



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Doble Máster en Profesorado de Educación Secundaria
Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas
de Idiomas y Máster Universitario en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER:

Localización en redes complejas

Presentado por:
María Calvo González

Dirigido por:
Juan Antonio Mesa López-Colmenar

Febrero 2020

Agradecimientos

Me gustaría dar las gracias en primer lugar a mi tutor, Juan Antonio Mesa, por su atención constante desde el primer día, su implicación en mi trabajo, su profesionalidad y su cercanía.

Quiero también agradecer mis padres su sacrificio, apoyo y preocupación hacia mi carrera, mis másteres y mis estudios en general. Pero sobre todo, me gustaría darles las gracias por ser todo un modelo a seguir, enseñando con el ejemplo el significado de la constancia, el trabajo y el tesón. Me gustaría dar las gracias a mi familia, en especial a mi tía Isabel, mi segunda madre. Debo agradecer su mera presencia en mis días, porque simplemente hace de cualquier día, un día mejor. Y finalmente dar las gracias a Carlos, por ser una pieza clave en todos los años universitarios, y por ofrecerme una ayuda desinteresada e infinita.

Abstract

During last decades, it has been taken an interest in the modeling of complex systems that could not be represented by classical graph theory. Such systems are characterized by a structure that cannot be reduced or simplified to a simple network, even by projection, without loss of information. This would be the case, for example, of the transportation network that is established in a certain city, where different means of transport (metro, bus, tram, ...) can coexist with different natures.

There are many complex representation models, but in this paper we are going to focus on multilayer graphs. A multilayer graph is a pair $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ where $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in M\}$ (with $M = \{1, \dots, m\}$ being the layer's index subset of \mathcal{M}) is a family of (directed or undirected, weighted or unweighted) graphs $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, called layers of \mathcal{M} , and

$$\mathcal{C} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in M, \alpha \neq \beta\}$$

is the set of interconnections between nodes of different layers G_α y G_β with $\alpha \neq \beta$.

In this structure we will study two types of location problems. On the one hand, we will see the network design problems where we have origin-destination demand pairs we must satisfy according to different imposed and objective conditions. We will provide a formulation of the three possibly most studied location problems: the Median Problem, the Center Problem and the Coverage Problem. On the other hand, we will see the point location problems, where we are not going to have origin-destination pairs to satisfy, but we will consider different objectives taking into account the nodes of the network, without distinguishing whether a node is the origin or the destination of a pair or not. In both types, we will see how beyond the most basic cases of the problem, the multilayer struc-

ture is required. Thus, it is not possible to make a projection of the multilayer network to transform it into a graph with the classic topology where to solve it, but a different topology of the problem is required.

Resumen

Durante las últimas décadas, se ha puesto un especial interés en el modelado de sistemas complejos que no han podido ser representados mediante la teoría de grafos clásica. Dichos sistemas se caracterizan por tener una estructura que no puede ser reducida o simplificada a un grafo simple, ni siquiera mediante una proyección, sin que eso conlleve pérdida de información. Éste sería el caso, por ejemplo, de la red de transporte que está establecida en una cierta ciudad, donde pueden coexistir distintos medios de transporte (metro, autobús, tranvía, ...) con distintas naturalezas.

Existen multitud de sistemas complejos, pero en el presente trabajo vamos a centrarnos en los grafos multicapa. Una red multicapa es un par $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ donde $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in M\}$ (con $M = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de índices de las capas de \mathcal{M}) es una familia de grafos (dirigidos o no, ponderados o no) $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, llamados las capas de \mathcal{M} , siendo

$$\mathcal{C} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in M, \alpha \neq \beta\}$$

el conjunto de interconexiones entre nodos de diferentes capas G_α y G_β con $\alpha \neq \beta$.

En esta estructura estudiaremos dos tipos de problemas de localización. Por un lado, veremos los problemas de diseño de redes en los que tenemos pares origen-destino que debemos satisfacer atendiendo a diferentes condiciones impuestas y objetivos. Proporcionaremos una formulación de los tres problemas de localización posiblemente más estudiados: el Problema de la mediana, el del centro y el de cobertura. Por otro lado, veremos los problemas puntuales de localización, en los que ya no habrá pares origen-destino que satisfacer, sino que consideraremos diferentes objetivos teniendo en cuenta los nodos del grafo, sin distinguir si un nodo es origen o destino de algún par. Tanto de un tipo como

de otro, veremos como más allá de los casos más básicos del problema, se requiere de la estructura multicapa, no pudiéndose realizar una proyección del grafo multicapa para transformarlo en un grafo unicapa, donde resolverlo, sino requiriendo una topología del problema diferente.

Índice general

1. Introducción	1
2. Conceptos previos	7
2.1. Definición de una red multicapa	7
2.2. Tipos de grafos multicapa	11
3. Problemas origen-destino	17
3.1. Problema de diseño de redes	17
3.2. Problemas de localización tipo origen-destino en grafos multicapa	19
3.2.1. Problema de la mediana	19
3.2.2. Problema del centro	22
3.2.3. Problema de cobertura	24
3.2.4. Problema restringido	26
4. Problemas puntuales	29
4.1. Problema puntual del centro	29
4.2. Problema puntual de la mediana	38
4.3. Problema puntual del p-centro	42
4.4. Problema puntual de la p-mediana	45
4.4.1. Problema restringido	51
4.5. Problema puntual de máxima cobertura con k vértices	53
4.5.1. Generalización del problema puntual de máxima cober- tura con k vértices	54
4.5.2. Problema restringido	56
4.6. Problema puntual con varios pesos para cada arista	57

Capítulo 1

Introducción

Si echamos un vistazo a la gran mayoría de los fenómenos que ocurren a nuestro alrededor (tanto los que influyen en nuestras relaciones sociales como aquellos que transforman el medio en el que vivimos, pasando por aquellos que afectan a nuestro propio funcionamiento biológico), es fácil darse cuenta de que no son nada más que el resultado de la organización dinámica de sistemas que involucran una gran cantidad de componentes o entidades básicas interactuando con otras, y siguiendo ciertos patrones.

Unos de los mayores esfuerzos de la física moderna es proporcionar representaciones apropiadas de esos sistemas y que se ajusten a ellos, donde los componentes son considerados como nodos de una red, y las interacciones son modeladas como enlaces de la misma red. De hecho, tener tal representación junto con un arsenal de herramientas matemáticas para extraer información, es la única forma que tenemos de *entender* el fenómeno observado, identificar las reglas y mecanismos que se esconden detrás, y posiblemente controlarlo y manipularlo de forma conveniente.

Durante los últimos cincuenta años, ha nacido un movimiento en la ciencia, conocido hoy bajo el nombre de *Teoría de redes complejas*. Éste involucra el esfuerzo interdisciplinario de algunos de nuestros mejores científicos en su propósito de aprovechar la disponibilidad actual del *big data* para extraer la representación óptima y definitiva de los sistemas complejos y sus mecanismos subyacentes. El principal objetivo es:

- La obtención de principios unificadores que pueden abarcar y describir (bajo reglas generales y universales) el alojamiento estructural que es identificado.
- El modelado de las dinámicas emergentes resultantes para explicar lo que realmente *vemos* y experimentamos al observar tales sistemas.

La aproximación tradicional de una red compleja a la naturaleza ha consistido mayormente en el caso en el que cada componente del sistema (o unidad elemental) está representada como un nodo de la red, y cada interacción entre dos unidades, como un número cuantificando el peso de la conexión correspondiente en el grafo (o enlace). Sin embargo, es fácil ver que tratar todos los enlaces de una red sin distinción alguna entre ellos es una restricción demasiado grande. En algunas ocasiones, la consecuencia puede ser que no se aprecien algunos detalles presentes en algunos problemas de la vida real, conduciendo incluso a descripciones incorrectas de algunos fenómenos reales.

En el ámbito de la sociología, una red social puede ser descrita como un conjunto de personas, con algún patrón de contactos o interacción entre ellos [19], [17]. Aunque a priori pueda resultarnos natural asumir que todas las conexiones o relaciones sociales entre miembros de una red tienen lugar en un mismo nivel, en realidad las relaciones reales entre miembros de una red tienen lugar dentro de diferentes grupos, o capas. Por lo tanto, estas no pueden modelarse adecuadamente con los modelos clásicos de redes. Por ejemplo, podemos considerar todos los usuarios de Facebook como nodos de un grafo, cuyas amistades se modelan como enlaces de la red. Sin embargo, dependiendo de la relación que exista entre los usuarios (compañeros de trabajo, parientes o pertenencia a una cierta sociedad o grupo de amigos), las conexiones entre ellos no pueden representarse en una misma capa y ser consideradas como iguales, sino en distintas capas por tener una distinta naturaleza. Lo mismo ocurriría con las redes de transporte, como es el caso de redes de metro o de transporte aéreo (ATN) (véase Figura 1.1). Incluso a la hora de describir varios medios de transporte que coexisten en una zona o ciudad (véase Figura 1.2). En particular, el estudio tradicional de las ATN se realiza representándolas como una red en una sola capa, donde los nodos representan aeropuertos y los enlaces, vuelos directos entre dos aeropuertos. Sin embargo, una representación más precisa se conseguiría considerando que cada aerolínea corresponde a

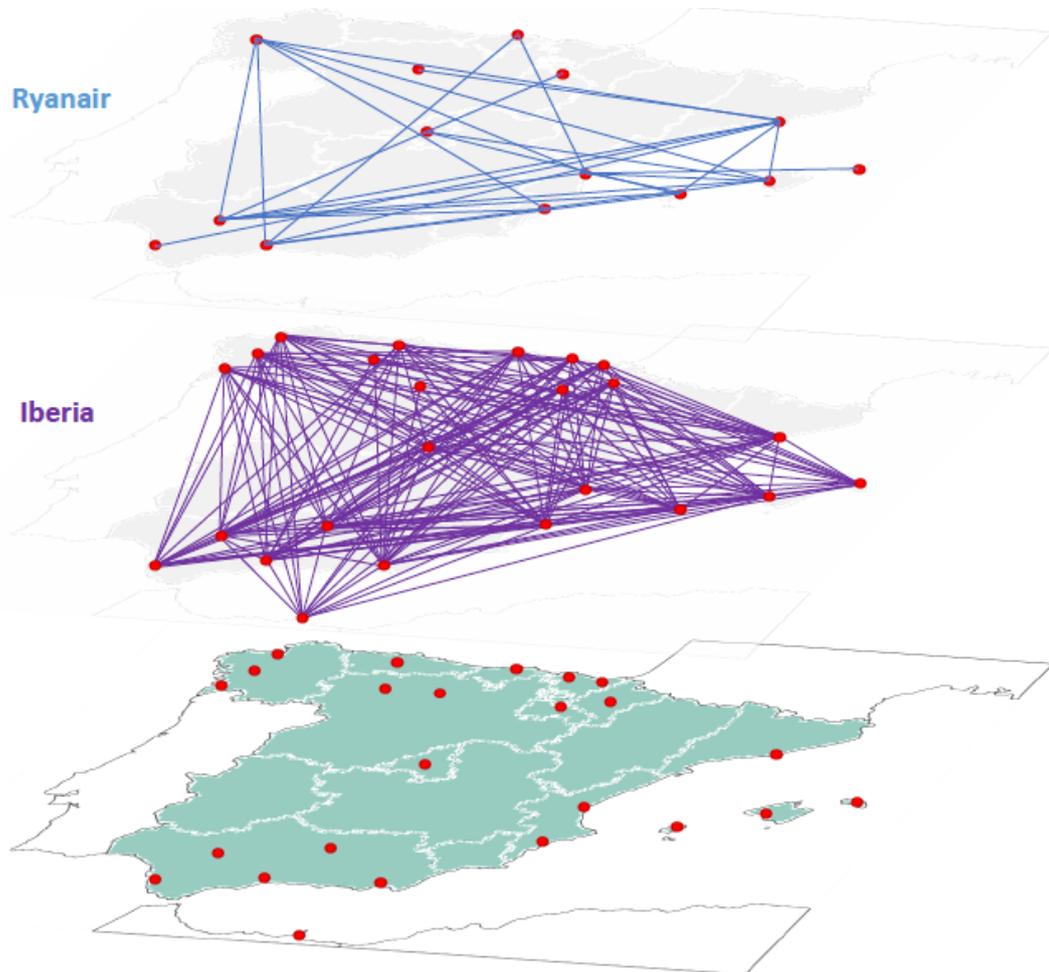


Figura 1.1: Ejemplo de la estructura multicapa de dos aerolíneas diferentes en España

una capa diferente, conteniendo dicha capa todas las conexiones de las que dispone la misma compañía. Supongamos por un momento que se quiere hacer predicciones en la propagación por el sistema de los retrasos en los horarios de los vuelos, o en los efectos de tales dinámicas en el movimiento de los pasajeros [20]. Sabemos que cada aerolínea sufre un costo considerable cada vez que un pasajero necesita ser reprogramado en un vuelo de otra compañía, además de intentar primero reprogramar al pasajero usando el resto de su propia red. Así,

la única forma de realizar predicciones fiables sería considerar la red como una estructura multicapa.

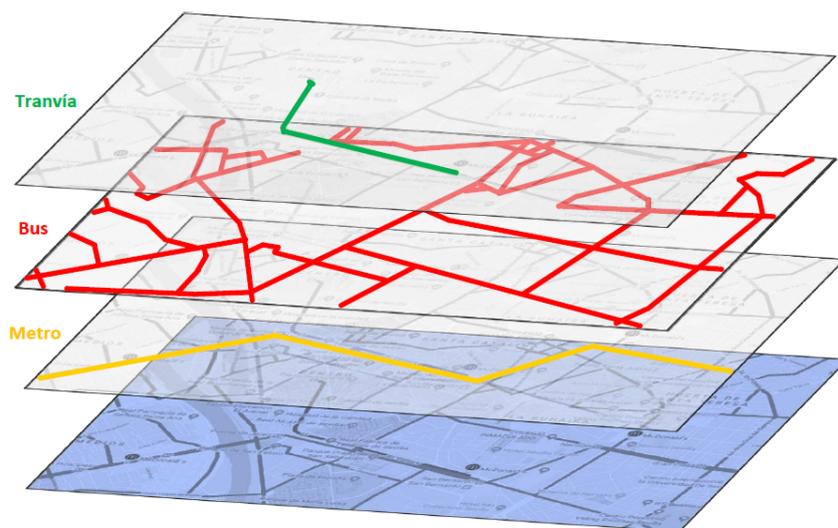


Figura 1.2: Ejemplo de la estructura multicapa de los diferentes medios de transporte en una ciudad

El tercer ejemplo pertenece a la rama de la biología, y se basa en el esfuerzo de los científicos por clasificar la importancia de un componente específico dentro de un sistema biológico. Por ejemplo, el *Caenorhabditis elegans* es un pequeño nematodo, del que se ha conseguido obtener una asociación completa de la red neuronal del *Caenorhabditis elegans*. En ella, las neuronas pueden ser conectadas o por una sinapsis química, o por una sinapsis eléctrica, y los dos tipos de conexiones tienen dinámicas completamente distintas. Así, para modelar dicha red, se requeriría un grafo multicapa (una para las sinapsis eléctricas y otra para las químicas) con dos capas y un nodo por cada neurona.

Estos tres ejemplos, entre otros tantos que podríamos ofrecer, explican las limitaciones que tienen las aproximaciones clásicas, y por qué en los últimos años de investigación en ciencia de redes se ha intentado generalizar la teoría

de redes tradicional mediante el estudio de las redes multicapa, es decir, grafos donde las componentes de un sistema son nodos, y varias capas distintas de conexiones deben tenerse en cuenta para una descripción apropiada de las interacciones entre unidades de la red, y/o el funcionamiento paralelo de todo el sistema.

Las redes multicapa constituyen la forma natural para describir sistemas interconectados mediante conexiones de distintas categorías: cada categoría es representada por una capa y el mismo nodo o entidad puede tener diferentes tipos de interacciones (es decir, diferente conjunto de vecinos en cada capa). Por ejemplo, en una red social, uno puede considerar varios tipos de relación: amistad, vecindad, parentesco, pertenencia a la misma sociedad cultural, compañeros de trabajo, etc.

Tal cambio de paradigma, que se denominó de formas dispares (redes multiplex, redes de redes, redes interdependientes, hipergrafos y muchos otros), condujeron a una serie de resultados inesperados y relevantes. Así podría esperarse que en los años venideros, este ámbito se expanda, atrayendo más y más atención y estimulando un nuevo movimiento en la investigación interdisciplinar.

En este trabajo vamos a centrarnos en el estudio de problemas de localización y transporte en este tipo de redes multicapa o grafos multicapa. El objetivo del trabajo es utilizar la estructura de las redes multicapa y detectar problemas de localización en esta estructura no reducibles a problemas en grafos unicapa. Para ello, vamos a estudiar dos tipos de problemas de localización. Por un lado, en el capítulo 3 encontraremos los problemas de diseño de redes en los que tenemos pares origen-destino que debemos satisfacer atendiendo a diferentes condiciones impuestas y objetivos. Proporcionaremos una formulación de los tres problemas de localización posiblemente más estudiados: el Problema de la mediana, el del centro y el de cobertura. Por otro lado, en el capítulo 4, veremos los que llamaremos problemas puntuales de localización, en los que ya no habra pares origen-destino que satisfacer, sino que consideraremos diferentes objetivos teniendo en cuenta los nodos del grafo, sin distinguir si un nodo es origen o destino de algún par. Estudiaremos así el Problema puntual de la

mediana y el Problema puntual del centro, además de sus generalizaciones: el Problema puntual de la p -mediana y el puntual de los p -centros. Finalmente, veremos el problema puntual de máxima cobertura con k vértices y una generalización del mismo. Tanto de un tipo como de otro, veremos como más allá de los casos más básicos del problema, se requiere de la estructura multicapa, no pudiéndose realizar una proyección del grafo multicapa para transformarlo en un grafo unicapa, donde resolverlo, sino requiriendo una topología del problema diferente.

Cabe comentar, finalmente, el problema restringido a zonas de Berman et al. (1991), pues guarda cierto parecido con algunos de los que se van a presentar en este trabajo. En [2] podemos observar así los problemas de la p -mediana y del p -centro sujeto a restricciones de tipo zona, donde las zonas pueden superponerse y donde se impone que al menos una mediana o un centro debe estar localizado en cada zona. Aunque a priori es lógico pensar que si se consideran las zonas como capas, o las capas como zonas, cabría la posibilidad de transformar un tipo de problema en otro, esto no puede estar más ajeno a la realidad. Los dos problemas de Berman no son una generalización de los problemas puntuales de la p -mediana y del p -centro, ni viceversa. Las zonas que se definen en [2] son geográficas, mientras que las capas pueden corresponderse a zonas geográficas o a cualquier característica mucho más general. Por el contrario, mientras que en [2], las zonas pueden solaparse, en los problemas en grafos multicapa, un punto o vértice no puede pertenecer a más de una capa.

Capítulo 2

Conceptos previos

2.1. Definición de una red multicapa

Comenzaremos definiendo qué es una red o grafo multicapa, y exponiendo qué notación vamos a usar.

Una red multicapa es un par $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ donde $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in M\}$ (con $M = \{1, \dots, m\}$ el conjunto de índices de las capas de \mathcal{M}) es una familia de grafos (dirigidos o no, ponderados o no) $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, llamados las capas de \mathcal{M} , siendo

$$\mathcal{C} = \{E_{\alpha\beta} \subseteq V_\alpha \times V_\beta; \alpha, \beta \in M, \alpha \neq \beta\}$$

el conjunto de interconexiones entre nodos de diferentes capas G_α y G_β con $\alpha \neq \beta$. Nos referiremos a los elementos de \mathcal{C} como *capas cruzadas*, y los elementos de cada E_α se llamarán *conexiones intracapas* de \mathcal{M} , mientras que a los elementos de cada $E_{\alpha\beta}$, con $\alpha \neq \beta$, los llamaremos *conexiones intercapa*.

Definimos además P_α como el conjunto de todos los puntos en todas las aristas intracapa de la capa $\alpha \in M$, y sea $P_{\alpha,\beta}$ el conjunto de todos los puntos en todas

las aristas intercapa entre las capas $\alpha \in M$ y $\beta \in M$. Sean:

$$P = \left(\bigcup_{\alpha \in M} P_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha, \beta \in M} P_{\alpha\beta} \right)$$

$$V = \bigcup_{\alpha \in M} V_\alpha$$

Para una mayor claridad, en la definición presentada, sustituiremos $C_{\alpha\beta}$ y C_α (las cuales hacen referencia a conexiones intracapa e intercapa) por $E_{\alpha\beta}$ y E_α cuando nuestros grafos sean no dirigidos y por lo tanto, las conexiones sean aristas, y por $A_{\alpha\beta}$ y A_α cuando nuestros grafos sean dirigidos y las conexiones sean arcos. En este trabajo vamos a trabajar principalmente con grafos no dirigidos, excepto en el Problema de diseño de redes, que serán dirigidos.

Podemos definir además unos ciertos pesos no negativos asociados a cada uno de los vértices y de las conexiones del grafo multicapa:

- r_{e^α} el peso asociado a la arista intracapa e^α , y $r_{e^{\alpha\beta}}$ el peso asociado a la arista intercapa $e^{\alpha\beta}$, que puede representar su longitud o distancia entre sus dos vértices extremos.
- h_i^α el peso asociado al vértice $v_i^\alpha \in V_\alpha$ de \mathcal{M} .

Para los problemas que vamos a considerar en adelante, vamos a requerir tener definida una distancia.

Asumimos que el grafo multicapa es encajable en el plano en cada una de las capas, donde la métrica es la euclídea. Suponemos además que las aristas y arcos pueden modelarse mediante un segmento de una recta. Así, la longitud $L_{(v_p^\alpha, v_q^\beta)}$, donde (v_p^α, v_q^β) es una arista intercapa o intracapa de \mathcal{M} , es la distancia euclídea $\|v_p^\alpha - v_q^\beta\|$ entre sus vértices extremos, y usando algoritmos de camino más corto podemos además computar la distancia entre cualquier par de nodos. Luego, en este modelo se cumple la desigualdad triangular.

Así, las longitudes de las aristas inducen una función distancia d tal que, para dos puntos $x, y \in P$,

$d(x, y)$ = distancia entre dos puntos x e y en \mathcal{M}
 = longitud de cualquier camino más corto en \mathcal{M} entre los puntos x e y

Si x e y están en la misma arista, entonces $d(x, y)$ coincide con la longitud de la subarista (x, y) . Podemos ver de forma inmediata, que P es un espacio métrico.

Ya que tenemos definida la distancia entre dos puntos x e y cualesquiera de \mathcal{M} , definiremos la distancia entre un punto x arbitrario y un vértice cualquiera del grafo multicapa. Sea así x un punto arbitrario de $e^\gamma = (v_p^\gamma, v_q^\gamma)$, y sea $v_i^\alpha \in V_\alpha$ un vértice cualquiera de \mathcal{M} . Entonces:

$$d(v_i^\alpha, x) = \text{mín}\{d(x, v_p) + d(v_p, v_i), d(x, v_q) + d(v_q, v_i)\} \quad (2.1)$$

Sea $d(v_p^\gamma, v_q^\gamma) = d_{e^\gamma} = L_{e^\gamma}$, y sea $d(v_p^\gamma, x) = x$. Por tanto, $d(v_q, x) = L_{e^\gamma} - x$. De esta manera, la ecuación (4.3) puede escribirse como:

$$d(v_i, x) = \text{mín}\{x + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha), L_{e^\gamma} - x + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha)\}. \quad (2.2)$$

Por otro lado, también nos será necesario definir una distancia entre dos vértices de un grafo cualesquiera. Para ello definiremos una matriz de distancias entre los vértices. Consideramos primero el conjunto de matrices $D^\alpha = [d_{ij}^\alpha]$, con $\alpha \in M$, de dimensión $|V_\alpha| \times |V_\alpha|$, donde:

$$d_{ij}^\alpha = \begin{cases} d(v_i^\alpha, v_j^\alpha), & \text{para } v_i^\alpha, v_j^\alpha \in V_\alpha, \text{ con } i \neq j \\ d(v_i^\alpha, v_j^\alpha) = 0, & \text{para } v_i^\alpha, v_j^\alpha \in V_\alpha, \text{ con } i = j \end{cases}$$

Estas son las matrices de distancias que se pueden definir entre los vértices de cada una de las capas, teniendo en cuenta no solo las aristas de esa capa, sino todas las de \mathcal{M} a la hora de calcular el camino más corto. Sin embargo, también es posible definir distancias entre vértices de distintas capas. Para ello, consideramos el conjunto de matrices $D^{\alpha\beta} = [d_{ij}^{\alpha\beta}]$, con $\alpha, \beta \in M$, de dimensión $|V_\alpha| \times |V_\beta|$, donde:

$$d_{ij}^{\alpha\beta} = d(v_i^\alpha, v_j^\beta), \text{ para } v_i^\alpha \in V_\alpha, v_j^\beta \in V_\beta$$

A partir de estos dos conjuntos de matrices podemos construir la matriz de

distancias \mathcal{D} de nuestro grafo multicapa \mathcal{M} , de orden $n = |V|$. \mathcal{D} será una matriz por bloques de la siguiente forma:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D^1 & D^{12} & \dots & D^{1m} \\ D^{21} & D^2 & \dots & D^{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{m1} & D^{m2} & \dots & D^m \end{bmatrix}$$

Es decir, \mathcal{D} tendrá una matriz de distancias del tipo D^α , con $\alpha \in M$, en sus bloques de la diagonal, y una matriz del tipo $D^{\alpha\beta}$ en el resto de bloques.

También es conveniente señalar que a priori podría parecernos que cualquier grafo multicapa podría transformarse fácilmente en un grafo unicapa. Esto haría que perdiera el sentido hablar de este tipo de estructura en grafos, pudiéndose aplicar los problemas tradicionales de localización en redes a cualquier variante de problema de localización que pudiera tener lugar en un grafo multicapa. (véase Figura 2.1)

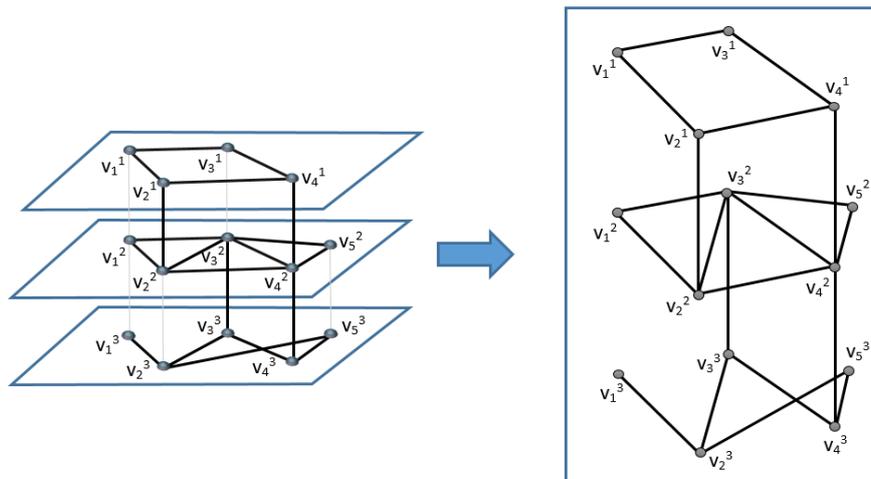


Figura 2.1: Transformación de un grafo multicapa a un grafo unicapa

Aunque comenzaremos viendo este tipo de problemas, pasaremos a continuación a variantes para las cuales esta estructura multicapa juega un papel fundamental e indispensable para su planteamiento, sentido y resolución.

2.2. Tipos de grafos multicapa

Es importante señalar que el concepto de red multicapa es muy general, y podemos diferenciar diferentes tipos de redes con distintas estructuras y características:

- Redes multiplex:** Un grafo multiplex [18] \mathcal{M} con m capas es un conjunto de capas $\{G_\alpha, \alpha \in M = \{1, \dots, m\}\}$, donde cada capa es un grafo dirigido o no $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, con $V_\alpha = \{v_1, \dots, v_N\}$. Como todas las capas tienen los mismos nodos, este tipo de grafo puede interpretarse como uno multicapa tomando $V_1 = \dots = V_m = V$, y $E_{\alpha\beta} = \{(v, v), v \in V\}$ para cada $1 \leq \alpha \neq \beta \leq m$.

En la Figura 2.2, podemos observar un ejemplo de grafo multiplex de cuatro vértices y tres capas. Nótese que las aristas intercapa que van de la primera capa a la tercera están superpuestas con las que van de la primera a la segunda y las que van de la segunda a la tercera.

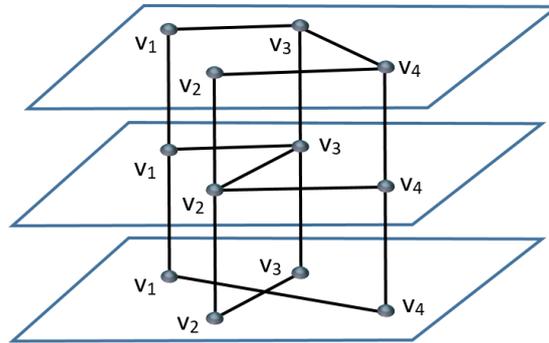


Figura 2.2: Ejemplo de grafo multiplex.

- Redes temporales:** Un grafo temporal [11] $(G(t))_{t=1}^T$ puede representarse como un grafo multicapa con un conjunto de capas $\{G_1, \dots, G_T\}$, donde $G_t = G(t)$, $E_{\alpha\beta} = \emptyset$ si $\beta \neq \alpha + 1$, siendo

$$E_{\alpha, \alpha+1} = \{(v, v), v \in V_\alpha \cap V_{\alpha+1}\}$$

Nótese que aquí t es un entero.

En la Figura 2.3, tenemos un ejemplo de asociación de un grafo temporal con un grafo multicapa. En la parte de la derecha, podemos ver que para tiempos $t = 1, 2, 3$, un grafo distinto caracteriza la estructura de interacciones entre las constituyentes del sistema. En la parte de la izquierda, vemos la representación correspondiente como un grafo multicapa donde cada instante de tiempo se asocia a una capa distinta..

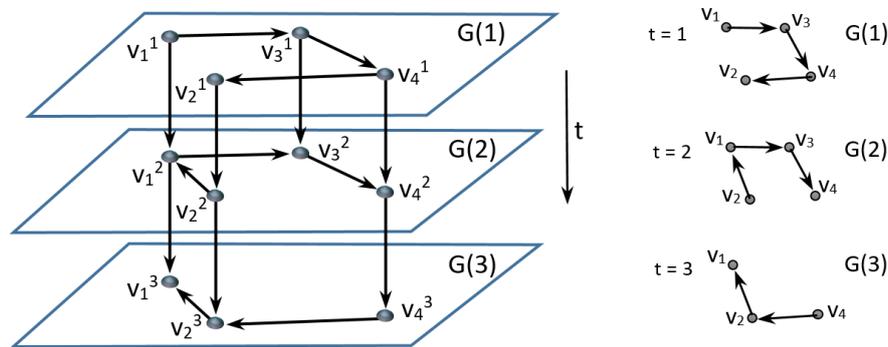


Figura 2.3: Ejemplo de asociación de un grafo temporal con un grafo multicapa.

- Redes interconectadas:** Si consideramos una familia de grafos $\{G_1, \dots, G_L\}$ que interactúan, éstos pueden modelarse como un grafo multicapa de capas $\{G_1, \dots, G_L\}$, cuyas capas cruzadas $E_{\alpha\beta}$ se corresponden con las interacciones entre G_α y G_β [6].

En la Véase la Figura 2.4, podemos observar una transformación de dos grafos interconectados en un grafo multicapa. Cada grafo coloreado de un color distinto en la parte de la izquierda se corresponde con una capa diferente de la parte de la derecha.

- Redes multidimensionales:** Formalmente, un multigrafo de aristas etiquetadas o grafo multidimensional [4] es una tripla $G = (V, E, D)$ donde

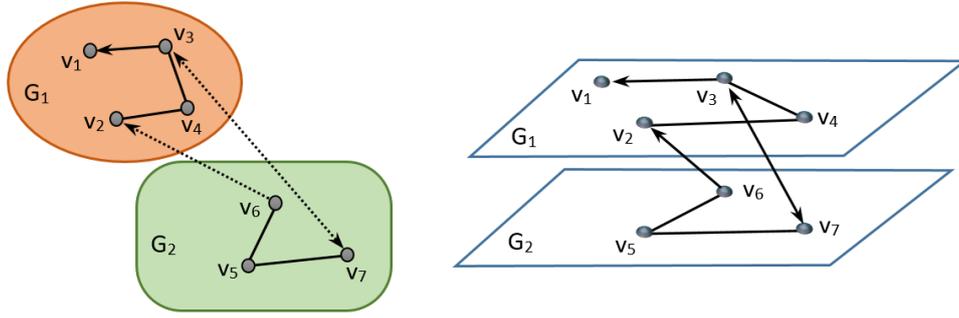


Figura 2.4: Transformación de dos grafos interconectados en un grafo multicapa.

V es un conjunto de vértices o nodos, D es un conjunto de etiquetas que representan las dimensiones, y E es un conjunto de aristas etiquetadas, es decir,

$$E = \{(u, v, d), u, v \in V, d \in D\}$$

Se asume que, dado un par de nodos $u, v \in V$ y una etiqueta $d \in D$, solo existe una arista (u, v, d) . Además, si el modelo considerado es un grafo dirigido, las aristas (u, v, d) y (v, u, d) son distintas. Luego, dado $|D|$, cada par de nodos en G puede estar conectado por a lo sumo $|D|$ posibles aristas. Cuando sea necesario, es posible considerar pesos para las aristas, dejando éstas de ser triplas para ser consideradas como 4-tuplas (u, v, d, w) , siendo w un número real representando el peso de la relación entre $u, v \in V$, y etiquetada con $d \in D$. Un grafo multidimensional $G = (V, E, D)$ puede modelarse como un grafo multiplex (y por tanto, como un grafo multicapa), asociando cada etiqueta a una capa. Concretamente, G puede ser asociado a una red multicapa de capas $\{G_1, \dots, G_{|D|}\}$, donde para cada $\alpha \in D$, $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$, siendo $V_\alpha = V$ y

$$E_\alpha = \{(u, v) \in V \times V, (u, v, d) \in E \text{ y } d = \alpha\}$$

$$E_{\alpha\beta} = \{(v, v), v \in V\} \text{ para cada } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq |D|$$

En la Figura 2.5, podemos observar una transformación de un grafo multidimensional en un grafo multicapa, con $D = \{\text{rojo, amarillo, verde}\}$ y $d \in D$ asociado a cada arista del grafo. Podemos ver como en el grafo multicapa correspondiente, cada etiqueta de D (es decir, cada color en

este caso) representa una capa. Nótese que las aristas intercapa que van de la capa con las etiquetas rojas a la de las verdes están superpuestas con las que van de la de las rojas a la capa de las amarillas y las que van de la capa de las amarillas a la capa de las verdes.

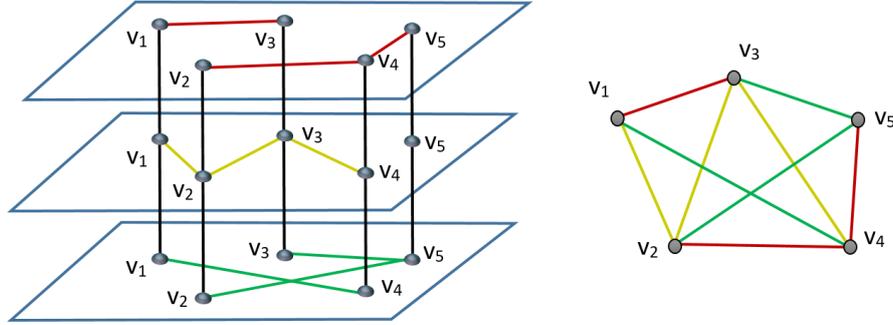


Figura 2.5: Transformación de un grafo multidimensional en un grafo multicapa.

- **Redes multinivel:** Sea $G = (V, E)$ un grafo. Una red o grafo multinivel [5] es una tripla $\mathbf{M} = (V, E, \mathcal{S})$, donde $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_p\}$ es una familia de subgrafos $S_j = (V_j, E_j)$, con $j = 1, \dots, p$ de G tal que

$$V = \bigcup_{j=1}^p V_j, E = \bigcup_{j=1}^p E_j$$

El grafo G es el grafo proyección de \mathbf{M} , y cada subgrafo $S_j \in \mathcal{S}$ se le llama *slice* (en castellano “rebanada” o “rodaja”) de un grafo multinivel \mathbf{M} . Evidentemente, cada grafo multinivel $\mathbf{M} = (V, E, \mathcal{S})$ puede interpretarse como una red multicapa con capas $\{S_1, \dots, S_p\}$ y capas cruzadas

$$E_{\alpha\beta} = \{(v, v), v \in V_\alpha \cap V_\beta\}$$

para cada $1 \leq \alpha \neq \beta \leq p$. Es directo verificar que cada grafo multiplex es un grafo multinivel, y cada grafo multinivel $\mathbf{M} = (V, E, \mathcal{S})$ es un grafo multiplex si y solo si $V_\alpha = V_\beta, \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, p\}$.

En la Figura 2.6 tenemos un ejemplo de un grafo multinivel con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, donde cada capa contiene un subgrafo S_i , con $i = 1, 2, 3$. Nótese que las aristas intercapa que van de S_1 a S_3 están

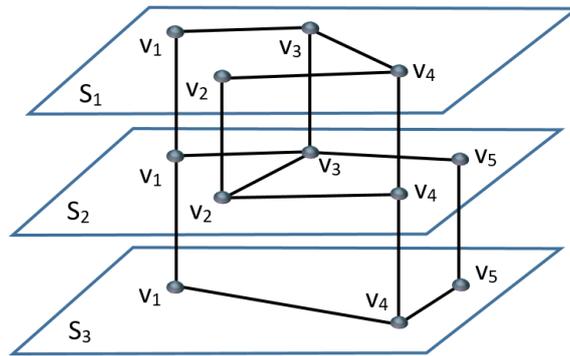


Figura 2.6: Ejemplo de un grafo multinivel.

superpuestas con las que van de S_1 a S_2 y las que van de S_2 a S_3 .

- Hipergrafos:** Un hipergrafo [1] es un par $\mathcal{H} = (V, H)$, donde V es un conjunto de nodos no vacío y $H = \{H_1, \dots, H_p\}$ es una familia de subconjuntos no vacíos de V , cada uno de ellos llamado hiperenlace de \mathcal{H} . Ahora, si $G = (V, E)$ es un grafo, una hiperestructura $S = (V, E, H)$ es una tripla formada por el conjunto de vértices V , el conjunto de aristas E y el conjunto de hiperaristas H . Si $\mathcal{H} = (V, H)$ es un hipergrafo, puede modelarse como una red o grafo multicapa, tal que para cada hiperenlace

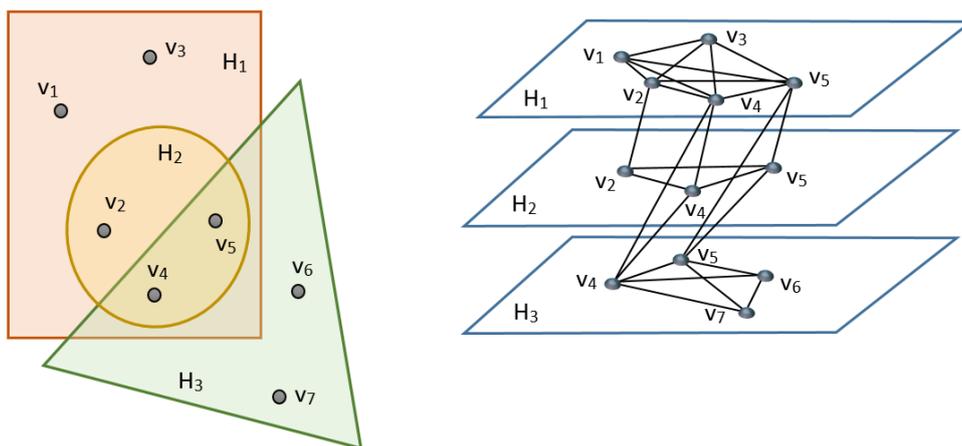


Figura 2.7: Ejemplo de una transformación de un hipergrafo con tres hiperaristas en un grafo multicapa.

$h = (v_1, \dots, v_k) \in H$ definimos una capa G_h que será un grafo completo de nodos v_1, \dots, v_k , y las capas cruzadas son

$$E_{\alpha\beta} = \{(v, v), v \in V_\alpha \cap V_\beta\}$$

En el ejemplo de (2.7), tenemos una transformación de un hipergrafo con tres hiperaristas en un grafo multicapa. El conjunto de nodos de la parte de la izquierda define tres hiperaristas, H_1, H_2 y H_3 , cada una de ellas asociada con una capa en la cual hay un grafo completo formado a partir de sus nodos correspondientes.

En este trabajo daremos resultados generales, sin aplicarlos a ningún tipo concreto de red multicapa. Sin embargo, podrían aplicarse a cualquiera de ellas. Bastaría considerar el tipo de grafo que deseemos, y aplicar el procedimiento en cuestión.

Capítulo 3

Problemas origen-destino

Hoy en día, los problemas de diseño de redes han adquirido una importancia innegable, sobre todo en el mundo empresarial. La competitividad entre empresas las obliga reducir los costes tanto como les sea posible, ideando estrategias para ello, e intentar satisfacer toda la demanda que esté a su alcance.

En este capítulo, vamos a centrarnos en un tipo concreto de problemas, los que vamos a llamar problemas del tipo origen-destino. Su nombre no es azaroso, sino que viene de que vamos a tener un grafo multicapa, y un conjunto de pares, donde sus componentes son vértices de nuestro grafo. El primer elemento del par se considerará el origen, y se interpretará como aquellos nodos o vértices de nuestro grafo que simbolizan unidades desde las cuales sale un flujo de personas, vehículos u otros. El segundo elemento del par se considerará el destino, y, como su nombre indica, es el destino de las personas, vehículos u otros que salieron de sus orígenes.

3.1. Problema de diseño de redes

A continuación, veremos la formulación de un problema de diseño de redes de las conexiones entre las capas de una red multicapa en la que en cada capa hay una red dada, y un subconjunto de nodos múltiples.

Sea así:

- Un grafo multicapa $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$
- Una capacidad K_{a^α} y un coste C_{a^α} asociados a cada conexión intracapa a^α , donde $a^\alpha \in A_\alpha$, siendo $a^\alpha = (u^\alpha, v^\alpha)$ un arco, con $\alpha \in \{1, \dots, m\}$.
- Una capacidad $K_{a^{\alpha\beta}}$ y un coste $C_{a^{\alpha\beta}}$ asociados a cada conexión intercapa $a^{\alpha\beta}$, donde $a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}$, siendo $a^{\alpha\beta} = (u^\alpha, v^\beta)$ un arco, con $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$.
- Un conjunto de pares origen-destino W , donde:
 $W = \{w = (\sigma_w^\alpha, \vartheta_w^\beta), \text{ con } \sigma_w^\alpha \in X^\alpha, \vartheta_w^\beta \in X^\beta, \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}\}$
- Una cantidad R_w de producto entre σ_w^α y ϑ_w^β , relativo a w , donde $w = (\sigma_w^\alpha, \vartheta_w^\beta)$ (pasajeros, tráfico,...)
- Un conjunto factible S de restricciones laterales.

Las variables de nuestro problema serán las siguientes:

- Variables de diseño: $x_{a^\alpha}, x_{a^{\alpha\beta}}, x_{v^\alpha} \in \{0, 1\}$, con $\alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}$.
- Variables de flujo: $f_{a^\alpha}, f_{a^{\alpha\beta}}, f_{v^\alpha} \in [0, 1]$, con $\alpha \in \{1, \dots, m\}$.

Nótese, además, que $\delta^+(v^\alpha)$ representa el conjunto de arcos entrantes en el nodo v en la capa α , mientras que $\delta^-(v^\alpha)$ representa el conjunto de arcos salientes del mismo. Luego, la formulación sería la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \phi(f, x) \\
& \text{s.a} \quad \left(\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^{\beta\alpha}}^w \right) - \\
& \quad \left(\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^{\alpha\beta}}^w \right) = \begin{cases} R_w & \text{si } v = \sigma_w^\alpha \\ -R_w & \text{si } v = \vartheta_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
& (f, y) \in S \\
& f_{a^\alpha} = \sum_{w \in W} f_{a^\alpha}^w \leq K_{a^\alpha} x_{a^\alpha} \\
& f_{a^{\alpha\beta}} = \sum_{w \in W} f_{a^{\alpha\beta}}^w \leq K_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}}
\end{aligned}$$

A continuación, explicaremos en detalle las restricciones:

- La primera restricción es una restricción de conservación de flujo. En el primer miembro, observamos una resta de dos expresiones, cada una de ellas constituida por una suma de la cantidad de flujo saliente (en la primera expresión, entrante en la segunda) en un nodo a través de conexiones

intracapa y la cantidad de flujo saliente (en la primera expresión, entrante en la segunda) en dicho nodo a través de conexiones intercapa. Así, si le restamos la cantidad total de flujo (relativo al par origen-destino w) que entra en v^α a la cantidad total de flujo saliente (también relativo a dicho par origen-destino), esto debe dar como resultado la cantidad de producto R_w si v^α es el nodo origen de w . Si fuera el nodo destino, el resultado de la resta sería $-R_w$, y si no es ni el origen ni el destino, el resultado debe ser 0, es decir, debe salir todo lo que entra en dicho nodo.

- La segunda restricción es una restricción lateral expresada de forma genérica.
- Las dos últimas restricciones indican que la suma de todos los flujos que atraviesan un arco (tanto si este representa una conexión intercapa o intracapa) debe ser menor o igual a la capacidad de tal arco en el caso en el que se construya en él. Si no se construye, la suma de todos los flujos que atraviesan el arco debe ser 0.

3.2. Problemas de localización tipo origen-destino en grafos multicapa

Los tres problemas de localización en redes más famosos y posiblemente, los más estudiados, son el problema de la mediana, el del centro y el de cobertura. En esta sección vamos a estudiar cómo podrían formularse estos problemas para grafos multicapa, en los cuales tenemos unos ciertos pares origen-destino que deben satisfacerse en la medida de lo posible.

3.2.1. Problema de la mediana

Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ un grafo multicapa, con un peso d_{a^α} asociado a cada conexión intracapa $a^\alpha \in A_\alpha$, con $\alpha \in 1, \dots, M$, y un peso $d_{a^{\alpha\beta}}$ asociado a cada conexión intercapa $a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}$, con $\alpha, \beta \in 1, \dots, M$. Sea W un conjunto de pares origen-destino, donde:

$$W = \{w = (o_w^\alpha, d_w^\beta), \text{ con } o_w^\alpha \in X^\alpha, d_w^\beta \in X^\beta, \alpha, \beta \in \{1, \dots, M\}\}$$

Si consideramos que un peso asociado a un arco es la distancia a la que se

encuentran los vértices de sus extremos, podemos plantear el problema de encontrar, en el grafo \mathcal{M} , las conexiones intercapa e intracapa que debo tomar para minimizar la suma de las distancias que recorren todos los pares para ir de sus orígenes a sus respectivos destinos. Las variables de nuestro problema serían las siguientes:

$$x_{a^\alpha}^w = \begin{cases} 1 & \text{si } a^\alpha \text{ es usada por } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^{\alpha\beta}}^w = \begin{cases} 1 & \text{si } a^{\alpha\beta} \text{ es usada por } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } a^\alpha \text{ es usada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^{\alpha\beta}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a^{\alpha\beta} \text{ es usada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cabe señalar que el hecho de que se use el arco a^α (o el arco $a^{\alpha\beta}$) puede interpretarse en un ejemplo concreto de diseño de redes como que debe construirse el elemento necesario asociado al arco a^α (o el arco $a^{\alpha\beta}$) que permita el paso de un extremo a otro del arco.

La formulación del problema estaría compuesta por la siguiente función objetivo y por ciertas restricciones, además de las restricciones que aparecían en el problema de diseño de redes que estudiamos en la sección anterior:

$$\min \left\{ \sum_{w \in W} \left[\sum_{\alpha \in M} \sum_{a^\alpha \in A_\alpha} d_{a^\alpha} x_{a^\alpha}^w + \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}} d_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}}^w \right] + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha \in M} \sum_{a^\alpha \in A_\alpha} C_{a^\alpha} x_{a^\alpha} + \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}} C_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}} \right\} \quad (3.1)$$

$$\text{s.a.} \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} x_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} x_{a^{\beta\alpha}}^w \right] - \\ \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} x_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} x_{a^{\alpha\beta}}^w \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } v = \mathbf{o}_w^\alpha \\ -1 & \text{si } v = \mathbf{d}_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_{a^\alpha} \geq x_{a^\alpha}^w, \quad \forall w \in W, \forall a^\alpha \in A_\alpha, \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad (3.3)$$

$$x_{a^{\alpha\beta}} \geq x_{a^{\alpha\beta}}^w, \quad \forall w \in W, \forall a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\} \quad (3.4)$$

$$\left[\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^{\beta\alpha}}^w \right] - \\ (3.5)$$

$$\left[\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^{\alpha\beta}}^w \right] = \begin{cases} R_w & \text{si } v = \mathbf{o}_w^\alpha \\ -R_w & \text{si } v = \mathbf{d}_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$f_{a^\alpha} = \sum_{w \in W} f_{a^\alpha}^w \leq K_{a^\alpha} x_{a^\alpha} \quad (3.7)$$

$$f_{a^{\alpha\beta}} = \sum_{w \in W} f_{a^{\alpha\beta}}^w \leq K_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}} \quad (3.8)$$

Veamos en detalle qué significan estas expresiones.

- Función objetivo (3.1): En la parte del sumatorio en $w \in W$, lo que se encuentra entre corchetes no es más que la distancia total recorrida por un par w . A la suma de todas las distancias totales recorridas por todos los pares w se le añaden dos sumandos, que conforman el coste total de construir los arcos intracapa necesarios, y el coste total de construir los arcos intercapa necesarios.
- Restricción (3.2): Con esta restricción imponemos que los caminos tomados para ir de los orígenes a sus destinos sean continuos, que de cada origen solo salga un camino, y que a cada destino solo llegue un camino.

- Restricciones (3.3): Con estas restricciones obligamos a que si para algún w , $x_{a^\alpha}^w$ vale uno, x_{a^α} vale uno, y esto debe cumplirse en todo arco intracapa.
- Restricciones (3.4): La explicación es análoga a la realizada para las restricciones (3.3), pero para arcos intercapa.
- Restricciones (3.6 - 3.8): Son las que proceden del Problema de diseño de redes.

Nótese que en el caso de tener grafos no dirigidos, la expresión sería la misma sustituyendo arcos por aristas.

3.2.2. Problema del centro

Supongamos que tenemos las mismas condiciones que en el apartado anterior. Sin embargo, ahora queremos encontrar qué conexiones intercapa e intracapa tomar para que se minimice el máximo de las distancias que recorren los pares para ir de sus orígenes a sus respectivos destinos. Las variables de nuestro problema serían las mismas que las del apartado anterior:

$$x_{a^\alpha}^w = \begin{cases} 1 & \text{si } a^\alpha \text{ es usado por } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^{\alpha\beta}}^w = \begin{cases} 1 & \text{si } a^{\alpha\beta} \text{ es usado por } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } a^\alpha \text{ es usada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^{\alpha\beta}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a^{\alpha\beta} \text{ es usada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como ocurría con el problema de la mediana, la formulación del problema del centro estaría compuesta por la siguiente función objetivo y por ciertas restricciones, además de las restricciones que aparecían en el problema de diseño de

redes que estudiamos anteriormente:

$$\min \left\{ \max_{w \in W} \left[\sum_{\alpha \in M} \sum_{a^\alpha \in A_\alpha} d_{a^\alpha} x_{a^\alpha}^w + \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}} d_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}}^w \right] + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha \in M} \sum_{a^\alpha \in A_\alpha} C_{a^\alpha} x_{a^\alpha} + \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}} C_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}} \right\} \quad (3.9)$$

$$\text{s.a.} \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} x_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} x_{a^{\beta\alpha}}^w \right] - \\ \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} x_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} x_{a^{\alpha\beta}}^w \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } v = \mathfrak{o}_w^\alpha \\ -1 & \text{si } v = \mathfrak{d}_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_{a^\alpha} \geq x_{a^\alpha}^w, \quad \forall w \in W, \forall a^\alpha \in A_\alpha, \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad (3.3)$$

$$x_{a^{\alpha\beta}} \geq x_{a^{\alpha\beta}}^w, \quad \forall w \in W, \forall a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\} \quad (3.4)$$

$$\left[\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^{\beta\alpha}}^w \right] - \\ \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^{\alpha\beta}}^w \right] = \begin{cases} R_w & \text{si } v = \mathfrak{o}_w^\alpha \\ -R_w & \text{si } v = \mathfrak{d}_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$f_{a^\alpha} = \sum_{w \in W} f_{a^\alpha}^w \leq K_{a^\alpha} x_{a^\alpha} \quad (3.7)$$

$$f_{a^{\alpha\beta}} = \sum_{w \in W} f_{a^{\alpha\beta}}^w \leq K_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}} \quad (3.8)$$

La expresión que se encuentra entre paréntesis en nuestra función objetivo vuelve a representar la distancia total recorrida por un par w . Además, las restricciones son las mismas que las del problema de la mediana. Nótese también que, en el caso de tener grafos no dirigidos, la expresión sería la misma sustituyendo arcos por aristas.

El problema de centro tipo origen-destino que aparece en este trabajo está muy relacionado con un caso concreto del que se puede observar en [16]. Aquí, Schmidt y Schöbel se plantean el problema de encontrar una subred en un grafo dado, de una longitud menor o igual a una longitud máxima dada, tal que se

minimice la longitud del camino más largo de todos los que van de sus orígenes a sus destinos respectivos en cada par origen-destino. El caso concreto con el que se relaciona nuestro problema es con el que surge al tomar como longitud máxima una lo suficientemente grande como para que la longitud no constituya una restricción, como por ejemplo, infinito. Sin embargo, la estructura y el cariz del problema son distintos, pues si quisieramos añadir restricciones distinguiendo capas, ésto solo sería posible considerando nuestro problema. Nótese, finalmente, que tanto el problema propuesto por Schmidt y Schöbel como el estudiado en esta sección son fuertemente NP -duros.

3.2.3. Problema de cobertura

Supongamos que tenemos las mismas condiciones que en los dos apartados anteriores. Sin embargo, ahora queremos maximizar el número de pares origen destino que están cubiertos, es decir, aquellos que recorren una distancia menor o igual a un cierto r_0 dado. A r_0 se le denomina radio o umbral máximo. Las variables de nuestro problema serán las siguientes:

$$x_{a^\alpha}^w = \begin{cases} 1 & \text{si } a^\alpha \text{ es usado por } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^{\alpha\beta}}^w = \begin{cases} 1 & \text{si } a^{\alpha\beta} \text{ es usado por } w \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_w = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ está cubierto.} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{si } a^\alpha \text{ es usada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$x_{a^{\alpha\beta}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a^{\alpha\beta} \text{ es usada} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como ocurría con los dos problemas anteriores, la formulación del problema de cobertura estaría compuesta por la siguiente función objetivo y por ciertas restricciones, además de las restricciones que aparecían en el problema de diseño

de redes que estudiamos anteriormente:

$$\text{máx} \left\{ \sum_{w \in W} y_w - \left[\sum_{\alpha \in M} \sum_{a^\alpha \in A_\alpha} C_{a^\alpha} x_{a^\alpha} + \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}} C_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}} \right] \right\} \quad (3.10)$$

$$\text{s.a} \sum_{\alpha \in M} \sum_{a^\alpha \in A_\alpha} d_{a^\alpha} x_{a^\alpha}^w + \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}} d_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}}^w \leq r_0 y_w \quad (3.11)$$

$$\left[\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} x_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} x_{a^{\beta\alpha}}^w \right] - \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} x_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} x_{a^{\alpha\beta}}^w \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } v = \mathfrak{o}_w^\alpha \\ -1 & \text{si } v = \mathfrak{d}_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_{a^\alpha} \geq x_{a^\alpha}^w, \quad \forall w \in W, \forall a^\alpha \in A_\alpha, \forall \alpha \in \{1, \dots, m\} \quad (3.3)$$

$$x_{a^{\alpha\beta}} \geq x_{a^{\alpha\beta}}^w, \quad \forall w \in W, \forall a^{\alpha\beta} \in A_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\} \quad (3.4)$$

$$\left[\sum_{a^\alpha \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\beta\alpha} \in \delta^+(v^\alpha)} f_{a^{\beta\alpha}}^w \right] - \left[\sum_{a^\alpha \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^\alpha}^w + \sum_{a^{\alpha\beta} \in \delta^-(v^\alpha)} f_{a^{\alpha\beta}}^w \right] = \begin{cases} R_w & \text{si } v = \mathfrak{o}_w^\alpha \\ -R_w & \text{si } v = \mathfrak{d}_w^\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$f_{a^\alpha} = \sum_{w \in W} f_{a^\alpha}^w \leq K_{a^\alpha} x_{a^\alpha} \quad (3.7)$$

$$f_{a^{\alpha\beta}} = \sum_{w \in W} f_{a^{\alpha\beta}}^w \leq K_{a^{\alpha\beta}} x_{a^{\alpha\beta}} \quad (3.8)$$

La función objetivo busca maximizar la cantidad de pares cubiertos minimizando el coste asociado a los arcos usados, tanto intracapa (primer sumando de la expresión entre corchetes de la función objetivo) como intercapa (segundo sumando de esa misma expresión). Por otro lado, la restricción (3.11) obliga a que, cuando y_w es cero, es decir, cuando no forma parte del conjunto de cobertura, entonces la distancia recorrida por el par w es obligadamente 0. Sin embargo, cuando y_w vale uno, la distancia recorrida debe ser menor que r_0 . El resto de restricciones coinciden con las que aparecían en el Problema de la mediana y el Problema del centro.

De nuevo, al igual que en los dos problemas anteriores, bastaría sustituir arcos

por aristas para obtener la formulación para el caso de grafos no dirigidos.

3.2.4. Problema restringido

En las secciones anteriores, hemos estado utilizando los objetivos de los problemas de localización más típicos en el diseño de redes en grafos multicapa. A continuación vamos a ver restricciones necesarias para formular variaciones de estos problemas donde la estructura multicapa juega un papel fundamental.

Centrémonos por ejemplo en el problema de cobertura. Consideremos un grafo multicapa en el que tenemos un conjunto de pares origen destino que queremos satisfacer. Sin embargo, puede que por las propias características de nuestro grafo, a la hora de resolver el problema, todos los pares cubiertos tuvieran sus nodos en las capas superiores, sin cubrirse los pares de las capas inferiores. Para evitar esto, bastaría añadir una restricción que obligara a que cada capa tuviera que contener al menos un cierto número de nodos origen o destino que estén cubiertos.

Una primera opción sería obligar a que cada capa tuviera que tener al menos una cantidad fijada de antemano de nodos destino cubiertos. Para ello, basta considerar el vector M -dimensional γ , cuyas componentes son constantes, y el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} z_i^\alpha \geq \gamma_\alpha, \quad \forall \alpha = 1, \dots, M \quad (3.12)$$

donde:

$$z_i^\alpha = \begin{cases} y_w & \text{si } v_i^\alpha = d_w^\alpha, \text{ con } w = (o_w^\alpha, d_w^\beta) \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, M\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

También podemos considerar obligar a que cada capa tuviera al menos una cantidad fijada de antemano de nodos origen. De igual manera que en el caso anterior, consideramos el vector M -dimensional δ , cuyas componentes son constantes, y el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} t_i^\alpha \geq \delta_\alpha, \forall \alpha = 1, \dots, M \quad (3.13)$$

donde:

$$t_i^\alpha = \begin{cases} y_w & \text{si } v_i^\alpha = \mathbf{o}_w^\alpha, \text{ con } w = (\mathbf{o}_w^\alpha, \mathbf{d}_w^\beta) \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, M\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, una segunda opción mucho más útil, podría ser una restricción que obligara a que el número de nodos destino cubiertos en cada capa debe ser el mismo, y además, todos los nodos cubiertos estén repartidos de forma equitativa por todas las capas. Sustituimos (3.12) por la restricción siguiente:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} z_i^\alpha \geq \lfloor \frac{\sum_w y_w}{M} \rfloor, \forall \alpha = 1, \dots, M \quad (3.14)$$

Esta restricción puede resultarnos conveniente si tenemos el mismo número de nodos destino en cada capa. Pero si esto no ocurre, la restricción carece de sentido. Combinando las dos anteriores, podemos considerar el vector estocástico M-dimensional γ , cuyas componentes son constantes, donde cada una representa la proporción de la cantidad total de nodos destino cubiertos que buscamos que tenga cada capa. La restricción a considerar sería:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} z_i^\alpha \geq \gamma_\alpha \lfloor \frac{\sum_w y_w}{M} \rfloor, \forall \alpha = 1, \dots, M \quad (3.15)$$

Nótese que, para evitar que la expresión anterior sea demasiado restrictiva, bastaría multiplicar el término de la derecha de la desigualdad por una constante entre 0 y 1. Mientras más cercana esté dicha constante a 1, más restrictiva será la expresión, mientras que si es cercana a 0, el problema tendrá una mayor libertad para cubrir los nodos.

La restricciones (3.14) y (3.15) pueden reformularse para los nodos origen análogamente, considerando las variables $t_i^\alpha, \forall v_i^\alpha \in V_\alpha$, con $i = 1, \dots, m$.

Capítulo 4

Problemas puntuales

En este capítulo, haremos referencia como problemas puntuales aquellos en los que ya no tenemos pares orígenes-destino que satisfacer, sino que consideramos diferentes objetivos teniendo en cuenta los nodos del grafo, sin distinguir si un nodo es un origen o un destino de algún par.

4.1. Problema puntual del centro

Definición 1. Llamamos centro de un grafo multicapa \mathcal{M} al vértice que minimiza el máximo de las distancias al resto de vértices de \mathcal{M} .

Para calcular el centro de un grafo multicapa, basta con seguir los pasos siguientes, a partir de la matriz de distancias más cortas \mathcal{D} . Sea $n = |V|$:

1. Calculamos m_i para cada columna de \mathcal{D} , donde m_i = el máximo de todas las entradas de la columna i de \mathcal{D} .
2. Si $m_k = \min\{m_1, \dots, m_n\}$, entonces m_k es el centro de \mathcal{M} .

A continuación, introduciremos un ejemplo para visualizar este procedimiento con una mayor claridad. Consideremos un grafo concreto (véase la Figura 4.1). Nótese que en los ejemplos considerados, denotaremos dos vértices cualesquiera v_i^α y v_j^β , con $\alpha \neq \beta$ con el mismo índice, es decir, $i = j$, si ambos vértices hacen referencia al mismo vértice pero en capas distintas. Este es el motivo por el que en la capa 2 de la Figura 4.1 usamos v_4^2 en lugar de v_3^2 , sin haber en la capa 2 un vértice con un 3 como subíndice, dado que v_3^1 y v_4^2 son totalmente independien-

tes y distintos.

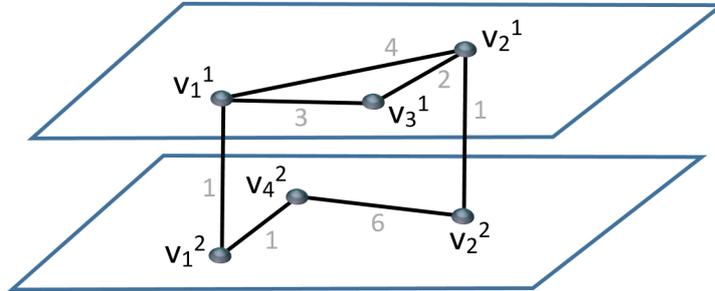


Figura 4.1: Ejemplo de un grafo multicapa con pesos en sus aristas intercapa e intracapa

Definamos las matrices de distancias D^1 y D^2 :

$$D^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1^2 & v_2^2 & v_4^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_4^2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 7 & 0 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

A continuación definimos D^{12} , que coincidirá con la traspuesta de D^{21} debido a que las distancias son simétricas.

$$D^{12} = (D^{21})^t = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1^2 & v_2^2 & v_4^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Por tanto, nos queda que:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Asumiremos que los pesos asociados a cada vértice valen uno para una mayor facilidad de cálculo. Si calculamos m_i para cada columna de \mathcal{D} , y calculamos su mínimo, obtenemos que:

$$m_k = \text{mín}\{5, 6, 5, 7, 7, 6\} = 5$$

Por tanto, tenemos que los centros son los vértices v_1^1 y v_3^1 .

Definición 2. La distancia del vértice más lejano del centro del grafo multicapa se denomina radio r_0 de \mathcal{M} . Luego, podemos escribir que

$$r_0 = \text{mín}_{v_i^\alpha \in V^\alpha, \alpha \in M} \text{máx}_{v_j^\alpha \in V^\alpha, \alpha \in M} d(v_i, v_j)$$

Por ejemplo, el radio del grafo de la Figura 4.1 es 5. Tomemos a continuación un punto x_0 de la arista $e^1 = (v_1^1, v_3^1)$, de forma que $d(x_0, v_1^1) = 2$, como podemos observar en la Figura 4.2.

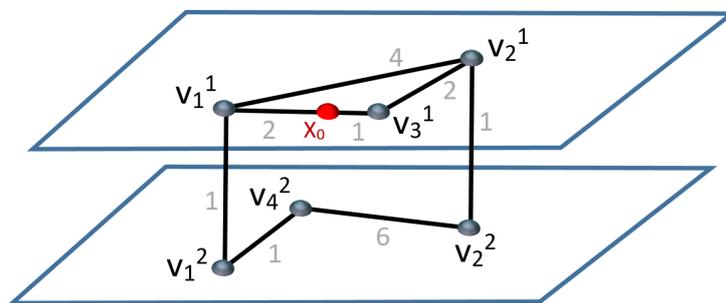


Figura 4.2: Localización del x_0

Vemos que, para x_0 , se cumple que:

$$\max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} d(v_i^\alpha, x_0) = 4 < d(v_1^1, v_2^2) = 5$$

Esto nos lleva a pensar que debe haber puntos en un grafo multicapa \mathcal{M} , como x_0 en el grafo de la Figura 4.2, que están localizados más centralmente que los propios centros de \mathcal{M} .

Definición 3. Definimos como centro absoluto de un grafo multicapa \mathcal{M} al x_0 en \mathcal{M} para el cual se cumple que

$$\min_{x \in \mathcal{M}} \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x) = \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) \quad (4.1)$$

Definición 4. Definimos el radio absoluto de \mathcal{M} de la siguiente manera:

$$r(x_0) = \min_{x \in \mathcal{M}} \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x)$$

La ecuación (4.1) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\min \left\{ \min_{e^\alpha \in E_\alpha} \left[\min_{x \in e^\alpha} \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x) \right], \right. \quad (4.2)$$

$$\left. \min_{e^{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta}} \left[\min_{x \in e^{\alpha\beta}} \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x) \right] \right\} = r(x_0)$$

Sin embargo, a partir de la ecuación (4.2), deducimos que el problema de encontrar el centro absoluto x_0 puede reducirse al problema de resolver tantos problemas “min-max” como aristas intercapa e intracapa tenga nuestro grafo, y quedarnos con el mínimo de lo obtenido sólo considerando las intercapa y lo obtenido sólo considerando las intracapa. Más precisamente, sea x_{e^γ} un punto de la arista e^γ tal que:

$$\min_{x \in e^\gamma} \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x) = \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha, \alpha \in M} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_{e^\gamma}) = r(x_{e^\gamma}) \quad (4.3)$$

Entonces, decimos que x_{e^γ} es un centro local de \mathcal{M} en e^γ , y por tanto, tenemos que la expresión

$$\min_{e^\alpha \in E_\alpha, \alpha \in M} [r(x_{e^\alpha})] \quad (4.4)$$

nos daría el radio si el centro absoluto solo pudiera tener lugar en aristas intracapa, y la expresión

$$\min_{e^{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in M} [r(x_{e^{\alpha\beta}})] \quad (4.5)$$

nos daría el radio si el centro absoluto solo pudiera tener lugar en aristas intercapa. Luego, basta tomar el centro absoluto para el que el radio sea menor de los dos resultados anteriores, es decir

$$\min \left\{ \min_{e^\alpha \in E_\alpha, \alpha \in M} [r(x_{e^\alpha})], \min_{e^{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in M} [r(x_{e^{\alpha\beta}})] \right\} = r(x_0) \quad (4.6)$$

Por tanto, si la localización de los centros locales x_{e^α} y $x_{e^{\alpha\beta}}$, con $\alpha, \beta \in M$, están determinados de alguna forma, entonces el punto x_0 está entre el conjunto de puntos de centros locales, y concretamente es aquel para el cual el radio es mínimo.

A continuación, vamos a describir un método para localizar el centro local x_{e^γ} perteneciente a una arista intracapa $e^\gamma \in E_\gamma$, con $\gamma \in M$.

Sea x un punto arbitrario de $e^\gamma = (v_p^\gamma, v_q^\gamma)$, y sea $v_i^\alpha \in V_\alpha$ un vértice cualquiera de \mathcal{M} . Sea $d(v_p^\gamma, v_q^\gamma) = L_{e^\gamma}$. Recordemos que:

$$d(v_i^\alpha, x) = \min\{x + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha), L_{e^\gamma} - x + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha)\}.$$

Definimos a continuación las dos funciones siguientes:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha) \\ f_2(x) &= L_{e^\gamma} - x + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha) \end{aligned}$$

Ambas funciones representan líneas rectas, y por tanto, son fácilmente representables (véase Figura 4.3). Nótese que lo que nos interesa es obtener una gráfica de $d(v_i^\alpha, x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ en el intervalo $[0, L_{e^\gamma}]$. Ésta gráfica es la que está representada con una línea gruesa.

A continuación, veamos como representaríamos $h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x)$. En la Figura (4.4), representamos simultáneamente en una misma gráfica todos los $h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x)$, $\forall v_i^\alpha \in V_\alpha$ en el intervalo $[0, L_{e^\gamma}]$.

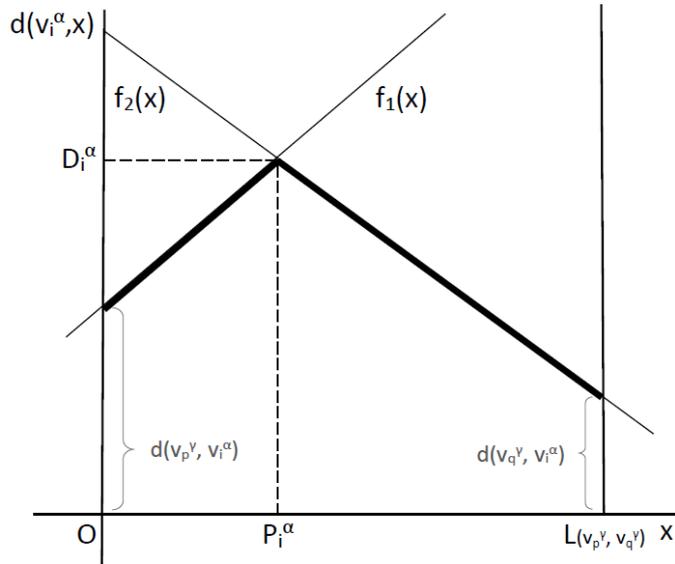


Figura 4.3: Gráfica de $d(v_i^\alpha, x)$

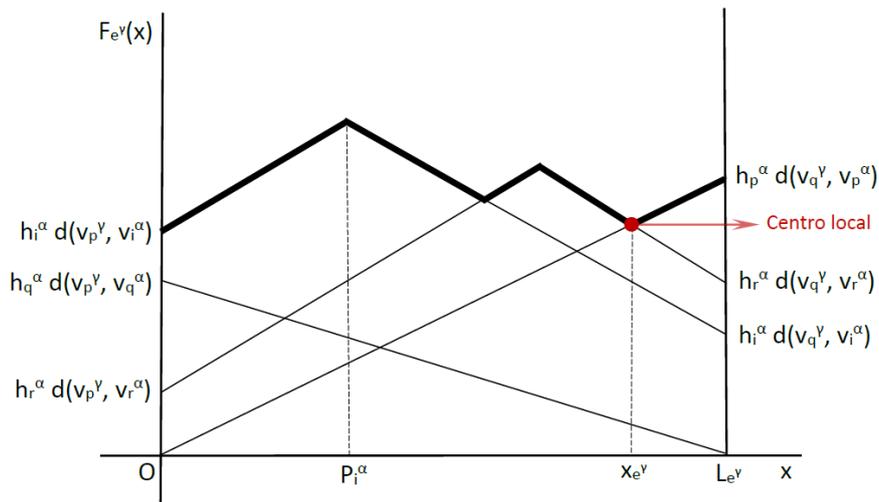


Figura 4.4: Gráfica representativa de $F_{e^\gamma}(x)$

Para encontrar la curva de la función

$$F_{e^\gamma}(x) = \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x), \text{ con } x \in e^\gamma$$

debemos tomar para cada valor de $x \in [0, L_{e^\gamma}]$ el máximo de todas las funciones representadas, es decir, la envoltura superior. La curva de la función $F_{e^\gamma}(x)$

también puede observarse en la Figura 4.4, representada por la línea gruesa. Luego, para encontrar el x_{e^γ} en $e^\gamma = (v_p^\gamma, v_q^\gamma)$ basta con hallar el punto para el que $F_{e^\gamma}(x)$ es mínimo. Además, como $F_{e^\gamma}(x)$ es una función lineal a trozos, $F_{e^\gamma}(x)$ tiene un número finito de mínimos locales que son fácilmente computables. Luego, calcular la posición de x_{e^γ} es una tarea sencilla.

Para calcular el centro local $x_{e^{\gamma\delta}}$ perteneciente a una arista intercapa $e^{\gamma\delta} \in E_{\gamma\delta}$, con $\delta, \gamma \in M$, el proceso es totalmente análogo. Una vez que tengamos todos los centros locales pertenecientes a todas las aristas intercapa e intracapa, basta ver para cual de ellos el radio es mínimo. El x_0 que cumpla tal condición, será el centro absoluto del grafo multicapa.

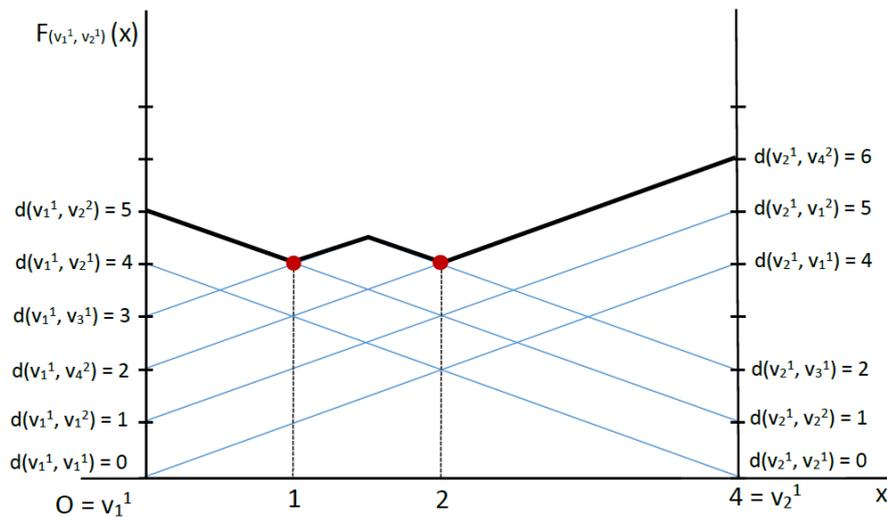


Figura 4.5: Gráfica de $F_{(v_1^1, v_2^1)}(X)$

Veamos a continuación como tendría lugar este procedimiento para un ejemplo concreto. Consideremos el grafo de la sección anterior (véase la Figura 4.1). Luego, nuestra matriz de distancias es:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

El primer paso sería calcular la localización de los centros locales pertenecientes a las aristas intracapa. Para la arista (v_1^1, v_2^1) , calculamos $F_{(v_1^1, v_2^1)}$, resultado que podemos observar en la Figura 4.5.

Podemos ver pues, que el centro local de la arista (v_1^1, v_2^1) es el $(1,4)$ y el $(2,4)$. Análogamente, calculamos la localización del resto de centros locales correspondientes al resto de aristas intracapa (Figura 4.6)

Repetimos el mismo procedimiento pero para las aristas intracapa (véase Figura 4.7). En la tabla 4.1 podemos ver todos los centros locales obtenidos:

Tipo de arista	Ubicación de la arista	Arista	Centro local
Intracapa	Capa 1	(v_1^1, v_2^1)	$(1,4)$ $(2,4)$
		(v_1^1, v_3^1)	$(2,29,3,71)$
		(v_2^1, v_3^1)	$(2,4)$
	Capa 2	(v_1^2, v_4^2)	$(1,6)$
		(v_2^2, v_4^2)	$(2,5,5,5)$
Intercapa	Entre las capas 1 y 2	(v_1^1, v_1^2)	$(0,6)$
		(v_2^1, v_2^2)	$(0,6)$ $(1,6)$

Cuadro 4.1: Tabla que recoge todos los centros locales obtenidos

Por tanto, basta observar la última columna de la tabla para calcular el centro

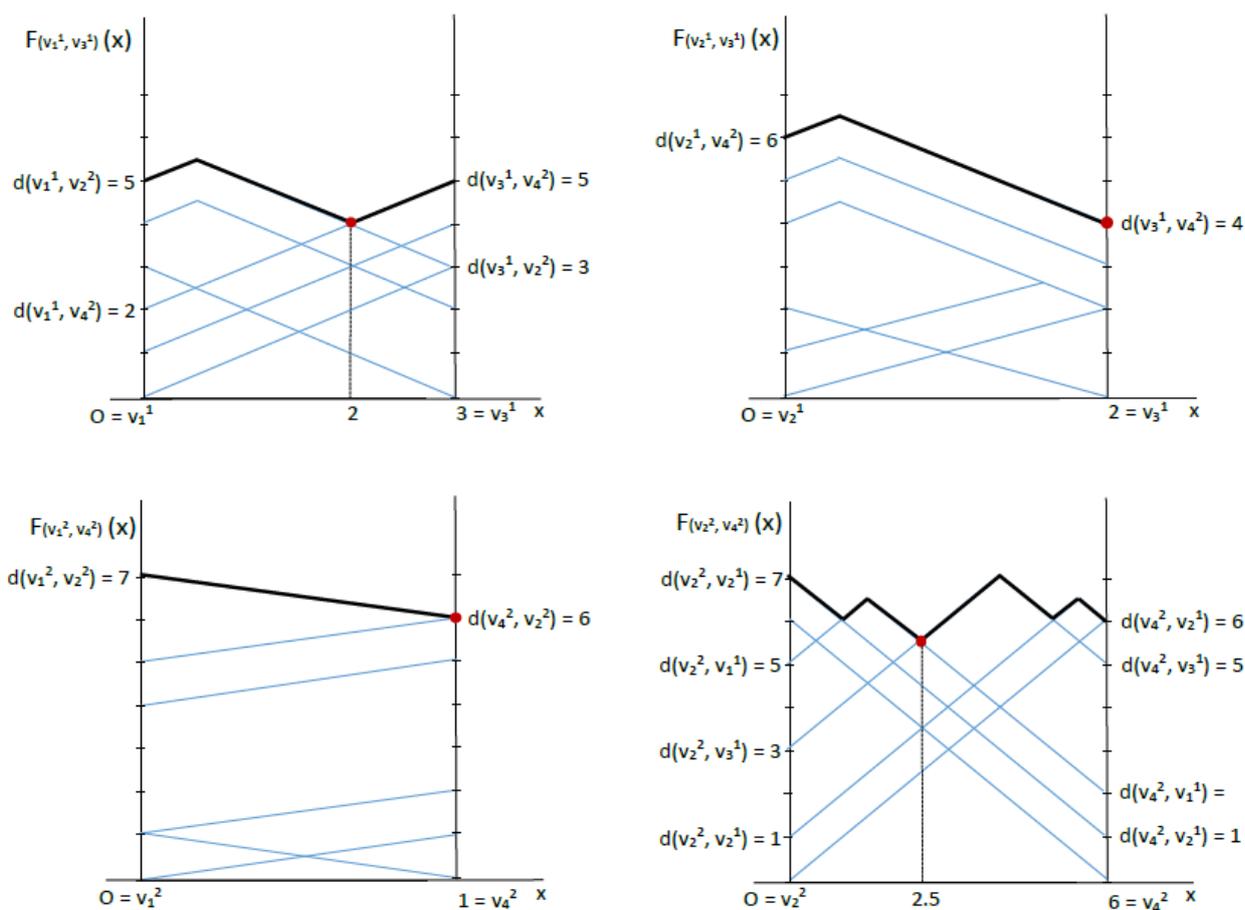


Figura 4.6: Gráficas de $F_{(v_1^1, v_3^1)}(x)$, $F_{(v_2^1, v_3^1)}(x)$, $F_{(v_1^2, v_4^2)}(x)$ y $F_{(v_2^2, v_4^2)}(x)$ respectivamente.

absoluto de mi grafo multicapa. El punto que se sitúa en la arista (v_1^1, v_3^1) a una distancia de 2,29 del vértice v_1^1 tiene una distancia máxima de 3,71 al resto de vértices. Éste es nuestro centro absoluto.

Nótese que el algoritmo anterior consiste en calcular varias veces la envolvente superior, tantas veces como aristas intracapas o intercapas tenga mi grafo, para calcular el centro local en cada arista.

Acerca de la complejidad del problema, cabe señalar que en el plano euclídeo el problema del centro se puede resolver el tiempo lineal $O(n)$ (Megiddo, 1983) [14], aunque el algoritmo es casi impracticable. Por tanto, se suele utilizar como alternativa el de Elzinga-Hearn (1972) [7].

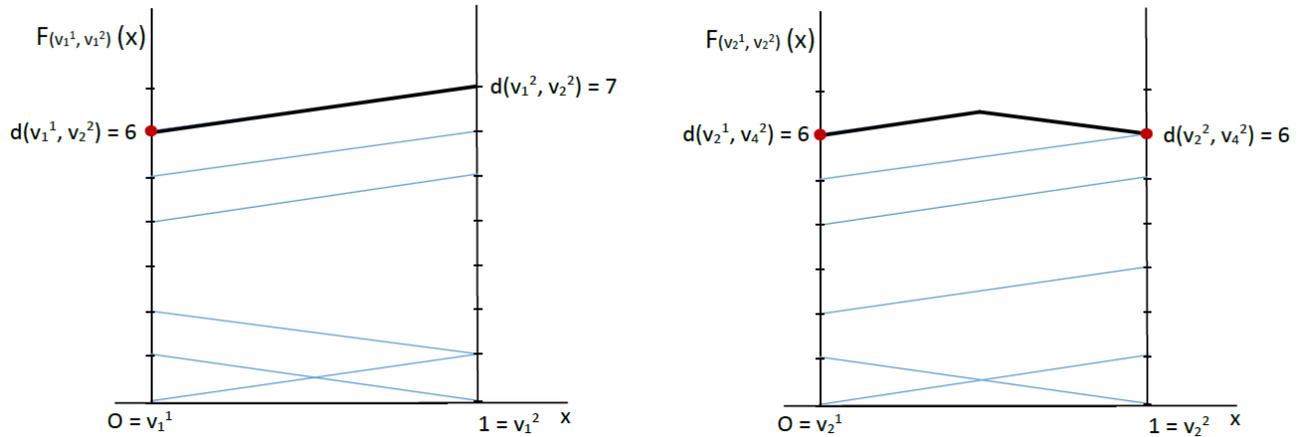


Figura 4.7: Gráficas de $F_{(v_1^1, v_1^2)}(x)$ y $F_{(v_2^1, v_2^2)}(x)$ respectivamente.

En el caso del centro absoluto en grafos el algoritmo de Kariv y Hakimi (1979) resuelve en [12] el problema en tiempo $O(|A||V|)$, suponiendo que la matriz de distancias entre vértices se conoce. El cálculo de dicha matriz de distancias también conlleva $O(|A||V|\log(|V|))$ operaciones. Por otro lado, el centro absoluto en grafos tipo árbol se puede obtener en tiempo $O(|V|)$, que coincide también con el tiempo necesario para calcular la matriz de distancias en un árbol.

4.2. Problema puntual de la mediana

Definición 5. Llamamos *mediana de un grafo multicapa \mathcal{M}* al vértice que minimiza la suma de las distancias al resto de vértices de \mathcal{M} .

Para calcular la mediana de un grafo multicapa, basta con seguir los pasos siguientes, a partir de la matriz de distancias \mathcal{D} . Sea $n = |V|$:

1. Calculamos s_i para cada columna de \mathcal{D} , donde $s_i =$ la suma de todas las entradas de la columna i de \mathcal{D} .
2. Si $s_k = \min\{s_1, \dots, s_n\}$, entonces v_k es la mediana de \mathcal{M} .

A continuación, introduciremos un ejemplo para visualizar este procedimiento

con una mayor claridad. Consideremos de nuevo el grafo multicapa de la Figura 4.1, para el cual tenemos ya calculada la matriz de distancias \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calculamos s_i para cada columna de \mathcal{D} , y calculamos su mínimo, obtenemos que:

$$s_k = \text{mín}\{15, 18, 17, 18, 22, 20\} = 15$$

Por tanto, tenemos que la mediana es el vértice v_1^1 .

El concepto de mediana absoluta es más general, porque involucra pesos para cada uno de los vértices del grafo.

Definición 6. Decimos que un punto x_0 de un grafo multicapa \mathcal{M} con vértices ponderados es una mediana absoluta de \mathcal{M} si, para todo punto x en \mathcal{M} ,

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) \leq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x)$$

donde h_i^α es el peso de cada $v_i^\alpha \in V_\alpha$

Teorema 1. Existe al menos un vértice del grafo multicapa que es una mediana absoluta.

Demostración:

Para demostrar este teorema, hace falta ver que si x_0 es un punto arbitrario en \mathcal{M} , con $x_0 \neq v_i^\alpha$, con $v_i^\alpha \in V_\alpha$, $\forall \alpha \in M$, entonces siempre existirá un vértice v_k^γ en la capa γ de \mathcal{M} , tal que:

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_k^\gamma)$$

Esto probaría que v_k^γ sería una mediana absoluta.

Sea x_0 un punto de una arista $e^\gamma = (v_p^\gamma, v_q^\gamma)$ de \mathcal{M} . Sabemos que:

$$d(v_i^\alpha, x_0) = \min\{d(x_0, v_p^\gamma) + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha), d(x_0, v_q^\gamma) + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha)\}$$

Definimos a continuación los conjuntos P y Q de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P &= \{v_i^\alpha \mid d(v_i^\alpha, x_0) = d(x_0, v_p^\gamma) + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha), \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \forall \alpha \in M\} \\ Q &= \{v_i^\alpha \mid d(v_i^\alpha, x_0) = d(x_0, v_q^\gamma) + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha), \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \forall \alpha \in M\} \end{aligned}$$

Nótese que P es el conjunto formado por los vértices de \mathcal{M} para los cuales, si se trazara el camino más corto desde cada uno de ellos hasta x_0 , éste pasa por v_p^γ . Por otro lado, Q está formado por los vértices de \mathcal{M} para los cuales tal camino más corto a x_0 pasa por v_q^γ . Luego, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) &= \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha [d(x_0, v_p^\gamma) + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha)] + \\ &+ \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha [d(x_0, v_q^\gamma) + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha)] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Estudiamos a continuación la ecuación anterior considerando los dos casos que pueden darse por separado.

- **Caso 1:** Cuando $\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha$

Tenemos que:

$$d(x_0, v_q^\gamma) = d(v_p^\gamma, v_q^\gamma) - d(x_0, v_p^\gamma)$$

Si sustituimos esto en la ecuación (4.7), nos da:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) &= \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha [d(x_0, v_p^\gamma) + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha)] + \\ &+ \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha [d(v_p^\gamma, v_q^\gamma) - d(x_0, v_p^\gamma) + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

También sabemos que, como hemos considerado que la métrica en el plano es la euclídea, tenemos que:

$$d(v_q^\gamma, v_p^\gamma) + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha) \geq d(v_p^\gamma, v_i^\alpha), \forall \alpha \in M$$

Si usamos esta desigualdad en la ecuación (4.8), obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) &\geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha [d(x_0, v_p^\gamma) + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha)] + \\ &+ \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha [d(v_p^\gamma, v_i^\alpha) - d(x_0, v_p^\gamma)] \end{aligned}$$

Si reordenamos el término de la derecha de la desigualdad anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) &\geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_p^\gamma, v_i^\alpha) + \\ &+ \sum_{\alpha \in M} \left[\sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha - \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha \right] d(x_0, v_p^\gamma) \end{aligned}$$

Debido a la hipótesis inicial de este caso 1, concluimos con que:

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_p^\gamma)$$

- **Caso 2:** Cuando $\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha$

La demostración es análoga al caso 1. Sustituimos en (4.7) $d(x_0, v_p^\gamma) = d(v_p^\gamma, v_q^\gamma) - d(v_q^\gamma, x_0)$. Luego, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) &= \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha [d(v_p^\gamma, v_q^\gamma) - d(v_q^\gamma, x_0) + d(v_p^\gamma, v_i^\alpha)] + \\ &+ \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha [d(x_0, v_q^\gamma) + d(v_q^\gamma, v_i^\alpha)] \quad (4.9) \end{aligned}$$

Y esta ecuación, análogamente a como hacíamos en el caso 1, puede reducirse a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) &\geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_q^\gamma) + \\ &+ \sum_{\alpha \in M} \left[\sum_{v_i^\alpha \in P} h_i^\alpha - \sum_{v_i^\alpha \in Q} h_i^\alpha \right] d(x_0, v_q^\gamma) \end{aligned}$$

Debido a la hipótesis inicial de este caso 1, concluimos con que:

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_0) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_q^\gamma)$$

Si en lugar de considerar x_0 un punto de la arista $e^\gamma = (v_p^\gamma, v_q^\gamma)$, con $\gamma \in M$, hubiéramos considerado x_0 un punto de la arista $e^{\gamma\delta} = (v_p^\gamma, v_q^\delta)$, con $\gamma, \delta \in M$, la demostración sería análoga, bastando sustituir v_q^γ por v_q^δ . Con esto concluye

la demostración.

Luego, gracias a este teorema podemos afirmar con total certeza que cuando nos referimos a mediana absoluta nos referimos a la propia mediana como tal. Señalar además, que el problema de encontrar la mediana en un grafo multicapa es un problema NP -duro.

4.3. Problema puntual del p-centro

Anteriormente, hemos estudiado como hallar la localización óptima del centro de un grafo mediante el problema puntual del centro. Sin embargo, existe una generalización de dicho problema, en el que buscamos resolver el problema de localizar p puntos en el grafo minimizando la máxima distancia desde cualquier vértice del grafo multicapa al punto más cercano de esos p puntos. Consideramos así $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \mathcal{C})$ un grafo multicapa. Recordemos que P_α es el conjunto de todos los puntos en todas las aristas intracapa de la capa $\alpha \in M$, y $P_{\alpha,\beta}$ el conjunto de todos los puntos en todas las aristas intercapa entre las capas $\alpha \in M$ y $\beta \in M$. Luego, tenemos definidos P y V de la siguiente manera

$$P = \left(\bigcup_{\alpha \in M} P_\alpha \right) \cup \left(\bigcup_{\alpha, \beta \in M} P_{\alpha\beta} \right)$$

$$V = \bigcup_{\alpha \in M} V_\alpha$$

Consideramos el conjunto de puntos π como $\pi \equiv P \cup V$.

Definición 7. *Un conjunto de p -centros de un grafo multicapa es cualquier conjunto de p puntos pertenecientes ya sea a los vértices o a las aristas (tanto intracapa como intercapa), que minimizan la máxima distancia desde un vértice al p -centro más próximo.*

Para $p = 1, 2, \dots$, el problema de los p -centros se define de la siguiente manera:

Encuentra un conjunto X^{p*} con $|X^{p*}| \leq p$ de manera que, para cualquier conjunto $X^p \subseteq \pi$, con $|X^p| \leq p$, se tiene que

$$\max_{\alpha \in M} \{ \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha} d(v_i^\alpha, X^p) \} \geq \max_{\alpha \in M} \{ \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha} d(v_i^\alpha, X^{p*}) \} \quad (4.10)$$

donde $d(v_i^\alpha, X^p) \equiv \min_{w \in X^p} d(v_i^\alpha, w)$

Denotamos además:

$$\tau_{X^p} \equiv \max_{\alpha \in M} \left\{ \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha} d(v_i^\alpha, X^p) \right\}$$

$$\tau_{\mathcal{M}} \equiv \max_{\alpha \in M} \left\{ \max_{v_i^\alpha \in V_\alpha} d(v_i^\alpha, X^{p*}) \right\}$$

Por tanto, podemos reescribir (4.10) como:

$$\tau_{X^p} \geq \tau_{\mathcal{M}}$$

Los miembros de X^{p*} son los p-centros de \mathcal{M} . Es decir, el conjunto X^{p*} minimiza la máxima distancia $\tau_{\mathcal{M}}$ entre un vértice de \mathcal{M} y el p-centro más próximo. Además, X^{p*} no tiene por qué ser único.

Si se nos da el conjunto de p-centros de \mathcal{M} , entonces cada vértice de \mathcal{M} puede ser asociado de forma arbitraria a su p-centro más cercano. Sea V^k un subconjunto cualquiera de V asociado con k perteneciente al p-centro. Consideramos la función $f_k(c) \equiv \max_{\alpha \in M} \left\{ \max_{v_i^\alpha \in V^k} d(v_i^\alpha, c) \right\}$, donde $c \in \pi$. Si k , un p-centro, no es un mínimo global de f_k sobre π , entonces claramente el mínimo global de f_k sobre π puede reemplazar a k en el conjunto de p-centro.

Además, $d(v_i^\alpha, c)$, $\forall v_i^\alpha \in V_\alpha$, $\forall i \in M$, es una función de c continua, lineal y definida a trozos, con dos trozos a lo sumo. Luego $d(v_i^\alpha, c)$ tiene pendiente ± 1 cuando la pendiente existe. Sea $P' \subseteq P$ el conjunto de todos los puntos en las aristas de \mathcal{M} tal que:

$$c \in P' \iff \text{para algún } v_p^\alpha \in V_\alpha, \text{ con } \alpha \in M, \text{ y para algún } v_q^\beta \in V_\beta, \\ \text{con } \beta \in M, \text{ tal que } v_p^\alpha \neq v_q^\beta, \text{ con } \alpha = \beta \text{ o } \alpha \neq \beta, c \text{ es el} \\ \text{único punto en su arista tal que } d(v_p^\alpha, c) = d(v_q^\beta, c)$$

Sea $\pi' \equiv P' \cup V$. Luego, el conjunto π' contiene todos los mínimos globales de f_i . Por tanto, existe un conjunto de p-centros contenido en π' , y $|P'| < \infty$.

A continuación, veremos que podemos localizar un conjunto de p-centros resolviendo un número finito de problemas de cobertura. Recordemos que un problema de cobertura mínima tiene la siguiente forma:

Sea A una matriz de dimensión $p \times n$ de ceros y unos. Sea x un n -vector desconocido de ceros y unos. El problema de minimizar $\sum_{i=1}^n x_i$ tal que cada componente de Ax sea mayor o igual que 1 es a lo que llamamos problema de cobertura mínima.

Consideremos así H , una matriz con $|V|$ filas y $|\pi'|$ columnas, con cada entrada h_{ij} igual a la distancia más corta entre $v_i^\alpha \in V_\alpha$, con $\alpha \in M$, y $j \in \pi'$. Un conjunto M de p columnas, μ_1, \dots, μ_p de H , tal que

$$\tau_p \equiv \max_{\alpha \in M} \left\{ \max_{v_j^\alpha \in V_\alpha} \min_{i=1, \dots, p} h_{j, \mu_i} \right\}$$

sea minimizado, se corresponde con el conjunto de p -centros de G . El problema de hallar los p -centros de un grafo multicapa es NP -duro, tal y como ocurre con los grafos unicapa (véase [12]). Lo mismo ocurre con la mayoría de las variantes del problema de los p -centros para grafos unicapa. Frederickson [8] presentó un algoritmo de complejidad $O(n)$ para localizar p instalaciones en un árbol unicapa con vértices no ponderados. Sin embargo, no se conoce aún un algoritmo exacto para la versión ponderada del problema de los p -centros, ni en un grafo unicapa ni en uno multicapa, incluso para un valor de p fijado.

Veamos a continuación un ejemplo. Consideremos de nuevo el grafo de la Figura 4.8, para el cual tenemos calculado el conjunto π' porque lo hemos hallado en la sección del Problema puntual del centro. Por tanto, el siguiente paso sería calcular H :

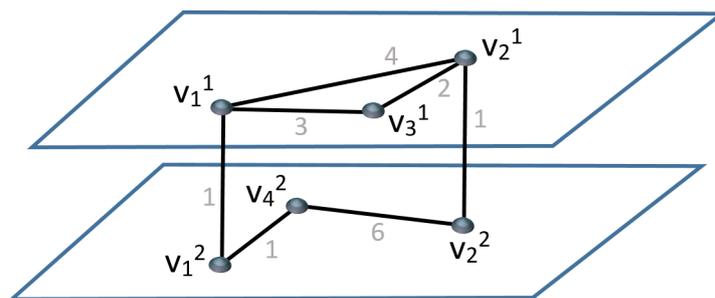


Figura 4.8: Ejemplo de un grafo multicapa

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 4,5 & 2,29 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4,5 & 2,71 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 5 & 6,5 & 0,71 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 & 3,5 & 3,29 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 & 3,5 & 3,71 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 0 & 2,5 & 4,29 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Si buscamos calcular el 2-centro, debemos probar todas las combinaciones posibles de las diez columnas tomadas de dos en dos, y quedarnos con aquella que haga mínimo τ_2 . Para nuestro ejemplo, hay tres soluciones posibles para las cuales obtenemos que la máxima distancia desde un vértice a su 2-centro más cercano es mínima: v_1^1 y v_2^1 , v_2^1 y v_1^2 , y por último, v_2^1 y v_4^2 . Dicha distancia para las tres soluciones vale 2.

4.4. Problema puntual de la p-mediana

En esta sección, empezaremos generalizando el concepto de mediana, al igual que hemos hecho con el concepto de centro en el problema de los p-centros.

Definición 8. Consideramos \mathcal{M} , un grafo ponderado. Sea X^p un conjunto de p puntos x_1, x_2, \dots, x_p en \mathcal{M} , y sea

$$d(v_i^\alpha, X^p) = \min[d(v_i^\alpha, x_1), d(v_i^\alpha, x_2), \dots, d(v_i^\alpha, x_p)], \alpha \in M$$

El conjunto de puntos X^{p*} será una p -mediana de \mathcal{M} si, para todo X^p en \mathcal{M}

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, X^{p*}) \leq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, X^p)$$

donde recordemos que h_i^α es el peso asociado al vértice $v_i^\alpha \in V_\alpha$, con $\alpha \in M$, en \mathcal{M} .

Nótese que el problema de hallar la p -mediana de un grafo multicapa es NP -duro, tal y como ocurre con los grafos unicapa (véase [13]). A continuación, veamos un procedimiento para hallar X^{p*} .

Teorema 2. Existe un subconjunto V^{p*} de V que contiene p vértices tal que, para todo conjunto X de p puntos en \mathcal{M} , se cumple que

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, X) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, V^{p*})$$

Demostración:

Sean los puntos de X los puntos x_1, x_2, \dots, x_p de \mathcal{M} . Definimos a continuación los conjuntos S_1, \dots, S_p de la siguiente forma:

$$S_k = \{v_i^\alpha \mid d(v_i^\alpha, x_k) = d(v_i^\alpha, X), \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \forall \alpha \in M\}, \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

Nótese que S_k es el conjunto formado por los vértices de \mathcal{M} para los cuales x_k es el punto más cercano de los que figuran en X . Luego, podemos escribir:

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, X) = \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_k} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_k) \quad (4.11)$$

Por otro lado, si consideramos el primer término de la suma en k del miembro derecho, tenemos que

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_1} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_1) = \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_1} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_1) + \sum_{k=2}^p \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_k} 0 d(v_i^\alpha, x_1) \quad (4.12)$$

Por tanto, podemos escribir

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_1} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_1) = \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_k} h_i^{\prime\alpha} d(v_i^\alpha, x_1) \quad (4.13)$$

donde

$$h_i^{\prime\alpha} = \begin{cases} h_i^\alpha & \text{si } v_i^\alpha \in S_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sin embargo, en la Sección 4.2, probamos que existe un vértice $v_{i_1}^{\gamma_1} \in V_{\gamma_1}$, con $\gamma_1 \in M$, tal que

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^{\prime\alpha} d(v_i^\alpha, x_1) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^{\prime\alpha} d(v_i^\alpha, v_{i_1}^{\gamma_1}) \quad (4.14)$$

Combinando (4.13) y (4.14), obtenemos

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_1} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_1) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_{i_1}^{\gamma_1}) \quad (4.15)$$

Si realizamos el mismo razonamiento, llegamos a las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_2} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_2) &\geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_{i_2}^{\gamma_2}) \\ &\vdots \\ \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_p} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, x_p) &\geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_{i_p}^{\gamma_p}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si tomamos los miembros derechos de las desigualdades de (4.16) y usamos la igualdad (4.11), obtenemos:

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, X) \geq \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_k} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_{i_k}^{\gamma_k}) \quad (4.17)$$

Sea $V^{p*} = \{v_{i_1}^{\gamma_1}, \dots, v_{i_p}^{\gamma_p}\}$. Luego, tenemos que

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, V^{p*}) \leq \sum_{k=1}^p \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in S_k} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, v_{i_k}^{\gamma_k}) \quad (4.18)$$

Combinando (4.17) y (4.19), obtenemos

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, X) \geq \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} h_i^\alpha d(v_i^\alpha, V^{p*}) \quad (4.19)$$

lo cual demostraría el teorema.

Este teorema prueba que, para hallar una p -mediana, solo debemos examinar todos los subconjuntos de V que contengan p vértices. Sin embargo, no prueba que toda p -mediana de \mathcal{M} consista en un conjunto de p vértices de \mathcal{M} . Veamos un ejemplo numérico de como llevar a cabo el procedimiento para encontrar la p -mediana de un grafo multicapa.

Consideremos el grafo ponderado \mathcal{M} de la Figura 4.9, con los pesos considerados en la Tabla 4.2. Nos gustaría encontrar una 3-mediana de \mathcal{M} . Los pasos a seguir son los siguientes:

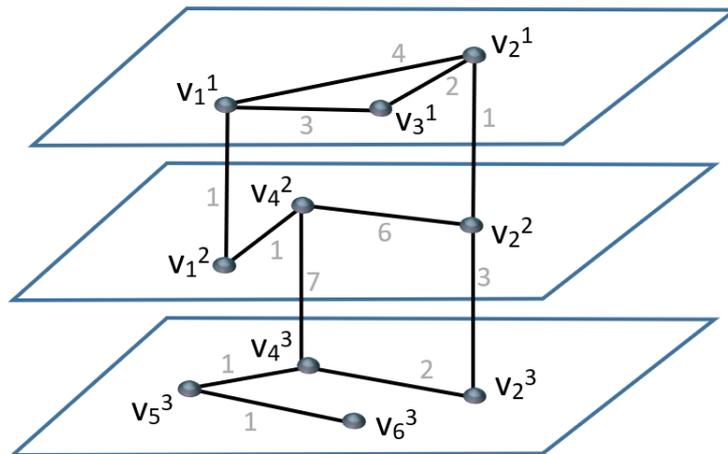


Figura 4.9: Ejemplo de un grafo multicapa con pesos en sus aristas intercapa e intracapa

Capa	Vértice	Peso
Capa 1	v_1^1	4
	v_2^1	6
	v_3^1	7
Capa 2	v_1^2	5
	v_2^2	6
	v_4^2	4
Capa 3	v_2^3	3
	v_4^3	2
	v_5^3	5
	v_6^3	1

Cuadro 4.2: Tabla de los pesos de cada vértice de la Figura 4.9

1. Lo primero será calcular las matrices de distancias correspondientes a cada capa de \mathcal{M} :

$$D^1 = \begin{matrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{matrix} \begin{bmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{matrix} & v_1^2 & v_2^2 & v_4^2 \\ v_1^2 & \left[\begin{array}{ccc} 0 & 7 & 1 \end{array} \right] \\ v_2^2 & \left[\begin{array}{ccc} 7 & 0 & 6 \end{array} \right] \\ v_4^2 & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$D^3 = \begin{matrix} & v_2^3 & v_4^3 & v_5^3 & v_6^3 \\ v_2^3 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \\ v_4^3 & \left[\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ v_5^3 & \left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ v_6^3 & \left[\begin{array}{cccc} 4 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

2. Ahora calcularemos las matrices de distancia entre las capas. Estas coincidirán con sus respectivas traspuestas, debido a la simetría de la distancia:

$$D^{12} = (D^{21})^t = \begin{matrix} & v_1^2 & v_2^2 & v_4^2 \\ v_1^1 & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 2 \end{array} \right] \\ v_2^1 & \left[\begin{array}{ccc} 5 & 1 & 6 \end{array} \right] \\ v_3^1 & \left[\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$D^{23} = (D^{32})^t = \begin{matrix} & v_2^3 & v_4^3 & v_5^3 & v_6^3 \\ v_1^2 & \left[\begin{array}{cccc} 9 & 7 & 8 & 9 \end{array} \right] \\ v_2^2 & \left[\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right] \\ v_4^2 & \left[\begin{array}{cccc} 8 & 6 & 7 & 9 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Como en este grafo no hay ninguna conexión entre las capas 1 y 3, la matriz $D^{13} = (D^{31})^t$.

3. Construimos nuestra matriz de distancias \mathcal{D} a partir de las submatrices anteriores:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 5 & 2 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 3 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 6 & 0 & 8 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 9 & 3 & 8 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 8 & 7 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 10 & 7 & 9 & 8 & 6 & 7 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 11 & 8 & 10 & 9 & 7 & 9 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Lo siguiente es calcular la matriz \mathcal{D}' , resultante de multiplicar cada fila de \mathcal{D} por el peso asociado al vértice correspondiente en \mathcal{M} :

$$\mathcal{D}' = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 12 & 4 & 20 & 8 & 32 & 36 & 40 & 44 \\ 24 & 0 & 12 & 30 & 6 & 36 & 24 & 36 & 42 & 48 \\ 21 & 14 & 0 & 28 & 21 & 35 & 42 & 56 & 63 & 70 \\ 5 & 25 & 20 & 0 & 35 & 5 & 45 & 35 & 40 & 45 \\ 30 & 6 & 18 & 42 & 0 & 36 & 18 & 30 & 36 & 42 \\ 8 & 24 & 20 & 4 & 24 & 0 & 32 & 24 & 28 & 36 \\ 24 & 12 & 18 & 27 & 9 & 24 & 0 & 6 & 9 & 12 \\ 18 & 12 & 16 & 14 & 10 & 12 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 50 & 35 & 45 & 40 & 30 & 35 & 15 & 5 & 0 & 5 \\ 11 & 8 & 10 & 9 & 7 & 9 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Para encontrar la 3-mediana, debemos calcular la suma siguiente para todos los i, j y k , (con $1 \leq i, j, k \leq n$, siendo $n = |V|$). Nos quedaremos con la combinación que haga mínima dicha suma:

$$\sum_{r=1}^n \min(d'_{ir}, d'_{jr}, d'_{kr})$$

En nuestro ejemplo, la combinación de tres filas (cada una correspondiente a un vértice de \mathcal{M}) para los cuales la suma anterior es mínima, sería las de los vértices v_3^1 , v_1^2 y v_6^3 , y el valor de la suma para esos tres valores de i, j y k es 32.

Luego, la 3-mediana de \mathcal{M} es $\{v_3^1, v_1^2, v_6^3\}$

Si en lugar de calcular la 3-mediana, quisiéramos calcular la p -mediana, nos quedaríamos con la combinación de las filas i_1, \dots, i_p (cada una correspondiente a un vértice) que hagan mínima la siguiente suma:

$$\sum_{r=1}^n \min(d'_{i_1,r}, \dots, d'_{i_p,r})$$

4.4.1. Problema restringido

Existen numerosas variantes de nuestro problema para las cuales sería fundamental el planteamiento del mismo con estructura multicapa. A continuación, veremos algunos ejemplos.

Si tenemos que el número de medianas que buscamos es mayor a las capas que tiene \mathcal{M} (es decir, si $p > M$), podría ser de nuestro interés, que en cada capa esté localizada una de las medianas al menos. Para calcular esto, basta añadir ciertas restricciones al problema de minimizar la suma que aparecía al final de la sección anterior.

Por tanto, nuestro problema consiste en hallar el subconjunto i_1, \dots, i_p formado por p filas de las n que conforman \mathcal{D}' , tal que la siguiente suma sea mínima

$$\sum_{r=1}^n \min(d'_{i_1,r}, \dots, d'_{i_p,r}) \quad (4.20)$$

y que además, se cumplan las siguientes restricciones:

- Para $k=1$:

$$0 < i_1 \leq |V_1|$$

- Para $k \in \{2, \dots, m\}$:

$$\left| \bigcup_{\alpha=1}^{k-1} V_\alpha \right| < i_k \leq \left| \bigcup_{\alpha=1}^k V_\alpha \right|$$

Es decir, M de las p -medianas deben estar distribuidas cada una en una capa, mientras que las $p - M$ restantes se localizarán en las capas que hagan mínima

(4.20). Por otro lado, si $p = M$, podríamos aplicar esta formulación para hallar una localización de forma que en cada capa haya exactamente una mediana.

Si en cambio, buscáramos menos medianas que el número de capas de \mathcal{M} (es decir, $p < M$), entonces podríamos considerar el problema de que todas estén distribuidas en capas diferentes. Es lógico que las restricciones anteriores no nos sirven. Para ello, primero deberíamos hallar un algoritmo que nos permitiera obtener con facilidad a que capa corresponde la fila i_k de la matriz \mathcal{D}' . Llamaremos c_{ik} al número que hace referencia a la capa a la que pertenece la fila i_k de la matriz de distancias.

Algoritmo del cálculo de capa

1. Inicializamos $\gamma = 1$ y $k = 1$.
2. Si $i_k < |\bigcup_{\alpha=1}^{\gamma} V_{\alpha}|$, entonces $c_{ik} = \gamma$. En tal caso, actualizamos k y γ , con $k = k + 1$ y $\gamma = 1$, y volvemos a realizar este paso.
3. En caso contrario, $\gamma = \gamma + 1$ y volvemos al paso 2 con γ actualizada.

Este algoritmo básicamente va recorriendo todas las filas i_k de \mathcal{D}' o \mathcal{D} , devolviéndome para cada una un coeficiente $c_{i_k} \in M$ que me dice a qué capa se corresponde dicha fila.

Luego, nuestro problema consistiría en hallar el subconjunto i_1, \dots, i_p formado por p filas de las n que conforman \mathcal{D}' , tal que la suma (4.20) sea mínima, y que se cumpla que

$$c_{i_1} \neq c_{i_2} \neq \dots \neq c_{i_p},$$

es decir, que todas las capas en las que se localizan las p medianas sean distintas.

En el ejemplo realizado anteriormente, ya obtenemos una mediana por cada capa, pero si no lo hubiéramos obtenido (pues cuando se realizó el ejemplo no se impuso esta condición), bastaría con, a la hora de tomar las combinaciones posibles de filas de la matriz \mathcal{D}' , tomar únicamente una fila por cada capa. Inicialmente había $\binom{|V|}{3}$ formas posibles de tomar las 3 filas, y al imponer la nueva restricción, habrá $\prod_{\alpha \in M} |V_{\alpha}|$ formas posibles de tomar dichas filas.

4.5. Problema puntual de máxima cobertura con k vértices

Un subconjunto V^k del conjunto de vértices $V = \bigcup_{\alpha=1}^M V_\alpha$ de un grafo multicapa \mathcal{M} con n vértices se dice que es una cobertura de \mathcal{M} si

$$d(v_i^\alpha, V^k) \leq 1, \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \text{ con } \alpha \in M$$

y ningún otro subconjunto de V^k tiene la misma propiedad. Nuestro objetivo es encontrar una cobertura de \mathcal{M} que contenga k vértices y cubra el máximo número posible de vértices o nodos.

A continuación, veamos cuáles serían las variables de nuestro problema:

$$x_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i^\alpha \text{ está cubierto} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i^\alpha \text{ pertenece a la cobertura.} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La formulación del problema sería la siguiente:

$$\text{máx } \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha \quad (4.21)$$

$$\text{s.a } x_j^\alpha \geq y_i^\alpha, \forall (v_i^\alpha, v_j^\alpha) \in E_\alpha, \forall \alpha \in M \quad (4.22)$$

$$x_j^\beta \geq y_i^\alpha, \forall (v_i^\alpha, v_j^\beta) \in E_{\alpha\beta}, \forall \alpha, \beta \in M \quad (4.23)$$

$$x_j^\alpha \geq y_i^\alpha, \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \forall \alpha \in M \quad (4.24)$$

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} y_i^\alpha = k \quad (4.25)$$

$$x_j^\alpha \leq \sum_{\alpha \in M} \sum_{(v_i^\alpha, v_j^\alpha) \in E_\alpha} y_i^\alpha, \forall v_j^\alpha \in V_\alpha, \forall \alpha \in M \quad (4.26)$$

$$x_j^\beta \leq \sum_{\alpha, \beta \in M} \sum_{(v_i^\alpha, v_j^\beta) \in E_{\alpha\beta}} y_i^\alpha, \forall v_j^\beta \in V_\beta, \forall \beta \in M \quad (4.27)$$

Nótese que la expresión (4.22) obliga a que se cumpla para cada arista intracapa, que si el nodo del que sale la arista está en la cobertura, el nodo al que llega la arista debe estar cubierto. La restricción (4.23) obliga a que se cumpla lo mismo, pero para las aristas intracapa.

Por otro lado, la restricción (4.25) obliga a que el número de nodos de la cobertura sea k , y la restricción (4.24) obliga a que todo nodo de la cobertura se considere cubierto, y si un nodo no está en la cobertura, puede ser cubierto por otro nodo.

Finalmente, las restricciones (4.26) y (4.27) obligan a que si un nodo está cubierto, al menos uno de los nodos adyacentes a él debe estar en la cobertura.

Veremos a continuación un ejemplo en el que vamos a considerar el problema puntual de cobertura con 2 vértices para un grafo multicapa. Consideremos el grafo de la Figura 4.1. Hemos implementado en Python 3 el código relativo a la formulación de la programación matemática del problema, y hemos usado el *solver* Gurobi para resolverlo. El código puede verse en el Apéndice A. Obtenemos como solución que v_1^1 y v_2^1 forman la cobertura, y que todos los vértices excepto el v_4^2 están cubiertos.

4.5.1. Generalización del problema puntual de máxima cobertura con k vértices

Pese a que el problema que acabamos de estudiar conforma el problema clásico de cobertura con k vértices, es lógico pensar que el hecho de introducirles un determinado peso a las aristas del grafo considerado, y que este peso sea la distancia, tal y como la hemos definido anteriormente, crea la necesidad de generalizar el problema anterior.

Un subconjunto V^k del conjunto de vértices $V = \bigcup_{\alpha=1}^M V_\alpha$ de un grafo multicapa \mathcal{M} con n vértices se dice que es una cobertura de radio r de \mathcal{M} si

$$d(v_i^\alpha, V^k) \leq r, \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \text{ con } \alpha \in M$$

para un radio r dado, y ningún otro subconjunto de V^k tiene la misma propie-

dad. Nuestro objetivo es encontrar una cobertura de \mathcal{M} que contenga k vértices y cubra el máximo número posible de vértices o nodos.

A continuación, veamos cuáles serían las variables de nuestro problema:

$$x_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i^\alpha \text{ está cubierto} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$y_i^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i^\alpha \text{ pertenece al cobertura.} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definimos para cada v_i^α el conjunto formado por todos los vértices que se encuentran a una distancia menor o igual que el r dado:

$$N_i^\alpha = \{v_j^\beta \in V_\beta \mid d(v_i^\alpha, v_j^\beta) \leq r\}$$

Nótese que $d(v_i^\alpha, v_i^\alpha) = 0$, por lo que se tiene que cada vértice pertenece a su propio conjunto N_i^α . La formulación del problema sería la siguiente:

$$\text{máx} \sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha \quad (4.28)$$

$$\text{s.a } x_j^\beta \geq y_i^\alpha, \forall v_i^\alpha \in V_\alpha, \forall v_j^\beta \in N_i^\alpha, \forall \alpha, \beta \in M \quad (4.29)$$

$$\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} y_i^\alpha = k \quad (4.30)$$

$$x_j^\beta \leq \sum_{v_i^\alpha \in N_j^\beta} y_i^\alpha, \forall v_j^\beta \in V_\beta, \forall \beta \in M \quad (4.31)$$

Nótese que la expresión (4.29) obliga a que los vértices que se encuentren a una distancia menor de r de un vértice de la cobertura, estén cubiertos. La restricción (4.29) obliga a que se cumpla lo mismo, pero para las aristas intracapa.

Por otro lado, la restricción (4.30) obliga a que el número de nodos de la cobertura sea k , y la restricción (4.31) obliga a que si un nodo está cubierto, debe

haber al menos un nodo en la cobertura a una distancia menor o igual que r de dicho nodo.

4.5.2. Problema restringido

Al igual que hicimos en el capítulo anterior, a continuación veremos como plantear los problemas que hemos visto de forma que la estructura multicapa sea imprescindible para su adecuada resolución. En esta sección, vamos a introducir también una restricción que obliga a que en cada capa debe haber un mínimo número de nodos cubiertos.

Una primera opción sería obligar a que cada capa tuviera que tener una cantidad fijada de antemano de nodos cubiertos. Para ello, basta considerar el vector m -dimensional γ , cuyas componentes son constantes, y el siguiente conjunto de restricciones:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha \geq \gamma_\alpha, \forall \alpha = 1, \dots, m \quad (4.32)$$

Una segunda opción podría ser considerar la restricción que obliga a que el número de nodos cubiertos sea menor o igual a la parte entera inferior del total de nodos cubiertos entre el número de capas:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha \geq \left\lfloor \frac{\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha}{m} \right\rfloor, \forall \alpha = 1, \dots, m \quad (4.33)$$

Al igual que en el caso de los problemas del tipo origen destino, esta restricción puede resultarnos conveniente si tenemos el mismo número de vértices en cada capa. Pero si esto no ocurre, la restricción carece de sentido. Combinando las dos anteriores, podemos considerar el vector estocástico m -dimensional γ , cuyas componentes son constantes, donde cada una representa la proporción de la cantidad total de nodos cubiertos que buscamos que tenga cada capa. La restricción a considerar sería:

$$\sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha \geq \gamma_\alpha \left\lfloor \frac{\sum_{\alpha \in M} \sum_{v_i^\alpha \in V_\alpha} x_i^\alpha}{m} \right\rfloor, \forall \alpha = 1, \dots, m \quad (4.34)$$

4.6. Problema puntual con varios pesos para cada arista

Nos planteamos a continuación una variante de los problemas anteriores. En ella, vamos a suponer que las aristas de una determinada capa α tienen un peso extra al que ya tienen sólo cuando son usadas para acceder desde un vértice $v_i^\beta \in V_\beta$, con $\beta \neq \alpha$, a un vértice $v_j^\alpha \in V_\alpha$.

Es evidente que la matriz de distancias \mathcal{D} que hemos definido para un grafo multicapa no nos vale para este problema, siendo necesario redefinir una nueva matriz de distancias que depende de ciertos parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, con un $\lambda_i \geq 1$ asociado a cada capa. De esta forma, una arista $(v_p^\alpha, v_q^\alpha) \in E_\alpha$ tendrá un peso asociado $\lambda_\alpha r_{(v_p^\alpha, v_q^\alpha)}$ si esa arista se usa para ir desde un vértice v_i^γ perteneciente a otra capa a un vértice v_j^α de esa capa, mientras que dicha arista tendrá un peso asociado distinto $r_{(v_p^\alpha, v_q^\alpha)}$ si solo se usa para ir de vértices a vértices de una misma capa α . Nótese que si se usara una arista para ir de un vértice a otro de una misma capa, pero dicha capa fuera distinta que la capa a la que pertenece la arista, también tendría peso $\lambda_\alpha r_{(v_p^\alpha, v_q^\alpha)}$.

De esta forma, redefinimos la matriz de distancias, dependiendo ésta ahora de los nuevos parámetros. La designamos por $\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. En la mayoría de los casos se tendrá que será menos costoso ir por un camino perteneciente a una cierta capa para ir de un vértice a otro, ambos de esa misma capa, que utilizar aristas de otras capas con dicho fin. Si esto ocurre para cada pareja de vértices de una capa, y lo mismo ocurre en cada una de las capas, entonces la matriz $\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ sería la siguiente:

$$\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \begin{bmatrix} D^1 & D^{12}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) & \cdots & D^{1m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ D^{21}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) & D^2 & \cdots & D^{2m}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{m1}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) & D^{m2}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) & \cdots & D^m \end{bmatrix}$$

Es decir, las submatrices que conforman los bloques de la diagonal principal, no dependen de los parámetros.

Estas nuevas matrices de distancias no son simétricas, pues mientras que antes

se tenía que $d(v_p^\alpha, v_q^\beta) = d(v_q^\beta, v_p^\alpha)$, ahora esto no tiene por qué darse. Sin ir más lejos, la distancia $d(v_p^\alpha, v_q^\beta)$ dependerá al menos del parámetro λ_β si usa aristas intracapa de E_β , mientras que $d(v_q^\beta, v_p^\alpha)$ dependerá al menos del parámetro λ_α si usa aristas intracapa de E_α . Por otro lado, si $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1$, entonces $\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathcal{D}$. Si $\lambda_i = 1$ para alguna capa i , eso significa que esa capa no tiene sus aristas con un peso extra al usarse por vértices de otra capa, sino que el peso sería el mismo que si se usara dicha arista para ir de un vértice a otro de esa misma capa.

Vamos a ilustrar todo esto con un ejemplo. Para ello, vamos a considerar el grafo de la Figura 4.9, y vamos a tomar los siguientes valores de los parámetros: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 5$. La matriz de distancias que obtenemos sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 1+4\lambda_1 & 2 & 4+4\lambda_1 & 8+\lambda_2 & 9+\lambda_2 & 10+\lambda_2 \\ 4 & 0 & 2 & 1+4\lambda_1 & 1 & 2+4\lambda_1 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 1+3\lambda_1 & 1+2\lambda_1 & 2+3\lambda_1 & 4+2\lambda_1 & 6+2\lambda_1 & 7+2\lambda_1 & 8+2\lambda_1 \\ \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 & 9+\lambda_2 & 7+\lambda_2 & 8+\lambda_2 & 9+\lambda_2 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 1+\lambda_2 & 5+\lambda_2 & 4+\lambda_2 & 1 & 6 & 0 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ \\ 8 & 4 & 6 & 8+2\lambda_3 & 3 & 9 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 8+\lambda_2 & 4+2\lambda_3 & 6+2\lambda_3 & 8 & 3+2\lambda_3 & 7 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 8+\lambda_2+\lambda_3 & 4+3\lambda_3 & 6+3\lambda_3 & 8+\lambda_3 & 3+3\lambda_3 & 7+\lambda_3 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 8+\lambda_2+2\lambda_3 & 4+4\lambda_3 & 6+4\lambda_3 & 8+2\lambda_3 & 3+4\lambda_3 & 7+2\lambda_3 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si sustituimos los valores de λ , obtendríamos la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & 1 & 13 & 2 & 16 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 0 & 2 & 13 & 1 & 14 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 10 & 7 & 11 & 10 & 12 & 13 & 14 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 7 & 1 & 13 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 0 & 6 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 9 & 8 & 1 & 6 & 0 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 18 & 3 & 9 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 12 & 14 & 16 & 8 & 13 & 7 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 17 & 19 & 21 & 13 & 18 & 12 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 22 & 24 & 26 & 18 & 23 & 17 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bastaría a esta matriz aplicar los procedimientos conocidos para hallar el centro y la mediana para calcularlos. Calculamos así el máximo de cada columna y nos quedamos con el valor mínimo:

$$\text{mín}\{22, 24, 26, 18, 23, 17, 16, 12, 13, 14\} = 12$$

que es el correspondiente a v_4^3 , el cual sería pues el centro de \mathcal{M} . Para la mediana, sumamos los valores de cada columna, y nos quedamos con el valor mínimo de estas sumas:

$$\text{mín}\{77, 82, 86, 89, 91, 79, 64, 57, 63, 71\} = 57$$

que se vuelve a corresponder con v_4^3 , el cual también sería la mediana de \mathcal{M} en este caso.

En este ejemplo, debe destacarse que para ir de v_2^3 a v_4^2 en el caso en el que las aristas solo tienen un peso, da lo mismo seguir el camino $v_2^3 - v_2^2 - v_4^2$ que el camino $v_2^3 - v_4^3 - v_4^2$, pues la distancia recorrida en ambos casos es 9. Lo mismo ocurre con el trayecto inverso para ir de v_4^2 a v_2^3 . Sin embargo, si las aristas tienen dos pesos, el camino $v_2^3 - v_2^2 - v_4^2$ tiene asociada una distancia $3 + 6\lambda_2$, mientras que el camino $v_2^3 - v_4^3 - v_4^2$ tiene asociada una distancia 9. En tal caso, la primera opción conlleva un mayor coste.

Para hallar la p -mediana y el p -centro, los procedimientos serían totalmente análogos a los realizados para grafos multicapa donde las aristas solo tengan un peso, con la salvedad de que la matriz de distancias considerada en cada caso es $\mathcal{D}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Conclusiones

En este trabajo, hemos estudiado los principales problemas de localización y transporte en un tipo de grafos con una estructura que generaliza a la de los grafos con la topología clásica: los grafos multicapa. Hemos visto que existen numerosas situaciones que no son posibles de modelar mediante la Teoría de Grafos clásica, pues considerar esta estructura intrínseca en cada una de las situaciones conllevaría una gran pérdida de información y un modelo nada representativo con el caso real. Por ello, en este trabajo hemos utilizado la estructura de las redes multicapa y hemos detectado problemas de localización en esta estructura no reducibles a problemas en grafos con la topología clásica.

Nos hemos centrado en dos tipos de problemas de localización sumamente diferenciados, dentro de los cuales hemos profundizado en el problema de la mediana, el problema del centro y el problema de cobertura, así como diversas generalizaciones de los mismos. Por un lado, hemos visto los problemas de diseño de redes en los que tenemos pares origen-destino que debemos satisfacer atendiendo a diferentes condiciones impuestas y objetivos. Por otro lado, hemos visto los problemas puntuales de localización, en los que ya no tenemos pares origen-destino que satisfacer, sino que hemos consideraremos diferentes objetivos teniendo en cuenta los nodos del grafo, sin distinguir si un nodo es origen o destino de algún par.

Con este trabajo queda asentada una base para posibles investigaciones en el campo de la localización en redes complejas. Existen numerosas extensiones de los problemas presentes en el trabajo que pueden formularse, dependiendo de casos y situaciones con condiciones más específicas. La naturaleza compleja de los sistemas que tienen lugar en la vida real requiere de la aplicación de dichos

problemas, así como de la consideración de la estructura multicapa intrínseca en los mismos, para poder modelarlos, entenderlos y manipularlos convenientemente. Queda así justificada la gran importancia y utilidad de su estudio, así como lo significativo que resulta la continuación en su investigación.

Bibliografía

- [1] C. Berge, *Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets*, North-Holland, 1989.
- [2] O. Berman, D. Einav, G. Handler, *The zone-constrained location problem on a network*, European Journal of Operational Research 53 (1991) 14-24, North-Holland.
- [3] S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C. I. del Genio, J. Gómez-Gardenes, M. Romance, I. Sendiña-Nadal, Z. Wang, M. Zanin, *The structure and dynamics of multilayer networks*, Physics Reports, 544(1), 1-122 (2014).
- [4] M. Coscia, *Multidimensional network analysis (Ph.D. thesis)*, Università Degli Studi Di Pisa, Dipartimento di Informatica, 2012.
- [5] R. Criado, J. Flores, A. García del Amo, J. Gómez-Gardeñes, M. Romance, *A mathematical model for networks with structures in the mesoscale*, Int. J. Computer Math. 89 (3) (2012) 219-309.
- [6] J. Donges, H. Schultz, N. Marwan, Y. Zou, J. Kurths, *Investigating the topology of interacting networks*, The European Physical Journal B 84 (4) (2011) 635-651. <http://dx.doi.org/10.1140/epjb/e2011-10795-8>.
- [7] J. Elzinga and D.W. Hearn, *Geometrical solutions for some minimax location problems*, Transport. Sci. 6, 379-394 (1972).
- [8] G.N. Frederickson, *Parametric search and locating supply centers in trees*. LNCS, vol. 519, pp. 299–319. Springer, Heidelberg (1991)
- [9] S. L. Hakimi, *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*, The Technological Institute, Northwestern University, Evanston, Illionis (1965) 462-475.
- [10] S. L. Hakimi, *Optimum locations of switching centers and the absolute cen-*

- ters and medians of a graph*, Northwestern University, Evanston, Ill (1964) 450-459.
- [11] J. P. Holme, *Temporal networks*, Physics Reports 519 (3) (2012) 97-125.
- [12] O. Kariv, S.L. Hakimi, *An algorithmic approach to network location problems, Part I: The p -centers*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 37(3), 513-538.
- [13] O. Kariv, S.L. Hakimi, *An algorithmic approach to network location problems, Part II: The p -medians*, SIAM Journal on Applied Mathematics, Volume 37, 539-560
- [14] N. Megiddo, A. Tamir, *New results on the complexity of p – center problems*, SIAM J Comput 12:751-758 (1983).
- [15] E. Minieka, *The M -center problem*, Tech. Rep. 24, Administrative Sciences Department. Yale University, New Heaven, Connecticut (1968) 138-139.
- [16] M. Schmidt, A. Schöbel, *Location of speed-up subnetworks*, Annals of Operations Research (2014), 223, 379-401.
- [17] J. Scott, *Social Network Analysis: A Handbook*, SAGE Publications, London, 2000.
- [18] L. Solá, M. Romance, R. Criado, J. Flores, A. García del Amo, S. Boccaletti, *Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks*, Chaos 23 (3) (2013) 003131.
- [19] S. Wasserman, K. Faust, *Social Networks Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [20] M. Zanin, F. Lillo, *Modelling the air transport with complex networks: a short review*, The European Physical Journal Special Topics, 215 (1) (2013) 5-21. <http://dx.doi.org/10.1140/epjst/e2013-01711-9>.

Apéndice A

```
[6]: from gurobipy import*
import numpy as np
```

```
[7]: # DATOS:
nodos = np.array([[1,2,3,0],
                  [1,2,0,4]])

aristasaux = [[(1,1),(2,1),4],
              [(1,1),(3,1),3],
              [(2,1),(3,1),2],
              [(1,2),(4,2),1],
              [(4,2),(2,2),6],
              [(1,1),(1,2),1],
              [(2,1),(2,2),1]]

aristas = aristasaux
for i in range(len(aristasaux)):
    aristas.
    ↪append([aristasaux[i][1],aristasaux[i][0],aristasaux[i][2]])
print(aristas)

# Llamamos n al número de vertices que tiene mi grafo multicapa,
↪en total
# Para hallarlo, veremos cuantos elementos de la matriz no son 0:
numcapas = nodos.shape[0]
nummaxnodos = nodos.shape[1]
```

```
k = 2
```

```
[[ (1, 1), (2, 1), 4], [(1, 1), (3, 1), 3], [(2, 1), (3, 1), 2],  
→ [(1, 2), (4, 2),  
1], [(4, 2), (2, 2), 6], [(1, 1), (1, 2), 1], [(2, 1), (2, 2), 1],  
→ [(2, 1), (1,  
1), 4], [(3, 1), (1, 1), 3], [(3, 1), (2, 1), 2], [(4, 2), (1, 2),  
→ 1], [(2, 2),  
(4, 2), 6], [(1, 2), (1, 1), 1], [(2, 2), (2, 1), 1]]
```

```
[8]: # Model  
m = Model("pbpuntualcobertura")
```

Using license file C:\Users\maria\gurobi.lic
Academic license - for non-commercial use only

```
[9]: z = {}  
y = {}
```

```
[10]: for a in range(numcapas):  
    for i in range(nummaxnodos):  
        if nodos[a,i] != 0:  
            z[(i,a)] = m.addVar(vtype=GRB.BINARY, name="z%d,%d" %  
→ (i,a))  
# Creamos una variable  $z_{i}^{\alpha}$  para cada nodo, es decir,  
# para cada elemento de la matriz nodos que no sea nulo (si es  
# nulo significa que ese nodo no existe). Las z son las x en la  
→ teoria  
  
for a in range(numcapas):  
    for i in range(nummaxnodos):  
        if nodos[a,i] != 0:  
            y[(i,a)] = m.addVar(vtype=GRB.BINARY, name="y%d,%d" %  
→ (i,a))  
# Lo mismo hacemos con las  $y_{i}^{\alpha}$ 
```

```
[11]: m.update()
```

```
[24]: y
```

```
[24]: {(0, 0): <gurobi.Var y0,0 (value 1.0)>,
      (1, 0): <gurobi.Var y1,0 (value 1.0)>,
      (2, 0): <gurobi.Var y2,0 (value -0.0)>,
      (0, 1): <gurobi.Var y0,1 (value -0.0)>,
      (1, 1): <gurobi.Var y1,1 (value -0.0)>,
      (3, 1): <gurobi.Var y3,1 (value -0.0)>}
```

```
[26]: for i in y.keys():
      print('y',i)
```

```
y (0, 0)
y (1, 0)
y (2, 0)
y (0, 1)
y (1, 1)
y (3, 1)
```

```
[27]: z
```

```
[27]: {(0, 0): <gurobi.Var z0,0 (value 1.0)>,
      (1, 0): <gurobi.Var z1,0 (value 1.0)>,
      (2, 0): <gurobi.Var z2,0 (value 1.0)>,
      (0, 1): <gurobi.Var z0,1 (value 1.0)>,
      (1, 1): <gurobi.Var z1,1 (value 1.0)>,
      (3, 1): <gurobi.Var z3,1 (value -0.0)>}
```

```
[15]: # Añadimos las restricciones:
      # Esta significa que si un nodo esta en la cobertura, todos los
      ↪nodos adyacentes a el estaran cubiertos.
      # Sin embargo, si un nodo no esta en la cobertura, los nodos
      ↪adyacentes a el pueden estar cubiertos o no.
      for i in range(len(aristas)):
          m.addConstr(y[(aristas[i][0][0]-1,aristas[i][0][1]-1)] <=
                      z[(aristas[i][1][0]-1,aristas[i][1][1]-1)])
```

```
[16]: # Esta restricción implica que si un nodo está en la cobertura,
      ↪ éste está cubierto.
      # Si un nodo no está en la cobertura, éste puede estar cubierto o
      ↪ no.
      for i in range(len(aristas)):
          m.addConstr(y[(aristas[i][0][0]-1,aristas[i][0][1]-1)] <=
                      z[(aristas[i][0][0]-1,aristas[i][0][1]-1)])
```

```
[17]: # Esta restricción implica que el número de nodos de la cobertura
      ↪ es k
      m.addConstr(quicksum(y[(i,a)] for i in range(nummaxnodos)
                          for a in range(numcapas) if nodos[a,i] != 0)
                  == k)
```

```
[17]: <gurobi.Constr *Awaiting Model Update*>
```

```
[18]: # Esta restricción implica que si un nodo está cubierto, al menos
      ↪ uno de los nodos
      # adyacentes a él deben estar en la cobertura.
      for i in range(len(aristas)):
          m.addConstr(z[(aristas[i][0][0]-1,aristas[i][0][1]-1)] <=
                      quicksum(y[(aristas[j][1][0]-1,aristas[j][1][1]-1)] for j in
                                range(len(aristas))
                                if aristas[j][0][0] == aristas[i][0][0]
                                and aristas[j][0][1] == aristas[i][0][1]))
```

```
[1]: #for i in range(len(aristas)):
      #    for j in range(len(aristas)):
      #        if aristas[j][0][0] == aristas[i][0][0] and
      ↪ aristas[j][0][1] == aristas[i][0][1]:
      #            print('z',aristas[i][0], '<= y',aristas[j][1])
```

```
[20]: # El objetivo es maximizar el numero de nodos cubiertos
      m.modelSense = GRB.MAXIMIZE
```

```
[21]: m.setObjective(quicksum(z[(i,a)] for i in range(nummaxnodos) for
      ↪ a in range(numcapas) if nodos[a,i] != 0))

m.optimize()
```

Gurobi Optimizer version 9.0.0 build v9.0.0rc2 (win64)
 Optimize a model with 43 rows, 12 columns and 110 nonzeros
 Model fingerprint: 0x67d7da78

Variable types: 0 continuous, 12 integer (12 binary)

Coefficient statistics:

```
Matrix range      [1e+00, 1e+00]
Objective range   [1e+00, 1e+00]
Bounds range      [1e+00, 1e+00]
RHS range         [2e+00, 2e+00]
```

Presolve removed 16 rows and 0 columns

Presolve time: 0.00s

Presolved: 27 rows, 12 columns, 66 nonzeros

Variable types: 0 continuous, 12 integer (12 binary)

Found heuristic solution: objective 4.0000000

Found heuristic solution: objective 5.0000000

Root relaxation: infeasible, 7 iterations, 0.00 seconds

Nodes		Current Node			Objective Bounds			
Expl	Unexpl	Obj	Depth	IntInf	Incumbent	BestBd	Gap	It/
↪	Work							
↪	Node Time							
0	0	infeasible	0		5.00000	5.00000	0.00%	
↪	-	0s						

Explored 0 nodes (7 simplex iterations) in 0.03 seconds

Thread count was 4 (of 4 available processors)

Solution count 2: 5 4

Optimal solution found (tolerance 1.00e-04)

Best objective 5.000000000000e+00, best bound 5.000000000000e+00,
 ↪ gap 0.0000%

```
[22]: m.write('pbpuntualcovering.lp')
```

```
[23]: m.printAttr('x')
```

Variable	x
z0,0	1
z1,0	1
z2,0	1
z0,1	1
z1,1	1
y0,0	1
y1,0	1

Luego obtenemos que v_1^1 y v_2^1 forman la cobertura, y que todos los vértices excepto el v_4^2 están cubiertos.