TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trans S-variedades

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Máster Universitario en Matemáticas

Realizado por

Ana María Bermudo Martos

Facultad de Matemáticas

—

Sevilla, febrero 2020

A mi padre, por confiar siempre en mí
y apoyarme en todo
momento.

Abstract

This paper introduces and studies a new class of f -metric manifolds, called it Trans S -varieties that includes many of the classes already known in the literature of such manifolds: S-manifolds, C-manifolds, f-Kenmotsu type manifolds, generalized Kenmotsu manifolds, s-ths S-homothetic manifols,... and that generalizes the manifolds studied trans-Sasakian manifolds. In addition, relevant examples of such trans S-manifolds are presented, using the generalized D-conformation deformations and analyzing what type of hypersurfaces of yours the structure inherit depending on the behavior of the operator form of the inmersion.

Resumen

En este trabajo se introduce y estudia una nueva clase de f-variedades métricas, denominadas *Trans S-variedades* que engloba muchas de las clases ya conocidas en la literatura de tales variedades: S-variedades, C-variedades, f-variedades de tipo Kenmotsu, variedades Kenmotsu generalizadas, s-ésimas S-variedades homotéticas,... y que generaliza las ampliamente estudiadas variedades trans-Sasakianas. Además, se presentan ejemplos relevantes de tales trans S-variedades, usando las deformaciones D-conforme generalizadas y analizando qué tipo de hipersuperficies suyas heredan la estructura dependiendo del comportamiento del operador forma de la inmersión.

Índice

Introducción

En geometría compleja, las relaciones entre las diferentes clases de variedades pueden resumirse en el conocido diagrama de Blair (ver [3]):

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Complex}} \arrow[r, "metric"] & \boxed{\text{Hermitian}} \arrow[r, "d\Omega=0"] & \boxed{\text{Kaehler}} \\
\boxed{\text{Almost Complex}} \arrow[u, "{[J,J]=0}"] \arrow[r, "metric"] & \boxed{\text{Almost Hermitian}} \arrow[u, "{[J,J]=0}"] \arrow[r, "d\Omega=0"] \arrow[ur, "\nabla J=0"] & \boxed{\text{Almost Kaehler}} \arrow[u, "{[J,J]=0}"]
\end{tikzcd}$$

En el caso de geometría de contacto tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Normal Almost Contact}} \arrow[r, "metric"] & \boxed{\text{Normal Almost Contact Metric}} \arrow[r, "\Phi=d\eta"] & \boxed{\text{Sasakian}} \\
\boxed{\text{Almost Contact}} \arrow[u, "normal"] \arrow[r, "metric"] & \boxed{\text{Almost Contact Metric}} \arrow[u, "normal"] \arrow[r, "\Phi=d\eta"] \arrow[ur, "(1)"] & \boxed{\text{Contact Metric}} \arrow[u, "normal"]
\end{tikzcd}$$

En el diagrama de arriba la estructura casi contacto (ϕ, η, ξ) se dice que es normal si $[\phi, \phi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ y la condición (1) es

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

para cualquier campo de vectores tangentes X e Y.

Además, se dice que una variedad métrica casi contacto (M, ϕ, ξ, η, g) tiene una estructura (α, β) trans-Sasakiana si (ver [14] para más detalles)

$$(\nabla_X \phi)Y \;=\; \alpha\{g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\} + \beta\{g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X\}, \qquad (1)$$

donde α, β son funciones diferenciables (llamadas funciones características) en M. Casos particulares de variedades trans-Sasakianas son

- Variedades Sasakianas, $\alpha = 1, \beta = 0$.
- Variedades cosimplecticas, $\alpha = \beta = 0$.

- Variedades Kenmotsu, $\alpha = 0, \beta = 1$.

De hecho, podemos extender el diagrama anteriormente visto a

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix} Normal\ Almost \\ Contact\ Metric \end{matrix}} \arrow[r, "(3)"] & \boxed{Trans - Sasakian} \\
\boxed{\begin{matrix} Almost \\ Contact\ Metric \end{matrix}} \arrow[u, "normal"] \arrow[ur, "(1)"] \arrow[r, "(2)"] & \boxed{\begin{matrix} Almost \\ Trans - Sasakian \end{matrix}} \arrow[u, "normal"']
\end{tikzcd}$$

donde

$$d\Phi = \Phi \wedge (\phi^*(\delta\Phi) - (\delta\eta)\eta), \quad d\eta = \frac{1}{2n}\{\delta\Phi(\xi)\Phi - 2\eta \wedge \phi^*(\delta\Phi)\}. \tag{2}$$

y:

$$d\Phi = \frac{-1}{n}\delta\eta(\Phi \wedge \eta), \quad d\eta = \frac{1}{2n}\delta\Phi(\xi)\Phi, \quad \phi^*(\delta\Phi) = 0. \tag{3}$$

Más generalmente, K. Yano [18] introdujo la noción de f-estructura en variedades $(2n+s)$-dimensionales como un campo de tensores f de tipo $(1,1)$ y rango $2n$ satisfaciendo $f^3 + f = 0$. Las estructuras casi complejas ($s = 0$) y casi contacto ($s = 1$) son ejemplos conocidos de f-estructuras. En este contexto, D.E. Blair [2] definió las K-variedades (y casos particulares de S-variedades y C-variedades). Así, las K- variedades son análogas a las variedades Kaehlerianas en la geometría casi compleja y las S-variedades (respectivamente, C-variedades) a las variedades Sasakianas (respectivamente variedades cosimplecticas) en la geometría casi contacto. Consecuentemente, se puede obtener un diagrama similar para las f-variedades métricas, esto es, variedades dotadas con una f-estructura y una métrica compatible.

El propósito del presente trabajo es introducir una nueva clase de f-variedades métrica que generaliza el de las variedades trans-Sasakianas. En este contexto, nos damos cuenta que ha habido una generalización previa de variedades $(\alpha, 0)$-trans-Sasakianas para las f-variedades métricas. Fue debido a I. Hasegawa, Y. Okuyama y T. Abe quienes introdujeron las llamadas *variedades Riemannianas s-contacto homotéticas* en [9] como f-variedades métricas tales que $2c_i g(fX, Y) = d\eta_i(X, Y)$ para ciertas constantes no nulas c_i, $i = 1, \ldots, s$ (realmente, ellos usan p en lugar de s). En particular, si los campos de estructura ξ_i son campos de tipo Killing y la f-estructura es también normal, la variedad se denomina *variedad s-ésima Sasakiana homotética.* Ellos probaron que una variedad Riemanniana s-contacto homotética es una variedad s-ésima Sasakiana homotética si y solo si

$$(\nabla_X f)Y \; = -\sum_{i=1}^{s} c_i\{g(fX, fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\},$$

y

$$\nabla_X \xi_i = c_i fX,$$

para todo campo de vectores tangente X e Y y para cualquier $i = 1, \ldots, s$.

Más recientemente, M. Falcitelli y A.M. Pastore han introducido las f-estructuras de tipo Kenmotsu como f-variedades métricas normales con $dF = 2\eta^1 \wedge F$ y $d\eta^i = 0$ para $i = 1, \ldots, s$ [6]. En este contexto, L. Bhatt y K.K. Dube [1] y A. Turgut Vanli y R. Sari [17] han estudiado un tipo más general de f-variedades Kenmotsu para el cual todas las estructuras 1-formas η_i son cerradas y:

$$dF = 2\sum_{i=1}^{s} \eta_i \wedge F.$$

Estos ejemplos motivan la idea de introducir la ya mencionada nueva clase de f-variedades métricas, que incluya a las anteriores, las cuales se llamarán *trans-S-variedades* porque las variedades trans-Sasakianas llegarán a ser un caso particular de ellas.

Así, tras establecer en el Capítulo 1 las principales definiciones y conceptos relativos a la geometría de f-variedades métricas, en el Capítulo 2 se define la noción de *casi trans S-variedad* como aquella f-variedad métrica

$$(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_s, g)$$

tal que la conexión de Levi-Civita asociada a g verifica

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = \sum_{i=1}^{s} \big[& \alpha_i\{g(fX, fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\} \\ & + \beta_i\{g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX\}\big],\end{aligned}$$

para ciertas funciones diferenciables en M (llamadas **funciones características**) α_i, β_i, $i = 1....s$, y para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Si, además, M es normal, entonces se dice que es una **trans S-variedad**. Se comprueba que, en el caso $s = 1$, una trans S-variedad es una variedad trans-Sasakiana. Es sabido que, además, en este caso, la condición sobre la conexión implica la normalidad de la estructura, algo que no ocurre cuando $s \geq 2$.

El resto del capítulo está dedicado a estudiar las primeras propiedades de este tipo de f-variedades métricas, destacando que se caracterizan como trans S-variedades, en función de las funciones características, las K-variedades de Blair [2] y sus casos particulares de S-variedades y C-variedades.

El Capítulo 3 está dedicado a presentar diferentes ejemplos de este nuevo tipo de f-variedades métricas. Así, además de las k-variedades, S-variedades y C-variedades, tenemos que las variedades s-ésimas Sasakianas homotéticas de Hasegawa, Okuyama y Abe [9], las f-variedades de tipo Kenmotsu de Falcitelli y Pastore citefalcitelli y las variedades Kenmotsu generalizdas de Bhatt, Dube, Turgut Vanli y Sari [1, 17], son trans S-variedades, todas ellas con funciones características constantes.

Por ello, buscamos ejemplos con funciones características no constantes, para lo que usamos las transformaciones D-conformes generalizadas, obteniendo diferentes teoremas de caracterización. Finalmente, estudiamos las hipersuperficies de una tras S-variedad, probando que, en general, no heredan la estructura. Sin embargo, cuando la hipersuperficie es tangente a todos los campos de estructura de variedad y atendiendo al comportamiento del operador forma de la inmersión (si la hipersuperficie es totalmente geodésica, totalmente umbilical, totalmente f-geosésica, totalmente f-umbilical y pseudo-umbilical), obtenemos resultados que establecen si puede o no ser, a su vez, una trans S-variedad. Finalizamos el trabajo estudiando el caso en que la hipersuperficie sea normal a uno de los campos de estructura de la trans S-variedad ambiente.

Capítulo 1

f-variedades métricas

En este capítulo veremos que se entiende por f-variedad métrica e introduciremos una serie de conceptos básicos relacionados con estas que nos serán útiles para definir la nueva clase a la que hemos hecho referencia en la introducción.

1.1. Generalidades sobre f-variedades métricas.

Definición 1.1.1. *Una variedad Riemanniana $(2n+s)$-dimensional (M,g) dotada con una f-estructura f se denomina f-variedad métrica si, además, existen s campos de vectores globales $\xi_1,\dots,\xi_s$ en M (llamados campos de estructura) tales que, si $\eta_1,\dots,\eta_s$ son las 1-formas duales de $\xi_1,\dots,\xi_s$, entonces*

$$f\xi_i = 0;\ \ \eta_i \circ f = 0;\ \ f^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta_i \otimes \xi_i;$$

$$g(X,Y) = g(fX,fY) + \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Y), \tag{1.1}$$

para cualesquiera $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1,\dots,s$.

Nota 1.1.1. *Se observa que de (1.1),*

$$g(X,fY) = -g(fX,Y) \tag{1.2}$$

para cualesquiera $X,Y \in \mathcal{X}(M)$.

La distribución en M generada por los campos de estructura se denota por $\mathcal{M}$ y su distribución ortogonal complementaria por $\mathcal{L}$. Consecuentemente, $\mathcal{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Además, si $X \in \mathcal{L}$, entonces $\eta_i(X) = 0$, para cualquier $i = 1,\dots,s$ y si $X \in \mathcal{M}$, entonces $fX = 0$.

Para una f-variedad métrica M podemos construir bases ortonormales locales de campos tangentes. Para esto, sea U un entorno local en M y X_1 cualquier campo vectorial unitario en U, ortogonal a los campos de estructura vectoriales. Entonces, fX_1 es otro campo unitario ortogonal a X_1 y a los campos de estructura.

En efecto, se toma X_1 unitario tal que $X_1 \perp \xi_i$, $i = 1, \dots, s$. Entonces el vector unitario fX_1 es perpendicular tanto a los campos de estructura ξ_i, $i = 1, \dots, s$ como a X_1.

Se sabe, por la definición de f-variedad métrica (1.1) que

$$g(fX_1, \xi_i) = g(f^2X_1, f\xi_i) + \sum_{j=1}^{s} \eta_j(fX_1)\eta_j\xi_i = 0.$$

Por otro lado,

$$g(fX_1, X_1) = g(f^2X_1, X_1) + \sum_{i=1}^{s} \eta_i(fX_1)\eta_i(X_1).$$

En esta igualdad, $\sum_{i=1}^{s} \eta_i(fX_1)\eta_i(X_1)$ se anula ($\eta_i \circ f = 0$). Así,

$$\begin{aligned} g(fX_1, X_1) = g(f^2X_1, fX_1) &= g(-X_1, fX_1) + g\left(\sum_{i=1}^{s} (\eta_i \otimes \xi_i)(X_1), fX_1 \right) \\ &= g(-X_1, fX_1) = -g(fX_1, X_1). \end{aligned}$$

Así, llegamos a $2g(fX_1, X_1) = 0$, por lo que $g(fX_1, X_1) = 0$.

Ahora, si es posible, se elige un vector unitario X_2 ortogonal a los campos de estructura, a X_1 y afX_1. Entonces, fX_2 es también un vector unitario ortogonal a los campos de estructura, a X_1, a fX_1 y a X_2. Procediendo de esta manera, se obtiene una base local ortonormal $\{X_i, fX_i, \xi_j\}$, $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, s$, llamada *f-base.*

Sea F la 2-forma en M definida, en virtud de (1.2), por $F(X, Y) = g(X, fY)$, para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Como f es de rango $2n$, entonces

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_s \wedge F^n \neq 0$$

y, en particular, M es orientable.

Definición 1.1.2. *Una f-variedad métrica se llama variedad métrica f-contacto si para todo $i = 1, \dots, s$*

$$F = d\eta_i.$$

Veamos ahora el concepto de normalidad en las f-variedades métricas.

Definición 1.1.3. *La f-estructura f es normal si*

$$[f, f] + 2\sum_{i=1}^{s} \xi_i \otimes d\eta_i = 0, \tag{1.3}$$

donde $[f, f]$ denota el tensor de Nijenhuis de f.

Nota 1.1.2. *Dado f, un campo de tensores de tipo $(1,1)$, se define el tensor de Nijenhuis de f como un campo de tensores de tipo $(1,2)$ dado por:*

$$[f,f](X,Y) = [fX,fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] + f^2[X,Y],$$

donde $[X,Y]$ denota el operador corchete de Lie, definido por:

$$[X,Y] = X(fY) - Y(Xf).$$

Proposición 1.1.1. *Si f es normal, entonces*

$$[\xi_i, \xi_j] = 0, \tag{1.4}$$

para todos $i, j = 1, \ldots, s$.

Demostración. En efecto, $[f,f](\xi_j,\xi_k) = [f\xi_j, f\xi_k] - f[f\xi_j,\xi_k] - f[\xi_j, f\xi_k] + f^2[\xi_j,\xi_k]$. Como, $f\xi_i = 0$, $i = 1, \ldots, s$,

$$[f,f](\xi_j,\xi_k) = f^2[\xi_j,\xi_k] \tag{1.5}$$

Aplicando que f es normal (1.3),

$$0 = [f,f](\xi_j,\xi_k) + 2\sum_{i=1}^{s} \xi_i \otimes d\eta_i(\xi_j,\xi_k)$$

y empleando (1.5) y que $2d\eta_i(\xi_j,\xi_k) = \xi_j\eta_i(\xi_k) - \xi_k\eta_i(\xi_j) - \eta_i([\xi_j,\xi_k])$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= -[\xi_j,\xi_k] + \sum_{i=1}^{s} \eta_i([\xi_j,\xi_k])\xi_i + 2\sum_{i=1}^{s} \xi_i \otimes d\eta_i(\xi_j,\xi_k) \\ &= -[\xi_j,\xi_k] + \sum_{i=1}^{s} \eta_i([\xi_j,\xi_k])\xi_i - \sum_{i=1}^{s} \eta_i([\xi_j,\xi_k])\xi_i. \end{aligned}$$

Con esto, $[\xi_j,\xi_k] = 0$. □

1.2. Casos particulares.

En este apartado veremos algunos casos particulares de f-variedades métricas y algunas de las propiedades que se verifican en cada uno de esos casos.

Definición 1.2.1. *Una f-variedad métrica se llama K-variedad [2] si es normal y $dF = 0$.*

En una K-variedad M, los campos de estructura son campos de vectores de tipo Killing [2].

Definición 1.2.2.

(a) Llamamos S-variedad a cualquier K-variedad tal que $F = d\eta_i$, para todo i.

(b) Se denomina C-variedad a una K-variedad donde $d\eta_i = 0$, para todo i.

Nota 1.2.1. *Para $s = 0$, una K-variedad es una variedad Kaehleriana y, para $s = 1$, una K-variedad es una variedad casi-Sasakiana. En este caso, una S-variedad es una variedad Sasakiana y una C-variedad es una variedad cosimplectica.*

Cuando $s \geq 2$, pueden encontrarse ejemplos no triviales en [2, 9]. Además, tenemos los siguientes resultados de caracterización para S-variedades y C-variedades:

Proposición 1.2.1. *Una K-variedad M es una S-variedad si y solo si*

$$\nabla_X \xi_i = -fX, \ \ X \in \mathcal{X}(M), \ \ i = 1, \ldots, s, \tag{1.6}$$

y es una C-variedad si y solo si

$$\nabla_X \xi_i = 0, \ \ X \in \mathcal{X}(M), \ \ i = 1, \ldots, s. \tag{1.7}$$

Demostración. En el caso de S-variedad, si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1, \ldots, s$, tenemos

$$F(X, Y) = d\eta_i(X, Y) = g(\nabla_X \xi_i, Y),$$

por ser K-variedad. Por otro lado,

$$F(X, Y) = g(X, fY) = -g(fX, Y) = g(-fX, Y).$$

Con estas dos expresiones obtenemos que en una S-variedad, $\nabla_X \xi_i = -fX$. Por otra parte, como en una C-variedad se verifica que $d\eta_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s$, entonces,

$$0 = d\eta_i(X, Y) = g(\nabla_X \xi_i, Y),$$

lo que implica que $\nabla_X \xi_i = 0$.

□

Además, es fácil ver que se verifica:

Proposición 1.2.2. *En una S-variedad,*

$$(\nabla_X f)Y = \sum_{i=1}^{s} \left\{ g(fX, fY)\xi_i + \eta_i(Y) f^2 X \right\}, \tag{1.8}$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$

Demostración. Sea (M, f, g) una f-variedad métrica. Entonces, cualesquiera que sean $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, se cumple lo siguiente (ver [7])

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X f)Y, Z\big) =& 3dF(X, fY, fZ) + 3dF(X, Y, Z) \\ &+ g\Big([f, f](Y, Z) + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(Y, Z)\xi_i, fX\Big) \\ &+ \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\big((\mathcal{L}_{fY}\eta_i)Z - (\mathcal{L}_{fZ}\eta_i)Y\big) \\ &+ 2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(fY, X)\eta_i(Z) \\ &- 2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(fZ, X)\eta_i(Y). \end{aligned} \tag{1.9}$$

En particular, en una K-variedad se tiene que $dF = 0$, que cumple la normalidad y que los campos de estructura son de tipo Killing, por lo que de (1.9) obtenemos la siguiente expresión

$$g\big((\nabla_X f)Y, Z\big) = \sum_{i=1}^{s}\{d\eta_i(fY, X)\eta_i(Z) - d\eta_i(fZ, X)\eta_i(Y)\}. \tag{1.10}$$

Como hemos dicho anteriormente, en una S-variedad $d\eta_i = F$. Así, haciendo uso de la expresión (1.10) y de la definición de la 2-forma, podemos deducir la siguiente fórmula, para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_X f)Y, Z\big) &= \sum_{i=1}^{s}\{F(fY, X)\eta_i(Z) - F(fZ, X)\eta_i(Y)\} \\ &= \sum_{i=1}^{s}\{g(fY, fX)\eta_i(Z) - g(fZ, fX)\eta_i(Y)\} \\ &= \sum_{i=1}^{s}\{g(fY, fX)\eta_i(Z) + g(f^2X, Z)\eta_i(Y)\} \qquad (1.11) \\ &= \sum_{i=1}^{s}\{g(fY, fX)g(\xi_i, Z) + g(f^2X, Z)\eta_i(Y)\} \\ &= g\Big(\sum_{i=1}^{s}\{g(fY, fX)\xi_i + f^2X\eta_i(Y)\}, Z\Big). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene $(\nabla_X f)Y = \sum_{i=1}^{s}\{g(fY, fX)\xi_i + f^2X\eta_i(Y)\}$. □

Proposición 1.2.3. *En una C-variedad,*

$$\nabla f = 0. \tag{1.12}$$

Demostración. Usando la misma propiedad de las K-variedades que en la proposición anterior y sabiendo que en una C-variedad se verifica que $d\eta_i = 0$, para cualquier $i = 1, \ldots, s$, obtenemos directamente que para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ se cumple

$$g\big((\nabla_X f)Y, Z\big) = \sum_{i=1}^{s}\{d\eta_i(fY, X)\eta_i(Z) - d\eta_i(fZ, X)\eta_i(Y)\} = 0$$

de donde obtenemos $\nabla f = 0$. □

Capítulo 2

Trans S-variedades

La idea original para definir las variedades (α, β) trans-Sasakianas fue generalizar las variedades cosimplecticas, Kenmotsu y Sasakianas:

<table>
<tr><td>Kenmotsu:
$d\eta = 0, \text{normal}$</td><td rowspan="3">Casi-Sasakiana:
$d\Phi = 0,$
normal</td><td rowspan="3">Trans-Sasakiana:
$d\Phi = 2\beta(\Phi \wedge \eta),$
$d\eta = \alpha\Phi,$
$\phi^*(\delta\Phi) = 0,$
normal</td></tr>
<tr><td>Cosimplectica:
$d\Phi = 0, \quad d\eta = 0,$
normal</td></tr>
<tr><td>Sasakiana:
$\Phi = d\eta,$ normal</td></tr>
</table>

Por ello, las trans S-variedades deberán generalizar las variedades f-Kenmotsu, las C-variedades y las S-variedades.

2.1. Trans S-variedades.

Como se dijo en la introducción, una variedad casi contacto es trans-Sasakiana si y solo si se verifica (1). Entonces, se puede introducir la noción de trans S-variedad de una manera similar.

Definición 2.1.1. *Una f-variedad métrica M de dimensión $(2n+s)$ se dice que es una* **casi trans-S variedad** *si satisface*

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = \sum_{i=1}^{s} \big[&\alpha_i\{g(fX, fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\} \\ &+ \beta_i\{g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX\}\big],\end{aligned} \tag{2.1}$$

para ciertas funciones diferenciables en M (llamadas **funciones características***) α_i, β_i, $i = 1....s$, y para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Si, además, M es normal, entonces se dice que es una* **trans-S-variedad**.

Proposición 2.1.1. *Si $s = 1$, una trans-S-variedad es una variedad trans-Sasakiana. Además, en este caso, la condición (2.1) implica la normalidad de la estructura.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y &= \alpha_1\{(g(X,Y) - \eta_1(X)\eta_1(Y))\xi_1 + \eta_1(Y)(-X + \eta_1(X)\xi_1)\}\\ &+ \beta_1\{g(fX,Y)\xi_1 + \eta_1(Y)fX\}\\ &= \alpha_1\{g(X,Y)\xi_1 - \eta_1(X)\eta_1(Y)\xi_1 - \eta_1(Y)X + \eta_1(X)\eta_1(Y)\xi_1)\}\\ &+ \beta_1\{g(fX,Y)\xi_1 + \eta_1(Y)fX\}\\ &= \alpha_1\{g(X,Y)\xi_1 - \eta_1(Y)X\} + \beta_1\{g(fX,Y)\xi_1 + \eta_1(Y)fX\},\end{aligned}$$

y, comparando con la expresión (1) para $\phi = f$, $\beta = \beta_1$, $\alpha = \alpha_1$, $\xi = \xi_1$ y $\eta = \eta_1$, se deduce la normalidad de la estructura. □

Sin embargo, para $s \geq 2$, la normalidad no se deduce de (2.1). De hecho, se tiene que:

Proposición 2.1.2. *Para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,*

$$[f,f](X,Y) + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(X,Y)\xi_i = \sum_{i,j=1}^{s} [\eta_j(\nabla_X\xi_i)\eta_j(Y) - \eta_j(\nabla_Y\xi_i)\eta_j(X)]\,\xi_i, \quad (2.2)$$

que, en general, no es cero.

Demostración. Para probar esta igualdad partiremos del primer miembro, y haciendo su desarrollo, llegaremos al segundo de ellos. Por definición del Tensor de Nijenhuis,

$$[f,f](X,Y) = [fX,fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] + f^2[X,Y],$$

o, equivalentemente:

$$[f,f](X,Y) = (\nabla_{fX}f)Y - (\nabla_{fY}f)X + f(\nabla_Y f)X - f(\nabla_X f)Y.$$

Desarrollando término a término:

$$(\nabla_{fX}f)Y = \sum_{i=1}^{s}\big[\alpha_i\{g(f^2X,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^3X\}\big] + \sum_{i=1}^{s}\big[\beta_i\{g(f^2X,Y)\xi_i - \eta_i(Y)f^2X\}\big];$$

$$\begin{aligned}-(\nabla_{fY}f)X = &-\sum_{i=1}^{s}\big[\alpha_i\{g(f^2Y,fX)\xi_i + \eta_i(X)f^3Y\}\big]\\ &-\sum_{i=1}^{s}\big[\beta_i\{g(f^2Y,X)\xi_i - \eta_i(X)f^2Y\}\big];\end{aligned}$$

$$f(\nabla_Y f)X = \sum_{i=1}^{s}\alpha_i\eta_i(X)f^3Y - \sum_{i=1}^{s}\beta_i\eta_i(X)f^2Y;$$

$$-f(\nabla_X f)Y = -\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\eta_i(Y)f^3X + \sum_{i=1}^{s}\beta_i\eta_i(Y)f^2X.$$

Sumando todas estas expresiones y teniendo en cuenta (1.1) y (1.2) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
[f,f](X,Y) = &-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i g(X,fY)\xi_i - \sum_{i=1}^{s}\beta_i g(X,Y)\xi_i + \sum_{i,j=1}^{s}\beta_i\eta_j(X)\eta_j(Y)\xi_i \\
&+\sum_{i=1}^{s}\alpha_i g(Y,fX)\xi_i + \sum_{i=1}^{s}\beta_i g(X,Y)\xi_i - \sum_{i,j=1}^{s}\beta_i\eta_j(X)\eta_j(Y)\xi_i \\
&= -2\sum_{i=1}^{s}\alpha_i g(X,fY)\xi_i.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Por otro lado, el término $2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(X,Y)\xi_i$ se desarrolla como:

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{2}\Big(X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i([X,Y])\Big)\xi_i \\
&= \sum_{i=1}^{s}\Big(g(\nabla_X\xi_i,Y) + g(\xi_i,\nabla_X Y) - g(\nabla_Y X,\xi_i) \\
&- g(X,\nabla_Y\xi_i) - g(\nabla_X Y,\xi_i) + g(\nabla_Y X,\xi_i)\Big)\xi_i.
\end{aligned}
$$

Ahora, de (2.1) se deduce que

$$
\nabla_X\xi_i = -\alpha_i fX - \beta_i f^2X + \sum_{j=1}^{s}\eta_j(\nabla_X\xi_i)\xi_j, \tag{2.4}
$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1,\cdots,s$. Por tanto:

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(X,Y)\xi_i = &\sum_{i=1}^{s}\big(\alpha_i g(fX,Y) - \beta_i g(f^2X,Y) \\
&+ \alpha_i g(X,fY) + \beta_i(X,f^2Y)\big)\xi_i \\
&+ \sum_{i,j}^{s}\big(\eta_j(\nabla_X\xi_i)\eta_j(Y) - \eta_j(X)\eta_j(\nabla_Y\xi_i)\big)\xi_i,
\end{aligned}
$$

donde se ha usado (1.2) y, sumando a la expresión (2.3) se obtiene (2.2). □

Ahora, observamos que de las dos proposiciones anteriores, en una trans-S-variedad (2.2) implica que, para todos $X \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1,\ldots,s$:

$$
\sum_{j=1}^{s}\eta_j(\nabla_X\xi_i)\eta_j(Y) - \sum_{j=1}^{s}\eta_j(\nabla_Y\xi_i)\eta_j(X) = 0. \tag{2.5}
$$

Tomando $Y = \xi_k$ y usando (2.5) se tiene que:

$$
\eta_k(\nabla_X\xi_i) = \sum_{j=1}^{s}\eta_j(\nabla_{\xi_k}\xi_i)\eta_j(X). \tag{2.6}
$$

Ahora, de (1.4) y (2.6),

$$\begin{aligned}\eta_j(\nabla_X\xi_i) &= \eta_i(\nabla_X\xi_j)\\ &= -\sum_{k=1}^{s}\eta_k(\nabla_{\xi_i}\xi_j)\eta_k(X) = -\sum_{k=1}^{s}\eta_k(\nabla_{\xi_j}\xi_i)\eta_k(X) = -\eta_j(\nabla_X\xi_i),\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\eta_j(\nabla_X\xi_i) = 0 \tag{2.7}$$

para todos $X \in \mathcal{X}(M)$, $i, j = 1, \cdots, s$. Usando este hecho deducimos que

Proposición 2.1.3. *En una trans S-variedad se verifica,*

$$\nabla_X\xi_i = -\alpha_i fX - \beta_i f^2X, \tag{2.8}$$

para cualquier $X \in \mathcal{X}(M)$ y para todo $i = 1, \ldots, s$.

Demostración. De (2.1), tomando $Y = \xi_k$,

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)\xi_k = \sum_{i=1}^{s}\big[\alpha_i\{g(fX, f\xi_k)\xi_i + \eta_i(\xi_k)f^2X\}\\ + \beta_i\{g(fX,\xi_k)\xi_i - \eta_i(\xi_k)fX\}\big] = \alpha_k f^2X - \beta_k fX.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Por otro lado, como:

$$(\nabla_X f)\xi_k = \nabla_X f\xi_k - f\nabla_X\xi_k = -f\nabla_X\xi_k,$$

pues $f\xi_k = 0$,aplicando f a ambos miembros de (2.9) se tiene

$$-f^2\nabla_X\xi_k = \alpha_k f^3X - \beta_k f^2X.$$

y, usando (2.7) se llega a (2.8). □

2.2. Propiedades de las trans S-variedades.

Se pueden probar las siguientes propiedades para las trans S-variedades.

Teorema 2.2.1. *Una casi trans-S-variedad M es una trans-S-variedad si y solo si se satisface (2.8), para cualquier $X \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1, \ldots, s$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que tenemos una casi trans S-variedad que verifica (2.8). De (2.4), comparando con (2.8), obtenemos la normalidad de f usando (2.2), con lo que tenemos una trans S-variedad.

El recíproco es inmediato. □

La igualdad (2.1) se puede expresar en función de la 2-forma F.

Proposición 2.2.1. *La condición de ser casi trans-S-variedad puede reescribirse como*

$$(\nabla_X F)(Y,Z) = \sum_{i=1}^{s}[\alpha_i\{g(fX,fZ)\eta_i(Y) - g(fX,fY)\eta_i(Z)\} \\ + \beta_i\{g(X,fY)\eta_i(Z) - g(X,fZ)\eta_i(Y)\}], \tag{2.10}$$

para todos $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$. Además, si $X \in \mathcal{L}$ es un vector unitario, se tiene:

$$(\nabla_X F)(X,\xi_i) = -\alpha_i, \;\; (\nabla_X F)(\xi_i, fX) = \beta_i, \;\; i = 1,\ldots,s.$$

Demostración. Como $(\nabla_X F)(Y,Z) = XF(Y,Z) - F(\nabla_X Y, Z) - F(Y, \nabla_X Z)$, obtenemos,

$$\begin{aligned}(\nabla_X F)(Y,Z) &= Xg(Y,fZ) - g(\nabla_X Y, fZ) - g(Y, f\nabla_X Z) \\ &= g(Y, \nabla_X fY) - g(Y, f\nabla_X Z) = g(Y, (\nabla_X f)Z).\end{aligned}$$

Usando (1.2) y (2.1), se deduce el resultado deseado (2.10).

Para comprobar la segunda parte del enunciado solo basta usar la expresión (2.10) para los pares (X,ξ_i) y (ξ_i, fX), respectivamente. Así, usando (1.2) en el primer caso (2.10) queda:

$$\begin{aligned}(\nabla_X F)(X,\xi_i) = \sum_{k=1}^{s} &[\alpha_k\{g(fX,f\xi_i)\eta_k(X) - \eta_k(\xi_i)g(fX,fX)\} \\ &+ \beta_k\{-g(X,f\xi_i)\eta_k(X) + \eta_k(\xi_i)g(X,fX)\}] \\ &= -\alpha_i g(fX,fY) + \beta_i g(X,fX) = -\alpha_i g(fX,fX).\end{aligned}$$

Como $X \in \mathcal{L}$, $\eta_i(X) = 0$ $i = 1,\ldots s$, y como X es unitario, de (1.1), $g(fX,fX) = g(X,X) = 1$. Con lo que $\nabla_X F(X,\xi_i) = \alpha_i$, $i = 1,\cdots,s$. Por otra parte, de (2.10), usando de nuevo (1.1) y (1.2):

$$\begin{aligned}(\nabla_X F)(\xi_i, fX) = \sum_{k=1}^{s} &\left[\alpha_k\{g(fX,f^2X)\eta_k(\xi_i) - \eta_k(fX)g(fX,f\xi_i)\}\right. \\ &\left.+ \beta_k\{-g(X,f^2X)\eta_k(\xi_i) + \eta_k(fX)g(X,f\xi_i)\}\right] \\ &= -\beta_k g(X,f^2X).\end{aligned}$$

Como, de (1.2), $g(X,f^2X) = -g(fX,fX) = -1$, se obtiene que $(\nabla_X F)(\xi_i, fX) = \sum_{i=1}^{s}[\beta_i\{-g(X,f^2X)\eta_i(\xi_i)\}] = \beta_i$, $\imath = 1,\cdots,s$ □

Proposición 2.2.2. *En una trans S-variedad se tiene que*

$$(\nabla_X \eta_i)Y = \alpha_i g(X,fY) + \beta_i g(fX,fY), \tag{2.11}$$

para todos $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ y todo $i = 1,\ldots,s$. De nuevo, si $X \in \mathcal{L}$ es un vector unitario, se deduce que:

$$(\nabla_X \eta_i)fX = -\alpha_i, \;\; (\nabla_X \eta_i)X = \beta_i, \;\; i = 1,\ldots,s.$$

Demostración. Como

$$(\nabla_X \eta_i)Y = X\eta_i(Y) - \eta_i(\nabla_X Y) = Xg(Y, \xi_i) - g(\nabla_X Y, \xi_i) = g(Y, \nabla_X \xi_i),$$

usando (2.8) se obtiene,

$$\begin{aligned}(\nabla_X \eta_i)Y =& g(Y, -\alpha_i fX - \beta_i f^2 X) = -\alpha_i g(Y, fX) - \beta_i g(Y, f^2 X)\\ =& \alpha_i g(X, fY) + \beta_i g(fX, fY)\end{aligned}$$

Probemos ahora la segunda parte de la proposición. Para ello, basta aplicar la igualdad (2.2) en primer lugar con $Y = fX$ y después con $Y = X$.

- Con $Y = fX$,

$$\begin{aligned}(\nabla_X \eta_i)fX =& \alpha_i g(X, f^2 X) + \beta_i g(fX, f^2 X) = -\alpha_i g(fX, fX) - \beta_i g(X, f^3 X)\\ =& -\alpha_i g(fX, fX) + \beta_i g(X, -fX) = -\alpha_i.\end{aligned}$$

- Con $Y = X$ tenemos,

$$(\nabla_X \eta_i)X = \alpha_i g(X, fX) + \beta_i g(fX, fX) = \beta_i,$$

en virtud de (1.2). □

Podemos también probar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea M una trans S-variedad. Entonces, $(\delta F)\xi_i = 2n\alpha_i$ y $\delta\eta_i = -2n\beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, s$.*

Demostración. Tomando una f-base $\{X_1, \ldots, X_n, fX_1, \ldots, fX_n, \xi_1, \ldots, \xi_s\}$, entonces,

$$\begin{aligned}(\delta F)X =& -\sum_{k=1}^{n} \{(\nabla_{X_k} F)(X_k, X) + (\nabla_{fX_k} F)(fX_k, X)\}\\ &- \sum_{j=1}^{s} (\nabla_{\xi_j} F)(\xi_j, X)\\ =& \sum_{k=1}^{n} \{g(X_k, (\nabla_{X_k}\phi)X) + g(fX_k, (\nabla_{fX_k}\phi)X)\},\end{aligned}$$

para cualquier $X \in \mathcal{X}(M)$. Usando (2.1) es fácil obtener que

$$(\delta F)X = 2n \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \eta_j(X) \tag{2.12}$$

y, poniendo $X = \xi_i$, se sigue que $(\delta F)\xi_i = 2n\alpha_i$. Además,

$$\delta\eta_i = -\sum_{k=1}^{n} \{(\nabla_{X_k}\eta_i)X_k + (\nabla_{fX_k}\eta_i)fX_k\} - \sum_{j=1}^{s} (\nabla_{\xi_j}\eta_i)\xi_j,$$

para todo $i = 1, \dots, s$. Pero, de (2.7) conseguimos $(\nabla_{\xi_j}\eta_i)\xi_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, s$. Consecuentemente, utilizando (2.8),

$$\begin{aligned}\delta\eta_i &= -\sum_{k=1}^{n}\{g(X_k, \nabla_{X_k}\xi_i) + g(fX_k, \nabla_{fX_k}\xi_i)\}\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\beta_i\{g(X_k, X_k) + g(fX_k, fX_k)\} = -2n\beta_i,\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

El teorema anterior generaliza el resultado dado por D.E. Blair y J.A. Oubiña en [4] para las variedades trans-Sasakianas. Además, las trans S-variedades verifican otras ciertas condiciones deseables.

Proposición 2.2.3. *Sea M una trans S-variedad. Se verifican las siguientes ecuaciones:*

(i) $dF = 2F \wedge \sum_{i=1}^{s}\beta_i\eta_i$;

(ii) $d\eta_i = \alpha_i F$, $i = 1, \dots, s$;

(iii) $f^*(\delta F) = 0$.

Demostración. Se sabe que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ se tiene [7]:

$$\begin{aligned}dF(X,Y,Z) =& -g((\nabla_X f)Y, Z) + g((\nabla_Y f)X, Z) - g((\nabla_Z f)X, Y)\\ =&g((\nabla_Y f)X - (\nabla_X f)Y, Z)) - g((\nabla_Z f)X, Y)\end{aligned}$$

Por un lado, desarrollando el primer término

$$\begin{aligned}g((\nabla_Y f)X - (\nabla_X f)Y, Z) =&\sum_{i=1}^{s}\Big[\alpha_i\big\{g(fY, fX)g(\xi_i, Z) + \eta_i(X)g(f^2Y, Z)\big\}\Big]\\ &+\Big[\beta_i\big\{g(fY, X)g(\xi_i, Z) - \eta_i(X)g(fY, Z)\big\}\Big]+\\ &\sum_{i=1}^{s}\Big[-\alpha_i\big\{g(fX, fY)g(\xi_i, Z) - \eta_i(Y)g(f^2X, Z)\big\}\Big]\\ &+\Big[-\beta_i\big\{g(fX, Y)g(\xi_i, Z) + \eta_i(Y)g(fX, Z)\big\}\Big].\end{aligned}$$

El segundo término, de la misma manera, queda:

$$\begin{aligned}g((\nabla_Z f)X, Y) =&g\Big(\sum_{i=1}^{s}\Big[\alpha_i\big\{g(fZ, fX)\xi_i + \eta_i(X)f^2Z\big\}\Big]\\ &+\Big[\beta_i\big\{g(fZ, X)\xi_i - \eta_i(X)fZ\big\}\Big], Y\Big)\\ =&\sum_{i=1}^{s}\Big[\alpha_i\big\{g(fZ, fX)g(\xi_i, Y) + \eta_i(X)g(f^2Z, Y)\big\}\Big]\\ &+\Big[\beta_i\big\{g(fZ, X)g(\xi_i, Y) - \eta_i(X)g(fZ, Y)\big\}\Big].\end{aligned}$$

Restando ambas expresiones tenemos:

$$\begin{aligned}
dF(X,Y,Z) =& \sum_{i=1}^{s} \Big[\alpha_i\big\{g(fY,fX)\eta_i(Z)+\eta_i(X)g(f^2Y,Z)\big\}\Big] \\
&+ \Big[\beta_i\big\{g(fY,X)\eta_i(Z)-\eta_i(X)g(fY,Z)\big\}\Big]+ \\
&\sum_{i=1}^{s} \Big[-\alpha_i\big\{g(fX,fY)\eta_i(Z)-\eta_i(Y)g(f^2X,Z)\big\}\Big] \\
&+ \Big[-\beta_i\big\{g(fX,Y)\eta_i(Z)+\eta_i(Y)g(fX,Z)\big\}\Big]+ \\
&\sum_{i=1}^{s} \Big[-\alpha_i\big\{g(fZ,fX)\eta_i(Y)-\eta_i(X)g(f^2Z,Y)\big\}\Big] \\
&+ \Big[-\beta_i\big\{g(fZ,X)\eta_i(Y)+\eta_i(X)g(fZ,Y)\big\}\Big] \\
&= 2\sum_{i=1}^{s}\big(-\beta_i g(fX,Y)\eta_i(Z)+\beta_i g(fX,Z)\eta(Y) \\
&- \beta_i g(fY,Z)\eta(X)\big) \\
&= 2(F\wedge \sum_{i=1}^{s}\beta_i\eta_i)(X,Y,Z).
\end{aligned}$$

Demostramos la segunda parte de la proposición. Desarrollando el primer término:

$$\begin{aligned}
d\eta_i(X,Y) =& \frac{1}{2}\big(X\eta_i(Y)-Y\eta_i(X)-\eta_i([X,Y])\big) \\
&\frac{1}{2}\big(Xg(Y,\xi_i)-Yg(X,\xi_i)-g([X,Y],\xi_i)\big).
\end{aligned}$$

Veamos el valor de cada uno de ellos:

- $Xg(Y,\xi_i)=g(\nabla_X Y,\xi_i)+g(Y,\nabla_X\xi_i)$;
- $-Yg(Y,\xi_i)=-g(\nabla_Y X,\xi_i)-g(X,\nabla_Y\xi_i)$;
- $-g([X,Y],\xi_i)=-g(\nabla_X Y,\xi_i)+g(\nabla_Y X,\xi_i)$.

Sumando y haciendo uso de (1.2) y (2.8) llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
d\eta_i(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(g(Y,-\alpha_i fX-\beta_i f^2X)-g(X,-\alpha_i fY-\beta_i f^2Y)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(-\alpha_i g(Y,fX)-\beta_i g(Y,f^2X)+\alpha_i g(X,fY)+\beta_i g(X,f^2Y)\big) \\
&= \alpha_i g(X,fY)=\alpha_i F(X,Y).
\end{aligned}$$

Para la última de las propiedades, aplicando f^* a la expresión (2.12) y teniendo en cuenta que $\eta_i\circ f=0$,

$$f^*(\delta F)X = 2n\sum_{j=1}^{s}\alpha_j f^*\eta_j(X)=0,$$

de donde se prueba el tercero de los apartados de la proposición. □

Nota 2.2.1. *De (ii) de la proposición anterior observamos que si una de las funciones α_i es una función constante no nula entonces la 2-forma F es cerrada y la trans S-variedad M es una K-variedad. Esto es, pues,*

$$0 = d^2\eta_i = d\alpha_i \wedge F + \alpha_i dF = \alpha_i dF$$

implica que $dF = 0$, ya que $\alpha_i \neq 0$.

Además se puede probar:

Teorema 2.2.3. *Una trans S-variedad M es una K-variedad si y solo si*

$$\beta_1 = \cdots = \beta_s = 0.$$

Demostración. En primer lugar, si todas las funciones β_i son iguales a cero, de (i) de la Proposición 2.2.3 conseguimos que $dF = 0$ y M es una K-variedad.

Para la implicación recíproca, se sabe (ver [7]) que, para las K-variedades, la siguiente fórmula se verifica para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$:

$$g((\nabla_X f)Y, Z) = \sum_{i=1}^{s}\{d\eta_i(fY, X)\eta_i(Z) - d\eta_i(fZ, X)\eta_i(Y)\}. \tag{2.13}$$

Consecuentemente, de (ii) de la Proposición 2.2.3 obtenemos, ya que F es una 2-forma y usando (1.2):

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{s}\{d\eta_i(fY, X)\eta_i(Z) - d\eta_i(fZ, X)\eta_i(Y)\}\\
&= \sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i F(fY, X)\eta_i(Z) - \alpha_i F(fZ, X)\eta_i(Y)\}\\
&= \sum_{i=1}^{s}\{-\alpha_i F(X, fY)\eta_i(Z) + \alpha_i F(X, fZ)\eta_i(Y)\}\\
&= \sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i g(fX, fY)\eta_i(Z) + \alpha_i g(f^2X, Z)\eta_i(Y)\}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por otro lado, el primer miembro de la igualdad (2.13) se desarrolla, haciendo uso de (2.1), de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
g((\nabla_X f)Y, Z) =& g\Big(\sum_{i=1}^{s}\big[\alpha_i\{g(fX, fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\} + \beta_i\{g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX\}\big], Z\Big)\\
& \sum_{i=1}^{s}\big[\alpha_i\{g(fX, fY)g(\xi_i, Z) + \eta_i(Y)g(f^2X, Z)\}\\
& + \beta_i\{g(fX, Y)g(\xi_i, Z) - \eta_i(Y)g(fX, Z)\}\big]\\
& \sum_{i=1}^{s}\big[\alpha_i\{g(fX, fY)\eta_i(Z) + \eta_i(Y)g(f^2X, Z)\}\\
& + \beta_i\{g(fX, Y)\eta_i(Z) - \eta_i(Y)g(fX, Z)\}\big].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Igualando los resultados obtenidos (2.15) y (2.14) se obtiene,

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i \{g(fX, Y)\eta_i(Z) - \eta_i(Y)g(fX, Z)\} = 0,$$

de donde concluimos que $\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$, poniendo $Y = fX$, $Z = \xi_k$, $k = 1, \cdots, s$ y $X \in \mathcal{L}$. □

Del Teorema 2.2.2 deducimos:

Corolario 2.2.1. *Una trans S-variedad M es una K-variedad si y solo si $\delta\eta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que tenemos una trans S-variedad que a su vez es K-variedad. Por el Teorema 2.2.2 y el Teorema 2.2.3 se obtiene que $\delta\eta_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s$.

Para la implicación recíproca suponemos que $\delta\eta_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Al tratarse de una trans S-variedad y de nuevo, por el Teorema 2.2.2, sabemos que $\delta\eta_i = -2n\beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Por hipótesis $\delta\eta_i = -2n\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$, por lo que $\beta_i = 0$. Con el Teorema 2.2.3 se deduce que la trans S-variedad es una K-variedad. □

Además, teniendo en cuenta (1.6) y (1.7) tenemos:

Corolario 2.2.2. *Toda trans S-variedad es una S-variedad si y solo si $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$ y es una C-variedad si y solo si $\alpha_i = \beta_i = 0$, en ambos casos para cualquier $i = 1, \ldots, s$.*

Demostración. En las trans S-variedades se verifica:

$$\nabla_X \xi_i = -\alpha_i fX - \beta_i f^2 X.$$

Una K-variedad es una S-variedad si y solo si verifica $\nabla_X \xi_i = -fX$, por lo que $\alpha_i = 1$ y $\beta_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s$. En otro caso, es C-variedad si y solo si $\nabla_X \xi_i = 0$, de donde se obtiene que tanto α_i como β_i deben ser nulos para cualquier $i = 1, \ldots, s$.

□

En el siguiente capítulo, presentaremos algunos ejemplos de trans S-variedades las cuales no son K-variedades debido al hecho de que no todas sus funciones características β_i son cero. Ahora, lo normal sería preguntarse si cualquier K-variedad es una trans S-variedad. En general, la respuesta es negativa y para esto, consideremos el siguiente contraejemplo.

Sea (N, J, G) una variedad Kaehleriana, $(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_s, g)$ una S-variedad y $\widetilde{M} = N \times M$.

Si $\widetilde{X} = U + X, \widetilde{Y} = V + Y \in \mathcal{X}(\widetilde{M})$, donde $U, V \in \mathcal{X}(N)$ y $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, respectivamente, podemos definir una f-estructura métrica en $\widetilde{M}$ por los siguientes elementos de estructura:

$$\widetilde{f}(U + X) = JU + fX, \ \widetilde{\xi}_i = 0 + \xi_i, \ \widetilde{\eta}_i(U + X) = \eta_i(X), \ i = 1, \dots, s,$$

$$\widetilde{g}(U + X, V + Y) = G(U, V) + g(X, Y).$$

Con esto se puede demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.2.4. *$\widetilde{M}$ con la estructura descrita arriba es una K-variedad pero no una trans S-variedad.*

Demostración. En efecto, como N es una variedad Kaehleriana y, entonces, J es paralelo, si ∇ y $\widetilde{\nabla}$ denotan las conexiones Riemannianas de M y $\widetilde{M}$, respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{f})\widetilde{Y} &= \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{f}\widetilde{Y} - \widetilde{f}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \\ &= \bar{\nabla}_U JV + \nabla_X fY - J\bar{\nabla}_U V - f\nabla_X Y \\ &= (\bar{\nabla}_U J)V + (\nabla_X f)Y = 0 + (\nabla_X f)Y\end{aligned}$$

y, consecuentemente, (2.1) no se verifica para $\widetilde{M}$, por lo que no se trata de una trans S-variedad.

Por otro lado, probemos que en este caso sí es K-variedad. Tenemos:

- $[\widetilde{f}(U + X), \widetilde{f}(V + Y)] = [JU + fX, JV + fY] = [JU, JV] + [fX, fY]$;
- $\widetilde{f}[\widetilde{f}(U + X), V + Y] = \widetilde{f}([JU, V] + [fX, Y]) = J[JU, V] + f[fX, Y]$;
- $\widetilde{f}[U + X, \widetilde{f}(V + Y)] = J[U, JV] + f[X, fY]$;
- $\widetilde{f}^2[U + X, V + Y] = -[U + X, V + Y] + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i([U + X, V + Y])\widetilde{\xi}_i$

$= -[U, V] - [X, Y] + \sum_{i=1}^{s} \eta_i[X, Y]\xi_i = J^2[U, V] + f^2[X, Y]$.

Por definición del Tensor de Nijenhuis,

$$\begin{aligned}[\widetilde{f}, \widetilde{f}](U + X, V + Y) =& [\widetilde{f}(U + X), \widetilde{f}(V + Y)] - \widetilde{f}[\widetilde{f}(U + X), V + Y] \\ & - \widetilde{f}[U + X, \widetilde{f}(V + Y)] + \widetilde{f}^2[U + X, V + Y].\end{aligned}$$

Con lo anterior,

$$\begin{aligned}[\widetilde{f}, \widetilde{f}](U + X, V + Y) =& [JU, JV] + [fX, fY] - J[JU, V] - f[fX, Y] - \\ & J[U, JV] - f[X, fY] + J^2[U, V] + f^2[X, Y] \\ &= [J, J](U, V) + [f, f](X, Y) \\ &= -2\sum_{i=1}^{s} d\eta_i(X, Y)\xi_i\end{aligned} \tag{2.16}$$

pues $[J, J] = 0$ y M es normal al ser S-variedad. Además, se sabe que

$$\begin{aligned} d\eta_i &= X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i([X, Y]) \\ &= (U + X)\widetilde{\eta}_i(V + Y) - (V + Y)\widetilde{\eta}_i(U + X) \\ &- \widetilde{\eta}_i([U + X, V + Y]) = d\widetilde{\eta}_i(U + X, V + Y), \end{aligned} \tag{2.17}$$

por lo cual, relacionando las igualdades (2.16) y (2.17) y usando que $\widetilde{\xi}_i = \xi_i$, obtenemos

$$[\widetilde{f}, \widetilde{f}](U + X, V + Y) + 2\sum_{i=1}^{s} d\widetilde{\eta}_i(U + X, V + Y)\widetilde{\xi}_i, \tag{2.18}$$

que nos indica que $\widetilde{M}$ es normal, por lo que se tiene que es una K-variedad como queríamos demostrar.

□

Sin embargo, se puede observar que, de (1.8) y (1.12), los casos particulares de S-variedades y C-variedades son trans S-variedades. Por otro lado, se sabe [2] que, en una K-variedad, todos los campos de estructura con campos de Killing. Para las trans S-variedades podemos probar:

Proposición 2.2.5. *Sea M una trans-S-variedad. Entonces, los campos de estructura ξ_i son de Killing si y solo si la correspondiente función característica β_i es nula.*

Demostración. En primer lugar, veamos el valor de la derivada de Lie de la métrica en la dirección de los campos de estructura. Para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se verifica,

$$\begin{aligned} (L_{\xi_i}g)(X, Y) &= \xi_i g(X, Y) - g(L_{\xi_i}X, Y) - g(X, L_{\xi_i}Y) \\ &= \xi_i g(X, Y) - g([\xi_i, X], Y) - g(X, [\xi_i, Y]) \\ &= \xi_i g(X, Y) - (g(\nabla_{\xi_i}X, Y) - g(\nabla_X\xi_i Y)) - (g(X, \nabla_{\xi_i}Y) - g(X, \nabla_Y\xi_i)), \end{aligned}$$

donde se ha aplicado que $L_{\xi_i}X = [\xi_i, X] = \nabla_{\xi_i}X - \nabla_X\xi_i$. Sabiendo que $\xi_i g(X, Y) = g(\nabla_{\xi_i}X, Y) + g(X, \nabla_{\xi_i}Y)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} (L_{\xi_i}g)(X, Y) &= g(\nabla_{\xi_i}X, Y) + g(X, \nabla_{\xi_i}Y) - g(\nabla_{\xi_i}X, Y) \\ &+ g(\nabla_X\xi_i, Y) - g(X, \nabla_{\xi_i}Y) + g(X, \nabla_Y\xi_i) \\ &= g(\nabla_X\xi_i, Y) + g(X, \nabla_Y\xi_i). \end{aligned}$$

Haciendo uso de (2.8), tenemos:

$$\begin{aligned} (L_{\xi_i}g)(X, Y) &= g(-\alpha_i fX - \beta_i f^2X, Y) + g(X, -\alpha_i fY - \beta_i f^2Y) \\ &= -\alpha_i g(fX, Y) - \beta_i g(f^2X, Y) - \alpha_i g(X, fY) - \beta_i g(X, f^2Y) \\ &= \alpha_i g(X, fY) + \beta_i g(fX, fY) - \alpha_i g(X, fY) + \beta_i g(fX, fY) \\ &= 2\beta_i g(fX, fY). \end{aligned}$$

Con esto se deduce que si $\beta_i = 0$, entonces la derivada de Lie se anula y por tanto los campos de estructura son de tipo Killing. Por otro lado si la derivada es nula directamente obtenemos que la función característica β_i es cero, pues $2g(fX, fY) \neq 0$ para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Esto completa la prueba. □

Capítulo 3

Ejemplos de trans S-variedades

Como hemos mencionado anteriormente, es obvio que, de (1.8) y (1.12), las S-variedades y las C-variedades son trans-S-variedades. Además, las variedades s-ésima Sasakianas homotéticas de [9] son también trans S-variedades con las funciones α_i constante y $\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \cdots, s$.

De las Proposiciones 2.2 y 2.5 de [6], vemos que las f-variedades de tipo Kenmotsu, introducidas por M. Falcitelli y A.M. Pastore, son trans S-variedades con funciones $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0$ y $\beta_1 = 1$.

También, del Teorema 2.4 en [17], vemos que las variedades Kenmotsu generalizadas estudiadas por L. Bhatt y K.K. Dube [1] y A. Turgut Vanli y R. Sari [17] son trans S-variedades con funciones $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ and $\beta_1 = \cdots = \beta_s = 1$.

Entonces, vamos a buscar ejemplos con funciones α_i y β_i no constantes. Obtendremos estos ejemplos usando deformaciones D-coformes e hipersuperficies.

3.1. Transformaciones D-conformes generalizadas.

En primer lugar, sea una f-variedad métrica $(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_s, g)$ y consideremos la *deformación D-conforme generalizada* dada por

$$\widetilde{f} = f, \quad \widetilde{\xi}_i = \frac{1}{a}\xi_i, \quad \widetilde{\eta}_i = a\eta_i, \quad \widetilde{g} = bg + (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s} \eta_i \otimes \eta_i, \tag{3.1}$$

para todo $i = 1, \ldots, s$, donde a, b son dos funciones diferenciables positivas en M. Entonces se puede demostrar:

Proposición 3.1.1. *$(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ es una f-variedad métrica.*

Demostración. Para que $(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ sea f-variedad métrica deben cumplirse:

- $\widetilde{f}\widetilde{\xi}_i = 0$,
- $\widetilde{\eta}_i \circ \widetilde{f} = 0$,

- $\widetilde{f}^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i \otimes \widetilde{\xi}_i$,
- $\widetilde{g}(X,Y) = \widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\eta}_i(Y)$.

Veamos cada una de estas condiciones.

Partimos de la condición $f\xi_i = 0$, pues $(M, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ es f-variedad métrica. Así $\widetilde{f}\xi_i = 0$ pues $\widetilde{f} = f$. Como $\widetilde{\xi}_i = \frac{1}{a}\xi_i$ llegamos a que $\widetilde{f}(a\widetilde{\xi}_i) = 0$, de donde obtenemos que $\widetilde{f}\widetilde{\xi}_i = 0$, pues $a \neq 0$. Para la segunda condición tenemos que $\eta_i f = 0$. Por la deformación D-conforme generalizada,

$$\frac{\widetilde{\eta}_i}{a}\widetilde{f} = 0,$$

de donde $\widetilde{\eta}_i\widetilde{f} = 0$, pues $\frac{1}{a} \neq 0$.

Partiendo ahora de

$$f^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta_i \otimes \xi_i$$

y usando de nuevo la deformación D-conforme generalizada,

$$\widetilde{f}^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{a}\widetilde{\eta}_i \otimes a\widetilde{\xi}_i = -I + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i \otimes \widetilde{\xi}_i.$$

Por último probemos que se tiene $\widetilde{g}(X,Y) = \widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\eta}_i(Y)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(X,Y) &= bg(X,Y) + a^2\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) - b\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) \\
&= b\Big(g(fX,fY) + \sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y)\Big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{s}\widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\eta}_i(Y) - b\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) \\
&= bg(fX,fY) + b\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{s}\widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\eta}_i(Y) - b\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) \\
&= bg(fX,fY) + \sum_{i=1}^{s}\widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\eta}_i(Y)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Veamos que (3.2) coincide con $\widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\eta}_i(Y)$, o lo que es lo mismo, que $bg(fX,fY) = \widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y)$ ya que

$$\widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) = bg(fX,fY) + (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(fX)\eta_i(fY) = bg(fX,fY),$$

puesto que $\eta_i f = 0$. Con esto se concluye la prueba y tenemos lo que queríamos probar, que $(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ es una f-variedad métrica. $\square$

Nos damos cuenta que podemos obtener deformaciones conformes, D-homotéticas (ver [16]) o D-conformes (en el sentido de S. Suguri y S. Nakayama [15]), poniendo $a^2 = b$, $a = b =$ constante o $a = b$ en (3.1), respectivamente. En [11] Z. Olszack consideró a y b constantes, $a \neq 0$, $b > 0$ pero no necesariamente iguales y él también llamó a la transformación resultante una deformación D-homotética.

Además, si suponemos que M es una trans S-variedad y que a, b dependen solo de las direcciones de los campos de estructura ξ_i, $i = 1, \ldots, s$. Podemos calcular $\widetilde{\nabla}$ de ∇ y $\widetilde{g}$ usando la fórmula de Koszul y (2.8). Así, se tiene que:

Proposición 3.1.2. *La conexión Riemanniana $\widetilde{\nabla}$ de $\widetilde{g}$ está dada por*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y &+ \sum_{i=1}^{s} \frac{2(a^2 - b)\beta_i - \xi_i b}{2a^2} g(fX, fY)\xi_i \\
&- \frac{1}{2b}\{(Xb)f^2 Y + (Yb)f^2 X\} \\
&+ \frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^{s} \Big\{(Xa^2)\eta_i(Y) + (Ya^2)\eta_i(X) \\
&- (\xi_i a^2) \sum_{j=1}^{s} \eta_j(X)\eta_j(Y)\Big\}\, \xi_i \\
&- \frac{a^2 - b}{b} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \{\eta_i(Y) fX + \eta_i(X) fY\},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

para todo par de campos de vectores $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Demostración. La fórmula de Koszul para $\widetilde{g}$ y $\widetilde{\nabla}$ viene dada por

$$
\begin{aligned}
2\widetilde{g}(\nabla_X Y, Z) = \{&X\widetilde{g}(Y, Z) + Y\widetilde{g}(X, Z) - Z\widetilde{g}(X, Y) \\
&+ \widetilde{g}([X, Y], Z) - \widetilde{g}([X, Z], Y) - \widetilde{g}([Y, Z], X)\}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Desarrollando independientemente cada uno de estos términos, obtenemos,

$$
\begin{aligned}
X\widetilde{g}(Y, Z) &= X\big(bg(Y, Z) + (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s} \eta_i(Y)\eta_i(Z)\big) \\
&= (Xb)g(Y, Z) + bXg(Y, Z) + X(a^2 - b)\sum_{i=1}^{s} \eta_i(Y)\eta_i(Z) \\
&+ (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s} X(\eta_i(Y)\eta_i(Z)). \\
Y\widetilde{g}(X, Z) &= (Yb)g(X, Z) + bYg(X, Z) + Y(a^2 - b)\sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Z) \\
&+ (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s} Y(\eta_i(X)\eta_i(Z)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-Z\widetilde{g}(X,Y) &= -(Zb)g(X,Y) - bZg(X,Y) - Z(a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) \\
&- (a^2-b)\sum_{i=1}^{s} Z(\eta_i(X)\eta_i(Y)). \\
\widetilde{g}([X,Y],Z) &= bg([X,Y],Z) + (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_X Y)\eta_i(Z) \\
&- (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_Y X)\eta_i(Z). \\
-\widetilde{g}([X,Z],Y) &= -bg([X,Z],Y) - (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_X Z)\eta_i(Y) \\
&+ (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_Z X)\eta_i(Y). \\
-\widetilde{g}([Y,Z],X) &= -bg([Y,Z],X) - (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_Y Z)\eta_i(X) \\
&+ (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_Z Y)\eta_i(X).
\end{aligned}
$$

Sustituimos estas últimas expresiones en (3.4) con lo que resulta,

$$
\begin{aligned}
2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y,Z) = {}& 2bg(\nabla_X Y,Z) + (Xb)g(fY,fZ) + (Xa^2)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(Y)\eta_i(Z) \\
&+ (Yb)g(fX,fZ) + (Ya^2)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Z) \\
&- (Zb)g(fX,fY) - (Za^2)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y) \\
&+ (a^2-b)\sum_{i=1}^{s}\big[(X\eta_i(Y))\eta_i(Z) + 2\alpha_i g(fX,Y)\eta_i(Z) + \beta_i g(f^2X,Y)\eta_i(Z) \\
&- (Y\eta_i(X))\eta_i(Z) - \alpha_i g(fY,X)\eta_i(Z) - \beta_i g(f^2Y,X)\eta_i(Z) \\
&- (X\eta_i(Z))\eta_i(Y) - 2\alpha_i g(fX,Z)\eta_i(Y) - \beta_i g(f^2X,Z)\eta_i(Y) \\
&+ (Z\eta_i(X))\eta_i(Y) + \alpha_i g(fZ,X)\eta_i(Y) + \beta_i g(f^2Z,X)\eta_i(Y) \\
&- (Y\eta_i(Z))\eta_i(X) - 2\alpha_i g(fY,Z)\eta_i(X) - \beta_i g(f^2Y,Z)\eta_i(X) \\
&+ (Z\eta_i(Y))\eta_i(X) + \alpha_i g(fZ,Y)\eta_i(X) + \beta_i g(f^2Z,Y)\eta_i(X)\big]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$g(X,Y) = g(fX,fY) + \sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y)$$

y

$$\begin{aligned}\eta_i(\nabla_X Y) &= g(\nabla_X Y, \xi_i)\\ &= X\eta_i(Y) - g(Y, \nabla_X \xi_i)\\ &= X\eta_i(Y) + \alpha_i g(fX, Y) + \beta_i g(f^2X, Y)\end{aligned}$$

Por otro lado, el primer término del resultado de (3.5) se puede expresar como

$$\begin{aligned}2bg(\nabla_X Y, Z) &= 2b\frac{1}{b}\widetilde{g}(\nabla_X Y, Z) - 2(a^2 - b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(\nabla_X Y)\eta_i(Z)\\ &= 2\widetilde{g}(\nabla_X Y, Z) - 2(a^2 - b)\big[\sum_{i=1}^{s}[(X\eta_i(Y))\eta_i(Z)\\ &\quad + \alpha_i g(fX, Y)\eta_i(Z) + \beta_i g(f^2X, Y)\eta_i(Z)]\big]\end{aligned} \tag{3.6}$$

Así, sustituyendo (3.6) en (3.5) y teniendo en cuenta la definición de $\widetilde{g}$ que teníamos llegamos a lo siguiente,

$$\begin{aligned}2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2\widetilde{g}(\nabla_X Y, Z) - \frac{Xb}{b}\widetilde{g}(f^2Y, Z) + \frac{Xa^2}{a}\sum_{i=1}^{s}\eta_i(Y)\widetilde{\eta}_i(Z)\\ &\quad + \frac{Ya^2}{a}\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X))\widetilde{\eta}_i(Z) - Zbg(fX, fY) - (Za^2)\sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)\eta_i(Y)\\ &\quad + (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s}\big[-\frac{2\alpha_i}{b}\widetilde{g}(fX, Z)\eta_i(Y) - \frac{2\alpha_i}{b}\widetilde{g}(fY, Z)\eta_i(X)\big]\end{aligned}$$

En esa última expresión, simplificando, agrupando términos, usando las relaciones

$$\widetilde{\eta}_i(Z) = \widetilde{g}(Z, \widetilde{\xi}_i),$$

y

$$\eta_i(Z) = \frac{1}{a}\widetilde{\eta}_i(Z) = \frac{1}{a^2}\widetilde{g}(Z, \widetilde{\xi}_i),$$

y tomando la parte que multiplica a Z se obtiene el resultado deseado.

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \frac{1}{2b}((Xb)f^2Y + (Yb)f^2)\\ &\quad + \frac{1}{2a^2}\sum_{i=1}^{s}[(Xa^2)\eta_i(Y) + (Ya^2)\eta_i(X) - (\xi_i a^2)\sum_{j=1}^{s}\eta_j(X)\eta_j(Y)]\xi_j\\ &\quad - \frac{(a^2 - b)}{b}\sum_{i=1}^{s}\alpha_i[\eta_i(Y)fX + \eta_i(X)fY]\\ &\quad + \sum_{i=1}^{s}\frac{2\beta_i(a^2 - b) - \xi(b)}{2b}g(fX, fY)\xi_i\end{aligned}$$

□

En estas condiciones, podemos probar:

Teorema 3.1.1. *Sea $(M, f, \xi_1, \dots, \xi_s, \eta_1, \dots, \eta_s, g)$ una trans-S-variedad y consideremos una deformación D-conforme generalizada en M, con a, b funciones positivas dependiendo solo de las direcciones de los campos de estructura. Entonces $(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \dots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ es también una trans-S-variedad con funciones:*

$$\widetilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i a}{b},\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{\beta_i}{a},\ i = 1, \dots, s.$$

Demostración. Usando (3.3) y teniendo en cuenta que b solo depende de las direcciones de los campos de estructura, tenemos

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y = (\nabla_X f)Y &- \sum_{i=1}^{s} \frac{2(a^2-b)\beta_i - \xi_i b}{2a^2} g(fX, Y)\xi_i \\ &- \frac{1}{2b}\sum_{i=1}^{s}(\xi_i b)\eta_i(Y)fX + \frac{a^2-b}{b}\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\eta_i(Y)f^2X,\end{aligned}$$

para todos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Ahora, como M es trans S-variedad, de (2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y =& \sum_{i=1}^{s}\Big(\alpha_i g(fX, fY)\xi_i + \alpha_i\eta_i(Y)f^2X + \beta_i g(fX, Y)\xi_i - \beta_i\eta_i(Y)fX\Big) \\ &- \sum_{i=1}^{s} \frac{2(a^2-b)\beta_i - \xi_i b}{2a^2} g(fX, Y)\xi_i - \frac{1}{2b}\sum_{i=1}^{s}(\xi_i b)\eta_i(Y)fX \\ &+ \frac{a^2-b}{b}\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\eta_i(Y)f^2X.\end{aligned}$$

Tomando la definición de la deformación (3.1) deducimos

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y =& \sum_{i=1}^{s} a\alpha_i g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y)\widetilde{\xi}_i + \frac{1}{a}\Big(\frac{a^2-b}{b} + 1\Big)\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\widetilde{\eta}_i(Y)\big(\widetilde{f}\big)^2X \\ &+ \sum_{i=1}^{s} a\left[\beta_i - \Big(\frac{2(a^2-b)\beta_i - \xi_i b}{2a^2}\Big)\right] g(\widetilde{f}X, Y)\widetilde{\xi}_i \\ &- \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{a}\Big(\beta_i + \frac{1}{2b}(\xi_i b)\Big)\widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}X\end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que

$$\widetilde{g} = bg + (a^2 - b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i \otimes \eta_i,$$

es decir,

$$g = \frac{1}{b}\Big(\widetilde{g} - +(a^2 - b)\sum_{i=1}^{s}\eta_i \otimes \eta_i\Big),$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y =& \sum_{i=1}^{s} \frac{a}{b}\alpha_i \widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y)\widetilde{\xi}_i + \frac{1}{a}\Big(\frac{a^2-b}{b}+1\Big)\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\widetilde{\eta}_i(Y)\big(\widetilde{f}\big)^2 X \\
& \sum_{i=1}^{s}\frac{a}{b}\left[\beta_i - \Big(\frac{2(a^2-b)\beta_i - \xi_i b}{2a^2}\Big)\right]\widetilde{g}(\widetilde{f}X, Y)\widetilde{\xi}_i \\
& -\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{a}\Big(\beta_i + \frac{1}{2b}(\xi_i b)\Big)\widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}X,
\end{aligned}
$$

ya que $\eta_i \circ f = 0$. Así, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y =& \sum_{i=1}^{s}\{\frac{\alpha_i a}{b}(\widetilde{g}(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y)\widetilde{\xi}_i + \widetilde{\eta}_i(Y)X) \\
& + \left(\frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{\beta_i}{a}\right)(\widetilde{g}(\widetilde{f}X, Y)\widetilde{\xi}_i - \widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}X)\},
\end{aligned}
$$

y esto completa la prueba. □

Nota 3.1.1. *Si M es una variedad Sasakiana, esto es, si $s = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, por este método no resulta ser una (α, β) variedad trans-Sasakiana pero si una variedad $(\alpha, 0)$ porque, por el teorema de Darboux, si a, b solo dependen de la dirección de ξ_i, éstas deben ser constantes.*

Corolario 3.1.1. *Sea $(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_s, g)$ una S-variedad y consideremos una deformación D-conforme generalizada en M, con a, b funciones positivas dependiendo solo de las direcciones de los campos de estructura. Entonces se verifica que $(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ es una trans-S-variedad con funciones:*

$$
\widetilde{\alpha}_i = \frac{a}{b},\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab},\ i = 1, \ldots, s.
$$

Demostración. Se obtiene directamente usando el Teorema 3.1.1 y el Corolario 2.2.2, pues una S-variedad tiene $\alpha_i = 1$ y $\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$ y se tiene que

$$
\widetilde{\alpha}_i = \frac{a\alpha_i}{b} = \frac{a}{b},\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{\beta_i}{a} = \frac{\xi_i b}{2ab},\ i = 1, \ldots, s.
$$

□

Corolario 3.1.2. *Sea $(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_s, g)$ una C-variedad y consideremos una deformación D-conforme generalizada en M, con a, b funciones positivas dependiendo solo de las direcciones de los campos de estructura. Entonces se verifica que $(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ es una trans-S-variedad con funciones:*

$$
\widetilde{\alpha}_i = 0,\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab},\ i = 1, \ldots, s.
$$

Demostración. Se obtiene directamente del Teorema 3.1.1 y el Corolario 2.2.2, pues una C-variedad tiene $\alpha_i = 0$ y $\beta_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, s$ y se tiene que

$$\widetilde{\alpha}_i = \frac{a\alpha_i}{b} = 0,\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{\beta_i}{a} = \frac{\xi_i b}{2ab},\ i = 1, \ldots, s.$$

□

Corolario 3.1.3. *Sea $(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_s, g)$ una variedad Kenmotsu generalizada y consideremos una deformación D-conforme generalizada en M, con a, b funciones positivas dependiendo solo de las direcciones de los campos de estructura. Entonces $(M, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$ es una trans-S-variedad con funciones:*

$$\widetilde{\alpha}_i = 0,\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{1}{a},\ i = 1, \ldots, s.$$

Demostración. Se obtiene directamente por el Teorema 3.1.1 y sabiendo que en una variedad Kenmotsu generalizada se tiene que $\alpha_i = 0$ y $\beta_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, s$. Así,

$$\widetilde{\alpha}_i = \frac{a\alpha_i}{b} = 0,\ \widetilde{\beta}_i = \frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{\beta_i}{a} = \frac{\xi_i b}{2ab} + \frac{1}{a},\ i = 1, \ldots, s.$$

□

3.2. Hipersuperficies de trans S-variedades.

Durante toda esta sección, sea $(\widetilde{M}, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, g)$ una f-variedad métrica y sea M una hipersuperficie orientada e isométricamente inmersa en $\widetilde{M}$ tales que $\mathbf{N}$ denota el campo normal de M en $\widetilde{M}$ y los campos de estructura $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_{s-1}$ son tangentes a M. Tomamos $\widetilde{\xi}_s = \lambda\xi_s + \mu\mathbf{N}$, donde ξ_s es un campo unitario tangente a M. Entonces,

$$\lambda = \widetilde{\eta}_s(\xi_s);\ \mu = \widetilde{\eta}_s(\mathbf{N});\ \lambda^2 + \mu^2 = 1. \tag{3.7}$$

En primer lugar, vamos a suponer que $\lambda \neq 0$. Por tanto,

$$\xi_{s+1} = -\frac{1}{\lambda}\widetilde{f}\mathbf{N}$$

es un campo unitario tangente a M tal que $\widetilde{f}\xi_s = \mu\xi_{s+1}$. Ahora, definimos $s - 1$ campos en M por $\xi_{i_x} = \widetilde{\xi}_{i_x}$, para todo $x \in M$ y

$$\begin{aligned} &\eta_i(X) = \widetilde{\eta}_i(X),\ i = 1, \ldots, s-1, \\ &\eta_s(X) = -\frac{1}{\lambda}\widetilde{\eta}_s(X),\ \eta_{s+1}(X) = g(X, \xi_{s+1}), \\ &fX = \widetilde{f}X - \lambda\eta_{s+1}(X)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(X)\xi_s - \mu\eta_s(X)\xi_{s+1}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

para cualquier $X \in \mathcal{X}(M)$. Entonces, se prueba:

Proposición 3.2.1. *Se verifica que*

$$(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_{s+1}, \eta_1, \ldots, \eta_{s+1}, g)$$

es también una f-variedad métrica con rango(f) = rango$(\widetilde{f}) - 2$.

Demostración. Para probar que $(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_{s+1}, \eta_1, \ldots, \eta_{s+1}, g)$ es una f-variedad métrica debemos probar

$$f\xi_i = 0; \;\; \eta_i \circ f = 0; \;\; f^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta_i \otimes \xi_i;$$

$$g(X,Y) = g(fX, fY) + \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Y)$$

para cualquier $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1, \ldots, s+1$. En primer lugar demostremos que $f\xi_i = 0 \;\forall i = 1, \cdots s+1$.

- Para $i = 1, \cdots, s-1$.

$$\begin{aligned} f\xi_i &= \widetilde{f}\xi_i - \lambda\eta_{s+1}(\xi_i) + \mu\eta_{s+1}(\xi_i) - \mu\eta_s(\xi_i) \\ &= \widetilde{f}\xi_i - \lambda g(\xi_i, \xi_{s+1}) + \mu g(\xi_i, \xi_{s+1}) - \mu\eta_s(\xi_i) \\ &= \widetilde{f}\xi_i - \lambda\frac{1}{\lambda} g(\widetilde{\xi}_i, \widetilde{f}\mathbf{N}) + \mu\frac{1}{\lambda} g(\widetilde{\xi}_i, \widetilde{f}\mathbf{N}) - \mu\eta_s(\xi_i) = 0 \end{aligned}$$

  pues, por hipótesis, $(\widetilde{M}, \widetilde{f}, \widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_s, \widetilde{\eta}_1, \ldots, \widetilde{\eta}_s, \widetilde{g})$, por tanto se tiene que $\widetilde{f}\xi_i = 0$ $(\xi_i = \widetilde{\xi}_i)$ para todo $i = 1, \cdots, s$.

- Para $i = s$.

$$f\xi_s = \widetilde{f}\xi_s - \lambda\eta_{s+1}(\xi_s) + \mu\eta_{s+1}(\xi_s) - \mu\eta_s(\xi_s)$$

  donde $\widetilde{f}\xi_s = 0$ por la misma razón que en el caso anterior. Además,

$$\begin{aligned} \eta_{s+1}(\xi_s) = g(\xi_s, \xi_{s+1}) &= \frac{1}{\lambda} g(\widetilde{\xi}_s, \xi_{s+1}) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} g(\widetilde{\xi}_s, \widetilde{f}\mathbf{N}) = 0 \end{aligned}$$

  y

$$\eta_s(\xi_s) = \frac{1}{\lambda} g(\widetilde{\xi}_s, \xi_s) = 1.$$

  Con esto se tiene que $f\xi_s = 0$.

- Para $i = s+1$.

$$f\xi_{s+1} = \widetilde{f}\xi_{s+1} - \lambda\eta_{s+1}(\xi_{s+1}) + \mu\eta_{s+1}(\xi_{s+1}) - \mu\eta_s(\xi_{s+1})$$

  Desarrollando término a término,

$$\widetilde{f}\xi_{s+1} = -\frac{1}{\lambda}\widetilde{f}^2\mathbf{N} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{N} - \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(\mathbf{N})\widetilde{\xi}_i) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{N} - \mu\xi_s)$$

  donde se ha usado la definición de $\widetilde{\eta}_s(\mathbf{N}) = \mu$.

$$\eta_{s+1}(\xi_{s+1}) = g(\xi_{s+1}, \xi_{s+1}) = 1;$$

$$\eta_s(\xi_{s+1}) = \frac{1}{\lambda} g(\widetilde{\xi}_s, \xi_{s+1}) = 0.$$

Sustituyendo en lo anterior y haciendo uso de $\widetilde{\xi}_s = \lambda\xi_s + \mu\mathbf{N}$, se tiene

$$\begin{aligned} f\xi_{s+1} &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{N} - \frac{\mu}{\lambda}\widetilde{\xi}_s - \lambda\mathbf{N} + \mu\xi_s \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{N} - \frac{\mu}{\lambda}\lambda\xi_s - \frac{\mu}{\lambda}\mu\mathbf{N} - \lambda\mathbf{N} + \mu\xi_s \\ &= \frac{1}{\lambda}(\mathbf{N} - \mu^2\mathbf{N}) - \mu\xi_s - \lambda\mathbf{N} + \mu\xi_s = 0 \end{aligned}$$

A continuación probemos que $\eta_i \circ f = 0$, $\forall i = 1, \cdots, s+1$. Así, se tendría que:

- Para $i = 1, \cdots, s-1$.

$$\begin{aligned} \eta_i f(X) &= \widetilde{\eta}_i f(X) \\ &= \widetilde{\eta}_i \widetilde{f}(X) - \lambda\eta_{s+1}(X)\widetilde{\eta}_i(\mathbf{N}) + \mu\eta_{s+1}(X)\widetilde{\eta}_i(\mathbf{N}) - \mu\eta_s(X)\widetilde{\eta}_i(\xi_{s+1}) = 0. \end{aligned}$$

- Para $i = s$.

$$\begin{aligned} \eta_s f(X) &= \frac{1}{\lambda}[\widetilde{\eta}_s(X)] \\ &= \frac{1}{\lambda}[\widetilde{\eta}_s(\widetilde{f}X) - \lambda\eta_{s+1}(X)\widetilde{\eta}_s(\mathbf{N}) + \mu\eta_{s+1}(X)\widetilde{\eta}_s(\mathbf{N}) - \mu\eta_s(X)\widetilde{\eta}_s(\xi_{S+1})] = 0. \end{aligned}$$

- Para $i = s+1$.

$$\eta_{s+1}(fX) = g(fX, \xi_{s+1}) = g(\widetilde{f}X, \xi_{s+1}) - \mu\eta_s(X) = \frac{\mu}{\lambda}\widetilde{\eta}_s(X) - \mu\eta_s(X) = 0.$$

Veamos ahora el valor de $f^2(X)$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

$$\begin{aligned} f^2X = f(fX) &= \widetilde{f}(fX) - \lambda\eta_{s+1}(fX)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(fX)\xi_s - \mu\eta_s(fX)\xi_{s+1} \\ &= \widetilde{f}[\widetilde{f}X - \lambda\eta_{s+1}(X)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(X)\xi_s - \mu\eta_s(X)\xi_{s+1}] \\ &= \widetilde{f}^2X - \lambda\eta_{s+1}(X)\widetilde{f}\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(X)\widetilde{f}\xi_s - \mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1} \\ &= \widetilde{f}^2X + \lambda^2\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} + \mu^2\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - \mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1} \\ &= -X + \sum_{i=1}^{s}\widetilde{\eta}_i(X)\widetilde{\xi}_i + (\lambda^2+\mu^2)\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1} - \mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1} \\ &= -X + \sum_{i=1}^{s-1}\eta_i(X)\xi_i + \widetilde{\eta}_s(X)\widetilde{\xi}_s + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1} - \mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1} \end{aligned}$$

Los términos $\widetilde{\eta}_s(X)\widetilde{\xi}_s$ y $-\mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1}$ se pueden expresar y agrupar de la siguiente manera quedando,

$$\widetilde{\eta}_s(X)\widetilde{\xi}_s = \lambda\eta_s(X)(\lambda\xi_s + \mu\mathbf{N}) = \lambda^2\eta_s(X)\xi_s + \lambda\mu\eta_s(X)\mathbf{N}$$

$$-\mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1} = -\mu\eta_s(X)[\frac{1}{\lambda}(\mathbf{N} - \mu\widetilde{\xi_s})] = -\mu\eta_s(X)[\frac{1}{\lambda}(\mathbf{N} - \lambda\mu\xi_s - \mu^2\mathbf{N})]$$
$$= -\mu\eta_s(X)[\lambda\mathbf{N} - \mu\xi_s] = -\mu\lambda\eta_s(X)\mathbf{N} + \mu^2\eta_s(X)\xi_s.$$

Sumando ambos resultados resulta $\eta_s(X)\xi_s$, con lo que obtenemos que

$$f^2 = -I + \sum_{i=1}^{s+1} \eta_i \otimes \xi_i.$$

Para terminar la prueba comprobemos que se verifica que

$$g(X,Y) = g(fX, fY) + \sum_{i=1}^{s+1} \eta_i(X)\eta_i(Y).$$

Así,

$$\begin{aligned}
g(fX, fY) =& g(\widetilde{f}X - \lambda\eta_{s+1}(X)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(X)\xi_s - \mu\eta_s(X)\xi_{s+1},\\
& \widetilde{f}Y - \lambda\eta_{s+1}(Y)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(Y)\xi_s - \mu\eta_s(Y)\xi_{s+1})\\
&= g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) - \lambda g(\widetilde{f}X, \eta_{s+1}(Y)\mathbf{N}) + \mu\eta_{s+1}(Y)g(\widetilde{f}X, \xi_s)\\
&- \mu\eta_s(Y)g(\widetilde{f}X, \xi_{s+1}) - \lambda\eta_{s+1}(X)g(\mathbf{N}, \widetilde{f}Y)\\
&+ \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) + \mu\eta_{s+1}(X)g(\xi_s, \widetilde{f}Y) + \mu^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\\
&- \mu\eta_s(X)g(\xi_{s+1}, \widetilde{f}Y) + \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (3.8) y la definición de ξ_{s+1}, se deduce que:

$$\begin{aligned}
g(fX, fY) =& g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) - \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) - \mu^2\eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X)\\
&- \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y) - \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\\
&+ \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) - \mu^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) + \mu^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\\
&- \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y) + \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y).
\end{aligned}$$

de donde obtenemos el resultado. □

Además, dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se cumple:

Proposición 3.2.2. *En las condiciones anteriores, se verifica que:*

$$\widetilde{f}^2X = f^2X - \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - \mu^2\eta_s(X)\xi_s + \lambda\mu\eta_s(X)\boldsymbol{N} \tag{3.9}$$

y

$$g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) = g(fX, fY) + \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y). \tag{3.10}$$

Demostración. Empecemos probando la primera expresión. Para ello, apliquemos f a ambos lados en la expresión (3.8):

$$\begin{aligned}
f^2X = f(fX) &= \widetilde{f}(fX) - \lambda\eta_{s+1}(fX)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(fX)\xi_s - \mu\eta_s(fX)\xi_{s+1}\\
&= \widetilde{f}[\widetilde{f}X - \lambda\eta_{s+1}(X)\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(X)\xi_s - \mu\eta_s(X)\xi_{s+1}]\\
&= \widetilde{f}^2X - \lambda\eta_{s+1}(X)\widetilde{f}\mathbf{N} + \mu\eta_{s+1}(X)\widetilde{f}\xi_s - \mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1}\\
&= \widetilde{f}^2X + \lambda^2\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} + \mu^2\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - \mu\eta_s(X)\widetilde{f}\xi_{s+1}\\
&= \widetilde{f}^2X + \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}\\
&- \mu\eta_s(X)[f\xi_{s+1} + \lambda\eta_{s+1}(\xi_{s+1})\mathbf{N} - \mu\eta_{s+1}(\xi_{s+1})\xi_s + \mu\eta_s(\xi_{s+1})\xi_{s+1}].
\end{aligned}$$

Como $f\xi_{s+1} = 0$, $\eta_{s+1}(\xi_{s+1}) = 1$ y $\eta_s(\xi_{s+1}) = 0$, se obtiene la primera de las expresiones del resultado. Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned}
g(fX, fY) =& g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) - \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) - \mu^2\eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X) \\
& - \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y) - \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) \\
& + \lambda^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) - \mu^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) + \mu^2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y) \\
& - \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y) + \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y) \\
& = g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) - \eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X) - \mu^2\eta_s(X)\eta_s(Y).
\end{aligned}$$

con lo que concluye la prueba. □

Y además, para M, las fórmulas de Gauss-Weingarten vienen dadas por

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y);\ \widetilde{\nabla}_X N = -AX, \tag{3.11}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, donde ahora $\widetilde{\nabla}$ (resp., ∇) denota la conexión Riemanniana de $\widetilde{M}$ (resp., M) y σ y A son la segunda forma fundamental de la inmersión y el operador forma asociado con $\mathbf{N}$, respectivamente, relacionados por $\sigma(X, Y) = g(AX, Y)\mathbf{N}$.

Usando (3.8) y (3.11), podemos enunciar la siguiente proposición

Proposición 3.2.3. *Dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se cumple que*

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{f})Y =& (\nabla_X f)Y - \lambda\eta_{s+1}(Y)AX \\
& - \mu\eta_{s+1}(Y)\nabla_X\xi_s + \mu\eta_s(Y)\nabla_X\xi_{s+1} \\
& - \{X(\mu\eta_{s+1}(Y)) + \mu\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\}\xi_s \\
& + \{X(\mu\eta_s(Y)) + \mu\eta_s(\nabla_X Y) + \lambda g(AX, Y)\}\xi_{s+1} \\
& + \{X(\lambda\eta_{s+1}(Y)) + \lambda\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\}N + \sigma(X, fY) \\
& - \mu\eta_{s+1}(Y)\sigma(X, \xi_s) + \mu\eta_s(Y)\sigma(X, \xi_{s+1}).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Demostración. En primer lugar, por propiedades de la conexión afín sabemos que se tiene:

$$(\widetilde{\nabla}_X\widetilde{f})Y = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{f}Y - \widetilde{f}\widetilde{\nabla}_X Y.$$

La base de la demostración será desarrollar cada uno de los dos términos del segundo miembro para después agrupando conseguir la expresión que estamos buscando.

Empecemos pues viendo el valor del primero de ellos. Por (3.8) tenemos que la estructura $\widetilde{f}$ de la variedad $\widetilde{M}$ se relaciona con f de la hipersuperficie M de tal forma que:

$$\widetilde{f}X = fX + \lambda\eta_{s+1}(X)\mathbf{N} - \mu\eta_{s+1}(X)\xi_s + \mu\eta_s(X)\xi_{s+1}.$$

Para tener el valor de $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{f}Y$ basta aplicar $\widetilde{\nabla}_X$ a la expresión anterior:

$$\widetilde{\nabla}_X\widetilde{f}Y = \widetilde{\nabla}_X fX + \widetilde{\nabla}_X\big(\lambda\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}\big) - \widetilde{\nabla}_X\big(\mu\eta_{s+1}(X)\xi_s\big) + \widetilde{\nabla}_X\big(\mu\eta_s(X)\xi_{s+1}\big).$$

En esta igualdad, desarrollemos cada uno de los términos del miembro de la derecha. Así, cada uno de ellos, usando (3.11), viene dado por:

$$\widetilde{\nabla}_X fX = \nabla_X fY + \sigma(X, fY).$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\big(\lambda\eta_{s+1}(X)N\big) &= X(\lambda\eta_{s+1}(Y))N + \lambda\eta_{s+1}(Y)\widetilde{\nabla}_X N\\ &= X(\lambda\eta_{s+1}(Y))N - \lambda\eta_{s+1}(Y)AX.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\widetilde{\nabla}_X\big(\mu\eta_{s+1}(X)\xi_s\big) &= X(\mu\eta_{s+1}(Y))\xi_s - \mu\eta_{s+1}(Y)\widetilde{\nabla}_X\xi_s\\ &= -X(\mu\eta_{s+1}(Y))\xi_s - \mu\eta_{s+1}(Y)\nabla_X\xi_s - \mu\eta_{s+1}(Y)\sigma(X,\xi_s).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\big(\mu\eta_s(X)\xi_{s+1}\big) &= X(\mu\eta_s(Y))\xi_{s+1} + \mu\eta_s(Y)\widetilde{\nabla}_X\xi_{s+1}\\ &= X(\mu\eta_s(Y))\xi_{s+1} + \mu\eta_s(Y)\nabla_X\xi_{s+1} + \mu\eta_s(Y)\sigma(X,\xi_{s+1}).\end{aligned}$$

Sumando estos términos obtenemos:

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X\widetilde{f}Y = \nabla_X fY &+ \sigma(X, fY)\\ &+ X(\lambda\eta_{s+1}(Y))\mathbf{N} - \lambda\eta_{s+1}(Y)AX\\ &- X(\mu\eta_{s+1}(Y))\xi_s - \mu\eta_{s+1}(Y)\nabla_X\xi_s - \mu\eta_{s+1}(Y)\sigma(X,\xi_s)\\ &+ X(\mu\eta_s(Y))\xi_{s+1} + \mu\eta_s(Y)\nabla_X\xi_{s+1} + \mu\eta_s(Y)\sigma(X,\xi_{s+1}).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por otro lado, desarrollamos el término $\widetilde{f}\widetilde{\nabla}_X Y$, que nos queda como sigue,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\widetilde{\nabla}_X Y &= \widetilde{f}\Big(\nabla_X Y + \sigma(X,Y)\Big)\\ &= \widetilde{f}(\nabla_X Y) + \widetilde{f}(\sigma(X,Y)),\end{aligned}$$

en donde, aplicando la relación que existe entre f y $\widetilde{f}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\nabla_X Y) + \widetilde{f}(\sigma(X,Y)) &= f\nabla_X Y + \lambda\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\mathbf{N}\\ &- \mu\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\xi_i + \mu\eta_s(\nabla_X Y)\xi_{s+1}\\ &+ \widetilde{f}(\sigma(X,Y)).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Calculemos ahora el valor de $\widetilde{f}(\sigma(X,Y))$,

$$\widetilde{f}(\sigma(X,Y)) = \widetilde{f}(g(AX,Y)N) = g(AX,Y)N\widetilde{f}N = -\lambda g(AX,Y)\xi_{s+1},$$

y, sustituyendo en la expresión (3.14) llegamos a:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}\widetilde{\nabla}_X Y = f\nabla_X Y &+ \lambda\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\mathbf{N}\\ &- \mu\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\xi_i + \mu\eta_s(\nabla_X Y)\xi_{s+1}\\ &- \lambda g(AX,Y)\xi_{s+1}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por último restando las expresiones (3.13) y (3.15) y agrupando términos obtenemos la expresión que buscábamos:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y =&(\nabla_X f)Y - \lambda\eta_{s+1}(Y)AX\\ &- \mu\eta_{s+1}(Y)\nabla_X\xi_s + \mu\eta_s(Y)\nabla_X\xi_{s+1}\\ &- \{X(\mu\eta_{s+1}(Y)) + \mu\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\}\xi_s\\ &+ \{X(\mu\eta_s(Y)) + \mu\eta_s(\nabla_X Y) + \lambda g(AX,Y)\}\xi_{s+1}\\ &+ \{X(\lambda\eta_{s+1}(Y)) + \lambda\eta_{s+1}(\nabla_X Y)\}N + \sigma(X,fY)\\ &- \mu\eta_{s+1}(Y)\sigma(X,\xi_s) + \mu\eta_s(Y)\sigma(X,\xi_{s+1}).\end{aligned}$$

□

Ahora, suponemos que $\widetilde{M}$ es una casi trans S-variedad con funciones características $(\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_s,\widetilde{\beta}_1,\ldots,\widetilde{\beta}_s)$. Si $\mu \neq 0$, observamos que M no puede ser también una casi trans-S-variedad, ya que $\widetilde{f}\xi_i = \mu\xi_{s+1} \neq 0$. Así, vamos a considerar que $\mu = 0$, esto es, que $\lambda = 1$ y que todos los campos de estructura son tangentes a la hipersuperficie. Además, denotamos por α_i y β_i las restricciones de las funciones características para M. Entonces, de (3.12) y teniendo en cuenta (3.8), (3.9) y (3.10) se deduce

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =&\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i\\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1})\\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\}\\ &+ \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX,Y)\xi_{s+1},\end{aligned} \tag{3.16}$$

para cualesquiera $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ y, consecuentemente, M tampoco es, en general, una casi trans-S-variedad. Para probar esto basta tomar los valores de $\mu = 0$ y $\lambda = 1$ en la expresión (3.12). Así se tiene:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y =&(\nabla_X f)Y + \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX,Y)\xi_{s+1}\\ &- \{X(\eta_{s+1}(Y)) + \eta_{s+1}(\nabla_X Y)\}N - \sigma(X,fY).\end{aligned}$$

Desarrollando el primer término del segundo miembro según la definición de casi trans S-variedad se deduce que:

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})Y = &\sum_{i=1}^{s}\left[\widetilde{\alpha}_i\{g(\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y)\xi_i + \widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}^2X\}\right.\\ &\left.+ \widetilde{\beta}_i\{g(\widetilde{f}X,Y)\xi_i - \widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}X\}\right] + \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX,Y)\xi_{s+1}\\ &- \{X(\eta_{s+1}(Y)) + \eta_{s+1}(\nabla_X Y)\}N - \sigma(X,fY).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Teniendo en cuenta la relación entre f y $\widetilde{f}$ se desarrollan cada uno de los términos de la siguiente forma:

- $g(\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y)\xi_i = g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i;$

- $\widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}^2X = \widetilde{\eta}_i(Y)\big(f^2X - \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}\big) = \eta_i(Y)f^2X - \eta_i(Y)\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1};$
- $g(\widetilde{f}X, Y)\xi_i = g(fX + \eta_{s+1}(X)\mathbf{N}, Y)\xi_i = g(fX, Y)\xi_i + \eta_{s+1}(X)g(\mathbf{N}, Y)\xi_i$:
- $\widetilde{\eta}_i(Y)\widetilde{f}X = \eta_i(X)\big(fX + \eta_{s+1}(X)\mathbf{N}\big) = \eta_i(X)fX + \eta_i(X)\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}.$

Sustituyendo cada uno de estos resultados en (3.17) y tomando la parte tangente, pues $(\nabla_X f)Y$ lo es, se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX, fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i\\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1})\\ &+ \beta_i(g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\}\\ &+ \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX, Y)\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Respecto a la condición de normalidad (2.8), de (3.8) y (3.11) obtenemos que, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned}\nabla_X \xi_i =& - \alpha_i fX + \beta_i(\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - f^2X),\\ \eta_i(AX) =& - \alpha_i \eta_{s+1}(X),\end{aligned} \tag{3.18}$$

para cualquier $i = 1, \dots, s$. En efecto, si tomamos $Y = \xi_i$ en (3.11) obtenemos:

$$\widetilde{\nabla}_X \xi_i = \nabla_X \xi_i + \sigma(X, \xi_i).$$

Teniendo en cuenta aquí la condición de normalidad en la trans S-variedad:

$$-\alpha_i \widetilde{f}X - \beta_i(\widetilde{f})^2X = \nabla_X \xi_i + \sigma(X, \xi_i).$$

Desarrollamos el primer miembro de la igualdad teniendo en cuenta que $\mu = 0$ y $\lambda = 1$, obteniendo:

$$-\alpha_i[fX + \eta_{s+1}(X)\mathbf{N}] - \beta_i[f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}].$$

Por tanto nos queda:

$$\begin{aligned}-\alpha_i[fX + \eta_{s+1}(X)N] - \beta_i[f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}] &= \nabla_X \xi_i + \sigma(X, \xi_i)\\ &= \nabla_X \xi_i + g(AX, \xi_i)\mathbf{N}.\end{aligned}$$

En esta última expresión tomamos la parte tangente y la parte normal por separado, de modo que:

- $\nabla_X \xi_i = -\alpha_i fX - \beta_i f^2X + \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1};$
- $g(AX, \xi_i)\mathbf{N} = \eta_i(AX)\mathbf{N} = -\alpha_i \eta_{s+1}\mathbf{N}$, por lo que $\eta_i(AX) = -\alpha_i \eta_{s+1}(X)$.

Por otro lado, usando (2.1):

$$\nabla_X \xi_{s+1} = fAX - \sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i. \tag{3.19}$$

Para demostrar este resultado partimos del primer miembro de la igualdad. Así,

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi_{s+1} &= \widetilde{\nabla}_X \xi_{s+1} - \sigma(X, \xi_{s+1}) \\ &= -\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f}\mathbf{N} - \sigma(X, \xi_{s+1}), \end{aligned} \tag{3.20}$$

usando la fórmula de Gauss-Weingarten y la definición del campo $\xi_{s+1} = -\widetilde{f}\mathbf{N}$. Desarrollemos el primer término.

$$-\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f}\mathbf{N} = -(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})\mathbf{N} - \widetilde{f}\widetilde{\nabla}_X \mathbf{N} = -(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})\mathbf{N} + \widetilde{f}AX$$

En esta última expresión,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}AX &= fAX + \eta_{s+1}(AX)\mathbf{N} \\ &= fAX + g(AX, \xi_{s+1})\mathbf{N} \\ &= fAX + \sigma(X, \xi_{s+1}), \end{aligned} \tag{3.21}$$

y

$$\begin{aligned} -(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})\mathbf{N} = -\sum_{i=1}^{s} [&\alpha_i \{g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}\mathbf{N})\xi_i + \eta_i(\mathbf{N})(\widetilde{f})^2 X\} \\ &+ \beta_i \{g(\widetilde{f}X, \mathbf{N})\xi_i - \eta_i(\mathbf{N})\widetilde{f}X\}, \end{aligned}$$

donde se anulan todos los términos salvo el de $\beta_i g(\widetilde{f}X, \mathbf{N})\xi_i$, el cual es:

$$\beta_i g(\widetilde{f}X, \mathbf{N})\xi_i = -\beta_i g(X, \widetilde{f}\mathbf{N}) = \beta_i g(X, \xi_{s+1})\xi_i = \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i$$

Por tanto:

$$-(\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f})\mathbf{N} = -\sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i. \tag{3.22}$$

Ahora sumando las expresiones (3.22) y (3.21) llegamos a que:

$$-\widetilde{\nabla}_X \widetilde{f}N = -\sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i + fAX + \sigma(X, \xi_{s+1}).$$

Sustituyendo esta última en la expresión (3.20) obtenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi_{s+1} &= -\sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i + fAX + \sigma(X, \xi_{s+1}) - \sigma(X, \xi_{s+1}) \\ &= fAX - \sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i, \end{aligned}$$

tal y como queríamos probar.

Llegados a este punto, parece interesante estudiar si M puede ser una casi trans S-variedad dependiendo del comportamiento del operador forma.

Recordemos que M es totalmente geodésica en una casi trans S-variedad $\widetilde{M}$ si $A \equiv 0$ y es totalmente umbilical si $A = hI$, siendo h una función diferenciable, e I indicando la identidad.

Entonces, de (3.16), podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sea M una hipersuperficie totalmente geodésica tangente a los campos de estructura de una casi trans S-variedad $\widetilde{M}$, con funciones características $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta}_i$, $i = 1, \ldots, s$. Entonces, M es una casi trans-S-variedad si y solo si $\widetilde{\alpha}_i = 0$, para cada i y, en tal caso, sus funciones características son $\alpha_i = 0$, β_i, para $i = 1, \ldots, s$ y $\alpha_{s+1} = \beta_{s+1} = 0$.*

Demostración. En primer lugar, al ser $\widetilde{M}$ una casi trans S-variedad se verifica (3.16). Esta expresión, haciendo uso de la hipótesis de que M es totalmente geodésica, se transforma en la siguiente:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX, fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i \\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}) \\ &+ \beta_i(g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\},\end{aligned}$$

pues $A \equiv 0$. Así, para que esta última expresión cumpla la condición de ser casi trans S-variedad, las funciones características α_i deben ser todas nulas y las β_i coinciden con las de la casi trans S-variedad $\widetilde{M}$. En el caso de α_{s+1} y β_{s+1} ambas deben ser cero.

Recíprocamente, es trivial, pues si $\alpha_i = 0$, $\beta_i = \widetilde{\beta}_i$ (siendo $\widetilde{\beta}_i$ la función característica de $\widetilde{M}$) para todo $i = 1, \cdots s$, y $\alpha_{s+1} = \beta_{s+1} = 0$, de (3.16) se tiene que M es una casi trans S-variedad. □

Ahora, si $\widetilde{M}$ es una trans-S variedad, de (3.18) y (3.19) se deduce:

Corolario 3.2.1. *Una hipersuperficie totalmente geodésica M tangente a los campos de estructura de una trans-S variedad $\widetilde{M}$ es una trans-S variedad si y solo si $\widetilde{M}$ es una C-variedad. En este caso, M es también una C-variedad.*

Demostración. Para que M sea trans S-variedad se debe cumplir que

$$\nabla_X \xi_i = -\alpha_i fX + \beta_i(\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - f^2X)$$

y, además,

$$\nabla_X \xi_{s+1} = fAX - \sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_i.$$

Por tanto, como tenemos que M es totalmente geodésica, $AX = 0$ y así, como $\widetilde{M}$ es trans S-variedad debe verificarse $\nabla_X \xi_i = -\alpha_i f - \beta_i f^2 X$, por lo que $\beta_i = 0$. Usando el teorema anterior ($\alpha_i = 0$), tenemos que $\nabla_X \xi_i = 0$ y $\widetilde{M}$ es C-variedad. La otra implicación se razona de la misma forma. □

Teniendo en cuenta la definición de hipersuperficie totamente umbilical, un cálculo directo a partir de (3.16) muestra que esta no es una casi trans-S variedad en general. Por lo tanto, parece necesario utilizar una variación de estos conceptos con respecto al operador forma, más relacionado con la estructura. En este contexto, siguiendo las ideas introducidas por Ornea [13] para S-variedades:

Definición 3.2.1. *Decimos que una hipersuperficie M de una (casi) trans-S variedad $\widetilde{M}$ es*

- *totalmente f-geodésica si la distribución $\mathcal{L} = \{X \in \mathcal{X}(M)/\eta_i(X) = 0, i = 1, \ldots, s\}$ es totalmente geodésica, esto es, si $\sigma(X,Y) = 0$,*
- *totalmente f-umbilical si la distribución $\mathcal{L} = \{X \in \mathcal{X}(M)/\eta_i(X) = 0, i = 1, \ldots, s\}$ es totalmente umbilical, esto es, si $\sigma(X,Y) = g(X,Y)V$, siendo*

$$V = \left(1 + \frac{s}{2n-1}\right) H,$$

  donde H denota el campo curvatura media,

para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{L}$.

En otras palabras, como para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ tenemos que $\widetilde{f}^2 X, \widetilde{f}^2 Y \in \mathcal{L}$, usando (1.1) y (3.8) podemos enunciar los dos resultados que siguen.

Proposición 3.2.4. *La hipersurperficie es totalmente f-geodésica si y solo si*

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) = &\sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) \\ &- \sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(X)\eta_j(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que la hipersuperficie es totalmente f-geodésica. Por definición, sabemos que $\sigma(\widetilde{f}^2 X, \widetilde{f}^2 Y) = 0$. Así pues, tenemos

$$\sigma(\widetilde{f}^2 X, \widetilde{f}^2 Y) = \sigma(f^2 X - \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}, f^2 Y - \eta_{s+1}(Y)\xi_{s+1}) = 0,$$

donde hemos usado (3.9). Tal expresión pasa a ser:

$$\begin{aligned} &\sigma\Big(-X + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(X)\xi_i, -Y + \sum_{j=1}^{s} \widetilde{\eta}_j(Y)\xi_j \Big) = \\ &\sigma(-X,-Y) + \sigma\Big(-X, \sum_{j=1}^{s} \widetilde{\eta}_j(Y)\xi_j \Big) \\ &+ \sigma\Big(\sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(X)\xi_i, -Y \Big) + \sigma\Big(\sum_{i=1}^{s} \widetilde{\eta}_i(X)\xi_i, \sum_{j=1}^{s} \widetilde{\eta}_j(Y)\xi_j \Big) = 0. \end{aligned}$$

Ordenando términos,

$$0 = \sigma(X,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i) - \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\sigma(\xi_i,Y) + \sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j),$$

de donde obtenemos el resultado deseado.

Para el recíproco se razona exactamente igual. □

Proposición 3.2.5. *La hipersurperficie es totalmente f-umbilical si y solo si*

$$\begin{aligned}
\sigma(X,Y) = &\sum_{i=1}^{s}(\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) \\
&- \sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(X)\eta_j(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j) + g(\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y)V \\
= &\sum_{i=1}^{s}(\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) \\
&- \sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(X)\eta_j(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j) \\
&+ (g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y))V.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Demostración. Probemos primero la implicación hacia la derecha, es decir, supongamos cierto que la hipersuperficie M es totalmente f-umbilical. Por definición:

$$\sigma(\widetilde{f}^2X,\widetilde{f}^2Y) = g(\widetilde{f}^2X,\widetilde{f}^2Y)V.$$

Así, como en la demostración de la proposición anterior, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sigma(\widetilde{f}^2X,\widetilde{f}^2Y) &= \sigma(X,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i) \\
&- \sum_{i=1}^{s} \eta_i(X)\sigma(\xi_i,Y) + \sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(X)\eta_i(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j) \\
&= g(\widetilde{f}^2X,\widetilde{f}^2Y)V.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Por otro lado, usando la propiedad de f-estructura $f^3 + f = 0$, resulta:

$$g(\widetilde{f}^2X,\widetilde{f}^2Y)V = -g(\widetilde{f}^3X,\widetilde{f}Y)V = -g(-\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y)V = g(\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y)V. \tag{3.26}$$

Este último término se puede expresar, gracias a (3.10) como sigue:

$$g(\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y)V = (g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y))V. \tag{3.27}$$

Relacionando las expresiones (3.25), (3.26) y (3.27) obtenemos el resultado.

De manera análoga se prueba la implicación contraria. □

Ahora, supongamos que $\widetilde{M}$ es una trans-S variedad. De (2.8) y la segunda ecuación de (3.18), conseguimos que

$$\sigma(X,\xi_i) = -\alpha_i\eta_{s+1}(X)\mathbf{N},$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$ e $i = 1,\ldots,s$. En efecto, de la segunda fórmula de (3.18) sabemos que $\eta_i(AX) = -\alpha_i\eta_{s+1}(X)$. Esto a su vez se puede expresar de la siguiente forma :

$$\eta_i(AX) = g(AX,\xi_i) = -\alpha_i\eta_{s+1}(X).$$

Conocemos que $\sigma(X,Y) = g(X,Y)\mathbf{N}$, por tanto, $g(AX,\xi_i)\mathbf{N} = \sigma(X,\xi_i)$, es decir, $\sigma(X,\xi_i) = -\alpha_i\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}$. Consecuentemente:

Proposición 3.2.6. *Se tiene que $\sigma(\xi_i,\xi_j) = 0$ para todos i,j y las fórmulas (3.23) y (3.24) se convierten en*

$$AX = -\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i) \tag{3.28}$$

y

$$AX = -\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi) - h\widetilde{f}^2X, \tag{3.29}$$

respectivamente, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, donde $h = g(V,\boldsymbol{N})$.

Demostración. Se sabe por el resultado anterior que $\sigma(X,\xi_i) = -\alpha_i\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}$. Tomando $X = \xi_j$,

$$\sigma(\xi_j,\xi_i) = -\alpha_i\eta_{s+1}(\xi_j)\mathbf{N}$$

y tal expresión se anula, pues:

$$\eta_{s+1}(\xi_j) = g(\xi_j,\xi_{s+1}) = g\left(\xi_j, -\frac{1}{\lambda}\widetilde{f}\mathbf{N}\right) = 0.$$

Probemos a continuación la segunda parte de la proposición. Para ello partimos de las fórmulas (3.23) y (3.24). En primer lugar,

$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) =& \sum_{i=1}^{s}(\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) \\ &- \sum_{i,j=1}^{s}\eta_i(X)\eta_j(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j) \\ =& \sum_{i=1}^{s}(\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)),\end{aligned} \tag{3.30}$$

pues $\sigma(\xi_i, \xi_j) = 0$. Desarrollemos ahora los términos que nos quedan. Así:

$$\begin{aligned} g(AX,Y)\mathbf{N} &= \sum_{i=1}^{s} \big(\eta_i(X) g(AY,\xi_i)\mathbf{N} + \eta_i(Y) g(AX,\xi_i)\mathbf{N}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \big(\eta_i(X)\eta_i(AY)\mathbf{N} + g(Y,\xi_i)\eta_i(AX)\mathbf{N}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \big(- \alpha_i \eta_i(X)\eta_{s+1}(Y)\mathbf{N} - \alpha_i g(\xi_i, Y)\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{s} \big(- \alpha_i \eta_i(X) g(\xi_{s+1}, Y)\mathbf{N} - \alpha_i g(\xi_i, Y)\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}\big) \end{aligned} \tag{3.31}$$

En resumen,

$$g(AX,Y)\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{s} \big(- \alpha_i \eta_i(X) g(\xi_{s+1}, Y)\mathbf{N} - \alpha_i \eta_{s+1}(X) g(\xi_i, Y)\mathbf{N}\big),$$

con lo que obtenemos:

$$AX = -\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \big(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i\big).$$

Por otro lado, de (3.24) tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) = &\sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) - \sum_{i,j=1}^{s} \eta_i(X)\eta_j(Y)\sigma(\xi_i,\xi_j) \\ &+ (g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y))V \\ = &\sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) \\ &+ (g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y))V. \end{aligned}$$

Al igual que en el primer caso, desarrollemos el resto de términos:

$$\begin{aligned} g(AX,Y)\mathbf{N} = &\sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\sigma(Y,\xi_i) + \eta_i(Y)\sigma(X,\xi_i)) \\ &+ (g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y))V \\ = &\sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X) g(AX,\xi_i)\mathbf{N} + \eta_i(Y) g(AX,\xi_i)\mathbf{N}) \\ &+ (-g(f^2X,Y) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)) g(V,\mathbf{N})\mathbf{N} \\ = &\sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\eta_i(AY)\mathbf{N} + g(Y,\xi_i)\eta_i(AX)\mathbf{N}) \\ &+ (-g(f^2X,Y) + \eta_{s+1}(X) g(\xi_{s+1},Y)) h\mathbf{N}, \end{aligned}$$

donde hemos llamado $h = g(V, \mathbf{N})$. Para terminar, la igualdad anterior resulta:

$$\begin{aligned}
g(AX,Y)\mathbf{N} = & \sum_{i=1}^{s}(\eta_i(X)\eta_i(AY)\mathbf{N} + g(Y,\xi_i)\eta_i(AX)\mathbf{N}) \\
& + (-g(f^2X,Y) + \eta_{s+1}(X)g(\xi_{s+1},Y))h\mathbf{N} \\
& = \sum_{i=1}^{s}(-\alpha_i\eta_i(X)\eta_{s+1}(Y)\mathbf{N} - \alpha_i g(\xi_i,Y)\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}) \\
& + g(-f^2X + \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1},Y))h\mathbf{N} \\
& = \sum_{i=1}^{s}(-\alpha_i\eta_i(X)g(\xi_{s+1},Y)\mathbf{N} - \alpha_i g(\xi_i,Y)\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}) \\
& + g(-\widetilde{f}^2X,Y))h\mathbf{N}.
\end{aligned}$$

De manera resumida:

$$\begin{aligned}
g(AX,Y)\mathbf{N} = & -\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i\eta_i(X)g(\xi_{s+1},Y)\mathbf{N} + \alpha_i g(\xi_i,Y)\eta_{s+1}(X)\mathbf{N}) \\
& + g(-\widetilde{f}^2X,Y))h\mathbf{N}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$AX = -\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \xi_i\eta_{s+1}(X) - \widetilde{f}^2Xh,$$

y con esto concluye la prueba. □

En consecuencia, para hipersuperficies totalmente f-geodésicas de una trans-S variedad, tenemos:

Teorema 3.2.2. *Sea M una hipersuperficie totalmente f-geodésica tangente a los campos de estructura de una trans-S variedad $\widetilde{M}$ con funciones características $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta}_i$, $i = 1,\ldots,s$. Entonces, M es una casi trans-S-variedad con funciones características α_i, β_i, para $i = 1,\ldots,s$ y $\alpha_{s+1} = \beta_{s+1} = 0$. Además, M es una trans-S variedad si y solo si $\beta_i = 0$, para todo $i = 1,\ldots,s$.*

Demostración. Empecemos probando la primera parte del teorema. Sea M una hipersuperficie totalmente f-umbilical de una trans S-variedad $\widetilde{M}$.Tenemos que se verifica (3.16), esto es:

$$\begin{aligned}
(\nabla_X f)Y = & \sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i \\
& + \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}) \\
& + \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\} \\
& + \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX,Y)\xi_{s+1}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Por hipótesis, M es totalmente f-geodésica, por lo que se cumple (3.28). Sustituyendo este resultado en (3.32) se tiene:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i\\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1})\\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\}\\ &+ \eta_{s+1}(Y)\Big[-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i)\Big]\\ &- g\Big(-\sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i), Y\Big)\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i\\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1})\\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\}\\ &- \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_{s+1}(Y)\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X)\xi_i)\\ &+ \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)g(\xi_{s+1},Y) + \eta_{s+1}(X)g(\xi_i,Y))\xi_{s+1}\\ = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i\\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1})\\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\}\\ &- \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_{s+1}(Y)\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X)\xi_i)\\ &+ \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(\eta_i(X)\eta_{s+1}(Y) + \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y))\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Anulando términos nos da

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X)\\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\},\end{aligned}$$

lo que lleva a que M es una casi trans-S variedad con tales funciones características.

Probemos ahora la segunda parte del teorema. Así, supongamos en primer lugar que M es trans S-variedad. Por tanto se verifica que

$$\nabla_X \xi_i = -\alpha_i fX + \beta_i(\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - f^2X)$$

y

$$\nabla_X \xi_{s+1} = fAX - \sum_{i=1}^{s} \beta_i \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}.$$

Como, por hipótesis, $\widetilde{M}$ es trans S-variedad, se tiene $\nabla_X \xi_i = -\alpha_i fX - \beta_i f^2 X$. Luego, comparando ambas expresiones, $\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \cdots, s$.

Supongamos ahora que $\beta_i = 0$. Por tanto, obtenemos que

$$\nabla_X \xi_i = -\alpha_i fX$$

y

$$\nabla_X \xi_{s+1} = fAX,$$

pero como M es totalmente f-geodésica $fAX = 0$, con lo cual $\nabla_X \xi_{s+1} = 0$ y $\nabla_X \xi_i = 0$ por la primera parte del teorema, con lo que M es trans S-variedad. Con esto concluimos la prueba.

□

Para las hipersuperficies totalmente f-umbilicales de una trans-S variedad, usando un razonamiento similar a (3.29), podemos probar:

Teorema 3.2.3. *Sea M una hipersuperficie totalmente f-umbilical tangente a los campos de estructura de una trans-S variedad $\widetilde{M}$ con funciones características $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta}_i$, $i = 1, \ldots, s$. Entonces, M es una casi trans-S variedad con funciones características α_i, β_i, para $i = 1, \ldots, s$ y $\alpha_{s+1} = -h$, $\beta_{s+1} = 0$. Además, M es una trans-S variedad si y solo si $\beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$.*

Demostración. En primer lugar, veamos que M es una casi trans S-variedad con funciones características α_i, β_i, $\alpha_{s+1} = -h$ y $\beta_{s+1} = 0$. Al ser $\widetilde{M}$ trans S-variedad, se verifica (3.16). Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =& \sum_{i=1}^{s} \{\alpha_i(g(fX, fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i \\ &+ \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}) \\ &+ \beta_i(g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\} \\ &+ \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX, Y)\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Usando la hipótesis de que M es totalmente f-umbilical se cumple (3.29), por lo que, sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =& \sum_{i=1}^{s} \{\alpha_i(g(fX, fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}) \\ &+ \beta_i(g(fX, Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\} \\ &+ \eta_{s+1}(Y)\big[-\sum_{i=1}^{s} \alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi) - h\widetilde{f}^2X\big] \\ &- g(-\sum_{i=1}^{s} \alpha_i(\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi) - h\widetilde{f}^2X, Y)\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Agrupando términos y simplificando queda:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X \\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\} \\ &- \sum_{i=1}^{s}\alpha_i\eta_{s+1}(Y)\eta_i(X)\xi_{s+1} - h\eta_{s+1}(Y)\widetilde{f}^2X \\ &+ \sum_{i=1}^{s}\alpha_i\eta_i(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_{s+1} + g(h\widetilde{f}^2X,Y)\xi_{s+1}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Así:

$$\begin{aligned}-h\eta_{s+1}(Y)\widetilde{f}^2X + g(h\widetilde{f}^2X,Y)\xi_{s+1} &= -h\eta_{s+1}(Y)\big(f^2X - \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}\big) \\ &+ hg(f^2X - \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1},Y)\xi_{s+1} \\ &= -h\eta_{s+1}(Y)f^2X + h\eta_{s+1}(Y)\xi_{s+1} \\ &+ hg(f^2X,Y)\xi_{s+1} - h\eta_{s+1}(X) \\ &- h\eta_{s+1}(X)g(\xi_{s+1},Y)\xi_{s+1} \\ &- h\eta_{s+1}(Y)f^2X + h\eta_{s+1}(Y)\xi_{s+1} \\ &+ hg(f^2X,Y)\xi_{s+1} - h\eta_{s+1}(X) \\ &- h\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_{s+1} \\ &= -h\big(\eta_{s+1}(Y)f^2X + g(fX,fY)\xi_{s+1}\big).\end{aligned}$$

Sustituyendo esto último en la expresión (3.33) se tiene que

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s}\{\alpha_i(g(fX,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X \\ &+ \beta_i(g(fX,Y)\xi_i - \eta_i(Y)fX)\} \\ &- h\big(\eta_{s+1}(Y)f^2X + g(fX,fY)\xi_{s+1}\big),\end{aligned}$$

lo que implica que M es una trans S-variedad con funciones características α_i, β_i, $\alpha_{s+1} = -h$ y $\beta_{s+1} = 0$.

A continuación probemos la segunda parte del resultado. Supongamos, en primer lugar, que M es una trans S-variedad. Con esto se tiene

$$\nabla_X\xi_i = -\alpha_i fX + \beta_i(\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - f^2X)$$

y:

$$\nabla_X\xi_{s+1} = fAX - \sum_{i=1}^{s}\beta_i\eta_{s+1}(X)\xi_i.$$

Por tanto, como $\widetilde{M}$ es una trans S-variedad, se verifica $\nabla_X\xi_i = -\alpha_i fX - \beta_i f^2X$. Para que se cumplan ambas expresiones, $\beta_i = 0$.

Recíprocamente, si suponemos que $\beta_i = 0$, se tiene (por ser $\widetilde{M}$ trans$S$-variedad) que:

$$\nabla_X \xi_i = -\alpha_i f X.$$

Por otro lado,

$$\nabla_X \xi_{s+1} = fAX,$$

con lo que usando la condición de que M sea totalmente f-umbilical (3.29), $\nabla_X \xi_{s+1} = -hfX$ y con esto probamos el resultado. □

A continuación, sea $\widetilde{M}$ una S-variedad, esto es, una trans-S variedad con funciones características $\widetilde{\alpha}_i = 1$ y $\widetilde{\beta}_i = 0$, para $i = 1, \dots, s$.

Definición 3.2.2. *Una hipersuperficie M tangente a los campos de estructura de $\widetilde{M}$ se dice que es pseudo-umbilical [5] si su operador forma satisface*

$$AX = -h_1 \widetilde{f}^2 X + h_2 \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - \sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i), \tag{3.34}$$

para todo $X \in \mathcal{X}(M)$, donde h_1 y h_2 son funciones diferenciables en M.

Nota 3.2.1. *Las hipersuperficies pseudo-umbilicales de S-variedades se corresponden a las hipersuperficies reales η-umbilical de variedades Kaehlerianas [10] (para más detalles y ejemplos, se puede consultar el artículo mencionado [5]).*

Entonces, usando (3.16), (3.34) y las propiedades de las estructuras, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.2.4. *Toda hipersuperficie pseudo-umbilical de una S-variedad es una trans-S variedad con funciones características $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$, for $i = 1, \dots, s$ y $\alpha_{s+1} = -h_1$, $\beta_{s+1} = 0$.*

Demostración. Al ser $\widetilde{M}$ S-variedad, sabemos por resultados anteriores que $\widetilde{\alpha}_i = 1$ y $\widetilde{\beta}_i = 0$. Por tanto, de (3.16) tenemos:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s} \{g(fX, fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i \\ &+ \eta_i(Y) f^2 X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}\} \\ &+ \eta_{s+1}(Y)AX - g(AX, Y)\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que M es pseudo-umbilical, es decir, el operador forma verifica (3.34). Combinando estos dos resultados obtenemos,

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y = &\sum_{i=1}^{s} \{g(fX, fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i + \eta_i(Y) f^2 X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}\} \\ &+ \eta_{s+1}(Y)\big[- h_1 \widetilde{f}^2 X + h_2 \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - \sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i)\big] \\ &- g\big(- h_1 \widetilde{f}^2 X + h_2 \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1} - \sum_{i=1}^{s} (\eta_i(X)\xi_{s+1} + \eta_{s+1}(X)\xi_i), Y\big)\xi_{s+1},\end{aligned}$$

que, operando y simplificando, se transforma en lo siguiente:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =& \sum_{i=1}^{s}\{g(fX,fY)\xi_i + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X - \eta_{s+1}(X)\eta_i(Y)\xi_{s+1}\}\\ & - h_1\eta_{s+1}(Y)\widetilde{f}^2X + h_2\eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1} - \sum_{i=1}^{s}(\eta_i(X)\eta_{s+1}(Y)\xi_{s+1})\\ & - \sum_{i=1}^{s}\eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X)\xi_i\\ & + h_1 g(\widetilde{f}^2X,Y)\xi_{s+1} - h_2\eta_{s+1}(X)g(\xi_{s+1},Y) + \sum_{i=1}^{s}\eta_i(X)g(\xi_{s+1},Y)\xi_{s+1}\\ & + \sum_{i=1}^{s}\eta_{s+1}(X)g(\xi_i,Y)\xi_{s+1}.\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $g(\xi_i,X) = \eta_i(X)$, para todo $i = 1,\cdots,s+1$, se anulan términos de forma que queda:

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =& \sum_{i=1}^{s}\{g(fX,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\}\\ & - h_1\eta_{s+1}(Y)\widetilde{f}^2X + h_1 g(\widetilde{f}^2X,Y)\xi_{s+1}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Veamos el valor de los dos últimos términos. Así,

$$\begin{aligned}-h_1\eta_{s+1}(Y)\widetilde{f}^2X &= -h_1\eta_{s+1}(Y)\big(f^2X - \eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}\big)\\ &= -h_1\eta_{s+1}(Y)f^2X + h_1\eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}\end{aligned}$$

y:

$$h_1 g(\widetilde{f}^2X,Y)\xi_{s+1} = -h_1 g(\widetilde{f}X,\widetilde{f}Y) = -h_1\big(g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\big)\xi_{s+1}.$$

Sustituyendo en la expresión (3.35) se tiene

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =& \sum_{i=1}^{s}\{g(fX,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\}\\ & - h_1\eta_{s+1}(Y)f^2X + h_1\eta_{s+1}(Y)\eta_{s+1}(X)\xi_{s+1}\\ & - h_1\big(g(fX,fY) + \eta_{s+1}(X)\eta_{s+1}(Y)\big)\xi_{s+1},\end{aligned}$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned}(\nabla_X f)Y =& \sum_{i=1}^{s}\{g(fX,fY)\xi_i + \eta_i(Y)f^2X\}\\ & - h_1\eta_{s+1}(Y)f^2X - h_1 g(fX,fY)\xi_{s+1},\end{aligned}$$

lo que implica que M es una trans S-variedad con funciones características $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$, para todo $i = 1,\cdots,s$, $\alpha_{s+1} = -h_1$ y $\beta_{s+1} = 0$. □

Ahora, vamos a considerar el caso $\lambda = 0$ y así, $\mu = 1$. Consecuentemente, el campo de estructura ξ_s es normal a la hipersuperficie. En este contexto definimos $s-1$ campos de vectores en M por $\xi_{i_x} = \widetilde{\xi}_{i_x}$, para todo $x \in M$ y

$$\eta_i(X) = \widetilde{\eta}_i(X),\ \ fX = \widetilde{f}X, \tag{3.36}$$

para todos $i = 1, \ldots, s$ y $X \in \mathcal{X}(M)$. Entonces,

$$(M, f, \xi_1, \ldots, \xi_{s-1}, \eta_1, \ldots, \eta_{s-1}, g)$$

es también una f-variedad métrica con rango(f) = rango$(\widetilde{f})$. Además, dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, se tiene que

$$\widetilde{f}^2X = f^2X \text{ y } g(\widetilde{f}X, \widetilde{f}Y) = g(fX, fY). \tag{3.37}$$

Es necesario señalar que si $\mathrm{d}\widetilde{\eta}_s = F$ (por ejemplo, si $\widetilde{M}$ es una variedad f-contacto métrica o, en particular, una S-variedad) se puede probar que una hipersuperficie M normal a ξ_s debe ser una subvariedad anti-invariante. Así, en tal caso, no existen hipersuperficies satisfaciendo la condición requerida. Por otro lado, cualquier hipersuperficie de $\widetilde{M}$ normal al campo de estructura ξ_s es una subvariedad invariante porque $\eta_s(fX) = 0$, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$.

Usando la misma notaciones que anteriormente, se tiene de forma trivial:

Teorema 3.2.5. *Sea M una hipersuperficie normal al campo de estructura ξ_s de una (casi) trans-S variedad con funciones características $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_s, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_s$. Entonces, M es una (casi) trans-S variedad con funciones características:*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}.$$

Bibliografía

[1] Bhatt, L. and Dube, K.K., *Semi-invariant submanifolds of r-Kenmotsu manifolds*, Acta Cienc. Indica Math., **29** (2003), No. 1, 167-172.

[2] Blair, D.E., *Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(s)$*, J. Differential Geom., **4** (1970), 155-167.

[3] Blair, D.E., *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, 2nd. Ed., Progress in Mathematics, Vol. 209, Birkhäuser, New York, 2010.

[4] Blair, D.E and Oubiña, J.A., *Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds*, Publ. Mat., **34** (1990), 199-207.

[5] J.L. Cabrerizo, L.M. Fernández, M. Fernández, On pseudo-umbilical hypersurfaces of S-manifolds. *Acta Math. Hungar.* **70(1-2)** (1996), 121-128.

[6] Falcitelli, M. and Pastore, A.M., *f-structures of Kenmotsu type*, Mediterr. J. Math., **3** (2006), 549-564.

[7] Fernández, L.M., *Variedades con K-estructuras. Subvariedades*, Ph.D. Thesis, University of Sevilla, Sevilla, 1987.

[8] Goldberg, S.I. and Yano, K., *On normal globally framed f-manifolds*, Tohoku Math. J. (2), **22** (1970), 362-370.

[9] Hasegawa, I., Okuyama, Y. and Abe, T., *On p-th Sasakian manifolds*, J. Hokkaido Univ. Educ. Nat. Sci. Section II A **37** (1986), No. 1, 1-16.

[10] M. Kon, Pseudo-Einstein real hypersurfaces in complex space forms. *J. Diff. Geom.* **14** (1979), 339-354.

[11] Olszak, Z., *Curvature properties of quasi-Sasakian manifolds*, Tensor (N.S.), **38** (1982), 19-28.

[12] O'Neill, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 103, Academic Press, New York, 1983.

[13] L. Ornea, Suvarietati Cauchy-Riemann generice in S-varietati, *Stud. Cerc. Mat.*, **36(5)** (1984), 435-443.

[14] Oubiña, J.A., *New classes of almost contact metric structures*, Publ. Mat., **32** (1985), 187-193.

[15] Suguri, S. and Nakayama, S., *D–conformal deformations on almost contact metric structure*, Tensor (N.S.), **28** (1974), 125-129.

[16] Tanno, S., *The topology of contact Riemannian manifolds*, Illinois J. Math., **12** (1968), 700-717.

[17] Turgut Vanli, A. and Sari, R., *Generalized Kenmotsu manifolds*, Comm. Math. Appl., **7** (2016), No. 4, 311-328.

[18] Yano, K., *On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying* $f^3 + f = 0$, Tensor **14**, (1963), 99-109.