos y podemos concluir que siguen una relación lineal, tal y como podemos observar en el gráfico 6.7.1, la función que describe y predice la fuerza en función del desplazamiento sería  $y = 194676x$ , para un impacto.

Este método de predicción sería usando el procedimiento experimental de la placa blanda y el punzón que se incluiría en la máquina estampadora y la deformación a medir sería la de la placa blanda de Al 6061-T0. Para realizar dichas medidas deberíamos usar un instrumento con una sensibilidad suficientemente alta y así conseguir una medida de deformación precisa, por ejemplo un reloj comparador sería un buen instrumento, ya que una mínima variación en la deformación resulta un gran cambio en la fuerza.



5 Gráfico 6.7.1. Relación Fuerza vs Desplazamiento

# 7 CONCLUSIONES Y MEJORAS

---

En este Trabajo Fin de Máster se empezó con una pregunta, ¿qué fuerza ejerce la estampadora?, una máquina que no tenía medidor de fuerza. Y para buscar su respuesta usamos diferentes campos teóricos que están interrelacionados, primero usamos la teoría de la plasticidad como base teórica de saber lo que le sucede a los materiales durante el proceso, la teoría de la forja para conocer el proceso y con ella obtenemos una primera solución. Usamos un software de diseño para conseguir la maqueta 3D de la máquina y posteriormente un software de elementos finitos y realizamos la simulación del problema real y obtenemos la solución más ajustada de la fuerza.

Conseguimos dar respuesta al problema por dos caminos diferentes uno teórico y otro mediante una simulación computacional, pero que convergen en cuanto a resultado.

Además durante todo el proceso del proyecto hemos ido diseñando, y lo hemos dejado trazado, un experimento práctico para conseguir otra vía más para obtener la fuerza que ejerce la máquina. En esta última vía de dar con la solución del problema planteado hemos diseñado un sistema que mide la fuerza de la máquina estampadora dependiendo de la deformación sufrida por la placa blanda tras un impacto de dicha máquina.

Realizar el experimento y conseguir la solución de forma práctica sería la mejora futura que se debería realizar con este proyecto, analizando y consiguiendo también el diseño correcto de la sujeción con los muelles para evitar el desplazamiento relativo placa blanda-punzón.

Este proyecto de ingeniería ha sido un reto personal muy bonito, ya que aunaba diferentes teorías y una variedad de conocimientos amplia para conseguir dar respuesta a una pregunta o problema por diferentes caminos, es la definición de ingeniería, ser capaz de discernir e identificar todas las teorías que intervienen en un proceso concreto para poder conseguir dar respuesta o solución al problema de la forma más óptima posible.



## 8 BIBLIOGRAFÍA

---

- [1]. Scientific Forming Technologies Corporation, DEFORM 3D System Manual
- [2]. Geoffrey Boothroyd, Peter Dewhurst and Winston A. Knight, *Product Design for Manufacture and Assembly*. Third Edition, ISBN: 9781420089271
- [3]. John A.Schey, *Procesos de Manufactura*. Tercera Edición, ISBN: 9701035739
- [4]. F. Paris, (2000) *Teoría de la Elasticidad*. Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.
- [5]. Rafael Picón Carrizosa (2002), *Mecánica de sólidos: Teoría de la plasticidad: 3er curso Ingeniería Aeronáutica*.



