Proyecto Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Implementación y resolución del problema de Aircarft routing para una compañía aérea

Autor: María del Rosario Prieto García

Tutor: José María del Castillo Granados

Dpto. Ingeniería y Ciencia de los Materiales y del Transporte
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Implementación y resolución del problema de Aircarft routing para una compañía aérea

Autor:

María del Rosario Prieto García

Tutor:

José María del Castillo Granados

Catedrático de Universidad

Dpto. de Ingeniería y Ciencia de los Materiales y del Transporte
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Carrera: Implementación y resolución del problema de Aircarft routing para una compañía aérea

Autor: María del Rosario Prieto García

Tutor: José María del Castillo Granados

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis profesores

Agradecimientos

Este proyecto supone el fin de una etapa de mi vida y el comienzo de otra nueva. Comencé hace siete años sin saber si la aeronáutica sería lo mío, y hoy por hoy sé que no me equivoqué al elegir. A lo largo de todos estos años de aprendizaje he tenido mucha gente a mi lado que me ha apoyado y animado en cada momento. En especial mi familia, que siempre me ha brindado su ayuda y han hecho que momentos amargos lo sean menos. Aprendí a leer antes de tiempo gracias a mis padres, y es que gracias a ellos he llegado hasta aquí, pues ellos me han enseñado a que todo se consigue con constancia y trabajo duro. También he tenido la oportunidad de aprender de buenos profesores y compañeros que han hecho que este camino haya sido más fácil. Es por ello que tengo que agradecerles a todas esas personas todo lo que me han aportado.

María del Rosario Prieto García

Sevilla, 2020

Resumen

La planificación de vuelos genera un plan de vuelo para la aerolínea. Las deciones tomadas en el problema de asignación de flota descompone el plan de vuelo, asociando cada vuelo a un tipo de avión. El siguiente paso en la planificación de una aerolínea es la asignación de aeronaves o aircraft routing. El objetivo de la asignación de aeronaves de determinar qué vuelos va a realizar cada avión de cada flota. La secuencia de vuelos que va a realizar un avión durante un periodo de tiempo recibe el nombre de rotación. Las rotaciones se extienden a lo largo de varios días (de 3 a 7 días), durante los cuales hay que garantizar el mantenimiento rutinario de la aeronave.

Para la resolución del problema de asignación de aviones, se plantea un modelo de partición de conjuntos (set-partitioning), donde habiendo varias tareas programadas (vuelos) y varios recursos (aviones), hay que encontrar la manera óptima de cubrir cada tarea con un solo recurso. El pilar fundamental de este modelo matemático es la matriz de set-partitioning donde las columnas representan todas las posibles rotaciones y las filas representan los vuelos.

Previo a la resolución del problema de set-partitioning habrá que generar todas las rotaciones factibles. Estas rotaciones tienen que cumplir ciertas condiciones como el tiempo de conexión mínimo (turn-around), restricciones de mantenimiento, rutas en ciclo, etc. Se propondrán distintas funciones objetivo donde se penalizarán o se favorecerán ciertas rotaciones según la finalidad que se pretenda alcanzar.

La eficacia de este procedimiento se demostrará a partir de los datos de una aerolínea ficticia. Durante todo el proceso se utilizará el sofware de programación Matlab y de su Toolbox de optimización. Se llegará a una solución óptima, aunque se conocerán las limitaciones de abordar un procedimiento secuencial en la planificación y de utilizar el modelo set-partitioning en la resolución del problema de asignación de aeronaves.

Índice

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Notación

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertenecer
$\sum_{j \in N}$	Sumatorio para todo j perteneciente al conjunto N
$\max$	Maximizar
$\min$	Minimizar
$\leq$	Menor o igual
$\geq$	Mayor o igual
f^T	Transpuesto del vector f

1 INTRODUCCIÓN

El uso de la aviación comercial se ha incrementado considerablemente en las últimas décadas. Este rápido crecimiento se atribuye a factores como son, las leyes de desregularizción de la aviación, los acuerdos bilaterales y de cielo abierto entre gobiernos, la globalización, la creciente confianza en el avión como medio de transporte seguro, el aumento de calidad de vida, etc. Esta demanda creciente ha hecho que cada vez más aerolíneas quieran aprovechar las oportunidades que se presentan en los diferentes mercados. El creciente número de compañías aéreas comerciales ha puesto más presión en su gestión para buscar continuamente beneficios, reducir costes y aumentar ingresos. Hoy en día, las aerolíneas buscan actuar de manera eficiente en un entorno competitivo que sólo proporciona beneficios marginales. Varias tácticas se han desarrollado y utilizado para planificar y operar mejor las aerolíneas.

La gestión de la aerolínea se realiza en dos fases: fase estratégica y fase táctica. Durante la fase estratégica se toman decisiones mucho tiempo antes de su implementación, que requieren una inversión monetaria considerable y que van a tener un impacto sobre la aerolínea a largo plazo, por ejemplo, la expansión de la aerolínea, el tamaño de la flota, la ubicación de las bases de mantenimiento, etc. La fase táctica incluye decisiones de planificación y decisiones operacionales. Por un lado, las decisiones de planificación se toman pocos meses antes de implementarse y buscan la utilización eficiente de los recursos que dispone la aerolínea para maximizar los ingresos. Estas incluyen: la previsión de la demanda, la realización de los horarios de vuelo, la asignación de flota, el asignación de aeronaves y la asignación de tripulación. Por otro lado, las decisiones operacionales se toman incluso horas antes de implementarse, y suelen ser la respuesta a incidentes imprevistos como, por ejemplo, las condiciones meteorológicas adversas, un vuelo retrasado o falta de personal de tripulación. Este documento se va a centrar en la fase táctica, en concreto, en la asignación de rutas a las aeronaves de una flota (en inglés, aircraft routing).

Las aerolíneas comienzan su planificación táctica con la generación de un programa o plan de vuelo, donde se diseñan los tramos de vuelo más rentables y los horarios de esos tramos. Un tramo (en inglés, Flight leg) es un vuelo que tiene un origen y un destino específico a una hora de salida determinada. Por lo tanto, el plan de vuelo de una aerolínea es una lista que contiene el identificador de los tramos que van a volar, origen, destino, hora de salida y llegada del vuelo y los días de la semana que opera ese vuelo. Para servicios nacionales, el plan de vuelo suele contener los vuelos diarios, mientras que, para los internacionales, abarca una semana.

La decisión de una aerolínea de volar ciertos vuelos dependerá principalmente de las previsiones de demanda del mercado, las características operativas de las aeronaves disponibles, la mano de obra disponible y los reglamentos, es decir, las decisiones estratégicas de la aerolínea y de las estrategias de las aerolíneas competidoras. El número de aeropuertos y las frecuencias de vuelos que ofrece normalmente expresan y miden el tamaño físico de la red de una aerolínea. El plan de vuelo es principal producto que vende la aerolínea y por ello es muy importante su planificación. En el caso de las grandes compañías aéreas, el grupo de programación de vuelos y desarrollo de rutas está compuesto por más de 30 empleados. También el departamento de marketing tiene un papel muy importante.

Basándose en el plan de vuelo, las aerolíneas pueden resolver el problema planificación (asignación de flota, asignación de aeronaves y asignación de tripulación) meses antes del día de la operación. Sin embargo, este problema de planificación es computacionalmente intratable, por lo que se divide en etapas que se resuelven secuencialmente, de forma que la salida de una etapa es la entrada de la siguiente. Así las aerolíneas resuelven inicialmente el problema de asignación de flota (fleet asignment), decidiendo qué tipo de avión va a volar cada tramo programado, utilizando las aeronaves disponibles y maximizando los ingresos. La flota de una aerolínea está formada por una variedad de tipos de aeronaves (Boing 757, Boing 737, Airbus 320, …) que difieren en el número de asientos, tripulación necesaria, costes de mantenimiento, etc. En la siguiente etapa se resuelve el problema de asignación de aeronaves (aircraft routing), asegurándose que se realiza periódicamente el mantenimiento de las aeronaves. Por último, las rutas obtenidas se utilizan para emparejar la tripulación a una serie de tramos de vuelos, respetando las reglas de trabajo de la aerolínea y minimizando el coste de la tripulación.

Aunque el procedimiento secuencial reduce la complejidad computacional, debido a la independencia de cada etapa, la solución no es totalmente óptima y en algunos casos, no existe solución factible. Por ejemplo, después de resolver el problema de asignación de flota, no es posible encontrar un conjunto de rotaciones igual al número de aviones disponibles de esa flota. Para superar dificultades de este tipo, el proceso secuencial se retroalimenta. Es decir, si las soluciones a algunos subproblemas no son deseables o factibles, el plan de vuelo se modifica y se ve el impacto que tiene tales cambios.

El objetivo principal de este documento es abordar estos problemas relacionados con las actividades de asignación de aeronaves, asignación de aeronaves o aircraft routing. En primer lugar, se presenta el proceso de asignar una aeronave individual a un conjunto de segmentos de vuelo. Posteriormente, se analizará su formulación matemática, para finalmente aplicarla sobre una aerolínea ficticia.

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE AIRCRAFT ROUTING

El objetivo del problema de asignación de aeronaves o aircraft routing es determinar la secuencia de vuelos (rotación) que va a realizar cada aeronave dentro de una flota.

El punto de partida del problema de aircraft routing es la solución del problema de asignación de flota. Este último problema asigna un tipo de aeronave (por ejemplo, Boeing 737-200 o Boeing 757-800) a cada vuelo, quedando el plan de vuelo dividido en tantos subconjuntos como tipos de flota tenga la aerolínea. Sin embargo, no especifica qué aeronave concreta (definida por el número de cola) realizará cada vuelo. De esto se encarga el problema de asignación de aeronaves.

En primer lugar, para una flota de la aerolínea, se toman todos los vuelos que se le han asignado en el problema de asignación de flota. Estos vuelos se secuencian juntos de acuerdo con un conjunto de reglas preestablecidas por la aerolínea. Esta secuencia de vuelos recibe el nombre de rotación. Las rotaciones suelen durar entre 3 y 7 días y están compuestas por bloques de vuelos entre los cuales hay tiempos de inactividad en tierra (turn-around time) y actividades de mantenimiento, tal y como se presenta en el ejemplo hipotético de la ruta de una aeronave en la Figura 2-1.

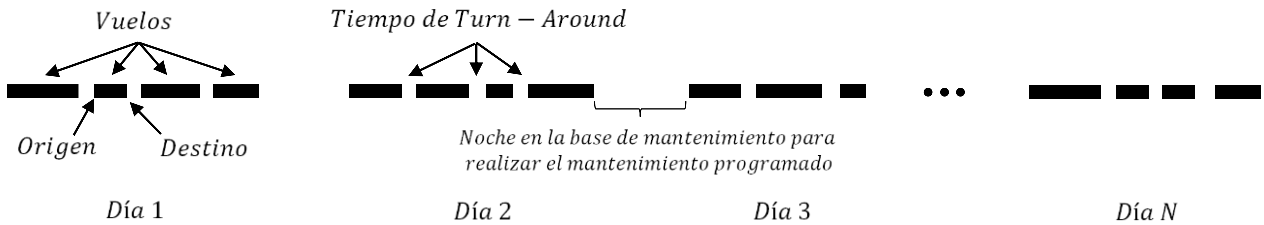

Figura 2-1. Ejemplo de rotación de N días de duración.

Para las compañías aéreas que operan una red con estructura de tipo hub-and-spoke donde hay muchas posibilidades de conexiones de vuelos (Figura 2-2), se generan normalmente un gran número de rotaciones. Puede parecer que generar estas rotaciones es una tarea muy difícil y tediosa. Este es ciertamente el caso si se quieren enumerar todas las rutas posibles manualmente. Sin embargo, para esta enumeración se hará uso de un programa automatizado que genera y filtra estas rutas para las aerolíneas en un tiempo relativamente corto.

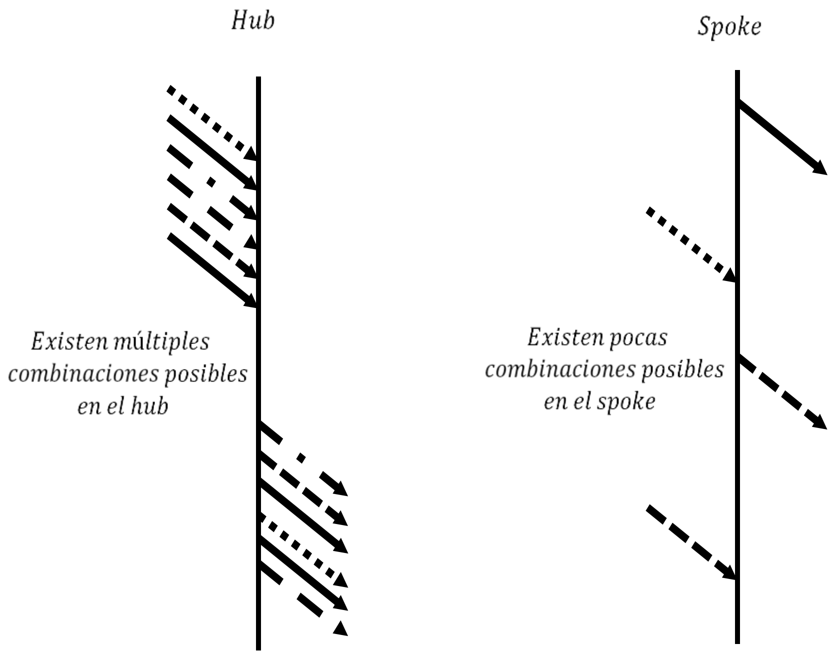

Figura 2-2. Comparación entre todas las conexiones posibles en un hub frente a un spoke.

Existen varias consideraciones que afectan a las rotaciones y deben ser tenidas en cuenta a la hora de generar las rotaciones. Estas reglas las establece la aerolínea, y están relacionadas con los requerimientos de mantenimiento, el tiempo de conección entre vuelos (tiempo de turn around), el horizonte temporal de la rotación, etc. En las subsecciones 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5, se van a examinar estas consideraciones con más detalle.

Una vez se han generado todas las rotaciones posibles, es momento de buscar aquellas rotaciones que cumplen con el objetivo que persigue la aerolínea (minimizar costes, maximizar oportunidades de mantenimiento, …) y asignar estas rotaciones óptimas a una aeronave de la flota. Esto se verá más adelante, en la Sección 3.

2.1. Requerimientos de mantenimiento

En USA, la FAA es el organismo responsable de certificar las aerolíneas y de supervisar las actividades de mantenimiento. De forma análoga, en Europa, la encargada es la Agencia Europea de Seguridad Aérea (EASA). A cada aerolínea se le asignan unos inspectores que supervisarán el cumplimiento de las directivas de aeronavegabilidad y los procedimientos de mantenimiento generales. El mantenimiento de las aeronaves consiste en una serie de comprobaciones de solicitud creciente. La frecuencia de estas revisiones depende de una combinación de horas de vuelo y del número de ciclos de despegue y aterrizaje, y puede realizarse en cualquier lugar debidamente equipado. Puesto que cada tipo de aeronave tiene diferentes requisitos de inventario, las aerolíneas se pueden ahorrar un poco combinando las instalaciones de las diferentes flotas.

La FAA obliga a las aerolíneas a realizar cuatro tipos de mantenimientos, referidos como tipo A, B, C y D. La primera inspección importante, tipo A, se realiza de forma rutinaria cada 65 horas de vuelo o sobre una o dos veces a la semana. La inspección tipo A, consiste en una comprobación visual de los sistemas principales, como el tren de aterrizaje, motores y superficies de control, y requiere que la aeronave esté en tierra entre 3 y 10 horas. Para evitar que la aeronave se quede inutilizable durante ese periodo, este tipo de inspecciones se realiza por la noche aprovechando que la aeronave está en tierra. Si este mantenimiento no se realiza en el periodo especificado, las normas de la FAA impiden que esa aeronave pueda volar. Por ello, para cumplir con las directrices de la FAA, algunas empresas han adoptado políticas de mantenimiento estrictas que requieren inspecciones rutinarias al menos cada tres o cuatro días. El mantenimiento tipo B se realiza cada 300-600 horas de vuelo o una vez cada varios meses, e implica una inspección visual a fondo, además de la lubricación de todas las partes móviles como el estabilizador horizontal y alerones. El mantenimiento tipo C y D, se realizan una vez cada 1-4 años y requieren que la aeronave esté fuera de servicio durante 1 mes.

Puesto que las revisiones de tipo B, C y D están espaciados en intervalos de tiempo relativamente grandes, no resulta difícil su programación. La principal preocupación de las aerolíneas es cumplir con las inspecciones de mantenimiento tipo A. Para hacer frente a este problema, estas inspecciones rutinarias se incluyen en la formulación del aircraft routing, garantizando así, que la aeronave está en la base de mantenimiento en el momento adecuado. Hay que destacar que una rotación puede proveer oportunidades de mantenimiento diariamente, aunque eso no significa que cada vez que el avión pase por la base de mantenimiento deba realizarse la inspección.

Por otro lado, las compañías aéreas se enfrentan a otro problema, la ubicación de las bases de mantenimiento. Para un plan de vuelo propuesto, los encargados de la planificación deben determinar si es posible asignar rotaciones específicas a aviones concretos, para cumplir con el requisito de mantenimiento cada 3 o 4 días. Las bases de mantenimiento están fijas (por lo general situados en sus hubs), luego si no se consigue encontrar asignaciones factibles deberá construirse otro plan de vuelo. Abrir una nueva instalación para el mantenimiento sería la última alternativa de solución, no solo por el coste que lleva asociado, sino por la naturaleza dinámica del mercado. Se tarda unos tres meses en construir una nueva instalación, por lo que los cambios en el plan de vuelo que puedan producirse durante ese tiempo pueden hacer que la decisión en cuanto a la ubicación se quede obsoleta. Actualmente las aerolíneas están llevando más lejos el problema de la ubicación, pues también quieren determinar el número mínimo de estaciones para cumplir con el plan de vuelo.

2.2. Horizonte temporal de la rotación

El problema de asignación de aeronaves se resuelve para un periodo de tiempo dado, que suele ser de una semana o un mes de duración. D es el número de días que dura ese periodo. La posición inicial de los aviones viene dada por la solución del problema de asignación de aeronaves en el periodo anterior. Se asumirá que se repite el mismo plan de vuelo diariamente, es decir, día tras día se realizan los mismos tramos de vuelos, con la misma frecuencia, y mismo horario. En la práctica, suele repetirse el plan de vuelo diariamente durante los días entre semana y se adopta un plan de vuelo diferente para el fin de semana, pues la frecuencia de los vuelos suele ser menor.

2.3. Rutas en ciclos

Con el objetivo de reducir el número de rotaciones posibles, se asumirá que las rutas son ciclos cerrados. Estos ciclos tendrán una duración de D días, que coincide con el horizonte temporal. Un ciclo cerrado es cuando un avión empieza en una ciudad y al final de los D días, termina en la misma ciudad, para empezar con un ciclo nuevo. Cabe señalar que los ciclos cerrados no suelen ser un requisito para las aerolíneas. De hecho, estas suelen desarrollar rotaciones mensuales (D=30) sin ciclos cerrados. Es decir, una aeronave puede seguir una ruta totalmente diferente cada día sin patrones ni ciclos, siempre que reciba las comprobaciones de mantenimiento requeridas.

- Ciclo cerrado de un día. El avión pasa la noche en el mismo aeropuerto desde el que despegó por la mañana. En ejemplo de la Figura 2-3, el avión salió de JFK y por la noche aterrizó en JFK, desde donde empezará la misma ruta u otra con origen JFK al siguiente día.

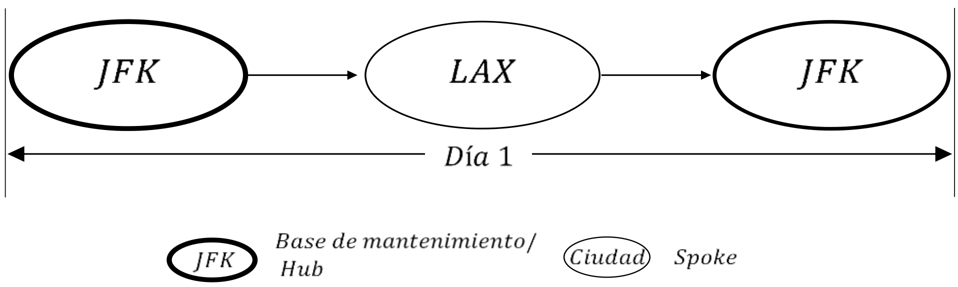

Figura 2-3. Rotación en ciclo de un día.

- Ciclo cerrado de dos días. Para una rotación de dos días, se debe cumplir que el aeropuerto de origen del día 1 sea igual al aeropuerto de destino final del día 2. En el ejemplo de la Figura 2-4, el avión sale de LAX, pasa la primera noche en JFK, y la segunda noche vuelve a LAX.

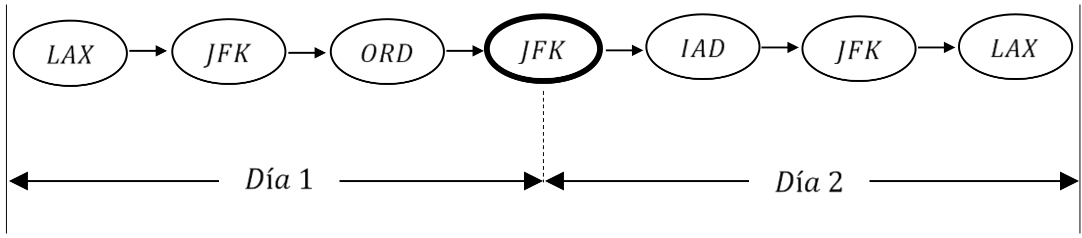

Figura 2-4. Rotación en ciclo de dos días.

- Ciclo cerrado de tres días. En una rotación de 3 días, la aeronave debe volver el día 3 al aeropuerto del que partió el día 1. En el ejemplo de la Figura 2-6, el avión despega del aeropuerto ORD, pasa la primera noche en LAX. El segundo día despega de LAX y pasa la noche en JFK. Por último, el tercer día despega de JFK y vuelve al aeropuerto ORD

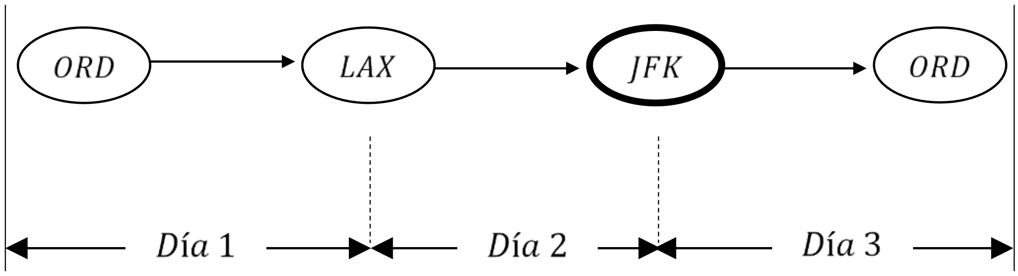

Figura 2-5. Rotación en ciclo de tres días.

2.4. Tiempo de conexión entre vuelos. Tiempo de turn-around

Para que una ruta sea válida, esta tiene que incorporar el turn-around time. El tiempo de conexión entre vuelos o tiempo de turn-around es el tiempo que pasa entre que una aeronave aterriza hasta que vuelve a despegar para realizar otro vuelo, y, por tanto, este es el mínimo tiempo que debe haber entre la hora de llegada de un vuelo y la hora de salida del siguiente vuelo. Durante este tiempo se realizan todas las siguientes actividades,

- el rodaje del avión hasta la posición de estacionamiento,
- el desembarque de pasajeros, tripulación y equipaje del avión,
- la limpieza de la cabina,
- la realización de la inspección técnica de seguridad (SOPM, Standard Operting Procedure Manual). para comprobar que el avión se encuentra en condiciones para volar,
- el repostaje de combustible para el nuevo trayecto,
- el servicio de catering que provee de alimentos y bebidas,
- la carga de maletas y mercancías,

- el embarque de pasajeros,
- el remolque del avión (push-back) y rodaje hasta cabecera de pista.

El tiempo de turn-around en un avión puede durar desde media hora para vuelos low cost, hasta una hora y media para aeronaves de gran capacidad de pasajeros. Con el fin de completar todas estas tareas en el menor tiempo posible, se realizan de manera simultánea todas aquellas acciones que se puedan.

La planificación del tiempo de turn-around es arriesgado, pues cualquier retraso se propaga al siguiente vuelo. Por otro lado, si se planifica un tiempo de turn-around mayor, aumenta el tiempo total de inactividad de la aeronave, lo que reduce su productividad. Los aviones son el recurso más caro de las aerolíneas por lo que deben ser utilizados de manera eficiente. En la siguiente imagen se muestran las diferentes posibilidades de rotación de un avión que llega con el vuelo1. El mejor escenario es que ese avión realizara el vuelo3. El vuelo2 quedaría descartado pues el tiempo entre ambos vuelos es menor que el tiempo de turn-around requerido. El tiempo entre el vuelo1 y vuelo4 es tan grande que el avión debería permanecer demasiado rato en tierra, lo que es muy ineficiente.

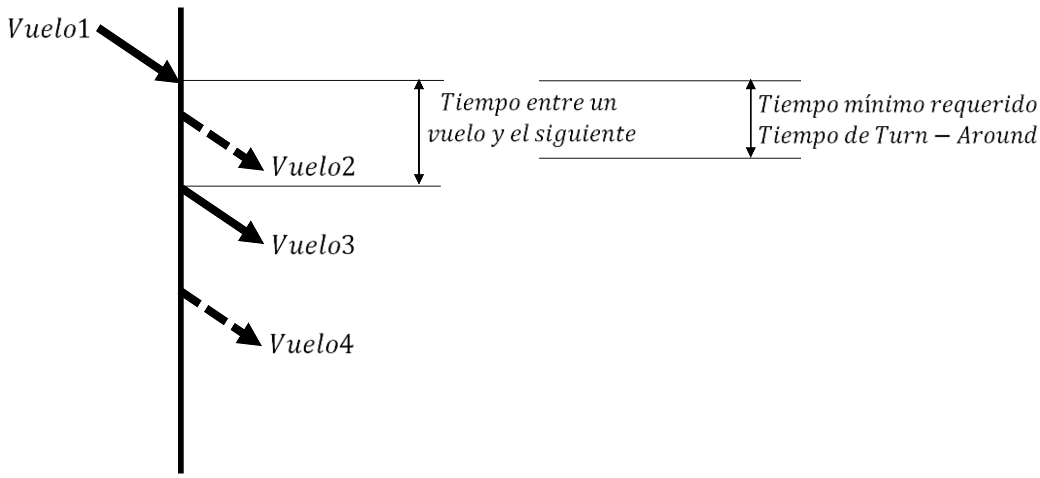

Figura 2-6. Ejemplo de un tiempo de turn-around eficiente.

2.5. Tipo de flota

Las aerolíneas típicamente operan diferentes tipos de aviones. Un conjunto de aviones del mismo tipo recibe el nombre de flota. Cada tipo de flota tiene diferentes características (número de asientos, peso de aterrizaje, …) y costes (mantenimiento, combustible, …). En concreto, el coste de mantenimiento es un factor importante que hace que las aerolíneas prevean una menor diversidad de aviones a la hora de planificar su flota. Una gran diversidad de aviones requiere una tripulación y personal cualificado para cada tipo de flota, planificar diferentes programas de mantenimiento y además, conlleva una menor flexibilidad a la hora de sustituir una aeronave cuando se produce una avería.

La planificación de la flota no debe confundirse con la asignación de flota. La planificación de la flota es una decisión estratégica que se toma cuando se crea una aerolínea y tiene que ver con el número y el tipo de aeronaves necesarias para cada operación. Implica el proceso de adquirir los tipos de aeronaves adecuados para atender los mercados previstos en el plan estratégico de la aerolínea. Sin embargo, la asignación de flota es una decisión de planificación que ocurre cuando la aerolínea ya está operando con las aeronaves existentes en su flota y el problema es asignar cada tipo de flota con unos tramos de vuelo del plan de vuelo.

Es necesario tener en cuenta que cada una de las aeronaves de una flota se identificarán a través de su matrícula o número de registro, que se sitúa normalmente en la cola de las aeronaves o en la parte trasera del fuselaje. De ahí que este número identificativo reciba el nombre de 'tail number'. En el problema de asignación de aeronaves es importante tener identificada a cada aeronave, ya que se asociará cada rotación a un avión concreto.

3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE AIRCRAFT ROUTING

Cómo ya se ha explicado anteriormente, el objetivo principal del problema de asignación de aeronaves o aircraft routing es determinar la rotación o secuencia de vuelos que va a realizar cada avión dentro de una flota. Una vez se han generado todas las rotaciones, se resuelve el problema de aircraft routing para encontrar aquellas rotaciones que cumplen el objetivo que persigue la aerolínea y asignar un avión a cada rotación optima.Una de las primeras formulaciones de este problema viene dada por Kabbani y Patty en 1992, en su artículo Aircarft Routing at American Airlines [1]. En esta publicación se formula el problema como un modelo de partición de conjuntos (Set-Partitioning problem), el cual es utilizado en problemas de programación donde habiendo varias tareas programadas (vuelos) y varios recursos (aviones), hay que encontrar la manera óptima de cubrir cada tarea con un solo recurso.

Los problemas de Set-Partitioning, junto con los problemas de Set-Covering y Set Packing, forman una familia de especial interés dentro de los problemas de programación lineal entera, pues todas las variables que intervienen pueden interpretarse como variables de decisión, es decir, se restringen a tomar los valores 0 y 1. A su vez, los problemas de programación lineal entera son aquellos que prescindiendo de las condiciones de integridad, el problema resultante es un problema de programación lineal (con restricciones y objetivo expresados con funciones lineales).

Existen numerosas situaciones reales, cuya formulación matemática puede expresarse en términos de uno de estos problemas (Set-Partitioning, Set-Covering y Set-Packing). Desde una perspectiva teórica, estos problemas tienen una estructura combinatoria. Sin embargo, a pesar de que su conjunto de soluciones posibles es finito, y puede ser enumerado, resultan muy difíciles de resolver ya que son NP-completos. NP-completo hace referencia a su complejidad computacional, siendo NP las siglas del inglés Nondeterministic Polynomial time, y completo se refiere a que son los problemas más difíciles dentro del conjunto NP. Esto se traduce en que el tiempo necesario para realizar la enumeración anterior crece de forma exponencial con la dimensión del problema, en este caso el número de vuelos.

El problema de Set-partitioning para la asignación de aeronaves puede expresarse matemáticamente como sigue,

$$\min \sum_{j \in N} c_j x_j \quad sujeto\ a: \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i & \forall\, i \in M \\ \sum_{j \in N} x_j \leq F & \\ x_j \in \{0,1\} & \forall\, j \in N \end{cases} \tag{3–1}$$

,donde:

$$x_j = \begin{cases} 1\,, & si\ la\ rotación\ j\ es\ seleccionada \\ 0\,, & en\ caso\ contrario \end{cases} \tag{3–2}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\,, & si\ el\ vuelo\ i\ aparece\ en\ la\ rotación\ j \\ 0\,, & en\ caso\ contrario \end{cases} \tag{3–3}$$

La función objetivo busca minimizar el coste total asociado a las rotaciones seleccionadas. Esta función objetivo puede modificarse según el objetivo que se pretenda conseguir. A continuación, se muestran los más frecuentes:

- Minimizar costes. Las aerolíneas asignan pseudo-costes para penalizar las rutas que se consideran desfavorables. Estas rutas pueden incluir tiempos de conexión malos y rotaciones circulares donde la aeronave se queda aislada volando entre un número pequeño de spokes (aeropuerto de menor capacidad conectado con un aeropuerto de mayor capacidad, Hub), y así sucesivamente.

- Maximizar las oportunidades de mantenimiento. Se les dará un mayor peso a aquellas rotaciones que proporcionen múltiples oportunidades de mantenimiento.
- Maximizar el tráfico de paso. Dar un mayor peso a aquellos vuelos que no tienen escala, pues estos son la primera opción para los pasajeros. En el caso de que no existan vuelos directos (todos tienen escala) los pasajeros deben coger vuelos con conexión. El tráfico de paso hace referencia a los vuelos que van del punto A al punto B a través del punto C sin cambiar de avión en el punto C. Esto permite que los pasajeros permanezcan a bordo del avión, en lugar de, desembarcar y caminar hacia la puerta del siguiente vuelo. Este tipo de tráfico es muy atractivo para aquellos aeropuertos que son concurridos. Por lo tanto, las aerolíneas les dan un mayor peso a aquellas rotaciones con tráfico de paso favorable (por ejemplo, las rutas que conectan un mayor número de pasajeros entre el punto A y C).

Por otro lado, el problema está sujeto a tres restricciones que deben cumplirse. El primer conjunto de restricciones asegura que cada vuelo es cubierto por una única rotación. Es decir, cada vuelo se realiza una única vez al día. El segundo conjunto de restricciones impone que el número de rotaciones no supere el número de aeronaves que componen la flota (F), pues cada rotación será asignada a una aeronave. El tercer conjunto de restricciones asegura que las variables de decisión (x) sean variables binarias.

Si para volar todos los vuelos diarios programados, se necesita un número de aviones superior a F (conjunto de aeronaves disponibles), entonces se tendrá una solución que no es factible.

3.1 Metodología de solución

Para explicar la formulación del problema de set-partitioning, es necesario empezar entendiendo como se construye la matriz de set-partitioning. Esta matriz, formada por las variables a_{ij} y dimensiones [M x N], se presenta en la Figura 1. Las columnas representan las posibles rotaciones que las aeronaves de una flota pueden realizar en un día, mientras que las filas representan los vuelos diarios que esa flota de aeronaves debe volar. Un elemento de esta matriz, a_{ij} , es igual a uno, si el vuelo i forma parte de la rotación j y cero, en caso contrario. Cada rotación, j, de esta matriz tiene asociado una función de coste, c_{ij}, que mide la calidad de esa ruta.

Por otro lado, se encuentra la matriz de elementos b_i con dimensiones [N x 1], donde cada elemento de esta matriz está asociado al vuelo i y toma el valor de 1, lo cual indica que cada vuelo debe aparecer en una única rotación de la solución.

Con estas dos matrices se obtiene el primer conjunto de restricciones que aparece en la ecuación (3-1).

$Rotación$ $\qquad\qquad\qquad$ $\boldsymbol{a_{ij}}$

$$
\begin{bmatrix} vuelos \\ i=1 \\ i=2 \\ i=3 \\ \\ \\ \\ \\ M \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix}
j=1 & j=2 & j=3 & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & j=N \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & & & & & & & & & 0 \\
1 & 0 & 0 & & & & & & & & & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} b_i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Figura 3-1. Matrices del problema de set-partitioning.

La solución al problema de set-partitioning consiste en encontrar las rutas de aviones más eficientes que cubran todos los vuelos programados. Con este fin, se define una variable de decisión, x_{ij} , que es igual a 1 si se selecciona la ruta j en la solución, y 0 en caso contrario.

3.2 Algoritmo de solución

La resolución consta de dos pasos principales, el primero de ellos, es la generación de las columnas de la matriz de elementos a_{ij} y el segundo, la optimización o resolución del problema de Set-partitioning.

3.2.1 Optimización

Por otro lado, el objetivo de la optimización es determinar la combinación de rotaciones que cubre todos los vuelos. Cuando el problema es muy grande (hay muchos vuelos) el problema de optimización es difícil de resolver.

Antes de comenzar a resolver un problema de optimización, se debe elegir el enfoque apropiado. La Toolbox de optimización de Matlab tiene dos enfoques para resolver problemas o ecuaciones de optimización según se esté basado en problemas o basado en solver. A continuación, resumen las principales diferencias entre ambos enfoques.

- Optimización basada en problemas
    - Más fácil de crear y de depurar.
    - Representa simbólicamente el objetivo y las restricciones.
    - El tiempo de solución es más largo debido al tiempo de traducción a forma matricial.
    - No permite la inclusión directa del gradiente o del Hessiano.
    - Actualmente no se puede aplicar a la resolución de ecuaciones, a mínimos cuadrados no lineales, y a problemas de programación multiobjetivo o semi-infinito.
- Optimización basada en solver
    - Más difícil de crear y de depurar.
    - Representa el objetivo y las restricciones como matrices.
    - El tiempo de solución es más corto, pues no requiere la traducción a formato matricial.
    - Permite la inclusión directa de la función de multiplicación Hessiana o Jacobiana para ahorrar memoria en problemas grandes.

Dada la estructura que presenta el problema de Set-Partitioning, resulta inmediato crear tanto la función objetivo como las restricciones en forma matricial. Además, y debido al elevado número de rotaciones que se han generado en el paso anterior, quizás sea necesario el uso de la función de multiplicación Hessiana o Jacobiana para ahorrar memoria. Por ello se decide utilizar un enfoque basado en Solver.

Para representar un problema de optimización que va a ser resuelto usando un enfoque basado en Solver, generalmente se siguen estos pasos:

1. Elegir un solucionador (solver) de optimización.
2. Crear la función objetivo, típicamente la función que se desea minimizar.
3. Crear las restricciones, si las hay.
4. Configurar las opciones o bien utilizar las que vienen por defecto.
5. Llamar al solucionador (solver) apropiado.

Las funciones solucionadoras (solvers) que se incluyen en la Toolbox de optimización de Matlab se engloban en cuatro categorías:

- Minimizadores: Solvers que tratan de encontrar el mínimo local de la función objetivo. Estos solvers se encargan de los problemas de optimización sin restricciones, de la programación lineal, programación cuadrática, y de los problemas de programación no lineal.
- Minimizadores multiobjetivo: Solvers que intentan minimizar el valor de un conjunto de funciones o bien encontrar el lugar en el que el que un conjunto de funciones está por debajo de ciertos valores.
- Solucionadores de ecuaciones: Solvers que intentan encontrar la solución a una ecuación no lineal.
- Solucionadores de mínimos cuadrados: Solvers que tratan de minimizar la suma de cuadrados.

Para resolver problemas de programación lineal (catergoría de solvers minimizadores), la toolbox de Matlab cuenta con dos solvers:

Tabla 3-1. Tipos de solvers que incluye la Toolbox de Matlab para resolver problemas de programación lineal

Tipo de Problema	Solver	Descripción
Programación lineal	*linprog*	Resuelve problemas de programación lineal
Programación entera mixta	*intlinprog*	Resuelve problemas de progración entera mixta

Un problema de programación entera mixta (MILP, Mixed-integer linear programming) es un problema de programación lineal (restricciones y función objetivo son lineales) en que algunas variables son enteras. En el problema de Set-partitioning todas las variables son enteras y por ello, se escoge intlinprog como función de optimización.

3.2.1.1 Descripción de *intlinprog*

Intlinprog encuentra el mínimo de un problema especificado por:

$$\min_{x} f^T x \quad sujeto\ a{:}\begin{cases} A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ l_b \leq x \leq u_b \\ x(intcon) son\ enteras \end{cases} \tag{3–4}$$

En términos matemáticos, dados los vectores f, $intcon$, b, b_{eq}, l_b, u_b y matrices A y A_{eq}, *intlinprog* encuentra el vector solución x.

Es muy importante tener en cuenta la forma en la que se define el problema para intlinprog. En el caso de que se quiera maximizar una función objetivo, en vez de minimizar tal y como está definido en la formulación anterior, será necesario multiplicar el vector f por -1 para así convertir la función objetivo (3-5). De igual manera, se convertirán todas las desigualdades “mayores que” ($A \cdot x \geq b$) multiplicándolas por -1(3-6).

$$\max_{x} f^T x \ \rightarrow \ \min_{x} -f^T x \tag{3–5}$$

$$A \cdot x \geq b \ \rightarrow \ -A \cdot x \leq b \tag{3–6}$$

3.2.1.2 Sintaxis de *intlinprog*

$$[x, fval, exitflag, output] \ = \ intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, lb, ub, options) \tag{3–7}$$

3.2.1.3 Argumentos de entrada de *intlinprog*

Los argumentos de entrada de la función intlinprog son:

- f: vector de la función objetivo (la notación asume que es un vector columna, aunque puede introducirse igualmente como un vector fila, pues internamente lo convertirá).
- $intcon$: vector cuyos valores indican las componentes de la variable de decisión x que tienen que ser enteras. Para especificar que las variables son binarias.
- A: matriz que contiene los coeficientes de las restricciones lineales de desigualdad.
- b: vector que contiene las constantes del lado derecho de las restricciones lineales de desigualdad.
- A_{eq}: matriz que contiene los coeficientes de las restricciones lineales de igualdad.
- b_{eq}: vector que contiene las constantes del lado derecho de las restricciones lineales de igualdad.

- l_b: vector de los límites inferiores de la variable de decisión x.
- u_b: vector de los límites superiores de la variable de decisión x.
- $options$: opciones con las que trabajará el algoritmo de intlinprog (tolerancia de la solución, tipo de corte, técnica heurística, algoritmo para resolver los problemas de programación lineal, tiempo máximo de ejecución, etc.). En caso de no establecer ninguna opción se utilizarán las que vienen por defecto.

Para especificar variables binarias, estas deben definirse como variables enteras en el vector $intcon$ y establecer los límites inferior y superior de las mismas en 0 y 1, respectivamente.

3.2.1.4 Argumentos de salida de *intlinprog*

Los argumentos de salida de la función intlinprog son:

- x: vector solución que minimiza la función objetivo y está sujeto a todos los límites y restricciones lineales.
- $fval$: valor de la función objetivo en la solución x.
- $exitflag$: valor entero que indica la condición por la que se detiene el algoritmo. Este valor será diferente en función del motivo. Por ejemplo, $exitflag$ es igual a 1 cuando el algoritmo ha convergido a la solución x, 0 si el algoritmo se detiene prematuramente al no encontrar ningún punto factible, etc.
- $output$: resumen que da información sobre proceso de optimización.

3.2.1.5 Información general del algoritmo *intlinprog*

Intlinprog utiliza esta estrategia básica para resolver los problemas de programación entera mixta (MILP). Si intlinprog resuelve el problema en una etapa, no ejecuta las etapas posteriores.

1. Reduce el tamaño del problema usando un preprocesamiento de programación lineal.
   De acuerdo con la definición del problema de programación entera mixta, la solución x, va a estar restringida por unas condiciones lineales de igualdad y desigualdad (3-8).

   $$\begin{gathered} A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \end{gathered} \tag{3–8}$$

   De forma general, es posible reducir el número de variables del problema, es decir, el número de componentes de x, y también reducir el número de restricciones. Por tanto, el objetivo de este preprocesamiento es eliminar variables y restricciones que sean redundantes, detectar la inviabilidad del problema, dar estabilidad numérica a la solución y resolver problemas muy grandes. Aunque este procesamiento lleva un tiempo, en general, el tiempo total de solución se reduce.
2. Resuelve un problema inicial relajado (no entero) usando programación lineal.
   La idea de este paso es sustituir el problema original por uno más fácil de resolver relajando algunas restricciones. El problema de progración entera mixta se relaja ignorando la condición de variables enteras, convirtiéndose en un modelo de programación lineal que tiene el mismo objetivo y restricciones que el problema a resolver. Este problema se resuelve con técnicas de resolución de programación lineal, por ejemplo, el método simplex que obtiene la solución sirviéndose de las propiedades de convexidad del problema a resolver. Esta convexidad desaparece en los problemas de progración entera mixta. La solución obtenida del problema relajado, x_{LP}, proporciona una cota de la función objetivo del problema original, cumpliendo los valores de la función objetivo que:

   $$f^T x_{LP} < f^T x \tag{3–9}$$

3. Realiza un preprocesamiento de programación entera para endurecer el problema de programación lineal relajado resuelto anteriormente.
   Durante este preprocesamiento, intlinprog analiza las restricciones de desigualdad $A \cdot x \leq b$, junto con las restricciones de variables enteras, para determinar si:
   - El problema es inviable

- Se pueden endurecer algunos límites
- Se pueden endurecer algunas desigualdades
- Se pueden ignorar o eliminar algunas desigualdades al ser redundantes
- Se pueden fijar algunas variables enteras

El objetivo principal del preprocesamiento del problema de programación entera mixta es simplificar los cálculos del algoritmo Branch and Bound. El preprocesamiento implica el rápido preexamen y la eliminación de algunos subproblemas que de otra manera serían analizados por el algoritmo Branch and Bound.

4. Aplica un algoritmo de cortes (Cut Generation) para endurecer aún más el problema de programación lineal relajado.
   Los cortes son restricciones lineales de desigualdad que intlinprog añade adicionalmente al problema. Estas desigualdades tratan de restringir la región factible del problema de programación lineal relajado, para que las variables de la solución que deben ser enteras se acerquen a valores enteros. En función de la opción que sea seleccionada (básica, intermedia, avanzada).
5. Trata de encontrar soluciones factibles para las variables enteras usando heurística.
   Intlinprog utiliza técnicas heurísticas (algoritmos que pueden tener éxito, pero también pueden fallar) que le ayudan a encontrar puntos factibles con más facilidad durante algunas iteraciones del algoritmo Branch and Bound. Pueden ser técnicas heurísticas de inicio, que ayudan a encontrar una solución inicial o un nuevo entero factible, o técnicas heurísticas de mejora que comienzan en un punto entero factible e intentan encontrar otro punto entero factible mejor, es decir, que mejore el valor de la función objetivo.
6. Utiliza un algoritmo de Branch and Bound para buscar sistemáticamente la solución óptima.
   Branch and Bound (en español, ramificación y acotamiento), es un algoritmo eficiente en la resolución de problemas de programación entera. Este método construye una secuencia de subproblemas que tratan de converger a una solución del problema MILP. Los subproblemas son problemas de programación lineal relajados con rangos restringidos de posibles valores de las variables enteras que dan una secuencia de límites superiores e inferiores del valor de la función objetivo, $f^T x$.

3.2.1.6 Gestión de la memoria

Al definir una matriz en Matlab, este almacena todos los elementos de la matriz. Los elementos que son cero requieren el mismo espacio en memoria que cualquier otro elemento de la matriz no nulo. Sin embargo, al definir una matriz como dispersa, Matlab almacena solo los elementos que no son cero y los índices de sus posiciones.

Por ello, el uso de matrices dispersas para almacenar datos que contienen un gran número de elementos nulos puede generar un ahorro significativo de memoria a la vez que acelera el procesamiento de esos datos. Esto puede conducir a mejoras en el tiempo de ejecución de los programas que trabajan con grandes cantidades de datos. Pero para beneficiarse de estas ventajas, es necesario determinar si la matriz contiene un porcentaje de ceros lo suficientemente grande. De esta manera se define la densidad de una matriz como el cociente entre el número de elementos que no son ceros dividido por el número total de elementos de la matriz. Las matrices que tienen una densidad muy baja serían buenas candidatas para expresarlas en formato dispersa.

En este sentido, se considerará definir A, A_{eq}, l_b y u_b como matrices dispersas. Sin embargo, no se pueden definir b y b_{eq} como matrices dispersas.

4 CASO DE ESTUDIO. ULTIMATE AIR

Para contrastar la teoría anteriormente expuesta con la realidad, se utilizan los datos propuestos en [2]. Aquí se presenta una aerolínea ficticia, llamada Ultimate Air. Esta es una nueva aerolínea, que proporciona servicio a los destinos comerciales nacionales más importantes de los Estados Unidos. El modelo de distribución hub-and-spoke adoptado por Ultimate Air tiene como centro de operaciones el Aeropuerto Internacional John F. Kennedy en Nueva York, en el cual se concentra el tráfico y desde el que se conectan el resto de las ciudades, Figura 4-1.

Tabla 4-1. Lista de aeropuertos y su código IATA para el caso de estudio

Aeropuerto	Código IATA
Nueva York	JFK
Boston	BOS
Los Ángeles	LAX
San Francisco	SFO
Miami	MIA
Atlanta	ATL
Washinton D.C.	IAD
Chicago	ORD

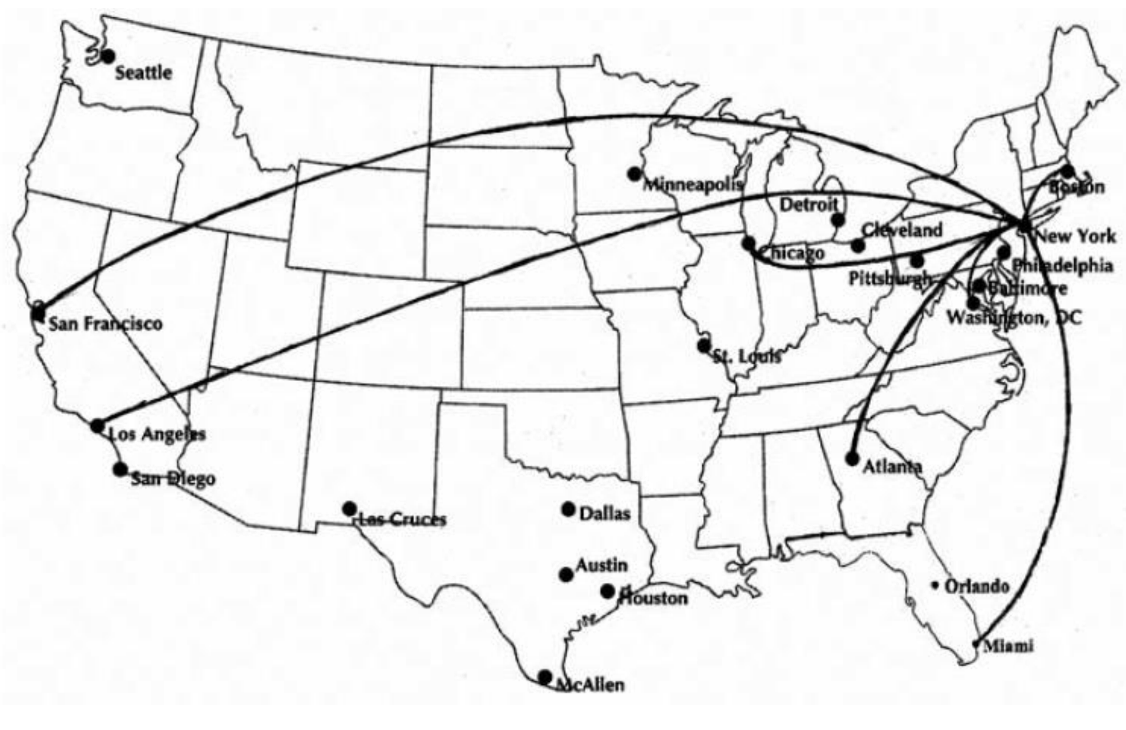

Figura 4-1. Red de rutas de tipo hub-and-spoke de la aerolínea Ultimate Air

Basándose en predicciones, en la política de factor de carga de la aerolínea (porcentaje medio de los asientos de avión que están llenos de pasajeros) y en un análisis de marketing, Ultimate Air propone realizar tres viajes diarios de ida y vuelta a cada una de las ciudades de su red, siendo un total de 42 vuelos al día. La aerolínea también presenta un primer borrador de su plan de vuelo con la hora de salida y llegada de todos los vuelos (hora local). Para cubrir todos los vuelos diarios, Utimate Air cuenta con dos flotas. La primera de ellas está compuesta por 6 aviones Boing 757-200 y, la segunda la integran 9 aviones B737-800.

Tabla 4-2. Solución al problema de asignación de flota, aviones B757-200

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Duración
1	125	JFK	7:25	SFO	9:55	5.5
2	110	ATL	8:10	JFK	10:40	2.5
3	113	MIA	9:10	JFK	12:10	3
4	131	JFK	9:30	ATL	12:00	2.5
5	105	SFO	9:50	JFK	18:20	5.5
6	138	JFK	12:30	BOS	14:00	1.5
7	111	ATL	13:10	JFK	15:40	2.5
8	114	MIA	14:30	JFK	17:30	3
9	118	BOS	15:00	JFK	16:30	1.5
10	135	JFK	15:10	MIA	18:10	3
11	133	JFK	18:05	ATL	20:35	2.5
12	136	JFK	18:10	MIA	21:10	3

La solución al problema de asignación de flota (Tabla 4-2 y Tabla 4-3) sólo muestra los vuelos que se han asignado a cada tipo de aeronave. No muestra la asignación de vuelos a una aeronave específica. De este tipo de asignación se encarga el problema de asignación de aeronaves que atribuye cada uno de los tramos de vuelo a una aeronave específica dentro de cada tipo de flota. Puesto que hay dos flotas diferentes, será necesario resolver el problema de aircraft routing por duplicado. En primer lugar, se resolverá el problema para la flota de aviones B757-200, que tiene asignados un menor número de vuelos y, por tanto, el problema de asignación de aeronaves es más fácil de resolver. En segundo lugar, se resolverá para la flota de aviones B737-800.

El primer paso en la resolución del problema de aircraft routing es la generación de rotaciones o secuencias de vuelos. La aerolínea Ultimate Air fuerza a estas rotaciones a que sean rutas cíclicas con un horizonte temporal de tres días. Es decir, después de tres días la aeronave termina en el mismo aeropuerto desde el que partió el primer día de su ciclo, para repetir otro ciclo. Para proporcionar la oportunidad de mantenimiento de la aeronave, la rotación de tres días debe incluir al menos una noche en la base de mantenimiento, que es el aeropuerto de JFK. Entre sus operaciones regulares, la aerolínea no realiza vuelos ferry. Este tipo de vuelos son aquellos que no transportan pasajeros y su propósito es mover a la aeronave a un punto necesario, ya sea una base de mantenimiento u otra ciudad para realizar un vuelo. Por ello es muy importante programar las rutas de forma que cada tres días la aeronave pase la noche en la base de mantenimiento. Igualmente, se debe garantizar que la aeronave parte, cada día, de la misma ciudad en la que aterrizó el día anterior y en la que pasó la noche.

Tabla 4-3. Solución al problema de asignación de flota, aviones B737-800

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Duración (h)
1	101	LAX	5:00	JFK	13:30	5.5
2	104	SFO	5:05	JFK	13:35	5.5
3	116	BOS	6:15	JFK	7:45	1.5
4	140	JFK	6:20	IAD	7:20	1
5	107	ORD	7:30	JFK	10:30	2
6	122	JFK	7:35	LAX	10:05	5.5
7	137	JFK	7:40	BOS	9:10	1.5
8	119	IAD	8:15	JFK	9:15	1
9	102	LAX	9:45	JFK	18:15	5.5
10	117	BOS	10:00	JFK	11:30	1.5
11	128	JFK	10:05	ORD	11:05	2
12	134	JFK	10:35	MIA	13:35	3
13	141	JFK	12:00	IAD	13:00	1
14	108	ORD	12:20	JFK	15:20	2
15	120	IAD	14:25	JFK	15:25	1
16	132	JFK	14:35	ATL	17:05	2.5
17	129	JFK	15:05	ORD	16:05	2
18	142	JFK	15:15	IAD	16:15	1
19	103	LAX	15:20	JFK	23:50	5.5
20	106	SFO	15:25	JFK	23:55	5.5
21	126	JFK	15:30	SFO	18:00	5.5
22	123	JFK	16:00	LAX	18:30	5.5
23	109	ORD	17:10	JFK	20:10	2
24	112	ATL	18:00	JFK	20:30	2.5
25	115	MIA	18:15	JFK	21:15	3
26	121	IAD	18:30	JFK	19:30	1
27	124	JFK	19:00	LAX	21:30	5.5
28	127	JFK	20:00	SFO	22:30	5.5
29	130	JFK	21:00	ORD	22:00	2
30	139	JFK	21:30	BOS	23:00	1.5

4.1 Generación de rotaciones para Ultimate Air

Con el objetivo de generar todas las rotaciones de tres días factibles, se ha desarrollado un programa informático en Matlab. Los pasos o pseudo-códigos para este programa son los siguientes:

- Leer la tabla Excel del plan de vuelo, donde aparecen por columnas: el número de vuelo, las ciudades de origen y destino, la hora local de salida y de llegada del vuelo, así como la duración total del vuelo en horas. Se tiene un total de dos tablas, una para cada tipo de flota (B757-200 y B737-800), que se leerán de forma independiente cuando se vaya a resolver su respectivo problema de asignación de aviones.

- Crear todas las rotaciones de un día posibles. Hay que tener en cuenta que entre la hora de llegada de un vuelo y la salida del siguiente deben pasar al menos 45 minutos. Este es tiempo de turn-around establecido por la aerolínea. No es necesario que las rotaciones de un día acaben en la ciudad donde empezó, pues este requisito se impondrá para las rotaciones de tres días. El proceso seguido para la creación de rotaciones de un día se describe a continuación:
  - Se recorrerá el plan de vuelo de arriba hacia abajo y se anotará en una lista (esta es una lista que se crea con todas las posibles rotaciones de un día) el vuelo que corresponde por orden. Este será el primer vuelo de la rotación de un día y se denomina vuelo1. En caso de estar comenzando con la enumeración, se anotará el primer vuelo del plan de vuelo.

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada
1	125	JFK	7:25	SFO	9:55
2	110	ATL	8:10	JFK	10:40
3	113	MIA	9:10	JFK	12:10
4	131	JFK	9:30	ATL	12:00
5	105	SFO	9:50	JFK	18:20
6	138	JFK	12:30	BOS	14:00
7	111	ATL	13:10	JFK	15:40
8	114	MIA	14:30	JFK	17:30
9	118	BOS	1:00	JFK	16:30
10	135	JFK	15:10	MIA	18:10
11	133	JFK	18:05	ATL	20:35
12	136	JFK	18:10	MIA	21:10

Plan de vuelo

Nº Rotación	Vuelos	Origen de la rot.	Destino de la rot.
1	125	JFK	SFO
2	110	ATL	JFK

Lista de rotaciones de 1 día

Figura 4-2. Esquema de generación de rotaciones de un día, primer paso

  - El siguiente paso será encontrar los vuelos que suceden al vuelo anotado anteriormente, y que forman la rotación de un día. Para el vuelo anotado previamente en la lista, vuelo1, se buscan los vuelos que cumplen:

$$destino_{vuelo1} = origen_{vuelo2} \quad (4\text{–}1)$$

$$hora\ salida_{vuelo2} \geq hora\ llegada_{vuelo1} + Tiempo\ Turn\ Around \quad (4\text{–}2)$$

Siendo vuelo2 todos los vuelos del plan de vuelo candidatos a cumplir con las condiciones anteriores. En función del número de vuelos que cumplan las restricciones, se darán distintas situaciones:

- Si ningún vuelo las cumple, hay que volver al paso anterior y comenzar con un nuevo vuelo1 (el siguiente, por orden, que aparece en el plan de vuelo).

  Como se puede ver en la Figura 4-3, no existe ningún vuelo asignado a la flota B757-200 que pueda realizarse después del vuelo 125. Por ello, se pasa al siguiente vuelo del plan de vuelo, el vuelo 110.

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada
1	125	JFK	7:25	SFO	9:55
2	110	ATL	8:10	JFK	10:40
3	113	MIA	9:10	JFK	12:10
4	131	JFK	9:30	ATL	12:00
5	105	SFO	9:50	JFK	18:20
6	138	JFK	12:30	BOS	14:00
7	111	ATL	13:10	JFK	15:40
8	114	MIA	14:30	JFK	17:30
9	118	BOS	15:00	JFK	16:30
10	135	JFK	15:10	MIA	18:10
11	133	JFK	18:05	ATL	20:35
12	136	JFK	18:10	MIA	21:10

Plan de vuelo

Nº Rotación	Vuelos	Origen de la rot.	Destino de la rot.
1	125	JFK	SFO
2	110	ATL	JFK

Lista de rotaciones de 1 día

Figura 4-3. Ejemplo de rotaciones de un día sin vuelos factibles, flota B757-200

- Si un único vuelo es factible, entonces se vuelve a escribir en la lista el vuelo1 y en la siguiente columna el vuelo2. Este último vuelo anotado (vuelo2), pasará a llamarse vuelo1, y se repite este paso para encontrar los vuelos que puedan ir detrás de este

  En el ejemplo expuesto en la Figura 4-4, el vuelo 118 cumple todas las restricciones para realizarse después del vuelo 138. A su vez, a continuación del vuelo 118, puede programarse el vuelo 133 o 136. Como conclusión, el vuelo 138 ha dado lugar a cuatro posibles rotaciones de un día.

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada
1	125	JFK	7:25	SFO	9:55
2	110	ATL	8:10	JFK	10:40
3	113	MIA	9:10	JFK	12:10
4	131	JFK	9:30	ATL	12:00
5	105	SFO	9:50	JFK	18:20
6	138	JFK	12:30	BOS	14:00
7	111	ATL	13:10	JFK	15:40
8	114	MIA	14:30	JFK	17:30
9	118	BOS	15:00	JFK	16:30
10	135	JFK	15:10	MIA	18:10
11	133	JFK	18:05	ATL	20:35
12	136	JFK	18:10	MIA	21:10

Plan de vuelo

Nº Rotación	Vuelos	Origen de la rot.	Destino de la rot.
1	138	JFK	BOS
2	138 118	JFK	JFK
3	138 118 133	JFK	ATL
4	138 118 136	JFK	MIA

Lista de rotaciones de 1 día

Figura 4-4. Ejemplo de rotaciones de un día con un vuelo factible, flota B757-200

- Si más de un vuelo cumplen las dos restricciones, el vuelo1 se vuelve a escribir en la lista v veces, siendo v el número de vuelo2 que cumplen las restricciones. A continuación del vuelo1 se escriben los vuelo2, dando lugar cada uno de ellos a una rotación diferente. De la misma manera que antes, cada vuelo2 pasa a ser vuelo1 y se buscan nuevos vuelos que sirvan de conexión a estos.

  Para entender mejor esta situación, se muestra un ejemplo en la Figura 4-5. En este, el vuelo 110 puede ir seguido de los vuelos 138, 135, 133 y 136, formando cada uno de ellos una rotación diferente. Además, el vuelo 138 puede conectarse con el vuelo 118. A su vez, este último puede ir seguido de los vuelos 133 y 136. En total, se generan 8 rotaciones de un día que comienzan con el vuelo 110.

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada
1	125	JFK	7:25	SFO	9:55
2	110	ATL	8:10	JFK	10:40
3	113	MIA	9:10	JFK	12:10
4	131	JFK	9:30	ATL	12:00
5	105	SFO	9:50	JFK	18:20
6	138	JFK	12:30	BOS	14:00
7	111	ATL	13:10	JFK	15:40
8	114	MIA	14:30	JFK	17:30
9	118	BOS	15:00	JFK	16:30
10	135	JFK	15:10	MIA	18:10
11	133	JFK	18:05	ATL	20:35
12	136	JFK	18:10	MIA	21:10

Plan de vuelo

Nº Rotación	Vuelos	Origen de la rot.	Destino de la rot.
1	110	ATL	JFK
2	110 138	ATL	BOS
3	110 135	ATL	MIA
4	110 133	ATL	ATL
5	110 136	ATL	MIA
6	110 138 118	ATL	JFK
7	110 138 118 133	ATL	ATL
8	110 138 118 136	ATL	MIA

Lista de rotaciones de 1 día

Figura 4-5. Ejemplo de rotaciones de un día con más de un vuelo factible, flota B757-200

- Formar las rotaciones de dos días factibles y anotarlas en una lista. Para ello, se unen las rotaciones de un día que cumplan la siguiente restricción:

$$destino(día1) = origen(día2) \tag{4–3}$$

La restricción (4-3) asegura que el primer vuelo del segundo día de la rotación parta del mismo aeropuerto al que llegó el último vuelo del día anterior.

- Por último, se generan las rotaciones de tres días. Para ello se unen las rotaciones de dos días generadas previamente a las rotaciones de un día, imponiéndoles como condiciones:

$$destino(día2) = origen(día3) \tag{4–4}$$

$$destino(día3) = origen(día1) \tag{4–5}$$

$$\sum noches\ JFK \geq 1 \tag{4–6}$$

La restricción (4-4) garantiza que el avión sale el día3 del mismo aeropuerto al que llegó el día2. Una restricción del mismo tipo también ha sido impuesta en la formación de rotaciones de dos días (4-3), pues es necesario que cada día, los vuelos empiecen en la misma ciudad donde el avión terminó el día anterior. La restricción (4-5) impone que la rotación sea cíclica, y, por tanto, al acabar los tres días, la aeronave vuelve al mismo aeropuerto desde el que partió el primer día para comenzar un nuevo ciclo. Como ya se comentó anteriormente, esta restricción es impuesta con el fin de reducir el número de posibles rutas. Por último, la condición (4-6) asegura que la rotación proporciona oportunidades de mantenimiento y, por lo tanto, pasa al menos una noche en la base de mantenimiento, aeropuerto JFK.

Las rotaciones que cumplan con las tres condiciones expuestas con anterioridad serán anotadas en una lista que contendrá todas las rotaciones de tres días válidas.

Tabla 4-4. Ejemplo de rotación de tres días válida, flota B757-200

	Día 1	Día 2	Día 3	
Vuelos	110	131	110	131
Origen-Destino	ATL-JFK	JFK-ATL	ATL-JFK	JFK-ATL

Este pseudocódigo ha sido programado en el Software matemático Matlab.Como resultado, se han obtenido 455 rotaciones de 3 días válidas para la flota de B757-200 y 120087 rotaciones para la flota de B737-800.

De las 455 rotaciones de 3 días generadas para la flota de B757-200, en el primer paso, se generaron 32 rotaciones de un día que dieron lugar a 269 rotaciones de dos días. A continuación, se presentan los histogramas de las horas de vuelo para las rotaciones de dos y tres días. Únicamente un 10.8% de las rotaciones de tres días (Figura 4-6) tienen menos de diez horas de vuelo. Dado que este porcentaje es muy pequeño, no se obtiene ninguna ventaja eliminando aquellas rotaciones que tienen muy pocas horas de vuelo. Además, no se puede descartar ninguna rotación, pues hay algunos vuelos que únicamente forma parte de una rotación con poca utilización. Es de señalar que la desviación estándar de las rotaciones de dos días y de tres días es aproximadamente la misma.

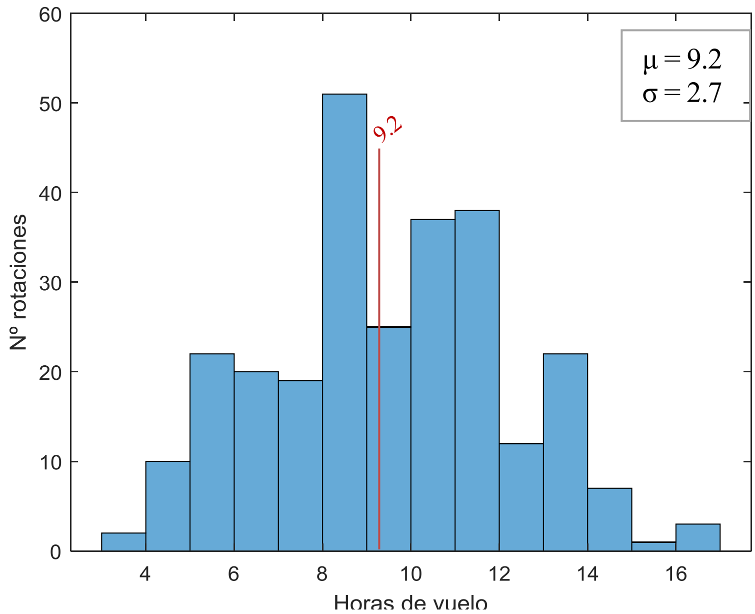

Figura 4-6. Histograma de las horas de vuelo de las rotaciones de dos días factibles de la flota B757-200

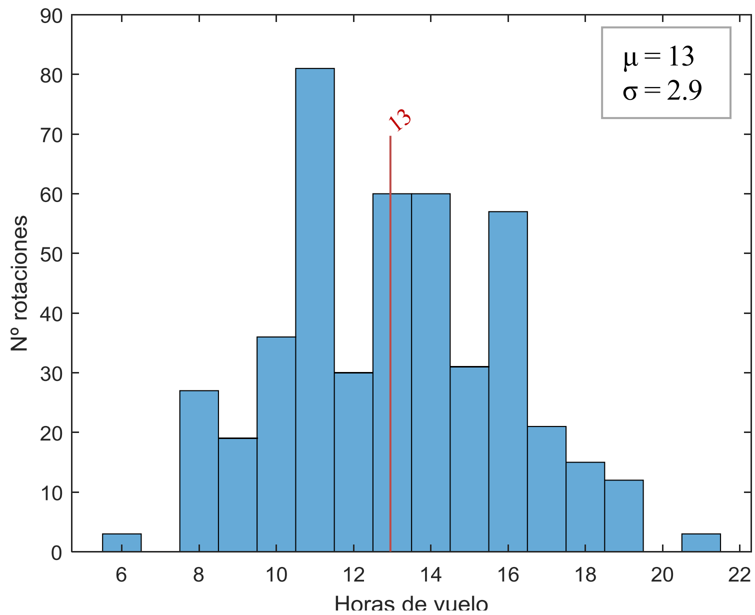

Figura 4-7. Histograma de las horas de vuelo de las rotaciones de tres días factibles de la flota B757-200

De las 120087 rotaciones de 3 días generadas para la flota de B757-200, en el primer paso, se generaron 288 rotaciones de un día que dieron lugar a 15117 rotaciones de dos días. A continuación, se presentan los histogramas de las horas de vuelo para las rotaciones de dos y tres días. Únicamente un 8.3% de las rotaciones de tres días (Figura 4-9) tienen menos de diez horas de vuelo. Dado que este porcentaje es muy pequeño, no se obtiene ninguna ventaja eliminando aquellas rotaciones que tienen muy pocas horas de vuelo. Es de señalar que la desviación estándar de las rotaciones de dos días y de tres días es pequeña, por lo que la dispersión de los datos no es muy grande.

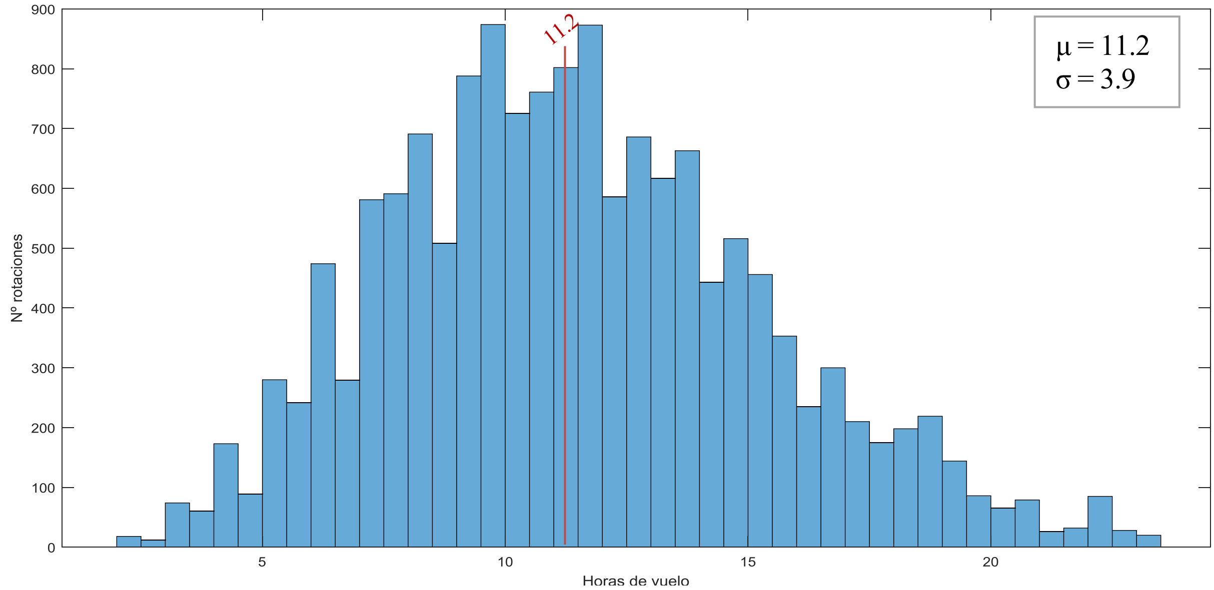

Figura 4-8. Histograma de las horas de vuelo de las rotaciones de dos días factibles de la flota B737-800

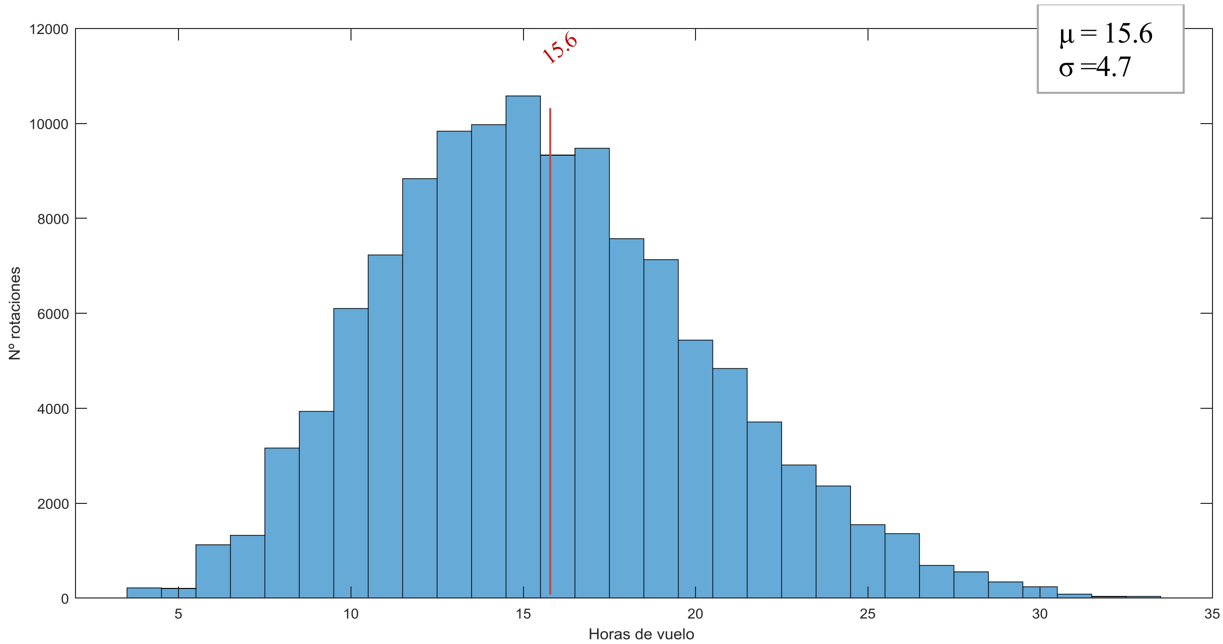

Figura 4-9. Histograma de las horas de vuelo de las rotaciones de tres días factibles de la flota B737-800

4.2 Optimización para Ultimate Air

Una vez se han calculado todas las rotaciones de 3 días válidas, se resuelve el problema de optimización (un problema para cada tipo de flota) para identificar cuáles de esas rotaciones optimizan la función objetivo y satisfacen todas las restricciones.

Puesto que este problema se va a resolver en Matlab usando el solucionador *intlinprog*, es necesario hacer una analogía entre el problema de set-partitioning planteado (4-7), y la formulación de este solucionador (4-8).

Problema de set-partitioning (4–7)

$$\min \sum_{j\in N} c_j x_j \quad sujeto\ a: \begin{cases} \sum_{j\in N} a_{ij}x_j = b_i \quad \forall\, i \in M \\ \sum_{j\in N} x_j \leq F \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall\, j \in N \end{cases}$$

Problema de *intlinprog* (4–8)

$$\min_x f^T x \quad sujeto\ a: \begin{cases} A \cdot x \leq b \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \\ l_b \leq x \leq u_b \\ x(intcon)son\ enteras \end{cases}$$

Es inmediato encontrar las siguientes relaciones:

- Función objetivo: La función de coste total asociado a las rotaciones, c_j, se corresponde con el vector de la función objetivo, f. Se utilizará diferentes funciones objetivo que serán explicadas más adelante (Apartados 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5).
- Restricciones lineales de igualdad: La matriz del problema de set-partitioning formada por todos los elementos a_{ij}, se denota como A_{eq} en la formulación de *intlinprog* y el vector de elementos b_i, se señala como b_{eq}. El vector b_{eq}, es un vector unitario de dimensiones [N x 1].
- Restricciones lineales de desigualdad: La matriz A del problema *intlinprog*, es una matriz identidad de dimensiones [1 x N], siendo N la longitud del vector x, que es igual al número total de rotaciones de tres días válidas. F es un elemento que toma el valor del número de aviones que dispone la aerolínea de cada flota.
- Variables binarias: Como todas las variables de decisión, x_j, son variables binarias, el vector $intcon$ (vector que indica qué componentes de la variable de decisión son enteras) tiene dimensiones $[1\ x\ N]$ y contiene los índices de todas las variables. Para el caso de la flota de B757-200, es un vector de espaciado unitario con elementos que van de 1 a 455 (número total de rotaciones). Además, para establecer que son variables binarias y no enteras, el límite inferior, l_b, toma el valor 0, y el límite superior, u_b, toma el valor 1.

A continuación, se va a explicar el proceso de creación de la matriz A_{eq}. Tal y como se expuso anteriormente, las columnas de esta matriz representan las rotaciones que una flota de aviones puede realizar en un día, y las filas los vuelos diarios asignados a esa flota. Cada rotación tiene una duración de tres días, y cada día realiza unos vuelos diferentes. Por ejemplo, la rotación de la Tabla 4-4, cubre el vuelo 110 el primer día, el vuelo 131 el segundo día y los vuelos 110 y 133 el tercer día. Aunque el día 2 no se realice el vuelo 110, este vuelo será cubierto por otra rotación, de manera que todos los vuelos deben ser cubiertos todos los días.

Con el fin de tener en cuenta todos los vuelos a lo largo de los tres días que duran las rotaciones, la matriz A_{eq} se dividirá en tres submatrices, cada una de ellas asociada a uno de los tres días (Figura 4-10).

$$\begin{bmatrix} [Vuelos_{día1}] \\ [Vuelos_{día2}] \\ [Vuelos_{día3}] \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} [A_{eq\ día1}] \\ [A_{eq\ día2}] \\ [A_{eq\ día3}] \end{bmatrix}$$

Figura 4-10. Submatrices que componen A_{eq}

Las submatrices $Vuelos_{día1}, Vuelos_{día2}$, $Vuelos_{día3}$ son iguales entre sí, pues diariamente se repiten los mismos vuelos.

$$Vuelos_{díaX} = \begin{bmatrix} 125 \\ 110 \\ 113 \\ 131 \\ 105 \\ 138 \\ 111 \\ 114 \\ 118 \\ 135 \\ 133 \\ 136 \end{bmatrix} \quad Vuelos_{díaX} = \begin{bmatrix} 101 \\ 104 \\ 116 \\ 140 \\ 107 \\ 122 \\ 137 \\ 119 \\ 102 \\ 117 \\ 128 \\ 134 \\ \vdots \\ 130 \\ 139 \end{bmatrix}$$

Figura 4-11. Submatrices $Vuelos_{díaX}$ para la flota de B757-200 (izq) y flota de B737-800 (der)

Las submatrices $A_{díaX}$ se construyen todas de la misma forma. Para cada vuelo, i, asignado a una misma flota, buscar todas las rotaciones, j, en las que aparece. El elemento (i, j) de la matriz $A_{eq\ día1}$, a_{ij}, tomará el valor 1 cuando el vuelo i es cubierto por la rotación j el día1, y 0, en caso contrario. Este proceso se repetirá para los tres días que componen la rotación. Como ejemplo, se muestran todas las rotaciones, de entre las 455 que hay en total para la flota de aviones B737-200, en las que aparece el vuelo 125. Todas ellas son candidatas para cubrir el vuelo 125 los diferentes días.

Tabla 4-5. Rotaciones en las que aparece el vuelo 125, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3
x_1	125	105	131 111
x_2	125	105	138 118
x_{190}	131 111	125	105
x_{260}	138 118	125	105
x_{251}	105	131 111	125
x_{252}	105	138 118	125

Para que el primer día, una rotación cubra el vuelo 125, ha de imponerse la restricción (4-9). Esta viene a decir que la rotación 1 ($x_1 = 1, x_2 = 0$) o la rotación 2 ($x_1 = 0, x_2 = 1$) debe estar en la solución para que se realice este vuelo el día 1. Trasladando esta restricción a formato matricial, el vuelo 125 ($i = 1$) es cubierto el día 1 por las rotaciones $j = 1$ y $j = 2$, y por tanto los elementos a_{ij} de la matriz $A_{eq\, día1}$ toman los valores $a_{11} = 1, a_{12} = 1$. Repitiendo el mismo proceso para el segundo y tercer día se tienen las restricciones para cubrir el vuelo 125 diariamente (4-10).

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (Día\ 1) \tag{4–9}$$

$$i = 1 \rightarrow \begin{cases} Día\ 1: \quad a_{11} = 1, a_{12} = 1 \\ Día\ 2: \ a_{1\,190} = 1, a_{1\,260} = 1 \\ Día\ 3: \ a_{1\,251} = 1, a_{1\,252} = 1 \end{cases} \tag{4–10}$$

De manera similar, se completa la matriz para el resto de los 11 vuelos asignados a la flota de B737-200 (Figura 4-12), y se construye la matriz A_{eq} para la flota de aviones B757-800.

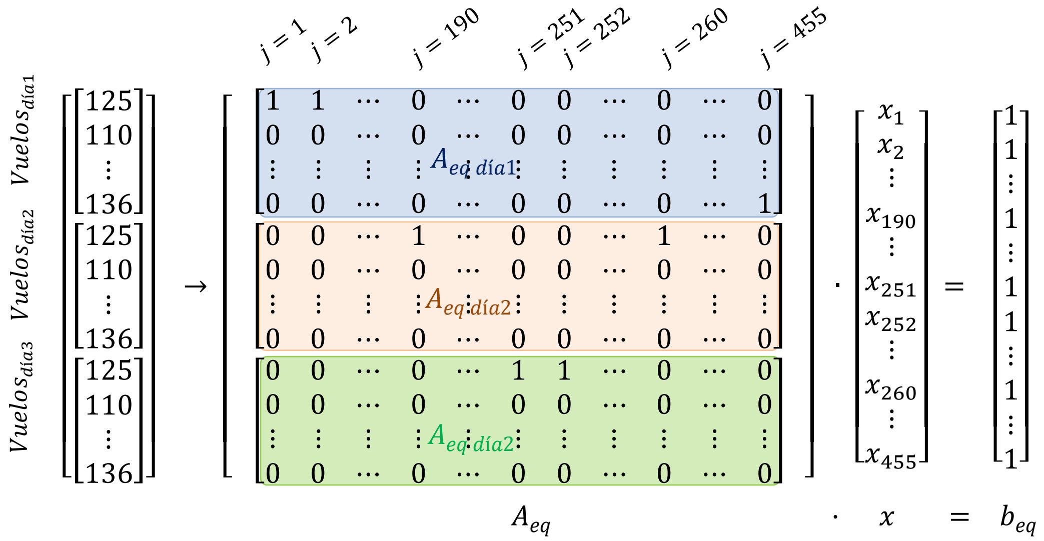

Figura 4-12. Matriz A_{eq} para la flota de B737-200

La construcción de la matriz A_{eq} está automatizada en Matlab, y se ha incluido dentro del proceso de generación de rotaciones. En primer lugar, se crea una matriz provisional A_{eq}^* con las rotaciones de un día válidas. Puesto que, las rotaciones de 3 días son una combinación de rotaciones de un día, a partir de la matriz A_{eq}^*, se crean las submatrices $A_{eq\, día1}, A_{eq\, día2}, A_{eq\, día3}$.

El proceso comienza creándose una matriz provisional A_{eq}^* de ceros (matriz nula). Cada vez que se anota un vuelo en la lista de rotaciones válidas de un día, se le da el valor 1 al elemento correspondiente de la matriz A_{eq}^*.En un hipotético caso de que el vuelo $i = 5$ cumple todas las condiciones para formar parte de la rotación que se está generando, $j = 2$, este vuelo se anota en la lista de rotaciones de un día y a su vez se escribe en la matriz A_{eq}^*, el elemento $a_{5\,2}^* = 1$. Para la flota de B757-800, A_{eq}^* tendrá dimensiones de [12 x 32], pues hay 12 vuelos (filas) y 32 rotaciones de un día (columnas).

Las rotaciones de 3 tres días se forman a partir de las rotaciones de un día. Una vez se han generado todas las rotaciones de 3 días es momento de crear las matrices $A_{eq\, día1}, A_{eq\, día2}, A_{eq\, día3}$. La Tabla 4-6 muestra la primera rotación de tres días válida para las aeronaves de tipo B757-200. Esta rotación es la combinación de las rotaciones de un día número 1-18-15. Esto se traduce en que la primera columna (pues es la primera rotación de tres días) de la matriz $A_{eq\, día1}$ será igual a la columna 1 de la matriz A_{eq}^*. La primera columna de la matriz $A_{eq\, día2}$, será igual a la columna 18 de la matriz A_{eq}^*. La primera columna de la matriz $A_{eq\, día3}$, será igual a la columna 15 de la matriz A_{eq}^* (Ver esquema de la Figura 4-13).

Tabla 4-6. Rotación de 1 día que forman la rotación de 3 días

	Día 1	Día 2	Día 3
Vuelos de la rotación de 3 días	125	105	131-115
Nº rotación de 1 día	1	18	15

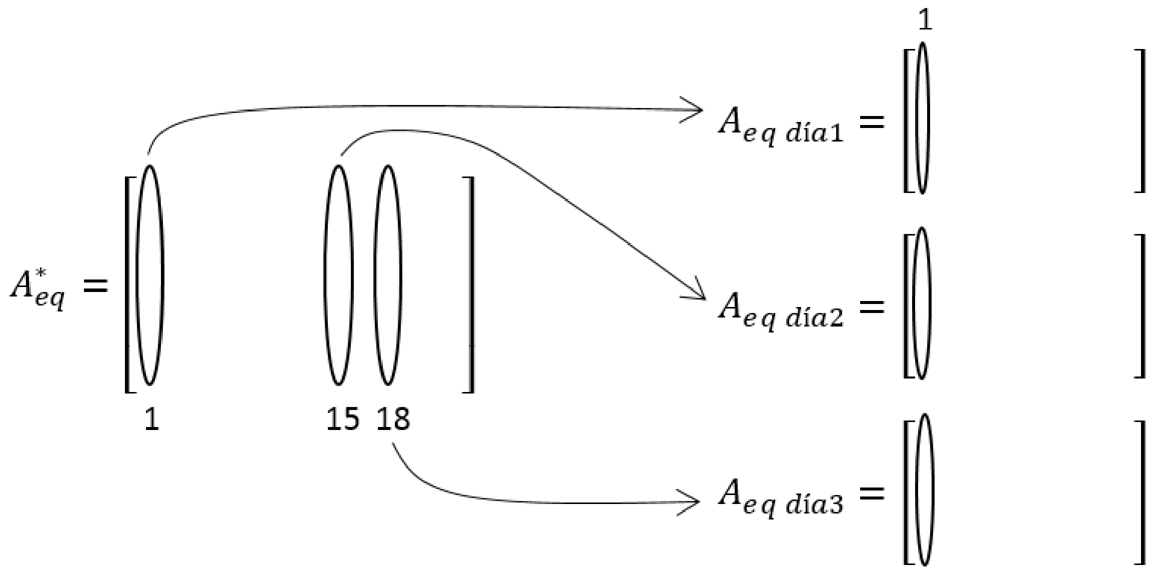

Figura 4-13. Proceso de creación de las submatrices $A_{eq\ día1}, A_{eq\ día2}, A_{eq\ día3}$ en Matlab

Por último, es necesario definir la función objetivo. Seguidamente, se van a plantear diversos modelos matemáticos usando distintas medidas de la función objetivo.

4.2.1 Problema 1. Minimizar el número de aviones necesarios

Con este problema se pretende encontrar el número mínimo de aviones de cada tipo con el que se cubren todos los vuelos asignados a esa flota. En el problema de asignación de aeronaves, hablar de aviones es equivalente a hablar de rotaciones, ya que cada rotación será asignada a un avión. Por tanto, la función objetivo es minimizar el número de rotaciones seleccionadas en la solución, o lo que es lo mismo minimizar el número de variables de decisión que toman el valor 1.

El modelo matemático de este problema es:

$$\min \sum_{j \in N} x_j \quad sujeto\ a: \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall\, i \in M & (4\text{–}11) \\ x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in N & (4\text{–}12) \end{cases}$$

La restricción (4-11) garantiza que se cubran todos los vuelos diarios y la restricción (4-12) impone que todas las variables de decisión sean binarias.

4.2.2 Problema 2. Maximizar las oportunidades de mantenimiento

Con este problema se intenta encontrar el conjunto de rotaciones que ofrecen mayores oportunidades para realizar el mantenimiento de las aeronaves. Como ya se contentó, la aerolínea Ultimate Air realiza este mantenimiento rutinario durante la noche en un periodo cada tres días. Por tanto, cada tres días la aeronave debe pasar al menos una noche en la base de mantenimiento que es el aeropuerto de JFK.

Con el fin de maximizar las oportunidades de mantenimiento, se seleccionarán aquellas rotaciones que pasen un mayor número de noches en el aeropuerto JFK. Para ello, en la función objetivo, se multiplicará cada rotación por el número de noches que esa rotación pasa en JFK (del 1 al 3). De esta manera se le da un mayor peso a las rotaciones que pasan más noches en JFK.

Es muy importante tener en cuenta que pasar más noches en JFK no significa que se realice el mantenimiento más veces. El beneficio está en tener más versatilidad a la hora de programar el mantenimiento de todas las aeronaves, ya que la base de mantenimiento tiene unos recursos limitados.

El modelo matemático de este problema es:

$$\max \sum_{j \in N} m_j x_j \qquad sujeto\ a: \begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall\, i \in M & (4–13) \\ x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in N & (4–14) \end{cases}$$

La restricción (4-13) garantiza que se cubran todos los vuelos diarios y la restricción (4-14) impone que todas las variables de decisión sean binarias. La variable m_j toma el valor del número de noches que la rotación j pasa en el aeropuerto JFK. Esta variable se calcula d forma simultánea al proceso de generación de columnas.

4.2.3 Problema 3. Maximizar las oportunidades de mantenimiento y minimizar el número de aviones necesarios

Este problema une los dos objetivos anteriores y pretende encontrar el conjunto de rotaciones que ofrecen mayores oportunidades de mantenimiento utilizando el mínimo número de aeronaves. Como se observó en el problema anterior, aumentar el número de noches que las aeronaves pasan en JFK, supone un aumento significativo de aviones necesarios.

Para no aumentar la dificultad de este problema multiobjetivo, se plantea un modelo con una función objetivo que maximiza las oportunidades de mantenimiento y que tiene como restricción que el número total de rotaciones seleccionadas no supere el número de aviones disponibles de esa flota (F). En principio, esta restricción (4-16) no minimiza el número de aeronaves. Sin embargo, si este problema se resuelve iterativamente desde un valor de $F = 1$ hasta que exista una solución, se encontrará el valor de $F = nº\ aviones_{mín}$. Sin embargo, esta iteración es innecesaria, pues se conoce cual va a ser el valor $nº\ aviones_{mín}$ que ha sido calculado en el apartado 4.2.1.

Es muy importante tener en cuenta que, tal y como se ha planteado el problema, el elemento limitante es la restricción (4-16), pues el problema no tendrá solución hasta que se ponga $F = nº\ aviones_{mín}$. Para ese valor de F, se buscarán las rotaciones que maximizan la función objetivo.

$$\max \sum_{j \in N} m_j x_j \quad sujeto\ a: \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall\, i \in M & (4\text{–}15) \\ \sum_{j \in N} x_j \leq F & (4\text{–}16) \\ x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in N & (4\text{–}17) \end{cases}$$

La restricción (4-15) garantiza que se cubran todos los vuelos diarios y la restricción (4-17) impone que todas las variables de decisión sean binarias. Al igual que en el problema anterior, la variable m_j toma el valor del número de noches que la rotación j pasa en el aeropuerto JFK.

4.2.4 Problema 4. Minimizar la desviación de la utilización

Con este problema se intenta encontrar las rotaciones que tienen una utilización lo más parecida posible a la media, de forma que todas las aeronaves realicen aproximadamente las mismas horas de vuelo. Esto se mide a través de la desviación estándar de las horas de vuelo de las rotaciones. La utilización de una rotación es la suma de las horas de vuelo de cada uno de los tramos de vuelo que se asignan a esa rotación a lo largo de los tres días.

La desviación estándar se calcula como la raíz cuadrada de la suma de las desviaciones de las rotaciones que forman la solución elevadas al cuadrado, dividido entre el número de rotaciones que forman la solución (4-18).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N^o rot} \left(Util_j - \overline{Util}\right)^2}{N^o\ rotaciones}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N^o rot} \left(D_j\right)^2}{N^o\ rotaciones}} \tag{4–18}$$

, siendo σ la desviación estándar de la utilización de la solución, D_j la desviación de la utilización de la rotación j, $Util_j$ la utilización de la rotación j y $\overline{Util}$ la media de la utilización de todas las rotaciones.

Con el fin de obtener el conjunto de rotaciones que minimizan la desviación estándar, se calcula la desviación de todas las rotaciones válidas, D_j y se plantea un problema de optimización que tiene como función objetivo el producto del valor absoluto la desviación de la rotación j, D_j por la variable de decisión x_j. Así se le dará un menor peso a aquellas rotaciones que tengan una desviación menor.

El modelo matemático del problema es:

$$\min \sum_{j \in N} |D_j|\, x_j \quad sujeto\ a: \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall\, i \in M & (4\text{–}19) \\ x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in N & (4\text{–}20) \end{cases}$$

La restricción (4-19) garantiza que se cubran todos los vuelos diarios y la restricción (4-20) impone que todas las variables de decisión sean binarias. La variable D_j toma el valor de la desviación de la rotación j.

4.2.5 Problema 5. Minimizar la desviación de la utilización y minimizar el número de aviones

Con este problema se pretende encontrar el conjunto de rotaciones que ofrecen la mínima desviación de las horas de vuelo respecto del valor utilizando el mínimo número de aeronaves. En el problema 4 (apartado 4.2.4), se ha visto como minimizar la desviación total de las rotaciones seleccionadas puede llevar a un aumento del número de los aviones necesarios.

Al igual que en el problema 3 (apartado 4.2.3), se plantea un modelo con una función objetivo que minimiza las oportunidades de mantenimiento y que tiene como restricción que el número total de rotaciones seleccionadas no supere el número de aviones disponibles de esa flota (F). En principio, esta restricción (4-22) no minimiza el número de aeronaves. Sin embargo, si este problema se resuelve iterativamente desde un valor de $F = 1$ hasta que exista una solución, se encontrará el valor de $F = nº\ aviones_{mín}$. Esta iteración es innecesaria, pues se conoce cual va a ser el valor $nº\ aviones_{mín}$ pues se conoce cual va a ser el valor $nº\ aviones_{mín}$ que ha sido calculado en el apartado 4.2.1.

Es muy importante tener en cuenta que, tal y como se ha planteado el problema, el elemento limitante es la restricción (4-22), pues el problema no tendrá solución hasta que se ponga $F = nº\ aviones_{mín}$. Para ese valor de F, se buscarán las rotaciones que maximizan la función objetivo.

El modelo matemático de este problema es:

$$\min \sum_{j \in N} D_j x_j \qquad sujeto\ a: \begin{cases} \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i \quad \forall\, i \in M & (4\text{–}21) \\ \sum_{j \in N} x_j \leq F & (4\text{–}22) \\ x_j \in \{0,1\} \qquad \forall\, j \in N & (4\text{–}23) \end{cases}$$

La restricción (4-21) garantiza que se cubran todos los vuelos diarios y la restricción (4-23) impone que todas las variables de decisión sean binarias. Al igual que en el problema anterior, la variable D_j toma el valor de la desviación de la rotación j.

4.3 Resultados

Utilizando el solucionador *intlinprog* de Matlab con cada uno de los problemas de optimización propuestos anteriormente se obtienen los siguientes resultados para las dos flotas que dispone la aerolínea Ultimate Air.

4.3.1 Flota de aviones B757-200

Como resultado del proceso de generación de rotaciones se han obtenido un total de 455. En el primer paso, se generaron 32 rotaciones de un día que dieron lugar a 269 rotaciones de dos días.

- Problema 1

  El programa ha dado como resultado una solución donde es necesario 8 aviones. Puesto que la aerolínea Ultimate Air dispone únicamente de 6 aviones B757-200, se llega a la conclusión de que no existe ninguna solución factible con la que se puedan realizar todos los vuelos asignados a esta flota con un número de aviones inferior o igual a 6. Esto implica que se necesitarían dos aviones B757-200 más de los que dispone la aerolínea Ultimate Air.

  Este valor mínimo encontrado se impondrá como restricción para la resolución de los problemas 3 y 5.

Tabla 4-7. Solución óptima al problema 1, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3	Utilización (h)	Desviación	Noches JFK
1	125	105	138 118	14	0.96	2
2	110 135	114	131 111 133	16	2.96	1
3	113 133	110	136	11	2.03	1
4	131 111	125	105	16	2.96	2
5	105	138 118	125	14	0.96	2
6	138 118	133	110	8	5.03	2
7	114	131 111 136	113 135	17	3.96	1
8	136	113 135	114	12	1.03	1
				$\overline{\text{Util}}$ 13.5	σ 3.02	Σ 12

- Problema 2

  Maximizando las oportunidades de mantenimiento sin imponer restricciones acerca del número de aviones se obtiene que la flota de aviones B757-200 pasará un máximo de 15 noches, repartidas a lo largo de los tres días, en el aeropuerto JFK. La mayoría de las rotaciones ofrecen dos oportunidades de mantenimiento. El número de aviones B757-200 necesarios para maximizar las oportunidades de mantenimiento es 9. Esto implica, que serían preciosos tres aviones más de los que dispone la flota de B757-200 de la aerolínea Ultimate Air.

Tabla 4-8. Solución óptima al problema 2, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desviación	Noches JFK
1	125	105	131 111	16	2.96	2
2	110 136	114	133	11	2.04	1
3	113	131 111	135	11	2.04	2
4	131 111	133	110	10	3.04	2
5	105	138 118	125	14	0.96	2
6	138 118	125	105	14	0.96	2
7	114	135	113 136	12	1.04	1
8	135	113	138 118	9	4.04	2
9	133	110 136	114	11	2.04	1
				$\overline{\text{Util}}$ 12	σ 2.24	Σ 15

- Problema 3

  Buscando maximizar las oportunidades de mantenimiento para el número mínimo de aviones necesarios (8 aviones) se obtiene como resultado que la flota de B757-200 pasará un máximo de 12 noches en la base de mantenimiento. Estos resultados coinciden con los obtenidos en el problema 1, a pesar de que las rotaciones seleccionadas difieren ligeramente.

Tabla 4-9. Solución óptima al problema 3, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desviación	Noches JFK
1	125	105	138 118	14	0.96	2
2	110 138 118	138 118	131 111 133	16	2.96	2
3	113 135	114	135	12	1.04	1
4	131 111	125	105	16	2.96	2
5	105	131 111	125	16	2.96	2
6	114	136	113 136	12	1.04	1
7	133	110 135	114	11	2.04	1
8	136	113 133	110	11	2.04	1
				$\overline{\text{Util}}$ 13.5	σ 2.27	Σ 12

- Problema 4

  Si se resuelve el problema de minimización de la desviación de la utilización para la flota de B757-200 se obtiene una desviación estándar de 1.31, que comparado con la obtenida en los problemas anteriores (3.24, 2.24, 2.27) supone una gran disminución. Esto se puede observar, en las horas de vuelo pues todas las rotaciones de la solución tienen una utilización alrededor de 13 que es la media. Es muy importante entender que los valores de desviación de cada rotación que aparece en Tabla 4-10 se calculan respecto a la utilización media de todas las rotaciones válidas, que es 13.04 (Figura 4-7) y que se corresponden con los factores de ponderación por los que se multiplican las variables de decisión en la función objetivo. Posteriormente, una vez se ha obtenido las rotaciones óptimas, se calcula la desviación estándar de la utilización de esas rotaciones óptimas (1.31) y la utilización media (13.5).

  Por otro lado, se puede ver que el número de aviones B757-200 necesarios es 8, esto equivale con el número mínimo obtenido en el problema 1. En este caso minimizar la desviación conlleva la minimización del número de rotaciones seleccionadas.

Tabla 4-10. Solución óptima al problema 4, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desviación	Noches JFK
1	125	105	138 118	14	0.96	2
2	110 133	110	131 111 133	15	1.96	1
3	113 135	114	136	12	1.04	1
4	131 111	131 111 133	110	15	1.96	2
5	105	138 118	125	14	0.96	2
6	138 118	125	105	14	0.96	2
7	114	135	113 135	12	1.04	1
8	136	113 136	114	12	1.04	1
				$\overline{\text{Util}}$ 13.5	σ 1.31	Σ 12

- Problema 5

  Si se minimiza la desviación de la utilización para el número mínimo de aviones B757-200 necesarios (8 aviones) se obtiene una solución prácticamente igual que en el problema 4, donde solo se minimizaba la desviación y se obtenía una desviación mínima de 1.31, 8 rotaciones y 12 oportunidades de mantenimiento.

  Como ya se comentó en el problema 4, para la flota de B757-200 minimizar la desviación de la utilización va unido a minimizar el número de aviones necesarios. Es por ello, que apenas, se encuentra diferencia al añadir esta condición.

Tabla 4-11. Solución óptima al problema 5, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desviación	Noches JFK
1	125	105	138 118	14	0.96	2
2	110	131 111	131 111 133	15	1.96	2
3	113 135	114	136	12	1.04	1
4	131 111 133	110 133	110	15	1.96	1
5	105	138 118	125	14	0.96	2
6	114	125	105	14	0.96	2
7	133	135	113 135	12	1.04	1
8	136	113 136	114	12	1.04	1
				$\overline{\text{Util}}$ 13.5	σ 1.31	Σ 12

Por último, se muestra una tabla comparativa cotejando las variables objetivo medidas en los problemas cinco problemas anteriores.

Tabla 4-12. Tabla comparativa con las soluciones de todos los problemas, flota B757-200

Problema	Nº de aviones	Noches en JFK	Desv. estándar de la utilización	Utilización media (h)
1. Minimizar nº aviones	8	12	3.02	13.5
2. Minimizar nº aviones	9	15	2.24	12
3. Max oportunidades de mantenimiento + min. nº aviones	8	12	2.27	13.5
4. Minimizar la desviación de la utilización	8	12	1.31	13.5
5. Min. la desviación de la utilización + min. nº de aviones	8	12	1.31	13.5

Se observa que, al imponer la restricción del número mínimo de aviones, 8, el número de oportunidades de mantenimiento es siempre 12, aunque la desviación de la utilización varía entre los problemas. La desviación estándar de la solución tiene un valor mínimo de 1.31. La utilización media de las rotaciones seleccionadas en todos los problemas es 13.5 horas, salvo cuando se minimiza el número de aviones. El número máximo de noches en JFK cubriendo todos los vuelos asignados a esta flota es 15. Por último, en ambos problemas que tienen como función objetivo minimizar la desviación de las horas de vuelo, se obtienen exactamente los mismos resultados, a pesar de que hay ligeras diferencias en las rotaciones seleccionadas en la solución.

No se ha obtenido una solución factible con el número de aeronaves que dispone la aerolínea (6 aviones B757-200). En la realidad las aerolíneas se enfrentan a menudo con este problema donde los aviones existentes son insuficientes para volar el plan de vuelo propuesto. La principal causa de este problema viene de la desincronización que existe entre los horarios de salida y llegada de los vuelos.

Si se analiza la solución obtenida en el problema 1 (Tabla 4-7), se puede ver que hay varios vuelos (125, 105, 114) que siempre aparecen solos en la rotación. En la Tabla 4-2 se comprueba que el horario de dichos vuelos no está sincronizado y como consecuencia no se pueden conectar con otros vuelos.

Tabla 4-13. Vuelos no sincronizaados, flota de B757-200

Nº Vuelo	Origen	Hora salida	Destino	Hora llegada	Duración (h)
125	JFK	7:25	SFO	9:55	5.5
105	SFO	9:50	JFK	18:20	5.5
114	MIA	14:30	JFK	17:30	3

Mirando la Tabla 4-13 se ve que el vuelo 125 llega a SFO a las 9:55. Ese mismo avión no puede volar el vuelo 105 porque sale a las 9:50. Por tanto, el avión que realiza el tramo de vuelo 125 se queda varado en SFO durante el resto del día, pues no hay otros vuelos desde SFO para que puedan conectarse con este.

Para solucionar la falta de sincronización, es necesario adelantar o atrasar la hora de salida del vuelo afectado, o bien modificar el horario de los vuelos que puedan ser conexión de los anteriores. Por ejemplo, para subsanar la no sincronización del vuelo 125, se ha optado por retrasar la hora de salida del vuelo 105. El nuevo horario de salida del vuelo 105 se calcula como la hora de llegada del vuelo 125 más el tiempo de turn-around (45 minutos).

En la Tabla 4-14 se muestra el horario revisado de algunos vuelos para aumentar la sincronización entre ellos. Con este nuevo plan de vuelo, los vuelos 125, 105 y 114 pueden ser emparejados.

Tabla 4-14. Horarios revisados para los vuelos no sincronizados, flota de B757-200

Nº Vuelo	Origen	Hora salida	Destino	Hora llegada	Duración(h)	Hora salida nueva	Hora llegada nueva
105	SFO	9:50	JFK	18:20	5.5	10:40	19:00
136	JFK	18:10	MIA	21:10	3	19:45	22:35
114	MIA	14:30	JFK	17:30	3	18:55	22:55

Este cambio se incorpora al programa generador de columnas para calcular las nuevas rotaciones de tres días válidas. Se vuelven a resolver los cinco modelos, tal y como se hizo anteriormente, obteniéndose las soluciones óptimas.

La tabla muestra la solución obtenida para el problema de encontrar el número mínimo de aviones necesarios para realizar el plan de vuelo revisado. El cambio propuesto a llevado a una solución donde se necesitan únicamente 4 aviones B757-200 para realizar el plan de vuelo desapareciendo el problema con los aviones disponibles de esta flota. Se puede ver como la utilización de las rotaciones ha aumentado comparado con solución obtenida sin la revisión del plan de vuelo (Tabla 4-7). Sin embargo, la media de la utilización de todas las rotaciones válidas es baja, 16.32, haciendo que la desviación total sea elevada. En relación con las oportunidades de mantenimiento, esta solución ofrece 6 noches en JFK.

Tabla 4-15. Solución óptima al problema 1 tras la revisión del horario, flota de B757-200

Rotación	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desviación	Noches JFK
1	125 105 136	113 135 114	125 105	34	17.68	2
2	110 138 118 133	110 138 118	131 111 133	21	4.68	1
3	113 135 114	131 111 133	110 138 118 136	25	8.68	1
4	131 111	125 105 136	113 135 114	28	11.68	2
				$\overline{\text{Util}}$ 27	σ 5.48	Σ 6

Para la solución anterior se muestra en la Tabla 4-16 qué noches pasa cada avión en tierra en el aeropuerto JFK. La marca de verificación (✓) indica que el avión pasa la noche en la base de mantenimiento. Las rotaciones 1 y 4 proporcionan dos oportunidades de mantenimiento durante el ciclo de tres días, aunque esto no significa que todas las noches se les realice el mantenimiento a esos aviones.

Tabla 4-16. Noches en JFK para la solución óptima de la Tabla 4-15, flota de B757-200

Rotación	Noche 1	Noche 2	Noche 3
1		✓	✓
2		✓	
3	✓		
4	✓		✓
Total	2	2	2

Actualizando los datos de la tabla comparativa (Tabla 4-17) para todos los modelos de optimización resueltos, se observa que siempre que se impone el número mínimo de aviones (4 aviones), los resultados son iguales (6 oportunidades de mantenimiento y una desviación total de 42.70). El número máximo de noches transcurridas en JFK es mayor que en la Tabla 4-12, 18 noches en JFK frente a 15. Pese a que el valor mínimo de la desviación total es más pequeño (6.27 frente a 9.93), comparado con el obtenido antes de la revisión (Tabla 4-12), la desviación total de todos los problemas aumenta.

Tabla 4-17. Tabla comparativa con las soluciones de todos los problemas tras la revisión del horario, flota B757-200

Problema	Nº de aviones	Noches en JFK	Desviación total de la utilización	Utilización media (h)
1. Minimizar nº aviones	4	6	5.48	27
2. Minimizar nº aviones	9	18	3.35	12
3. Max oportunidades de mantenimiento + min. nº aviones	4	6	5.48	27
4. Minimizar la desviación de la utilización	7	12	0.79	15.43
5. Min. la desviación de la utilización + min. nº de aviones	4	6	5.48	27

Con este proceso se ha demostrado, que cambiar la hora de salida de tres vuelos resulta en una solución con 4 aviones menos. Sin embargo, una mayor sincronización de las horas de llegada y salida de estos vuelos reduciría aún más el número de aviones necesarios o permitiría incluir algún vuelo más.

El proceso de cambio de la hora de salida/llegada es común entre las aerolíneas. El plan de vuelo inicial, del que se partió, es propuesto por el departamento de marketing y el departamento de construcción de planes de vuelo. El equipo de operaciones es el encargado de analizar si ese plan de vuelo es viable, y le devuelve sus conclusiones y posibles cambios al departamento de construcción de planes de vuelo. Este proceso de retroalimentación continúa hasta que totas las partes obtienen resultados satisfactorios.

Una vez la aerolínea considera que sus rutas son factibles y están optimizadas, se asigna un avión particular (número de cola) a cada rotación. En el caso de estudio de la aerolínea Ultimate Air, es indiferente el método por el cual se asigna un avión a una rotación. Sin embargo, las aerolíneas sí suelen utilizar algún criterio específico, como puede ser la antigüedad de las aeronaves dentro de la flota, para asignar cada rotación.

4.3.2 Flota de aviones B737-800

Como resultado del proceso de generación de rotaciones se han obtenido un total de 120087. En el primer paso, se generaron 288 rotaciones de un día que dieron lugar a 15117 rotaciones de dos días.

- Problema 1

  De nuevo, y tal y como, ocurría con la flota de aviones B737-800 no existe solución factible con solo 9 aviones que dispone la aerolínea. El número mínimo de aviones necesarios para cubrir todos los vuelos asignados a la flota de B737-800 es 11. Como la aerolínea Ultimate Air dispone únicamente de 9 aviones B737-800, serán necesarios 2 aviones más para cumplir con el plan de vuelo propuesto.

Tabla 4-18. Solución óptima al problema 1, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	101 126	104 129 109	140 119 123	28	12.37	1
2	104 132 112	137 117 142 121	107 141 120 127	27	11.37	1
3	116 128 108 127	106	128 108 139	22	6.37	1
4	140 119 134 115	122 103	122 103	30	14.37	3
5	107 142 121 130	107 132 112	137 117 142 121 130	20	4.37	1
6	122 103	134 115	129 109	21	5.37	1
7	137 117 123	101 126	104 132 112	30	14.37	1
8	102	141 120 124	102 124	24	8.37	1
9	141 120 124	102 127	106	24	8.37	1
10	29 109 139	116 128 108 139	116 134 115	20	4.37	1
11	106	140 119 123	101 126	24	8.37	1
				$\overline{\text{Util}}$ 24.55	σ 3.72	Σ 15

- Problema 2

  Maximizando las oportunidades de mantenimiento sin imponer restricciones acerca del número de aviones se obtiene que la flota de aviones B737-800 pasará un máximo de 45 noches en la base de mantenimiento. Todas las rotaciones ofrecen dos oportunidades de mantenimiento, salvo algunas que pasan tres. Estas últimas rotaciones volverán todas las noches al aeropuerto JFK. Este gran número de oportunidades de mantenimiento se obtiene a expensas de aumentar el número de rotaciones seleccionadas, o lo que es lo mismo, el número de aviones necesarios (21 aviones B737-800).

Tabla 4-19. Solución óptima al problema 2, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	101	128 108	124	15	0.63	2
2	104	142 121	127	13	2.63	2
3	116	141 120	139	5	10.63	2
4	140 119	123	101	13	2.63	2
5	107	132 112	130	9	6.63	2
6	122 103	140 119	129 109	17	1.37	3
7	137 117	126	106	14	1.63	2
8	102	134 115	123	17	1.37	2
9	128 108	122 103	142 121	17	1.37	3
10	134 115	124	102	17	1.37	2
11	141 120	130	107	6	9.63	2
12	132 112	139	116	8	7.63	2
13	129 109	127	104	15	0.63	2
14	142 121	129 109	128 108	10	5.63	3
15	106	137 117	126	14	1.63	2
16	126	106	141 120	13	2.63	2
17	123	102	140 119	13	2.63	2
18	124	101	132 112	16	0.37	2
19	127	104	137 117	14	1.63	2
20	130	107	122 103	15	0.63	2
21	139	116	134 115	9	6.63	2
				$\overline{\text{Util}}$ 12.86	σ 3.65	Σ 45

- Problema 3

  Buscando maximizar las oportunidades de mantenimiento para el número mínimo de aviones necesarios (11 aviones) se obtiene como resultado que la flota de B737-800 pasará un máximo de 15 noches en la base de mantenimiento. Estos resultados coinciden con los obtenidos en el problema 1, a pesar de que las rotaciones seleccionadas difieren ligeramente.

Tabla 4-20. Solución óptima al problema 3, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	101 129 109 139	116 134 115	128 108 124	28	12.37	1
2	104 132 112	123	102 127	27	11.37	1
3	116 141 120	140 119 128 108 127	104 132 112 139	27	11.37	1
4	140 119 134 115	137 117 142 121 130	107 129 109	21	5.37	2
5	107 123	102	141 120 130	17	1.37	1
6	122 103	126	106	22	6.37	2
7	137 117 126	104 129 109	122 103	29	13.37	2
8	102 127	106	137 117 123	25	9.37	1
9	128 108 124	101 132 112 139	116 134 115	29	13.37	1
10	142 121 130	107 141 120 124	101 142 121	21	5.37	1
11	106	122 103	140 119 126	24	8.37	2
				$\overline{\text{Util}}$ 24.55	σ 3.91	Σ 15

- Problema 4

  Si se resuelve el problema de minimización de la desviación de las horas de vuelo para la flota de B737-800 se obtiene una desviación de 0.60 que comparado con la obtenida en los problemas anteriores (3.72, 3.65, 3.91) supone una gran disminución. Se observa que, la mayoría de las rotaciones seleccionadas tienen una desviación de las horas de vuelo inferior a 1, siendo la media de las horas de vuelo de todas las rotaciones válidas 15.63 (Figura 4-9).

  Por otro lado, a diferencia de lo que ocurría para la flota de B757-200, minimizar la desviación no implica minimizar el número de rotaciones seleccionadas, obteniéndose un total de 17 rotaciones. De esta forma, se ha conseguido una desviación mínima, pero se ha aumentado el número de aviones necesarios respecto del mínimo (11 aviones) obtenido en el problema 1 (Tabla 4-18).

Tabla 4-21. Solución óptima al problema 4, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	101	130	108 124	15	0.63	1
2	104 142	119	137 117 126	16	0.37	1
3	116	140 120 124	102 139	16	0.37	1
4	140 119 123	101 139	116	16	0.37	1
5	107 141 120	134 115	140 119 141 121 130	16	0.37	2
6	122 103	132	112	16	0.37	2
7	137 117 127	104 142	120	16	0.37	1
8	102 139	116 141 121	123	16	0.37	1
9	128	108 127	104	15	0.63	1
10	134 115	126	106	17	1.37	2
11	108 124	102	128	15	0.63	1
12	132	112	122 103	16	0.37	2
13	129 109 130	107 129	107 129 109	16	0.37	1
14	106	128 109	127	15	0.63	2
15	126	106	134 115	17	1.37	2
16	112	122 103	132	16	0.37	2
17	121	137 117 123	101 142	16	1.37	1
				$\overline{\text{Util}}$ 15.88	σ 0.60	Σ 24

- Problema 5

  Minimizar la desviación para el número de aviones mínimo (11 aviones) implica que la desviación total aumente desde 0.60 del problema 4 a 4.76. El número de aviones a pasado de ser 17 (Tabla 4-21) a 11.

Tabla 4-22. Solución óptima al problema 5, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	101 142 121 139	116 142 121	128 108 124	22	6.37	1
2	104 132 112	141 120 124	102 127	29	13.37	1
3	116 134 115	137 117 123	101 129 109 139	27	11.37	1
4	140 119 128 108 124	102 127	104 142 121	30	14.37	1
5	107 123	101 132 112	140 119 141 120 130	24	8.37	1
6	122 103	122 103	122 103	33	17.37	3
7	137 117 126	104 126	106	25	9.37	1
8	102	140 119 134 115	137 117 123	22	6.37	2
9	141 120 127	106	132 112	18	2.37	2
10	129 109 130	107 129 109 139	116 134 15	21	5.37	1
11	106	128 108 130	107 126	19	3.37	1
				$\overline{\text{Util}}$ 24.55	σ 4.76	Σ 15

A continuación, se muestra la siguiente tabla comparativa con las soluciones de todos los problemas planteados anteriormente:

Tabla 4-23. Tabla comparativa con las soluciones de todos los problemas, flota B737-800

Problema	Nº de aviones	Noches en JFK	Desviación total de la utilización	Utilización media (h)
1. Minimizar nº aviones	11	15	3.72	24.55
2. Minimizar nº aviones	21	45	3.65	12.86
3. Max oportunidades de mantenimiento + min. nº aviones	11	15	3.91	24.55
4. Minimizar la desviación de la utilización	17	24	0.60	15.88
5. Min. la desviación de la utilización + min. nº de aviones	11	15	4.76	24.55

El número máximo de noches en JFK cubriendo todos los vuelos asignados a esta flota es 45 aunque esto lleva a 21 aeronaves necesarias (más del doble del número de aviones mínimo). Por último, para minimizar la desviación de las horas de vuelo de las rotaciones seleccionadas, es necesario aumentar el número de aviones necesarios (17 aviones) y también aumentan las oportunidades de mantenimiento (24 noches).

Al igual que ocurría para la flota de B757-200, no se obtiene una solución factible con el número de aeronaves que dispone la aerolínea (9 aviones B737-800). Por ello, se vuelve a examinar la solución obtenida en el problema 1 (Tabla 4-18)en busca de aquellos vuelos no sincronizados que obliguen a la aeronave a quedarse varada en el aeropuerto de destino al finalizar el día. Se identifica que el vuelo 106 siempre aparece solo en la rotación.

Tabla 4-24. Vuelos no sincronizados, flota de B737-800

Nº Vuelo	Origen	Hora salida	Destino	Hora llegada	Duración (h)
106	SFO	15:25	JFK	23:55	5.5

Mirando la Tabla 4-24 se ve que el vuelo 106 sale de SFO a las 15:25 y llega a JFK a las 23:55. Comprobando todos los vuelos asignados a la flota de B737-800, no existe ningún tramo de vuelo que llegue a SFO antes de las 14:40 (15:25 – tiempo de turn-around). Para poder conectar este vuelo con otros, es necesario modificar el tiempo de llegada de un vuelo que tenga como destino SFO.

En la Tabla 4-25 se muestra el horario revisado del vuelo 126 para poderlo emparejar con el vuelo 106.

Tabla 4-25. Horarios revisados para los vuelos no sincronizados, flota de B757-200

Nº Vuelo	Origen	Hora salida	Destino	Hora llegada	Duración(h)	Hora salida nueva	Hora llegada nueva
126	JFK	15:30	SFO	17:30	5.5	18:55	22:55

Este cambio se incorpora al programa generador de rutas para calcular las nuevas rutas de tres días válidas. Se vuelven a resolver los cinco modelos, tal y como se hizo anteriormente, obteniéndose las soluciones óptimas.

La tabla muestra la solución obtenida para el problema de encontrar el número mínimo de aviones necesarios para realizar el plan de vuelo revisado. El cambio propuesto a llevado a una solución donde se necesitan 10 aviones B737-800 para realizar el plan de vuelo y donde ningún avión se queda varado en un destino. A pesar de obtener una solución mejor, desde el punto de vista de número de aviones necesarios, este cambio sigue siendo insuficiente pues la aerolínea dispone únicamente de 9 aviones B737-800.

Tabla 4-26. Solución óptima al problema 1 tras la revisión del horario, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	101 142 121	140 119 123	102 124	26	9.58	1
2	104 132 112	122 103	140 119 141 120 127	31	14.58	2
3	116 134 115	134 115	137 117 132 112 139	23	6.58	2
4	140 119 123	102 124	101 142 121	26	9.58	1
5	107 126 106	137 117 129 109 139	116 128 108 130	29	12.58	1
6	122 103	141 120 127	104 129 109	28	11.58	2
7	137 117 129 109 130	107 126 106	122 103	33	16.58	2
8	102 127	104 142 121	123	24	7.58	1
9	128 108 124	101 132 112	134 115	26	9.58	2
10	141 120 139	116 128 108 130	107 126 106	24	7.58	1
				$\overline{\text{Util}}$ 27	σ 3.23	Σ 15

Se han realizado otros cambios menores en algunos vuelos sin lograr una solución que permita volar todos los vuelos con nueve aeronaves. Sería necesario una modificación completa del plan de vuelo para lograr una solución factible. Sin embargo, cuando esto ocurre, es necesario coordinarse con el departamento de marketing para analizar la demanda del nuevo plan de vuelo, ya que este puede ser operacionalmente viable pero no ser atractivo para los pasajeros.

A continuación, se presenta un nuevo plan de vuelo (Tabla 4-27) a partir del que se genera una solución factible con 9 aviones. Los cambios se han realizado manualmente tratando de unir todos los vuelos que tienen las mismas ciudades como origen/destino, e intentando que la rotación de un día empiece y acabe en el aeropuerto de JFK.

Tabla 4-27. Solución al problema de asignación de flota con grandes modificaciones en el horario, aviones

B737-800

	Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Duración (h)
1	101	LAX	11:30	JFK	20:00	5.5
2	104	SFO	12:00	JFK	20:30	5.5
3	116	BOS	10:00	JFK	11:30	1.5
4	140	JFK	6:20	IAD	7:20	1
5	107	ORD	8:45	JFK	11:45	2
6	122	JFK	7:35	LAX	10:05	5.5
7	137	JFK	7:40	BOS	9:10	1.5
8	119	IAD	8:15	JFK	9:15	1
9	102	LAX	10:50	JFK	19:20	5.5
10	117	BOS	18:00	JFK	19:30	1.5
11	128	JFK	7:00	ORD	8:00	2
12	134	JFK	10:00	MIA	13:00	3
13	141	JFK	12:00	IAD	13:00	1
14	108	ORD	14:15	JFK	17:15	2
15	120	IAD	14:25	JFK	15:25	1
16	132	JFK	17:30	ATL	20:00	2.5
17	129	JFK	12:30	ORD	13:30	2
18	142	JFK	16:10	IAD	17:10	1
19	103	LAX	15:20	JFK	23:50	5.5
20	106	SFO	15:25	JFK	23:55	5.5
21	126	JFK	5:05	SFO	8:35	5.5
22	123	JFK	8:00	LAX	10:30	5.5
23	109	ORD	19:45	JFK	2:45	2
24	112	ATL	20:45	JFK	23:15	2.5
25	115	MIA	13:45	JFK	16:45	3
26	121	IAD	18:30	JFK	19:30	1
27	124	JFK	10:00	LAX	13:30	5.5
28	127	JFK	11:00	SFO	14:30	5.5
29	130	JFK	18:00	ORD	19:00	2
30	139	JFK	15:30	BOS	17:0	1.5

Tabla 4-28. Solución óptima al problema 1 tras grandes modificaciones en el horario, flota de B737-800

Rot.	Día 1	Día 2	Día 3	Util. (h)	Desv.	Noches JFK
1	140 119 124 103	122 102	123 101	35	15.30	3
2	122 102	127 106	140 119 134 115 132 112	35	15.30	3
3	137 116 139 117	126 104	127 106	28	8.30	3
4	128 107 129 108 130 109	140 119 141 120 142 121	11 120 142 121	22	2.30	3
5	134 115 132 12	134 115 132 112	128 107 129 108 130 109	34	14.30	3
6	141 120 142 121	128 107 129 108 130 109	137 116 139 117	22	2.30	3
7	126 104	124 103	124 103	33	13.30	3
8	123 101	123 101	126 104	33	13.30	3
9	127 106	137 116 139 117	122 102	28	8.30	3
				$\overline{\text{Util}}$ 30	σ 5.24	Σ 27

La solución óptima no es única pues las todas las rotaciones de un día son ciclos que salen de JFK y al final del día vuelven a este aeropuerto. Por ello, según se combinen las rotaciones de un día se obtienen múltiples rotaciones de tres días válidas. Junto con la flexibilidad de generar rotaciones, esta solución también resulta óptima desde el punto de vista de maximización de oportunidades de mantenimiento, pues todas las rotaciones pasan todas las noches en la base de mantenimiento.

Por último, se muestra la siguiente tabla comparativa con las soluciones de todos los problemas planteados:

Tabla 4-29. Tabla comparativa con las soluciones de todos los problemas, flota B737-800 tras la modificación completa del plan de vuelo

Problema	Nº de aviones	Noches en JFK	Desviación total de la utilización	Utilización media (h)
1. Minimizar nº aviones	9	27	5.24	30
2. Minimizar nº aviones	19	45	6.09	14.21
3. Max oportunidades de mantenimiento + min. nº aviones	9	27	4.8	30
4. Minimizar la desviación de la utilización	14	36	1.38	19.29
5. Min. la desviación de la utilización + min. nº de aviones	9	27	5.38	30

El número máximo de noches en JFK cubriendo todos los vuelos asignados a esta flota sigue siendo 45 aunque esto lleva a 19 aeronaves necesarias (más del doble del número de aviones mínimo) frente a los 21 aviones que se necesitaban para el primer plan de vuelo. Para minimizar la desviación de las horas de vuelo de las rotaciones seleccionadas, ahora se necesitan 14 aviones (antes, 17 aviones) y las oportunidades de mantenimiento aumentan a 27 noches (antes, 24 noches).

5 CONCLUSIONES

Este trabajo ha presentado un modelo matemático para la asignación de aeronaves, cuya principal ventaja es su facilidad de implementación. Los resultados numéricos muestran que se puede resolver de forma óptima los distintos problemas propuestos con funciones objetivo lineales. Sin embargo, esta formulación resulta ser demasido larga cuando la flota es muy grande. En este sentido, se dice que es un modelo no compacto, pues el modelo de set partitioning involucra un número de variables de decisión que depende exponencialmente del tamaño del problema, en este caso el número de vuelos.

En los modelos de set-partitioning, cada variable de decisión 0-1 se corresponde a una cadena que recibe el nombre de rotación y que es una secuencia ordenada de vuelos que se origina y termina en el mismo aeropuerto. Como el número de rotaciones suele ser demasiado grande el tiempo de resolución aumenta considablemente al aumentar el número de vuelos. Esto se puede apreciar en la Tabla 5-1 donde se muestra el tiempo en minutos que Matlab tarda en resolver cada problema.

La flota de B757-200 tenía asignado un total de 12 vuelos, generándose 455 rotaciones de tres días en 14 centésimas de segundo. La resolución de los problemas de optimización a penas dura milésimas de segundo.

La flota de B737-800 tenía asignado un total de 30 vuelos, generándose 120087 rotaciones de tres días. Este aumento en el número de vuelos, el doble respecto a la flota de B757-200, implica que exista un 264% más de rotaciones. El tiempo de generación de rotaciones es de 16 minutos. El tiempo de resolución de los problemas de optimización está entorno al minuto y medio. Aunque destaca el tiempo de resolución del problema de minimización de las horas de vuelo que tarda casi una hora

Tabla 5-1. Tiempo de ejecución de cada problema en minutos

Problema	Flota de B757-200	Flota de B737-800
Generación de rotaciones	0.143	16.166
Optimización minimizando el nº de aviones	0.038	0.530
Optimización max. las oportunidades de mantenimiento	0.005	1.586
Optim. max. oportunidades de mantenimiento + min nº aviones	0.005	1.491
Optim. min. desviación de la utilización	0.008	57.825
Optim. min. desviación de la utilización + min nº aviones	0.002	0.743

Esto demuestra que el tiempo necesario para realizar la enumeración de rotaciones y de optimización crece de forma exponencial con la dimensión del problema, en este caso el número de vuelos. Siendo inviable la resolución de problemas con un gran número de vuelos. Esta limitación del método set-partitioning ha hecho que en los últimos años se hayan investigado otros métodos más compactos, como el presentado en [3].

Finalmente conviene hacer una comparación con la solución que aparece en [2]. En este, proponen generar rotaciones de 3 días por un procedimiento diferente a lo explicado en el apartado 4.1. Una vez se han generado las rotaciones de un día, el autor propone crear todas las combinaciones posibles de tres días, sin imponer ninguna restricción, y cómo último paso aplicar las restricciones. Sin embargo, generar todas las posibles combinaciones requiere mucho tiempo computacionalmente a lo que además habría que añadirle el tiempo de comprobación para rechazar todas las posibles opciones no válidas. Por ello, en este proyecto se ha optado por ir comprobando a la vez que se generan las rotaciones de dos y tres días (4.1).

Es muy importante comentar que, en el plan de vuelo presentado en [2] aparece una errata. El vuelo 132, asignado a la flota de aviones B757-800, con origen Nueva York (JFK) y destino Atlanta (ATL), tiene un horario de llegada incongruente con la hora de salida del vuelo.

Tabla 5-2. Información del vuelo 132 del plan de vuelo en [2]

Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Duración (h)
132	JFK	14:35	ATL	17:35	2.5

En laTabla 5-2. Información del vuelo 132 del plan de vuelo en Tabla 5-2 se comprueba que la hora de llegada del vuelo debería ser la hora de salida (14:35h) más la duración del vuelo (2:30h), igual a 17:05h. En cambio, el horario de llegada que aparece en [2] es 17:35. Por consiguiente, en este trabajo se ha utilizado los datos mostrados en la Tabla 5-3.

Tabla 5-3. Información del vuelo 132 utilizada en este proyecto

Nº vuelo	Origen	Hora de salida	Destino	Hora de llegada	Duración (h)
132	JFK	14:35	ATL	17:05	2.5

Por último, se confrontan los resultados del problema de asignación de aeronaves

- Flota de aviones B757-200

  El programa aquí presentando genera un total de 455 rotaciones de tres días válidas, llegando al mismo resultado que en [2]. Igualmente, se obtiene que el número de aviones mínimo necesario para realizar todos los vuelos diarios programados es 8, resultando ser una solución inviable ya que solo se disponen de 6 aviones B757-200. Tras unas modificaciones en el horario de algunos vuelos realizadas en [2], se obtiene una solución factible con 6 aviones. Sin embargo, la revisión del horario realizada aquí, aunmenta aún más la sincronización entre vuelos, obteniendo una solución únicamente con 4 aviones.

- Flota de aviones B737-800

  El número de rotaciones de tres días válidas en [2] es 6221, siendo este muy inferior al presentado en este documento, 120087. Se ha investigado en busca de irregularidades que hayan llevado a esta diferencia en el número de rotaciones. Sin embargo, todo apunta a que está correcto. Además, se ha utilizado el mismo programa matemático que en la flota de B757-200, para la que se ha obenido la misma solución que en [2]. Por lo que concierne a la solución del problema de asignación de aeronaves, la solución aquí presentada y la expuesta en [2] son similares. Si bien, la corrección en el horario del vuelo 132 (Tabla 5-3) ha llevado a una mayor sincronización de los vuelos, obteniendo una solución con 11 aviones, en vez de 12 [2]. Nuevamente, se obtiene una solución inviable ya que solo se disponen de 9 aviones B737-800. Los cambios propuestos en el plan de vuelo, tanto en este documento cómo en [2], son insuficientes, pues lo mejor que se obtiene es una solución con 10 aviones. Ha sido necesario una modicación completa del plan de vuelo para llegar a un resultado factible con 9 aviones.

BIBLIOGRAFÍA

[1] N. M. Kabbani y B. W. Patty, «Aircraft routing at American Airlines,» de *AGIFORS*, 1992.

[2] M. Bazargan, Airline Operations and Scheduling, Surrey, England: Ashgate, 2010.

[3] O. Khaled, M. Minoux, V. Mousseau, S. Michel y X. Ceugniet, «A compact optimization model for the tail assignment problem,» *European Journal of Operational Research,* 2017.

[4] A. Abdelghany y K. Abdelghany, Modeling applications in the airline industry, Ashgate, 2009.

[5] G. Stojkovic, F. Soumis, J. Desrosiers y M. M. Solomon, «An optimization model for a real-time flight schedulig problem,» *Transportation Research Part A: Policy and practice,* vol. 36, nº 9, pp. 779-788, 2002.

[6] A. Parmentier y F. Meunier, «Aircraft routing and crew pairing: Updated algorithms at Air France,» *Omega,* vol. 93, 2020.

[7] G. Desaulniers, J. Desrosiers, Y. Dumas, M. M. Solomon y F. Soumis, «Daily aircraft routing and scheduling,» *Management Science,* vol. 43, nº 6, pp. 841-855, 1997.

[8] A. Feo, Thomas y J. F. Bard, «Flight scheduling and maintenance base planning,» *Management Science,* vol. 35, nº 12, pp. 1415-1432, 1989.

[9] Z. Liang y W. Chaovalitwongse, «The aircraft maintenance routing problem,» de *Optimization and logistcs challenges in the enterprise*, Springer, 2009, pp. 327-348.

[10] R. Gopalan y K. T. Talluri, «The aircraft maintenance routing problem,» *Operation Research,* vol. 46, nº 2, pp. 260-271, 1998.