

## **Cálculo de placas mediante asimilación a emparrillados: Una revisión**

**José Luis Manzanares Japón**  
**Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos**  
**Catedrático de Universidad**  
**Dpto. de Mecánica de Medios Continuos,**  
**Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno**  
**Escuela Técnica Superior de Arquitectura**  
**Universidad de Sevilla**

**Miguel Angel Gil Martí**  
**Dr. Arquitecto**  
**Titular de Universidad (interino)**  
**Dpto. de Mecánica de Medios Continuos,**  
**Teoría de Estructuras e Ingeniería del Terreno**  
**Escuela Técnica Superior de Arquitectura**  
**Universidad de Sevilla**

### **1. INTRODUCCION**

En las circunstancias en que se mueve la construcción en España actualmente, tanto por cuestiones de ritmo de obra como por otras cuestiones económicas y estéticas, la elección de forjados planos de hormigón ha ido tomando un auge cada vez mayor. Dentro de los mismos y en función de su comportamiento estructural se puede elegir entre dos opciones básicas: forjados unidireccionales con vigas planas o forjados bidireccionales de placa maciza o aligerada. Cada uno de estos dos tipos tiene sus ventajas e inconvenientes:

—El forjado plano unidireccional encuentra sus mayores ventajas en la simplicidad constructiva, el uso de elementos prefabricados relativamente baratos y en su menor necesidad de encofrado.

—Las ventajas de los forjados del segundo tipo se derivan fundamentalmente de su comportamiento bidireccional: mayor rigidez transversal debida a una respuesta más continua y homogénea del forjado frente a cargas horizontales; mejor comportamiento frente a cargas puntuales, ya que su transmisión es más directa e involucra a más elementos; posibilidad de menores cantos a igualdad de cajas y luces (o lo que es lo mismo, posibilidad de soportar mayores cargas a igualdad de luces y canto, o posibilidad de mayores luces a igualdad de cargas y canto); mayor libertad en la colocación de los pilares, que no tienen que estar alineados, y, por tanto, mayor libertad para los diseñadores.

El análisis estructural de placas de comportamiento bidireccional, puede efectuarse mediante métodos aproximados, como el de Pórticos Virtuales o el de Diseño Directo, o mediante métodos más exactos, como el de Elementos Finitos; este último método resulta demasiado complejo y poco accesible para su aplicación indiscriminada en proyectos arquitectónicos, por lo que normalmente se utilizan los métodos aproximados, que a su vez tienen la desventaja de ser aplicables solamente en placas de geometría sencilla; todo esto trae como consecuencia, bien un empobrecimiento del diseño, bien una aplicación más allá de lo permitido de los métodos aproximados, previo aumento de los coeficientes de seguridad (o peor aún sin ese aumento).

El método de cálculo de placas por asimilación a emparrillado es un caso particular de análisis por elementos finitos, en el que el elemento elegido es del tipo barra lineal, con un comportamiento en su proceso de deformación bajo carga perfectamente determinado por la teoría general de vigas. Básicamente, el método consiste en sustituir un medio continuo (placa) por un medio discreto (emparrillado de vigas) tal que, sometido a las mismas cargas y con las mismas condiciones de apoyo, tenga idéntica deformada y esfuerzos. Las mayores ventajas de este método se derivan de su generalidad de aplicación (cualquier tipo de forma, de apoyos, de cargas) y de la facilidad de cálculo del emparrillado virtual por métodos, como el matricial de malla de barras, que requieren ordenadores de una capacidad relativamente pequeña (com-

parada con la necesaria para resolver el mismo problema por el método general de elementos finitos). Una dificultad es la falta de programas de cálculo de emparrillados en los cuales la entrada de datos sea sencilla y rápida y los resultados sean fácilmente comprensibles y directamente utilizables por el diseñador.

El método de cálculo de placas mediante asimilación a emparrillados de barras no es de aplicación directa e inmediata, sino que requiere el uso de una metodología que proporcione tanto la manera de pasar de un tipo estructural a otro (teniendo en cuenta la dificultad añadida de que uno es continuo y el otro discreto) como la de interpretar los resultados obtenidos en este último de forma que sean aplicables al primero. Actualmente, en la utilización práctica de este método se recurre a unos criterios, compilados de diversos autores y publicaciones, que en muchos casos dan lugar a errores que caen incluso del lado de la inseguridad.

Los principales problemas que se plantean al aplicar este método de asimilación son los siguientes:

—Discretización de la placa: número de barras que ha de utilizarse y disposición de las mismas.

—Reproducción de las características elastomecánicas: rigideces a flexión y torsión que han de asignarse a cada una de las barras del emparrillado virtual; efecto del módulo de Poisson.

—Reproducción del estado de cargas: distribución de las cargas reales actuantes en la placa entre los nudos y/o barras del emparrillado virtual.

—Interpretación de resultados (deformaciones y esfuerzos): aparición de discontinuidades en las leyes de esfuerzos en los nudos del emparrillado virtual; en el caso de placas de hormigón armado, composición de esfuerzos en cada punto para hallar esfuerzos de armado.

En el presente estudio se pretenden elaborar las bases para una correcta aplicación del método de cálculo de placas mediante asimilación a emparrillados de barras, demostrando que puede proporcionar una exactitud similar a la obtenida con el método general de elementos finitos, utilizando un esfuerzo computacional mucho menor. Para facilitar el análisis, en el Centro de Informática de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla se ha elaborado un programa que posee una entrada de datos interactiva, sencilla y rápida, y proporciona unos resultados de cálculo fácilmente interpretables y directamente utilizables por el proyectista.

Vamos en primer lugar a analizar el caso de

placas macizas, y después generalizaremos al caso de placas aligeradas (normalmente denominados forjados reticulares).

## 2. PLACAS MACIZAS

### 2.1. Formulación básica de placas macizas y de emparrillados

Según la teoría elástica clásica de placas delgadas, isótropas y homogéneas, los valores de los momentos actuantes son:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \left[ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \mu \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right] \\ M_y &= -\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot \left[ \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \mu \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \end{aligned} \quad [1]$$

y la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la placa en flexión es:

$$\frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + 2 \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} = \frac{12 \cdot (1 - \mu^2)}{E \cdot h^3} \cdot q \quad [2]$$

En el caso de un emparrillado de vigas de sección rectangular, de canto mucho menor que las luces en ambas direcciones y con deformaciones verticales pequeñas en comparación con el canto, las expresiones anteriores toman la forma:

$$\begin{aligned} M_x^e &= -\frac{E \cdot h^3}{12} \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x^2} \\ M_y^e &= -\frac{E \cdot h^3}{12} \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta y^2} \\ M_{xy}^e &= -\frac{2 \cdot G \cdot h^3}{12} \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x \delta y} \end{aligned} \quad [3]$$

$$\frac{\delta^4 w^e}{\delta x^4} + \frac{4 \cdot G}{E} \cdot \frac{\delta^4 w^e}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 w^e}{\delta y^4} = \frac{12}{E \cdot h^3} \cdot q \quad [4]$$

### 2.2. Planteamiento de condiciones iniciales

#### 2.2.1. Discretización de la placa

A la hora de proceder a la discretización de una placa hay que tener muy en cuenta cual va a ser su comportamiento real, bajo las cargas a que va a estar sometida y con sus condiciones de sustentación; cada placa tendrá su discretización óptima y sólo pueden darse unas reglas genéricas, e incluso, en determinados casos, algunas de ellas pueden no seguirse para encon-

trar la mejor solución.

—Las armaduras de refuerzo de las placas se disponen normalmente según dos direcciones ortogonales; esta circunstancia introduce una cierta ortotropía en su comportamiento. Para reproducir esta circunstancia de la mejor manera posible, es conveniente disponer las barras del emparrillado virtual según esas dos direcciones, formando una retícula ortogonal.

—Deberán disponerse barras que pasen en ambas direcciones por los apoyos puntuales de la placa, de forma que es en el nudo de intersección donde se introducen las condiciones de borde correspondientes. En el caso de apoyos continuos según una línea (por ejemplo apoyos sobre muros) deberán disponerse líneas de barra según sus ejes.

—Deberán disponerse barras coincidiendo con los bordes de la placa; el eje de estas barras deberá colocarse allí donde el flujo de tensiones tangenciales debidas a la torsión de la placa tenga su componente vertical, es decir, alejadas, aproximadamente, 0,3 veces el canto de la placa; en caso de existencia de soportes a lo largo de los bordes, en cambio, la mejor colocación de las barras será siguiendo los ejes de dichos soportes.

—Es conveniente disponer barras que pasen en ambas direcciones por los puntos donde existan cargas concentradas importantes, para facilitar su aplicación sobre el emparrillado virtual y conseguir que los resultados sean lo más parecidos posible a los que realmente se producen. En el caso de cargas lineales (muros de cerramiento, por ejemplo) es conveniente disponer líneas de barras que las recojan.

—En cuanto al número de barras que hay que disponer, dependerá mucho del grado de exactitud requerido y de la capacidad de almacenamiento y velocidad de proceso del ordenador: a mayor número de barras, mayor exactitud de los resultados, pero también mayor requerimiento de almacenamiento y mayor tiempo de proceso. Normalmente, vamos a hablar, más que de número de barras, de dis-

tancia entre ellas, expresando esta distancia como fracción de la luz entre ejes de apoyo,  $L$ . El mínimo razonable (como queda demostrado en 2.4.1) puede ser una disposición cada  $L/4$ , que corresponde a colocar 2 líneas de barras que pasan por los apoyos, una por el centro del vano y otras dos entre las anteriores (esta disposición, además, nos permite conocer los resultados en los puntos clave de la placa: apoyos y centros de vano); a partir de aquí se pueden usar discretizaciones más tupidas, en función tanto de la importancia de la exactitud de los resultados que se van a obtener como de la disponibilidad de tiempo y dinero.

—Es conveniente, cuando sea posible en función de las disponibilidades anteriores, tupir más la malla de barras en las zonas donde los esfuerzos varían más rápidamente (como por ejemplo los apoyos interiores) y en las cercanías de cargas importantes; esta operación, no obstante, habrá que realizarla con precaución y analizando cuidadosamente los resultados que produce, puesto que la coexistencia de barras de muy distinta longitud y ancho de influencia puede dar lugar a errores de condicionamiento de la matriz de rigidez del emparrillado, al mezclar números de muy distinta magnitud. Otro peligro latente en las discretizaciones locales es que las zonas del emparrillado virtual en que eso se produce casi no trabajen, y que los esfuerzos se concentren en los bordes de dichas "sobrediscretizaciones". Para evitar esta circunstancia, lo conveniente es prolongar las barras adicionales que se introduzcan, hasta que se intersecten con otras que pasen por puntos de apoyo.

### 2.2.2. Asignación de características elastomecánicas a las barras del emparrillado. Efecto del Módulo de Poisson

Las rigideces a flexión y torsión que han de asignarse a las vigas del emparrillado virtual deben ser iguales a las correspondientes a la zona de placa que sustituyen; en el caso general de discretización según una malla ortogonal

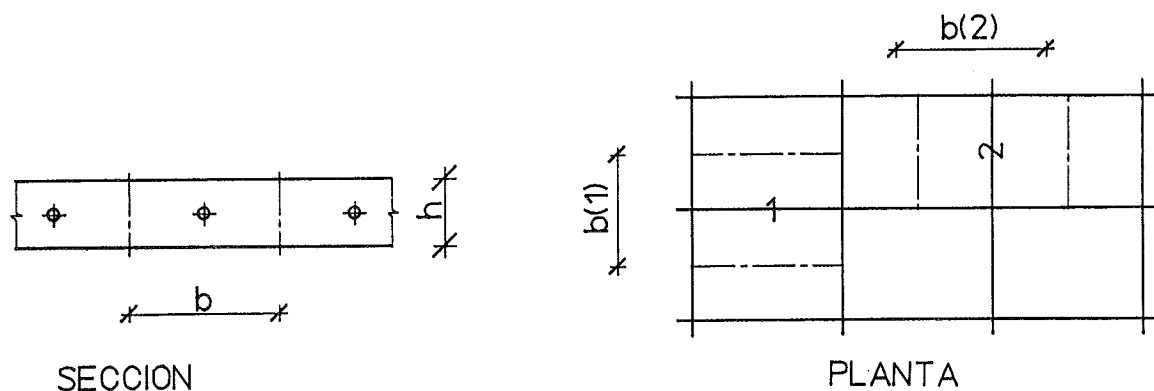


Fig. 1. Asignación de características elastomecánicas.

(Fig. 1), a cada viga se le asignan unas rigideces a flexión y torsión, iguales a las del trozo de placa comprendido entre las líneas medias de los dos cuadrados contiguos de la retícula.

El valor de la rigidez a torsión de una viga de dimensiones  $b \cdot h$  es:

$$M_t = K_t \cdot b \cdot h^3,$$

siendo  $b \leq h$

donde  $K_t$  es un coeficiente cuyo valor, obtenido por Timoshenko y Goodier (1), depende de la relación entre  $b$  y  $h$ :

$$K_t = \frac{1}{3} \cdot \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^5} \cdot \tanh \frac{n \cdot \pi \cdot h}{2 \cdot b} \right] \right] \quad [5]$$

El valor de la rigidez a torsión que debe asignarse a cada barra del emparrillado virtual es igual a la mitad del correspondiente a la viga, debido a que en su determinación en el caso de vigas aisladas se integran tanto las tensiones tangenciales longitudinales como las verticales, mientras que en las placas (que es el tipo estructural real que estamos asimilando) sólo se integran las longitudinales (Fig. 2).

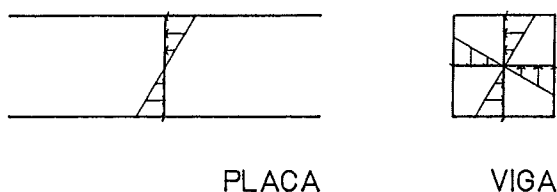


Fig. 2. Tensiones tangenciales en placas y vigas.

Así pues:

$$M_t = \frac{1}{2} \cdot K_t \cdot b \cdot h^3$$

Aunque  $K_t$  depende de la relación  $b/h$ , debemos darle un valor fijo igual a  $1/3$ , que corresponde a la relación  $b/h \rightarrow \infty$ , que es la que se da en la placa real. De esta manera, el valor de  $M_t/b$  será igual al de la placa e independiente de la discretización más o menos tupida que hayamos realizado (en el caso de que se tomaran los valores de  $K_t$  en función de la relación  $b/h$  de cada viga del emparrillado virtual, a discretizaciones más tupidas corresponderían valores de  $M_t/b$  menores —véase 2.4.1—). Así pues, el valor de la rigidez a torsión que asignaremos a cada viga será:

$$M_t = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^3$$

El valor de la rigidez a flexión de una viga de dimensiones  $b \cdot h$  es:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

Observamos que interviene el valor del módulo de Poisson del material. La manera normal, hasta el momento, de introducir el efecto del módulo de Poisson en el cálculo de placas mediante asimilación a emparrillados calculados mediante métodos matriciales, ha sido no tenerlo en cuenta en el cálculo de las rigideces a flexión de las barras del emparrillado virtual e incluirlo en el del módulo de elasticidad transversal usado en el cálculo de las matrices de rigidez:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

Esta manera de operar, aunque aproximada, es errónea. Comparando dos placas exactamente iguales que sólo varían en el valor de su coeficiente de Poisson  $\mu$  (y haciendo esta comparación para distintos tipos de sustentación —véase 2.4.1—), observamos que en la que tiene un  $\mu$  mayor, las flechas son inferiores en todos los puntos y los momentos superiores en casi todos; haciendo la misma comparación con los dos emparrillados virtuales correspondientes, observamos que en el que  $\mu$  es mayor, las flechas son mayores, mientras que los momentos son generalmente inferiores (dependiendo del tipo de sustentación). Vemos pues que el efecto producido en una placa por un cambio de valor de  $\mu$  es diferente e incluso opuesto al producido en el emparrillado virtual calculado según la manera normal de operar hasta el momento.

Si comparamos las ecuaciones [2] y [4], que gobiernan el comportamiento de placas y emparrillados, respectivamente, observamos que sólo se diferencian en el coeficiente del segundo término ( $2$  y  $4 \cdot G/E$ , respectivamente) y en el término independiente (la ecuación de la placa incluye el factor  $1 - \mu^2$ ). Si calculamos el emparrillado haciendo:

$$\frac{4 \cdot G}{E} = 2 \rightarrow E = 2 \cdot G \rightarrow \mu = 0 \rightarrow I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

hallaremos un campo de flechas  $w^e(x, y)$ ; las flechas de la placa,  $w(x, y)$ , se hallarán, siguiendo con la comparación de las ecuaciones anteriormente citadas, aplicando la siguiente fórmula:

$$w(x, y) = w^e(x, y) \cdot (1 - \mu^2) \quad [6]$$

Para hallar el valor de los momentos en la placa en función de los obtenidos en el emparrillado, sustituimos [6] en [1]:

$$M_x = -\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \left[ \frac{\delta^2 w_o^e}{\delta x^2} + \mu \cdot \frac{\delta^2 w_o^e}{\delta y^2} \right] \cdot (1 - \mu^2)$$

$$M_{xy} = -\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 + \mu)} \cdot \frac{\delta^2 w_o^e}{\delta x \delta y} \cdot (1 - \mu^2)$$

$$M_y = -\frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \left[ \frac{\delta^2 w_o^e}{\delta y^2} + \mu \cdot \frac{\delta^2 w_o^e}{\delta x^2} \right] \cdot (1 - \mu^2)$$

Operando y teniendo en cuenta [3], obtenemos:

$$\begin{aligned} M_x &= M_{x_o}^e + \mu \cdot M_{y_o}^e \\ M_{xy} &= (1 - \mu) \cdot M_{xy_o}^e \\ M_y &= M_{y_o}^e = \mu \cdot M_{x_o}^e \end{aligned} \quad [7]$$

Así pues, para analizar una placa de un material con un coeficiente de Poisson cualquiera, se debe proceder, en primer lugar, a calcular matricialmente el emparrillado equivalente supuesto de un material tal que  $\mu$  sea 0; posteriormente, los valores buscados de flechas y momentos en la placa se calculan en función de los hallados para el emparrillado y del módulo de Poisson real, mediante las fórmulas [7] y [6]. En el caso de nudos situados sobre bordes libres hay que realizar algunas consideraciones especiales. En un nudo situado en un borde paralelo al eje Y, un momento  $M_{x_o}^e$  produce una elongación  $\epsilon_{y_o}$  y subsiguientemente otra  $\epsilon_{x_o} = \mu \cdot \epsilon_{y_o}$  en la dirección perpendicular pero no se produce un incremento de  $M_y$  al existir un borde libre que no coacciona la existencia de  $\epsilon_{x_o}$ . En el mismo nudo, un momento  $M_{y_o}^e$  sí produce un incremento de  $M_x$ , al no existir libertad para que se produzca la elongación  $\epsilon_{y_o} = \mu \cdot \epsilon_{x_o}$ . Así pues, en nudos situados sobre bordes libres paralelos al eje Y hay que modificar una de las fórmulas [7], que queda de la forma:

$$M_y = M_{y_o}^e$$

De igual forma, en nudos situados sobre bordes libres paralelos al eje X:

$$M_x = M_{x_o}^e$$

En fin, en nudos situados en esquinas libres:

$$M_x = M_{x_o}^e$$

$$M_y = M_{y_o}^e$$

### 2.2.3. Reproducción de las condiciones de apoyo

Todos los puntos, tanto de una placa como del emparrillado virtual equivalente, tienen tres grados de libertad: el corrimiento vertical,  $w$ , y un giro alrededor de cada eje horizontal,  $\theta_x$  y  $\theta_y$ . En los apoyos, uno o varios de estos grados de libertad es coaccionado, bien de forma total, impidiendo radicalmente alguno de los corrimientos anteriores, o bien de forma parcial, oponiendo resistencia pero no impidiendo totalmente dichos corrimientos.

Los tipos de apoyos más normales en los que se coaccionan totalmente algunos o todos los grados de libertad son los empotramientos perfectos y las articulaciones. También aparecen coacciones totales cuando aprovechamos la existencia de ejes de simetría en las placas analizadas, para calcular solamente la porción de placa comprendida entre ellos. La reproducción de coacciones completas es fácil y directa, y se realiza en los nudos correspondientes del emparrillado virtual, impidiéndoles totalmente los corrimientos.

La presencia de pilares aislados de dimensiones finitas se introduce coaccionando los nudos correspondientes del emparrillado virtual, de forma parcial los giros alrededor de ambos ejes y de forma total los corrimientos verticales (consideramos despreciables los acortamientos de los pilares). El modo de introducir estas coacciones parciales es mediante unos factores, llamados coeficientes de balasto (CB), que relacionan, en cada sentido, los momentos actuantes con los giros que inducen. El valor de estos coeficientes en cada punto y para cada sentido es igual a la suma de las rigideces a flexión de los pilares inferior y/o superior a la placa.

### 2.2.4. Reproducción de los estados de carga

Las cargas puntuales se aplican como tales en los nudos correspondientes del emparrillado virtual (Fig. 3a). En el caso de que no se haya cumplido lo dicho en 2.2.1 y no haya nudo bajo la carga (es decir, no existan 2 líneas de barras que se crucen en el punto de aplicación de la carga), ésta se aplicará, bien de forma puntual sobre la barra que pase por su punto de aplicación (Fig. 3b) o bien, en el caso de que tampoco se haya dispuesto una barra bajo ella, se repartirá proporcionalmente entre los cuatro nudos más próximos (Fig. 3c).

Las cargas lineales, en el caso normal de que se haya dispuesto una línea de barras bajo ellas, se aplican directamente sobre las barras (Fig. 4a); en caso contrario, se aplicarán de forma puntual en los puntos de cruce de la línea de carga con las barras (Fig. 4b); en caso extremo, podrían aplicarse de forma puntual sobre los

nudos más próximos a los puntos de cruce del caso anterior (Fig. 4c).

La mejor manera de aplicar las cargas superficiales es de la forma indicada en la figura 5a, es decir, distribuyendo la carga correspondiente a cada recuadro del emparrillado virtual entre las cuatro barras que lo rodean, de forma que cada barra quede cargada con una distribución triangular; otra manera menos exacta de aplicar

este tipo de cargas (aunque proporciona resultados muy aproximados a los del método anterior en caso de mallas muy tupidas), es distribuir las entre los cuatro nudos del recuadro, aplicándolas de forma puntual (Fig. 5b). Un estudio comparativo de estas dos formas de distribuir las cargas superficiales puede verse en 2.4.1.

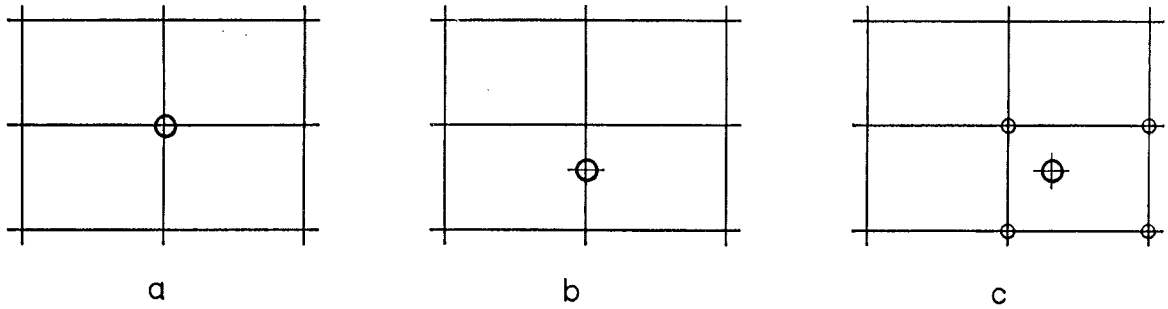


Fig. 3. Aplicación de cargas puntuales.

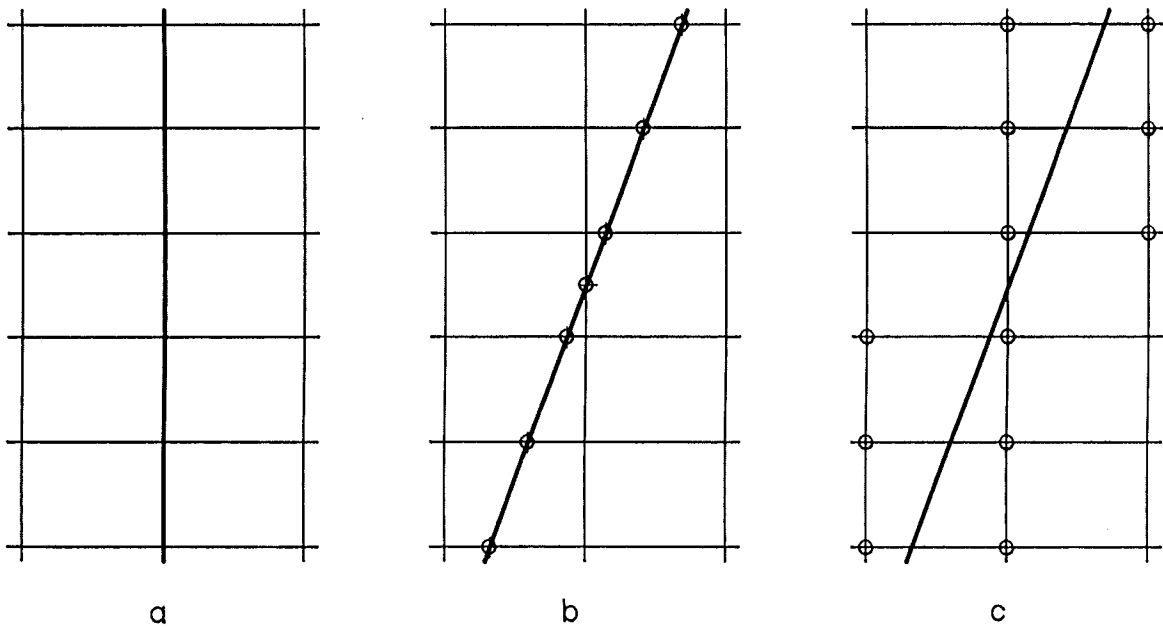


Fig. 4. Aplicación de cargas lineales.

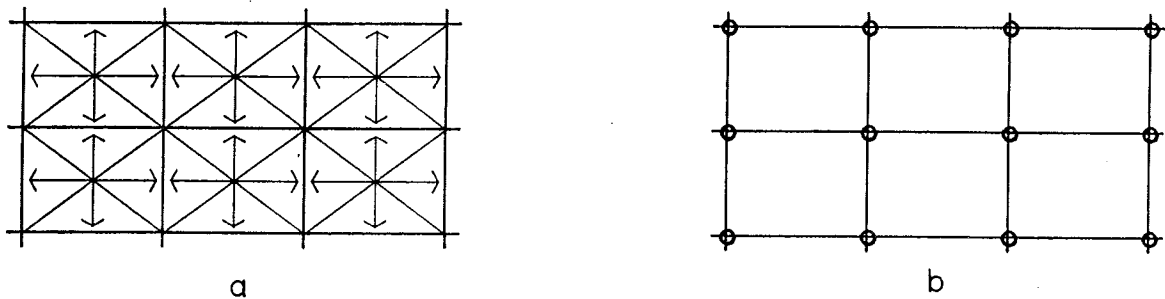


Fig. 5. Aplicación de cargas superficiales.

### 2.3. Obtención de los resultados de la placa

Las flechas en los nudos de la placa se hallan en función de las de los nudos correspondientes del emparrillado virtual y del módulo de Poisson del material, aplicando la fórmula [6].

Las reacciones en los soportes de la placa coinciden con las obtenidas en los nudos correspondientes del emparrillado virtual.

La resolución del emparrillado virtual nos proporciona los esfuerzos en los dos extremos de cada barra; para obtener esfuerzos en puntos intermedios puede suponerse que las leyes de variación de esfuerzos entre ellos son lineales (hipótesis suficientemente aproximada en el caso de haber realizado discretización adecuada). Para obtener el campo de esfuerzos de la placa real, en primer lugar habrá que calcular los esfuerzos por unidad de anchura en cada barra, para obtener resultados comparables en el caso de no usar una discretización en malla cuadrada (y aún en el caso de usarla, puesto que las barras de borde tienen una zona de influencia mitad que las demás).

Una vez hecho esto, si dibujamos una ley de esfuerzos típica (Fig. 6), podemos observar que se producen discontinuidades en los nudos del emparrillado, mientras que en la realidad de la placa, lógicamente, no se producen; vamos a usar, como esfuerzos de cálculo en cada nudo, los valores promedios de los de las barras que en él concurren, consiguiendo de esta manera una ley continua a través de la placa y un campo concreto de esfuerzos en cada nudo; naturalmente, este procedimiento se seguirá en todos los nudos excepto en los correspondientes a soportes, en los cuales el salto en las leyes de esfuerzos no es atribuible a la asimilación a

emparrillado sino a la propia presencia del soporte que es el que absorbe la diferencia (esto también sucede en los nudos donde hay cambios bruscos de sección de la losa, como por ejemplo en las esquinas de huecos interiores). Una vez hecho esto, para hallar los momentos en cualquier punto de la placa real, basta con aplicar las fórmulas [7].

Para proceder al armado de una placa de hormigón sometida a momentos flectores y torsores, teóricamente la solución es determinar el valor de los momentos principales, y disponer las armaduras necesarias siguiendo las direcciones principales. Esta solución no es viable en la práctica, por demasiado costosa, aparte de que diferentes estados de carga darían lugar a momentos y direcciones principales distintos. La solución normal es disponer las armaduras en dos direcciones ortogonales, y es por esto que se han desarrollado métodos que determinan el valor de los momentos flectores ("momentos de armado") que, actuando según dos direcciones (ortogonales normalmente), cubren un campo dado de flectores y torsores. La solución que adoptamos es la obtenida por Wood<sup>(3)</sup> y Gupta<sup>(4)</sup>, siguiendo caminos ligeramente distintos. Posteriormente, Gupta<sup>(5)</sup> la ha desarrollado para tener en cuenta la interacción entre armaduras inferiores y superiores, pero la complejidad del método, que requiere iteraciones sucesivas, y la muy poco frecuente existencia de armaduras negativas y positivas trabajando al mismo tiempo (sólo en caso de torsores superiores a los flectores), nos lleva a quedarnos con la solución primitiva, resumida a continuación:

Dado un campo de momentos  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ , los momentos de armado  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ , son:

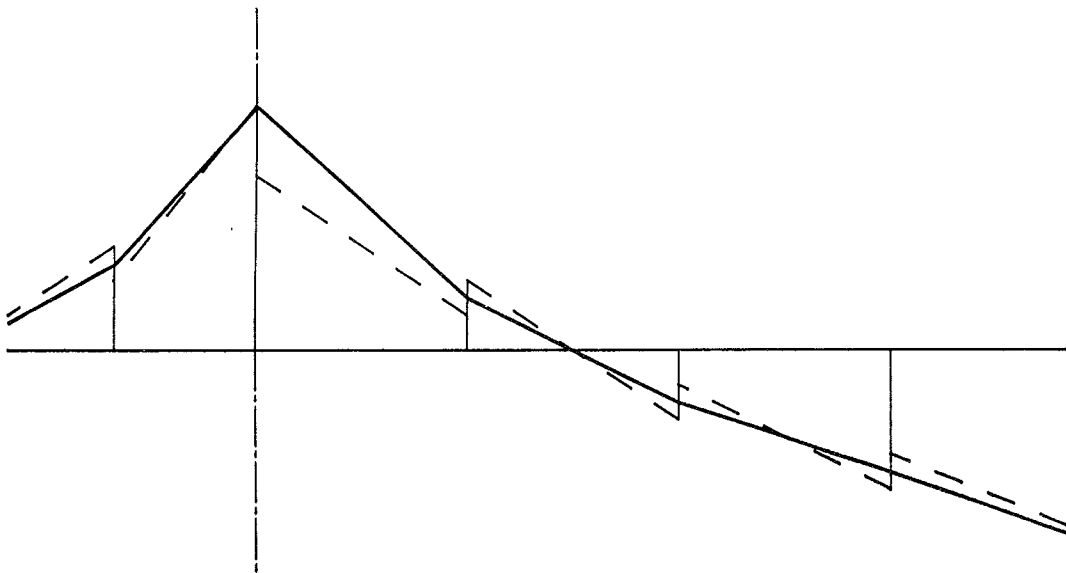


Fig. 6. Discontinuidades en las leyes de esfuerzos.

—Armaduras superiores:

$$\begin{aligned} M_x^* &= M_x - |M_{xy}| \\ M_y^* &= M_y - |M_{xy}| \end{aligned} \quad [8]$$

A) Si tanto  $M_x^*$  como  $M_y^*$  son positivos en la fórmula anterior, no hace falta colocar armaduras en la cara superior de la placa.

B) Si en [8]  $M_x^*$  es mayor que 0:

$$\begin{aligned} M_x^* &= 0 \\ M_y^* &= M_y - \left| \frac{M_{xy}^2}{M_x} \right| \end{aligned} \quad [9]$$

Si  $M_y^*$  es positivo no hay que colocar armadura superior.

C) Si en [8]  $M_x^*$  es mayor que 0:

$$\begin{aligned} M_x^* &= M_x - \left| \frac{M_{xy}^2}{M_x} \right| \\ M_y^* &= 0 \end{aligned} \quad [10]$$

Si  $M_x^*$  es positivo no hay que colocar armadura superior.

—Armaduras inferiores:

$$\begin{aligned} M_x^* &= M_x + |M_{xy}| \\ M_y^* &= M_y + |M_{xy}| \end{aligned} \quad [11]$$

A) Si tanto  $M_x^*$  como  $M_y^*$  son negativos, no hay que colocar armadura en la cara inferior de la placa.

B) Si en [11]  $M_x^*$  es menor que 0:

$$\begin{aligned} M_x^* &= 0 \\ M_y^* &= M_y + \left| \frac{M_{xy}^2}{M_x} \right| \end{aligned} \quad [12]$$

Si  $M_y^*$  es negativo no hay que colocar armadura inferior.

C) Si en [11]  $M_y^*$  es menor que 0:

$$\begin{aligned} M_x^* &= M_x + \left| \frac{M_{xy}^2}{M_x} \right| \\ M_y^* &= 0 \end{aligned} \quad [13]$$

Si  $M_x^*$  es negativo no hay que colocar armadura inferior.

Fórmulas parecidas a las anteriores existen para calcular los momentos de armado según dos direcciones no ortogonales (Wood<sup>(3)</sup>, Mills<sup>(6)</sup>, y Armer<sup>(7)</sup>), e incluso según tres direcciones cualesquiera (Gupta<sup>(4)</sup>).

## 2.4. Comprobación de resultados

Para comprobar la validez del método, hemos comparado los resultados obtenidos con él, en diversas placas, con los obtenidos por diversos autores usando otros métodos (Bares<sup>(8)</sup> utiliza el método de las diferencias finitas y el de desarrollos en serie simple; Stiglat y Wippel<sup>(9)</sup> utilizan el método de las diferencias finitas) y con los proporcionados por el método de elementos finitos (utilizando el programa HP-FE-I, realizado por Hewlett-Packard Desktop Computer Division e implementado en un ordenador Hewlett-Packard serie 9000).

### 2.4.1. Placas cuadradas con doble simetría de sustentación

Hemos calculado tres placas cuadradas, sometidas a cargas uniformemente repartidas en toda su superficie, con las siguientes condiciones de vinculación: la primera, empotrada a lo largo de sus cuatro lados; la segunda, articulada, también en todo su perímetro; y la tercera, articulada en las cuatro esquinas (Fig. 7).

Los resultados (momentos y flechas en el centro de las placas y en los puntos medios de los bordes) obtenidos con 6 discretizaciones distintas y dos formas distintas de reproducir el estado de carga, están reflejados en las tablas 1,

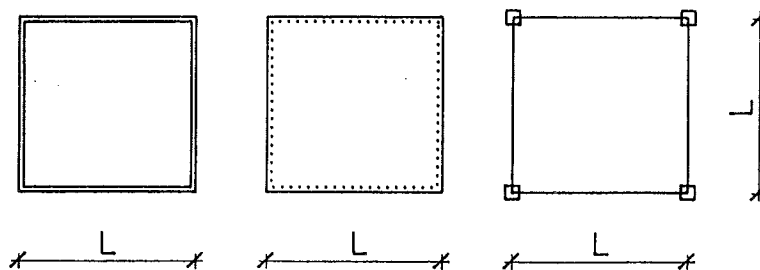


Fig. 7. Placas cuadradas, con doble simetría de vinculación.  $L = 10$  m;  $h = 0,2$  m;  $E = 2.100.000$  t/m<sup>2</sup>;  $\mu = 0$ ;  $q = 2$  t/m<sup>2</sup>.



TABLA 1

Placa cuadrada empotrada en los cuatro lados

Momentos flectores y flechas en el centro de la placa y en el punto medio de los lados.

$$L = 10 \text{ m}; h = 0,20 \text{ m}; E = 2.100.000 \text{ t/m}^2; \mu = 0; q = 2 \text{ t/m}^2$$

A) Reparto de la carga: puntual en los nudos

Discret.	$M_0$		$M_{z1}$		$W_0$	
	mt/m	$\epsilon$ (%)	mt/m	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)
L/2	6,250	+ 77,56	- 6,250	-39,32	1,860	+ 2,14
L/4	4,507	+ 28,04	- 9,495	- 7,82	1,918	+ 5,33
L/6	3,996	+ 13,52	- 9,984	- 3,07	1,865	+ 2,42
L/8	3,795	+ 7,81	-10,114	- 1,81	1,842	+ 1,15
L/10	3,699	+ 5,08	-10,169	- 1,27	1,830	+ 0,49
L/20	3,567	+ 1,34	-10,239	- 0,59	1,813	-0,43

B) Reparto de la carga: triangular en las barras

Discret.	$M_0$		$M_{z1}$		$W_0$	
	mt/m	$\epsilon$ (%)	mt/m	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)
L/2	3,646	+ 3,58	- 8,854	-14,04	1,860	+ 2,14
L/4	3,856	+ 9,55	-10,146	- 1,50	1,918	+ 5,33
L/6	3,707	+ 5,31	-10,275	- 0,24	1,865	+ 2,42
L/8	3,632	+ 3,18	-10,277	- 0,22	1,842	+ 1,15
L/10	3,595	+ 2,13	-10,273	- 0,26	1,830	+ 0,49
L/20	3,541	+ 0,60	-10,265	- 0,34	1,813	-0,43
HP-EF-I	3,606	+ 2,44	-10,040	- 2,52	1,814	- 0,38
Stiglat	3,521	+ 0,03	-10,309	+ 0,09		
Bares	3,520		-10,300		1,821	

$\epsilon$  = Diferencia en % respecto a los valores obtenidos por Bares.

TABLA 2

Placa cuadrada articulada en los cuatro lados

Momentos flectores y flechas en el centro de la placa.  $L = 10 \text{ m}; h = 0,20 \text{ m}; E = 2.100.000 \text{ t/m}^2;$

$$\mu = 0; q = 2 \text{ t/m}^2$$

A) Reparto de la carga: puntual en los nudos

Discret.	$M_0$		$W_0$	
	mt/m	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)
L/2	9,375	+ 27,38	4,650	-19,80
L/4	8,053	+ 9,42	5,547	- 4,33
L/6	7,685	+ 4,42	5,690	- 1,86
L/8	7,547	+ 2,54	5,740	- 1,00
L/10	7,483	+ 1,67	5,763	- 0,60
L/20	7,388	+ 0,38	5,788	- 0,17

B) Reparto de la carga: triangular en las barras

Discret.	$M_0$		$W_0$	
	mt/m	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)
L/2	8,073	+ 9,69	5,813	+ 0,26
L/4	7,727	+ 4,99	5,874	+ 1,31
L/6	7,540	+ 2,45	5,840	+ 0,72
L/8	7,466	+ 1,44	5,824	+ 0,45
L/10	7,431	+ 0,96	5,817	+ 0,33
L/20	7,375	+ 0,20	5,801	+ 0,05
Stiglat	7,353	-0,10		
Bares	7,360		5,798	

$\epsilon$  = Diferencia en % respecto a los valores obtenidos por Bares.

2 y 3, y en los gráficos 1 y 2. Como resultados de comparación hemos usado los proporcionados por Bares, que son muy parecidos a los de Stiglat y Wippel.

Tanto en los casos de momentos flectores como en los de flechas y para los tres tipos de vinculación estudiados, podemos comprobar observando los gráficos que, conforme la discretización se hace más tupida, los resultados se van aproximando a los correctos según una ley asintótica, llegando casi a coincidir para L/20 (error inferior al 1% en todos los casos).

Los resultados obtenidos con una discretización de L/2, es decir, introduciendo una sola barra virtual en el vano, son bastante irregulares, sorprendentemente buenos en algunos casos y muy mediocres en otros; como norma general, este tipo de discretización mínima no es aconsejable.

Podemos observar que los resultados obtenidos con un reparto triangular de la carga son bastante mejores que los que proporciona un reparto puntual en los nudos (el error es entre 2 y 4 veces menor, según los casos). En los restantes ejemplos del artículo se utiliza siempre el reparto triangular de la carga.

En las tres placas analizadas se produce una mayor exactitud en los resultados obtenidos para las flechas que para los momentos flectores, como era de esperar. En todo caso, a partir de una discretización de L/4 los errores son

TABLA 3

Placa cuadrada articulada en las cuatro esquinas

Momentos flectores y flechas en el centro de la placa y en el punto medio de los lados.

$L = 10 \text{ m}$ ;  $h = 0,20 \text{ m}$ ;  $E = 2.100.000 \text{ t/m}^2$ ;  $\mu = 0$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$

A) Reparto de la carga: puntual en los nudos.

Discret.	$M_0$		$M_{z1}$		$W_0$		$W_1$	
	mt/m	$\epsilon$ (%)	mt/m	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)
L/2	16,667	-21,01	33,333	+ 3,91	29,762	-26,12	18,601	-25,60
L/4	19,423	- 7,95	33,999	+ 5,98	37,643	- 6,56	23,705	- 5,18
L/6	20,324	- 3,68	33,466	+ 4,32	39,230	- 2,62	24,570	- 1,72
L/8	20,671	- 2,03	33,158	+ 3,36	39,766	- 1,29	24,833	- 0,67
L/10	20,838	- 1,24	32,943	+ 2,69	40,012	- 0,68	24,932	- 0,27
L/20	21,068	- 0,15	32,410	+ 1,03	40,257	- 0,07	24,986	- 0,06

B) Reparto de la carga: triangular en las barras

Discret.	$M_0$		$M_{z1}$		$W_0$		$W_1$	
	mt/m	$\epsilon$ (%)	mt/m	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)	cm	$\epsilon$ (%)
L/2	16,667	-21,01	33,333	+ 3,91	34,412	-14,58	20,926	-16,30
L/4	19,423	- 7,95	33,999	+ 5,98	38,806	- 3,67	24,287	- 2,85
L/6	20,324	- 3,68	33,466	+ 4,32	39,746	- 1,34	24,828	- 0,69
L/8	20,671	- 2,03	33,158	+ 3,36	40,067	- 0,54	24,978	- 0,09
L/10	20,838	- 1,24	32,943	+ 2,69	40,202	- 0,21	25,026	+ 0,10
L/20	21,068	- 0,15	32,410	+ 1,03	40,313	+ 0,07	25,001	0,00
HP-EF-I	21,080	- 0,09	31,840	-0,75	40,010	-0,68	24,750	- 1,00
Stiglat	20,986	- 0,54	31,596	-1,51	40,584	+ 0,74		
Bares	21,100		32,080		40,286		25,000	

$\epsilon$  = Diferencia en % respecto a los valores obtenidos por Bares.

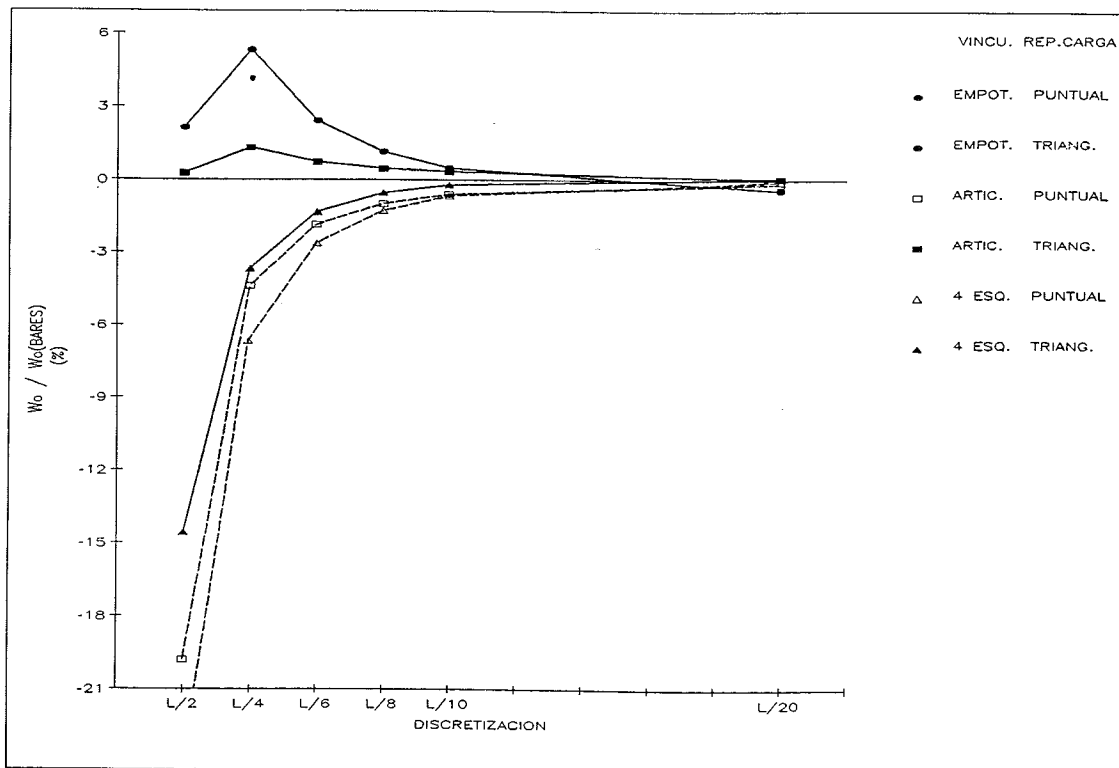


Gráfico 1. Placas cuadradas con doble simetría de vinculación. Flechas en el centro de las placas.  $L = 10 \text{ m}$ ;  $h = 0,2 \text{ m}$ ;  $E = 2.100.000 \text{ t/m}^2$ ;  $\mu = 0$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$ .

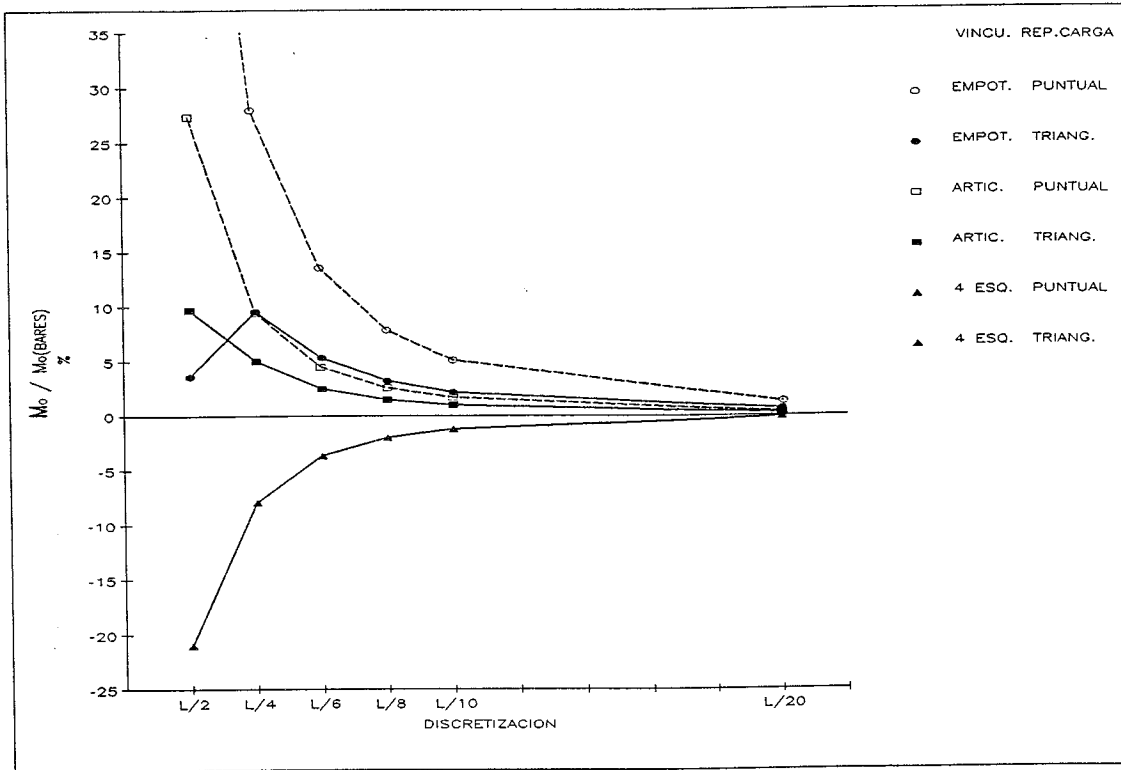


Gráfico 2. Placas cuadradas con doble simetría de vinculación. Momentos en el centro de las placas.  $L = 10 \text{ m}$ ;  $h = 0,2 \text{ m}$ ;  $E = 2.100.000 \text{ t/m}^2$ ;  $\mu = 0$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$ .

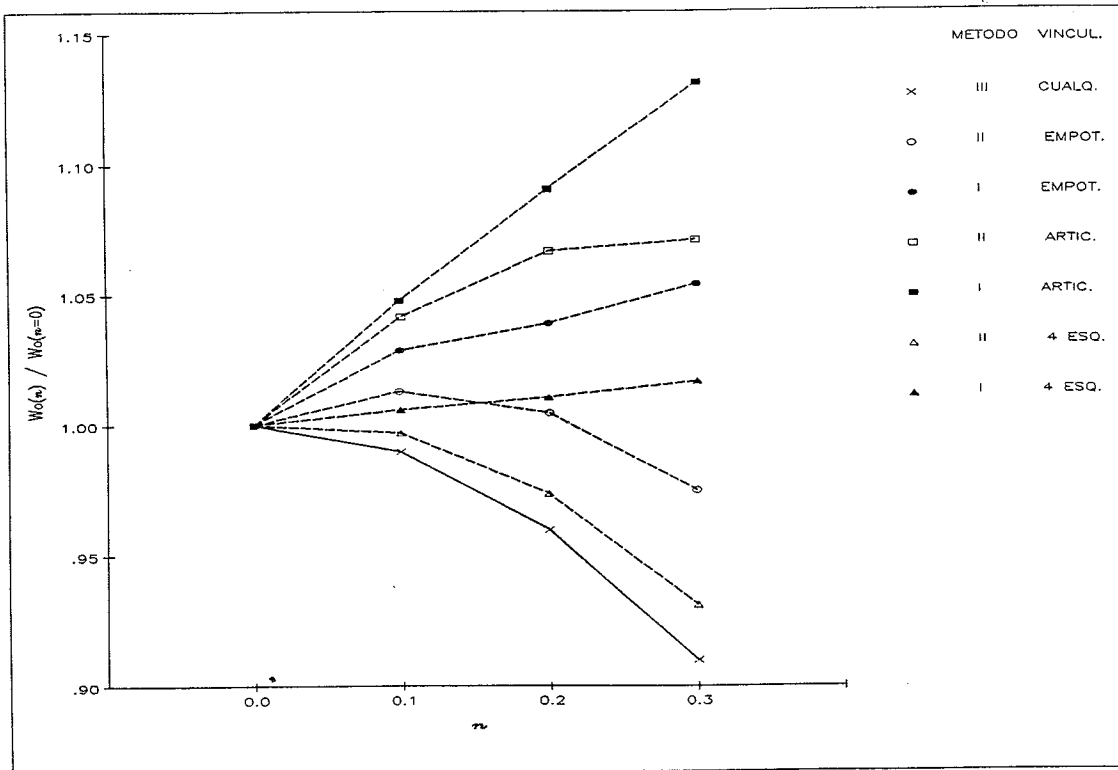


Gráfico 3. Efecto del módulo de Poisson. Placas cuadradas con doble simetría de vinculación. Flechas en el centro de las placas.  $L = 10 \text{ m}$ ;  $h = 0,2 \text{ m}$ ;  $E = 2.100.000 \text{ t/m}^2$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$ ; Discr.:  $L/10$ .

**TABLA 4**

**Efecto del módulo de Poisson.**

Momentos y flechas en el centro de las placas.  $L = 10$  m;  $h = 0,20$  m;  $E = 2.100.000$  t/m<sup>2</sup>;  $q = 2$  t/m<sup>2</sup>.  
Discretización:  $L/10$

**A) Placa cuadrada empotrada en los cuatro lados.**

$\mu$	$M_o$ (método I)		$M_o$ (método II)		$M_o$ (método III)	
	mt/m	$\Omega$	mt/m	$\Omega$	mt/m	$\Omega$
0,0	3,699	1,000	3,699	1,000	3,699	1,000
0,1	3,799	1,026	3,804	1,028	4,069	1,100
0,2	3,877	1,048	3,915	1,058	4,439	1,200
0,3	3,951	1,068	4,034	1,091	4,809	1,300

$\mu$	$W_o$ (método I)		$W_o$ (método II)		$W_o$ (método III)	
	cm	$\Theta$	cm	$\Theta$	cm	$\Theta$
0,0	1,830	1,000	1,830	1,000	1,830	1,000
0,1	1,868	1,021	1,853	1,013	1,812	0,990
0,2	1,901	1,039	1,839	1,005	1,757	0,960
0,3	1,929	1,054	1,785	0,975	1,665	0,910

**B) Placa cuadrada articulada en los cuatro lados.**

$\mu$	$M_o$ (método I)		$M_o$ (método II)		$M_o$ (método III)	
	mt/m	$\Omega$	mt/m	$\Omega$	mt/m	$\Omega$
0,0	7,483	1,000	7,483	1,000	7,483	1,000
0,1	7,849	1,049	7,889	1,054	8,231	1,100
0,2	8,184	1,094	8,342	1,115	8,980	1,200
0,3	8,491	1,135	8,848	1,182	9,728	1,300

$\mu$	$W_o$ (método I)		$W_o$ (método II)		$W_o$ (método III)	
	cm	$\Theta$	cm	$\Theta$	cm	$\Theta$
0,0	5,762	1,000	5,762	1,000	5,762	1,000
0,1	6,036	1,048	6,005	1,042	5,704	0,990
0,2	6,286	1,091	6,147	1,067	5,532	0,960
0,3	6,514	1,131	6,169	1,071	5,243	0,910

**C) Placa cuadrada articulada en las cuatro esquinas.**

	$M_o$ (método I)		$M_o$ (método II)		$M_o$ (método III)	
	mt/m	$\Omega$	mt/m	$\Omega$	mt/m	$\Omega$
0,0	20,842	1,000	20,842	1,000	20,842	1,000
0,1	20,488	0,983	20,460	0,982	22,926	1,100
0,2	20,155	0,967	20,008	0,960	25,010	1,200
0,3	19,852	0,952	19,445	0,933	27,095	1,300

$\mu$	$W_o$ (método I)		$W_o$ (método II)		$W_o$ (método III)	
	cm	$\Theta$	cm	$\Theta$	cm	$\Theta$
0,0	39,991	1,000	39,991	1,000	39,991	1,000
0,1	40,211	1,006	39,866	0,997	39,591	0,990
0,2	40,441	1,011	39,948	0,974	38,391	0,960
0,3	40,689	1,017	37,242	0,931	36,392	0,910

$$\Omega = \frac{M_o(\mu)}{M_o(\mu = 0)}$$

$$\Theta = \frac{W_o(\mu)}{W_o(\mu = 0)}$$

inferiores al 6% en la mayoría de los resultados analizados.

Podemos observar, asimismo, que los resultados obtenidos con el programa HP-FE-I, usando el elemento 2BH4 (plano y rectangular con tres grados de libertad en cada uno de los cuatro nodos, y con una formulación lineal de momentos), con una discretización L/10, reflejan una gran coincidencia con los obtenidos por el método de asimilación a emparrillado.

### Efecto del módulo de Poisson

Como dijimos en 2.2.2., una manera incorrecta de introducir el módulo de Poisson en el cálculo nos puede llevar a resultados erróneos; en la tabla 4 y los gráficos 3 y 4 están reflejados los resultados obtenidos en los emparrillados virtuales correspondientes a los tres tipos de sustentación, con una discretización de L/10, introduciendo el efecto de  $\mu$  de tres formas diferentes:

$$\text{I) } I = \frac{E \cdot h^3}{12} \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

$$\text{II) } I = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}$$

### III) Método propuesto en 2.2.2.

Observamos que los resultados obtenidos con el segundo método son mejores que los que proporciona el primero, como era previsible, pero en ambos casos sucede que a mayores valores de  $\mu$  se van obteniendo flechas mayores en el centro de la placa, contrariamente al comportamiento real de la placa, que es emulado perfectamente con el tercer método; asimismo, podemos ver que los momentos flectores en el centro de la placa aumentan bastante menos de lo que deberían al aumentar  $\mu$  (en los casos de placa articulada y empotrada en el perímetro) e incluso disminuyen (placa articulada en las 4 esquinas). Así pues, vemos que, partiendo de errores de  $1 \div 2\%$  en momentos y de  $0,2 \div 0,4\%$  en flechas, para  $\mu = 0$ , para  $\mu = 0,3$  con el método I se llega a errores de 28% y 24%, respectivamente, y con el método II a 29% y 17%, mientras que con el método III los errores se mantienen en los mismos valores que para  $\mu = 0$ .

### Efecto de la geometría de las barras virtuales

Hemos visto que los resultados son mejores conforme la discretización es más tupida; es evidente que esto es debido al mayor número de barras y a la menor distancia entre ellas, pero pudiera pensarse que se debiera también a una

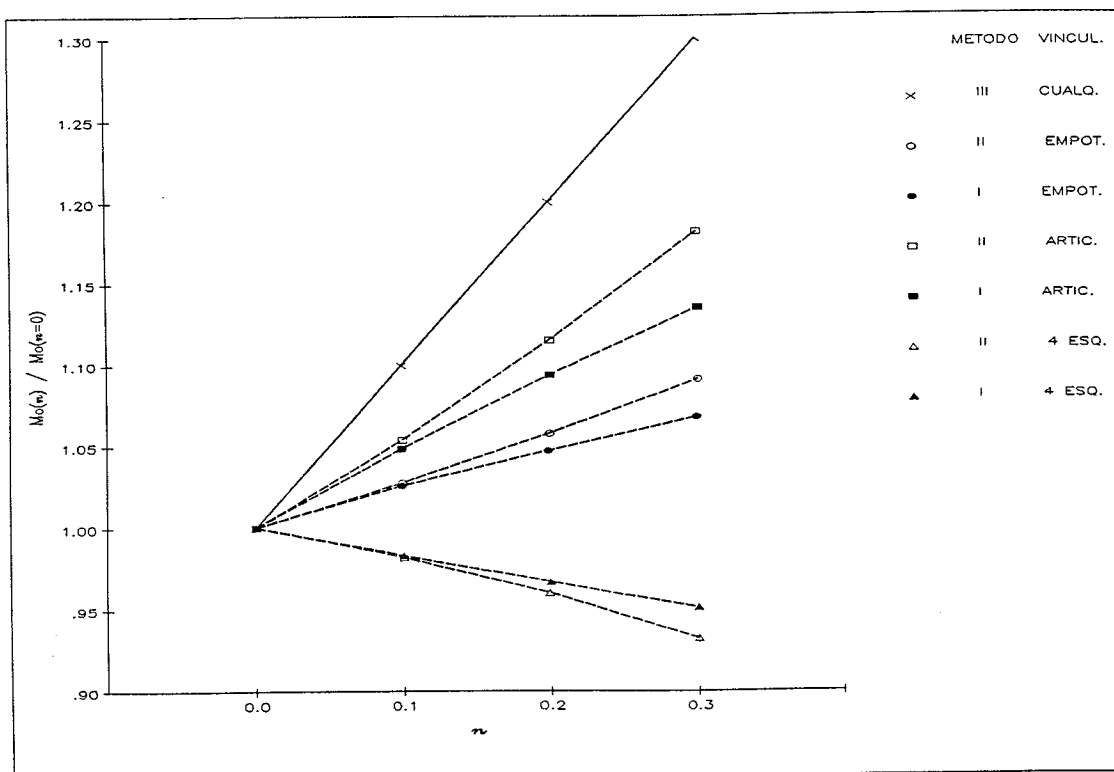


Gráfico 4. Efecto del módulo de Poisson. Placas cuadradas con doble simetría de vinculación. Momentos flectores en el centro de las placas. L = 10 m; h = 0,2 m; E = 2.100.000 t/m²; q = 2 t/m²; Discr.: L/10.

especial relación ancho-canto de las barras virtuales (para discretizaciones  $L/10$  esta relación es  $5/1$ , mientras que para  $L/4$  es  $12,5/1$ ). Viendo la tabla 5, en la que se reflejan los resultados de cinco placas cuadradas articuladas en las esquinas calculadas con una misma discretización ( $L/10$ ) y en las que sólo varía su canto, podemos comprobar que, aunque la relación ancho-canto de las vigas del emparrillado virtual varía entre  $1/0,1$  y  $1/2$ , los resultados obtenidos son prácticamente iguales (las pequeñas diferencias son achacables a errores numéricos de redondeo en el ordenador).

Esta falta de conexión entre la relación ancho-canto de las vigas del emparrillado virtual y la bondad de los resultados es posible porque, como comentamos en 2.2.2., tomamos

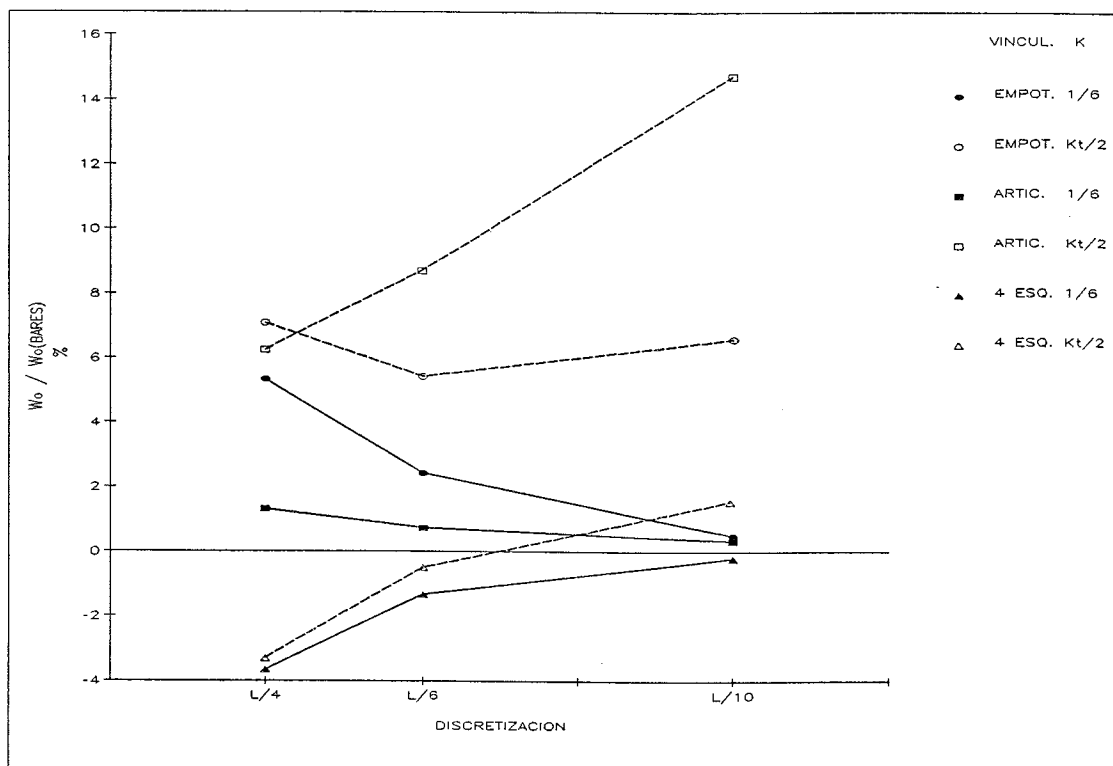
un valor del coeficiente  $K_t$  constante e igual a  $1/3$ . En los gráficos 5 y 6 podemos observar las distorsiones que se producen al calcular los emparrillados virtuales correspondientes a las mismas tres placas de los apartados anteriores, con 3 discretizaciones distintas, calculando la rigidez de las barras virtuales con los valores estrictos de  $K_t$  dados por Timoshenko y Goodier<sup>(1)</sup> (menores siempre a  $1/3$ ). Comprobamos que el hecho de tomar menores rigideces a torsión, da lugar a un aumento de las flechas y momentos flectores en el centro de las placas; asimismo, es resaltable que se pierde la convergencia de la solución, como puede verse perfectamente en los gráficos, ya que los resultados obtenidos con  $L/6$  (e incluso con  $L/4$  en algunos casos) son generalmente mejores que los obtenidos con  $L/10$ .

**TABLA 5**

**Efecto de la geometría de las barras.**

**Placa cuadrada articulada en las cuatro esquinas.  $L = 10$  m;  $E = 2.100.000$ ;  $\mu = 0$ ;  $q = 2$  t/m<sup>2</sup>.  
Discretización:  $L/10$**

h m	$M_0$ mt/m	$M_b$ mt/m	$W_0 \cdot h^3 \cdot 100$	$W_1 \cdot h^3 \cdot 100$
0,1	20,834	32,943	32,158	20,020
0,2	20,838	32,945	32,162	20,021
0,5	20,847	32,948	32,171	20,025
1,0	20,847	32,948	32,168	20,023
2,0	20,850	32,951	32,168	20,024



**Gráfico 5. Efecto de la rigidez torsional. Placas cuadradas con doble simetría de vinculación. Flecha en el centro de las placas.  $L = 10$  m;  $h = 0,2$  m;  $E = 2.100.000$  t/m<sup>2</sup>;  $\mu = 0$ ;  $q = 2$  t/m<sup>2</sup>.**

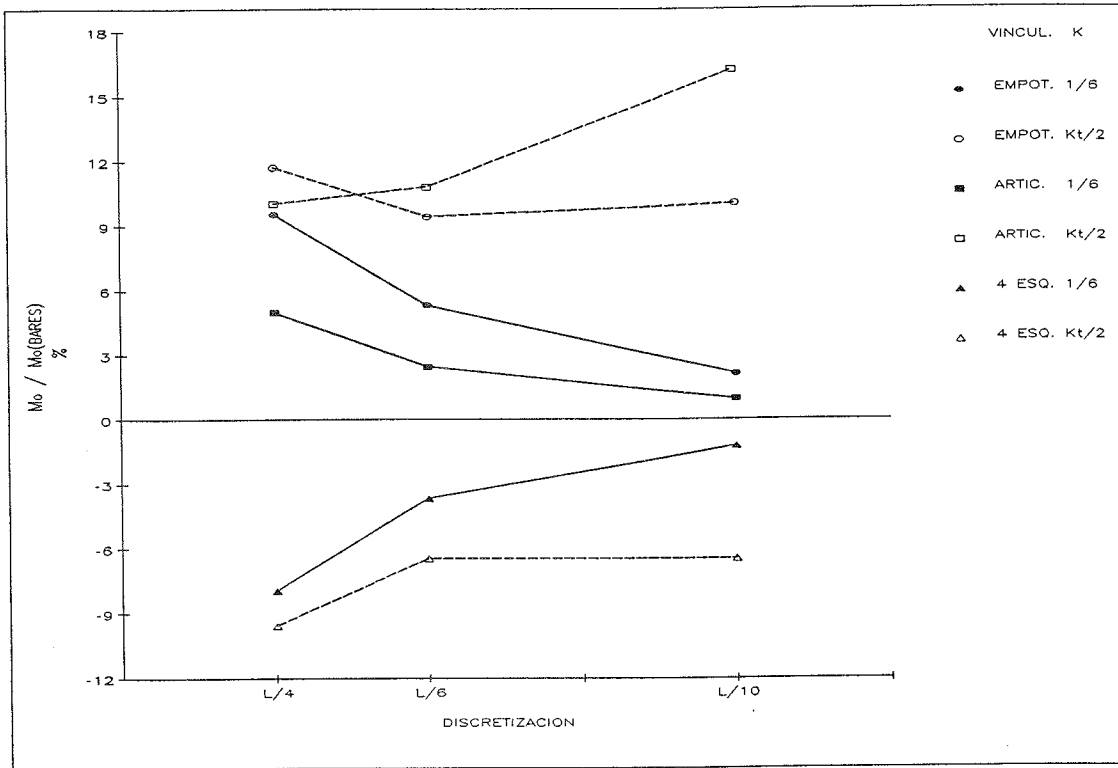


Gráfico 6. Efecto de la rigidez torsional. Placas cuadradas con doble simetría de vinculación. Momentos flectores en el centro de las placas.  $L = 10$  m;  $h = 0,2$  m;  $E = 2.100.000$  t/m<sup>2</sup>;  $\mu = 0$ ;  $q = 2$  t/m<sup>2</sup>.

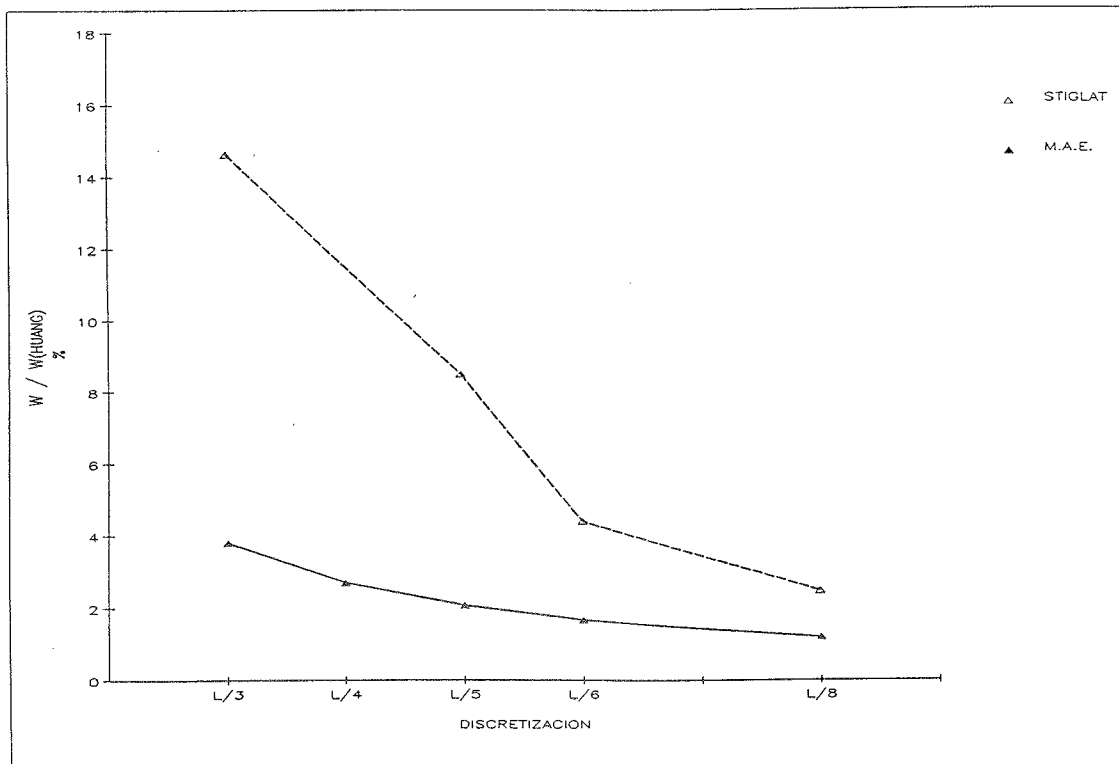


Gráfico 7. Placa cuadrada empotrada en dos lados contiguos. Flecha en la esquina libre de la placa.  $L = 10$  m;  $h = 0,2$  m;  $\mu = 0$ ;  $q = 2$  t/m<sup>2</sup>.

#### 2.4.2. Placa cuadrada empotrada en dos lados contiguos

También hemos calculado una placa cuadrada, con dos lados contiguos empotrados y los otros dos libres, sometida a una carga uniformemente repartida en toda su superficie. Huang y Conway<sup>(10)</sup> calcularon la solución exacta de la flecha en la esquina libre de esta placa y Stiglat y Wippel<sup>(9)</sup> tabularon los valores de dicha flecha utilizando el método de las diferencias finitas. En el gráfico 7 podemos comprobar cómo la exactitud en la solución obtenida con el método de asimilación a emparrillado es mucho mayor que la obtenida por Stiglat y Wippel (los errores respecto al valor dado por exacto por Huang y Conway, son, respectivamente, 4% y 15% para una discretización de  $L/3$ , bajando a 1% y 2,5% para  $L/8$ ).

#### 2.4.3. Placa circular

Asimismo, se ha calculado una placa circular empotrada en todo el perímetro, sometida a dos estados de carga: carga superficial uniformemente repartida y carga puntual en el centro; los resultados, obtenidos con una discretización  $R/5$  y comparados con los obtenidos por García Monge<sup>(11)</sup>, están reflejados en la tabla 6. En el caso de carga uniforme, la coincidencia de resultados es casi total (errores inferiores al 2%

en todos los puntos, tanto en flechas como en momentos); las cargas puntuales inducen mayores distorsiones en los puntos situados en su cercanía, pero en el resto de la placa la situación es similar a lo comentado para la carga uniforme (diferencias del 1% en flechas y entre 1% y 10% en momentos).

#### 2.4.4. Placa continua sobre apoyos interiores aislados

Un nuevo cálculo de comprobación se ha realizado sobre una placa de extensión infinita sustentada sobre apoyos aislados dispuestos según una retícula cuadrada, sometida a dos estados de carga: carga uniformemente repartida en toda su superficie y cargas puntuales aplicadas en los puntos centrales de los vanos. Los resultados obtenidos (tabla 7) podemos compararlos con los proporcionados por Stiglat y Wippel<sup>(9)</sup> (momentos en tres puntos singulares), comprobando que las diferencias son menores al 7% con discretizaciones  $L/8$  y  $L/10$ .

### 3. PLACAS ALIGERADAS

#### 3.1. Formulación básica

Según la teoría clásica de placas ortótropas,

TABLA 6

Placa circular empotrada en el perímetro.

Momentos flectores y flechas a lo largo de un radio.  $R = 5$  m;  $h = 0,20$  m;  $E = 2.100.000$  t/m<sup>2</sup>;  $\mu = 0,15$ .

#### A) Carga uniformemente repartida: 2 t/m<sup>2</sup>

Nudo	$M_r$ (mt/m)			$M_t$ (mt/m)			W (cm)		
	G. Monge	M.A.E.	$\epsilon$ (%)	G. Monge	M.A.E.	$\epsilon$ (%)	G. Monge	M.A.E.	$\epsilon$ (%)
0	3,595	3,614	+ 0,53	3,595	3,614	+ 0,53	1,362	1,373	+ 0,81
1	3,200	3,222	+ 0,69	3,410	3,431	+ 0,62	1,257	1,266	+ 0,72
2	2,020	2,043	+ 1,14	2,870	2,882	+ 0,42	0,960	0,969	+ 0,94
3	0,050	-0,015		1,965	1,958	+ 0,36	0,559	0,562	+ 0,54
4	-2,705	-2,664	-1,52	0,695	0,698	+ 0,43	0,175	0,179	+ 2,29
5	-6,250	-6,351	+ 1,62	-0,935	-0,953	+ 1,93	0,000	0,000	

#### B) Carga puntual en el centro: 100 t.

Nudo	$M_r$ (mt/m)			$M_t$ (mt/m)			W (cm)		
	G. Monge	M.A.E.	$\epsilon$ (%)	G. Monge	M.A.E.	$\epsilon$ (%)	G. Monge	M.A.E.	$\epsilon$ (%)
0		29,235			29,235		3,474	3,526	+ 1,50
1	6,770	5,383	-20,49	13,530	14,574	+ 7,72	2,880	2,929	+ 1,70
2	0,430	-0,074		7,190	7,095	-1,32	1,903	1,918	+ 0,79
3	-3,280	-3,676	+ 12,07	3,480	3,395	-2,44	0,943	0,950	+ 0,74
4	-5,920	-5,909	- 0,19	0,850	0,884	+ 4,00	0,262	0,260	-0,76
5	-7,960	-7,996	+ 0,45	-1,190	-1,199	+ 0,76	0,000	0,000	

$\epsilon$  = Diferencia en % respecto a los valores obtenidos por García Monge.



TABLA 7

Placa infinita sobre apoyos aislados.

Momentos flectores en apoyo, centros de vano y puntos medios entre apoyos. L = 10 m; μ = 0

A) Carga uniformemente repartida: 2 t/m<sup>2</sup>

Discret.	M <sub>0</sub>		M <sub>2</sub>		M <sub>z1</sub>		M <sub>x1</sub>	
	mt/m	ε (%)	mt/m	ε (%)	mt/m	ε (%)	mt/m	ε (%)
L/4	4,453	-20,51	-33,880	-29,70	13,203	+ 13,54	-5,130	-17,40
L/6	4,994	-10,85	-40,547	-15,87	12,141	+ 4,41	-5,495	-11,53
L/8	5,222	- 6,78	-45,239	- 6,13	11,890	+ 2,25	-5,753	- 7,37
L/10	5,330	- 4,86	-48,834	+ 1,33	11,755	+ 1,09	-5,830	- 6,13
Stiglat	5,602		-48,183		11,628		-6,211	

B) Cargas puntuales en centros de vanos: 20 t.

Discret.	M <sub>0</sub>		M <sub>2</sub>		M <sub>z1</sub>		M <sub>x1</sub>	
	mt/m	ε (%)	mt/m	ε (%)	mt/m	ε (%)	mt/m	ε (%)
L/4	3,833	-28,70	-3,833	-28,70	1,833	+ 2,63	-1,833	+ 2,63
L/6	4,554	-15,29	-4,554	-15,29	1,764	-1,23	-1,764	-1,23
L/8	5,046	- 6,14	-5,046	- 6,14	1,764	-1,23	-1,764	-1,23
L/10	5,416	+ 0,74	-5,416	+ 0,74	1,758	-1,57	-1,758	-1,57
Stiglat	5,376		-5,376		1,786		-1,786	

ε = Diferencia en % respecto a los valores obtenidos por Stiglat.

- los momentos actuantes pueden expresarse de la forma:

$$\begin{aligned}
 M_x &= D_x \cdot \left[ \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + \mu_y \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \right] \\
 M_{xy} &= D_{xy} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x \delta y} \\
 M_y &= D_y \cdot \left[ \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \mu_x \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} \right]
 \end{aligned}
 \quad [14]$$

siendo D<sub>x</sub> y D<sub>y</sub> las rigideces a flexión de la placa ortótropa según las direcciones X e Y, y D<sub>xy</sub> la rigidez torsional:

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{E_x \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \\
 D_y &= \frac{E_y \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)} \\
 D_{xy} &= \frac{G_{xy} \cdot h^3}{6}
 \end{aligned}$$

Si llamamos 2 · H a la rigidez torsional efectiva de la placa ortótropa, la ecuación diferencial general de una placa ortótropa, o Ecuación de Huber, queda de la siguiente manera:

$$D_x \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + 2 \cdot H \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} + D_y \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} = q \quad [15]$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot H &= D_x \cdot \mu_y + D_y \cdot \mu_x + 2 \cdot D_{xy} \\
 &= D_1 + D_2 + 2 \cdot D_{xy}
 \end{aligned}$$

La determinación de las rigideces D<sub>x</sub>, D<sub>y</sub>, D<sub>xy</sub> y 2 · H de una manera lo más exacta posible es uno de los factores más determinantes en la resolución del problema de las placas ortótropas.

Vamos a referirnos a partir de aquí a un tipo específico de placa ortótropa: la placa de hormigón rigidizada por dos sistemas ortogonales de nervios rectangulares del mismo material (Fig. 8). Al venir la ortotropía dada por la forma y no por el material, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_y = E \\
 \mu_x &= \mu_y = \mu \\
 G_{xy} &= G
 \end{aligned}$$

3.1.1. Rigideces a flexión

Las fórmulas generalmente usadas para el cálculo de las rigideces a flexión de la placa nervada (Szilard<sup>(12)</sup>, Manterola<sup>(2)</sup>) son:

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{E \cdot I_x}{b_x} \\
 D_y &= \frac{E \cdot I_y}{b_y}
 \end{aligned}$$

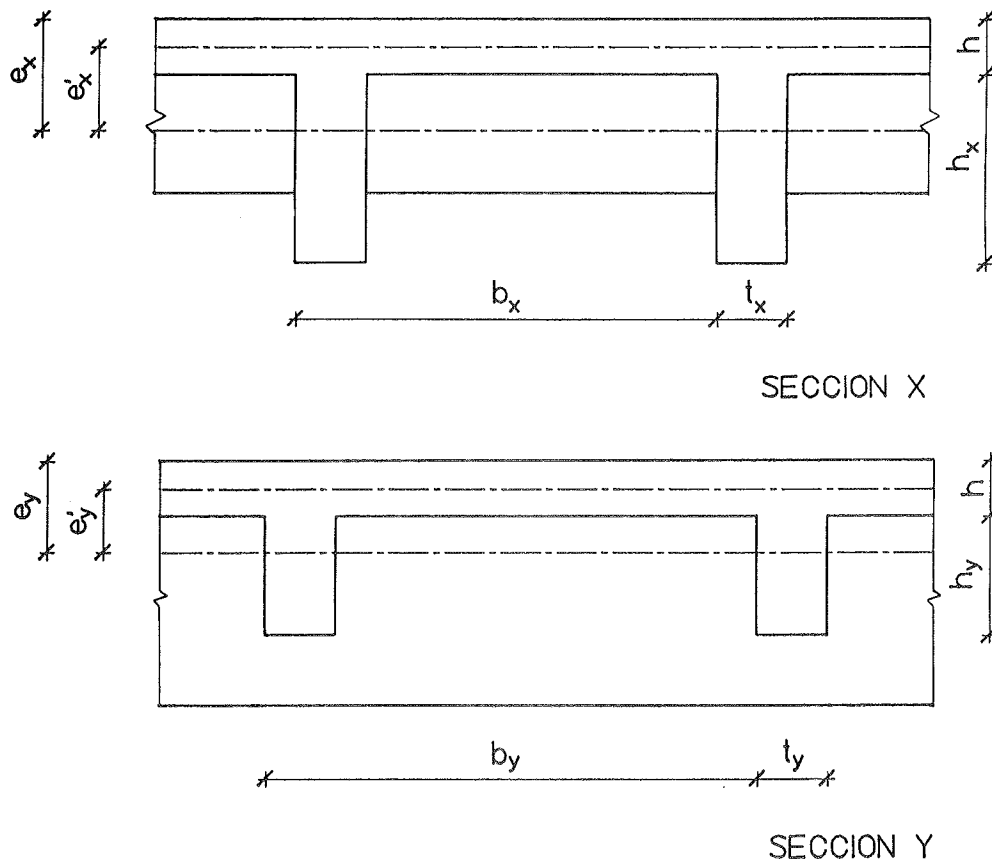


Fig. 8. Secciones-tipo de una placa nervada.

donde  $I_x$  e  $I_y$  son los momentos de inercia de la sección tipo T de la placa con respecto al eje neutro de la misma. Como vemos, se ha despreciado el efecto del módulo de Poisson, al considerarlo muy pequeño.

Cusens, Zeidan y Pama<sup>(13)</sup> realizaron un análisis exhaustivo de las rigideces de las placas nervadas en estado elástico, considerando el efecto del módulo de Poisson tanto en toda la losa superior como en la superficie de contacto entre los nervios que se cruzan.

$$M_x = D_x \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + C_y \cdot \mu \cdot D_y \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} \quad [16]$$

$$M_y = D_y \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2} + C_x \cdot \mu \cdot D_x \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta x^2}$$

Los valores de los coeficientes que aparecen en estas fórmulas son:

$$D_x = D'_x + D^*_x$$

$$D_y = D'_y + D^*_y$$

$$D^*_x = D^*_y = \frac{E' \cdot h^3}{12}$$

$$D^*_x = \frac{E^* \cdot t_x}{24 \cdot b_x} \cdot [2 \cdot h_x - 2 \cdot e_x + h]^2 \cdot (2 \cdot h_x + e_x + h) - (2 \cdot e_x - h)^2 \cdot (e_x + h)]$$

$$D^*_y = \frac{E^* \cdot t_y}{24 \cdot b_y} [2 \cdot h_y - 2 \cdot e_y + h]^2 \cdot (2 \cdot h_y + e_y + h) - (2 \cdot e_y - h)^2 \cdot (e_y + h)]$$

$$C_x = \frac{D'_x + D^*_x \cdot \frac{t_y}{s_y}}{D_x}$$

$$C_y = \frac{D'_y + D^*_y \cdot \frac{t_x}{s_x}}{D_y}$$

Los valores de  $e_x$  y  $e_y$  (distancia entre los ejes neutros de la placa nervada en cada dirección y el centro de la placa superior) dependen de las curvaturas de la placa en cada punto, es decir, no tienen unos valores fijos sino que dependen de las cargas actuantes y de las deformaciones por ellas inducidas, y por tanto el problema se vuelve indeterminado (Trenks<sup>(14)</sup> propone una solución que lleva a una ecuación diferencial de

octavo orden). Sin embargo, esta dependencia es muy pequeña y en los casos normales encontrados en la práctica, con módulos de Poisson pequeños, podemos despreciarla. De esta manera, los valores de  $e_x$  y  $e_y$  son:

$$e_x = \frac{t_x \cdot h_x \cdot (h_x + h)}{2 \cdot \left[ \frac{E'}{E^*} \cdot h \cdot b_x + t_x \cdot h_x \right]}$$

$$e_y = \frac{t_y \cdot h_y \cdot (h_y + h)}{2 \cdot \left[ \frac{E'}{E^*} \cdot h \cdot b_y + t_y \cdot h_y \right]}$$

Kennedy y Bali<sup>(15)</sup> analizaron las rigideces de las placas nervadas tanto en estado elástico como después de producirse la fisuración. Los valores que dan para las rigideces a flexión en estado elástico (fórmulas [19]) son muy parecidos a los anteriores, incluyendo además la influencia (muy pequeña) de las armaduras situadas en la parte inferior de los nervios.

### 3.1.2. Rigidez torsional

La rigidez torsional calculada según la fórmula obtenida por Huber<sup>(16)</sup> para placas ortótropas, da lugar a valores muy superiores a los reales en el caso de placas nervadas:

$$D_{xy} = (1 - \mu) \cdot \sqrt{D_x \cdot D_y}$$

El método generalmente usado para el cálculo de la rigidez torsional de este tipo de placa nervada (Rowe<sup>(17)</sup> y Manterola<sup>(2)</sup>), consiste, simplemente, en sumar los valores de la rigidez torsional de la placa y de los nervios, por separado:

$$D_{xy} = \frac{G \cdot h^3}{6} + \frac{G \cdot K_{tx} \cdot h_x \cdot t_x^3}{b_x}, \text{ para } t_x \leq h_x \quad [17]$$

siendo  $K_{tx}$  el coeficiente cuyo valor está expresado en [5]. Esta simple adición de rigideces no tiene en cuenta, en absoluto, el efecto del módulo de Poisson.

Timoshenko y Woinoswsky-Krieger<sup>(18)</sup> incluyen dicho efecto en la placa, pero no en los nervios.

Giencke<sup>(19)</sup>, en su evaluación de la rigidez torsional efectiva, exagera el efecto del módulo de Poisson, ya que realiza la formulación como si los nervios transversales estuvieran enteramente en contacto con los longitudinales, cuando en realidad la superficie de contacto es normalmente muy pequeña.

Jackson<sup>(20)</sup> propuso una técnica para el cálculo de la rigidez torsional de placas nervadas, consistente en realizar una analogía a una membrana, basándose en que la ecuación diferencial de una membrana sometida a una presión constante y a una tensión uniforme en sus bordes y la ecuación diferencial dada por Timoshenko y Goodier<sup>(1)</sup> para la torsión son muy parecidas. Esta técnica, que divide la sección tipo del forjado en rectángulos, cortándola por planos verticales, no considera la continuidad de la placa superior sobre los nervios y lleva a unos valores de la rigidez torsional superiores a los reales.

Cusens, Zeidan y Pama<sup>(13)</sup>, en el estudio citado anteriormente, incluyeron el efecto del módulo de Poisson tanto en la placa como en los nervios; el valor por ellos obtenidos para la rigidez torsional, aún proporcionando valores próximos a los reales, se queda un poco por debajo en su evaluación, según Kennedy y Bali<sup>(15)</sup>. Estos autores, en su estudio teórico ya citado anteriormente (comprobado mediante ensayos de laboratorio con modelos a escala reducida) sostienen que en las fórmulas [17] no se tiene en cuenta el efecto rigidizador que sobre la rigidez torsional de la placa en una dirección tiene la presencia de nervios en la dirección transversal; además incluyen la contribución (muy pequeña) de las armaduras situadas en la parte inferior de los nervios. Las fórmulas que proponen podemos expresarlas de la siguiente forma:

$$2 \cdot H = D_{xy}^p + D_{xy}^n + D_{xy}^a + D_{yx}^p + D_{yx}^n + D_{yx}^a + \mu \cdot D_x + \mu \cdot D_y \quad [18]$$

siendo:

$$D_{xy}^p = \frac{G \cdot h^3}{6} \cdot \frac{\frac{b_y \cdot h^3}{6} + \frac{K_t \cdot h_y \cdot t_y^3}{b_y}}{\frac{b_y \cdot h^3}{6}}$$

$$D_{yx}^p = \frac{G \cdot h^3}{6} \cdot \frac{\frac{b_x \cdot h^3}{6} + \frac{K_t \cdot h_x \cdot t_x^3}{b_x}}{\frac{b_x \cdot h^3}{6}}$$

$$D_{xy}^n = \frac{G \cdot K_t \cdot h_x \cdot t_x^3}{b_x}$$

$$D_{xy}^n = \frac{G \cdot K_t \cdot h_y \cdot t_y^3}{b_y}$$

$$D_{xy}^a = \frac{4 \cdot G \cdot K_t \cdot (n - 1) \cdot A_{sx}^2}{\pi \cdot b_x}$$

$$D_{yx}^a = \frac{4 \cdot G \cdot K_t \cdot (n-1) \cdot A_{sy}^2}{\pi \cdot b_y}$$

$$D_x = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} + \frac{E \cdot h \cdot \left[ e'_x - \frac{h}{2} \right]^2}{1 - \mu^2} + \frac{E \cdot I'_x}{b_x} \quad [19]$$

$$D_y = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} + \frac{E \cdot h \cdot \left[ e'_y - \frac{h}{2} \right]^2}{1 - \mu^2} + \frac{E \cdot I'_y}{b_y}$$

$$I'_x = t_x \cdot h_x \cdot \left[ h + \frac{h_x}{2} - e'_x \right]^2 + \frac{t_x \cdot h_x^3}{12} +$$

$$+ A_{sx} \cdot (n-1) \cdot (h + h_x - r_x - e'_x)^2$$

$$I'_y = t_y \cdot h_y \cdot \left[ h + \frac{h_y}{2} - e'_y \right]^2 + \frac{t_y \cdot h_y^3}{12} +$$

$$+ A_{sy} \cdot (n-1) \cdot (h + h_y - r_y - e'_y)^2$$

$$e'_x = \frac{t_x \cdot h_x \cdot \left[ h + \frac{h_x}{2} \right] + A_{sx} \cdot (n-1) \cdot (h + h_x - r_x) + \frac{b_x \cdot h^2}{2 \cdot (1 - \mu^2)}}{t_x \cdot h_x + A_{sx} \cdot (n-1) + \frac{b_x \cdot h}{1 - \mu^2}}$$

$$e'_y = \frac{t_y \cdot h_y \cdot \left[ h + \frac{h_y}{2} \right] + A_{sy} \cdot (n-1) \cdot (h + h_y - r_y) + \frac{b_y \cdot h^2}{2 \cdot (1 - \mu^2)}}{t_y \cdot h_y + A_{sy} \cdot (n-1) + \frac{b_y \cdot h}{1 - \mu^2}}$$

$$t_x \leq h_x$$

$$t_y \leq h_y$$

donde  $A_{sx}$  y  $A_{sy}$  son las áreas de las armaduras situadas en la parte inferior de los nervios, en cada dirección, y  $r_x$  y  $r_y$  los recubrimientos respectivos. En la práctica, los valores de  $A_{sx}$  y  $A_{sy}$  no se saben de antemano, y como además su influencia en los valores de  $D_x$  y  $D_y$  es mínima, lo normal es no tenerlos en cuenta.

### 3.2. Planteamiento de condiciones iniciales

Todo lo dicho en 2.2 sobre reproducción de condiciones de apoyo y de estado de cargas en placas macizas es aplicable directamente a las placas nervadas; en lo referente a los otros dos temas tratados en ese apartado (disposición espacial de las barras y cálculo de las características elastomecánicas de las mismas incluido el efecto del módulo de Poisson), describimos a continuación una serie de normas específicas.

#### 3.2.1. Discretización de la placa

En principio, son válidas las consideraciones básicas enunciadas en 2.2.1 para placa macizas, pero además podemos añadir algunas más, derivadas de la existencia de los nervios rigidizadores y de borde:

—La disposición de las barras del emparrillado virtual deberá seguir direcciones paralelas a las de los nervios; a efectos del presente estudio, sólo estamos considerando las placas rigidizadas por nervios en dos direcciones ortogonales, pero en general pueden darse casos de placas rigidizadas por dos familias de nervios no ortogonales o por nervios dispuestos según más de dos direcciones.

—Deberán disponerse barras que coincidan con los ejes de los nervios de borde, sean éstos paralelos a los nervios principales o no.

—En cuanto al número de barras que conviene disponer, la situación ideal sería aquella en que hubiera un nervio de cálculo por cada nervio real (o aún más, en caso de que estuvie-

ran muy separados), pero esto a veces será irrealizable por problemas de capacidad de almacenamiento o de velocidad del ordenador disponible, por lo que habrá que agrupar varios nervios reales en cada nervio de cálculo.

#### 3.2.2. Asignación de características elastomecánicas a las barras del emparrillado. Efecto del Módulo de Poisson

Como sabemos, las rigideces a flexión y torsión que han de asignarse a las vigas del emparrillado virtual, deben ser iguales a las de la zona de placa que sustituyen. En el caso de placas nervadas, primero hay que distribuir las rigideces a lo largo y ancho de la placa, es decir, repartir uniformemente el efecto rigidizador de los nervios; para ello calcularemos las rigideces de las secciones-tipo de la placa en cada dirección, y las dividiremos por la distancia entre nervios (naturalmente, esto será tanto más válido cuanto más cercanos estén los nervios

entre sí; en el caso de los forjados reticulares normalmente usados en la edificación, esta hipótesis simplificativa está plenamente justificada).

El cálculo del momento de inercia de la sección tipo no presenta ningún problema. El módulo de torsión se calcula de acuerdo con la fórmula de Timoshenko y Goodier, ya citada anteriormente:

$$M_t = \frac{G \cdot h^3}{6} + \frac{G \cdot K_t \cdot h_x \cdot t_x^3}{b_x}, \text{ si } t_x \leq h_x$$

Para estudiar las condiciones en que podemos realizar la asimilación a emparrillado de una placa nervada, vamos a proceder, igual que en 2.2.2, comparando las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de los dos tipos estructurales, [15] y [4] respectivamente. Podemos expresar ambas ecuaciones de la siguiente forma (hacemos  $D_x = D_y = D$ , que es la situación normal en forjados reticulares):

$$D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \left[ \frac{\delta^4 w}{\delta x^4} + \frac{\delta^4 w}{\delta y^4} \right] + 2 \cdot H \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^4 w}{\delta x^2 \delta y^2} = q \cdot (1 - \mu^2)$$

$$E \cdot I^e \cdot \left[ \frac{\delta^4 w^e}{\delta x^4} + \frac{\delta^4 w^e}{\delta y^4} \right] + 4 \cdot G^e \cdot I^e \cdot \frac{\delta^4 w^e}{\delta x^2 \delta y^2} = q$$

Ambas ecuaciones serían idénticas, excepto en el término independiente, si se cumplieran simultáneamente las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} D \cdot (1 - \mu^2) &= E \cdot I^e \\ 2 \cdot H \cdot (1 - \mu^2) &= 4 \cdot G^e \cdot I^e \end{aligned}$$

La primera condición es fácil de cumplir, basando con tomar como valor de la inercia de las vigas del emparrillado equivalente, el cociente:

$$I^e = \frac{D \cdot (1 - \mu^2)}{E} \quad [20]$$

La segunda condición podemos expresarla de la forma:

$$G^e = \frac{2 \cdot H \cdot (1 - \mu^2)}{4 \cdot I^e} \quad [21]$$

El cumplimiento de [21] implicaría el uso de un módulo de deformación transversal,  $G^e$ , variable en cada barra, lo cual no es compatible

con la filosofía de los programas de cálculo matricial. No obstante, en este tipo de cálculo, el valor de  $G$  va siempre multiplicado por el del módulo de torsión  $M_t$  de cada barra; basándonos en esta circunstancia, podemos cumplir la segunda condición anterior tomando un módulo de torsión ficticio en cada barra,  $M_t^e$ , tal que:

$$M_t^e \cdot G = M_t \cdot G^e$$

Asignándole a  $G^e$  el valor expresado en [21] y sustituyendo los valores de  $I^e$  y  $G$ , obtenemos:

$$M_t^e = \frac{M_t \cdot H \cdot (1 - \mu^2)}{2 \cdot G \cdot I^e} = \frac{M_t \cdot H \cdot (1 + \mu)}{D} \quad [22]$$

Así pues, tomando estos valores de  $I^e$  y  $M_t^e$  (calculados con los valores de  $D$  y  $H$  expresados en [19] y [18]) como características elastomecánicas de las vigas del emparrillado virtual, calcularemos las flechas  $w^e$  y los momentos  $M_x^e$ ,  $M_y^e$  y  $M_{xy}^e$  de dicho emparrillado.

Las flechas de la placa nervada se hallarán en función de las del emparrillado, afectándolas del coeficiente  $(1 - \mu^2)$  en que difieren los términos independientes de las dos ecuaciones diferenciales:

$$w(x, y) = w^e(x, y) \cdot (1 - \mu^2) \quad [23]$$

Calculemos a continuación la relación entre los momentos del emparrillado y los de la placa. Sustituyendo [23] en [16] y [14] obtenemos, respectivamente, las expresiones de los momentos flectores y torsores de la placa nervada en función de  $w^e$ :

$$M_x = -D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x^2} + C_y \cdot \mu \cdot D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta y^2}$$

$$\cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta y^2}$$

$$M_{xy} = -D_{xy} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x \delta y} \quad [24]$$

$$M_y = -D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta y^2} + C_x \cdot \mu \cdot D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x^2}$$

Según [3], los momentos obtenidos en el emparrillado son:

$$M_x^e = -E \cdot I^e \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x^2}$$

$$M_{xy}^e = -2 \cdot G^e \cdot I^e \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x \cdot \delta y}$$

$$M_y^e = -E \cdot I^e \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta y^2}$$

Sustituyendo en estas expresiones los valores de  $I^e$  y  $G^e$  calculados en [20] y [21] resulta:

$$M_x^e = -D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x^2}$$

$$M_{xy}^e = -H \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta x \delta y}$$

$$M_y^e = -D \cdot (1 - \mu^2) \cdot \frac{\delta^2 w^e}{\delta y^2}$$

Introduciendo estos valores en [24] y teniendo en cuenta [23] obtenemos las relaciones que buscamos entre los momentos en la placa nervada y los del emparrillado virtual:

$$M_x = M_x^e + C_x \cdot \mu \cdot M_y^e$$

$$M_{xy} = \frac{D_{xy}}{H} \cdot M_{xy}^e \quad [25]$$

$$M_y = M_y^e + C_x \cdot \mu \cdot M_x^e$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en 2.2.2, en nudos situados sobre bordes paralelos al eje Y:

$$C_x = 0$$

en nudos situados sobre bordes paralelos al eje X:

$$C_y = 0$$

y en nudos de esquina:

$$C_x = 0$$

$$C_y = 0$$

En resumen, para analizar una placa nervada por el método de asimilación a emparrillado, se procede a calcular matricialmente el emparrillado equivalente formado por vigas de inercia y módulo de torsión ficticios, cuyos valores vienen dados por [20] y [22]; posteriormente, los valores de flechas y momentos en la placa se calculan en función de los obtenidos en cada barra del emparrillado, mediante las relaciones [23] y [25].

Como puede verse, el método es muy parecido al desarrollado para las placas macizas; de

hecho, podemos considerar esas placas como un caso particular de las nervadas en las que:

$$t_x = t_y = h_x = h_y = 0, \quad [26]$$

y comprobar que aplicando la formulación de placas nervadas se llega a las mismas conclusiones que en 2.2.2.:

Los valores de las rigideces  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_{xy}$  y  $H$  de una placa maciza podemos calcularlos sustituyendo [26] en [19], [17] y [18]:

$$D = D_x = D_y = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 + \mu)}$$

$$2 \cdot H = \frac{E \cdot h^3}{6 \cdot (1 - \mu^2)}$$

Las fórmulas [20] y [22] quedan de la forma:

$$I^e = \frac{h^3}{12}$$

$$M_i^e = M_i \cdot (1 + \mu)$$

Estas expresiones son equivalentes a la operación que hacíamos en 2.2.2, consistente en tomar un valor del coeficiente de Poisson igual a 0, con lo cual desaparecía el factor  $(1 - \mu^2)$  de la fórmula de la inercia (igual que aquí), y el factor  $(1 + \mu)$  de la del módulo de deformación transversal (equivalente a multiplicar el módulo de torsión por el mismo factor, como aquí, al ir siempre asociados en el cálculo).

### 3.3. Obtención de los resultados de la placa

Las flechas en los nudos de la placa se hallan en función de las de los nudos correspondientes del emparrillado virtual y del módulo de Poisson del material, aplicando la fórmula [23]. Las reacciones en los soportes de la placa coinciden con las obtenidas en los nudos correspondientes del emparrillado virtual.

Al igual que en la asimilación de placas macizas, vamos a suponer que las leyes de variación de esfuerzos entre los nudos extremos de las barras del emparrillado es lineal; también de igual manera, obtendremos los esfuerzos por unidad de anchura y evitaremos las discontinuidades que se producen en las leyes tomando en cada nudo los valores promedio de las barras concurrentes en él (excepto en los nudos que sean soportes o en los que haya cambios bruscos de sección).

Una vez hecho todo esto, los momentos de armado definitivos en cada punto de la placa

nervada los hallaremos aplicando las fórmulas [8], [9], [10], [11], [12] y [13].

### 3.4. Comprobación de resultados

#### 3.4.1. Placa cuadrada empotrada en el perímetro

Se ha calculado una placa nervada, de forma cuadrada, empotrada en los cuatro lados y sometida a una carga superficial uniforme. Como resultados de comparación usaremos los

proporcionados por Bares; este autor tabuló los momentos flectores en el centro de la placa y en el punto medio de los lados de una placa ortótropa, en función de un coeficiente K, que depende de las rigideces  $H$ ,  $D_x$  y  $D_y$ , y cuyo valor oscila entre 1 (en el caso de losa maciza sin ningún rigidizador:  $h_x = 0$ ) y 0 (en el caso de emparrillado puro, sin capa de compresión que una las barras entre sí:  $h = 0$ ).

$$K = \frac{H}{\sqrt{D_x \cdot D_y}}$$

TABLA 8

Placa nervada cuadrada empotrada en el perímetro.

Momentos flectores en el centro de la placa y en el punto medio de los lados:  $L = 10 \text{ m}$ ;  $\mu = 0$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$

K	$M_o$ (mt/m)					$M_{x1}$ (mt/m)				
	Bares	L/10	$\epsilon$ (%)	L/6	$\epsilon$ (%)	Bares	L/10	$\epsilon$ (%)	L/6	$\epsilon$ (%)
1,00	3,348	3,595	+ 7,38	3,707	+ 10,72	-10,480	-10,273	-1,97	-10,275	-1,96
0,95	3,406	3,688	+ 8,28	3,790	+ 11,27	-10,512	-10,362	-1,43	-10,354	-1,50
0,90	3,467	3,790	+ 9,32	3,881	+ 11,94	-10,546	-10,455	-0,86	-10,437	-1,03
0,80	3,600	3,993	+ 10,92	4,063	+ 12,86	-10,620	-10,633	+ 0,12	-10,597	-0,22
0,70	3,748	4,178	+ 11,47	4,228	+ 12,81	-10,702	-10,786	+ 0,78	-10,734	+ 0,30
0,60	3,915	4,352	+ 11,16	4,383	+ 11,95	-10,795	-10,921	+ 1,16	-10,855	+ 0,56
0,50	4,104	4,523	+ 10,21	4,535	+ 10,50	-10,900	-11,046	+ 1,34	-10,968	+ 0,62
0,40	4,320	4,664	+ 7,96	4,660	+ 7,87	-11,020	-11,144	+ 1,13	-11,056	+ 0,33
0,30	4,466	4,783	+ 7,10	4,766	+ 6,71	-11,105	-11,223	+ 1,06	-11,127	+ 0,20
0,20	4,637	4,877	+ 5,18	4,850	+ 4,59	-11,203	-11,284	+ 0,72	-11,181	-0,20
0,10	4,838	4,966	+ 2,64	4,929	+ 1,88	-11,320	-11,339	+ 0,17	-11,231	-0,79
0,05	4,953	5,033	+ 1,62	4,988	+ 0,71	-11,387	-11,379	-0,07	-11,267	-1,05
0,00	5,080	5,050	- 0,59	5,003	- 1,52	-11,460	-11,389	-0,62	-11,276	-1,60

$\epsilon$  = Diferencia en % respecto a los valores obtenidos por Bares.

(Valores obtenidos por Bares para losas macizas [ $K = 1$ ]:  $M_o = 3,520 \text{ mt/m}$ ,  $M_{x1} = - 10,300 \text{ mt/m}$ ).

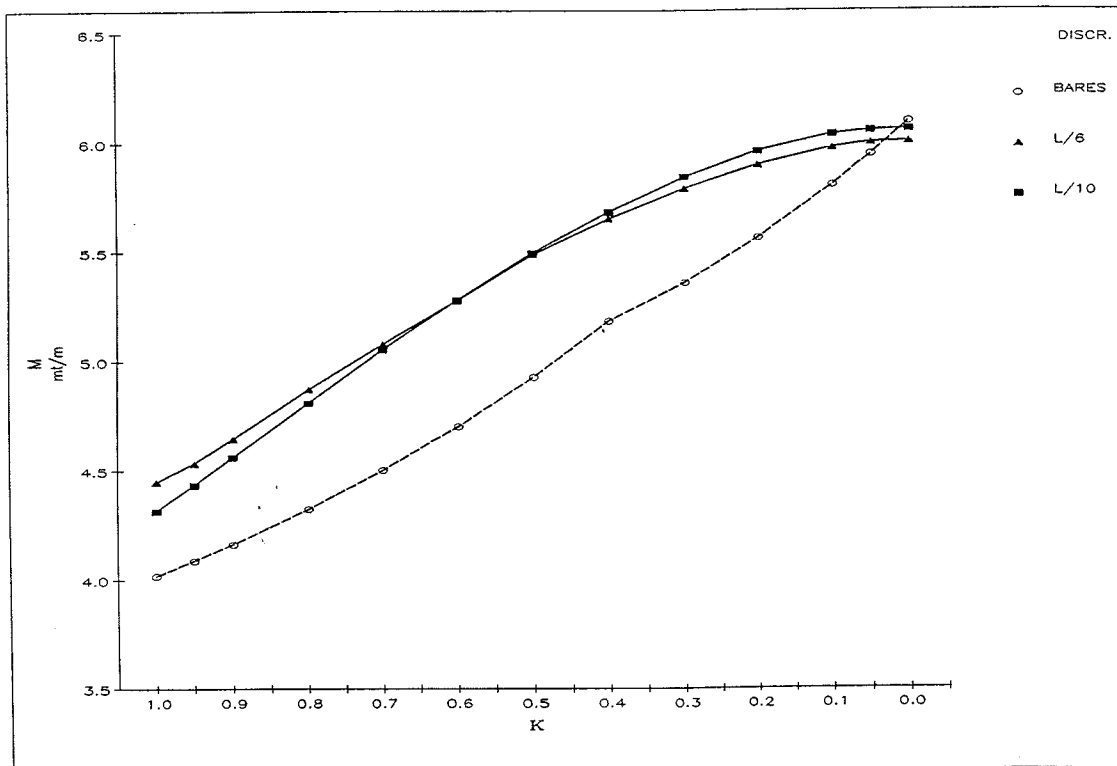


Gráfico 8. Placa nervada cuadrada empotrada en el perímetro. Momento flector en el centro de la placa.  $L = 10 \text{ m}$ ;  $\mu = 0,2$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$ .

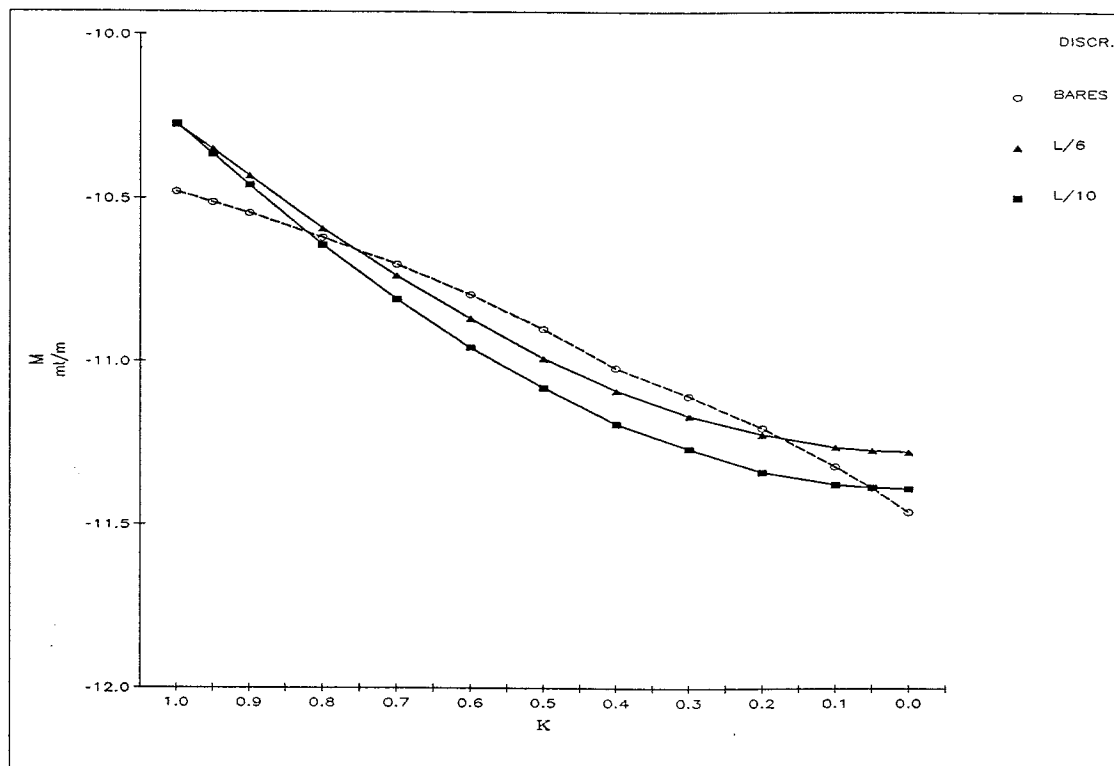


Gráfico 9. Placa nervada cuadrada empotrada en el perímetro. Momento flector en el punto medio de los lados.  $L = 10 \text{ m}$ ;  $\mu = 0,2$ ;  $q = 2 \text{ t/m}^2$ .

En la tabla 8 y los gráficos 8 y 9 están reflejados los resultados obtenidos variando el espesor  $h$  de la capa de compresión para conseguir cubrir todo el campo de variación de  $K$ .

Lo primero que es necesario resaltar es que los momentos flectores proporcionados por Bares<sup>(8)</sup> para  $K = 1$  no son iguales a los que él mismo da para placas macizas (tabla 1), sino que son un 5% inferiores en el centro de la placa y un 2% superiores en el punto medio de los lados; los resultados obtenidos con el método de asimilación a emparrillado son mejores, ya que esas diferencias, calculando con una discretización  $L/10$ , son bastante menores (+ 2% y -0,2%, respectivamente). Así pues, partimos de diferencias entre Bares y M.A.E. ( $L/10$ ) para  $K = 1$ , del 7% en momentos flectores en el centro de la placa y del 2% en el punto medio de los lados; en el centro, las diferencias aumentan conforme disminuye  $K$  hasta un valor de 0,6, donde son del 12%, para después disminuir hasta hacerse prácticamente nulas para  $K = 0$ ; en el punto medio de los lados, las diferencias se mantienen siempre en valores inferiores al 2% para cualquier valor de  $K$ , haciéndose también casi nulas para  $K = 0$ . Es también resaltable el hecho de que los resultados obtenidos con una discretización  $L/6$  sean casi idénticos a los obtenidos con  $L/10$ .

Los valores que tiene el coeficiente  $K$  en los forjados reticulares normalmente usados en la construcción (todos los recogidos en la Norma NTE/EHR) oscilan entre 0,08 y 0,17, es decir, en el ámbito donde los resultados de Bares y los obtenidos mediante el M.A.E. más se asemejan.

#### 3.4.2. Placa cuadrada articulada en el perímetro

Deb y Booton<sup>(21)</sup> calcularon, mediante el método de los elementos finitos, la flecha en el punto medio de una placa cuadrada, articulada en los cuatro lados, sometida a una carga superficial uniforme y con un número variable de nervios rigidizadores; para ello usaron dos elementos distintos: el propuesto por Mukhopadhyay<sup>(22)</sup> y<sup>(23)</sup> y el formulado por ellos mismos. En el gráfico 10 podemos ver cómo las flechas calculadas con el método de asimilación a emparrillado son muy semejantes a las calculadas con los dos tipos de elementos finitos, acercándose incluso más (sobre todo en el caso de pocos rigidizadores) a las proporcionadas por el elemento de Mukhopadhyay (más exacto) que las del elemento de Deb y Booton, basado en una formulación aproximada que desprecia la contribución a la rigidez a torsión que proporcionan los nervios rigidizadores.



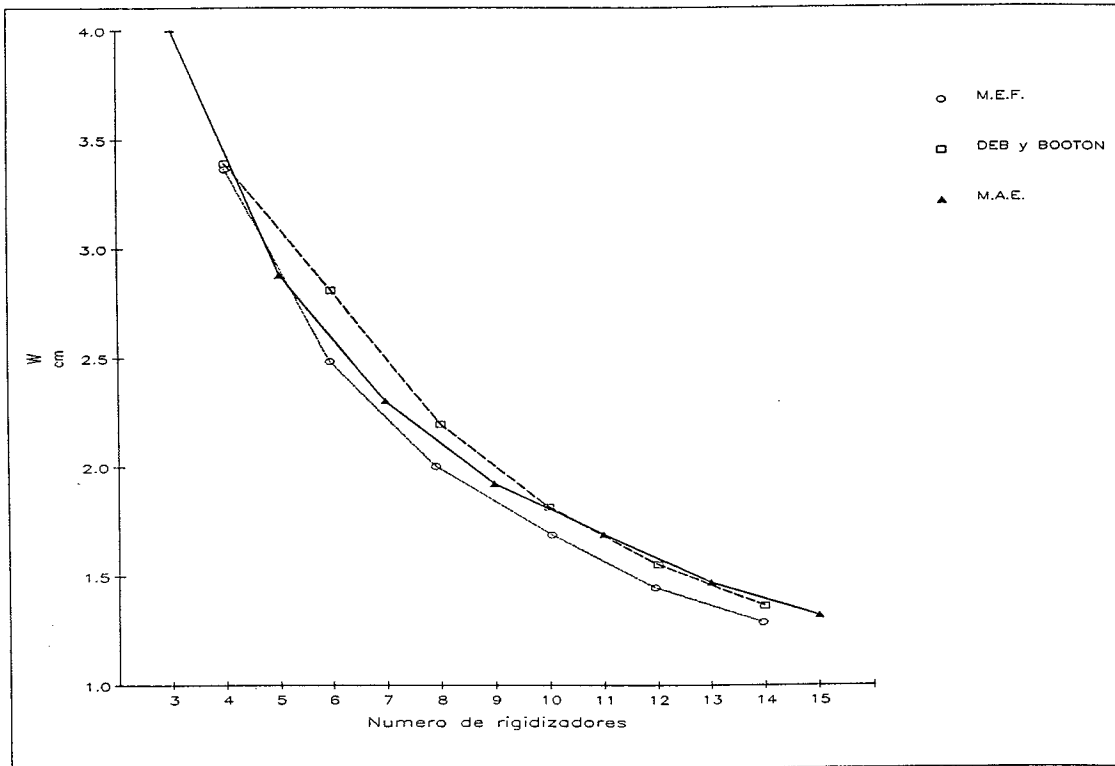


Gráfico 10. Placa nervada cuadrada articulada en el perímetro. Flecha en el centro de la placa.  $L = 2$  m;  $E = 21.000.000$  t/m<sup>2</sup>;  $\mu = 0,2$ ;  $q = 6$  t/m<sup>2</sup>;  $h = 0,02$  m;  $h_x = h_y = 0,1$  m;  $t_x = t_y = 0,01$  m.

#### 4. CONCLUSIONES

1. El método de cálculo de placas por asimilación a emparrillados consiste, como todos los métodos de asimilación, en un proceso de ida y vuelta, que podemos dividir en tres partes:

—Sustitución de la estructura que se va a analizar (placa de espesor constante o placa nervada) por otra en la cual el proceso de cálculo es conocido (emparrillado de barras).

—Realización del cálculo de esta estructura virtual.

—Cálculo de los resultados de la placa real en función de los obtenidos en el emparrillado virtual.

La resolución por métodos matriciales de un emparrillado es un problema perfectamente conocido y resoluble fácilmente mediante ordenador; los problemas se plantean al hacer y deshacer la asimilación.

2. La disposición de las barras del emparrillado virtual debe hacerse siguiendo direcciones paralelas a las de los nervios (en caso de placas nervadas) o las de las armaduras (en caso de placas macizas). Deben disponerse barras coincidiendo con los ejes de los nervios de borde de las placas, sean éstos paralelos o no a los ner-

vios o armaduras principales. Deben disponerse barras en ambas direcciones que pasen por los ejes de los soportes en que reposa la placa; en caso de apoyos continuos no puntuales, deben colocarse barras según sus ejes. Es conveniente colocar barras que pasen en ambas direcciones por los puntos donde existen cargas concentradas importantes; en el caso de cargas lineales, las barras se colocarán según sus ejes de aplicación. Todas las líneas de barras que no pasen por soportes deben disponerse de manera que intersecten líneas que sí lo hagan, para lograr una correcta transmisión de cargas y evitar el efecto 'shear lag' que puede producirse en caso contrario.

3. El número total de barras que habrá que disponer depende del grado de exactitud requerido y de las características del ordenador que se vaya a utilizar. Es necesaria, al menos, una discretización  $L/4$ , que corresponde a colocar, además de las líneas de barras que pasan por los apoyos, una línea de barras por el centro de los vanos y otras dos líneas entre las anteriores (que pasarán por bordes de ábacos en caso de placas nervadas); se ha comprobado que ya con esta mínima discretización se consiguen resultados suficientemente aproximados a los reales. También se ha comprobado la convergencia del método, ya que discretizaciones más tupidas proporcionan mejores resultados.

4. Las rigideces a torsión y flexión que se asignen a las vigas del emparrillado virtual deben ser iguales a las de la zona de placa que sustituyen (con la salvedad que se indica más adelante); en el caso de placas rigidizadas mediante nervios dispuestos de una manera uniforme y con una separación pequeña entre ellos (que es lo más normal en edificación), el reparto uniforme del efecto rigidizador entre toda la superficie es la solución más cómoda y proporciona resultados muy cercanos a los reales.

5. Tal como se ha venido aplicando hasta ahora el método de cálculo de placas por asimilación a emparrillado, no se tenía adecuadamente en cuenta el efecto que el Módulo de Poisson tiene en el comportamiento de las placas, produciéndose errores de cierta importancia en los resultados, tanto cuantitativamente como conceptualmente, puesto que un aumento del Módulo de Poisson, que debe producir un aumento de los flectores y una disminución de las flechas, producía el efecto contrario (aumento de flechas y disminución de flectores).

Los cambios que se proponen en la aplicación del método de asimilación para incluir correctamente el efecto del Módulo de Poisson, inciden en tres aspectos:

—En el cálculo de las rigideces a flexión y torsión de las placas nervadas, que debe hacerse según las fórmulas [18] y [19].

—En el cálculo de las características elasto-mecánicas (inercia y módulo de torsión) de las barras del emparrillado virtual, que debe hacerse asignándoles unos valores ficticios calculados según las fórmulas [20] y [21], en función de los reales.

—En el cálculo de los corrimientos y esfuerzos de la placa real, que debe hacerse en función de los obtenidos en el emparrillado virtual, aplicando las fórmulas de conversión [23] y [25] (con las correcciones correspondientes en caso de bordes).

6. En el cálculo del módulo de torsión de las barras interviene el valor del coeficiente  $K_t$  de Timoshenko y Goodier, que es variable en función de la relación entre las dos dimensiones de la sección de la barra considerada; por tanto, una diferente discretización de una placa de espesor constante daría lugar a diferentes módulos de torsión globales. La solución que debe adoptarse es asignar siempre a  $K_t$  un valor de 1/3 (correspondiente a secciones de ancho infinito). De igual modo hay que proceder en el caso de la capa de compresión de las placas nervadas.

7. Las condiciones de apoyo de las placas deben introducirse en los nudos correspondientes del emparrillado virtual; las coacciones totales de algún desplazamiento (empotramientos, articulaciones, ejes de simetría, etc.) se introdu-

cen fácilmente; en el caso de soportes aislados de dimensión finita, la reproducción fiel de las condiciones de apoyo se consigue coaccionando totalmente el desplazamiento vertical (hipótesis normalmente admitida) y parcialmente los giros de los nudos-soportes, mediante coeficientes de balasto, de valor igual al de las rigideces de los soportes.

8. Las cargas puntuales y lineales que actúan sobre la placa deben aplicarse sobre los nudos y barras correspondientes del emparrillado virtual. Las cargas superficiales es mejor distribuirlas en forma de cargas triangulares sobre las barras; una distribución en forma de cargas puntuales sobre los nudos proporciona peores resultados y sólo es igual de admisible cuando la discretización es muy tupida.

9. Las leyes de esfuerzos obtenidas en el emparrillado virtual son discontinuas (tienen saltos en los nudos); como esfuerzos en la placa real deben considerarse los valores promedio de los obtenidos a cada lado de los nudos, excepto cuando la discontinuidad tiene una razón de ser estructural (nudos-soportes, nudos-esquina, etc.).

10. El cálculo nos proporciona momentos flectores y torsores en los nudos; el armado de la placa a partir de los momentos principales en cada nudo siguiendo sus direcciones no es viable, como tampoco lo es disponer armaduras distintas que absorban por separado flectores y torsores. El cálculo de las armaduras necesarias para absorber cualquier campo de momentos generados por una combinación dada de flectores y torsores debe hacerse a partir de unos "momentos de armado", calculados según las fórmulas [8], [9], [10], [11], [12] y [13] en función de los flectores y torsores en cada nudo.

11. Los resultados obtenidos en el análisis de placas con diversas condiciones de sustentación, forma y cargas, mediante el presente método de asimilación a emparrillados, han sido excelentes, incluso con discretizaciones muy poco tupidas.

#### NOTACION:

- $u$ : Desplazamiento según dirección X.
- $v$ : Desplazamiento según dirección Y.
- $w$ : Desplazamiento según dirección Z.
- $\epsilon_x$ : Deformación lineal relativa, en dirección X.
- $\epsilon_y$ : Deformación lineal relativa, en dirección Y.
- $\mu$ : Coeficiente de Poisson.
- $I_x$ : Inercia de sección perpendicular a eje X.
- $I_y$ : Inercia de sección perpendicular a eje Y.

$M_t$ : Módulo de torsión.  
 $I^e$ : Inercia de las vigas del emparrillado virtual.  
 $M_t^e$ : Módulo de torsión de las vigas del emparrillado virtual.  
 $M_x$ : Momento flector de eje X.  
 $M_y$ : Momento flector de eje Y.  
 $M_{xy}$ : Momento torsor.  
 $w^e$ : Flecha en emparrillado virtual.  
 $w_o^e$ : Flecha en emparrillado virtual ( $\mu = 0$ ).  
 $M_{x_o}^e$ : Momento flector de eje X, en emparrillado virtual ( $\mu = 0$ ).  
 $M_{y_o}^e$ : Momento flector de eje Y, en emparrillado virtual ( $\mu = 0$ ).  
 $M_{xy_o}^e$ : Momento torsor, en emparrillado virtual ( $\mu = 0$ ).  
 $M_x^*$ : Momento de armado de eje X.  
 $M_y^*$ : Momento de armado de eje Y.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) TIMOSEHNKO, S.P. y GOODIER, J.N.: "Theory of elasticity". United Engineering Trustees. Nueva York, 1934 (trad. al español por Fuentes Pérez, A.: "Teoría de la elasticidad". Ediciones Urmo. Bilbao, 1968).
- (2) MANTEROLA, J.: "Cálculo de tableros por el método de emparrillado". Hormigón y Acero, n° 122, 1977, p. 93-149.
- (3) WOOD, R.H.: "The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments". Concrete, n° 2, 1968, pp. 69-76.
- (4) GUPTA, A.K. y SEN, S.: "Design of flexural reinforcement in concrete slabs". Jour. Struc. Div. A.S.C.E., vol. 103, n° 4, 1977, pp. 793-804.
- (5) GUPTA, A.K.: "Combined membrane and flexural reinforcement in plates and shells". Jour. Struc. Eng. A.S.C.E., vol. 112, n° 3, 1986, pp. 550-557.
- (6) MILLS, H.B.: 1968 "Discussion of 'The reinforcement of slabs in accordance with a pre-determined field of moments', de Wood, R.H.", Concrete, n° 8, 1968.
- (7) ARMER, G.S.T.: "Discussion of 'The reinforcement of slabs in accordance with a predetermined field of moments', de Wood, R.H.", Concrete, n° 8, 1968.
- (8) BARES, R.: "Tabulky pro vypočet desek a sten, Státní nakladatelství technické literatury". Praga, 1964. (trad. al español de Canal, J.M.: "Tablas para el cálculo de placas y vigas

pared". 2ª edición ampliada, revisada por Kappelmacher, C. Editorial Gustavo Gili, Barcelona, 1981).

(9) STIGLAT, K. y WIPPEL, H.: "Platten". Wilhelm ernst und sohn. Berlín, 1966. (trad. al español por Batanero, J. y Morán, F.: "Placas". Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y del Cemento. Madrid, 1968).

(10) HUANG, M.K. y CONWAY, H.D.: "Bending of a uniformly loaded rectangular plate with two adjacent edges clamped and the others simply supported or free". Jour. of Applied Mechanics, vol. 12, 1952.

(11) GARCIA MONGE, F.: "Placas circulares". Monografía n° 105. Instituto Eduardo Torroja de la Construcción y el Cemento. Madrid, 1963.

(12) SZILARD, R.: "Theory and analysis of plates classical and numerical methods". Prentice-Hall Inc. Nueva Jersey, 1974.

(13) CUSENS, A.R., ZEIDAN, M.A. y PAMA, R.P.: "Elastic rigidities of ribbed plates". Building Science. Vol. 7, 1972, pp. 23-32.

(14) TRENKS, K.: "Beitrag zur Berechnung orthogonal-anisotroper Rechteckplatten". Der Bauingenieur, vol. 29, 1954, pp. 372-377.

(15) KENNEDY, JOHN B. y BALI, S.K.: "Rigidities of concrete waffle-type slab structures". Can. Jour. Civ. Eng., vol. 6, 1979, pp. 65-74.

(16) HUBER, M.T.: "Die Theorie der Kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten". Der Bauingenieur, vol. 4, 1923, pp. 354-392.

(17) ROWE, R.E.: "Concrete bridge design". C.R. Books Ltd. Londres, 1962.

(18) TIMOSHENKO, S.P. y WOINOWSKY-KRIEGER, S.: "Theory of plates and shells". McGraw-Hill. Nueva York, 1959 (trad. al español por Medina Salanova, F.J.: "Teoría de placas y láminas". Ediciones Urmo, Bilbao).

(19) GIENCKE, E.: "Die Grundgleichungen für die Orthotropic Platte mit Steifen Exzentrischen". Der Stahlbau, vol. 24, 1955, pp. 128 y ss.

(20) JACKSON, N.: "The torsional rigidity of concrete bridge decks". Concrete, vol. 2, 1968, pp. 468-474.

(21) DEB, A. y BOOTON, M.: "Finite element models for stiffened plates under transverse loading". Computers and structures, vol. 28, n° 3, 1988, pp. 361-372.

(22) MUKHOPADHYAY, M.: "Stiffened plate plane stress elements for the analysis of ships' structures". Computers and structures, vol. 13, 1981, pp. 563-573.

(23) MUKHOPADHYAY, M. y SATSANGI,

S.K.: "Isoparametric stiffened plate bending element for the analysis of ships' structures". Trans. R. Inst. Naval Arch., vol. 126, 1984, pp. 141-151.

## RESUMEN

El método de cálculo de placas mediante asimilación a emparrillados de barras no es de aplicación directa e inmediata, sino que requiere el uso de una metodología que proporcione tanto la manera de pasar de un tipo estructural a otro como la de interpretar los resultados obtenidos en este último, de forma que sean aplicables al primero; actualmente, en la utilización práctica de este método se recurre a unos criterios, compilados de diversos autores y publicaciones, que en muchos casos dan lugar a errores que caen incluso del lado de la inseguridad.

El presente trabajo pretende sentar las bases para una correcta utilización del método en el cálculo de placas planas de forma cualquiera, sometidas a cualquier tipo de cargas perpendiculares a su plano y sustentadas de cualquier manera. La bondad del método se ha comprobado mediante comparaciones de los resultados

obtenidos, en diversos tipos de placas, con los proporcionados por otros autores y métodos.

## SUMMARY

The method of calculating slabs by grillage analogy does not lend itself to direct or immediate application, but requires the use of a methodology which provides both the means of passing from one structural type to another, and the manner of interpreting the results obtained in the latter case in such a way that they are applicable to the former. Currently, the practical utilization of this method involves falling back on certain criteria, compiled from various authors and publications, and which in many cases give rise to errors which can actually lie on the side of unsafeness.

This paper endeavours to establish a basis for the correct use of the method in calculating flat slabs of any shape subjected to loads of any type acting perpendicular to their plane and supported in any way. The worth of the method has been demonstrated by comparing the results obtained on various types of slabs with those provided by other authors and methods.

\* \* \*

## Nueva Publicación HORMIGON ARMADO, 13ª Edición

**Título: Hormigón Armado, 13ª Edición**  
**Autores: P. Jiménez Montoya, A. García Meseguer y F. Morán Cabré**  
**Editor: Gustavo Gili, Barcelona, diciembre 1991**  
**Características: 2 volúmenes de 21 x 28 cm, 1.244 págs., encuadernados en tela con sobrecubiertas**

Dado el éxito obtenido por las anteriores ediciones de esta obra durante más de veinte años, los autores se han visto obligados a preparar una nueva edición de la misma, revisando y actualizando su contenido.

En la redacción de la misma se han tenido en cuenta la "Instrucción Española para el proyecto y la ejecución de obras de hormigón en masa o armado - EH-91", de reciente aparición; el Pliego para la Recepción de Cementos RC-88, así como la normativa europea e internacional más actual, en especial el Eurocódigo EC-2 de 1991 y el Código Modelo MC-90 del CEB.

Se han revisado en profundidad los capítulos de cementos, de preparación del hormigón, del control de calidad y de deformaciones, en los

que se han producido los mayores cambios al aparecer las nuevas normas indicadas.

En el tomo II se ha redactado de nuevo el apartado dedicado a programas de ordenador, introducido a partir de la 12ª edición, que ha sido ampliado hasta su extensión actual de 150 páginas. Se presentan en total 10 programas para el cálculo de esfuerzos en pórticos y para el armado de secciones y piezas de hormigón. Si bien los programas son análogos a los de la edición anterior, se han introducido en los mismos cambios importantes que facilitan su uso.

Por otra parte, los programas se presentan ahora en lenguaje GW-BASIC para ordenadores personales compatibles, incluyendo una documentación completa y detallada de cada uno de ellos, que abarca organigramas, descripción de datos y resultados, formulación aplicada, listados fuente y ejemplos numéricos. De estos programas es posible solicitar un disco que contiene los listados fuente en GW-BASIC y, optativamente, versiones compiladas y optimizadas de los mismos para su uso profesional.