UNIVERSIDAD de SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Clasificación y estudio de extensiones centrales de ciertas álgebras no asociativas

Ivan Kaygorodov

Sevilla, 2020

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Clasificación y estudio de extensiones centrales de ciertas álgebras no asociativas

Memoria presentada por Ivan Kaygorodov para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº de la Directora,

Luisa Mª Camacho

Fdo. Dra. Luisa María Camacho Santana,
Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Índice general

AGRADECIMIENTOS

Esta memoria no habría visto nunca la luz si no hubiese sido por todas las personas que, directa o indirectamente, han colaborado en ella. Por toda la ayuda prestada, les manifiesto mi más profundo agradecimiento.

En primer lugar, quiero dar las gracias a mi directora de tesis, Luisa María Camacho Santana, que me ha guiado y ayudado durante estos años de mi formación como investigador. También tengo que agradecer a Antonio Jesús Calderón Martín de la Universidad de Cádiz (España), que me introdujo en el tema de mis estudios. Y sin duda, debo agradecer a todas las personas que han trabajado conmigo todos estos años. Entre ellos cabe citar a Abror Khudoyberdyiev (Tashkent, Uzbekistán), Amir Fernández Ouaridi (Cádiz, España), Farukh Mashurov (Almaty, Kazajstán), Iqboljon Karimjanov (Andijan, Uzbekistán), Mykola Khrypchenko (Florianópolis, Brasil), Nurlan Ismailov (Nur-Sultan, Kazajstán), Pilar Páez Guillán (Santiago de Compostela, España), Samuel Lopes (Porto, Portugal), Vasily Voronin (Novosibirsk, Rusia) y Yury Popov (Campinas, Brasil).

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación que presentamos se centra en dos problemas clásicos en el estudio de las álgebras no asociativas: las extensiones centrales y la clasificación.

La noción de extensión central de un álgebra tiene su origen en la teoría de grupos y fue introducida para estudiar las álgebras de Lie y otras clases de álgebras no asociativas. Las extensiones centrales juegan un papel importante en la Mecánica Cuántica: una de las primeras conexiones viene dada por el Teorema de Wigner, el cual establece que una simetría de un sistema mecánico cuántico determina una transformación (anti) unitaria de un espacio de Hilbert. Otro área de la Física donde se pueden encontrar extensiones centrales es en la Teoría Cuántica de Corrientes Conservadas de un Lagrangiano. Estas corrientes generan un álgebra que está estrechamente relacionada con las álgebras de Kac-Moody afines, las cuales son extensiones centrales universales de álgebras de loops. Las extensiones centrales son necesarias en Física pues el grupo de simetría de un sistema es una extensión central del grupo de simetría clásica, y, de la misma manera, la simetría correspondiente a un álgebra de Lie del sistema cuántico es, en general, una extensión del álgebra de simetría clásica. Se ha conjeturado que las álgebras de Kac-Moody pueden ser un grupo de simetría de una teoría de supercuerdas unificada.

Las extensiones centrales de las álgebras de Lie juegan un papel dominante en la Teoría Cuántica de Campos, particularmente en la Teoría de Conforme de Campos, en la Teoría de Cuerdas y en M-teoría. En los Grupos de Lie (álgebras de Lie y sus representaciones) una extensión de un álgebra de Lie es una ampliación de un álgebra de Lie g dada por otra álgebra de Lie h. Las extensiones pueden surgir de varias formas, por ejemplo, las extensiones triviales se obtienen tomando la suma directa de dos álgebras de Lie. Las extensiones pueden surgir de manera natural cuando se construye un álgebra de Lie a partir de representaciones grupales proyectivas. Una extensión central y una extensión por una derivación de un álgebra de bucle polinomial sobre un álgebra de Lie simple de dimensión finita resulta un álgebra de Lie isomorfa a un álgebra de Kac-Moody afín no retorcida [6, Capítulo 19]. Otros ejemplos de extensiones son el álgebra de Virasoro, que es la extensión central universal del álgebra de Witt, o el álgebra de Heisenberg, que es una extensión central de un álgebra de Lie conmutativa [6, Capítulo 18]. Las extensiones centrales son fundamentales para la construcción de las extensiones dobles [7].

En cuanto al problema de la clasificación, en general, la clasificación de las álgebras definidas por una cierta propiedad es un problema clásico en el estudio de las álgebras asociativas y no asociativas. Hay muchos resultados relacionados con las clasificaciones de las álgebras y superálgebras simples, semi-simples, solubles, nilpotentes y muchas más.

Los primeros resultados en esta dirección fueron las clasificaciones en dimensión finita de las álgebras asociativas simples y las de Lie simples. Algunas de las clasificaciones más importantes obtenidas en la segunda mitad del siglo XX y el inicio del siglo XXI son las de las superálgebras de Lie simples complejas de dimensión finita (Kac, 1977), las de las álgebras de Novikov simples complejas de dimensión finita (Zelmanov, 1987), las de las álgebras estructurales semi-simples complejas de dimensión finita (Smirnov, 1990), las de las superálgebras de Jordan simples complejas de dimensión finita (Kac y Kantor, 1977 y 1990), las de las superálgebras de Lie simples complejas localmente finitas (Kac, 1998), las de las superálgebras de Jordan semi-simples complejas de dimensión finita (Zelmanov, 2002), las de las superálgebras de Jordan simples complejas localmente finitas (Kac y Cantarini, 2007), las de las superálgebras de Filippov (n-Lie) simples complejas localmente finitas (Kac y Cantarini, 2010), las de las superálgebras rígidas simples complejas localmente finitas (Kac y Cantarini, 2010), las de las superálgebras estructurales simples complejas de dimensión finita (Shestakov y Pozhidaev, 2010) y las de las superálgebras de Jordan no conmutativas simples complejas de dimensión finita (Shestakov y Pozhidaev, 2013).

La clasificación de las álgebras, salvo isomorfismo, en una dimensión arbitraria finita de una cierta variedad es un problema muy importante para entender la estructura de dicha variedad de álgebras pero es, en general, un problema difícil de abordar. Por ello, se clasifican subclases (por ejemplo, simples y semi-simples) o bien se trabaja en dimensiones pequeñas. Uno de los primeros ejemplos de clasificaciones de álgebras en dimensiones pequeñas apareció en el artículo de Study en 1890, donde el autor presentó una lista de álgebras asociativas hasta dimensión 4. En los últimos años se han obtenido muchos resultados tanto en la clasificación de las álgebras y superálgebras asociativas y como en las no asociativas de dimensiones pequeñas. Algunos de los resultados más interesantes en esta dirección son: álgebras alternativas de dimensión 4 (Gainov, 1963), álgebras de Lie binarias de dimensión 4 (Gainov, 1963), superálgebras de Lie de dimensión 4 (Backhouse, 1978), álgebras anticonmutativas n-arias de dimensión $n+1$ (Filippov, 1985), superálgebras de Malcev de dimensión 4 (Albuquerque y Elduque, 1996), álgebras de Novikov de dimensión 3 (Bai y Meng, 2001), superálgebras de Lie de dimensión 5 (Matiadou y Fellouris, 2007), álgebras simétricas a izquierda de dimensión 3 (Bai, 2009), álgebras de Zinbiel de dimensión 4 (Adashev, Khudoyberdiyev y Omirov, 2010), álgebras de Filippov (n-arias) de dimensión $n+2$ (Bai, Song y Zhang, 2011), álgebras de Leibniz de dimensión 4 (Cañete y Khudoyberdiyev, 2013), álgebras de Jordan de dimensión 4 (Martin, 2014), álgebras anticonmutativas de dimensión 3 (Ismailov, Kaygorodov y Volkov, 2019), todas las álgebras de dimensión 2 (Kaygorodov y Volkov, 2019) y otras.

Otra subclase importante dentro de una variedad de álgebras son las nilpotentes. Recordemos que un álgebra se llama nilpotente si existe un número fijo m tal que el producto de cualesquiera m elementos del álgebra es cero. El ejemplo más básico es el álgebra abeliana (con producto cero). Es conocido que toda variedad de álgebras definida a través de identidades tiene una subclase de álgebras nilpotentes. De hecho, existen bastantes variedades de álgebras donde, fijada una dimensión, todas son nilpotentes (no hay simples ni semisimples).

Entre ellas, los ejemplos más importantes para nuestro trabajo son:

- La variedad de las álgebras de Zinbiel complejas de dimensión finita (resultado probado por Dzhumadildaev y Tulenbaev en 2005 [22]);
- La variedad de las álgebras de mock-Lie duales complejas de dimensión finita (resultado probado por Zusmanovich en 2017 [45]).

A la vista de los resultados citados arriba, el estudio de las álgebras nilpotentes de las variedades de álgebras de Zinbiel y las de mock-Lie duales tiene mucho interés y sentido, siendo de gran utilidad para entender la estructura de las variedades citadas.

Otro aspecto a tener en cuenta a la hora de la clasificación y relacionado con la dimensión del álgebra (puede ser considerado como un análogo para las álgebras de dimensión infinita) es el número de generadores.

Está claro que entre las álgebras de dimensión infinita se pueden encontrar bastante álgebras generadas por un número finito de elementos. En el caso de las álgebras de dimensión finita, la dimensión de un álgebra no siempre nos da una idea del número de generadores. En principio, la cantidad de generadores es casi siempre menor que la dimensión del álgebra. La igualdad la conseguimos solamente en el caso del álgebra con producto cero (el álgebra abeliana). En el caso de las álgebras de Lie semi-simples de dimensión finita, éstas pueden ser generadas por dos elementos, y en el caso de las superálgebras de Lie de dimensión finita por un elemento [4, 42]. En cuanto a los grupos de orden fijo con un generador, se ha probado que sólo hay un grupo cíclico.

En el caso de las álgebras nilpotentes, el número de álgebras con un generador puede variar dependiendo del tipo de variedad de álgebras. Por ejemplo, en el caso de las asociativas y de las conmutativas nilpotentes de dimensión n con un generador solamente hay una, en el caso de las de Jordan, de las no conmutativas, de las de Leibniz y de las de Zinbiel tenemos una situación muy parecida: hay solamente un álgebra nilpotente de dimensión n con un generador [39]. En estos casos las álgebras nilpotentes con un generador se llaman álgebras null-filiformes. Existen muchas variedades de álgebras donde hay más de un álgebra nilpotente de dimensión n con un generador. Ejemplos de estas álgebras en dimensión 4 son las asosimétricas [30], las de Novikov [33], las biconmutativas [38], las terminales [36] entre otras.

No existe un método universal para clasificar álgebras con una propiedad fija. En el caso de la clasificación de las álgebras simples de una cierta variedad existe un método muy útil presentado en los artículos de Kac y Cantarini. La idea principal de ese método consiste en establecer una relación entre los objetos simples (álgebras, superálgebras, álgebras o superálgebras n-arias) de una variedad y las álgebras (o superálgebras) de Lie simples usando el functor generalizado de Kantor–Koecher–Tits [13, 14]; con esa relación, usando la clasificación de las álgebras (o superálgebras) de Lie simples obtenidas en algunos artículos de Kac, podemos dar la clasificación de los objetos de nuestra variedad.

En el caso de la clasificación de las álgebras de una dimensión fija de una cierta variedad, se puede usar el método presentado en los artículos de Penkava y Fialowski [24]. La idea de este método es obtener una descripción de todas las álgebras no simples: las extensiones de álgebras de dimensión más pequeña por un ideal. Una combinación de esos dos métodos (de Kac–Cantarini y de Penkava–Fialowski) puede garantizar la obtención de todas las álgebras de dimensión fija de una cierta variedad. Un caso particular del método de Penkava–Fialowski, la extensión por un ideal anulador, fue presentado en el artículo de Skjelbred y Sund para clasificar los álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 [41]. Estas extensiones se conocen ahora con el nombre de extensiones centrales.

El método más productivo para clasificar las álgebras nilpotentes de una cierta variedad es el método de las extensiones centrales, que da lugar en muchas ocasiones a la clasificación de las álgebras de dimensión arbitaria finita de esta variedad. Skjelbred y Sund aplicaron por primera vez este método a la clasificación de las álgebras de Lie en 1978 [41]. Este método (ahora conocido como *el método de Skjelbred y Sund*) fue adaptado por diferentes autores para otros tipos de álgebras, tales como las asociativas [18], las de Jordan [26,27], las de Malcev [28], las de Lie binarias [1], las anticonmutativas [9], las de Zinbiel [10], las de Tortkara [25], las asosimétricas [30], las de Jordan no conmutativas [31], las de Novikov [33], las terminales [36]. Finalmente, en el trabajo [37], se presentó una versión generalizada para una variedad cualquiera. Hasta el momento, usando el método de Skjelbred–Sund, se han obtenido muchas clasificaciones de álgebras nilpotentes de dimensión pequeña. Indicamos a continuación las más interesantes: las asociativas, las asosimétricas, las biconmutativas, las conmutativas, las terminales, las alternativas a la derecha, las conmutativas a la derecha, las simétricas a la izquierda, las $\mathfrak{CD}$-álgebras, todas de dimensión 4; las de Jordan y las $\mathfrak{CD}$-álgebras conmutativas de dimensión 5; las de Lie nilpotentes, las de Lie binarias, las de Tortkara, las anticonmutativas, todas de dimensión 6, y las de mock-Lie duales de dimensión 8.

OBJETIVOS

En esta memoria estudiamos los principales métodos de construcción de extensiones centrales de las álgebras complejas no asociativas. Construimos los nuevos ejemplos de las álgebras no asociativas por el método de Skjelbred–Sund.

Nuestro principal objetivo es adaptar dicho método a variedades de álgebras no asociativas, obteniendo los siguientes resultados:

1. Clasificación de las álgebras de mock-Lie duales de dimensión 8.
2. Clasificación de las extensiones centrales de las álgebras de Zinbiel filiformes.
3. Clasificación de las álgebras de Novikov nilpotentes uno generadas de dimensiones 5 y 6.
4. Clasificación de las álgebras Tortkara (no Malcev) nilpotentes de dimensión 6.
5. Clasificación de las álgebras anticonmutativas nilpotentes de dimensión 6.

RESUMEN

This work is devoted to the study of central extensions of non-associative algebras. Central extensions play an important role in quantum mechanics: one of the earlier encounters is using Wigner's theorem which states that symmetry of a quantum mechanical system determines an (anti-)unitary transformation of a Hilbert space. Another area of physics where one encounters central extensions is the quantum theory of conserved currents of a Lagrangian. These currents span an algebra which is closely related to so-called affine Kac-Moody algebras, which are universal central extensions of loop algebras. Central extensions are needed in physics, because the symmetry group of a quantized system usually is a central extension of the classical symmetry group, and in the same way the corresponding symmetry Lie algebra of the quantum system is, in general, a central extension of the classical symmetry algebra. Kac-Moody algebras have been conjectured to be symmetry groups of unified superstring theory. The centrally extended Lie algebras play a dominant role in quantum field theory, particularly in conformal field theory, string theory, and M-theory. In the theory of Lie groups, Lie algebras, and their representations, a Lie algebra extension is an enlargement of a given Lie algebra g by another Lie algebra h. Extensions arise in several ways. There is a trivial extension obtained by taking a direct sum of two Lie algebras. Other types are a split extension and a central extension. Extensions may arise naturally, for instance, when forming a Lie algebra from projective group representations. A central extension and an extension by a derivation of a polynomial loop algebra over a finite-dimensional simple Lie algebra give a Lie algebra which is isomorphic to a non-twisted affine Kac-Moody algebra. Using the centrally extended loop algebra one may construct a current algebra in two spacetime dimensions. The Virasoro

algebra is the universal central extension of the Witt algebra, the Heisenberg algebra is the central extension of a commutative Lie algebra. In a pure algebraic view, the method of central extensions gives a very useful tool for the algebraic classification of nilpotent algebras from a certain variety.

First, we study anticommutative nilpotent algebras and consider a special subcase of anti-associative algebras. We are working with anti-associative anticommutative algebras, which are also known as dual Mock Lie algebras. All dual Mock Lie algebras are nilpotent, and it gives the opportunity for an algebraic classification of dual Mock Lie algebras of dimensions 7 and 8. Using, our method of central extensions for dual Mock Lie algebras, we have the following Theorem.

Teorema A. *Up to isomorphism, the variety of* 8*-dimensional complex dual Mock Lie algebras has* 36 *non-isomorphic classes of algebras, described explicitly in [12].*

Second, we consider the central extensions of a more popular subclass of nilpotent algebras in the variety of Zinbiel algebras. We are working with filiform Zinbiel algebras of arbitrary dimension. The next our result is the following theorem

Teorema B. *Up to isomorphism, filiform Zinbiel algebras has infinitely many isomorphism classes, described explicitly in [10] in terms of* 3 *one-parameter families and* 13 *additional isomorphism classes.*

The third part of our work is dedicated to the study of nilpotent Novikov algebras of dimension 5 and 6. The main result of this section is the following Theorem.

Teorema C. *Up to isomorphism, the class of complex 5-dimensional nilpotent Novikov algebras has infinitely many isomorphism classes (see, [11]), described in terms of* 1 *two-parameter family,* 7 *one-parameter families, and* 5 *additional isomorphism classes. Up to isomorphism, the class of complex 6-dimensional nilpotent Novikov algebras has infinitely many isomorphism classes (see, [11]), described in terms of* 5 *two-parameter family,* 18 *one-parameter families, and* 15 *additional isomorphism classes.*

In the last section, we consider anticommutative algebras. The way of classification of all nilpotent anticommutative algebras of dimension 6 is based on a pass-to-pass classification of nilpotent Lie algebras, nilpotent Malcev algebras, nilpotent Tortkara algebras, and nilpotent non-Tortkara anticommutative algebras. The main method for our classification of all nilpotent anticommutative six-dimensional algebras is based on the calculation of the central extension of smaller algebras, which gives the following Theorem.

Teorema D. *Up to isomorphism, the variety of* 6*-dimensional complex nilpotent anticommutative algebras has infinitely many isomorphism classes, described explicitly in [35] in terms of* 14 *one-parameter families and* 130 *additional isomorphism classes.*

PRELIMINARES

En este capítulo vamos a introducir brevemente algunos conceptos que serán necesarios para el desarrollo de esta memoria. Las álgebras aquí estudiadas son en su mayoría álgebras anticonmutativas. La anticonmutatividad es un fenómeno frecuente en Geometría y Física, ya que surge de forma natural en el contexto de la simetría. Dos de los ejemplos más destacados de álgebras anticonmutativas son el álgebra exterior (que también es asociativa) y las álgebras de Lie (que, en general, no son asociativas).

Definición 1. *Un álgebra anticonmutativa es un espacio vectorial complejo V junto con una multiplicación, es decir, una aplicación bilineal, que satisface*

$$xy = -yx,$$

para todo $x, y \in V$.

La versión conmutativa de las álgebras de Lie es conocida con diferentes nombres, como álgebras conmutativas con nilíndice 3, álgebras de Jacobi-Jordan, álgebras de Jordan-Lie y álgebras de mock-Lie. Usando a la noción de dualidad de Koszul [32], la variedad de las álgebras de mock-Lie introduce las álgebras de mock-Lie duales, otro ejemplo de álgebras anticonmutativas y anti-asociativas. La definición de las álgebras de mock-Lie duales apareció por primera vez en el artículo de Zusmanovich [45].

Definición 2. *Un álgebra de mock-Lie dual es un espacio vectorial complejo V junto con una multiplicación, i.e., una aplicación bilineal, que satisface*

$$xy = -yx,$$

$$x(yz) = -(xy)z,$$

para todo $x, y, z \in V$.

Es sencillo probar que todas las álgebras de mock-Lie duales son nilpotentes. Entonces, la clasificación completa de las álgebras de mock-Lie duales de una dimensión fija viene dada por la clasificación de las álgebras nilpotentes de esta variedad y puede ser obtenida por el método de Skjelbred–Sund. La clasificación de las álgebras de mock-Lie duales de dimensión hasta 6 puede ser extraída de la clasificación de las álgebras nilpotentes presentada en el Teorema A, aún no se conocen clasificaciones de las álgebras anticonmutativas nilpotentes de dimensión mayor o igual a 7. La variedad de las álgebras de mock-Lie duales es más reducida que la variedad de todas las álgebras anticonmutativas nilpotentes, por lo que ha sido posible obtener la clasificación de las álgebras de mock-Lie duales de dimensiones 7 y 8. Dicha variedad de álgebras contiene una subvariedad muy importante: la de las álgebras anticonmutativas nilpotentes de índice 2, es decir, aquellas que satisfacen la identidad $(xy)z = 0$. Esta variedad es la intersección de todas las variedades de álgebras anticonmutativas definidas por una familia de identidades polinomiales. De aquí obtenemos la idea para clasificar las álgebras de mock-Lie duales de dimensión 8.

A partir de los siguientes trabajos:

- La clasificación de las álgebras anticonmutativas nilpotentes de índice dos (hecha por Yan y Deng en [43]);
- La clasificación de las álgebras de mock-Lie duales (no nilpotentes de índice dos) (hecha por Camacho, Kaygorodov, Lopatkin y Salim en [12]).

obtenemos el segundo resultado principal de nuestra investigación.

Teorema A. *Salvo isomorfismo, la variedad de álgebras de mock-Lie duales complejas de dimensión* 8 *tiene un número finito de clases de isomorfismo, descritas explícitamente en el artículo [12] en términos de* 36 *clases de isomorfismo.*

La generalización más estudiada de las álgebras de Lie es la variedad de las álgebras de Leibniz, un análogo no anticonmutativo de las álgebras de Lie. De éstas, tenemos otro ejemplo conocido de álgebras introducidas como duales por Koszul: las álgebras de Zinbiel.

Definición 3. *Un álgebra de Zinbiel es un espacio vectorial complejo V junto con una multiplicación, i.e., una aplicación bilineal, que satisface*

$$(xy)z = x(yz + xy),$$

para todo $x, y, z \in V$.

La variedad de las álgebras de Zinbiel fue introducida por primera vez en un artículo de Loday en 1995. Éstas tienen mucha relación con las álgebras de Tortkara y los sistemas triples de Tortkara [8,21]. Las álgebras de Zinbiel también son álgebras pre-conmutativas. En los últimos años, las álgebras de Tortkara han aparecido en algunas áreas de Matemática Aplicada [19,20].

Para nuestro estudio, la propiedad de las álgebras de Zinbiel más interesante es que toda álgebra de Zinbiel de dimensión finita es nilpotente. Dicha propiedad fue probada por Dzhumadildaev y Tulenbaev en [22]. Por ello, el estudio de las álgebras de Zinbiel nilpotentes de dimensión finita es muy importante. Dentro de las álgebras nilpotentes (de Lie, de Leibniz, de Zinbiel), la subclase más importante es la de las filiformes.

Definición 4. *Un álgebra $\mathbf{A}$ nilpotente de dimensión n se llama filiforme si* $\dim(\mathbf{A}^i) = n - i,\ 2 \leq i \leq n$.

El estudio de las extensiones centrales de las álgebras filiformes tiene su origen en un trabajo de Rakhimov y Hassan en 2011 [40]. En este artículo se consideraron solamente las extensiones centrales de dimensión uno de las álgebras de Lie filiformes, consideradas como álgebras de Leibniz. El siguiente paso en esta línea, lo podemos encontrar en [3], los autores estudian las extensiones centrales de álgebras de Leibniz filiformes. Es interesante señalar que en los artículos citados no se empleó el método de Skjelbred–Sund para calcular las extensiones centrales y fue necesario realizar una gran cantidad de cálculos. La primera vez que se utilizó dicho método en el estudio de las extensiones centrales de álgebras filiformes fue en el artículo de Karimjamov, Kaygorodov y Ladra [34], donde se describieron las extensiones centrales de las álgebras asociativas filiformes. Se han estudiado también extensiones centrales de álgebras de Lie filiformes que pueden consultarse en el artículo de Evans y Fialowski [23].

El tercer resultado principal de nuestro trabajo (Teorema B) se basa en el estudio de extensiones centrales de las álgebras de Zinbiel filiformes basándonos en la clasificación hecha previamente por Adashev, Khudoyberdiyev y Omirov en [2].

Teorema B. *Salvo isomorfismo, la clase de extensiones centrales de las álgebras de Zinbiel filiformes tiene infinitas clases de isomorfismo, descritas explícitamente en el artículo [10] en términos de* 3 *familias parametrizadas por un parámetro y de* 13 *clases de isomorfismo adicionales.*

Por último, la variedad dual (por Koszul) de las álgebras de Lie es la de las álgebras asociativas conmutativas. Esta variedad admite distintas generalizaciones, como las álgebras de Jordan, las álgebras biconmutativas, las álgebras alternativas y otras. Una de más conocidas es la variedad de las álgebras de Novikov, introducida por Novikov y Balinsky en 1985.

Definición 5. *Un álgebra de Novikov es un espacio vectorial complejo* V *junto con una multiplicación, i.e., una aplicación bilineal, que satisface*

$$(xy)z = (xz)y,$$

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz).$$

para todo $x, y, z \in V$.

La variedad de las álgebras de Novikov es la intersección de las variedades de las álgebras conmutativas por la derecha y la de las simétricas por la izquierda. Así, todo álgebra de Novikov con la multiplicación $xy - yx$ dará un álgebra de Lie.

La primera clasificación de las álgebras de Novikov de dimensión pequeña fue presentada en el artículo de Bai y Meng [5], donde se detalló la lista de todas las álgebras de Novikov de dimensión 3. La segunda clasificación podemos encontrarla en [33] por los autores Karimjanov, Kaygorodov y Khudoyberdiyev. Ellos clasificaron todas las álgebras de Novikov nilpotentes de dimensión 4. La variedad de las álgebras de Novikov es bastante complicada. Así pues, para obtener la clasificación de las álgebras nilpotentes de dimensión 5 y 6 es conveniente trabajar primero con algunos casos particulares. Una posible estrategia es clasificar primero todas las álgebras con un generador, después clasificar las de dos generadores, las de tres generadores, las de cuatro generadores y finalmente las de cinco generadores. Es sencillo ver que el álgebra de dimensión 6 con seis generadores es el álgebra con producto cero, y que las álgebras de dimensión 6 con cinco generadores son las álgebras de tipo Heisenberg. El caso más complicado es la clasificación de las álgebras con un generador. Éstas han sido ya estudiadas en el artículo de Camacho, Karimjanov, Kaygorodov y Khudoyberdiyev [11] y se engloba en el siguiente resultado:

Teorema C. *Salvo isomorfismo, la clase de las álgebras de Novikov nilpotentes uno generadas de dimensión* 5 *tiene infinitas clases de isomorfismo, descritas explícitamente en el artículo [11] en términos de una familia parametrizada por dos parámetros,* 7 *familias parametrizadas por un parámetro y de* 5 *clases de isomorfismo adicionales. Salvo isomorfismo, la clase de las álgebras de Novikov nilpotentes con uno generadas de dimensión* 6 *tiene infinitas clases de isomorfismo, descritas explícitamente en el artículo [11] en términos de* 5 *familias parametrizadas por dos parámetros,* 18 *familias parametrizadas por un parámetro y de* 15 *clases de isomorfismo adicionales.*

Entre las álgebras anticonmutativas las más conocidas son las de Lie, las de Malcev, las de Lie binarias y las de Tortkara. Es bien sabido que toda álgebra de Lie es un álgebra de Malcev y toda álgebra de Malcev es un álgebra de Lie binaria.

Consideramos una generalización de las álgebras de Lie metabelianas, las álgebras de Tortkara. Teniendo en cuenta todas estas relaciones clasificamos todas las álgebras anticonmutativas nilpotentes de dimensión 6. A partir de los siguientes trabajos:

- La clasificación de las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 6 (puede encontrase en el artículo de De Graaf [17]);
- La clasificación de las álgebras de Malcev (no de Lie) nilpotentes de dimensión 6 (véase el artículo de Hegazi, Abdelwahab y Calderón Martín [29]);
- La clasificación de las álgebras de Tortkara (no de Malcev) nilpotentes de dimensión 6 (hecha por Gorshkov, Kaygorodov y Khrypchenko en [25]);
- La clasificación de las álgebras anticonmutativas (no de Tortkara) nilpotentes de dimensión 6 (hecha en el artículo de Kaygorodov, Khrypchenko y Lopes, [35]).

obtenemos otro resultado principal de nuestra investigación.

Teorema D. *Salvo isomorfismo, la variedad de álgebras anticonmutativas nilpotentes complejas de dimensión* 6 *tiene infinitas clases de isomorfismo, descritas explícitamente en el artículo [35] en términos de* 14 *familias parametrizadas por un parámetro y de* 130 *clases de isomorfismo adicionales.*

Como ya se ha indicado, el método usado para clasificar las extensiones centrales de álgebras es el método conocido con el nombre de **método de Skjelbred–Sund**. A continuación, explicamos en qué consiste dicho método.

Método de Skjelbred–Sund

Sea M una variedad de álgebras no asociativas sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ definida por una familia de identidades $\{E_i\}_{i\in I}$ de la forma siguiente

$$E_i\colon\ \sum_{j=1}^{t_i} p_{i,j}(z_1,\ldots,z_l)=0,$$

donde $Z=\{z_1,\ldots,z_l\}$ es un alfabeto finito, $p_{i,j}=p_{i,j}(z_1,\ldots,z_l)$ es una palabra no asociativa en Z de longitud $n_{i,j}\geq 2$ donde $Z_{i,j}\subseteq Z$ es el conjunto de las letras de $p_{i,j}$. Como $n_{i,j}\geq 2$, todos elementos $p_{i,j}$ pueden ser escritos en la forma del producto siguiente $p_{i,j}=p^1_{i,j}p^2_{i,j}$, donde $Z_{i,j}=Z^1_{i,j}\cup Z^2_{i,j}$.

Sea A un álgebra de la variedad M, y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Siguiendo el método de Skjelbred-Sund introducimos los *cociclos* de A con respecto a V como las formas bilineales $\theta\colon \mathrm{A}\times\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{V}$ satisfaciendo del conjunto de identidades $\{\tilde{E}_i\}_{i\in I}$, donde

$$\tilde{E}_i\colon\ \sum_{j=1}^{t_i}\theta(p^1_{i,j},p^2_{i,j})=0.$$

Estos elementos forman un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F}$, que denotaremos como $\mathrm{Z}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A},\mathrm{V})$.

Sea f una transformación bilineal de A con valores en V, consideramos el conjunto $\delta f\colon \mathrm{A}\times\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{V}$ con $(\delta f)(x,y)=f(xy)$. Está claro que

$$\sum_{j=1}^{t_i}\delta f(p^1_{i,j},p^2_{i,j})=\sum_{j=1}^{t_i}f(p_{i,j})=f(0)=0,$$

para todo $i \in I$ y que $\delta f \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$. Así, definimos $\mathrm{B}(\mathrm{A},\mathrm{V}) = \{\delta f : f \in \mathrm{Hom}(\mathrm{A},\mathrm{V})\}$ como el conjunto de los *cobordes*. Dicho subespacio está contenido en $\mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$. El espacio cociente $\mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})/\mathrm{B}(\mathrm{A},\mathrm{V})$ se conoce con el nombre de *segundo grupo de cohomología* y se denota como $\mathrm{H_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$.

Sea $\mathrm{Aut}(\mathrm{A})$ el grupo de los automorfismos de un álgebra A. Sea θ un cociclo y $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{A})$, definimos $\phi \cdot \theta : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{V}$ como $\phi \cdot \theta(x,y) = \theta(\phi(x),\phi(y))$. Al ser ϕ un automorfismo, $\phi(p_{i,j}(x_1,\ldots,x_l)) = p_{i,j}(\phi(x_1),\ldots,\phi(x_l))$ y por tanto $\phi \cdot \theta \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$. Esta aplicación induce la acción de $\mathrm{Aut}(\mathrm{A})$ en $\mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$. Además, $\theta = \delta f \iff \phi \cdot \theta = \delta(f \circ \phi)$, lo que nos permite definir la acción en $\mathrm{H_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$.

Sea θ un cociclo ($\theta \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$), denotaremos por $\mathrm{Orb}(\theta)$ a la órbita de θ. Así, $[\theta] \in \mathrm{H_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$ y su órbita la denotaremos por $\mathrm{Orb}([\theta])$.

Dada $\theta\colon \mathrm{A} \times \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{V}$ una aplicación bilineal, definimos el álgebra, A_θ, como $\mathrm{A}_\theta = \mathrm{A} \oplus \mathrm{V}$ con el siguiente producto $[x+v, y+w]_\theta = xy + \theta(x,y)$.

Así, tenemos el siguiente resultado:

Lema. *El álgebra* A_θ *es de la variedad* M *si y solo si* $\theta \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$.

Definimos el *anulador* de θ como $\mathrm{Ann}(\theta) = \{x \in \mathrm{A} \mid \theta(x,\mathrm{A}) + \theta(\mathrm{A},x) = 0\}$. Recordemos que el anulador del álgebra A es $\mathrm{Ann}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathrm{A} \mid x\mathrm{A} + \mathrm{A}x = 0\}$.

Sea A un álgebra e I un subespacio no nulo de $\mathrm{Ann}(\mathrm{A})$. Si $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \oplus \mathrm{I}$ donde A_0 es un ideal, entonces a I se le llama *componente anulador* de A.

A las extensiones centrales de A sin componente anulador las llamaremos *extensiones centrales non-split*. Está claro que un álgebra A de una variedad M con anulador no nulo es isomorfa a una extensión central de otro álgebra de la misma variedad.

Lema. *Sea* A *un álgebra de dimensión* n *de la variedad* M *tal que* $\dim(\mathrm{Ann}(\mathrm{A})) = s \neq 0$. *Entonces, existe un álgebra* A' *de dimensión* $(n-s)$ *de la misma variedad* M *y un cociclo* $\theta \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A},\mathrm{V})$ *(donde* V *es un espacio vectorial de dimensión* s*) tal que* $\mathrm{Ann}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Ann}(\theta) = 0$, $\mathrm{A} \cong \mathrm{A'}_\theta$ *y* $\mathrm{A}/\mathrm{Ann}(\mathrm{A}) \cong \mathrm{A}'$.

Para determinar cuándo dos álgebras de una misma variedad M son isomorfas, será suficiente con encontrar unos criterios en términos de cociclos.

Sea $\{e_1, \ldots, e_s\}$ una base de V. Sea A un álgebra y $\theta \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A}, \mathrm{V})$, para cada x e y en A, podemos escribir

$$\theta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y) e_i$$

donde $\theta_i \in \mathrm{Z_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F})$. Además, θ es coborde ($\theta \in \mathrm{B}(\mathrm{A}, \mathrm{V})$) si y solo si θ_i son también cobordes ($\theta_i \in \mathrm{B}(\mathrm{A}, \mathbb{F})$) para $1 \leq i \leq s$, y

$$\mathrm{Ann}(\theta) = \mathrm{Ann}(\theta_i) \cap \cdots \cap \mathrm{Ann}(\theta_s).$$

No es difícil probar (véase [28, Lemma 13]) que si $\mathrm{Ann}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Ann}(\theta) = 0$, entonces A_θ tiene componente anulador si y solo si $[\theta_1], \ldots, [\theta_s]$ son linealmente dependientes en $\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F})$. En otras palabras, si $\mathrm{Ann}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Ann}(\theta) = 0$, entonces A_θ es una extensión central no split de A si y solo si $\langle [\theta_1], \ldots, [\theta_s] \rangle \in G_s(\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F}))$, donde la grassmaniana de dimensión s, $G_s(\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F}))$, es el conjunto de subespacios vectoriales de dimensión s de $\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F})$.

Por tanto, si $\langle [\theta_1], \ldots, [\theta_s] \rangle = \langle [\vartheta_1], \ldots, [\vartheta_s] \rangle \in G_s(\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F}))$, tenemos que

$$\bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ann}(\theta_i) \cap \mathrm{Ann}\,(\mathrm{A}) = \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ann}(\vartheta_i) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{A})$$

y el conjunto

$$T_s(\mathrm{A}) = \left\{ W = \langle [\theta_1], \ldots, [\theta_s] \rangle \in G_s(\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F})) \mid \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ann}(\theta_i) \cap \mathrm{Ann}(\mathrm{A}) = 0 \right\}$$

está bien definido. Así, el conjunto de todas las extensiones centrales de A con anulador de dimensión s, donde V es un espacio vectorial de dimensión s, puede ser escrito como

$$E(\mathrm{A}, \mathrm{V}) = \{ \mathrm{A}_\theta \mid \theta(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x, y) e_i \ \text{ y } \ \langle [\theta_1], \ldots, [\theta_s] \rangle \in T_s(\mathrm{A}) \}.$$

Sea ϕ un automorfismo de A y $W = \langle [\theta_1], \ldots, [\theta_s] \rangle \in G_s(\mathrm{H}M(\mathrm{A}, \mathbb{F}))$ entonces $\phi W = \langle [\phi\theta_1], \ldots, [\phi\theta_s] \rangle$. Esto induce una acción de $\mathrm{Aut}(\mathrm{A})$ sobre $G_s(\mathrm{H_M}(\mathrm{A}, \mathbb{F}))$. El conjunto $T_s(\mathrm{A})$ es invariante sobre esta acción (véase [28, Lemma 16]).

Por todo lo explicado anteriormente, podemos determinar las condiciones para saber cuándo dos extensiones centrales de la misma dimensión son isomorfas. El siguiente lema establece dichas condiciones, (véase [28, Lemma 17]).

Lema. *Sean* A_θ *y* A_ϑ *dos extensiones centrales de* A. *Supongamos que*

$$\theta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \theta_i(x,y)e_i \text{ y } \vartheta(x,y) = \sum_{i=1}^{s} \vartheta_i(x,y)e_i.$$

Entonces las álgebras A_θ *y* A_ϑ *de la variedad* M *son isomorfas si y solo si*

$$\mathrm{Orb}(\langle [\theta_1], \ldots, [\theta_s] \rangle) = \mathrm{Orb}(\langle [\vartheta_1], \ldots, [\vartheta_s] \rangle).$$

Así pues, dada A un álgebra de la variedad M con dimensión $n-s$ vamos a construir todas las extensiones centrales A_θ de A de la siguiente manera:

- Determinamos $\mathrm{H}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A}, \mathbb{F})$, $\mathrm{Ann}(\mathrm{A})$ y $\mathrm{Aut}\mathrm{A}$.
- Determinamos el conjunto de $(\mathrm{Aut}\mathrm{A})$-orbitas de $T_s(\mathrm{A})$.
- Para cada órbita, construimos las álgebras de la variedad M relacionadas con su representante.

CONCLUSIONES

The classification of low-dimensional algebras from a certain variety of algebras is one of the most interesting and one of the first problems in the study of algebras from a certain variety. The complete description of algebras from a certain variety could give some ideas about the structure of an arbitrary algebra from this variety and generate some general results about algebras from this variety. Obviously, the class of nilpotent algebras is the most important subclass of algebras in any variety. On the other hand, as we can see, for example, in the dual mock Lie algebras (or, more generally, in anti-associative) there are no non-nilpotent algebras. Moreover, in many varieties of algebras (thanks to Wedderburn type theorems and the method of Penkava–Fialowski) it is true that many algebras can be çonstructed”from nilpotent algebras. The present work is dedicated to an algebraic classification of some special types of nilpotent algebras and it gives a way for an algebraic classification of other types of nilpotent and non-nilpotent algebras.

In this work, we are adapting the central extension method of classification of nilpotent Lie algebras to a classification of nilpotent Tortkara algebras, dual Mock Lie algebras, nilpotent Novikov algebras, and also, for the calculation of central extensions of Zinbiel algebras. As principal results of the presents work we would indicate the following results: an algebraic classification of complex nilpotent anticommutative six-dimensional algebras, an algebraic classification of complex eight-dimensional dual mock Lie algebras, an algebraic classification of the central extensions of complex filiform Zinbiel algebras, and an algebraic classification of complex five- and six-dimensional nilpotent Novikov algebras. All received results are generalizing some previous results obtained by other researchers, and on the other hand, it gives the way for receiving some future results in the area of classifications of algebras. Namely, the results from the current work could be used for an algebraic classification of complex seven-dimensional (and more dimensional) nilpotent anticommutative algebras; for obtaining an algebraic classification and a geometric classification of complex nine-dimensional (and more dimensional) dual mock Lie algebras; for an algebraic classification and a geometric classification of complex five-dimensional nilpotent Novikov algebras; and for an algebraic classification of quasi-filiform Zinbiel algebras. On the other hand, it could be used for the algebraic classification and a geometric classification of anticommutative and Novikov algebras for a certain dimension (by the method provided in papers of Penkava–Fialowski).

Bibliografía

[1] Abdelwahab H., Calderón A.J., Kaygorodov I., The algebraic and geometric classification of nilpotent binary Lie algebras, International Journal of Algebra and Computation, 29 (2019), 6, 1113–1129.

[2] Adashev J., Khudoyberdiyev A., Omirov B., Classifications of some classes of Zinbiel algebras, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 4 (2010), Art. ID S090601, 10 pp.

[3] Adashev J., Camacho L., Omirov B., Central extensions of null-filiform and naturally graded filiform non-Lie Leibniz algebras, Journal of Algebra, 479 (2017), 461–486.

[4] Albuquerque H., Elduque A., On the generators of Lie superalgebras, Linear Algebra and its Applications, 181 (1993), 45–61.

[5] Bai C., Meng D., The classification of Novikov algebras in low dimensions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 34 (2001), 8, 1581–1594.

[6] Bauerle G.G.A., de Kerf E.A., ten Kroode A.P.E., Lie Algebras. Part 2. Finite and Infinite Dimensional Lie Algebras and Applications in Physics, edited and with a preface by E.M. de Jager, Studies in Mathematical Physics, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, ISBN 0-444-82836-2, 1997, x+554 pp.

[7] Benayadi S., Bouarroudj S., Double extensions of Lie superalgebras in characteristic 2 with nondegenerate invariant supersymmetric bilinear form, Journal of Algebra, 510 (2018), 141–179.

[8] Bremner M., On Tortkara triple systems, Communications in Algebra, 46 (2018), 6, 2396–2404.

[9] Calderón Martín A., Fernández Ouaridi A., Kaygorodov I., The classification of n-dimensional anticommutative algebras with $(n-3)$-dimensional annihilator, Communications in Algebra, 47 (2019), 1, 173–181.

[10] Camacho L., Karimjanov I., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., Central extensions of filiform Zinbiel algebras, Linear and Multilinear Algebra, 2020, DOI: 10.1080/03081087.2020.1764903

[11] Camacho L., Karimjanov I., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., One-generated nilpotent Novikov algebras, Linear and Multilinear Algebra, 2020, DOI: 10.1080/03081087.2020.1725411

[12] Camacho L., Kaygorodov I., Lopatkin V., Salim M., The variety of dual mock-Lie algebras, Communications in Mathematics, 28 (2020), 2, 161-178.

[13] Cantarini N., Kac V., Classification of simple linearly compact n-Lie superalgebras, Communications in Mathematical Physics, 298 (2010), 3, 833-853.

[14] Cantarini N., Kac V., Classification of linearly compact simple rigid superalgebras, International Mathematics Research Notices, 17 (2010), 3341-3393.

[15] Cicalò S., De Graaf W., Schneider C., Six-dimensional nilpotent Lie algebras, Linear Algebra and its Applications, 436 (2012), 1, 163–189.

[16] Darijani I., Usefi H., The classification of 5-dimensional p-nilpotent restricted Lie algebras over perfect fields. I, Journal of Algebra, 464 (2016), 97–140.

[17] De Graaf W., Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2, Journal of Algebra, 309 (2007), 2, 640–653.

[18] De Graaf W., Classification of nilpotent associative algebras of small dimension, International Journal of Algebra and Computation, 28 (2018), 1, 133–161.

[19] Diehl J., Ebrahimi-Fard K., Tapia N., Time warping invariants of multidimensional time series, Acta Applicandae Mathematicae, 2020, DOI: 10.1007/s10440-020-00333-x

[20] Diehl J., Lyons T., Preis R., Reizenstein J., Areas of areas generate the shuffle algebra, arXiv:2002.02338

[21] Dzhumadildaev A., Zinbiel algebras under q-commutators, Journal of Mathematical Sciences (New York), 144 (2007), 2, 3909–3925.

[22] Dzhumadildaev A., Tulenbaev K., Nilpotency of Zinbiel algebras, Journal of Dynamical and Control Systems, 11 (2005), 2, 195–213.

[23] Evans T., Fialowski A., Restricted one-dimensional central extensions of the restricted filiform Lie algebras $m_0^\lambda(p)$, Linear Algebra and its Applications, 565 (2019), 244–257.

[24] Fialowski A., Penkava M., Extensions of (super) Lie algebras, Communications in Contemporary Mathematics, 11 (2009), 5, 709-737.

[25] Gorshkov I., Kaygorodov I., Khrypchenko M., The algebraic classification of nilpotent Tortkara algebras, Communications in Algebra, 48 (2020), 8, 3608–3623.

[26] Hegazi A., Abdelwahab H., Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras, Linear Algebra and its Applications, 494 (2016), 165–218.

[27] Hegazi A., Abdelwahab H., The classification of n-dimensional non-associative Jordan algebras with $(n-3)$-dimensional annihilator, Communications in Algebra, 46 (2018), 2, 629–643.

[28] Hegazi A., Abdelwahab H., Calderón Martín A., The classification of n-dimensional non-Lie Malcev algebras with $(n-4)$-dimensional annihilator, Linear Algebra and its Applications, 505 (2016), 32–56.

[29] Hegazi A., Abdelwahab H., Calderón Martín A., Classification of nilpotent Malcev algebras of small dimensions over arbitrary fields of characteristic not 2, Algebras and Represention Theory, 21 (2018), 1, 19–45.

[30] Ismailov N., Kaygorodov I., Mashurov F., The algebraic and geometric classification of nilpotent assosymmetric algebras, Algebras and Representation Theory, 2020, DOI: 10.1007/s10468-019-09935-y.

[31] Jumaniyozov D., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., The algebraic and geometric classification of nilpotent noncommutative Jordan algebras, Journal of Algebra and its Applications, 2020, DOI: 10.1142/S0219498821502029

[32] Ginzburg V., Kapranov M., Koszul duality for operads, Duke Mathematical Journal, 76 (1994), 1, 203–272.

[33] Karimjanov I., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., The algebraic and geometric classification of nilpotent Novikov algebras, Journal of Geometry and Physics, 143 (2019), 11–21.

[34] Karimjanov I., Kaygorodov I., Ladra M., Central extensions of filiform associative algebras, Linear and Multilinear Algebra, 2019, DOI: 10.1080/03081087.2019.1620674

[35] Kaygorodov I., Khrypchenko M., Lopes S., The algebraic and geometric classification of nilpotent anticommutative algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, 224 (2020), 8, 106337.

[36] Kaygorodov I., Khrypchenko M., Popov Yu., The algebraic and geometric classification of nilpotent terminal algebras, Journal of Pure and Applied Algebra, to appear (2020), arXiv:1909.00358.

[37] Kaygorodov I., Lopes S., Páez-Guillán P., Non-associative central extensions of null-filiform associative algebras, Journal of Algebra, 560 (2020), 1190–1210.

[38] Kaygorodov I., Páez-Guillán P., Voronin V., The algebraic and geometric classification of nilpotent bicommutative algebras, Algebras and Representation Theory, 2020, DOI: 10.1007/s10468-019-09944-x

[39] Masutova K., Omirov B., On some zero-filiform algebras, Ukrainian Mathematical Journal, 66 (2014), 4, 541–552.

[40] Rakhimov I., Hassan M., On one-dimensional Leibniz central extensions of a filiform Lie algebra, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 84 (2011), 2, 205–224.

[41] Skjelbred T., Sund T., Sur la classification des algebres de Lie nilpotentes, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 286 (1978), 5, A241–A242.

[42] Tang L., Liu W., The minimal number of generators for finite-dimensional Cartan Lie superalgebras, Colloquium Mathematicum, 158 (2019), 2, 305–312.

[43] Yan Z., Deng S., The classification of two step nilpotent complex Lie algebras of dimension 8, Czechoslovak Mathematical Journal, 63 (2013), 3, 847–863.

[44] Zelmanov E., A class of local translation-invariant Lie algebras [Russian], Dokl. Akad. Nauk SSSR, 292 (1987), no 6, 1294–1297.

[45] Zusmanovich P., Special and exceptional mock-Lie algebras, Linear Algebra and its Applications, 518 (2017), 79–96.

Apéndice [A]

Autores: Luisa M. Camacho, Ivan Kaygorodov, Viktor Lopatkin & Mohamed A. Salim

Título: The variety of dual mock-Lie algebras

Revista: Communications in Mathematics

Volumen: 28

Número: 2

Páginas: 161–178

Fecha: 2020

Apéndice [B]

Autores:	Luisa M. Camacho, Iqboljon Karimjanov,
	Ivan Kaygorodov & Abror Khudoyberdiyev
Título:	Central extensions of filiform Zinbiel algebras
Revista:	Linear & Multilinear Algebra
DOI:	10.1080/03081087.2020.1764903
Páginas:	1-17
Fecha:	2020
Índice de Impacto (ISI):	1.112 en (2019)

Apéndice [C]

Autores:	Luisa M. Camacho, Iqboljon Karimjanov,
	Ivan Kaygorodov & Abror Khudoyberdiyev
Título:	One-generated nilpotent Novikov algebras
Revista:	Linear & Multilinear Algebra
DOI:	10.1080/03081087.2020.1725411
Páginas:	1-35
Fecha:	2020
Índice de Impacto (ISI):	1.112 en (2019)

Apéndice [D]

Autores:	Ilya Gorshkov, Ivan Kaygorodov & Mykola Khrypchenko
Título:	The algebraic classification of nilpotent Tortkara algebras
Revista:	Communications in Algebra
Volumen:	48
Número:	8
Páginas:	2609–3623
Fecha:	2020
Índice de Impacto (ISI):	0.556 en (2019)

Apéndice [E]

Autores:	Ivan Kaygorodov, Mykola Khrypchenko & Samuel A. Lopes
Título:	The algebraic and geometric classification of nilpotent anticommutative algebras
Revista:	Journal of Pure and Applied Algebra
Volumen:	224
Páginas:	106337
Fecha:	2020
Índice de Impacto (ISI):	0.770 en (2019)