

El control coalicional en el marco de la teoría de juegos cooperativos

Muros, F. J.^{a,b,*}

^aDepartamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla, España.

^bDepartamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad Loyola Andalucía, Avda. de las Universidades s/n, 41704, Dos Hermanas, Sevilla, España

To cite this article: Muros, F. J. 2021. Coalitional control in the framework of cooperative game theory. Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial 18, 97-112. <https://doi.org/10.4995/riai.2020.13456>

Resumen

El control coalicional es una rama incipiente del control distribuido donde los distintos agentes se agrupan de forma dinámica en coaliciones en función de los enlaces de comunicación activos/inactivos en cada instante de tiempo. Gracias a ello, se reduce la carga de comunicación sin comprometer las prestaciones del sistema. En este tutorial, se analizan las principales características de estos esquemas dentro del marco de la teoría de juegos cooperativos, estando el juego definido por la función de coste a optimizar en el esquema de control, y correspondiendo los jugadores bien a los enlaces de comunicación o bien a los propios agentes. En este contexto, se estudiarán diversas herramientas de teoría de juegos cooperativos, con objeto de clasificar jugadores, imponer restricciones en los mismos, proponer vías de cálculo más eficientes, realizar particionado de sistemas, etc., examinando las características más relevantes presentadas por cada herramienta.

Palabras clave: Control coalicional, Control por agrupamiento, Control distribuido, Control óptimo, Realimentaciones lineales, Teoría de juegos cooperativos, Valor de Shapley, Desigualdades matriciales lineales.

Coalitional control in the framework of cooperative game theory

Abstract

Coalitional control is a fairly new branch of distributed control where the agents merge dynamically into coalitions according to the enabled/disabled communication links at each time instant. Therefore, with these schemes there is a reduction of the communication burden without compromising the system performance. In this tutorial, the main features of these schemes will be introduced in the framework of cooperative game theory, being the game related to the cost function that is optimized by the control approach, and with the players corresponding to either the communication links or the agents involved. In this context, several cooperative game theory tools will be considered in order to: rank the players, impose constraints on them, provide more efficient ways of calculation, perform system partitioning, etc., hence analyzing the main features related to each tool.

Keywords: Coalitional control, Control by clustering, Distributed control, Optimal control, Linear feedbacks, Cooperative game theory, Shapley value, Linear matrix inequalities.

1. Introducción

La teoría de control y la teoría de juegos son dos ramas interdisciplinarias de la ingeniería y las matemáticas que lidian, respectivamente, con el comportamiento de sistemas dinámicos mediante el uso de dispositivos conocidos como *controladores*, y con situaciones de conflicto o de cooperación llamadas *juegos*, mantenidas entre entidades inteligentes y racionales o *ju-*

gadores (Muros, 2019). En este tutorial se interrelacionan ambas disciplinas asumiendo fundamentalmente que los controladores –o sus conexiones– son los jugadores de un determinado juego. Para ello haremos uso de esquemas de *control óptimo*, que persiguen optimizar un cierto índice de coste, y aplicaremos técnicas de *realimentación lineal del vector de estados*. Nótese que los problemas derivados de la comunicación, como velo-

* Autor para correspondencia: franmuros@us.es, fjmuros@uloyola.es

ciudades de datos, tecnología y seguridad de la red, o retardos y pérdida de paquetes, que están dentro del ámbito de los sistemas de control en red o *networked control systems* (NCSs) (Zhang et al., 2020), no serán abordados en este trabajo.

Tradicionalmente, los esquemas de control óptimo se han implementado de forma *centralizada*, i.e., un único controlador gobierna el sistema completo. Es obvio que si se asume acceso ilimitado a toda la información del sistema en cualquier instante, las soluciones centralizadas ofrecen las mejores prestaciones (Maestre, 2010). Sin embargo, hay muchos escenarios donde no es posible trabajar con esquemas centralizados debido a cuestiones como complejidad del sistema, extensión geográfica o privacidad, cobrando sentido las propuestas *no centralizadas*. En este caso, el problema de control se divide en piezas más pequeñas o subsistemas, asignando cada una a controladores locales o *agentes*. Algunas de las ventajas más conocidas de estos esquemas son su modularidad, escalabilidad, facilidad de implementación o robustez, lo que los hace ideales para el control de *sistemas de gran escala*, como redes de tráfico (De Souza et al., 2015), eléctricas (Negenborn et al., 2008; Yazdanián and Mehrizi-Sani, 2014), o cadenas de suministro (Maestre et al., 2011). Buenos recopilatorios de técnicas no centralizadas en un marco de control predictivo, conocido como *model predictive control* o MPC (Camacho and Bordons, 2013), se encuentran en (Scattolini, 2009; Maestre and Negenborn, 2014).

Dentro de las soluciones no centralizadas, dependiendo del grado de interacción entre los subsistemas, los agentes pueden o no necesitar coordinarse entre ellos, distinguiéndose entre *control descentralizado*, si no existe comunicación entre los agentes, y *control distribuido*, cuando los agentes comparten cierta información. Típicamente, los esquemas distribuidos consideran que los grupos de agentes que colaboran se mantienen fijos en el tiempo, es decir, no se modifica la forma en la que los agentes se agrupan (Negenborn et al., 2009; Maestre et al., 2011). Sin embargo, en los últimos años han aparecido diversas estrategias que consideran de forma explícita una *evolución dinámica de vecindades* entre agentes, tales como los sistemas *switching* (Philippe et al., 2016), el particionado variable en el tiempo (Barreiro-Gomez et al., 2019), los esquemas *plug-and-play* (Riverso et al., 2013, 2014), o el control por agrupamiento o *clustering* (Dörfler et al., 2014; Zheng et al., 2018).

En este tutorial, nos centraremos en el *control coalicional* (Maestre et al., 2014), una estrategia de control por *clustering* donde los subsistemas están conectados en red y los recursos de comunicación se penalizan dinámicamente para disuadir a los agentes de intercambiar información innecesaria. Como consecuencia, los enlaces de comunicación se activan/desactivan estableciendo *topologías de red* distintas según las necesidades del sistema, consiguiéndose una reducción del coste de comunicación sin pérdida relevante de prestaciones. Cada *coalición* resultante coordina de forma autónoma las acciones de control de sus agentes miembros. Esta implementación coalicional, más escalable que los esquemas distribuidos tradicionales, se ha extendido al MPC (Fele et al., 2017, 2018; Baldvieso-Monasterios and Trodden, 2021; Chanfreut et al., 2021b), con aplicaciones a sistemas de agua (Fele et al., 2014; Núñez et al., 2015; Maestre and Ishii, 2017; Muros et al., 2018a,b), fuentes de energía renovables (Masero et al., 2020, 2021), o redes de carreteras (Chanfreut et al., 2021a), entre otras.

La estructura de los esquemas no centralizados, y en particular la de los coalicionales, nos invita a considerar bien los agentes o bien sus enlaces de comunicación como jugadores en un cierto juego (Muros, 2019). Básicamente, es posible diferenciar entre *juegos cooperativos* y *juegos no cooperativos*, basándose los últimos en que cada jugador trata de maximizar su propio beneficio de forma egoísta (Nash, 1951). Por contra, en los juegos cooperativos cada jugador puede hacer ciertos acuerdos y sacrificios en búsqueda de un bien común, i.e., unas prestaciones globales (Peleg and Sudhölter, 2007). En ambos casos, el objetivo del jugador es maximizar el valor esperado de una cierta *regla de pagos*, medido en una cierta escala de *utilidad* o satisfacción. Buenas referencias generales de teoría de juegos son (Maschler et al., 2013; Owen, 2013; Peters, 2015).

Centrándonos en los juegos cooperativos, es evidente que sus aplicaciones a la ingeniería son cada vez más comunes, con contribuciones a las redes de comunicación (Saad et al., 2009; Zhang et al., 2011; Han et al., 2012), las redes inteligentes o *smart grids* (Saad et al., 2012; Marzband et al., 2017), las estructuras sociales (Gilles, 2010), o el propio control predictivo (Fele et al., 2017), o robusto (Bauso and Timmer, 2009, 2012; Nedić and Bauso, 2013), desarrollando algoritmos de consenso en (Olfati-Saber and Murray, 2004; Ren and Beard, 2005; Olfati-Saber et al., 2007; Cai and Ishii, 2011; Bauso and Notarstefano, 2015; Bauso and Cannon, 2018). En este sentido, es destacable la visión de (Maestre et al., 2014), donde se combinan de forma natural la teoría de juegos cooperativos y el control coalicional. En este tutorial, se analizará una línea de investigación (Muros et al., 2017a,b,c, 2016, 2018a,b) desarrollada a partir de dicho trabajo, donde se aplican al control coalicional herramientas de teoría de juegos cooperativos como el valor de Shapley (Shapley, 1953b), posición (Borm et al., 1992), Banzhaf (Banzhaf, 1965), o las soluciones de poder de Harsanyi (van den Brink et al., 2011), con objeto de imponer restricciones a los jugadores, medir su relevancia, o proponer vías de cálculo más eficientes, analizando aquí las principales características de cada herramienta.

El resto del artículo está organizado de la siguiente forma. En la sección 2 se introduce el control coalicional, presentando el esquema jerárquico usado en este tutorial. La sección 3 incluye un análisis de diversas herramientas de teoría de juegos cooperativos, distinguiendo situaciones de comunicación completa y restringida. Las aplicaciones de dichas herramientas al control coalicional se comentan específicamente en la sección 4, incluyendo ideas para reducir la carga computacional. En la sección 5 se proponen un ejemplo académico de simulación y algunos casos prácticos de sistemas reales que ilustran las aplicaciones presentadas. Finalmente, las conclusiones derivadas de este trabajo se detallan en la sección 6.

2. Introducción al Control Coalicional

Sea un conjunto $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{N}|\}$ de subsistemas interconectados, pertenecientes a la clase de sistemas distribuidos lineales. Cada subsistema está gobernado por un controlador local o agente, cuya dinámica se describe como:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(k+1) &= \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \mathbf{z}_i(k), \\ \mathbf{z}_i(k) &= \sum_{j \neq i} [\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k)], \end{aligned} \quad (1)$$

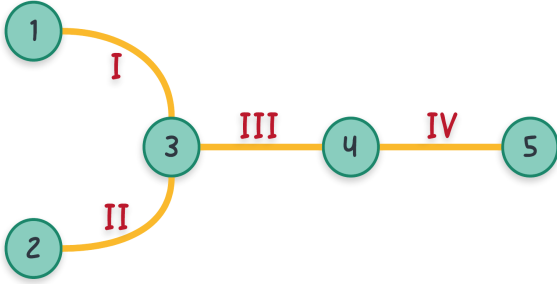


Figura 1: Ejemplo de red de cinco agentes y cuatro enlaces

donde $\mathbf{x}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_{x_i}}$ es el vector de estados del agente i , $\mathbf{u}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_{u_i}}$ define su vector de entradas, y $\mathbf{A}_{ii} \in \mathbb{R}^{n_{x_i} \times n_{x_i}}$, $\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{x_i} \times n_{x_j}}$ y $\mathbf{B}_{ii} \in \mathbb{R}^{n_{x_i} \times n_{u_i}}$, $\mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{x_i} \times n_{u_j}}$ son las matrices de transición de estados y de entradas, respectivamente. El término $\mathbf{z}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_{z_i}}$ refleja la influencia sobre el agente i del resto de agentes.

2.1. Arquitectura de control en red

Con el objetivo de intercambiar información, asumimos que los agentes en \mathcal{N} están interconectados a través de una red definida mediante un grafo no dirigido $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ es el conjunto de enlaces $l \in \mathcal{E}$ que define las conexiones de comunicación. Cada enlace se asumirá activo o inactivo en un cierto instante de control k , considerando un *coste por enlace* $\sigma_l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ si el enlace l está activo. Este razonamiento nos lleva de forma natural al concepto de *topología de red* $\Lambda(k)$ (Maestre et al., 2014; Muros et al., 2017c), que se define como el conjunto de enlaces activos en el instante de control k , con $\Lambda(k) \subseteq \mathcal{E}$. Dados $|\mathcal{E}|$ enlaces existen $2^{|\mathcal{E}|}$ topologías de red posibles, denotadas mediante el conjunto $\mathcal{T} = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{2^{|\mathcal{E}|-1}}\}$.

Ejemplo 1. Considérese la red representada en la Figura 1. Las diferentes topologías de red, i.e., $\mathcal{T} = \{\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{15}\}$, y sus correspondientes enlaces activos y componentes de comunicación, aparecen detallados en la Tabla 1.

Cuando una cierta topología está activa en un instante de control concreto, se generan un conjunto de coaliciones de agentes o *componentes de comunicación* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ que coexisten en dicho instante. Los agentes dentro de una componente son libres de intercambiar toda la información necesaria para coordinarse. Es decir, cada componente \mathcal{C} optimiza el coste de sus miembros, que deciden sus entradas de forma cooperativa, i.e., $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}(k) = (\mathbf{u}_i(k))_{i \in \mathcal{C}}$, definiéndose un modelo análogo a (1) a nivel de coaliciones

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{C}}(k+1) &= \mathbf{A}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(k) + \mathbf{B}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathbf{u}_{\mathcal{C}}(k) + \mathbf{z}_{\mathcal{C}}(k), \\ \mathbf{z}_{\mathcal{C}}(k) &= \sum_{j \notin \mathcal{C}} [\mathbf{A}_{\mathcal{C}j}\mathbf{x}_j(k) + \mathbf{B}_{\mathcal{C}j}\mathbf{u}_j(k)], \end{aligned} \quad (2)$$

Tabla 1: Topogías y componentes de comunicación de la red de la Figura 1

Λ	Enlaces				Componentes	Λ	Enlaces				Componentes
	I	II	III	IV			I	II	III	IV	
Λ_0	x	x	x	x	{1},{2},{3},{4},{5}	Λ_8	x	✓	✓	x	{1},{2,3,4},{5}
Λ_1	✓	x	x	x	{1,3},{2},{4},{5}	Λ_9	x	✓	x	✓	{1},{2,3},{4,5}
Λ_2	x	✓	x	x	{1},{2,3},{4},{5}	Λ_{10}	x	x	✓	✓	{1},{2},{3,4,5}
Λ_3	x	x	✓	x	{1},{2},{3,4},{5}	Λ_{11}	✓	✓	✓	x	{1,2,3,4},{5}
Λ_4	x	x	x	✓	{1},{2},{3},{4,5}	Λ_{12}	✓	✓	x	✓	{1,2,3},{4,5}
Λ_5	✓	✓	x	x	{1,2,3},{4},{5}	Λ_{13}	✓	x	✓	✓	{1,3,4,5},{2}
Λ_6	✓	x	✓	x	{1,3,4},{2},{5}	Λ_{14}	x	✓	✓	✓	{1},{2,3,4,5}
Λ_7	✓	x	x	✓	{1,3},{2},{4,5}	Λ_{15}	✓	✓	✓	✓	$\mathcal{N}=\{1,2,3,4,5\}$

donde $\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(k) \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{C}}}}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{C}}(k) \in \mathbb{R}^{n_{u_{\mathcal{C}}}}$ son los vectores de estado y entradas de la componente \mathcal{C} , con $\mathbf{z}_{\mathcal{C}}(k)$ siendo la influencia sobre \mathcal{C} que tienen los agentes fuera de dicha coalición, y donde $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{C}}} \times n_{x_{\mathcal{C}}}}$, $\mathbf{A}_{\mathcal{C}j} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{C}}} \times n_{x_j}}$, $\mathbf{B}_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{C}}} \times n_{u_{\mathcal{C}}}}$, $\mathbf{B}_{\mathcal{C}j} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{C}}} \times n_{u_j}}$ son matrices de las dimensiones apropiadas.

Por último, para modelar de forma distribuida el esquema centralizado basta con hacer $\mathcal{C} = \mathcal{N}$ en (2), es decir

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k+1) = \mathbf{A}_{\mathcal{N}}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k) + \mathbf{B}_{\mathcal{N}}\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k), \quad (3)$$

donde $\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k) \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{N}}}}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k) \in \mathbb{R}^{n_{u_{\mathcal{N}}}}$ son los vectores agregados de estados y entradas, y $\mathbf{A}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{N}}} \times n_{x_{\mathcal{N}}}}$, $\mathbf{B}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{N}}} \times n_{u_{\mathcal{N}}}}$ son las matrices globales de transición de estados y de entradas, respectivamente. Trivialmente, al trabajar con una coalición compuesta por todos los agentes, $\mathbf{z}_{\mathcal{N}}(k) = 0$ en este caso.

2.2. Objetivo de control

Lógicamente, el propósito de un esquema de control óptimo se basa en la minimización de una cierta función de coste, que en nuestro caso combina una componente debida al esfuerzo de control y otra que penaliza el coste de comunicación.

$$J(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k), \mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k), \Lambda(k)) = \underbrace{J_s(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k), \mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k), \Lambda)}_{\left(\sum_{j=0}^{\infty} [\mathbf{x}_{\mathcal{N}}^T(k+j)\mathbf{Q}_{\mathcal{N}}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k+j) + \mathbf{u}_{\mathcal{N}}^T(k+j)\mathbf{R}_{\mathcal{N}}\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k+j)] \right)} + \sum_{l \in \Lambda(k)} \sigma_l, \quad (4)$$

con $J_s(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k), \mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k), \Lambda)$, $J_c(\Lambda(k)) \in \mathbb{R}^+$ siendo el *cost-to-go* y el coste de comunicación, respectivamente, donde $\mathbf{Q}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{N}}} \times n_{x_{\mathcal{N}}}}$ y $\mathbf{R}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{u_{\mathcal{N}}} \times n_{u_{\mathcal{N}}}}$ son matrices de ponderación semidefinida y definida positiva, y con $\sigma_l \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ denotando el coste por enlace previamente introducido. Nótese que si no se penalizase la comunicación innecesaria, la optimización de (4) nos llevaría trivialmente a la solución centralizada. En cualquier caso, sería posible penalizar dicha comunicación con propuestas alternativas a σ_l , como por ejemplo a través de la cardinalidad de las componentes de comunicación.

En general, no es posible resolver la minimización de (4) de forma directa porque dicho problema pertenece a la clase de los problemas *NP-completos* (Fletcher and Leyffer, 1998). Para resolver este inconveniente se considera una cota superior de la solución del problema asumiendo lo siguiente:

Suposición 1. Para cada topología $\Lambda \in \mathcal{T}$, existe una matriz $\mathbf{K}_{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n_{u_{\mathcal{N}}} \times n_{x_{\mathcal{N}}}}$, que establece una ley de control global

$$\mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k) = \mathbf{K}_{\Lambda}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k), \quad (5)$$

y una matriz definida positiva $\mathbf{P}_{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n_{x_{\mathcal{N}}} \times n_{x_{\mathcal{N}}}}$, que nos proporciona una función de Lyapunov $f(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k)) = \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^T(k)\mathbf{P}_{\Lambda}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k)$. Esta función de Lyapunov decrece en el tiempo y nos da una cota superior del cost-to-go del sistema en bucle cerrado cuando la ley de control es (5)

$$\mathbf{x}_{\mathcal{N}}^T(k)\mathbf{P}_{\Lambda}\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k) \geq J_s(\mathbf{x}_{\mathcal{N}}(k), \mathbf{u}_{\mathcal{N}}(k), \Lambda), \quad (6)$$

donde la igualdad estricta en (6) es la solución óptima para el caso centralizado, i.e., con comunicación completa. \square

Basándonos en la suposición 1, denotando $\sigma_\Lambda = \sum_{l \in \Lambda(k)} \sigma_l$ y de acuerdo a (Maestre et al., 2014), es posible definir una cota superior de la función de coste (4) (Muros et al., 2017b)

$$r^v(\Lambda, \mathbf{x}_N(k)) = \mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N(k) + \sigma_\Lambda, \quad (7)$$

que puede minimizarse con respecto a Λ para encontrar en el instante k la topología más apropiada del conjunto \mathcal{T} para nuestro esquema. En definitiva, el problema del cálculo de (7) se reduce a computar previamente las matrices \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ para todas las topologías $\Lambda \in \mathcal{T}$, para lo que se necesita cierta información centralizada del sistema. Por último, nótese que bajo la perspectiva coalicional los cambios de topología afectan a la dinámica de la ley de control (5) pero no a la del sistema global (3).

2.3. Desigualdades matriciales lineales

En este tutorial, para el diseño de las matrices de control \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ se implementarán métodos de optimización basados en *desigualdades matriciales lineales*, conocidas como LMIs por su acrónimo en inglés, i.e., *linear matrix inequalities*. En esencia, dado un conjunto de variables de decisión matriciales $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ y una función matricial de las mismas $H(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n)$ decimos que la expresión $H(\cdot) > 0$ es una LMI en $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ si $H(\cdot)$ es simétrica para todas las variables y la dependencia de $H(\cdot)$ respecto a las mismas es afín. Las LMIs representan una herramienta muy potente para resolver problemas de control con resultados muy satisfactorios tanto a nivel de estabilidad como de tiempo de computación (Alamo et al., 2006; Boyd et al., 1994), en esencia debido a que imponen restricciones convexas en las variables de decisión. Ejemplos recientes de métodos de control basados en LMIs aparecen en (Ebihara et al., 2014; Witczak et al., 2016; Jiang, 2019).

Utilizando la cota (6) y la función objetivo (4) es posible relacionar el coste de control $J_s(\mathbf{x}_N(k), \mathbf{u}_N(k), \Lambda)$ en dos instantes de tiempo sucesivos

$$\begin{aligned} & \geq \underbrace{J_s^+(\mathbf{x}_N(k), \mathbf{u}_N(k), \Lambda)}_{\mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N^+(k)} + \underbrace{\text{coste de etapa}}_{\mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N(k) + \mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{K}_\Lambda^T \mathbf{R}_N \mathbf{K}_\Lambda \mathbf{x}_N(k)} \\ & \geq \underbrace{J_s(\mathbf{x}_N(k), \mathbf{u}_N(k), \Lambda)}_{\mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N(k)} \\ & \leq \mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N(k), \end{aligned} \quad (8)$$

donde el superíndice '+' indica el instante siguiente, i.e., $\mathbf{x}_N^+(k) = \mathbf{x}_N(k+1)$. Utilizando (8), la suposición 1, y siguiendo (Maestre et al., 2014), el cálculo de las matrices \mathbf{K}_Λ , que estabilizan el sistema global, y \mathbf{P}_Λ , que nos dan una cota superior del *cost-to-go*, se puede realizar $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$, a partir de

$$\mathbf{P}_\Lambda > 0,$$

$$\mathbf{P}_\Lambda - (\mathbf{A}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{K}_\Lambda)^T \mathbf{P}_\Lambda (\mathbf{A}_N + \mathbf{B}_N \mathbf{K}_\Lambda) - \mathbf{Q}_N - \mathbf{K}_\Lambda^T \mathbf{R}_N \mathbf{K}_\Lambda > 0, \quad (9a)$$

$$i \overset{\Delta}{\leftrightarrow} j \implies \mathbf{K}_\Lambda^{ij} = \mathbf{K}_\Lambda^{ji} = 0, \quad \mathbf{P}_\Lambda^{ij} = \mathbf{P}_\Lambda^{ji} = 0, \quad (9b)$$

donde $i \overset{\Delta}{\leftrightarrow} j$ indica que no hay ningún camino de comunicación entre los agentes i y j cuando la topología $\Lambda \in \mathcal{T}$ está activa.

El sistema de ecuaciones anterior no es un sistema LMI ya que existe una *dependencia no lineal* con las variables de decisión a calcular, i.e., las matrices \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ . Este problema se puede resolver con un cambio de variables. Usando el complemento de Schur (Zhang, 2005), y siguiendo (Maestre et al., 2014), se puede reescribir (9) como el sistema LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_\Lambda & \mathbf{W}_\Lambda \mathbf{A}_N^T + \mathbf{Y}_\Lambda^T \mathbf{B}_N^T & \mathbf{W}_\Lambda \mathbf{Q}_N^{1/2} & \mathbf{Y}_\Lambda^T \mathbf{R}_N^{1/2} \\ \mathbf{A}_N \mathbf{W}_\Lambda + \mathbf{B}_N \mathbf{Y}_\Lambda & \mathbf{W}_\Lambda & 0 & 0 \\ \mathbf{Q}_N^{1/2} \mathbf{W}_\Lambda & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{R}_N^{1/2} \mathbf{Y}_\Lambda & 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, \quad (10a)$$

$$i \overset{\Delta}{\leftrightarrow} j \implies \mathbf{Y}_\Lambda^{ij} = \mathbf{Y}_\Lambda^{ji} = 0, \quad \mathbf{W}_\Lambda^{ij} = \mathbf{W}_\Lambda^{ji} = 0, \quad (10b)$$

con \mathbf{I} siendo la matriz identidad, y donde la relación entre las nuevas y las antiguas variables de decisión viene dado por

$$\mathbf{W}_\Lambda = \mathbf{P}_\Lambda^{-1}, \quad \mathbf{Y}_\Lambda = \mathbf{K}_\Lambda \mathbf{P}_\Lambda^{-1}. \quad (11)$$

2.4. Esquema de control

Una vez calculadas las matrices de diseño del controlador, i.e., \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ , $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$, se propone el siguiente esquema de control *síncrono bicapa* (Muros et al., 2017b):

Esquema de control 1)

Sea $k_s \in \mathbb{N}^+$ un número específico de instantes de tiempo y T_{sim} el número total de instantes de simulación. Para cada instante de control k , repetir hasta alcanzar T_{sim}

1. Cada agente envía su estado a todos los agentes con los que esté conectado, directa o indirectamente, a través de la topología habilitada en dicho instante $\Lambda(k)$.
2. Si k es múltiplo de k_s , los controladores locales situados en la capa inferior envían sus estados a la entidad centralizada de la capa superior, que calcula la topología que minimiza (7). La topología resultante Λ_{min} se activará durante el instante actual y los siguientes $k_s - 1$ instantes, si se verifica la siguiente condición respecto a la topología previamente habilitada Λ_{prev} :

$$\mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{P}_{\Lambda_{\text{min}}} \mathbf{x}_N(k) + \sigma_{\Lambda_{\text{min}}} < \mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{P}_{\Lambda_{\text{prev}}} \mathbf{x}_N(k) + \sigma_{\Lambda_{\text{prev}}}. \quad (12)$$

3. Cada agente usa la información recibida para actualizar su acción de control. Globalmente, se implementa la ley $\mathbf{u}_N(k) = \mathbf{K}_\Lambda \mathbf{x}_N(k)$ y los enlaces innecesarios se deshabilitan de manera dinámica hasta alcanzar la configuración descentralizada en régimen permanente.
-

Es decir, con la condición (12) forzamos a que solo haya conmutación o *switch* de topología en un cierto k múltiplo de k_s , si la topología Λ_{min} que minimiza (7) proporciona un coste *inferior* al que origina la topología previamente habilitada Λ_{prev} , evaluadas ambas en el instante del *switch*. El siguiente teorema, demostrado en (Maestre et al., 2014; Muros et al., 2017b), nos prueba la estabilidad asintótica del esquema de control 1.

Teorema 1. *Sea un sistema descrito por una red $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ gobernada por el esquema de control 1. Considérense las matrices de control \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ correspondientes a las distintas topologías $\Lambda \in \mathcal{T}$. Si dichas matrices han sido calculadas resolviendo un algoritmo de optimización sujeto a (10), entonces el sistema en bucle cerrado es asintóticamente estable. \square*

Nótese que la implementación del esquema de control 1 requiere de cierta información centralizada, aunque esto no limita la escalabilidad de la solución propuesta, pues la comunicación con la capa superior se realiza únicamente en instantes muy limitados, i.e., en los cambios de topología cada k_s . Además, es suficiente con que dicha capa maneje un modelo simplificado de la capa inferior. El resto de instantes los agentes dentro de cada coalición se comunican para implementar las acciones de control de manera autónoma.

Es destacable que el esquema de control 1 representa un ejemplo de implementación del controlador con el fin de introducir la idea coalicional en un marco de teoría de juegos cooperativos. En cualquier caso, existen resultados de estabilidad en los *switchings* independientemente del esquema de control usado, basados en encontrar una función de Lyapunov común a todas las topologías (Muros et al., 2017b), y por tanto, la filosofía coalicional admite implementaciones del esquema alternativas. Por ejemplo, se pueden encontrar soluciones que identifican regiones donde los *switchings* satisfacen propiedades como convexidad o invarianza (Chanfreut et al., 2021c), o propuestas basadas en el uso de una matriz \mathbf{P} común, $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$, como el incipiente *control modular* (Lopez-Rodriguez et al., 2020; Maestre et al., 2021). Asimismo, también hay implementaciones coalicionales que no requieren capa centralizada, como los esquemas predictivos tipo *bottom-up*, donde los agentes únicamente conocen información parcial de los vecinos (Fele et al., 2015; Maestre et al., 2015). En cualquier caso, sin información centralizada las matrices del controlador no podrían definirse a nivel de topología, sino diseñarse de forma egoísta por cada agente usando unas cotas de perturbación como datos de los vecinos y asumiendo que desde un punto de vista global conducen a un comportamiento estable (Darivianakis et al., 2020). Por último, aunque el esquema de control propuesto es síncrono, la filosofía coalicional es perfectamente implementable en esquemas *asíncronos*, como los esquemas disparados por eventos o *event-based*, donde en lugar de un periodo constante de muestreo la transmisión de información se realiza bajo demanda. Un ejemplo son los sistemas auto-disparados o *self-triggered*, donde el instante siguiente donde se ejecutan las tareas se calcula en función del estado actual. Una excelente panorámica de esquemas basados en eventos se da en (Aranda-Escolástico et al., 2020)¹.

3. Herramientas de Teoría de Juegos Cooperativos

Como se ha comentado, la teoría de juegos cooperativos maneja situaciones de cooperación entre entidades llamadas jugadores. Un primer concepto necesario para trabajar en esta línea es el de *juego cooperativo de utilidad transferible* o *juego TU* (von Neumann and Morgenstern, 1944), que se define como el par formado por un conjunto de jugadores y una función característica que asocia un coste o beneficio a cada coalición de jugadores, satisfaciendo un coste nulo para el conjunto vacío. El punto de vista clásico es identificar a los jugadores con el conjunto de agentes \mathcal{N} , asumiendo que toda coalición $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$ es factible. En ese caso, si la función de coste se denota por ν ,

hablamos del juego (\mathcal{N}, ν) . Por contra, en este tutorial se continuará la idea iniciada en (Maestre et al., 2014) de interpretar el par $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu)$ como un juego TU *de enlaces* (Borm et al., 1992), donde el conjunto \mathcal{E} son los jugadores y con cada componente de \mathbf{r}^ν definida para cada topología Λ por (7)². En particular, se trabajará con un *juego de costes*, donde los jugadores más útiles obtienen los pagos más pequeños. Nótese que cada topología Λ tiene información implícita de la conexión de *todos* los agentes en \mathcal{N} , lo que no ocurre al trabajar con coaliciones $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$. Por tanto, el juego de enlaces nos soluciona de forma natural ciertos problemas de indefinición.

Para que el juego de enlaces sea propiamente un juego TU el coste debe ser nulo para el conjunto vacío de enlaces, i.e., $r^\nu(\Lambda_0, \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = 0$. Por tanto, (7) debe redefinirse, $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$, como

$$r^{\nu'}(\Lambda, \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = r^\nu(\Lambda, \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) - r^\nu(\Lambda_0, \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^T (\mathbf{P}_\Lambda - \mathbf{P}_{\Lambda_0}) \mathbf{x}_{\mathcal{N}} + \sigma_\Lambda, \quad (13)$$

donde el coste de comunicación de la topología descentralizada es trivialmente nulo, i.e., $\sigma_{\Lambda_0} = 0$. Nótese que (13) es equivalente a (7) a efectos del esquema de control 1, ya que ambas funciones solo difieren en una constante. Es también destacable que no se trata a (13) como un juego multiobjetivo, pues no se busca optimizar por separado dos objetivos distintos. Por contra, el objetivo de control consiste en minimizar la *suma* de *cost-to-go* y coste de comunicación como un *único objetivo*, en el contexto de los juegos escalares clásicos.

Dado el enfoque cooperativo de los juegos TU, es inmediato pensar que su objetivo natural es distribuir el valor de la gran coalición, i.e., $r^\nu(\mathcal{E}, \mathbf{x}_{\mathcal{N}})$, entre los jugadores. Con ese fin aparecen las llamadas *reglas de reparto o de pagos* para referirse a los *conceptos de solución*. En este tutorial, se aplicaran diversas reglas de pagos al *juego coalicional* $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu)$ con \mathbf{r}^ν definido por (13) para repartir dicho coste entre los enlaces. A diferencia de algunos trabajos de Bauso y sus colaboradores (Bauso and Timmer, 2012; Nedić and Bauso, 2013; Bauso and Notarstefano, 2015; Bauso and Cannon, 2018), que emplean herramientas basadas en restricciones de conjuntos como el *core* (Gillies, 1959), en este tutorial se trabajará con reglas de reparto basadas en ponderar las *contribuciones marginales* de los jugadores, las cuales garantizan *existencia* de la solución y la posibilidad de expresar la misma de forma *explícita* en función del juego. En muchos casos, este tipo de conceptos de solución se ha introducido en la literatura de forma *axiomática*, i.e., primero se establece un conjunto de propiedades deseables y posteriormente se prueba que solo existe un valor (o conjunto) caracterizado por las mismas. En este tutorial se enumerarán las propiedades satisfechas por las axiomatizaciones más conocidas de cada concepto de solución, aunque por simplicidad no se explicarán en detalle. Para más información, consultar (Muros, 2019).

Nótese que, en general, en los juegos TU cada jugador es capaz de cooperar con el resto. Sin embargo, hay muchos escenarios donde algunos jugadores no pueden –o no quieren– compartir información. Este tipo de juegos TU con *cooperación restringida* se modelan mediante las llamadas *situaciones de comunicación*, que consideran la situación entre el juego (\mathcal{N}, ν)

¹En el resto de secciones del artículo, por cuestiones de claridad, se omitirá la dependencia de todas las variables con el instante de control k .

²En este artículo se ha adoptado la notación clásica introducida en (Borm et al., 1992) para el juego de enlaces.

o $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ y el grafo $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ (ver (Jackson, 2008)), y definen las comunicaciones bilaterales entre los jugadores. A continuación se introducen algunos conceptos de solución de teoría de juegos cooperativos en el contexto del juego coalicional presentado, distinguiendo entre comunicación completa y restringida.

3.1. Conceptos de solución en juegos TU con comunicación completa

En esta subsección se presentan algunas reglas de reparto para juegos TU donde se asume comunicación completa, i.e., cualesquiera dos jugadores pueden compartir información.

3.1.1. Valor de Shapley y valores de Shapley ponderados

El valor de Shapley (Shapley, 1953b) es el concepto de solución más conocido y utilizado de la teoría de juegos cooperativos, con aplicaciones en campos tan variados como redes sociales (Narayanam and Narahari, 2011), enología (Ginsburgh and Zang, 2012), finanzas (Tarashev et al., 2016), redes eléctricas (Marzband et al., 2017; Barreiro-Gomez et al., 2017; Fletcher et al., 2018; Saracho et al., 2020), o reducción de contaminación (Petrosjan and Zaccour, 2003; Zhang et al., 2014). Ver (Algaba et al., 2019) para un compendio de ideas teórico-prácticas sobre el mismo. El valor de Shapley se define de forma clásica como la única regla de pagos que satisface las propiedades de *jugador nulo*, *simetría*, *aditividad* y *eficiencia*, asignando al juego $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ el vector $\phi(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$, definido $\forall l \in \mathcal{E}$ como

$$\phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}: l \notin \Lambda} \frac{|\Lambda|!(|\mathcal{E}| - |\Lambda| - 1)!}{|\mathcal{E}|!} [r^v(\Lambda \cup \{l\}, \mathbf{x}_N) - r^v(\Lambda, \mathbf{x}_N)], \quad (14)$$

es decir, la contribución marginal de cada enlace se promedia entre todas las posibles topologías a las que puede formar parte. Nótese que en este valor los pesos asignados a cada topología Λ dependen de su tamaño, según el término $\frac{|\Lambda|!(|\mathcal{E}| - |\Lambda| - 1)!}{|\mathcal{E}|!}$. Es particularmente interesante la propiedad de *eficiencia*, que se cumplirá en la mayoría de las reglas de pagos comentadas en este tutorial, y que indica que la suma de todos los valores de Shapley es igual al valor de la función de coste evaluada en la gran coalición, i.e.,

$$r^v(\mathcal{E}, \mathbf{x}_N) = \sum_{l \in \mathcal{E}} \phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v). \quad (15)$$

El valor de Shapley pertenece al conjunto de los *valores de Shapley ponderados* (Shapley, 1953a; Kalai and Samet, 1987), que se caracterizan por las propiedades de *jugador nulo*, *aditividad*, *eficiencia*, *monotonicidad* y *compañerismo*. Dado un vector de *pesos* $\omega = (\omega_l)_{l \in \mathcal{E}} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{E}|}$, el conjunto de valores de Shapley ponderados se define por el vector $\phi^\omega(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$, que asigna el pago, $\forall l \in \mathcal{E}$

$$\phi_l^\omega(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}: l \in \Lambda} \frac{\omega_l}{\omega_\Lambda} \lambda_{r^v}(\Lambda), \quad (16)$$

con $\omega_\Lambda = \sum_{l \in \Lambda} \omega_l$ y donde $\lambda_{r^v}(\Lambda)$ son los conocidos dividendos de Harsanyi (Harsanyi, 1959), definidos por

$$\lambda_{r^v}(\Lambda) = \sum_{\mathcal{L} \subseteq \Lambda} (-1)^{|\Lambda| - |\mathcal{L}|} r^v(\mathcal{L}, \mathbf{x}_N), \quad \forall \Lambda \subseteq \mathcal{E}. \quad (17)$$

Se puede comprobar que si se asigna el mismo peso a todos los enlaces, se cumple $\phi_l^\omega(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$. Es decir, el único valor de Shapley ponderado *simétrico* es el propio valor de Shapley.

3.1.2. Valor de Banzhaf

Este valor fue introducido para juegos de votación (Penrose, 1946; Banzhaf, 1965), y está presente en ámbitos como la biología (Lucchetti et al., 2010), o la política (Monroy and Fernández, 2014), entre otros. Al igual que el valor de Shapley posee varias axiomatizaciones, caracterizándolo la clásica por las propiedades de *jugador nulo*, *simetría*, *aditividad*, y *superaditividad* (Lehrer, 1988). El valor de Banzhaf asigna al juego coalicional $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ el vector $\beta(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$, definido $\forall l \in \mathcal{E}$ como

$$\beta_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \frac{1}{2^{|\mathcal{E}|-1}} \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}: l \notin \Lambda} [r^v(\Lambda \cup \{l\}, \mathbf{x}_N) - r^v(\Lambda, \mathbf{x}_N)], \quad (18)$$

donde se puede apreciar que, a diferencia de para el valor de Shapley, todas las topologías son equiprobables. Existe otra axiomatización del valor de Banzhaf (Nowak, 1997), que demuestra que es la única regla de pagos que satisface las propiedades de *jugador nulo*, *simetría*, *marginalidad* y *2-eficiencia*, siendo especialmente interesante esta última. Más específicamente, dados dos jugadores l_p y l_q , y definiendo el *juego amalgamado* $(\mathcal{E}^A, \mathbf{r}^{v^A})$ como un nuevo juego sin esos dos jugadores pero con un nuevo jugador *fusión* $l_a = \{l_p, l_q\}$, la propiedad de *2-eficiencia* garantiza que el pago del nuevo jugador l_a en el juego amalgamado es la suma de los pagos individuales a los jugadores l_p y l_q en el juego original. Esta propiedad satisfecha por el valor de Banzhaf –y no por el valor de Shapley– nos permitirá reducir el coste de computación como veremos en la sección 4.

3.1.3. Semivalores

Los semivalores representan un conjunto de reglas de pagos caracterizados axiomáticamente por las propiedades de *jugador nulo*, *simetría* y *aditividad* (Dubey et al., 1981), y con aplicaciones en política, economía y sociología (Carreras and Freixas, 2002). Dado un juego coalicional $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$, el vector de semivalores $\psi(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ se define $\forall l \in \mathcal{E}$ por

$$\psi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}: l \notin \Lambda} \zeta(|\Lambda|) [r^v(\Lambda \cup \{l\}) - r^v(\Lambda)], \quad (19a)$$

$$\text{con } \sum_{|\Lambda|=0}^{|\mathcal{E}|-1} \binom{|\mathcal{E}|-1}{|\Lambda|} \zeta(|\Lambda|) = 1. \quad (19b)$$

Dadas las propiedades que caracterizan a este conjunto, es posible deducir que contiene a los valores de Shapley y Banzhaf, pues ambos las satisfacen. Otros semivalores son los *índices dictatorial* y *marginal* (Owen, 1978).

3.2. Conceptos de solución en juegos TU con comunicación restringida

En esta subsección se habla de conceptos de solución para juegos TU con comunicación restringida, es decir, situaciones de comunicación de juegos restringidos por grafos.

3.2.1. Valor de posición y valor de posición generalizado

Hasta este punto hemos trabajado con el juego coalicional $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ que es un juego de enlaces. Es posible realizar un análisis por agentes a través del valor de posición (Borm et al., 1992), caracterizado para cualquier grafo por las propiedades de *eficiencia por componentes* y *enlaces con contribuciones*

equilibradas (Slikker, 2005). Dicho valor proporciona un pago a cada agente $i \in \mathcal{N}$ a partir del valor de Shapley del juego de enlaces según la situación de comunicación $(\mathcal{N}, \nu, \mathcal{E})$, generando el vector $\pi(\mathcal{N}, \nu, \mathcal{E})$ definido por

$$\pi_i(\mathcal{N}, \nu, \mathcal{E}) = \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{E}_i} \phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu), \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (20)$$

donde \mathcal{E}_i es el subconjunto de enlaces conectados al agente i .

El valor de posición (20) divide el valor de Shapley de un enlace simétricamente entre los dos agentes que conecta. Sin embargo, es posible generalizar dicho concepto mediante un reparto no simétrico del valor de Shapley. Con ese fin, la clase introducida y caracterizada en (Ghintran, 2013), utiliza medidas de poder (van den Brink et al., 2011), es decir, funciones α que asignan un valor no negativo o poder $\alpha_i(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ a cada agente $i \in \mathcal{N}$, para el reparto del coste entre los jugadores según la red $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$. El valor de posición generalizado π^α de una situación de comunicación $(\mathcal{N}, \nu, \mathcal{E})$, ponderado por la medida de poder α , se define para cada agente $i \in \mathcal{N}$ como

$$\pi_i^\alpha(\mathcal{N}, \nu, \mathcal{E}) = \sum_{\substack{l \in \mathcal{E}_i \\ l = \{i, j\}}} \frac{\overbrace{\tilde{\alpha}_{il}(\mathcal{N}, \mathcal{E})}^{\alpha_i}}{\tilde{\alpha}_{il}(\mathcal{N}, \mathcal{E}) + \tilde{\alpha}_{jl}(\mathcal{N}, \mathcal{E})} \phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu), \quad (21)$$

donde para juegos de coste, el término $\tilde{\alpha}_{il}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ se define por (Muros et al., 2016) como $\alpha_{ij}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ si $\phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu) < 0$ o $\frac{1}{\alpha_{ij}(\mathcal{N}, \mathcal{E})}$ si $\phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu) \geq 0$. Por tanto, la participación de cada jugador se determina de acuerdo al signo del valor de Shapley del enlace y de los pesos relativos de los dos jugadores implicados según la red $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ (Ghintran, 2013).

3.2.2. Soluciones de poder de Harsanyi

Esta soluciones fueron introducidas para juegos restringidos por grafos en (van den Brink et al., 2011), y aplicadas a juegos coalicionales en (Muros et al., 2017b), donde además se presentan las medidas de poder de enlaces como concepto análogo a las medidas de poder. Es decir, se trata de funciones ω que asocian a cada enlace $l \in \mathcal{E}$ un valor no negativo $\omega_l(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ que representa el poder del enlace dentro de la red $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$. En nuestro contexto, dada una situación de comunicación $(\mathcal{N}, \mathbf{r}^\nu, \mathcal{E})$, la solución de poder de Harsanyi denotada por $\varphi^\omega(\mathcal{N}, \mathbf{r}^\nu, \mathcal{E})$, asigna $\forall l \in \mathcal{E}$ el vector de pagos (Muros et al., 2017b)

$$\varphi_l^\omega(\mathcal{N}, \mathbf{r}^\nu, \mathcal{E}) = \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}: l \in \Lambda} \frac{\omega_l(\mathcal{N}, \Lambda)}{\omega_\Lambda(\mathcal{N}, \Lambda)} \lambda_{\mathbf{r}^\nu}(\Lambda), \quad (22)$$

con $\omega_\Lambda(\mathcal{N}, \Lambda) = \sum_{l \in \Lambda} \omega_l(\mathcal{N}, \Lambda)$, y donde $\lambda_{\mathbf{r}^\nu}(\Lambda)$ son los dividendos de Harsanyi dados por (17).

Es decir, las soluciones de poder de Harsanyi ponderan la influencia de los dividendos de Harsanyi según el poder de cada enlace evaluado en el subgrafo (\mathcal{N}, Λ) . Nótese que a diferencia de (21), los poderes en (22) dependen de la topología Λ . Entre otras propiedades, estas soluciones satisfacen eficiencia por componentes y aditividad para cualquier grafo (van den Brink et al., 2011). Por último, es fácil deducir a la vista de (16) que para una medida de poder fija y que no dependa del grafo, las soluciones de poder de Harsanyi se reducen a los valores de Shapley ponderados

$$\varphi_l^\omega(\mathcal{N}, \mathbf{r}^\nu, \mathcal{E}) \Big|_{\omega(\mathcal{N}, \Lambda) = \omega} = \phi_l^\omega(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu). \quad (23)$$

Ejemplo 2. Considérese la red representada en la Figura 1, cuyas topologías se ilustran en la Tabla 1. Asimismo, sea un juego de enlaces $(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu)$ donde $\mathcal{E} = \{\text{I, II, III, IV}\}$, y cuyo valor de la función de coste $r^\nu(\Lambda)$ evaluada en cada topología Λ viene dado por el vector $\mathbf{r}^\nu = [0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 4 \ 0 \ 2 \ 1 \ 3 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 5 \ 6]^T$.

En la Tabla 2 se detallan los valores específicos de todos los conceptos de solución presentados, donde como medidas de poder α y ω se han considerado respectivamente la medida de grado $d_i = |\mathcal{E}_i|$ (Sun and Tang, 2011; van den Brink et al., 2008), y la análoga medida de grado para enlaces $d_l = |\mathcal{E}_i|^n |\mathcal{E}_j|^n$ (Muros et al., 2017b), con $l = \{i, j\} \in \mathcal{E}$ y tomando $n = 1$. Asimismo, los pesos de los valores de Shapley ponderados se han escogido coincidentes con $\omega_l(\mathcal{N}, \mathcal{E})$, $\forall l \in \mathcal{E}$. Nótese que en todos los conceptos de solución, a excepción del valor de Banzhaf y los semivalores, se cumple eficiencia o eficiencia por componentes. Finalmente, los semivalores se han expresado de forma genérica, pues sería válida cualquier solución que satisfaga (19b), i.e.,

$$\zeta(0) + 3\zeta(1) + 3\zeta(2) + \zeta(3) = 1. \quad (24)$$

4. Aplicaciones al Control Coalicional

En este apartado presentamos diversas aplicaciones de la teoría de juegos cooperativos al control coalicional, en particular usando las herramientas presentadas en la sección anterior.

4.1. Imponer restricciones en jugadores

Existen situaciones en las que puede ser útil restringir o favorecer el uso de ciertas interconexiones de un sistema, v.g., la regulación del tráfico en carreteras ante un accidente. Con ese fin, se propone un método para aplicar restricciones en los valores de Shapley de determinados enlaces para premiar o penalizar su uso. Consideraremos como restricciones cualquier combinación lineal de la forma (Muros and Maestre, 2021)

$$\sum_{l \in \mathcal{E}_r} \kappa_l \phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu) \geq \mathcal{T}, \quad (25)$$

donde $\mathcal{E}_r \subseteq \mathcal{E}$ es el conjunto de enlaces con restricciones, $\kappa_l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathcal{E}_r$ y siendo $\mathcal{T} \in \mathbb{R}$ un valor constante.

En (Muros et al., 2017b,c) se demuestra que es posible representar el valor de Shapley de cualquier enlace l de forma cerrada en función del coste (13)

$$\phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^\nu) = \sigma_l + \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}} m_{l\Lambda} [\mathbf{x}_\Lambda^T \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_\Lambda], \quad (26)$$

donde

$$m_{l\Lambda} = \begin{cases} \frac{(|\Lambda|-1)! (|\mathcal{E}|-|\Lambda|)!}{|\mathcal{E}|!} & l \in \Lambda, \\ -\frac{|\Lambda|! (|\mathcal{E}|-|\Lambda|-1)!}{|\mathcal{E}|!} & l \notin \Lambda, \end{cases} \quad (27)$$

Tabla 2: Valores de los conceptos de solución para el juego del ejemplo 2

Enlaces	ϕ_l	ϕ_l^ω	β_l	ψ_l	φ_l^ω	Agentes	π_i	π_i^α
	I	$\frac{7}{12}$	$\frac{213}{308}$	$\frac{3}{8}$	$\zeta(0)+\zeta(1)+\zeta(3)$		$\frac{209}{420}$	1
II	$\frac{9}{4}$	$\frac{689}{308}$	$\frac{15}{8}$	$2\zeta(0)+4\zeta(1)+5\zeta(2)+4\zeta(3)$	$\frac{839}{420}$	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$
III	$\frac{19}{12}$	$\frac{27}{14}$	$\frac{9}{8}$	$2\zeta(0)+2\zeta(1)+2\zeta(2)+3\zeta(3)$	$\frac{37}{21}$	3	$\frac{53}{24}$	$\frac{161}{120}$
IV	$\frac{19}{12}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{13}{8}$	$\zeta(0)+5\zeta(1)+5\zeta(3)+2\zeta(3)$	$\frac{61}{35}$	4	$\frac{19}{24}$	$\frac{133}{90}$
						5	$\frac{19}{24}$	$\frac{19}{18}$

son los elementos de la matriz estándar de Shapley $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times 2^{|\mathcal{E}|}}$ (Xu et al., 2008), que verifica $\phi(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \mathbf{M}\mathbf{r}^v$, y con las filas correspondiendo a los enlaces $l \in \mathcal{E}$, y las columnas a las topologías $\Lambda \in \mathcal{E}$, en orden lexicográfico.

Usando (26) es posible reescribir (25) en formato LMI como (Muros et al., 2017c; Muros and Maestre, 2021)

$$\mathbf{S} \geq 0, \quad \text{con } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sum_{l \in \mathcal{E}_r} \kappa_l \sigma_l - \mathcal{T} & 0 \\ 0 & \sum_{\Lambda \in \mathcal{E}} \sum_{l \in \mathcal{E}_r} \kappa_l m_{l\Lambda} \mathbf{P}_\Lambda \end{bmatrix}, \quad (28)$$

donde se requiere que el primer menor principal sea no negativo. Por último, todas las condiciones LMI (28) consideradas se agruparán en el llamado *set de restricciones* \mathcal{S} . Nótese que es posible considerar restricciones análogas en otras reglas de pagos (Muros et al., 2017a,b,c; Muros and Maestre, 2021).

Es destacable que las condiciones LMI (28) no dependen de las mismas variables que el sistema LMI (10), necesario para garantizar la estabilidad del esquema de control 1 según el teorema 1. Con idea de agrupar ambas condiciones se considera aquí un método iterativo desarrollado en (Muros et al., 2017c) para el cálculo *offline* de las matrices del controlador. Básicamente, al igual que en las llamadas *iteraciones DK* (Skogestad and Postlethwaite, 2001), se alterna en cada paso la optimización con respecto a \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ , dejando la otra matriz fija:

Algoritmo de diseño 1)

Sean un índice de iteración l y un contador r , inicializados a $l = 1$ y $r = 0$. Realizar lo siguiente:

1. Para obtener un valor inicial de \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ , calcular $\max_{\mathbf{W}_\Lambda, \mathbf{Y}_\Lambda} \text{Tr}(\mathbf{W}_\Lambda)$, $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$, sujeto a (10), de donde obtenemos las matrices $\mathbf{W}_\Lambda^{(r)}$ y $\mathbf{Y}_\Lambda^{(r)}$, y por tanto, $\mathbf{K}_\Lambda^{(r)}$ y $\mathbf{P}_\Lambda^{(r)}$.

2. Sea $\mathbf{K}_\Lambda^{(r+1)} = \mathbf{K}_\Lambda^{(r)}$, y calcular $\min_{\mathbf{P}_\Lambda} \left(\sum_{\Lambda} \text{Tr}(\mathbf{P}_\Lambda) \right)$ sujeto a (9) y al set \mathcal{S} , $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$. Como resultado obtenemos $\mathbf{P}_\Lambda^{(r+1)}$.

3. Sea $\xi_\Lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Calcular $\min_{\xi_\Lambda, \mathbf{K}_\Lambda} \left(\sum_{\Lambda} \xi_\Lambda \right)$, sujeto a³

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_\Lambda^{(r+1)} & \mathbf{Q}_\Lambda^{1/2} & \mathbf{K}_\Lambda^T \mathbf{R}_\Lambda^{1/2} & (\mathbf{A}_\Lambda + \mathbf{B}_\Lambda \mathbf{K}_\Lambda)^T \\ \mathbf{Q}_\Lambda^{1/2} & \xi_\Lambda \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_\Lambda^{1/2} \mathbf{K}_\Lambda & 0 & \xi_\Lambda \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{A}_\Lambda + \mathbf{B}_\Lambda \mathbf{K}_\Lambda & 0 & 0 & (\mathbf{P}_\Lambda^{(r+1)})^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad (29a)$$

$$i \stackrel{\Delta}{\leftrightarrow} j \implies \mathbf{K}_\Lambda^{ij} = \mathbf{K}_\Lambda^{ji} = 0, \quad (29b)$$

y al conjunto de restricciones \mathcal{S} , $\forall \Lambda \in \mathcal{T}$. Como resultado obtenemos $\mathbf{K}_\Lambda^{(r+2)}$ y recalculamos $\mathbf{P}_\Lambda^{(r+2)} = \xi_\Lambda \mathbf{P}_\Lambda^{(r+1)}$.

4. Hacer $r = r + 2$, $l = l + 1$ y volver al paso 2, mientras $l < l_{\max}$ (siendo l_{\max} un máximo número de iteraciones prefijado) o hasta que el algoritmo converja según algún índice que dependa de $\mathbf{P}_\Lambda^{(r)}$ (ver (Muros et al., 2017c)).

En resumen, en el paso 1, resolvemos un problema inicial de optimización en el plano $(\mathbf{Y}_\Lambda, \mathbf{W}_\Lambda)$, sin considerar restricciones en el valor de Shapley, que se incluyen en los pasos 2 y 3. Precisamente por esta razón necesitamos resolver el problema en el plano $(\mathbf{K}_\Lambda, \mathbf{P}_\Lambda)$, obteniendo LMIs análogas a (10) en dicho plano –dadas por (9) y (29)– al tomar como *constante* cierta información de las *matrices de control del paso anterior*. Nótese que añadir nuevas restricciones LMIs reduce el espacio de soluciones factibles pero no afecta las propiedades garantizadas por (10). Por tanto, según el teorema 1, el sistema definido por las matrices obtenidas según el algoritmo de diseño 1 sigue siendo estable. Una vez computadas las matrices, se aplicaría en cada instante el esquema de control 1 durante un periodo de simulación T_{sim} , pudiendo medir el coste acumulado del esquema de control mediante el siguiente índice:

$$J_{\text{acum}} = \sum_{k=0}^{T_{\text{sim}}} [\mathbf{x}_N^T(k) \mathbf{Q}_N \mathbf{x}_N(k) + \mathbf{u}_N^T(k) \mathbf{R}_N \mathbf{u}_N(k) + \sigma_\Lambda]. \quad (30)$$

4.1.1. Especificaciones a priori

Adicionalmente, además de restricciones *a posteriori* en la línea de (28), es posible considerar especificaciones *a priori*, que *afecten* a la evolución de las reglas de reparto mediante una matriz característica que *dependa* de cada enlace, manteniendo *inalteradas* las matrices del controlador. Bajo algunos supuestos, esto puede suponer una reducción del coste computacional. Dos conceptos de solución que encajan de forma natural en este contexto son los valores de Shapley ponderados y las soluciones de poder de Harsanyi, pues ambos dependen de los pesos/poderes de cada enlace. De hecho, como vimos en (23), en un contexto coalicional el primer valor es un caso particular del segundo. Por tanto, es posible poder trabajar con ambos valores usando la matriz estándar de Harsanyi $\mathbf{H}^\omega \in \mathbb{R}^{|\mathcal{E}| \times 2^{|\mathcal{E}|}}$ (Muros et al., 2017b), con las filas y columnas correspondiendo respectivamente a cada enlace $l \in \mathcal{E}$ y topología $\Lambda \in \mathcal{T}$, y donde cada elemento $h_{l\Lambda}^\omega$ se define como

$$h_{l\Lambda}^\omega = \sum_{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}: \Lambda \cup \{l\} \subseteq \mathcal{L}} (-1)^{|\Lambda| - |\mathcal{L}|} \frac{\omega_l(\mathcal{N}, \mathcal{L})}{\omega_\mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{L})}, \quad (31)$$

verificándose la relación $\phi^\omega(\mathcal{N}, \mathbf{r}^v, \mathcal{E}) = \mathbf{H}^\omega \mathbf{r}^v$, que para el caso de los valores de Shapley ponderados queda reducida, $\forall l \in \mathcal{E}$, a (Muros et al., 2017b)

$$\phi_l^\omega(\mathcal{N}, \mathbf{r}^v, \mathcal{E}) = \sigma_l + \sum_{\Lambda \in \mathcal{E}} h_{l\Lambda}^\omega [\mathbf{x}_N^T \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N]. \quad (32)$$

Nótese que los pesos influyen a través de los elementos $h_{l\Lambda}^\omega$ en la manera en la que se combinan los costes de control de las topologías para computar la regla de pago.

4.2. Proporcionar vías alternativas de cálculo

Como adelantamos en el apartado 3.1.2, dado un juego amalgamado $(\mathcal{E}^A, \mathbf{r}^{vA})$ la propiedad de *2-eficiencia* garantiza

$$\beta_{l_p}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) + \beta_{l_q}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \beta_{l_a}(\mathcal{E}^A, \mathbf{r}^{vA}). \quad (33)$$

³Existe un teorema demostrado en (Muros et al., 2017c) que asegura la estabilidad del sistema en problemas de optimización sujetos al LMI (29).

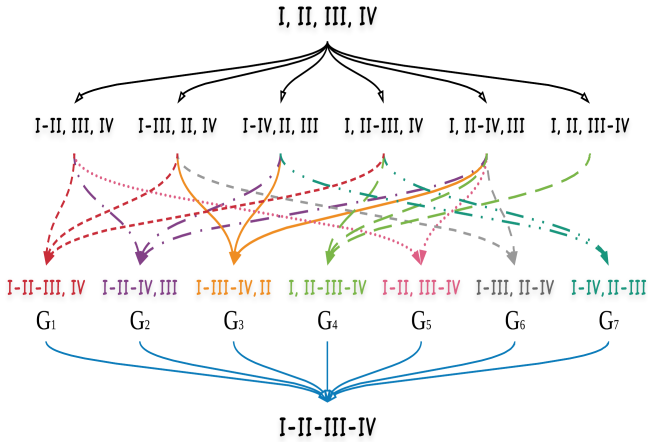


Figura 2: Juegos amalgamados que intervienen en la red de la Figura 1. Se alcanza la gran coalición con un nivel de recurrencia $\beth = 3$.

Considerando (33), definimos como $\delta_l^\Lambda = \delta_l \cap \Lambda$ al conjunto de enlaces que pertenece simultáneamente a la terna $\delta_l = \{l, l_p, l_q\}$, con $l \in \mathcal{E} \setminus \{l_p, l_q\}$, y a una cierta topología Λ . Dado que los juegos originales y amalgamados solo difieren en los jugadores que se amalgaman, es posible usar δ_l^Λ para conectar los valores de Banzhaf de un enlace $l \in \mathcal{E} \setminus \{l_p, l_q\}$ de los juegos original y amalgamado (Muros et al., 2017a)

$$\beta_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \beta_l(\mathcal{E}^\Lambda, \mathbf{r}^{v^\Lambda}) - \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}} b_{l\Lambda}^* [\mathbf{x}_N^T \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N], \quad \forall l \in \mathcal{E} \setminus \{l_p, l_q\}, \quad (34)$$

con los términos $b_{l\Lambda}^*$ definidos como

$$b_{l\Lambda}^* = \begin{cases} \frac{1}{2^{|\mathcal{E}|-1}}, & |\delta_l^\Lambda| = 1, 3, \\ -\frac{1}{2^{|\mathcal{E}|-1}}, & |\delta_l^\Lambda| = 0, 2. \end{cases} \quad (35)$$

El valor de Banzhaf de los enlaces amalgamados se obtendría como (Muros et al., 2017a)

$$\beta_{l_{p,q}}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) = \beta_{l_a}(\mathcal{E}^\Lambda, \mathbf{r}^{v^\Lambda}) - \sum_{\Lambda \subseteq \mathcal{E}} b_{l_{q,p}\Lambda} [\mathbf{x}_N^T \mathbf{P}_\Lambda \mathbf{x}_N] - \sigma_{l_{q,p}}. \quad (36)$$

4.2.1. Amalgamiento recursivo

El amalgamiento puede realizarse de forma recursiva, reduciendo uno a uno el número de jugadores. Por tanto, en el juego \beth -amalgamado los jugadores se agrupan en $|\mathcal{E}| - \beth$ subconjuntos no vacíos llamados *amalgamas*. En (Muros et al., 2017a) se demuestra que el valor de Banzhaf de un juego se puede obtener mediante combinaciones lineales de los valores de Banzhaf apropiados de los juegos \beth -amalgamados de *dos amalgamas*.

Nótese que el número de formas de dividir un conjunto de $|\mathcal{E}|$ elementos en dos amalgamas viene dado por el *número de Stirling de segunda especie* (Becker and Rioridan, 1948), denotado por $\left\{ \begin{smallmatrix} |\mathcal{E}| \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$. En este contexto, el conjunto $\mathcal{G} = \{G_t : t = 1, \dots, \left\{ \begin{smallmatrix} |\mathcal{E}| \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}\}$ contiene todos los juegos \beth -amalgamados con dos amalgamas $G_t = (\mathcal{E}^{(|\mathcal{E}|-2)A_t}, \mathbf{r}^{v, (|\mathcal{E}|-2)A_t})$, donde $\mathcal{E}^{(|\mathcal{E}|-2)A_t} = \{\zeta_a(G_t), \zeta_b(G_t)\}$, con $\zeta_a(G_t) \cup \zeta_b(G_t) = \mathcal{E}$ y $\zeta_a(G_t) \cap \zeta_b(G_t) = \emptyset$. En la Figura 2 se detallan los juegos amalgamados implicados en redes de cuatro enlaces como la de la Figura 1. El conjunto \mathcal{G} estaría formado por

$$\begin{aligned} G_1: \{I-II-III, IV\}, & \quad G_2: \{I-II-IV, III\}, & \quad G_3: \{I-III-IV, II\}, & \quad G_4: \{I, II-III-IV\}, \\ G_5: \{I-II, III-IV\}, & \quad G_6: \{I-III, II-IV\}, & \quad G_7: \{I-IV, II-III\}. \end{aligned} \quad (37)$$

El valor de Banzhaf de ambas amalgamas para cada juego de \mathcal{G} viene dado por (Muros et al., 2017a)

$$\begin{aligned} \beta_{\zeta_a(G_t)}(\mathcal{E}^{(|\mathcal{E}|-2)A_t}, \mathbf{r}^{v, (|\mathcal{E}|-2)A_t}) &= \frac{1}{2} (-r_0^v + r_{\zeta_a(G_t)}^v - r_{\zeta_b(G_t)}^v + r_{\mathcal{E}}^v), \\ \beta_{\zeta_b(G_t)}(\mathcal{E}^{(|\mathcal{E}|-2)A_t}, \mathbf{r}^{v, (|\mathcal{E}|-2)A_t}) &= \frac{1}{2} (-r_0^v - r_{\zeta_a(G_t)}^v + r_{\zeta_b(G_t)}^v + r_{\mathcal{E}}^v). \end{aligned} \quad (38)$$

Usando (38), es posible obtener información del juego original a partir de combinaciones lineales de juegos con *menos* jugadores. Más específicamente, el valor de Banzhaf de un enlace l en el juego original se calcula mediante bien la adición del valor de Banzhaf de la amalgama $\zeta_a(G_t)$, o bien la sustracción del valor de Banzhaf de $\zeta_b(G_t)$, para cada juego de dos amalgamas $G_t \in \mathcal{G}$, y asumiendo $l \in \zeta_a(G_t)$, $l \notin \zeta_b(G_t)$. En otras palabras, es posible llegar a (Muros et al., 2017a)

$$\begin{aligned} \beta_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) &= \frac{1}{2^{|\mathcal{E}|-2}} \left[\sum_{G_t \in \mathcal{G}_1} \beta_{\zeta_a(G_t)}(\mathcal{E}^{(|\mathcal{E}|-2)A_t}, \mathbf{r}^{v, (|\mathcal{E}|-2)A_t}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{G_t \in \mathcal{G}_2} \beta_{\zeta_b(G_t)}(\mathcal{E}^{(|\mathcal{E}|-2)A_t}, \mathbf{r}^{v, (|\mathcal{E}|-2)A_t}) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

con \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 cualesquiera dos subconjuntos que verifiquen

$$G_1 \cup G_2 = \mathcal{G}, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad |G_1| - |G_2| = 1. \quad (40)$$

Nótese que mediante (39) (u otras expresiones análogas detalladas en (Muros, 2019)) es posible el particionado del cálculo del valor de Banzhaf de una forma natural, mediante la resolución de juegos simples de dos jugadores, lo que reduce la carga computacional. Finalmente, es posible consultar resultados adicionales sobre cotas del valor de Banzhaf y su propagación con el nivel de recurrencia \beth en (Muros et al., 2017a).

4.3. Clasificar jugadores

Puede resultar de gran utilidad detectar qué jugadores son los más relevantes dentro de una red desde una perspectiva de control. Con ese fin, se propone un método *offline* de tipo Montecarlo (Zio, 2013) para ordenar y comparar los jugadores –enlaces o agentes– mediante los valores de Shapley y de posición generalizado. Es necesario tomar un número alto de muestras de distintos estados iniciales factibles para que los resultados sean precisamente independientes del estado, y posteriormente evaluar las reglas de pagos en los mismos, mediante el siguiente procedimiento:

Procedimiento de toma de datos 1)

Sea un índice de iteración s y un valor lo suficientemente grande $L \in \mathbb{N}^+$. Comenzando en $s = 1$:

1. Tomar una muestra aleatoria del estado inicial, i.e., \mathbf{x}_N^0 , donde asumimos que $\mathbf{x}_N^0 \in \mathcal{X}_N^0 \subseteq \mathbb{R}^{n_{\mathcal{N}}}$.
2. Evaluar la función de coste (13) para cada topología $\Lambda \in \mathcal{T}$, donde las matrices \mathbf{P}_Λ se han obtenido mediante algún método de optimización sujeto al sistema LMI (10).
3. Calcular el valor de Shapley $\phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$, $\forall l \in \mathcal{E}$ con (14), y/o el valor de posición generalizado $\pi_i^\alpha(\mathcal{N}, \mathbf{v}, \mathcal{E})$, $\forall i \in \mathcal{N}$ mediante (21), para una α dada.
4. Hacer $s = s + 1$ e ir al paso 1 mientras $s < L$.

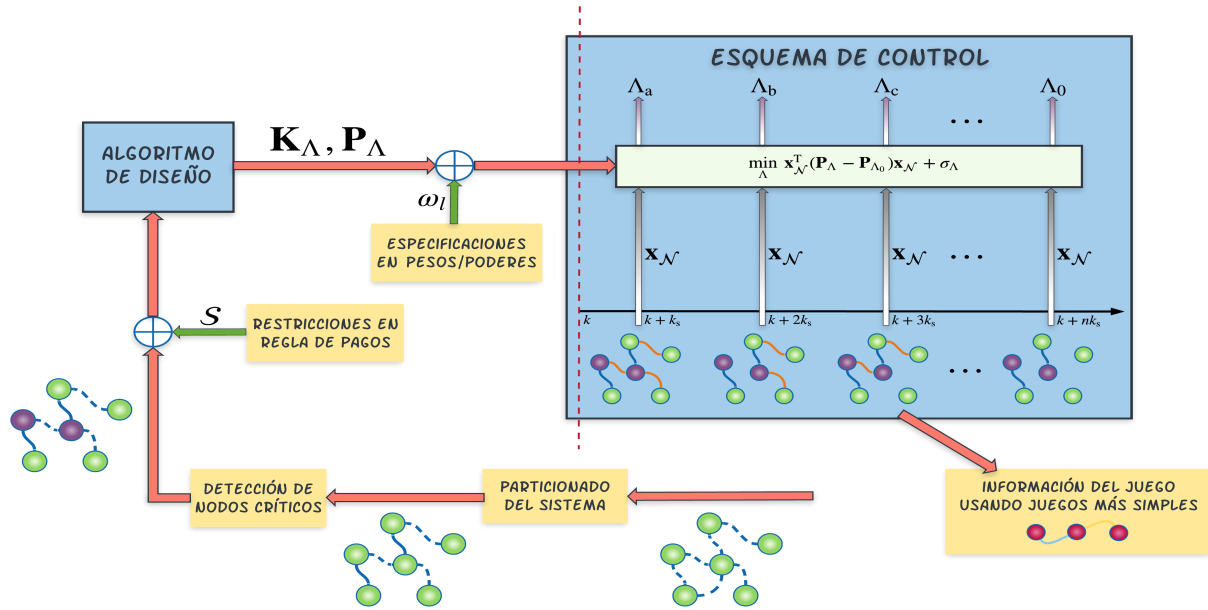


Figura 3: Panorámica de las aplicaciones propuestas y el esquema de control síncrono bicapa utilizado

Una vez tomadas las muestras, se calculan las medias y desviaciones típicas considerando elementos equiprobables mediante (Casella and Berger, 2002)

$$\mu_{\phi_l} = \frac{1}{L} \sum_{s=1}^L \phi_l^s(\mathcal{N}, \mathbf{v}), \quad \sigma_{\phi_l} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{s=1}^L (\phi_l^s(\mathcal{N}, \mathbf{v}) - \mu_{\phi_l})^2}, \quad (41)$$

siendo equivalente el cálculo de $\mu_{\pi_i^\alpha}$ y $\sigma_{\pi_i^\alpha}$. Se detallan a continuación dos aplicaciones basadas en estos parámetros, donde se pone de manifiesto que la perspectiva es distinta dependiendo de si se trabaja con agentes o enlaces de comunicación.

4.3.1. Particionado de sistemas

Es interesante clasificar cómo de importantes son los enlaces dentro de la red coalicional, lo que nos permitirá realizar una reestructuración de la red y en su caso un particionado del sistema. Con ese objetivo, dadas las cotas $\mathcal{L}_c, \mathcal{L}_e, \nu_\phi \in \mathbb{R}$, con $\mathcal{L}_c \leq \mathcal{L}_e$, se propone el siguiente criterio (Muros et al., 2018b):

$$\begin{cases} \text{si } \mu_{\phi_l} < \mathcal{L}_c \text{ y } \frac{|\mu_{\phi_l}|}{\sigma_{\phi_l}} > \nu_\phi, & l \in \mathcal{E}_c, \\ \text{si } \mu_{\phi_l} > \mathcal{L}_e \text{ y } \frac{|\mu_{\phi_l}|}{\sigma_{\phi_l}} > \nu_\phi, & l \in \mathcal{E}_e. \end{cases} \quad (42)$$

En otras palabras, todos los enlaces en el conjunto \mathcal{E}_c se considerarán suficientemente importantes para la red, y se asumirán siempre habilitados, y todos los enlaces pertenecientes a \mathcal{E}_e se considerarán lo bastante caros como para deshabilitarlos permanentemente. Nótese que mediante la condición $|\mu_{\phi_l}|/\sigma_{\phi_l} > \nu_\phi$ se limita la dispersión máxima admisible para que un enlace sea candidato a pertenecer a \mathcal{E}_c o \mathcal{E}_e . Tras aplicar este método, el conjunto de enlaces de la red coalicional se reduce a $\mathcal{E} \setminus \{\mathcal{E}_c \cup \mathcal{E}_e\}$, disminuyendo consecuentemente la carga computacional.

4.3.2. Detección de agentes críticos

En este caso, el enfoque consiste en discriminar los nodos críticos dentro de un sistema de control, lo que nos permite diseñar sus controladores con mayores niveles de redundancia, robustez, capacidad de memoria, etc., logrando mejorar las

prestaciones de la red. Con ese fin, dadas las cotas $\mathcal{C}, \nu_{\pi_i^\alpha} \in \mathbb{R}$, se considerará que el agente $i \in \mathcal{N}$ tiene un rol importante en la red $(\mathcal{N}, \mathcal{E})$ si se verifica (Muros et al., 2016)

$$\mu_{\pi_i^\alpha} < \mathcal{C} \text{ y } \frac{|\mu_{\pi_i^\alpha}|}{\sigma_{\pi_i^\alpha}} > \nu_{\pi_i^\alpha}. \quad (43)$$

Nótese que mediante el uso de medidas de poder α –sirva de ejemplo la ya mencionada medida de grado d – se tiene en cuenta la *centralidad* del nodo para dotarle de una cierta importancia dentro del sistema. Otros esquemas coalicionales que usan medidas de relevancia de los nodos en un grafo son los basados en *PageRank*, como (Maestre and Ishii, 2017).

4.4. Reducción de coste computacional

Inexcusablemente, y a pesar de que las aplicaciones presentadas se computan *offline*, como mayor inconveniente destaca su inherente explosión combinatorial cuando el número de jugadores aumenta lo suficiente. Aunque varios resultados de los propuestos atacan este problema, a continuación se comentan ideas adicionales para mitigarlo.

Nótese que es posible demostrar que si existe una solución factible de las matrices de control $\mathbf{K}_{\bar{\Lambda}}$ y $\mathbf{P}_{\bar{\Lambda}}$ para una cierta topología $\bar{\Lambda}$, siempre habrá solución para cualquier topología dentro del conjunto de *ascendientes*, al tener menos restricciones de comunicación. Como ascendientes se entiende al conjunto $\mathcal{T}^{\bar{\Lambda}} \subseteq \mathcal{T}$ que contiene a las topologías que *como mínimo* tengan activos los enlaces de la topología $\bar{\Lambda}$ (Chanfreut et al., 2021c; Maestre et al., 2021). Además, se cumple que las matrices mencionadas representan una solución para el conjunto de ascendientes de $\bar{\Lambda}$, y por tanto se puede utilizar para *aproximar* una solución del juego (13) en dichas topologías

$$r_{\text{apr}}^v(\Lambda, \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \begin{cases} \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^T \mathbf{P}_{\bar{\Lambda}} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} + \sigma_{\bar{\Lambda}}, & \text{si } \Lambda \in \mathcal{T}^{\bar{\Lambda}}, \\ \mathbf{x}_{\mathcal{N}}^T \mathbf{P}_{\Lambda} \mathbf{x}_{\mathcal{N}} + \sigma_{\Lambda}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (44)$$

Alternativamente, es posible *redefinir* el juego (13) en cualquier subconjunto de \mathcal{T} (Loehman and Winston, 1976; Khmel'nitskaya et al., 2016), o bien *excluir coaliciones* usando la propia regla de pagos (Hiller, 2016, 2018).

Por último, otra solución a los problemas de explosión combinatorial reside en los llamados métodos randomizados (Castro et al., 2009, 2017; Ishii and Tempo, 2010; Tarkowski et al., 2018). En particular, en (Castro et al., 2009, 2017) se computa en tiempo polinomial una *estimación* del valor de Shapley de un enlace l , i.e., $\tilde{\phi}_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$, mediante la toma, con reemplazo e igual probabilidad, de un número q de muestras aleatorias del conjunto completo de permutaciones de las que puede formar parte cualquier enlace, dado por $|\mathcal{E}|!$. Se puede demostrar (Castro et al., 2009) que el valor de Shapley estimado $\tilde{\phi}_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ satisface una serie de propiedades como *eficiencia*, y su error ϵ con respecto al valor de Shapley real $\phi_l(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$ se puede acotar en función de q . Se exponen algunos usos prácticos de este método en la subsección 5.2.

4.5. Panorámica global

Para finalizar esta sección, se ilustra en la Figura 3 una visión global de las aplicaciones presentadas en este tutorial. Como se ha comentado, todas intervienen en la fase de diseño *off-line* del controlador, con la idea de garantizar ciertas propiedades de interés cuando se implemente el esquema de control 1, basado en la optimización cada k_s instantes de (13). Se puede secuenciar su impacto en el sistema de la siguiente forma:

- Primero, se considera la reestructuración/particionado de la red coalicional de acuerdo a lo comentado en la subsección 4.3.1, con el objeto de fijar/desconectar permanentemente ciertos enlaces de comunicación.
- A continuación, se realiza una detección de nodos críticos según lo comentado en la subsección 4.3.2.
- Posteriormente, se consideran restricciones explícitas en las reglas de pago mediante la inclusión de nuevas LMIs. Las nuevas matrices \mathbf{K}_Λ y \mathbf{P}_Λ , $\forall \Lambda$, se calculan usando el algoritmo de diseño 1 propuesto en la subsección 4.1.
- Adicionalmente, se pueden añadir especificaciones en los pesos/poderes tras el diseño de las matrices del controlador, según lo explicado en la subsección 4.1.1
- Finalmente, apoyándonos en el valor de Banzhaf, se puede extraer información del juego coalicional implementado, resolviendo únicamente juegos simples de dos jugadores, como se indica en la subsección 4.2.

Nótese que hay aplicaciones que admiten el uso de distintas reglas de reparto, como la imposición de restricciones (ver (Muros et al., 2017a,b,c; Muros and Maestre, 2021)) o el particionado de sistemas. En consecuencia, el coste acumulado de implementar el esquema de control, i.e., J_{acum} (30), variará con la herramienta usada, aunque dependerá fuertemente del sistema objeto de estudio. En estos casos, una elección razonable sería trabajar con el valor de Shapley, pues tiene la ventaja de satisfacer la interesante propiedad de *eficiencia* (15) en el reparto.

5. Simulaciones

Dividimos esta sección en dos apartados: primero se presenta un ejemplo académico que ilustra numéricamente los conceptos presentados en este tutorial. A continuación, se analizan casos prácticos de esquemas inspirados en la filosofía coalicional en el marco de la teoría de juegos cooperativos.

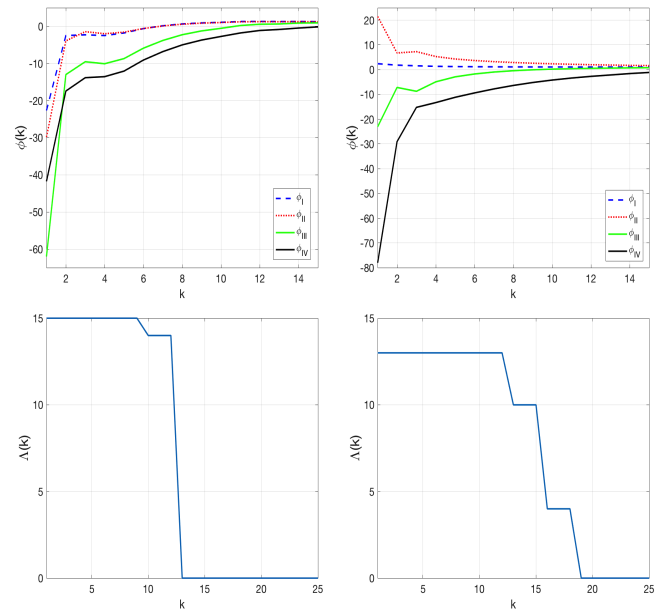


Figura 4: Valores de Shapley (arriba) y evolución de las topologías (abajo) antes (izquierda) y después (derecha) de aplicar las restricciones (46).

5.1. Ejemplo académico

Sea la red de cinco agentes y cuatro enlaces de la Figura 1. Las diferentes topologías y componentes vienen especificadas en la Tabla 1. Las matrices que determinan el sistema son

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{44} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1.9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{55} = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0 & -2.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad i \neq j, \quad (45)$$

donde $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}$ son respectivamente los estados y la entrada de cada agente $i \in \mathcal{N}$. El coste de etapa se define por $\mathbf{Q} = \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ y $\mathbf{R} = 10\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, y suponemos un coste por enlace constante $\sigma_l = c = 1, \forall l \in \mathcal{E}$. En las simulaciones se ha usado la rutina `mincx` de la librería `LMI Control Toolbox` (Gahinet et al., 1995) de `Matlab®`, en un `Intel® Core™ i7` de cuatro núcleos a 2.2 GHz y con 16GB de RAM. Las distintas aplicaciones presentadas en la sección 4 se exploran a continuación.

5.1.1. Restricciones en los jugadores

Sean las siguientes restricciones en el valor de Shapley:

$$\phi_I(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) > 0.9, \quad 2\phi_{III}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) + \phi_{IV}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) < 3.5,$$

$$\phi_{II}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) \geq \phi_I(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) \geq \phi_{III}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v), \quad \phi_{II}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v) \geq \phi_{IV}(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v), \quad (46)$$

expresadas según (25), y de las que se han derivado las correspondientes condiciones LMI (28) para formar el set de restricciones \mathcal{S} . Se ha implementado el algoritmo de diseño 1 aplicando $l_{\text{máx}} = 20$ como criterio de parada y como resultado se han obtenido las matrices $\mathbf{K}_\Lambda \in \mathbb{R}^{5 \times 10}$ y $\mathbf{P}_\Lambda \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ para todas las topologías. En este punto, se ejecuta el esquema de control 1 con $k_s = 3$, $T_{\text{sim}} = 50$, y estado inicial

$$\mathbf{x}_1^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2^0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4^0 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

En la Figura 4 se representa la evolución de los valores de Shapley y de las topologías antes y después de considerar las restricciones (46). En particular, tras considerar el set \mathcal{S} se evoluciona de la topología $\Lambda_{13} = \{\text{II}, \text{III}, \text{IV}\}$, a $\Lambda_{10} = \{\text{III}, \text{IV}\}$, luego a $\Lambda_4 = \{\text{IV}\}$, y finalmente a $\Lambda_0 = \emptyset$. Por tanto, se desconectan secuencialmente los enlaces desde el más caro al más barato según (46), hasta alcanzar el esquema descentralizado en régimen permanente, donde todos los valores de Shapley tienden al coste del enlace $\sigma_l = c = 1$, como se puede extraer de (26). El coste acumulado del esquema de control para el caso de estudio y alternativamente con restricciones en el valor de Banzhaf análogas a (46), viene respectivamente dado por $J_{\text{acum}}^\phi = 751.7$ y $J_{\text{acum}}^\beta = 755.5$. Nótese que las diferencias de coste no son significativas.

5.1.2. Juegos amalgamados

Se ha trabajado con los juegos amalgamados siguientes: primero, los enlaces II y III se fusionan en un nuevo enlace II-III, resultando el juego $(\mathcal{E}^A, \mathbf{r}^{v,A})$ con $\mathcal{E}^A = \{\text{I}, \text{II-III}, \text{IV}\}$. Posteriormente los enlaces I y IV se fusionan en otro enlace I-IV, llegando al juego $(\mathcal{E}^{2A}, \mathbf{r}^{v,2A})$ con $\mathcal{E}^{2A} = \{\text{I-IV}, \text{II-III}\}$. Los valores de Banzhaf de los juegos original y amalgamados se muestran en la Tabla 3 para distintos instantes de tiempo, como resultado de aplicar el esquema de control 1 para el estado inicial (47). Nótese que la propiedad de *2-eficiencia* se satisface en todos los casos, lo que no ocurre en general para el valor de Shapley.

Finalmente, considerando el conjunto \mathcal{G} de juegos con dos amalgamas para la red del ejemplo, especificados en (37), y eligiendo por ejemplo $\mathcal{G}_1 = \{G_1, G_2, G_3, G_4\}$, $\mathcal{G}_2 = \{G_5, G_6, G_7\}$, que verifican (40), el valor de Banzhaf del enlace II en el juego original para el instante $k = 10$ se obtiene mediante (39)

$$\begin{aligned} \beta_{\text{II}}^{k=10} &= \frac{1}{4} \left(\overbrace{\beta_{\text{I-II-III}}}^{G_1} + \overbrace{\beta_{\text{I-II-IV}}}^{G_2} + \overbrace{\beta_{\text{II}}}^{G_3} + \overbrace{\beta_{\text{II-III-IV}}}^{G_4} - \overbrace{\beta_{\text{III-IV}}}^{G_5} - \overbrace{\beta_{\text{I-III}}}^{G_6} - \overbrace{\beta_{\text{I-IV}}}^{G_7} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2.5338 - 0.1266 + 1.1373 - 2.2848 + 1.6625 - 0.1216 \\ &\quad + 1.1298) = \mathbf{0.9826}, \end{aligned} \tag{48}$$

obteniendo el mismo resultado que se obtuvo de forma analítica para dicho enlace como se aprecia en la Tabla 3, lo que nos demuestra que con esta técnica se puede obtener información de un juego a partir de juegos simples más pequeños.

Tabla 3: La propiedad de *2-eficiencia* se satisface por el valor de Banzhaf en todos los casos. Nótese que el valor de Shapley cumple dicha propiedad en el régimen permanente pues solo intervienen costes de enlace, puramente aditivos.

	\mathcal{S}	$\beta_l^{k=0}$	$\phi_l^{k=0}$	$\beta_l^{k=10}$	$\phi_l^{k=10}$	$\beta_l, \phi_l^{k \rightarrow \infty}$
$(\mathcal{E}^{2A}, \mathbf{r}^{v,2A})$	I-IV	-70.5081		-1.1298		2
	II-III	-85.7275		0.0053		2
$(\mathcal{E}^A, \mathbf{r}^{v,A})$	I	-24.2320	-24.0071	1.8444	1.6164	1
	II-III	-86.4023	-86.1774	0.6894	0.4614	2
	IV	-46.2761	-46.0511	-2.9742	-3.2022	1
$(\mathcal{E}, \mathbf{r}^v)$	I	-22.2270	-22.6704	1.0523	1.0883	1
	II	-28.6506	-29.8437	0.9826	1.0342	1
	III	-57.7517	-61.9805	-0.2932	-0.5281	1
	IV	-39.8109	-41.7410	-2.2491	-2.7188	1

5.1.3. Clasificación y detección de jugadores críticos

Se han tomado $L = 10^6$ muestras del estado inicial satisfaciendo las restricciones $x_{i1}^0, x_{i2}^0 \in [-5, 5], \forall i \in \mathcal{N}$. A partir de ahí se ha aplicado el procedimiento de toma de datos 1 y las fórmulas (41) para obtener las medias y desviaciones típicas de los valores de Shapley, posición y posición generalizado, usando la medida de grado d , i.e., $d_i = |\mathcal{E}_i|$, como medida de poder α para este último. Los resultados se detallan en la Tabla 4.

Se han seleccionado las cotas $\mathcal{L}_c = -80$, $\mathcal{L}_e = -10$, $\mathcal{C} = -60$ y $v_\phi = v_\pi = 0.5$, y se han aplicado los criterios descritos en (42) y (43). Se concluye que los subconjuntos de enlaces susceptibles de ser fijos y desconectados permanentemente vienen dados en este ejemplo por

$$\mathcal{E}_c = \{\text{IV}\}, \quad \mathcal{E}_e = \{\emptyset\}, \tag{49}$$

resultando la red coalicional definitiva $(\mathcal{N}, \mathcal{E} \setminus \{\text{IV}\})$. Asimismo, se considera a los nodos 3 y 4 como críticos en el sistema. Nótese que usando el valor de posición clásico no se hubiera considerado crítico al nodo 3, siendo el más central de la red. Finalmente, debido a que los parámetros asociados a enlace I y nodos 1 y 2 no verifican $\frac{|u|_{\phi, \pi^\alpha}}{\sigma_{\phi, \pi^\alpha}} > v_{\phi, \pi^\alpha}$, aunque sus medias cumplieran los requisitos para pertenecer a los conjuntos comentados, se les habría descartado por tener excesiva dispersión.

5.2. Implementaciones en sistemas reales

Se presentan a continuación usos prácticos del control coalicional en un marco de juegos cooperativos, en particular en redes de agua, eléctricas, y plantas termosolares. Es interesante destacar que en los dos últimos esquemas no se modela el sistema mediante grafos pues por propia construcción del problema no es necesario el uso de enlaces para comunicar los distintos subsistemas. En cualquier caso, aunque no compartan esta característica en sentido estricto propia del control coalicional puro, sí están claramente inspirados en la filosofía coalicional en el marco de la teoría de juegos cooperativos, por lo que se ha creído conveniente incluirlos en este tutorial. Debido a restricciones de espacio los esquemas se introducen brevemente. Para más información consultar los artículos referenciados.

5.2.1. Particionado de sistemas de agua

En (Muros et al., 2018a) se implementa un control MPC coalicional con horizonte de predicción $N_p = 12$ y periodo $T_{\text{sim}} = 24$, ambos en horas, mediante el cual se realiza un particionado eficiente de la red de aguas de Barcelona, operada por AGBAR, SA. El modelo usado (Ocampo-Martinez et al., 2011, 2013), mostrado en la Figura 5, se compone de 63 tanques de agua y 114 actuadores -75 bombas y 39 válvulas-, así como de 88 sectores de consumo que se tratan como perturbaciones conocidas. Atendiendo a las ecuaciones de nodos satisfechas por el sistema, se realiza una distribución previa del sistema en 43 agentes, según el diagrama simplificado de la Figura 6.

Tabla 4: Medias y desviaciones típicas de los valores de Shapley y posición

l	Enlaces		Agentes				
	μ_{ϕ_l}	σ_{ϕ_l}	i	μ_{π_i}	$\mu_{\pi_i^\alpha}$	σ_{π_i}	$\sigma_{\pi_i^\alpha}$
I	-21.2882	43.1788	1	-10.6441	-2.4481	21.5894	15.0209
II	-26.2753	44.4163	2	-13.1377	-4.2976	22.2082	14.4641
III	-60.8427	88.7967	3	-54.2031	-78.4252	86.3438	109.7925
IV	-111.5808	110.3763	4	-86.2117	-97.7793	96.7476	107.1390
			5	-55.7904	-37.0368	55.1882	36.9838

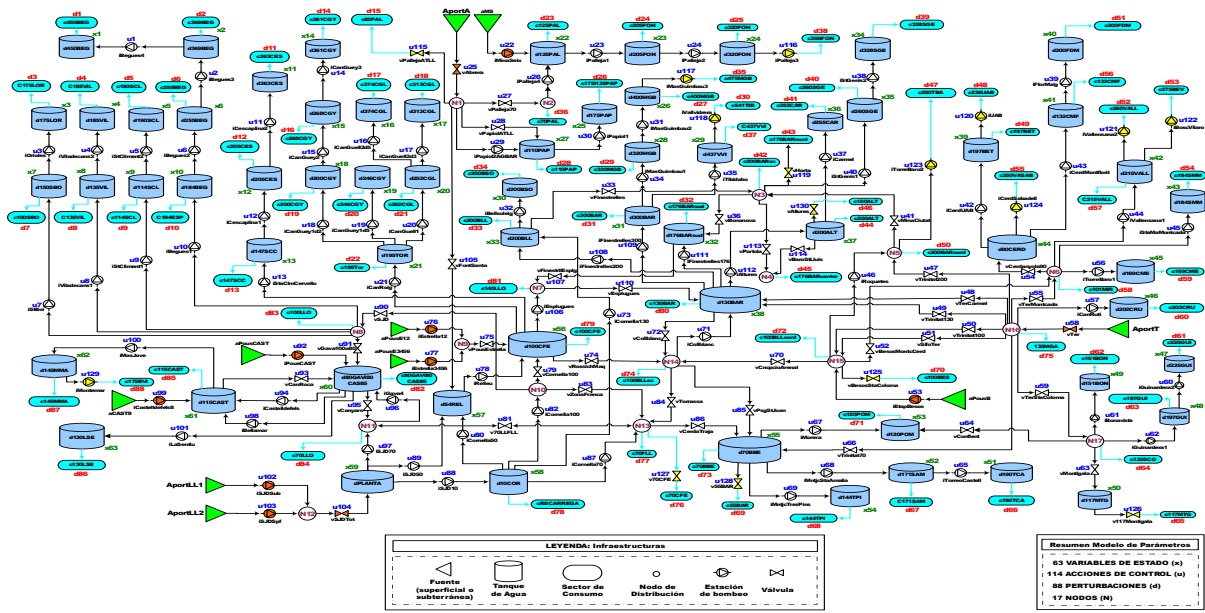


Figura 5: Esquema de la red de aguas de Barcelona (Ocampo-Martinez et al., 2011, 2013)

En este caso se consideró un juego de agentes, penalizando el coste de comunicación a través de la cardinalidad de las componentes. Asimismo, se escogió el valor de Shapley, necesitando estimar su valor usando (Castro et al., 2009) debido al alto número de jugadores. Para mantener el error de estimación ϵ por debajo de límites aceptables se consideró un número de muestras $q = 68$. Una vez estimado el valor de Shapley de los agentes, se distribuyó entre los enlaces asumiendo una red completa. Finalmente, en el algoritmo de particionado se clasificaron todos los enlaces en función de su relevancia, tomando como criterio $\mathcal{L}_c = 1.0 \times 10^7$, $\mathcal{L}_e = 1.5 \times 10^7$, $v_\phi = 0$ (ver subsección 4.3.1), además de otros parámetros adicionales, llegando a una solución compuesta por las siguientes 23 particiones:

$$\mathcal{N}_C = \left\{ \underbrace{\{1, 2, 3, 5, 27, 32, 37, 38, 42\}}_{c_1}, \underbrace{\{4, 15, 16, 29\}}_{c_2}, \underbrace{\{24, 34, 36\}}_{c_3}, \underbrace{\{7, 22\}}_{c_4}, \underbrace{\{10, 19\}}_{c_5}, \underbrace{\{11, 25\}}_{c_6}, \underbrace{\{13, 14\}}_{c_7}, \underbrace{\{17, 30\}}_{c_8}, \underbrace{\{18, 26\}}_{c_9}, \underbrace{\{21, 43\}}_{c_{10}}, \underbrace{\{6\}}_{c_{11}}, \underbrace{\{8\}}_{c_{12}}, \underbrace{\{9\}}_{c_{13}}, \underbrace{\{12\}}_{c_{14}}, \underbrace{\{20\}}_{c_{15}}, \underbrace{\{23\}}_{c_{16}}, \underbrace{\{28\}}_{c_{17}}, \underbrace{\{31\}}_{c_{18}}, \underbrace{\{33\}}_{c_{19}}, \underbrace{\{35\}}_{c_{20}}, \underbrace{\{39\}}_{c_{21}}, \underbrace{\{40\}}_{c_{22}}, \underbrace{\{41\}}_{c_{23}} \right\}, \quad (50)$$

la cual generaba un coste acumulado inferior al esquema descentralizado, y a otras estrategias de particionado de la literatura (Ocampo-Martinez et al., 2011; Di Nardo et al., 2015), demostrando la viabilidad de la solución propuesta.

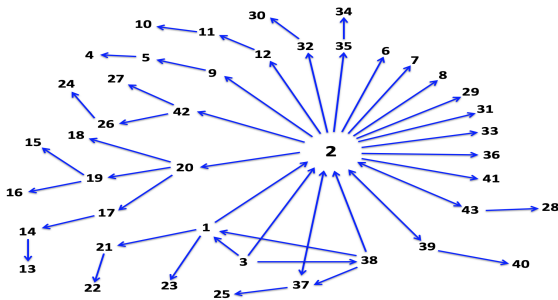


Figura 6: Diagrama simplificado de la red de aguas de Barcelona (Muros et al., 2018a). Las flechas indican las direcciones de flujos de agua entre agentes.

5.2.2. Asignación de telemandos en líneas eléctricas

En (Saracho et al., 2020) se propone una clasificación de localizaciones para instalar centros telemandados en instalaciones eléctricas de distribución, con el fin de reducir el tiempo de localización de averías eléctricas, según la Figura 7. Para ello, dada una línea eléctrica, se define un juego cooperativo donde los jugadores son los centros susceptibles de telemandar de la línea, y con la función de coste dependiente de indicadores económicos y de calidad de suministro. La detección de las mejores posiciones considerando todas las configuraciones posibles se realiza mediante el valor de Shapley.

En el algoritmo propuesto, se tomó la media de $L = 10^5$ muestras de dicho valor para cada jugador, y se usaron datos reales de una empresa eléctrica española. Está en fase de desarrollo un trabajo más complejo aplicado al ámbito de subestaciones eléctricas, donde se computará un preíndice para seleccionar las líneas más susceptibles de mejora, considerando después un juego cooperativo para cada una de ellas.

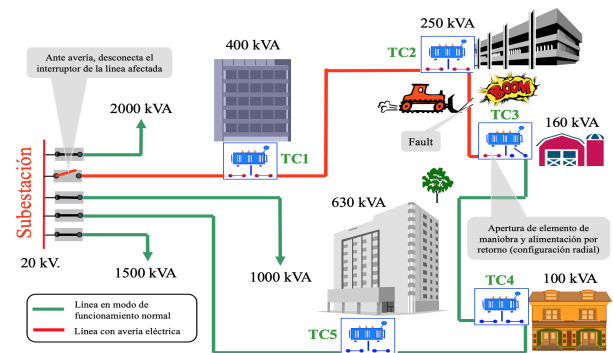


Figura 7: Detección de averías eléctricas en líneas de distribución (Saracho et al., 2020)

5.2.3. Reparto de robots y tareas (problemas MRTA)

Por último, en (Martin et al., 2021) se propone un algoritmo de clustering para resolver un problema de reparto de robots y tareas o MRTA (multi-robot task allocation). Para ello, se asumen robots y tareas como jugadores de un juego cooperativo,

y se evalúan todas las coaliciones posibles en función de características como velocidad y energía del robot, dificultad de la tarea, o distancia entre robots y tareas. Basado en dicho juego, el algoritmo propuesto asigna robots y tareas en clústers compensando sus valores de Shapley. Así, se puede resolver un problema MRTA por cada clúster disminuyendo notablemente la carga computacional respecto a soluciones centralizadas.

Para verificar la efectividad del algoritmo, se consideró un problema MRTA de 60 jugadores –15 robots y 45 tareas–, cuyos valores de Shapley se estimaron mediante (Castro et al., 2009) garantizando un error ϵ aceptable para $q = 453$. Como resultado del algoritmo se obtuvieron los 10 clústers mostrados en la Figura 8, cuyos respectivos problemas MRTA se pueden resolver independientemente, obteniendo una reducción del tiempo de computación respecto al problema centralizado del 98% a costa de una pérdida de optimalidad en torno al 20%. Esta mejora drástica del coste computacional nos permite aplicar este método a sistemas reales tales como plantas termosolares que necesitan soluciones de reparto en pocas decenas de segundos. Asimismo, nuestra propuesta presentó mejores resultados que otros esquemas de *clustering* basados en algoritmos genéticos (Mitchell, 1998). Finalmente, se simuló baterías de problemas con características y número de jugadores aleatorios, cuyos resultados corroboraron la eficacia del algoritmo propuesto.

6. Conclusiones

En este tutorial, basado en (Muros, 2019), se establecen los fundamentos del control coalicional desde la perspectiva de la teoría de juegos cooperativos. Para ello se introduce el concepto de juego coalicional como función de realimentaciones lineales, siendo los jugadores bien los controladores o bien sus enlaces de comunicación, cuyo uso se penaliza de forma explícita en la función de optimización. Se realiza un diseño *offline* de las matrices del controlador, y se aportan resultados que garantizan la estabilidad asintótica del bucle cerrado del esquema de control. Como resultado, los enlaces se activarán/desactivarán dinámicamente en función de las necesidades del sistema. Gracias a esta configuración coalicional, se alcanza un compromiso entre carga de comunicación y rendimiento de control.

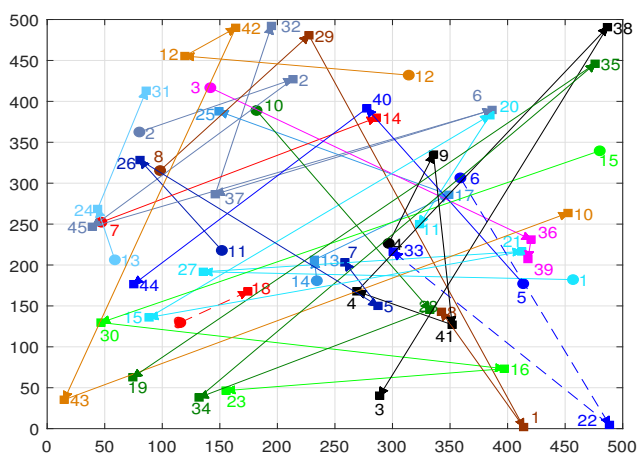


Figura 8: *Clustering* de un problema MRTA con 15 robots (●) y 45 tareas (■) distribuidos espacialmente según la imagen (escala en metros) (Martin et al., 2021). Se han usado colores diferentes para cada clúster y tipos de línea distintos dentro de un clúster para trayectorias asociadas a diferentes robots.

Se han explorado aplicaciones coalicionales basadas en algunas de las reglas de pagos más conocidas de la teoría de juegos cooperativos, como los valores de Shapley, Banzhaf, posición, las soluciones de poder de Harsanyi o los semivalores, aportando las definiciones formales y propiedades de cada herramienta. Estas reglas nos han permitido distribuir los costes de control y comunicación entre los jugadores, analizando situaciones de comunicación completa y restringida. Se presentan tres aplicaciones al control coalicional: la consideración de restricciones sobre los jugadores para premiar/penalizar su uso, la segmentación del cálculo de las reglas de pago, y la clasificación de los jugadores según su relevancia en la red. Asimismo, se proponen diferentes mecanismos encaminados a mitigar los efectos de la explosión combinatorial. Por último, se ilustran los conceptos propuestos con un ejemplo académico, y con implementaciones en sistemas reales inspiradas en la filosofía coalicional en el marco de la teoría de juegos cooperativos, lo que da una idea de las múltiples posibilidades de esta línea de investigación en trabajos futuros.

Agradecimientos

Este estudio ha sido parcialmente financiado por los proyectos de investigación *OCONTSOLAR*, (H2020 ADG-ERC, ID 789051), *C3PO* (MINECO, DPI2017-86918-R), y *GESVIP* (Junta de Andalucía, US-1265917). Asimismo, se agradece a José María Maestre, Encarnación Algaba y Eduardo F. Camacho las innumerables discusiones mantenidas a lo largo de los años de doctorado que me ayudaron a dominar los conceptos presentados en este tutorial. Es también de destacar los comentarios del Editor y los revisores anónimos que han contribuido a la mejora sustancial del manuscrito. Finalmente, se dedica este artículo a Lloyd S. Shapley (1923-2016), ya que su concepto de solución (Shapley, 1953b) ha inspirado todo mi trabajo.

Referencias

- Alamo, T., Normey-Rico, J. E., Arahal, M. R., Limon, D., Camacho, E. F., June 2006. Introducing linear matrix inequalities in a control course. In: Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Advances in Control Education (ACE 2006). Madrid, Spain, pp. 205–210.
- Algaba, E., Fragnelli, V., Sánchez-Soriano, J. (Eds.), December 2019. The Handbook of the Shapley Value. CRC Press Series in Operations Research. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, USA.
- Aranda-Escolástico, E., Guinaldo, M., Heradio, R., Chacon, J., Vargas, H., Sánchez, J., Dormido, S., March 2020. Event-based control: A bibliometric analysis of twenty years of research. *IEEE Access* 8, 47188–47208.
- Baldivieso-Monasterios, P. R., Trodden, P. A., March 2021. Coalitional predictive control: Consensus-based coalition forming with robust regulation. *Automatica* 125, 109380.
- Banzhaf, J. F., 1965. Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review* 19, 317–343.
- Barreiro-Gomez, J., Ocampo-Martinez, C., Quijano, N., March 2019. Time-varying partitioning for predictive control design: Density-games approach. *Journal of Process Control* 75, 1–14.
- Barreiro-Gomez, J., Ocampo-Martinez, C., Quijano, N., Maestre, J. M., September 2017. Non-centralized control for flow-based distribution networks: A game theoretical insight. *Journ. of the Franklin Inst.* 354 (14), 5771–5796.
- Bauso, D., Cannon, M., April 2018. Consensus in opinion dynamics as a repeated game. *Automatica* 90, 204–211.
- Bauso, D., Notarstefano, G., November 2015. Distributed n -player approachability and consensus in coalitional games. *IEEE Transactions on Automatic Control* 60 (11), 3107–3112.
- Bauso, D., Timmer, J., March 2009. Robust dynamic cooperative games. *International Journal of Game Theory* 38 (1), 23–36.

- Bauso, D., Timmer, J., October 2012. On robustness and dynamics in (un)balanced coalitional games. *Automatica* 48 (10), 2592–2596.
- Becker, H. W., Riordan, J., April 1948. The arithmetic of Bell and Stirling numbers. *American Journal of Mathematics* 70 (2), 385–394.
- Borm, P., Owen, G., Tijs, S., August 1992. On the position value for communication situations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 5 (3), 305–320.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., 1994. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pennsylvania, USA.
- Cai, K., Ishii, H., September 2011. Quantized consensus and averaging on gossip digraphs. *IEEE Transactions on Automatic Control* 56 (9), 2087–2100.
- Camacho, E. F., Bordons, C., 2013. *Model Predictive Control*, 2nd Edition. *Advances Textbooks in Control and Signal Processing*. Springer, London, UK.
- Carreras, F., Freixas, J., January 2002. Semivalue versatility and applications. *Annals of Operations Research* 109 (1-4), 343–358.
- Casella, G., Berger, R. L., 2002. *Statistical Inference*, 2nd Edition. Thomson Learning, *Duxbury Advanced Series*, Stamford, Connecticut, USA.
- Castro, J., Gómez, D., Molina, E., Tejada, J., June 2017. Improving polynomial estimation of the shapley value by stratified random sampling with optimum allocation. *Computers & Operations Research* 82, 180–188.
- Castro, J., Gómez, D., Tejada, J., May 2009. Polynomial calculation of the Shapley value based on sampling. *Computers & Operations Research* 36 (5), 1726–1730.
- Chanfreut, P., Maestre, J. M., Camacho, E. F., 2021a. Coalitional model predictive control on freeways traffic networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. *En Prensa*.
- Chanfreut, P., Maestre, J. M., Ferramosca, A., Muros, F. J., Camacho, E. F., 2021b. Distributed model predictive control for tracking: A clustering approach. *Submitted to the IEEE Trans. on Autom. Control*. *No publicado*.
- Chanfreut, P., Maestre, J. M., Muros, F. J., Camacho, E. F., 2021c. Clustering switching regions for feedback controllers: A convex approach. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. *En Prensa*.
- Darivianakis, G., Eichler, A., Lygeros, J., March 2020. Distributed model predictive control for linear systems with adaptive terminal sets. *IEEE Transactions on Automatic Control* 65 (3), 1044–1056.
- De Souza, C. A., Camponogara, E., Kraus Jr., W., Peccin, V. B., May/June 2015. Distributed MPC for urban traffic networks: A simulation-based performance analysis. *Optimal Control Applications & Methods* 36 (3), 353–368.
- Di Nardo, A., Di Natale, M., Giudicianni, C., Musmarra, D., Santonastaso, G. F., Simone, A., September 2015. Water distribution system clustering and partitioning based on social network algorithms. *Procedia Engineering* 119, 196–205.
- Dörfler, F., Jovanović, M. R., Chertkov, M., Bullo, F., September 2014. Sparsity-promoting optimal wide-area control of power networks. *IEEE Transactions on Power Systems* 29 (5), 2281–2291.
- Dubey, P., Neyman, A., Weber, R. J., February 1981. Value theory without efficiency. *Mathematics of Operations Research* 6 (1), 122–128.
- Ebihara, Y., Peaucelle, D., Arzelier, D., Jan. 2014. LMI approach to linear positive system analysis and synthesis. *Systems & Control Letters* 63, 50–56.
- Fele, F., Debada, E., Maestre, J. M., Camacho, E. F., September 2018. Coalitional control for self-organizing agents. *IEEE Transactions on Automatic Control* 63 (9), 2883–2897.
- Fele, F., Maestre, J. M., Camacho, E. F., July 2015. Coalitional control: a bottom-up approach. In: *Proceedings of the 33rd American Control Conference (ACC 2015)*. Chicago, Illinois, USA, pp. 4074–4079.
- Fele, F., Maestre, J. M., Camacho, E. F., February 2017. Coalitional control: Cooperative game theory and control. *IEEE Control Systems Magazine* 37 (1), 53–69.
- Fele, F., Maestre, J. M., Shahdany, M. H., Muñoz de la Peña, D., Camacho, E. F., April 2014. Coalitional model predictive control of an irrigation canal. *Journal of Process Control* 24 (4), 314–325.
- Fletcher, R., Leyffer, S., May 1998. Numerical experience with lower bounds for MIQP branch-and-bound. *SIAM Journal on Optimization* 8 (2), 604–616.
- Fletscher, L. A., Maestre, J. M., Peroni, C. V., July 2018. Coalitional planning for energy efficiency of HetNets powered by hybrid energy sources. *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 67 (7), 6573–6584.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A. S., Laub, A. J., Chilali, M., 1995. *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB®*. The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, USA.
- Ghintran, A., May 2013. Weighted position values. *Mathematical Social Sciences* 65 (3), 157–163.
- Gilles, R. P., April 2010. *The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies*. Vol. 44 of *Theory and Decision Library C*. Springer, Heidelberg, Germany.
- Gillies, D. B., 1959. Solutions to general non-zero-sum games. In: Tucker, A. W., Luce, R. D. (Eds.), *Contributions to the Theory of Games IV*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, pp. 47–85.
- Ginsburgh, V., Zang, I., November 2012. Shapley ranking of wines. *Journal of Wine Economics* 7 (2), 169–180.
- Han, Z., Niyato, D., Saad, W., Başar, T., Hjørungnes, A., 2012. *Game Theory in Wireless and Communication Networks: Theory, Models, and Applications*. Cambridge University Press, New York, USA.
- Harsanyi, J. C., 1959. A bargaining model for the n -person cooperative game. In: Tucker, A. W., Luce, R. D. (Eds.), *Contributions to the Theory of Games IV*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, pp. 325–355.
- Hiller, T., 2016. Excluded coalitions and the distribution of power in parliaments. *Applied Economics* 48 (4), 321–330.
- Hiller, T., January 2018. The effects of excluding coalitions. *Games* 9 (1), 1.
- Ishii, H., Tempo, R., Feb. 2010. Distributed randomized algorithms for the PageRank computation. *IEEE Trans. on Automatic Control* 55 (9), 1987–2002.
- Jackson, M. O., 2008. *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA.
- Jiang, Y., May 2019. Intermittent distributed control for a class of nonlinear reaction-diffusion systems with spatial point measurements. *Journal of the Franklin Institute* 356 (7), 3811–3830.
- Kalai, E., Samet, D., September 1987. On weighted Shapley values. *International Journal of Game Theory* 16 (3), 205–222.
- Khmelnitskaya, A., Selçuk, Ö., Talman, D., January 2016. The Shapley value for directed graph games. *Operations Research Letters* 44 (1), 143–147.
- Lehrer, E., June 1988. An axiomatization of the Banzhaf value. *International Journal of Game Theory* 17 (2), 89–99.
- Loehman, E. T., Whinston, A. B., 1976. A generalized cost allocation scheme. In: Stevens, A., Lin, Y. (Eds.), *Theory and Measurement of Economic Externalities*. Academic Press, New York, USA, pp. 87–101.
- Lopez-Rodriguez, F., Maestre, J. M., Muros, F. J., Camacho, E. F., July 2020. A modular feedback approach for distributed control. In: *Proceedings of the 21st IFAC World Congress (IFAC 2020)*. Berlin, Germany, pp. 4086–4091.
- Lucchetti, R., Moretti, S., Patrone, F., Radrizzani, P., August 2010. The Shapley and Banzhaf values in microarray games. *Computers & Operations Research* 37 (8), 1406–1412.
- Maestre, J. M., November 2010. Distributed model predictive control based on game theory. Ph.D. thesis, Department of Systems and Automation Engineering, University of Seville, Seville, Spain.
- Maestre, J. M., Ishii, H., Oct. 2017. A PageRank based coalitional control scheme. *Intern. Journal of Control, Automation and Systems* 15 (5), 1983–1990.
- Maestre, J. M., Lopez-Rodriguez, F., Muros, F. J., Ocampo-Martinez, C., February 2021. Modular feedback control of networked systems by clustering: A drinking water network case study. *Processes* 9 (2), 389.
- Maestre, J. M., Muñoz de la Peña, D., Camacho, E. F., Alamo, T., June 2011. Distributed model predictive control based on agent negotiation. *Journal of Process Control* 21 (5), 685–697.
- Maestre, J. M., Muñoz de la Peña, D., Jiménez Losada, A., Algaba, E., Camacho, E. F., September/October 2014. A coalitional control scheme with applications to cooperative game theory. *Optimal Control Applications and Methods* 35 (5), 592–608.
- Maestre, J. M., Muros, F. J., Fele, F., Camacho, E. F., July 2015. An assessment of coalitional control in water systems. In: *Proceedings of the 14th European Control Conference (ECC 2015)*. Linz, Austria, pp. 3291–3296.
- Maestre, J. M., Negenborn, R. R. (Eds.), 2014. *Distributed Model Predictive Control Made Easy*. Vol. 69 of *Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering*. Springer, Dordrecht, The Netherlands.
- Martin, J. G., Muros, F. J., Maestre, J. M., Camacho, E. F., 2021. Multi-robot task allocation clustering based on game theory. *Submitted to the IEEE Transactions on Robotics*. *No publicado*.
- Marzband, M., Ardeshiri, R. R., Moafi, M., Uppal, H., June 2017. Distributed generation for economic benefit maximization through coalition formation-based game theory concept. *International Transactions on Electrical Energy Systems* 27 (6), e2313.
- Maschler, M., Solan, E., Zamir, S., March 2013. *Game Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Masero, E., Fletscher, L. A., Maestre, J. M., December 2020. A coalitional model predictive control for the energy efficiency of next-generation cellular networks. *Energies* 13 (24), 6546.
- Masero, E., Frejo, J. R. D., Maestre, J. M., Camacho, E. F., January 2021. A light clustering model predictive control approach to maximize thermal power in solar parabolic-trough plants. *Solar Energy* 214, 531–541.
- Mitchell, M., 1998. *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA.

- Monroy, L., Fernández, F. R., April 2014. Banzhaf index for multiple voting systems: an application to the European Union. *Annals of Operations Research* 215, 215–230.
- Muros, F. J., 2019. *Cooperative Game Theory Tools in Coalitional Control Networks*. Springer Theses Series. Springer, Zug, Switzerland.
- Muros, F. J., Algaba, E., Maestre, J. M., Camacho, E. F., June/July 2016. Cooperative game theory tools to detect critical nodes in distributed control systems. In: *Proceedings of the 15th European Control Conference (ECC 2016)*. Aalborg, Denmark, pp. 190–195.
- Muros, F. J., Algaba, E., Maestre, J. M., Camacho, E. F., June 2017a. The Banzhaf value as a design tool in coalitional control. *Systems & Control Letters* 104, 21–30.
- Muros, F. J., Algaba, E., Maestre, J. M., Camacho, E. F., July 2017b. Harsanyi power solutions in coalitional control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 62 (7), 3369–3381.
- Muros, F. J., Maestre, J. M., 2021. Generalized framework for coalitional feedback control with semivalues constraints. *Submitted to the Journal of the Franklin Institute*. *No publicado*.
- Muros, F. J., Maestre, J. M., Algaba, E., Alamo, T., Camacho, E. F., April 2017c. Networked control design for coalitional schemes using game-theoretic methods. *Automatica* 78, 320–332.
- Muros, F. J., Maestre, J. M., Ocampo-Martinez, C., Algaba, E., Camacho, E. F., August 2018a. A game theoretical randomized method for large-scale systems partitioning. *IEEE Access* 6, 42245–42263.
- Muros, F. J., Maestre, J. M., Ocampo-Martinez, C., Algaba, E., Camacho, E. F., June 2018b. Partitioning of large-scale systems using game-theoretic coalitional methods. In: *Proceedings of the 16th European Control Conference (ECC 2018)*. Limassol, Cyprus, pp. 2517–2522.
- Narayanan, R., Narahari, Y., January 2011. A Shapley value-based approach to discover influential nodes in social networks. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 8 (1), 130–147.
- Nash, J. F., September 1951. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* 54 (2), 286–295.
- Nedić, A., Bauso, D., June 2013. Dynamic coalitional TU games: Distributed bargaining among players' neighbors. *IEEE Transactions on Automatic Control* 58 (6), 1363–1376.
- Negenborn, R. R., De Schutter, B., Hellendoorn, J., April 2008. Multi-agent model predictive control for transportation networks: Serial versus parallel schemes. *Engineering Apps. of Artificial Intelligence* 21 (3), 353–366.
- Negenborn, R. R., van Overloop, P.-J., Keviczky, T., De Schutter, B., June 2009. Distributed model predictive control of irrigation canals. *Networks and Heterogeneous Media* 4 (2), 359–380.
- Nowak, A. S., March 1997. On an axiomatization of the Banzhaf value without the additivity axiom. *International Journal of Game Theory* 26 (1), 137–141.
- Núñez, A., Ocampo-Martinez, C., Maestre, J. M., Schutter, B. D., August 2015. Time-varying scheme for noncentralized model predictive control of large-scale systems. *Mathematical Problems in Engineering* 2015, 560702.
- Ocampo-Martinez, C., Bovo, S., Puig, V., June 2011. Partitioning approach oriented to the decentralised predictive control of large-scale systems. *Journal of Process Control* 21 (5), 775–786.
- Ocampo-Martinez, C., Puig, V., Cembrano, G., Quevedo, J., February 2013. Application of MPC strategies to the management of complex networks of the urban water cycle. *IEEE Control Systems Magazine* 33 (1), 15–41.
- Olfati-Saber, R., Fax, J. A., Murray, R. M., January 2007. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proc. of the IEEE* 95 (1), 215–233.
- Olfati-Saber, R., Murray, R. M., September 2004. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (9), 1520–1533.
- Owen, G., September 1978. Characterization of the Banzhaf-Coleman index. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 35 (2), 315–327.
- Owen, G., 2013. *Game Theory*, 4th Ed. Emerald Group Pub. Lim., Bingley, UK.
- Peleg, B., Sudhölter, P., October 2007. *Introduction to the Theory of Cooperative Games*. Theory and Decision Library C. Springer.
- Penrose, L. S., 1946. The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society* 109 (1), 53–57.
- Peters, H., June 2015. *Game Theory. A Multi-Levelled Approach*, 2nd Edition. Springer Texts in Business and Economics. Springer, Heidelberg, Germany.
- Petrosjan, L., Zaccour, G., Jan. 2003. Time-consistent Shapley value allocation of pollution cost reduction. *Journ. of Econ. Dyn. & Control* 27 (3), 381–398.
- Philippe, M., Essick, R., Dullerud, G. E., Jungers, R. M., October 2016. Stability of discrete-time switching systems with constrained switching sequences. *Automatica* 72, 242–250.
- Ren, W., Beard, R. W., May 2005. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (5), 655–661.
- Riverso, S., Farina, M., Ferrari-Trecate, G., October 2013. Plug-and-play decentralized model predictive control for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 58 (10), 2608–2614.
- Riverso, S., Farina, M., Ferrari-Trecate, G., August 2014. Plug-and-play model predictive control based on robust control invariant sets. *Automatica* 50 (8), 2179–2186.
- Saad, W., Han, Z., Debbah, M., Hjørungnes, A., Başar, T., September 2009. Coalitional game theory for communication networks. *IEEE Signal Processing Magazine* 26 (5), 77–97.
- Saad, W., Han, Z., Poor, H. V., Başar, T., September 2012. Game-theoretic methods for the smart grid: An overview of microgrid systems, demand-side management, and smart grid communications. *IEEE Signal Processing Magazine* 29 (5), 86–105.
- Saracho, D., Muros, F. J., Maestre, J. M., July 2020. Efficient design of fault detection architectures for power networks by using game theory. In: *Proc. of the 21st IFAC World Congr. (IFAC 2020)*. Berlin, Germ., pp. 13828–13833.
- Scattolini, R., May 2009. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control – A review. *Journal of Process Control* 19 (5), 723–731.
- Shapley, L. S., 1953a. Additive and non-additive set functions. Ph.D. thesis, Princeton University, New Jersey, USA.
- Shapley, L. S., 1953b. A value for n -person games. In: Kuhn, H. W., Tucker, A. W. (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II*. Annals of Mathematics Studies, vol. 28. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, pp. 307–317.
- Skogestad, S., Postlethwaite, I., August 2001. *Multivariable Feedback Control - Analysis and Design*, 2nd Edition. John Wiley and Sons, New York, USA.
- Slikker, M., July 2005. A characterization of the position value. *International Journal of Game Theory* 33 (4), 505–514.
- Sun, J., Tang, J., 2011. A survey of models and algorithms for social influence analysis. In: Aggarwal, C. C. (Ed.), *Social Network Data Analytics*. Springer, New York, USA, pp. 177–214.
- Tarashev, N., Tsatsaronis, K., Borio, C., May 2016. Risk attribution using the Shapley value: Methodology and policy applications. *Review of Finance* 20 (3), 1189–1213.
- Tarkowski, M. K., Szczepański, P. L., Michalak, T. P., Harrenstein, P., Woolbridge, M., October 2018. Efficient computation of semivalues for game-theoretic network centrality. *Journal of Artif. Intell. Research* 63, 145–189.
- van den Brink, R., Borm, P., Hendrickx, R., Owen, G., June 2008. Characterizations of the β - and the degree network power measure. *Theory and Decision* 64 (4), 519–536.
- van den Brink, R., van der Laan, G., Pruzhansky, V., February 2011. Harsanyi power solutions for graph-restricted games. *International Journal of Game Theory* 40 (1), 87–110.
- von Neumann, J., Morgenstern, O., 1944. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA.
- Witczak, M., Buciakowski, M., Puig, V., Rotondo, D., Nejari, F., May 2016. An LMI approach to robust fault estimation for a class of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 26 (7), 1530–1548.
- Xu, G., Driessen, T. S. H., Sun, H., April 2008. Matrix analysis for associated consistency in cooperative game theory. *Linear Algebra and its Applications* 428 (7), 1571–1586.
- Yazdaniyan, M., Mehrizi-Sani, A., November 2014. Distributed control techniques in microgrids. *IEEE Transactions on Smart Grid* 5 (6), 2901–2909.
- Zhang, F., 2005. *The Schur Complement and Its Applications*. Vol. 4 of *Numerical Methods and Algorithms*. Springer, New York, USA.
- Zhang, G., Yang, K., Liu, P., Ding, E., February 2011. Achieving user cooperation diversity in TDMA-based wireless networks using cooperative game theory. *IEEE Communication Letters* 15 (2), 154–156.
- Zhang, X.-M., Han, Q.-L., Ge, X., Ding, D., Ding, L., Yue, D., Peng, C., January 2020. Networked control systems: a survey of trends and techniques. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* 7 (1), 1–17.
- Zhang, Y.-J., Wang, A.-D., Da, Y.-B., November 2014. Regional allocation of carbon emission quotas in China: Evidence from the Shapley value method. *Energy Policy* 74, 454–464.
- Zheng, Y., Wei, Y., Li, S., October 2018. Coupling degree clustering-based distributed model predictive control network design. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 15 (4), 1749–1758.
- Zio, E., 2013. *The Monte Carlo Simulation Method for System Reliability and Risk Analysis*. Springer, London, UK.