

## ANALISIS HIDRAULICO DE TUBERIAS POR METODOS MATRICIALES

ANTONIO F. MARTIN NAVARRO

*Catedrático de Construcciones Industriales  
Escuela Superior de Ingenieros Industriales  
Universidad de Sevilla - Avda. Reina Mercedes s/n  
41012 SEVILLA*

### SUMARIO

Este trabajo desarrolla en forma sistemática las ecuaciones de campo que rigen el comportamiento hidráulico en régimen estacionario de redes de tuberías. Su obtención se realiza en forma análoga a la utilizada en el Análisis Matricial de Estructuras.

Como resultado, se obtienen las expresiones de todas las matrices necesarias, utilizando para ello sólo la información topológica de la red. La formulación considera asimismo la definición de condiciones de contorno mixtas, así como la inclusión de bombas en la red de tuberías.

### SUMMARY

This work develops the field equations for incompressible flow in pipe network in a systematic way. The relations have been considered in matrix form, in a similar manner to the Matrix Analysis of Structures.

As a consequence of this approach, the different matrices have been evaluated only through topological network information. In addition, the model allows mixed boundary conditions and pumps inside network. Both cases have been directly included in the formulation.

### INTRODUCCION

El Análisis Hidráulico en Régimen Estacionario de una red de tuberías por la que circula un fluido incompresible pretende estudiar el nivel de presiones que se produce en el sistema, así como los flujos circulantes, para unas condiciones de contorno dadas, que permanecen estables con el tiempo.

Para establecer las ecuaciones de campo del problema a resolver, se acude a la utilización de las ecuaciones de la energía y de la continuidad, que deben cumplirse en todo el sistema, así como a las ecuaciones de Darcy-Weisbach, que rige la pérdida de carga en una tubería.<sup>1,2</sup>

Existen varias alternativas en el planteamiento de las ecuaciones de campo,<sup>2,3,4</sup> que dependen básicamente de las variables respecto de las que se deseen expresar dichas ecuaciones, que son las presiones en los nudos de la red, y los caudales circulantes por cada una de sus ramas.

El objetivo que se pretende, es el planteamiento de dichas ecuaciones de campo en

Recibido: Abril 1986

una forma sistemática, utilizando para ello una formulación matricial<sup>5</sup> con la que se consigue no sólo una gran claridad expositiva, sino que además dicha formulación es muy adecuada para aplicar procesos o algoritmos numéricos resolubles mediante computador.<sup>6</sup>

### EQUIVALENCIA CON EL ANALISIS MECANICO ESTRUCTURAL

La formulación matricial ha tenido gran aceptación y desarrollo dentro del campo del Análisis de Estructuras,<sup>7,8,9</sup> en especial en el ámbito de las Estructuras de Barras, con las que puede establecerse una equivalencia formal, aun cuando los problemas en sí mismos sean muy diferentes. Esta equivalencia se pone de manifiesto en la Tabla 1, y puede servirnos de guía en el establecimiento de la formulación matricial que vamos persiguiendo.

Frente a las equivalencias, es preciso resaltar asimismo dos diferencias muy significativas como son:

1. Mientras en el Análisis Estructural se definen variables o magnitudes vectoriales, en el Análisis Hidráulico el problema sólo se plantea con variables escalares.
2. En general, el Análisis Estructural se realiza en el campo Elástico, lo que conlleva una ley de comportamiento lineal, mientras que en el caso Hidráulico, la ley de Darcy es claramente no lineal, y posee además una expresión complicada operativamente, debido fundamentalmente al factor de fricción.

TABLA 1: EQUIVALENCIA MECANICA-HIDRAULICA

EXTRUCTURAS DE BARRAS	REDES DE TUBERIAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Desplazamiento de un nudo <math>u_i</math> en coordenadas globales</li> <li>* Fuerza Exterior actuante en un nudo en coordenadas globales <math>F_i</math></li> <li>* Deformación en una barra en coordenadas locales <math>\delta_i</math></li> <li>* Esfuerzo existente en una barra en coordenadas locales <math>N_i</math></li> <li>* Ley de comportamiento del material de una barra</li> </ul> $N_i = k_i \cdot \delta_i ; \delta_i = a_i \cdot N_i$	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Altura Piezométrica en un nudo <math>H_i</math></li> <li>* Caudal Exterior de entra o sale por un nudo <math>Q_i</math></li> <li>* Pérdida de carga en una tubería <math>h_i</math></li> <li>* Caudal que circula por una tubería <math>q_i</math></li> <li>* Ecuación de Darcy-Weisbach que rige la pérdida de carga en una tubería</li> </ul> $h_i = \frac{8 \lambda}{\pi^2 g} \frac{L_i}{D_i^5} q_i^2$
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Ecuaciones de Equilibrio en los nudos de la estructura</li> <li>* Ecuaciones de Compatibilidad en la Estructura</li> <li>* Método de la Rigidez</li> <li>* Método de la Flexibilidad</li> <li>* Sistema Isotático Interiormente</li> <li>* Sistema Hiperestático Interiormente</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Ecuaciones de Continuidad en los nudos de la red</li> <li>* Ecuaciones de la Energía en las mallas de la Red</li> <li>* Método de los Nudos</li> <li>* Método de los Caudales</li> <li>* Red Ramificada</li> <li>* Red Mallada</li> </ul>

### ECUACIONES FUNDAMENTALES EXPRESADAS EN FORMA MATRICIAL

En general tratamos de expresar las ecuaciones de campo correspondientes a una red de tuberías definida por los siguientes parámetros y variables

$N$  = número de nudos de la red

$R$  = número de ramas que componen la red

$M$  = número de mallas sobre las que pueden definirse ecuaciones de energía independientes.

$$R = (N-1) + M \quad (3.1)$$

$\mathbf{q}$  = vector formado por los valores  $q_i$  de los caudales en cada rama de la red

$$\mathbf{q}^T = \{q_1, q_2 \dots q_R\} \quad (3.2)$$

$\mathbf{Q}$  = vector formado por los valores  $Q_i$  de los caudales que salen de cada uno de la red

$$\mathbf{Q}^T = \{Q_1, Q_2 \dots Q_{N-1}\} \quad (3.3)$$

$\mathbf{h}$  = vector formado por los valores  $h_i$  de las pérdidas de carga producidas en cada rama de la red

$$\mathbf{h}^T = \{h_1, h_2 \dots h_R\} \quad (3.4)$$

$\mathbf{H}$  = vector formado por los valores  $H_i$  de las alturas piezométricas de cada uno de los nodos de la red

$$\mathbf{H}^T = \{H_1, H_2 \dots H_{N-1}\} \quad (3.5)$$

Las relaciones entre estos vectores pueden obtenerse mediante matrices derivadas de la aplicación de las ecuaciones básicas antes apuntadas.

### EXPRESION MATRICIAL DE LA ECUACION DE DARCY-WEISBACH

La expresión de Darcy-Weisbach para una rama cualquiera de la red viene dada por

$$h_i = \frac{8 \lambda}{\pi^2 g} \frac{L_i}{D_i^5} q_i^2 \quad (3.6)$$

Esta ecuación podemos plantearla alternativamente en la forma:

$$h_i = \left\{ \frac{8 \lambda}{\pi^2 g} \frac{L_i}{D_i^5} \cdot |q_i| \right\} q_i = a_i q_i \quad (3.7)$$

$$q_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g}{8 \lambda} \frac{D_i^5}{L_i}} \cdot \sqrt{h_i} = \left\{ \sqrt{\frac{\pi^2 g}{8 \lambda} \frac{D_i^5}{L_i}} \cdot \frac{1}{|h_i|} \right\} h_i = k_i h_i \quad (3.8)$$

Si aplicamos estas ecuaciones a todas las ramas de la red tendremos en definitiva

$$\mathbf{h} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} ; \mathbf{A} = \text{diag} \{ a_1 a_2 \dots a_R \} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{h} ; \mathbf{K} = \text{diag} \{ k_1 k_2 \dots k_R \} \quad (3.10)$$

$$a_i = \frac{8 \lambda}{\pi^2 g} \frac{L_i}{D_i^5} |q_i| \quad (3.11)$$

$$k_i = \sqrt{\frac{\pi^2 g}{8 \lambda} \frac{D_i^5}{L_i}} \cdot \sqrt{\frac{1}{|h_i|}} \quad (3.12)$$

Las expresiones anteriores están referidas a elementos de tubería como el que se muestra en la Figura 1, con los que está formada la red de tuberías en estudio.

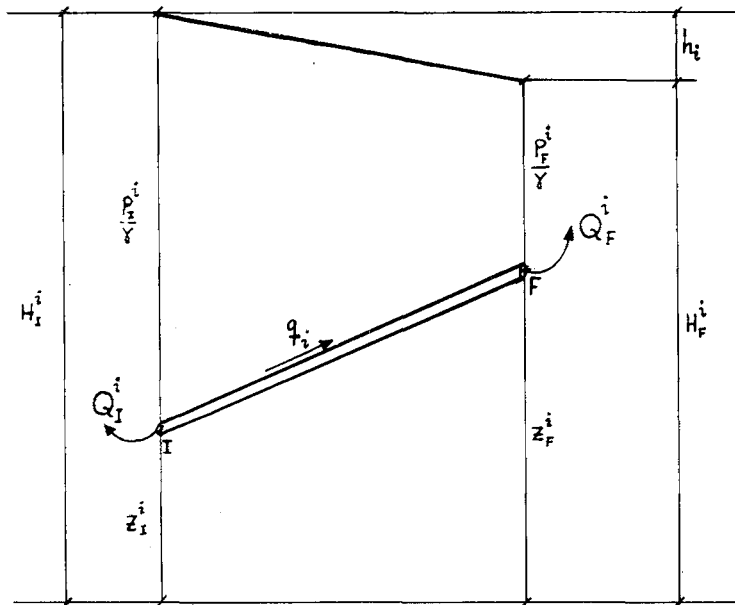


Figura 1: Elemento de Tubería

Como se deduce de las expresiones (3.11) y (3.12), los valores  $a_i$  y  $k_i$  son dependientes no sólo de las características intrínsecas de la tubería, sino también del flujo que la atraviesa.

También es importante señalar que las variables  $h_i$ ,  $q_i$  son magnitudes con signo, de tal manera que dicho signo expresa el sentido de circulación del flujo, positivo si discurre desde  $I$  hasta  $F$ , y negativo en caso contrario.

Finalmente, al objeto de relacionar adecuadamente en forma genérica los diversos elementos de tubería que componen la red, definimos sobre ésta como positivos los caudales que salen de los nudos, según (3.3), lo que nos lleva a establecer una relación entre el caudal circulante por un elemento, y el caudal que entra o sale de los nudos extremos de la tubería, hacia los elementos de tubería conectados a ellos, que según la Figura 1, es:

$$\begin{aligned} Q_I^i &= -q_i = -k_i h_i = -k_i (H_I^i - H_F^i) \\ Q_F^i &= +q_i = k_i h_i = k_i (H_I^i - H_F^i) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Expresado en forma matricial sería:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_I^i \\ Q_F^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_i & k_i \\ k_i & -k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_I^i \\ H_F^i \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{Q}^i &= \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{H}^i \end{aligned} \tag{3.14}$$

### EXPRESION MATRICIAL DE LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD

Con los criterios de signos antes apuntados, las ecuaciones de continuidad pueden aplicarse a los nudos de la red. Si existen  $N$  nudos, podemos obtener  $(N-1)$  ecuaciones de continuidad, que pueden expresarse matricialmente en la forma

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} \tag{3.15}$$

La matriz  $\mathbf{E}$  posee unas características muy especiales, ya que está formada por ceros y unos, positivos o negativos. Puede deducirse además, que en cada columna sólo existirán dos valores distintos de cero, que serán los elementos correspondientes a las filas que coinciden con los nudos inicial y final del elemento de tubería asociado a la columna en cuestión.

$$\begin{array}{l} \text{Elemento de Tubería: } 1 \\ \text{Nudo inicial: } I^1 \\ \text{Nudo final: } F^1 \end{array} \quad \mathbf{E} = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{fila } I^1 \\ \\ \\ \text{fila } F^1 \end{array} \\ \text{Columna } 1 \end{array}$$

Las ecuaciones de continuidad pueden expresarse también en la forma:

$$\mathbf{q} = \mathbf{b} \hat{\mathbf{Q}} \quad (3.16)$$

En este caso, caben distinguir dos situaciones. La primera se corresponde con el caso de redes ramificadas, en las que se cumple simplemente

$$M = 0 \Rightarrow R = (N-1) + M = N-1 \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{E}^{-1} \quad (3.18)$$

Sin embargo, en el caso de redes malladas el problema es más complejo, ya que entonces la matriz  $\mathbf{E}$  no es cuadrada, y los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{Q}$  no tienen la misma dimensión. En este caso para aplicar la expresión (3.16) descompondremos los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\hat{\mathbf{Q}}$  en la forma siguiente:

$\mathbf{q}_I$  = vector formado por un subconjunto de las variables  $\mathbf{q}_i$  asociado a una submatriz  $\mathbf{E}_I$  que tenga un determinante distinto de cero. La dimensión de  $\mathbf{q}_I$  será de  $(N-1)$ .

$\mathbf{q}_H$  = vector formado por un subconjunto de variables  $\mathbf{q}_i$  que completan el vector  $\mathbf{q}$  respecto de  $\mathbf{q}_I$ . Su dimensión será por lo tanto igual a  $M$ .

$$\mathbf{q}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^T & \mathbf{q}_H^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{q}_H^T \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

En este caso, las dimensiones de la matriz  $\mathbf{b}$  serán de  $R \times R$ , y el vector  $\mathbf{Q}$  será también de dimensión  $R$ , que en el caso de redes ramificadas, según (3.17), se reducen obviamente a  $(N-1) \times (N-1)$  y  $(N-1)$  respectivamente.

#### EXPRESION MATRICIAL DE LAS ECUACIONES DE LA ENERGIA

Las ecuaciones de la energía a nivel de elemento se expresan sencillamente, a la vista de la Figura 1, en la forma:

$$h_i = H_I^i - H_F^i \quad (3.21)$$

Estas ecuaciones pueden ser formuladas conjuntamente para todos los elementos de la red en la forma:

$$\mathbf{h} = \underline{\alpha} \mathbf{H} \quad (3.22)$$

La matriz  $\underline{\alpha}$  posee unas características muy especiales, ya que cada fila estará formada por un conjunto de ceros, salvo en las columnas correspondientes a los nudos inicial y final, en los que aparecerá un uno, positivo en el primero y negativo en el segundo.

$$\begin{array}{l} \text{Elemento de tubería: } 1 \\ \text{Nudo Inicial: } I^1 \\ \text{Nudo Final: } F^1 \end{array} \quad \alpha = \begin{array}{c} I^1 \qquad \qquad \qquad F^1 \\ \left[ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \text{ fila } 1 \end{array}$$

Las ecuaciones de la energía también pueden expresarse en la forma:

$$\hat{H} = C \cdot h \quad (3.23)$$

Al igual que en el caso de las ecuaciones de la continuidad, cabe distinguir dos situaciones. Si la red es ramificada se cumplirá (3.17) y por lo tanto

$$\hat{H} = H \Rightarrow C = \alpha^{-1} \quad (3.24)$$

Cuando nos encontramos en el caso de redes malladas, entonces, la matriz  $\alpha$  no es cuadrada, y la expresión (3.23) agrupa no sólo a las ecuaciones de la energía de los elementos de la red, sino también a las ecuaciones adicionales de la energía que pueden plantearse en las distintas mallas de la red, que pueden obtenerse efectuando la misma descomposición realizada en el caso anterior, obteniendo

$$\hat{h}^T = \begin{bmatrix} h_I^T & h_H^T \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

$$\hat{H}^T = \begin{bmatrix} H^T & 0^T \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Consecuentemente, las dimensiones de la matriz  $C$  serán de  $R \times R$ , y el vector  $\hat{H}$  será de dimensión  $R$ .

Finalmente, cabe decir también que, por la forma en que se han definido las matrices  $E$  y  $\alpha$ , es obvio deducir que existe una relación entre ambas:

$$E = -\alpha^T \quad (3.27)$$

Esta relación será deducida con posterioridad.

## RELACIONES DE CONTRAGREDIENCIA

Si consideramos una red en régimen estacionario en la que no se producen pérdidas, de tal forma que la entrada o salida de flujo se produce exclusivamente por los nudos de la red, debe cumplirse que la potencia total consumida por el sistema debe ser igual a la potencia suministrada.

Por un lado, la potencia consumida en un elemento de tubería es

$$W_i = q_i h_i \quad (3.28)$$

El total de la potencia consumida por los elementos de tubería de la red será pues

$$\sum_{i=1}^R q_i h_i = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{h} \quad (3.29)$$

Por otro lado, en los nudos de la red se libera o suministra potencia a la red, según que el flujo salga o entre en el nudo. Si tomamos como altura piezométrica de referencia la de un nudo cualquiera, la potencia liberada o suministrada a la red puede expresarse en la forma:

$$\sum_{i=1}^{N-1} Q_i \cdot H_i = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{H} \quad (3.30)$$

Por lo tanto, es necesario que se cumpla

$$\mathbf{q}^T \mathbf{h} + \mathbf{Q}^T \mathbf{H} = 0 \quad (3.31)$$

Si en esta última expresión sustituimos la expresión (3.22), tendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T (\underline{\alpha} \mathbf{H}) + \mathbf{Q}^T \mathbf{H} &= (\mathbf{q}^T \underline{\alpha} + \mathbf{Q}^T) \cdot \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{q}^T \underline{\alpha} + \mathbf{Q}^T &= 0 \Rightarrow \mathbf{Q} = -\underline{\alpha}^T \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Teniendo en cuenta (3.15) se deduce finalmente

$$\mathbf{E} = -\underline{\alpha}^T \quad (3.33)$$

Procediendo en forma análoga, si sustituimos primeramente (3.20) y (3.26) en (3.31) tendremos

$$\mathbf{q}^T \mathbf{h} + \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{H}} = 0 \quad (3.34)$$

Si en esta última expresión sustituimos ahora la (3.16) tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{Q}} \Rightarrow \mathbf{q}^T = \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{b}^T \\ (\hat{\mathbf{Q}}^T \cdot \mathbf{b}^T) \mathbf{h} + \hat{\mathbf{Q}}^T \hat{\mathbf{H}} &= 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{Q}}^T \cdot (\mathbf{b}^T \mathbf{h} + \hat{\mathbf{H}}) = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{b}^T \mathbf{h} + \hat{\mathbf{H}} &= 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{H}} = -\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{h} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Teniendo en cuenta ahora (3.23) se deduce

$$\mathbf{C} = -\mathbf{b}^T \quad (3.36)$$



## METODO DE LOS NUDOS

Este método consiste en establecer las ecuaciones de campo tomando como incógnitas las alturas piezométricas de los nudos, o mejor dicho, las alturas piezométricas de  $(N-1)$  nudos referidas a uno que sirve de base.

Si tomamos la ecuación (3.15) y sustituimos en ella las (3.10), (3.22) y (3.33) tendremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{E} \mathbf{q} = E (\mathbf{K} \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{\alpha} \cdot \mathbf{H} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{Q} &= \mathbf{IK} \cdot \mathbf{H} ; \mathbf{IK} = \mathbf{E} \mathbf{K} \underline{\alpha} = -\underline{\alpha}^T \mathbf{K} \underline{\alpha} \end{aligned} \quad (4.1)$$

La matriz  $\mathbf{IK}$  será de orden  $(N-1) \times (N-1)$  y nos relaciona los caudales en los nudos con las alturas piezométricas existentes en éstos. Como ya se ha indicado anteriormente, el sistema (4.1) es claramente no lineal, habida cuenta de la expresión de los elementos de la matriz  $\mathbf{K}$  dada en (3.8) que unido a las expresiones (3.21) hacen que los coeficientes de  $\mathbf{IK}$  dependan de las propias variables  $H_i$  en las que se han expresado las ecuaciones de campo.

Una alternativa para la obtención de las ecuaciones (4.1) es utilizar directamente las ecuaciones (3.14) de cada uno de los elementos que componen la red, teniendo en cuenta la conectividad de estos elementos en forma implícita, formando las matrices orladas correspondientes. Así, para un elemento de tubería "i" definido entre el nudo "s" y el nudo "t", la ecuación (3.14) puede simbolizarse como:

$$\mathbf{Q}_o^i = \mathbf{k}_o^i \cdot \mathbf{H} \quad (4.2)$$

$$(\mathbf{Q}_o^i)^T = \{0 \ 0 \ \dots \ Q_s^i \ 0 \ 0 \ \dots \ Q_t^i \ 0 \ \dots \ 0\} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{k}_o^i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \hline & -k_i & & k_i & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \hline & k_i & & -k_i & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ \\ t \\ \\ t \end{matrix} \quad (4.4)$$

Obviamente, con estas notaciones, la ecuación de continuidad se expresa directamente en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{i=1}^R \mathbf{Q}_o^i = \sum_{i=1}^R \mathbf{k}_o^i \cdot \mathbf{H} = \left( \sum_{i=1}^R \mathbf{k}_o^i \right) \cdot \mathbf{H} \\ \Rightarrow \mathbf{Q} &= \mathbf{IK} \cdot \mathbf{H} ; \mathbf{IK} = \sum_{i=1}^R \mathbf{k}_o^i \end{aligned} \quad (4.5)$$

De esta forma podemos obtener la matriz  $\mathbf{IK}$  directamente como suma o ensamblaje de las matrices  $\mathbf{k}_o^i$ .

Es de hacer notar que este método es aplicable, sin ninguna variación, tanto a redes ramificadas como a redes malladas, y que en cualquier caso, la matriz  $\mathbf{IK}$  es simétrica, como se deduce del proceso de formación antes descrito.

Finalmente, cabe resaltar en este método el que para obtener las ecuaciones de campo, tanto por la vía indirecta (4.1) como por el procedimiento directo (4.5), sólo es necesario partir de una información geométrica inmediata, como es la conectividad de los elementos que forman la red.

Una vez resueltas las ecuaciones de campo, es decir el vector  $\mathbf{H}$ , podemos obtener mediante (3.22) y (3.10) las pérdidas de carga y los caudales en cada elemento de tubería, con lo que el problema queda totalmente resuelto.

### METODO DE LOS CAUDALES

Como alternativa al método de los nudos, podemos expresar las ecuaciones de campo de otra forma, usando para ello como incógnitas los caudales en cada una de las ramas de la red de tuberías.

Si tomamos la ecuación (3.23) y sustituimos en ella las (3.9), (3.16) y (3.36) tendremos:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{C} \mathbf{h} = (\mathbf{A} \mathbf{q}) = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{b} \hat{\mathbf{Q}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{H}} &= \mathbf{IA} \cdot \hat{\mathbf{Q}} ; \mathbf{IA} = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{b} = -\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b}\end{aligned}\quad (5.1)$$

La matriz  $\mathbf{IA}$  será de orden  $R \times R$ , y nos relaciona los caudales en los nudos con las alturas piezométricas en éstas, pero de manera diferente a la ecuación (4.1) obtenida anteriormente.

Es evidente que el sistema de ecuaciones es no lineal, ya que los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$  dependen de las propias variables  $q_i$ , según se desprende de las expresiones (3.7). Asimismo, de la forma (5.1) se deduce que la matriz  $\mathbf{IA}$  es simétrica.

El problema que se presenta con este método es que está planteado en función de la matriz  $\mathbf{b}$ , que no es deducible en forma inmediata por todos los casos, por lo que es preciso diferenciar entre redes ramificadas y redes malladas para operar adecuadamente.

### METODO DE LOS CAUDALES EN REDES RAMIFICADAS

En este caso es posible obtener directamente las incógnitas del problema, ya que la expresión (3.15) es un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes  $\mathbf{E}$  es una matriz cuadrada de orden  $(N-1) \times (N-1)$ , que puede ser formada aplicando la expresión (3.33), es decir, a partir de la tabla de conectividades de la red. Así pues, puede resolverse el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{E}^{-1} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{Q} \quad (5.2)$$

Como resultado obtendremos el vector  $\mathbf{q}$  de caudales circulantes. Asimismo, también obtenemos la matriz  $\mathbf{b}$ , que puede ser sustituida en (5.1) y con ello calcular las alturas piezométricas de los nudos, quedando pues totalmente resuelto el problema.

### METODO DE LOS CAUDALES EN REDES MALLADAS

En el caso de redes malladas no puede realizarse el paso indicado en (5.2), al ser la matriz  $\mathbf{E}$  rectangular de dimensiones  $(N-1) \times R$ . Debemos por tanto utilizar otro procedimiento para llegar a resolver el problema.

Vamos a desarrollar un procedimiento de análisis que necesite sólo de la misma información que en el caso de aplicar el Método de los Nudos, es decir, únicamente la conectividad de los elementos de la red. Para ello, partimos de las expresiones (3.33) y (3.15), igual que en el caso de redes ramificadas, realizando la siguiente descomposición:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} = [\mathbf{E}_I : \mathbf{E}_H] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_I \mathbf{q}_I + \mathbf{E}_H \mathbf{q}_H = \mathbf{Q} \quad (5.3)$$

despejando tendremos:

$$\mathbf{E}_I \mathbf{q}_I = \mathbf{Q} - \mathbf{E}_H \mathbf{q}_H \Rightarrow \mathbf{q}_I = \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \mathbf{q}_H \quad (5.4)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I^{-1} & | & -\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \\ \mathbf{0} & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix} = \mathbf{b} \hat{\mathbf{Q}} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_o \mid \mathbf{b}_H] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I^{-1} & | & -\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \\ \mathbf{0} & & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Hemos obtenido finalmente la matriz  $\mathbf{b}$  deseada, a partir de la cual podremos resolver el resto del problema

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_I^{-1})^T & \mathbf{0}^T \\ -(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T & \mathbf{I}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_o^T \\ \mathbf{b}_H^T \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\mathbf{A} &= -\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_o^T \\ \mathbf{b}_H^T \end{bmatrix} \mathbf{A} [\mathbf{b}_o \mid \mathbf{b}_H] = \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_o^T \mathbf{A} \mathbf{b}_o & | & -\mathbf{b}_o^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H \\ -\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_o & & -\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}\mathbf{A}_{o0} & \mathbf{I}\mathbf{A}_{oH} \\ \mathbf{I}\mathbf{A}_{H0} & \mathbf{I}\mathbf{A}_{HH} \end{bmatrix} \quad (5.7) \end{aligned}$$

Una vez obtenida la matriz  $\mathbf{IA}$  podemos ya sustituir en (5.1), donde operando tendremos

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{IA} \hat{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{IA}_{00} & \mathbf{IA}_{0H} \\ \mathbf{IA}_{H0} & \mathbf{IA}_{HH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{IA}_{00} \mathbf{Q} + \mathbf{IA}_{0H} \mathbf{q}_H \quad (5.8)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{IA}_{H0} \mathbf{Q} + \mathbf{IA}_{HH} \mathbf{q}_H \quad (5.9)$$

De la última expresión podemos despejar  $\mathbf{q}_H$ :

$$\mathbf{q}_H = -\mathbf{IA}_{HH}^{-1} \cdot \mathbf{IA}_{H0} \mathbf{Q} \quad (5.10)$$

El resto de los caudales circulantes  $\mathbf{q}_I$  se obtiene ahora sin más que sustituir la expresión anterior en la (5.4)

$$\mathbf{q}_I = \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q} - \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \mathbf{q}_H = \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q} + \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \mathbf{IA}_{HH}^{-1} \mathbf{IA}_{H0} \mathbf{Q} \quad (5.11)$$

Finalmente, sustituyendo en (5.8) obtendremos las alturas piezométricas, con lo cual se ha resuelto el problema totalmente

$$\mathbf{H} = \mathbf{IA}_{00} \mathbf{Q} + \mathbf{IA}_{0H} \mathbf{q}_H = \mathbf{IA}_{00} \mathbf{Q} - \mathbf{IA}_{0H} \mathbf{IA}_{HH}^{-1} \mathbf{IA}_{H0} \mathbf{Q} \quad (5.12)$$

Todas las expresiones anteriores pueden desarrollarse con mayor detalle, si realizamos otra descomposición adicional

$$\mathbf{A} = \text{diag} [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_R] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_H \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{A}_I = \text{diag} [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{N-1}] \quad (5.14)$$

$$\mathbf{A}_H = \text{diag} [a_N \ a_{N+1} \ \dots \ a_R] \quad (5.15)$$

Sustituyendo en (5.7) tendremos

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \mathbf{A}_{00} &= -\mathbf{b}_0^T \mathbf{A} \mathbf{b}_0 \equiv -[(\mathbf{E}_I^{-1})^T \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= -(\mathbf{E}_I^{-1})^T \mathbf{A}_I \mathbf{E}_I^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \mathbf{A}_{0H} &= -\mathbf{b}_0^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H = -[\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ &= (\mathbf{E}_I^{-1})^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \mathbf{A}_{H0} &= -\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_0 = -[-(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{I}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I^{-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I \mathbf{E}_I^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \mathbf{A}_{HH} &= -\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H = -[-(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{I}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ &= -(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) - \mathbf{A}_H \end{aligned} \quad (5.16)$$

Sustituyendo ahora en las expresiones (5.10), (5.11) y (5.12) tendremos finalmente

$$\mathbf{q}_H = [(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) + \mathbf{A}_H]^{-1} \cdot (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q}) \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_I &= \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q} - (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) \cdot [(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) + \mathbf{A}_H]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -(\mathbf{E}_I^{-1})^T \mathbf{A}_I \mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q} + (\mathbf{E}_I^{-1})^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) \cdot \\ &\quad \cdot [(\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H) + \mathbf{A}_H]^{-1} \cdot (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{E}_H)^T \mathbf{A}_I (\mathbf{E}_I^{-1} \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Estas expresiones nos indican claramente que el problema así planteado y resuelto, sólo necesita como información la conectividad de la red de tuberías, además naturalmente de las características específicas de cada elemento de tubería. Esto supone una alternativa al planteamiento clásico, que parte de las ecuaciones de continuidad (3.15) más las ecuaciones de la energía aplicadas a todas las mallas de la red, lo que exige una información adicional, que es la topología de cada una de las mallas, es decir, las ramas que las componen. Con ello, se plantean las  $M$  ecuaciones adicionales necesarias, que son precisamente las que aparecen en la expresión (5.9), obteniéndose finalmente un sistema de  $R$  ecuaciones que puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} = \mathbf{E}_I \mathbf{q}_I + \mathbf{E}_H \mathbf{q}_H \\ \mathbf{I} \mathbf{A}_{HH} \mathbf{q}_H + \mathbf{I} \mathbf{A}_{H0} \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{E}_I & \mathbf{E}_H \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \mathbf{A}_{HH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ -\mathbf{I} \mathbf{A}_{H0} \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones proporciona el vector  $\mathbf{q}$ , es decir las incógnitas del problema planteado como método de los caudales.

La diferencia del planteamiento clásico respecto del procedimiento matricial representado por las expresiones (5.6), (5.7), (5.10) y (5.11), estriba en definitiva en realizar en primer lugar una reducción parcial de las ecuaciones (5.3), de la que puede obtenerse como resultado la matriz  $\mathbf{b}$ , y con ello soslayar la información adicional de la topología de las mallas, derivando las ecuaciones de malla a partir de la matriz  $\mathbf{b}$ , en vez de obtenerlas directamente, como sucede en el planteamiento clásico.

## TRATAMIENTO DE CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS

Cuando la red de tuberías está conectada a varios depósitos en diversos nudos, se producen en éstos unas condiciones de contorno diferentes que en el resto de los nudos, con lo que, en definitiva, tendremos una serie de nudos en los que serán conocidas las alturas piezométricas, mientras que en el resto serán conocidos los caudales salientes. Estaremos pues en un caso de condiciones de contorno mixtas, que será necesario tratar adecuadamente en cada uno de los métodos antes descritos.

### CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS EN EL METODO DE LOS NUDOS

En este método la forma de proceder consiste en descomponer el sistema (4.5) en la forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_L \\ \mathbf{Q}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lr} \\ \mathbf{K}_{rl} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_l \\ \mathbf{H}_r \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

con el siguiente significado:

$Q_l, H_l$  : Conjunto de los nudos de la red con  $H_i$  desconocidos y  $Q_i$  conocidos

$Q_r, H_r$  : Conjunto de los nudos de la red con  $Q_i$  desconocidos y  $H_i$  conocidos.

Operando en la expresión anterior tendremos:

$$Q_l = K_{ll} H_l + K_{lr} H_r \quad Q_l - K_{lr} \cdot H_r = K_{ll} \cdot H_l$$

$$Q_r = K_{rl} H_l + K_{rr} \cdot H_r \quad -K_{rr} H_r = K_{rl} H_l - Q_r$$

$$\begin{bmatrix} Q_l & -K_{lr} H_r \\ & -K_{rr} H_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ll} & 0 \\ K_{rl} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_l \\ Q_r \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Con lo que hemos obtenido finalmente un nuevo sistema de ecuaciones en función de las incógnitas  $H_l$  y  $Q_r$  del problema.

#### CONDICIONES DE CONTORNO MIXTAS EN EL METODO DE LOS CAUDALES

El procedimiento es análogo al descrito en el apartado anterior. Así, para el caso de redes ramificadas, partamos de la ecuación (5.1), descomponiéndola:

$$H = \begin{bmatrix} H_l \\ H_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IA_{ll} & IA_{lr} \\ IA_{rl} & IA_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_l \\ Q_r \end{bmatrix}$$

$$H_l = IA_{ll} Q_l + IA_{lr} Q_r \quad (6.3)$$

$$H_r = IA_{rl} Q_l + IA_{rr} Q_r \quad (6.4)$$

De esta última expresión podemos obtener

$$IA_{rr} Q_r = H_r - IA_{rl} Q_l \quad Q_r = IA_{rr}^{-1} [H_r - IA_{rl} Q_l] \quad (6.5)$$

Conocido  $Q_r$  pueden ya obtenerse los caudales circulantes de la ecuación (5.2), y con la ecuación (6.3) se obtienen las alturas piezométricas desconocidas.

En el caso de redes malladas, debemos proceder primeramente a una descomposición de la expresión (5.5) en la forma

$$q = b \hat{Q} = | b_{ol} \quad ; \quad b_{or} \quad ; \quad b_H | \begin{bmatrix} Q_l \\ Q_r \\ q_H \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Esta descomposición de la matriz  $\mathbf{b}$  aplicada a la expresión (5.1) nos produce a su vez

$$\begin{aligned} \mathbf{IA} &= -\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{b} = - \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{ol} \\ \mathbf{b}_{or} \\ \mathbf{b}_H \end{bmatrix} \mathbf{A} [\mathbf{b}_{ol} \ \mathbf{b}_{or} \ \mathbf{b}_H] = \\ &= \begin{bmatrix} -\mathbf{b}_{ol} \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_{ol} & -\mathbf{b}_{ol} \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_{or} & -\mathbf{b}_{ol} \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_H \\ -\mathbf{b}_{or} \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_{ol} & -\mathbf{b}_{or} \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_{or} & -\mathbf{b}_{or} \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_H \\ -\mathbf{b}_H \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_{ol} & -\mathbf{b}_H \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_{or} & -\mathbf{b}_H \ \mathbf{A} \ \mathbf{b}_H \end{bmatrix} \\ \mathbf{IA} &= \begin{bmatrix} \mathbf{IA}_{ll} & \mathbf{IA}_{lr} & \mathbf{IA}_{lH} \\ \mathbf{IA}_{rl} & \mathbf{IA}_{rr} & \mathbf{IA}_{rH} \\ \mathbf{IA}_{Hl} & \mathbf{IA}_{Hr} & \mathbf{IA}_{HH} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Sustituyendo en (5.1) y operando tendremos

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_l \\ \mathbf{H}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{IA} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_l \\ \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{H}_l = \mathbf{IA}_{ll} \mathbf{Q}_l + \mathbf{IA}_{lr} \mathbf{Q}_r + \mathbf{IA}_{lH} \mathbf{q}_H \quad (6.8)$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{IA}_{rl} \mathbf{Q}_l + \mathbf{IA}_{rr} \mathbf{Q}_r + \mathbf{IA}_{rH} \mathbf{q}_H \quad (6.9)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{IA}_{Hl} \mathbf{Q}_l + \mathbf{IA}_{Hr} \mathbf{Q}_r + \mathbf{IA}_{HH} \mathbf{q}_H \quad (6.10)$$

Las dos últimas ecuaciones las podemos agrupar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_r & -\mathbf{A}_{rl} \ \mathbf{Q}_l \\ -\mathbf{A}_{Hl} \ \mathbf{Q}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rH} \\ \mathbf{A}_{Hr} & \mathbf{A}_{HH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r \\ \mathbf{q}_H \end{bmatrix} \quad (6.11)$$



Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos los vectores  $\mathbf{Q}_r$  y  $\mathbf{q}_H$ , que sustituidos en (6.6) y (6.8) nos permiten obtener tanto los caudales circulantes como las alturas piezométricas en los nudos desconocidos.

Al igual que en el problema con condiciones de contorno puras, la diferencia con el procedimiento clásico radica en que no es precisa una información adicional para obtener las ecuaciones de las pseudo-mallas, que son precisamente las que se engloban en la expresión (6.9) de la formulación aquí desarrollada.

### INCLUSION DE BOMBAS EN EL MODELO DE LA RED DE TUBERIAS

En general, una bomba o estación de bombeo, puede representarse dentro de la red como un elemento especial, cuyo comportamiento será diferente de los elementos pasivos de la red, esto es, las ramas o tuberías.

En caso de que el comportamiento puede ser expresado analíticamente, basta con formular dichas expresiones e incluirlas en las ecuaciones de campo del sistema completo.

El modelo que usualmente se utiliza para representar el comportamiento hidráulico de una bomba, consiste en aproximar la relación entre el caudal circulante y la altura de presión que suministra la bomba mediante un polinomio de segundo grado del tipo:

$$h_p = c_0 + c_1 q + c_2 q^2 \quad (7.1)$$

Es decir, mediante una parábola de segundo grado con eje vertical, siendo pues

$$s = c_0 - \frac{c_1^2}{4 c_2} \quad (7.2)$$

$$t = -\frac{c_1}{2 c_2}$$

Si la bomba está conectada entre los nudos  $I$  y  $F$ , podremos representar el efecto adicional de la bomba sobre el resto de los efectos ya incluidos en la forma simbólica

$$H_I - H_F = -h_p = h_i \quad (7.3)$$

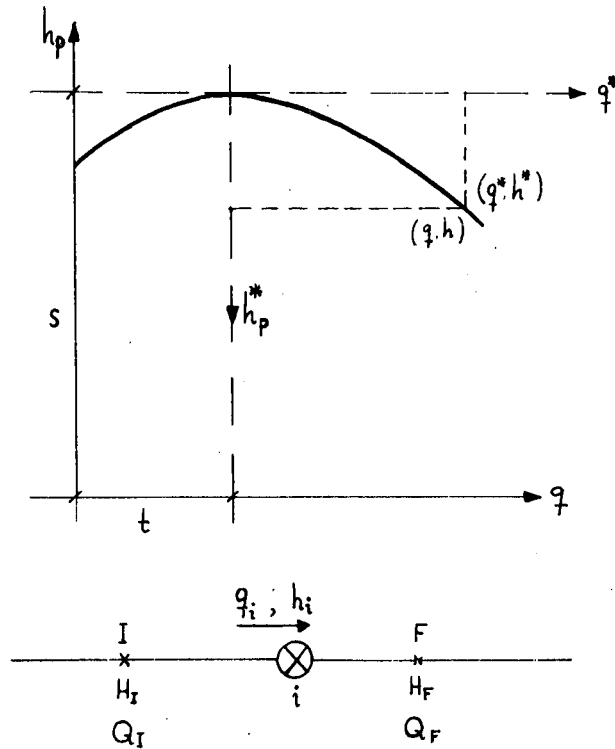


Figura 2. Elemento Bomba.

$$h_i = -h_p = -c_0 - c_1 q_i - c_2 q_i^2 = \left[ -\frac{c_0}{|q_i|} - c_1 - c_2 |q_i| \right] q_i$$

$$h_i = a_i q_i \quad (7.4)$$

$$a_i = -\left( \frac{c_0}{|q_i|} - c_1 - c_2 |q_i| \right) \quad (7.5)$$

Cuando entre los nudos  $I$  y  $F$  existen además tramos de tubería o accesorios que producen pérdidas de carga significativas, puede añadirse el comportamiento de estos elementos pasivos sin más que sumar a (7.5) el valor que corresponda:

$$h_i = -h_p + h_i^a = \left[ -\frac{c_0}{|q_i|} - c_1 - c_2 |q_i| \right] q_i + \left( -\frac{8 \lambda L_i}{\pi^2 g D_i^5} \cdot |q_i| \right) q_i$$

$$\Rightarrow h_i = a_i q_i$$

$$a_i = \left[ -\frac{c_0}{|q_i|} - c_1 + \left( \frac{8 \lambda L_i}{\pi^2 g D_i^5} - c_2 \right) |q_i| \right] \quad (7.6)$$

Así pues, la consideración de bombas (y en general de cualquier otro dispositivo) dentro de las ecuaciones de campo globales, se reduce simplemente a deducir el comportamiento de dicho elemento, y formularlo convenientemente. La dificultad no es pues de planteamiento, sino de resolución posterior de las ecuaciones de campo resultantes.

#### REFERENCIAS

1. V.L. Streeter y E.B. Wylie. *Mecánica de los Fluidos*. Editorial Mc. Graw-Hill, (1975).
2. D. Stephenson. *Pipeflow Analysis*. Editorial Elsevier, (1984).
3. R.W. Jepsson. *Analysis of Flow in Pipe Networks*. Editorial Ann Arbor Science, (1983).
4. T.M. Walski. *Analysis of Water Distribution Systems*. Editorial Van Nostrand, (1984).
5. A.G. Collins y R.L. Johnson. "Finite-Element Method for Water Distribution Networks". *J.American Water ASS.* **67**(7), 385-389, (1975).
6. M. Collins, L. Cooper, R. Helgason, J. Kennington y L. Leblanc. "Solving the Pipe Network Analysis Problem using Optimization Techniques". *Management Science* **24** (7) 747-760, (1978).
7. M.F. Rubinstein. *Matrix Computer Analysis of Structures*. Editorial Prentice-Hall, (1966).
8. M.F. Rubinstein. *Structural Systems Statics, Dynamics and Stability*. Prentice Hall, (1970).
9. J.S. Przemieniecki. *Theory of Matrix Structural Analysis*. Editorial Mc. Graw-Hill, (1968).