ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 49, Núm. 164 2007, págs. 33 a 58

Sobre una propiedad de la familia de Distribuciones Binomiales Simétricas detectada por Blaise Pascal (1654) en su resolución del problema de los puntos

por
BASULTO SANTOS, JESÚS
y
CAMÚÑEZ RUIZ, JOSÉ ANTONIO
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Sevilla

RESUMEN

El Problema de los Puntos consiste en determinar cómo debe ser dividido el total apostado cuando un juego ha concluido prematuramente. Supongamos dos jugadores A y B que apuestan una misma cantidad por ser el primero en ganar *n* puntos en un juego en el que el ganador de cada punto se decide con el lanzamiento de una moneda justa, cara para A y cruz para B. Si dicho juego es interrumpido cuando a A aún le faltan *a* puntos y a B le faltan *b*, ¿cómo se repartirá el total apostado entre ambos? Para cada juego (a,b) con *b* fijo y $a=0,1,...,b$, Pascal encuentra la fracción de la apuesta de B ganada por A. Para estas fracciones, Pascal demuestra que el valor de un punto ganado, la fracción del juego (a,b) menos la fracción del juego $(a+1,b)$ es igual a la probabilidad de una distribución binomial simétrica. Cuando $a=0$, el valor de ganar un punto es llamado por Pascal como el valor de la primera partida ganada por el jugador A. Igualmente, calcula los valores de la segunda partida ($a=1$), tercera

($a=2$), cuarta ($a=3$) y quinta ($a=4$). Pascal calcula una tabla con cinco filas, los valores de los juegos ($a=0,1,2,3,4$), y 6 columnas ($b=6,5,4,3,2,1$) y observa que las tres primeras filas crecen cuando *b* decrece, pero la cuarta y quinta decrecen cuando *b* decrece. El autor no comprende esta característica de su tabla. Con el Triángulo Aritmético de Pascal la probamos y demostramos una propiedad de la distribución binomial simétrica.

Palabras claves: Distribución Binomial Simétrica, el Problema de los Puntos, Triángulo Aritmético de Pascal.

Clasificación AMS: 01A45, 60-03, 60E05

1. INTRODUCCIÓN

Entre el verano y el otoño de 1654 tuvo lugar la correspondencia entre los sabios franceses Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), donde se abordan las resoluciones de algunos problemas sobre juegos de azar. Gracias a la distancia existente entre la residencia de ambos personajes (París y Toulouse), que nunca llegaron a conocerse personalmente, se entabla esta correspondencia para gloria de la historia del Cálculo de Probabilidades. Los problemas abordados sobre juegos de azar, además de otros problemas sobre aritmética y geometría, fueron tres, fundamentalmente: “El problema del dado con partidas no jugadas” (Basulto y Camúñez, 2002), “El problema de los dados del Caballero de Méré” y “El Problema de los Puntos”. Este último fue el que recibió más atención por parte de ambos, siendo resuelto correctamente para el caso de dos y de tres jugadores con igual destreza. Los tres tienen en común el hecho de tratarse de “problemas de decisión bajo incertidumbre”. Las decisiones son las diferentes proporciones del total apostado que deben darse a cada uno de los jugadores. La incertidumbre aparece al no jugarse una o más partidas en el primer y segundo caso o al interrumpirse el juego en el Problema de los Puntos. En todas las situaciones, los jugadores no son ganadores ni perdedores, es decir, desconocen cuál sería el resultado final del juego, por lo que son las probabilidades de ganar de cada uno de ellos, en el momento de tomar la decisión, las que establecen, de forma equitativa, las proporciones en las que se deben repartir lo apostado.

Brevemente contado, el Problema de los Puntos, o regla de los repartos, o problema de las “parties”, usando terminología francesa, en el caso más simple de dos jugadores con igual destreza, consiste en lo siguiente: dos jugadores A y B participan en un juego en el que será considerado ganador aquél que antes consiga ganar *r* partidas o *r* puntos. Dichas partidas son jugadas de forma independiente entre sí. Identificamos cada partida ganada por un jugador con un punto anotado para él, y la probabilidad de ganar cada partida es la misma para ambos, considerando, por tanto, que los jugadores tienen probabilidad 0'5 de ganar en cada partida (si cada una consistiese en el lanzamiento de una moneda perfecta tendríamos una representación exacta de la situación). Cada jugador apuesta al inicio del juego una misma cantidad y la suma total será para aquél que gane el mismo. Cuando al primer jugador le faltan *a* partidas para ganar y al segundo *b* el juego es interrumpido y, por tanto, se ha de repartir el dinero apostado de forma equitativa en función de la situación de cada jugador. Para fijar notación, decimos que el juego ha sido interrumpido en la situación (a,b). La forma de hacer el reparto es la que se conoce como **Problema de los Puntos.** En la correspondencia mencionada fueron resueltos problemas de este tipo para dos y tres jugadores. Hemos de añadir que algunos casos particulares del problema de los puntos para dos jugadores fueron presentados en manuscritos italianos tan antiguos como el anónimo fechado en 1380, y los matemáticos italianos del Renacimiento, como Pacioli, Forestani, Tartaglia, Cardano o Peverone hicieron esfuerzos infructuosos en busca de la solución durante el siglo XVI, siendo Cardano el que más se aproximó a la solución correcta.

En este trabajo nos fijamos en la solución aportada por Pascal, dado que en la misma el autor se da cuenta de unas determinadas regularidades que aparecían en su tabla de "valoraciones de las partidas ganadas por un jugador" a las que no consigue dar una explicación. Al identificar dichas "valoraciones" con probabilidades de la familia de distribuciones binomiales simétricas en la que el primer parámetro de la misma (el número de pruebas independientes, que habitualmente se representa por *n*) va decreciendo en cada valoración encontramos que dichas "regularidades" son propias de esta modelización probabilística. Describimos aquí esa característica que Pascal detecta en su resolución y de la cual el autor manifestó su extrañeza. Ahora bien, este trabajo tiene un doble objetivo: En primer lugar, usar las propias consecuencias del Triángulo Aritmético para demostrar que, efectivamente, las regularidades de las filas de la tabla son ciertas y, así, esclarecer la "extrañeza" de Pascal, y en segundo lugar, introducir y demostrar la siguiente propiedad de la Familia de Distribuciones Binomiales Simétricas: **Cuando el valor de *n* decrece, las probabilidades de los valores centrales (situados dentro del intervalo $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$, con μ media y σ desviación típica) crecen, siempre que comparemos dichos valores de forma unívoca usando la moda de la distribución como referencia (en el caso unimodal) o la moda de la izquierda (en el caso bimodal), mientras que las probabilidades de los valores situados en las colas de la distribución (por debajo de $\mu-\sigma$ o por encima de $\mu+\sigma$) disminuyen.**

El hecho de aumentar las probabilidades cuando disminuye el valor de *n* se puede entender como algo lógico dado que, con ello, se produce una disminución del número de puntos con probabilidad no nula entre los que se ha de repartir la masa de probabilidad. Lo que resulta sorprendente es que dicho comportamiento es completamente contrario en los puntos situados en las “colas”.

Los dos documentos históricos claves para la elaboración de este trabajo son la carta que Pascal envió a Fermat el 29 de julio de 1654, donde aparece la tabla antes mencionada, y el Tratado del Triángulo Aritmético de Pascal, su principal instrumento de cálculo, que ya tenía redactado en la época de la correspondencia con Fermat, aunque no fue publicado hasta después de su muerte.

A partir de aquí, el trabajo se estructura de la siguiente forma. En el siguiente epígrafe se expone cómo utilizó Pascal el Triángulo Aritmético para la resolución del Problema de los Puntos para dos jugadores con igual destreza. En el tercer epígrafe, mediante la valoración de las sucesivas partidas ganadas por uno de los jugadores, aparece la familia de distribuciones binomiales simétricas. En el cuarto se demuestran las regularidades detectadas por Pascal en su tabla de valoraciones mediante las consecuencias de su Triángulo Aritmético. Por fin, en el quinto, mediante la identificación de las valoraciones de las sucesivas partidas ganadas con las probabilidades de binomiales simétricas, demostramos la propiedad arriba enunciada. Se completa con un Anexo en el que se introduce, con notación actual, el Triángulo Aritmético de Pascal junto con las consecuencias del mismo que han sido usadas. Añadimos por último que la notación y escritura introducida en la explicación del Triángulo son las que se usan en la exposición de este trabajo.

2. RESOLUCIÓN DE PASCAL MEDIANTE EL TRIÁNGULO ARITMÉTICO

En el transcurso de la correspondencia de 1654 aparecen las soluciones aportadas por los dos autores al Problema de los Puntos para dos y tres jugadores con igual destreza. El punto de partida fue el caso de dos jugadores, en el que ambos autores mostraron su habilidad y elegancia matemática, además de los principios básicos de equidad y justicia que deben prevalecer en un juego considerado “justo”.

No nos extendemos en la explicación de los métodos al no ser objeto de este trabajo. Simplemente, diremos que Fermat propone el método de las “combinaciones” para su resolución, mientras que Pascal establece unos “principios”, con los que obtiene un corolario que define su método, conocido por Edwards (1987) como “método hacia atrás”. Esos principios de Pascal permiten la sustitución de una situación de incertidumbre por la valoración justa de la misma, lo que hoy entendemos como “El Equivalente Cierto” (Basulto, Camúñez y Domínguez, 2002). Para hacer operativa su regla este autor necesitaba un instrumento de cálculo, dado que la aplicación directa de la misma podría resultar bastante tediosa. El instrumento ya estaba en su poder: el Triángulo Aritmético. Así, Pascal calcula la **probabilidad de**

que el primer jugador gane el juego, es decir, que consiga los a puntos que le faltan antes de que el otro jugador logre los b que le faltan a él (probabilidad que representamos por $P\left[(a,b)\right]$ mediante el siguiente método:

1. Tomar la base $n=a+b-1$ del Triángulo Aritmético.

2. Sumar los valores de las b primeras celdas situadas en la base $n=a+b-1$. Es decir, según la notación introducida en el anexo, calcular $B(n,b-1)=\sum_{r=0}^{b-1} f\left(r,n-r+1\right)$, siendo $f\left(\cdot,\cdot\right)$ el valor de la correspondiente celda del Triángulo Aritmético.

3. La probabilidad buscada es $P\left[(a,b)\right]=\dfrac{B(n,b-1)}{2^n}=\dfrac{B(a+b-1,b-1)}{2^n}$, donde el denominador, 2^n, es, como demuestra el autor, el valor de la suma de todas las celdas situadas en la base $n=a+b-1$.

Pascal demuestra este resultado usando el principio de inducción completa, siendo uno de los primeros autores de la historia de las matemáticas en usar ese método de demostración (Bulton, 1999).

En el anexo de este trabajo representamos por $f\left(k,l\right)$ el número situado en la celda correspondiente a la fila k y columna l del Triángulo. Pascal demuestra que este número se identifica con el combinatorio $f\left(k,l\right)=\binom{k+l-1}{k}$. Por tanto, podemos escribir $B(n,b-1)=\sum_{r=0}^{b-1}\binom{n}{r}$, y la probabilidad de que el primer jugador gane el juego es $P\left[(a,b)\right]=\dfrac{\sum_{r=0}^{b-1}\binom{n}{r}}{2^n}=\sum_{r=0}^{b-1}\binom{n}{r}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. VALORANDO LAS SUCESIVAS PARTIDAS GANADAS: FAMILIA DE DISTRIBUCIONES BINOMIALES SIMÉTRICAS

A partir de aquí, Pascal simplifica la fórmula anterior considerando juegos del tipo (a,b) con $b>a$, es decir, juegos inacabados donde al primer jugador le faltan menos partidas que al segundo. Esto no limita su solución, pues el caso $a>b$ se resuelve cambiando los nombres de los jugadores, y para el caso (c,c) la solución es, obviamente, 0’5 como probabilidad de ganar el primer jugador.

Si $b > a$, está claro que si lo apostado es $2K$, entonces lo que espera ganar el primer jugador será de la forma $K + \beta \cdot K$, es decir, lo apostado por él, *K*, más una parte de lo apostado por el otro jugador βK . Por tanto, β es la proporción de lo apostado por el segundo jugador que se llevaría el primero al interrumpirse el juego en la situación (a,b). Aquí Pascal presupone que si $b > a$ entonces $P\left[(a,b)\right] > 0'5$ para que lo esperado por el primer jugador sea superior a *K*. Entonces, la probabilidad de que el primer jugador gane el juego se puede escribir como $P\left[(a,b)\right] = \frac{1}{2} + \beta \cdot \frac{1}{2}$. Por tanto, $\beta = 2P\left[(a,b)\right] - 1$, igualdad que escribimos en la forma $\beta\left[(a,b)\right] = 2P\left[(a,b)\right] - 1$, con $b > a$.

A continuación, Pascal ordena todos los juegos del tipo $(0,b)$, $(1,b)$, $(2,b)$,..., $(b-2,b)$ y $(b-1,b)$ para considerar la función diferencia: $W\left[(r,b)\right] = \beta\left[(b-r,b)\right] - \beta\left[(b-r+1,b)\right]$, para $r = 1,2,...,b-1,b$, y donde $\beta\left[(0,b)\right] = 1$, ya que si al primer jugador no le falta ninguna partida, entonces debe llevarse todo lo apostado, y, en particular, todo lo apostado por el segundo jugador. Por tanto, esta función, *W*, valora lo que le aporta cada una de las partidas ganadas por el primero, en forma de proporción sobre lo apostado por el segundo jugador. Por ejemplo, $W\left[(2,b)\right]$ es la diferencia entre la proporción que el primer jugador se lleva del otro al haber alcanzado el juego $(b-2,b)$, y esta misma cuando llegó al juego $(b-1,b)$. En este caso, usando el lenguaje de Pascal, se dice que mide el valor de la segunda partida. El siguiente lema permite definir la función W a partir de las celdas del Triángulo Aritmético.

Lema.- Se verifica: $W\left[(r,b)\right] = \dfrac{f(b-r,b)}{2^{2b-r-1}}$, para $r = 1,2,...,b-1,b$.

En efecto: Por definición, escribimos:

$$\begin{aligned} W\left[(r,b)\right] &= \beta\left[(b-r,b)\right] - \beta\left[(b-r+1,b)\right] \\ &= 2\left(P\left[(b-r,b)\right] - P\left[(b-r+1,b)\right]\right). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $P\left[(a,b)\right] = \dfrac{B(a+b-1,b-1)}{2^n}$, y sustituyendo,

$$W\left[(r,b)\right]=2\left(\frac{B(b-r+b-1,b-1)}{2^{2b-r-1}}-\frac{B(b-r+b,b-1)}{2^{2b-r}}\right)$$

$$=2\left(\frac{2B(2b-r-1,b-1)-B(2b-r,b-1)}{2^{2b-r}}\right)$$

$$=\frac{2B(2b-r-1,b-1)-B(2b-r,b-1)}{2^{2b-r-1}}.$$

Ahora bien, la Consecuencia Décima del Triángulo Aritmético nos permite escribir $B(2b-r,b-1)=B(2b-r-1,b-1)+B(2b-r-1,b-2)$, con lo que el numerador de la última fracción es $B(2b-r-1,b-1)-B(2b-r-1,b-2)$, y esta diferencia coincide con $f(b-r,b)$ dada la simetría de la función f (o sea, la simetría de cada base del Triángulo Aritmético).

Usando este Lema podemos estudiar con notación actual los resultados obteni do por Pascal. Así, el valor de la última partida es: $W\left[(b,b)\right]=\frac{f(0,b)}{2^{b-1}}=\frac{1}{2^{b-1}}$. El autor obtiene una expresión muy interesante para el valor de la primera partida (Basulto, Camúñez, Ortega y Pérez, 2004) y, a su vez, demuestra la igualdad entre las valoraciones de la primera y segunda partida, o sea, $W\left[(1,b)\right]=W\left[(2,b)\right]$. En efecto, la Consecuencia Decimotercera se puede escribir como $(b-1)\cdot f(b-1,b)=(2b-2)\cdot f(b-2,b)$, es decir, $f(b-1,b)=2\cdot f(b-2,b)$. Y, según la Consecuencia Séptima, la suma de los valores de las celdas de la base $2b-2$ es igual al doble de la suma de los valores de las celdas de la base $2b-3$. Teniendo en cuenta estos dos resultados podemos escribir $W\left[(1,b)\right]=\frac{f(b-1,b)}{2^{2b-2}}=\frac{2\cdot f(b-2,b)}{2\cdot 2^{2b-3}}=W\left[(2,b)\right]$, que demuestra la afirmación de Pascal.

Nos queda añadir que, usando la conexión entre los valores de las celdas del Triángulo Aritmético y los números combinatorios, con el Lema demostrado anteriormente, tenemos:

$$W\left[(r,b)\right]=\binom{2b-r-1}{b-r}\left(\frac{1}{2}\right)^{2b-r-1}.$$

Por tanto, el valor de la partida r-ésima, para el primer jugador, se puede calcular mediante una expresión que, usando formulación actual, es la función de probabilidad o cuantía de una **Variable Aleatoria Binomial** con $n=2b-r-1$, que es el número máximo de partidas que se jugaría hasta la conclusión del juego, si éste continuase, y con $p = \frac{1}{2}$, o sea, Binomial Simétrica. Entonces, si $X \approx B\left(n = 2b - r - 1, p = \frac{1}{2}\right)$, encontramos $W\left[(r,b)\right] = P\left[X = b - r\right]$.

Podemos escribir entonces esta equivalencia: (1) Dado un juego a *b* partidas, en el que se quiere valorar la *r*-ésima partida ganada por un jugador (suponiendo que el otro no ha ganado ninguna), encontramos una distribución binomial simétrica con $n = 2b - r - 1$ en la que la probabilidad de $x = b - r$ coincide con la valoración de dicha partida, y (2) dada la probabilidad de un valor *x* de una distribución binomial simétrica de parámetro *n*, es posible encontrar un juego a *b* partidas, con $b = n - x + 1$, en el que dicha probabilidad valore una determinada partida ganada, siendo ésta la *r*-ésima, con $r = n - 2x + 1$.

4. ANALIZANDO LAS REGULARIDADES DETECTADAS POR PASCAL EN SU TABLA

En la siguiente tabla (Tabla 4.1), a modo ilustrativo, reunimos los resultados de Pascal para tres casos. En ella mostramos lo que recibiría el primer jugador en total (su apuesta más lo que se lleva del otro) si el juego es interrumpido en cada una de las situaciones. Añadimos también lo que se llevaría del dinero del otro, teniendo en cuenta que en los tres casos analizados, el primer jugador está en una posición ventajosa frente al segundo, por lo que, en caso de interrupción del juego, le corresponde todo lo apostado por él (los 32 doblones) más una parte de lo apostado por el segundo jugador, que es lo que se muestra en la última columna.

Tabla 4.1

Juego	*Total para el primer jugador*	*Parte del segundo jugador*
(1,2)	48	16
(1,3)	56	24
(2,3)	44	12

Exponemos a continuación (Tabla 4.2) los valores de cada una de las partidas, de forma individualizadas, que tiene ganadas el primer jugador, valoraciones que hacemos sobre el dinero del contrario. Así, si nos fijamos en el juego (2,3), el primer jugador tiene ganada una partida (si el juego fuese a tres partidas), y se lleva del dinero del segundo 12 doblones. Si comparamos dicha ganancia con la que se llevaría en caso de no haber ganado nada, es decir, en el caso del juego (3,3), que recibiría cero doblones del otro jugador, resulta que la diferencia entre estos juegos, (2,3) y (3,3), es 12 – 0 = 12, que es el valor de la **primera partida**. De igual forma, el valor de la segunda y tercera. En resumen:

Tabla 4.2

Partida	*Valor de cada partida sobre el dinero del otro*
1ª	12
2ª	12
3ª	8

En palabras de Pascal: Luego por este medio veis vos, mediante simples sustracciones, que, por la primera partida le pertenecen 12 doblones sobre el dinero del otro, por la segunda, otros 12; y por la tercera 8.

Pascal añade en su carta de 29 de julio dos tablas. Nos interesa la primera, donde muestra el valor de cada partida según el total de partidas necesarias para ganar el juego (como máximo incorpora hasta 6 partidas), y según la partida ganada (valor de la 1ª partida ganada, de la 2ª, etc.) por el primer jugador. Para evitar fracciones él establece como apuesta de cada jugador 256 doblones. Pues bien, si dividimos los números situados en esa tabla de Pascal por 256, tendremos probabilidades de la Distribución Binomial (Tabla 4.3) para distintos valores de n y de x, dada la identificación con esta distribución establecida en el epígrafe anterior.

Tabla 4.3

		Número de partidas del juego					
		6	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*
Valor de la partida	1ª	0'2461	0'2734	0'3125	0'375	0'5	1
	2ª	0'2461	0'2734	0'3125	0'375	0'5	
	3ª	0'2188	0'2344	0'250	0'250		
	4ª	0'1641	0'1563	0'125			
	5ª	0'0938	0'0625				
	6ª	0'0313					

A continuación, Pascal introduce un comentario sobre los resultados expuestos en la tabla, en el que merece la pena detenerse (y que ha motivado este trabajo):

Veréis igualmente que, los números de la primera línea aumentan siempre; lo mismo los de la segunda; lo mismo los de la tercera. Pero a continuación, los de la cuarta disminuyen, los de la quinta, etc. **Esto es lo que resulta extraño**.

Usando las consecuencias del Triángulo Aritmético de Pascal, y en particular, las consecuencias 13, 14 y 19 se pueden justificar los "comportamientos" observados por Pascal para las distintas filas.

Si nos fijamos en los números de la primera fila, encontramos que, efectivamente, los valores van creciendo: 0'2461, 0'2734, 0'3125, 0'375, 0'5, 1. Eso indica que el valor de la primera partida es mayor conforme se vayan considerando juegos donde sea menor el número de partidas. Aunque el resultado es lógico, el mismo se puede comprobar mediante la Consecuencia 19 del *Traité*. El valor de la primera partida venía dado por $W\left[(1,b)\right]=\dfrac{f(b-1,b)}{2^{2b-2}}$. Según lo observado en la primera fila se debe cumplir $W\left[(1,b)\right]<W\left[(1,b-1)\right]$, para cualquiera que sea *b*, dentro de los valores dados en la tabla (hasta $b=6$). O sea, debe cumplirse la desigualdad $\dfrac{f(b-1,b)}{2^{2b-2}}<\dfrac{f(b-2,b-1)}{2^{2b-4}}$, o bien, $f(b-1,b)<4\cdot f(b-2,b-1)$. Ahora bien, los dos términos que se relacionan en esa desigualdad son números de celdas consecutivas de la *dividente* del Triángulo, para los que Pascal demostró la Consecuencia 19, o sea, $f(b-1,b)=4\cdot\dfrac{2b-3}{2b-2}\cdot f(b-2,b-1)$. Como la fracción que aparece en el segundo miembro es $\dfrac{2b-3}{2b-2}<1$, para cualquiera que sea $b>1$, queda justificada la desigualdad.

Igualmente, el comportamiento de la segunda fila es semejante al de la primera, pues ya hemos comprobado que los valores de ambas partidas coinciden.

Para la tercera fila ocurre lo mismo. También va creciendo, o el valor de la tercera partida aumenta al considerarse menos partidas en el juego. En efecto, el valor de la tercera partida es $W\left[(3,b)\right]=\dfrac{f(b-3,b)}{2^{2b-4}}$. Hemos de comprobar la desigualdad $W\left[(3,b)\right]<W\left[(3,b-1)\right]$, o sea, $\dfrac{f(b-3,b)}{2^{2b-4}}<\dfrac{f(b-4,b-1)}{2^{2b-6}}$, que se convierte en $f(b-3,b)<4\cdot f(b-4,b-1)$. Ahora bien, por las consecuencias 13 y 14 del Triángulo podemos escribir $f(b-3,b)=\dfrac{2b-4}{b-3}f(b-4,b)=\dfrac{2b-4}{b-3}\cdot\dfrac{2b-5}{b-1}f(b-4,b-1)$,habiéndose usado la Consecuencia 13 en la primera igualdad y la 14 en la segunda. La desigualdad quedaría demostrada si se verifica $\dfrac{(2b-4)(2b-5)}{(b-3)(b-1)}<4$, lo cual se puede comprobar que es cierto para $b>4$, que recoge los tres primeros valores de esa fila. Se puede comprobar, además, que $W(3,4)=W(3,3)$, lo que origina la igualdad entre los dos últimos.

De igual forma se puede demostrar que el comportamiento de las filas cuarta y quinta es contrario a las tres primeras. Si procedemos igual que con la tercera fila, obtendremos que para que la cuarta fila vaya decreciendo se ha de verificar la desigualdad $\dfrac{(2b-5)(2b-6)}{(b-4)(b-1)}>4$, lo cual es cierto si $b<7$, y el valor máximo de *b* dado en la tabla es 6, por lo que la desigualdad es válida. Para que los valores de la quinta fila vayan disminuyendo se ha de verificar, usando las consecuencias antes mencionadas, que $\dfrac{(2b-6)(2b-7)}{(b-5)(b-1)}>4$, desigualdad que se satisface para $b<11$. Igual que para la cuarta fila, todos los valores de *b* de la tabla son menores que 11.

Podemos escribir una regla general que agrupe las cinco desigualdades anteriores. Para la partida *r*-ésima, la desigualdad obtenida es

$\frac{(2b-(r+1))(2b-(r+2))}{(b-r)(b-1)} < 4$, para que aumenten las probabilidades conforme *n* vaya disminuyendo, que es el caso de la primera, segunda y tercera partida, o sea, para $r = 1, 2$ ó 3. Lógicamente, exigimos $b > r$ y $r \geq 1$. La desigualdad contraria, para que disminuyan las probabilidades cuando *n* decrezca, como en el caso de las filas cuarta y quinta, para $r = 4$ ó 5.

5. SOBRE UNA PROPIEDAD DE LA FAMILIA DE DISTRIBUCIONES BINOMIALES SIMÉTRICAS

Si reordenamos la Tabla 4.3 teniendo en cuenta las relaciones entre *b* y *r*, de la regla de los repartos, de una parte, y *n* y *x*, de la distribución binomial simétrica, de la otra, obtenemos la Tabla 5.1 en la que se han destacado los valores correspondientes a las distintas filas de Pascal. La tabla ha sido completada con el resto de probabilidades binomiales asociadas a los valores de las distribuciones situados a la izquierda del valor modal, para cada *n* desde 10 hasta 0.

Tabla 5.1

VALOR DE X

Valor de *n*	5	4	3	2	1	0
10	**0'2461**	0'2051	0'1172	0'0439	0'0098	0'0010
9		**0'2461**	0'1641	0'0703	0'0176	0'0020
8		**0'2734**	**0'2188**	0'1094	0'0312	0'0039
7			**0'2734**	**0'1641**	0'0547	0'0078
6			**0'3125**	**0'2344**	**0'0938**	0'0156
5				**0'3125**	**0'1563**	0'0313
4		1ª fila		**0'3750**	**0'250**	**0'0625**
3		2ª fila			**0'375**	**0'125**
2		3ª fila			**0'50**	**0'250**
1		4ª fila				**0'50**
0		5ª fila				1

Hacemos la siguiente distinción entre los valores o puntos en los que la distribución binomial toma probabilidades no nulas: (1) Puntos situados en la **zona central** de la distribución, considerando como ésta el intervalo abierto $\left(\mu^{(n)}-\sigma^{(n)},\mu^{(n)}+\sigma^{(n)}\right)$, con $\mu^{(n)}$ la media y $\sigma^{(n)}$ la desviación típica de la correspondiente distribución binomial simétrica de parámetro *n*. Recordemos que en esta distribución $\mu^{(n)}=\frac{n}{2}$ y $\sigma^{(n)}=\frac{\sqrt{n}}{2}$. (2) Puntos situados en las **colas**: Aquellos valores de la binomial menores estrictos que $\mu^{(n)}-\sigma^{(n)}$, o sea, en la izquierda de la distribución (los valores de la tabla de Pascal no son identificados en este trabajo con puntos de la zona derecha). (3) Puntos **fronterizos**, los que coinciden con $\mu^{(n)}-\sigma^{(n)}$.

Sobre la Tabla 5.1 analizamos las regularidades de las filas de Pascal y, para una mejor comprensión, las separamos en dos grupos:

1. Filas 1ª, 3ª y 5ª.

2. Filas 2ª y 4ª.

Y observamos:

1. Primera fila. Los valores de esta fila (o las valoraciones de la primera partida) se identifican con las probabilidades de los valores centrales (por tanto, valores situados en la zona central de su correspondiente distribución) de binomiales simétricas con *n* par, siendo estos valores de *n,* 10, 8, 6, 4, 2, e incorporándose al final una hipotética binomial con *n* = 0. Cada una de estas distribuciones toma un número impar de valores y el valor central es la moda de la distribución. Los valores modales son dados por $x=\frac{n}{2}$. ¿Qué ocurre cuando los valores de *n* van disminuyendo? Las probabilidades de sus valores modales van creciendo como se observa en esta primera fila de la tabla de Pascal.

Tercera fila. Las valoraciones de la tercera partida se identifican con probabilidades de estas distribuciones con *n* par ($n=8,6,4,2$) y aparecen en dicha fila (para cada *n*) la probabilidad del primer valor situado a la izquierda del valor modal. O sea, la probabilidad de $x=\frac{n-2}{2}$, que corresponde a $x=3,2,1,0$. En los tres primeros casos dichos valores de x son mayores que $\mu^{(n)}-\sigma^{(n)}$, y, por tanto, están están en la zona central. En el último coincide con ese valor tratándose, por tanto, de un punto fronterizo. Observamos que las probabilidades crecen cuando disminuye *n*, salvo en él último caso, en el que se produce una coincidencia con la probabilidad del caso anterior.

Quinta fila. De nuevo identificamos con probabilidades de distribuciones simé tricas con con *n* par ($n = 6, 4$), correspondiendo a los valores $x = \frac{n-4}{2}$, situados en este caso en las colas de sus correspondientes distribuciones. La tabla presenta decrecimiento en esta fila. Las probabilidades disminuyen cuando *n* decrece.

2. Segunda fila. La valoración de la segunda partida corresponde a distribuciones binomiales impares (para $n = 9, 7, 5, 3, 1$) que toman un número par de valores y, por tanto, hay dos valores centrales (o dos valores modales). Pues bien, identificamos cada valor de esta fila con la probabilidad del más pequeño de los valores modales (el de la izquierda). Es la probabilidad de $x = \frac{n-1}{2}$, tratándose de valores situados en la zona central de su correspondiente distribución. Observamos que las probabilidades de esos valores van creciendo conforme *n* disminuye.

Cuarta fila. De nuevo, distribuciones binomiales impares ($n = 7, 5, 3$). Aparecen en esa fila las probabilidades de los primeros valores que se quedan fuera, por la izquierda, de la zona central de la correspondiente distribución, o sea, de los primeros valores que caen en la cola izquierda de su distribución. Observamos que va descendiendo la probabilidad conforme *n* disminuye.

Las observaciones empíricas sobre la tabla de Pascal nos llevan a formular y demostrar una propiedad de la familia de distribuciones binomiales simétricas, la cual resulta tangible, como se ha visto, al ir variando el parámetro *n* de la distribución, o sea, cuando se comparan distribuciones con distinto parámetro. Se ha visto, además, que la comparación resulta natural cuando se hace entre distribuciones con *n* par o con *n* impar. Representamos por $X^{(n)}$ y $X^{(n+2)}$ las variables aleatorias que siguen distribuciones binomiales simétricas de parámetros *n* y $n+2$, respectivamente (o bien, ambos son pares, o ambos impares). En cada una de estas distribuciones consideramos un valor que representamos por $x_r^{(n)}$ y $x_r^{(n+2)}$, que valoran la *r*-ésima partida en cada caso y a los que llamamos "valores equivalen tes". Estos valores están definidos por: $x_r^{(n)} = \frac{n}{2} - \frac{r-1}{2}$; $x_r^{(n+2)} = \frac{n+2}{2} - \frac{r-1}{2}$; donde si *n* es par, entonces *r* es impar, y si *n* es impar, *r* debe ser par. Es inmediato comprobar, además, que entre ambos puntos existe la relación $x_r^{(n+2)} = x_r^{(n)} + 1$. Con estas notaciones podemos enunciar la siguiente:

Propiedad

Sean $X^{(n)}$ y $X^{(n+2)}$ variables aleatorias que se distribuyen según binomiales simétricas de parámetros n y $n+2$, respectivamente. Sean $x_r^{(n)}$ y $x_r^{(n+2)}$ dos valores equivalentes de esas distribuciones. Se verifica:

1. Si $x_r^{(n+2)}$ está en la zona central de su distribución, entonces $x_r^{(n)}$ o bien está en la zona central de la suya o bien es un punto fronterizo y $P\left[X^{(n+2)} = x_r^{(n+2)}\right] < P\left[X^{(n)} = x_r^{(n)}\right]$.

2. Si $x_r^{(n+2)}$ está en la cola de su distribución, entonces $x_r^{(n)}$ también lo está en la cola de la suya y $P\left[X^{(n+2)} = x_r^{(n+2)}\right] > P\left[X^{(n)} = x_r^{(n)}\right]$.

3. Si $x_r^{(n+2)}$ es un punto fronterizo de su distribución, entonces $x_r^{(n)}$ es un punto de la cola de la suya y $P\left[X^{(n+2)} = x_r^{(n+2)}\right] = P\left[X^{(n)} = x_r^{(n)}\right]$.

Demostración

1. Si $x_r^{(n+2)}$ está en la zona central de su distribución, entonces $x_r^{(n+2)} > \mu^{(n+2)} - \sigma^{(n+2)}$. Como $x_r^{(n+2)} = x_r^{(n)} + 1$, sustituyendo en la desigualdad anterior tenemos $x_r^{(n)} > \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n+2}}{2}$ (1) .

Ahora bien, el punto $x_r^{(n)}$ será un punto central si verifica $x_r^{(n)} > \mu^{(n)} - \sigma^{(n)}$, o sea, si $x_r^{(n)} > \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}$, y será un punto fronterizo si $x_r^{(n)} = \mu^{(n)} - \sigma^{(n)}$, o sea, si $x_r^{(n)} = \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}$, y en ese caso $\mu^{(n)} - \sigma^{(n)}$ ha de ser un número entero. Pues bien, la desigualdad (1) lleva a una de estas dos circunstancias, dado que en ningún caso ocurrirá que $x_r^{(n)} > \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}$, pues es bien conocido de teoría de números que el intervalo $\left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n+2}}{2}, \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$ no incluye número entero, para cualquiera que sea n∗.

(∗) Incorporamos a pie de página la demostración para n impar, siendo equivalente para n par:

Por otra parte el hecho de ser $x_r^{(n+2)} > \mu^{(n+2)} - \sigma^{(n+2)}$, implica esta otra desigualdad: $\frac{n+2}{2} - \frac{r-1}{2} > \frac{n+2}{2} - \frac{\sqrt{n+2}}{2}$, que tras simplificar tenemos: $(r-1)^2 < n+2$ (2). Esta desigualdad será útil para comparar las probabilidades de ambos puntos en sus correspondientes distribuciones. Estas probabilida des son:

$$P\left[X^{(n+2)} = x_r^{(n+2)}\right] = \binom{n}{x_r^{(n+2)}}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} =$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)n!}{\left(\frac{n+2}{2} - \frac{r-1}{2}\right)\left(\frac{n}{2} - \frac{r-1}{2}\right)!\left(\frac{n+2}{2} + \frac{r-1}{2}\right)\left(\frac{n}{2} + \frac{r-1}{2}\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$P\left[X^{(n)} = x_r^{(n)}\right] = \binom{n}{x_r^{(n)}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2} - \frac{r-1}{2}\right)!\left(\frac{n}{2} + \frac{r-1}{2}\right)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pues bien, la desigualdad $P\left[X^{(n+2)} = x_r^{(n+2)}\right] < P\left[X^{(n)} = x_r^{(n)}\right]$ es cierta siempre que, tras simplificar, se verifique $\frac{(n+2)(n+1)}{\left(\frac{n+2}{2} - \frac{r-1}{2}\right)\left(\frac{n+2}{2} + \frac{r-1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^2 < 1$. O sea, siempre que $(r-1)^2 < n+2$, lo cual viene dado en la desigualdad (2).

2. Si $x_r^{(n+2)}$ está en la cola de su distribución, entonces $x_r^{(n+2)} < \mu^{(n+2)} - \sigma^{(n+2)}$ y como $x_r^{(n+2)} = x_r^{(n)} + 1$, sustituyendo tenemos $x_r^{(n)} < \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n+2}}{2} < \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \mu^{(n)} - \sigma^{(n)}$. Por tanto, $x_r^{(n)}$ también está en la cola

---

Supongamos que existe e' dentro del intervalo $\left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n+2}}{2}, \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$. Entonces, $2e' + n = e$, con *e* entero e impar. Pero $e \in \left(\sqrt{n}, \sqrt{n+2}\right)$, luego $n < e^2 < n+2$ y, por tanto, $e^2 = n+1$, que es par, por lo que *e* también sería par, en contradicción con lo anterior.

de su distribución. Además, el hecho de ser $x_r^{(n+2)}$ un punto de la cola de su distribución nos lleva a una desigualdad contraria a la número (2) del apartado anterior, o sea, $(r-1)^2 > n+2$, que nos permite demostrar, haciendo un recorrido paralelo al anterior, que $P\left[X^{(n+2)} = x_r^{(n+2)}\right] > P\left[X^{(n)} = x_r^{(n)}\right]$.

3. Si $x_r^{(n+2)}$ es un punto fronterizo de su distribución, entonces $x_r^{(n+2)} = \mu^{(n+2)} - \sigma^{(n+2)}$. Esto nos lleva a dos igualdades. Por un lado: $(r-1)^2 = n+2$, lo que implica la igualdad de probabilidades. Por otra parte: $x_r^{(n)} = \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n+2}}{2} < \frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} = \mu^{(n)} - \sigma^{(n)}$, o sea, $x_r^{(n)}$ es un punto de la cola de su distribución. Con esto queda demostrada la propiedad.

A modo de ilustración, presentamos dos comparaciones de gráficas. En el primer caso, las gráficas de las funciones de probabilidad de dos distribuciones binomiales con *n* par (en particular para 10 y 8), y en el segundo, las de dos distribuciones con *n* impar (para 9 y 7). Señalamos además, en cada una, los puntos $\mu - \sigma$ para observar los valores de la distribución que, en la parte izquierda, quedan dentro y fuera de la zona central. Obsérvese como, al pasar de *n* =10 a *n* = 8, o, de *n* = 9 a *n* = 7 los valores centrales incrementan sus probabilidades, mientras que los de las colas las disminuyen.

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES DE PROBABILIDAD DE DISTRIBUCIONES BINOMIALES SIMÉTRICAS CON N =10 Y N = 8.

Figura 1

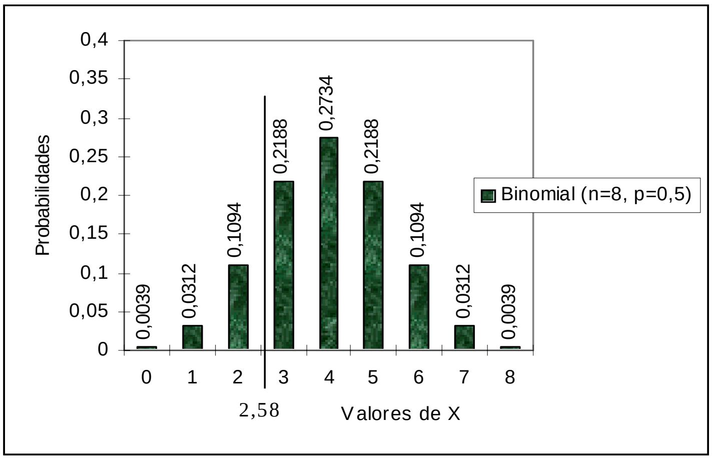
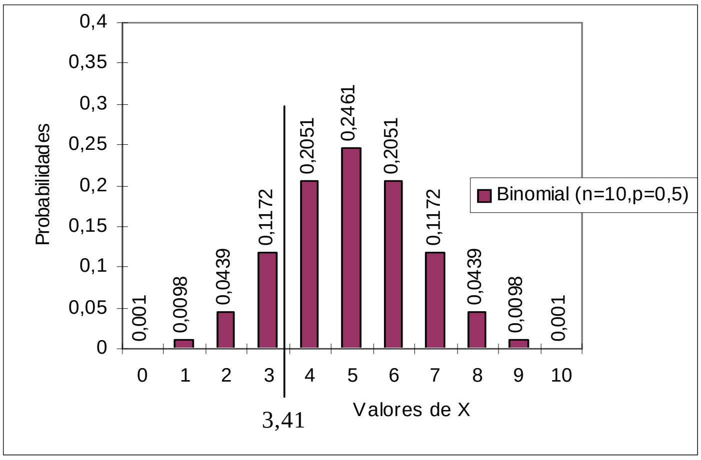


Figura 2



GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES DE PROBABILIDAD DE DISTRIBUCIONES BINOMIALES SIMÉTRICAS CON *N* = 9 Y *N* = 7.

Figura 3

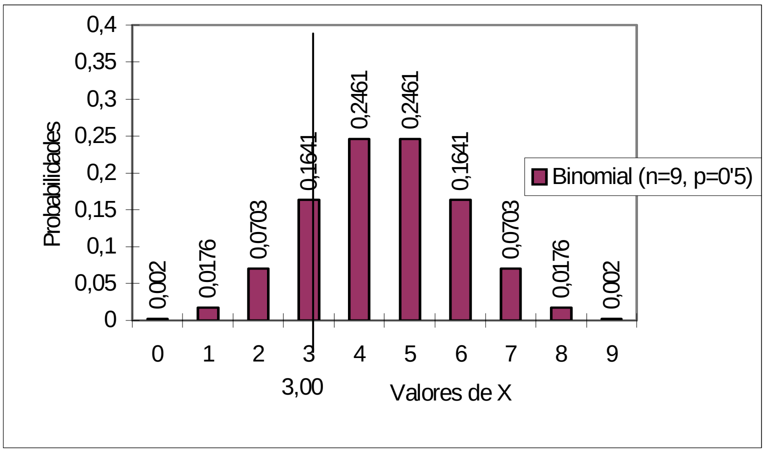
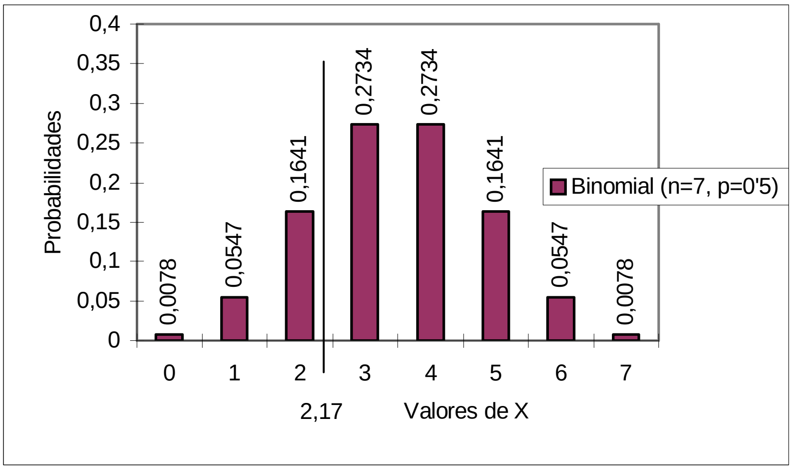


Figura 4



ANEXO. EL TRIÁNGULO ARITMÉTICO DE PASCAL Y ALGUNAS DE SUS CONSECUENCIAS

Aunque se publicó como obra póstuma en 1665 (Pascal falleció en 1662), el Tratado del Triángulo Aritmético ya estaba redactado (quizás, en una versión algo distinta a la que finalmente se publicó) y además impreso, aunque no publicado, en 1654. En este año, Pascal ya había dedicado un tiempo a su tratado y algunas de las copias impresas las había distribuido entre sus amigos. Sabemos que Fermat recibió una de esas copias en el transcurso de la correspondencia entre ambos autores. No conocemos en qué momento exacto recibió la misma (aunque fue antes de septiembre) y, sí sabemos que han desaparecido cartas importantes de la serie que se intercambiaron los dos "geómetras" a lo largo del año 1654.

Se habla de dos versiones del tratado, ambas de alrededor de 1654, una completamente redactada en latín (Kyriacopoulos, 2000, dice que la versión latina es de 1653), y la otra en francés. Esta última fue la que la librería Guillaume Desprez publicó en 1665. Entre las dos versiones el contenido varía en un punto fundamental: en la versión francesa se incorpora la aplicación del triángulo a la resolución del Problema de los Puntos, probablemente agregado durante la correspondencia con Fermat.

La temática del Triángulo Aritmético ya venía de lejos. Encontramos formas bastante análogas a las de Pascal en Michael Stifel en 1543, en Tartaglia en 1556, y más cerca de Pascal, en Stevin en 1625 y en Hérigone en 1632 (ver Edwards, 1987, para más detalles históricos). Sin embargo, es conocido habitualmente como Triángulo Aritmético de Pascal. Quizás la razón está (señala Hald, 1990) *en su clara y sistemática exposición, en sus demostraciones rigurosas y en la aplicación a la solución de muchos problemas*. Así pues, aunque Pascal no sea el creador del Triángulo Aritmético, siendo casi el último de una larga lista de "descubridores", su nombre sigue en la actualidad ligado al mismo.

El nombre del triángulo se lo debemos a De Moivre, el cual en su *Miscellanea Analytica* de 1730, empleó el título "Triangulum Arithmeticum Pascalianum" para nombrarlo. Anteriormente, Montmort, en 1708, empleó "Table de M. Pascal pour les combinaisons" para una matriz numérica que realmente no tenía el formato pascaliano.

Aunque aparentemente es un simple listado de números, el Triángulo Aritmético es un modelo numérico importante. A los números que forman parte de este listado se les llama habitualmente *coeficientes binomiales.* Entre estos coeficientes existen tantas relaciones que a veces llegan a abrumar a los estudiosos de la teoría de números. En su trabajo, Pascal desarrolla las propiedades de los números del

Triángulo como si fuera una obra de matemática pura y, en una serie de anexos, muestra como estas propiedades son relevantes para los números figurados, para la teoría de combinaciones, para el desarrollo de potencias binomiales y, por fin, para la resolución del Problema de los Puntos.

La parte I del *Traité* consta de la definición del Triángulo, 19 consecuencias y un problema. El triángulo de Pascal es una matriz de números, cuya representación de las primeras filas y columnas es la que sigue:

Figura 5

l

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	
2	1	3	6	10	15	21	28		
3	1	4	10	20	35	56			
4	1	5	15	35	70				
5	1	6	21	56					
6	1	7	28						
7	1	8							
8	1								

Representamos las filas por la letra *k* $(k = 0,1,2,...)$ y las columnas mediante *l* $(l = 1,2,3,...)$, y el número situado en la celda (k,l) lo representaremos por $f(k,l)$ (utilizamos notación actual, parecida a la que usa Edwards, 1987).

Pues bien, los números del triángulo están definidos por:

$$f(k,l) = f(k,l-1) + f(k-1,l),$$

Dice Pascal: el número de cada celda es igual a aquel de la celda que le precede en su rango perpendicular más aquel de la celda que le precede en su rango paralelo.

Pascal denominaba "rango perpendicular" a lo que nosotros entendemos como columna de una matriz, mientras que el "rango paralelo" es la fila de la misma.

Para el caso de $k=0$ tendríamos $f(0,l)=f(0,l-1)+f(-1,l)$ y para $l=1$, $f(k,1)=f(k,0)+f(k-1,1)$. Pues bien, suponemos que fuera del triángulo hay una fila y una columna de ceros, o sea, $f(-1,l)=0$ y $f(k,0)=0$, con lo que evitamos la posible indefinición de algunas de las celdas.

Al número situado en la primera celda Pascal le llamó *número generador* y en su definición de Triángulo Aritmético señaló que éste es un número arbitrario, aunque en el Traité utilizó la unidad como tal. A lo que entendemos como diagonal principal de una matriz, él lo llamó "dividente". Lo que sería la segunda diagonal de la matriz va a ser la "base" del triángulo aritmético correspondiente. Así, introducimos la idea de **triángulo** utilizada por Pascal. Si en cada cuadrado con vértice el número generador, trazamos la segunda diagonal (diagonal en sentido matricial) se obtienen sucesivos triángulos numéricos cuyas **bases** estarán formadas por los números de esa segunda diagonal. Identificaremos esos triángulos por el número correspondiente a la fila desde la cual comienza a trazarse dicha diagonal. Así, el triángulo de base *n*, $(n=0,1,2,3,...)$ tendrá de base los números $\{f(r,n-r+1),\ r=0,1,2,...,n\}$, o sea, la base del triángulo *n*-ésimo esta formada por $n+1$ números.

Además, una celda cualquiera (k,l) pertenece a la base del triángulo $n=k+l-1$, y este número es el que se usa como identificador del triángulo al que pertenece la celda. En la tabla anterior observamos que los números de la base son: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1. También, que los primeros números de la dividente son: 1, 2, 6, 20, 70,...

De lo expuesto anteriormente vemos que Pascal define los números del triángulo de forma recurrente, demostrando las propiedades o consecuencias a partir de dicha definición. De esas consecuencias nos interesan las seis que enunciamos a continuación:

CONSECUENCIA SEPTIMA

Pascal la enuncia de esta manera: En todo Triángulo Aritmético, la suma de las celdas de cada base es el doble de las celdas de la base precedente. O sea:

$$\sum_{r=0}^{n} f\left(r, n-r+1\right) = 2\sum_{r=0}^{n-1} f\left(r, (n-1)-r+1\right).$$

CONSECUENCIA NOVENA

Representemos la suma de los números de la base del triángulo *n*-ésimo por $B(n)$. O sea, $B(n) = \sum_{r=0}^{n} f\left(r, n-r+1\right)$. Esta consecuencia afirma que $B(n) = \sum_{j=0}^{n-1} B(j) + 1$.

CONSECUENCIA DÉCIMA

Dentro de cada base del triángulo construimos "sumas parciales" en el sentido siguiente: En la base *n*-ésima sumaremos los valores situados entre la columna $n+1$ y la fila *s*, o, de otra forma, siguiendo la base "*n*" sumamos desde la fila *s* hasta la fila 0. Estas sumas las representamos por $B\left(n, s\right)$. Entonces escribimos $B\left(n, s\right) = \sum_{r=0}^{s} f\left(r, n-r+1\right)$. Pues bien, Pascal demuestra para esta expresión lo siguiente:

$$B\left(n, s\right) = B\left(n-1, s\right) + B\left(n-1, s-1\right), \quad n = 0,1,2,\ldots.., \quad s = 0,1,2,\ldots.n.$$

CONSECUENCIA DECIMOTERCERA

Dado un elemento cualquiera de la columna *l*, por ejemplo $f\left(k-1, l\right)$, es posible obtener el que está una posición más baja multiplicando el elemento anterior por la fracción $\left(l+k-1\right)\big/ k$, y escribimos $f\left(k, l\right) = \frac{l+k-1}{k} f\left(k-1, l\right)$.

La consecuencia equivalente para filas es la que sigue.

CONSECUENCIA DECIMOCUARTA

Conocido un elemento cualquiera de la fila *k*, por ejemplo $f(k,l-1)$, podemos calcular el contiguo (el que está a su derecha), simplemente multiplicando el número conocido por la fracción $(l+k-1)/(l-1)$. Podemos escribir, pues $f(k,l)=\frac{l+k-1}{l-1}f(k,l-1)$.

CONSECUENCIA ÚLTIMA (DECIMONOVENA)

Dadas dos celdas consecutivas de la diagonal principal, por ejemplo, $f(k,k+1)$ y $f(k-1,k)$, esta última consecuencia establece la relación existente entre ambas: $f(k,k+1)=4\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot f(k-1,k)$.

REFERENCIAS

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A., DOMÍNGUEZ QUINTERO, A. M. (2002). «El Método Universal de Pascal como un Equivalente Cierto: el Problema de los Puntos». Capítulo 1 de «Historia de la Probabilidad y de la Estadística», Editorial AC, Madrid, 19-34.

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. (2002). «El problema del dado con partidas no jugadas». *Suma*, 39, 69-76.

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A., ORTEGA IRIZO, F. J., PÉREZ HIDALGO, M. D. (2004). «Una fórmula casi mágica en la resolución de Pascal del problema de los Puntos»

Capítulo 9 de «Historia de la Probabilidad y de la Estadística (II)», Editorial AC, Madrid, 157-169.

BURTON, D. M. (1999). «The History of Mathematics: An Introduction». Fourth Edition. McGraw-Hill, New York.

DAVID, F. N. (1962). «Games, Gods and Gambling». Charles Griffin & Co. Ltd., London.

EDWARDS, A.W.F. (1987). «Pascal's arithmetical triangle». Griffin, London.

HALD, A. (1990). «A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750». John Wiley & Sons. New York.

KYRIACOPOULOS, L. (2000). «Peut-on tout de même parler d'un «*triangle de Pascal*?». *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, p. 167-217.

MORA CHARLES, M. S. De (1989). «Los inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII.» Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

PASCAL, B. (1963). «Oeuvres Complètes». Edición de Lafuma, París.

TODHUNTER, I. (1865). «A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace». Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

ON ONE PROPERTY OF THE SYMMETRIC BINOMIAL DISTRIBUTION FAMILY DETECTED BY BLAISE PASCAL (1654) IN THE SOLUTION TO THE PROBLEM OF POINTS

ABSTRACT

The Problem of Points involves determining how the total stake should be equitably divided when a game is terminated prematurely. Suppose two players A and B stake equal money on being the first to win n point in a game in which the winner of each point is decided by the toss of a fair coin, heads for A and tails for B. If such a game is interrupted when A still lacks $\underline{a}$ points and B lacks b, how should the total stake be divided between them? For each game (a,b), with b fixed and $a = 0,1,\ldots,b$, Pascal finds the fraction of B's stake going to A. From theses fractions, Pascal shows that the value of wining a point, the fraction of the game (a,b) minus the fraction of the game (a+1,b), equals the symmetric binomial probability. When $a = 0$, the value of winning a point is called by Pascal the value of game first won by player A. Equally, calculates the values of games second ($a = 1$), third ($a = 2$), fourth ($a = 3$) and fifth ($a = 4$). Pascal calculates a table with five rows, the values of the games ($a = 0,1,2,3,4$), and six column ($b = 6,5,4,3,2,1$). Pascal observes that the first three rows grow when b decreases, but the fourth and fifth rows decrease when b decreases. Pascal does not understand theses features of his table. From the Pascal's Arithmetical Triangle we prove the features of Pascal's table and we note one property of the symmetric binomial probability.

Key words: Binomial Distribution Property, the Problem of Points, Pascal's Arithmetical Triangle.

AMS Classification: 01A45, 60-03, 60E05