

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE FISICAS

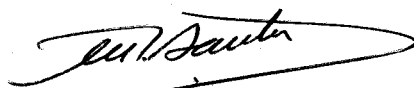
 * FORMAS RECIPROCAS *
 * DEL *
 * PRINCIPIO DE HAMILTON. *

EL CATEDRATICO DIRECTOR



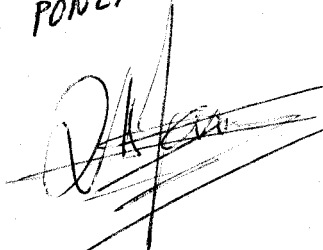
D. PABLO HERVAS BURGOS,
Catedrático director del
Departamento de Físico-
Matemáticas de la Escue-
la Técnica Superior de
Arquitectura de la
Universidad de Sevilla.

EL CO-DIRECTOR

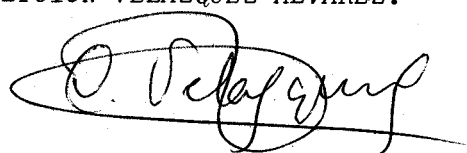


D. MARCELO RODRIGUEZ DANTA
Profesor Agregado de Física
de la Escuela Técnica Supe-
rior de Ingenieros Indus-
triales de la Universidad
de Sevilla.

PONENTE:



Memoria presentada para aspirar al
grado de Doctor en Ciencias Físicas, por
la Licenciada CONCEPCION VELAZQUEZ ALVAREZ.



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
 FACULTAD DE FISICA
 SECRETARIA
 18-10-82
 ENTRADA N.º 446

Sevilla Septiembre 1982



Quiero hacer constar mi agradecimiento a D. Pablo Hervás Burgos, director del presente trabajo, y a D. Marcelo Rodríguez Danta, co-director del mismo, por las valiosas sugerencias, constante estímulo y acertada dirección de ambos.

I N T R O D U C C I O N

El estudio de las formas recíprocas de las ecuaciones de Lagrange ha sido realizado sólo en aquellos casos en que las fuerzas generalizadas derivan de un potencial (1). Dichas formas recíprocas traducen la evolución del sistema mediante la llamada función colagrangiana, expresada en términos de impulsos y obtenida de la lagrangiana mediante sucesivas transformaciones de Legendre,

Posteriormente, por el interés que presenta en sus aplicaciones, se han desarrollado métodos derivados del Principio de Mínimo de la energía complementaria:

En 1952 (2), Toupin da un principio variacional para el análisis dinámico de un sistema discreto de partículas, utilizando como variables independientes las componentes del vector desplazamiento y sus impulsos generalizados.

Obtiene, mediante transformaciones de Legendre, nuevas expresiones de las energías cinéticas y potencial en función de dichos impulsos y sus derivadas temporales, llegando a ecuaciones de evolución de expresión formal análogas a las de Lagrange.

Gladwell y Zimmerman (3) estudian el acoplamiento de vibraciones acústicas y elásticas en ciertos problemas de estructuras en las siguientes etapas:

a) Planteamiento : como los problemas de vibraciones elásticas son formulados, habitualmente, en términos de desplazamientos y los de vibraciones acústicas en términos de presiones, se proponen referirlos a unas mismas variables (desplazamientos o esfuerzos).

b) Consideran casos en que los desplazamientos, esfuerzos, ... etc. tienen una dependencia con el tiempo de tipo exponencial.

c) Desviándose del principio Mixto de Reissner (planteado en términos de desplazamientos y esfuerzos), formulan el Principio de Energía complementaria en términos exclusivamente de esfuerzos, estableciendo un íntimo paralelismo con el principio de Hamilton.

d) Particularizan a los casos de vibraciones libres de una membrana, una lámina, un cuerpo elástico isótropo, estudiando finalmente, el acoplamiento de las vibraciones aire-membrana.

Washizu (4) formula un problema de vibraciones libres de un cuerpo elástico sujeto a condiciones de contorno mixtas.

a) Admite que las fuerzas inerciales por unidad de volumen son funciones lineales de los desplazamientos, lo que implica traducir un problema dinámico en que los desplazamientos, y esfuerzos varían senoidalmente con el tiempo, a un problema estático.

b) Bajo tales hipótesis formula el problema mediante el Principio clásico de energía potencial estacionaria.

c) En el marco de las mismas hipótesis restrictivas, obtiene un Principio de energía complementaria estacionaria.

d) Estudia como casos particulares, las vibraciones libres transversales de una viga empotrada en un extremo y libre en el otro.

e) Aplica el método numérico de Rayleigh-Ritz a los dos Principios.

Karnopp (5) en 1967 realiza el estudio de un problema dinámico lineal, holónomo y conservativo, formulándolo bajo un principio variacional complementario por aplicación de sucesivas transformaciones de Legendre.

a) Muestra que dichas transformaciones son reversibles, lo que permite pasar de un problema planteado en términos de esfuerzos a otro en términos de desplazamientos.

b) En el caso de un sistema con coordenadas cíclicas, elimina éstas por el procedimiento de Routh y aplica el método anterior al sistema reducido.

c) Propone como aplicación un ejemplo simple de pequeñas oscilaciones.

En 1968, Tabarrok (6) estudia los casos de modo de frecuencia cero.

a) Señala la dificultad de pasar de una formulación clásica a una complementaria cuando el número de desplazamientos generalizados requeridos para describir el movimiento de un sistema es distinto del de impulsos generalizados necesarios para el mismo propósito.

b) Soluciona el problema eliminando las coordenadas correspondientes a estos modos de frecuencias cero mediante el método de Routh,

Sakaguchi y Tabarrok (7) aplican el Principio de energía complementaria a un problema elástico (vibraciones transversales de una placa delgada rectangular), traduciendo las ecuaciones de evolución y las condiciones asociadas de contorno a términos de momentos.

a) Demuestran que la placa, en esta nueva formulación presenta un número infinito de modos de frecuencia cero, a diferencia de la formulación clásica que daría origen sólo a tres.

b) Observan que si estos modos de frecuencia nula no se eliminan, los métodos numéricos de Rayleigh-Ritz conducen a frecuencias propias inferiores a las reales.

Por último, Z. M. Elías (8) realiza un estudio crítico del Principio de energía complementaria para el análisis dinámico debido a Toupin (2), que le conduce tras estudiar un problema propuesto en formulación lagrangiana y en formulación de Toupin, a los siguientes resultados:

a) Que las ecuaciones de Toupin son equivalentes a la ecuación variacional $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^* + V^*) dt = 0$ sujeta a la condición de que la variación de los impulsos generalizados, asociados a las amplitudes del vector desplazamiento, se anula en los límites de la integración.

b) A partir de unas condiciones iniciales de las componentes del vector desplazamiento, con la formulación de Toupin, se llega a una solución indeterminada de los impulsos generalizados.

c) Inversamente, para unos valores iniciales de los impulsos generalizados y sus derivadas temporales, las componentes del vector desplazamiento no son, en general, cinemáticamente compatibles y el sistema de ecuaciones resultante, con incógnitas los desplazamientos, está sobredeterminado.

d) Añade al Principio variacional de Toupin, con el fin de obviar las dificultades encontradas en este Principio, un término aditivo que introduce las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos, a través de los valores que toman en el contorno estos desplazamientos.

Todos estos autores aplican de forma magistral el recíproco del Principio de Hamilton. Estudian las oscilaciones libres de las estructuras mecánicas de tipo arquitectónico. Pero, en esencia, tales aplicaciones no van más allá de los sistemas conservativos de tipo oscilatorio. La teoría de las transformaciones de contacto, al menos teóricamente, permite extender el principio de acción complementaria a todos los sistemas conservativos. Sin embargo, su metodología no ha sido desarrollada y se hace difícil, por no decir imposible, encontrar algún sistema conservativo no-lineal tratado por el Principio recíproco de Hamilton. Ello, tal vez, se ha debido al postulado original de la teoría de considerar a todos los conjuntos de coordenadas libres en el mismo plano de igualdad. Si ésto es evidente desde el punto de vista Hamiltoniano no lo es desde el punto de vista físico. Basta señalar que, en la mayor parte de los casos, asociado a los impulsos va una información física de gran contenido racional e intuitivo, imposible de detectar en el conjunto de variables conjugadas.

En este orden de ideas, el objeto de la tesis es:

1°. Buscar sistemas de naturaleza discreta cuyas fuerzas generalizadas no deriven de un potencial conservativo y, sin embargo, sus leyes de evolución puedan ser formuladas bajo la forma recíproca del Principio de Hamilton, esto es, sistemas no conservativos cuyas ecuaciones de evolución puedan formularse estrictamente como los gradientes de una funcional, energía complementaria, igualados a cero.

2°. Generalizar el concepto de sistema conservativo para que abarque los primitivos sistemas conservativos y que cumpla la condición anterior.

3°. Dada la importancia en el pensamiento actual de los sistemas disipativos, establecer la base teórica necesaria para su tratamiento dentro del marco de la energía complementaria.

4°. Extender los resultados anteriores a la teoría analítica de los campos.

5°. Tomando como punto de partida la definición clásica de coordenadas cíclicas, introducir en la formulación complementaria el concepto de momento conjugado cíclico. Mediante la teoría de las transformaciones puntuales, relacionar las integrales lineales y homogéneas de las derivadas de la colagrangiana con la existencia de variables cíclicas.

6°. Estudiar las evoluciones estacionarias en el espacio de los impulsos.

7°. Obtener los resultados que derivan de la invariancia de la densidad colagrangiana a las simetrías del espacio y del tiempo, en la teoría general de los campos.

C A P I T U L O I

FORMULACION DEL PROBLEMA

En el caso de sistemas no-conservativos, las ecuaciones de Lagrange, pueden formularse:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad 1 \leq i \leq n$$

donde $L=T-V$, siendo V el potencial conservativo de las fuerzas del sistema.

Tomando como momentos conjugados

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad 1 \leq i \leq n$$

mediante la transformación de Legendre, podemos definir la hamiltoniana:

$$H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L$$

y escribir las ecuaciones de Hamilton bajo la forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad 1 \leq i \leq n$$

Ahora bien, las ecuaciones (2) de Hamilton no definen, en general, la transformación de Legendre que implica el cálculo de la colagrangiana, en función de la hamiltoniana, salvo en el caso trivial $Q_i = 0$. Esto nos conduce a buscar formas funcionales de Q_i para las cuales esta transformación sea posible y nos lleve a formular las ecuaciones de evolución mediante el Principio recíproco de Hamilton.

PROPOSICION I.

Si las fuerzas generalizadas admiten como función potencial, la forma no-conservativa:

$$V = V(q_i, \dot{q}_i) \quad 1 \leq i \leq n$$

tal que

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

las ecuaciones de evolución pueden formularse bajo la forma recíproca del Principio de Hamilton.

DEMOSTRACION

En este caso las ecuaciones de evolución pueden escribirse:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

Haciendo $T-V=L$, podemos definir como momento conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

que nos permite escribir la hamiltoniana

$$H = p_i \dot{q}_i - L$$

y escribir las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (3)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (4)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad 1 \leq i \leq n$$

Ahora bien, las ecuaciones (4) nos permiten definir la colagrangiana del sistema por la transformación de Legendre.

$$F = \dot{p}_i q_i + H \quad (5)$$

donde

$$F = F(p_i, \dot{p}_i, t)$$

diferenciando la expresión (5)

$$\begin{aligned} dF &= (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}) dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + q_i d\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \\ &= \dot{q}_i dp_i + q_i d\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (6)$$

Por otro lado

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} d\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt \quad (7)$$

Comparando podemos escribir

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial F}{\partial p_i} \\ q_i &= \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \right) \quad 1 \leq i \leq n \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones recíprocas de Lagrange.

APLICACION

Sea un punto material de masa m sometido a la fuerza.

$$F = 2m\omega \vec{k} \wedge \vec{v} + m\omega^2 (x\vec{i} + y\vec{j})$$

fuerza que admite como potencial no-conservativo

$$V = -\frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) - m\omega(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

con la siguiente lagrangiana

$$L = T - V - V' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) + m\omega(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

Sus ecuaciones de evolución tienen la forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

y los impulsos

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m\omega y \Rightarrow \dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x} = m\omega^2 x + m\omega \dot{y}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\omega x \Rightarrow \dot{p}_y = \frac{\partial L}{\partial y} = m\omega^2 y - m\omega \dot{x}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \quad \dot{p}_z = \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

La Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L = \\ &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \omega x p_y + \omega y p_x \end{aligned}$$

La colagrangiana

$$F = x\dot{p}_x + y\dot{p}_y + z\dot{p}_z + H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

Las ecuaciones de evolución correspondientes a esta colagrangiana conducen a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} p_x = 0 &\Rightarrow \dot{x} = \omega y \\ p_y = 0 &\Rightarrow \dot{y} = -\omega x \\ p_z = 0 &\Rightarrow \dot{z} = 0 \end{aligned}$$

PROPOSICION II.

Si las fuerzas son de la forma

$$Q = \left(\frac{\partial g_i}{\partial q_k} - \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial \phi}{\partial q_k} \quad 1 < i < n$$

con

$$g_k = g_k(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

las ecuaciones de evolución admiten la formulación recíproca.

DEMOSTRACION

Si la fuerza generalizada tiene por componente k la expresión dada, admite como función potencial

$$V = \phi - g_i \dot{q}_i$$

puesto que

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \right\} \{ \phi - g_i \dot{q}_i \} = \\
 & = - \frac{\partial \phi}{\partial q_k} - \frac{d g_k}{dt} + \frac{\partial g_i}{\partial q_k} \dot{q}_i \\
 & = \left(- \frac{\partial g_k}{\partial q_i} + \frac{\partial g_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial \phi}{\partial q_k}
 \end{aligned}$$

Luego, en virtud de la proposición anterior

$$L = T - (\phi - g_i \dot{q}_i)$$

expresión que nos permite definir como momento conjugado

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + g_i$$

y obtener la hamiltoniana mediante la transformación de Legendre

$$H = p_i \dot{q}_i - L$$

la cual nos conduce a las ecuaciones de evolución:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

El segundo grupo de las ecuaciones de Hamilton nos permite definir la transformación de Legendre:

$$F = \dot{p}_i q_i + H$$

y con ello determinar la colagrangiana.

Diferenciando, teniendo presente que:

$$F = F(p_i, \dot{p}_i, t)$$

y las ecuaciones de Hamilton precedentes, como en el caso anterior, obtenemos como ecuación de evolución en el espacio de los impulsos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

NOTA 1. Una fuerza con la forma funcional del enunciado es la conocida fuerza de Lorentz que actúa sobre una partícula cargada en un campo electromagnético

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

donde,

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \Rightarrow$$

$$V = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

$$F_k = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right) q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})$$

PROPOSICION III.

Si las fuerzas generalizadas admiten como función potencial:

$$V = V(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$$

tal que,

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{q}_k} \right) \quad (8)$$

las ecuaciones de evolución pueden formularse bajo la forma recíproca del Principio de Hamilton.

DEMOSTRACION

Sean las ecuaciones de evolución del sistema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (9)$$

con

$$T = T(q_i, \dot{q}_i)$$

$$V = V(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i)$$

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{q}_i} \right)$$

Haciendo $L = T - V$, las ecuaciones (9) se pueden escribir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{q}_i} \right) = 0$$

o bien,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \right\} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Definimos:

$$p_{i_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \Rightarrow \dot{p}_{i_1} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (10)$$

$$p_{i_2} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i}$$

Esta definición de momento conjugado nos permite encontrar una función dinámica H mediante la transformación de Legendre.

$$H(q_i, p_i, t) = (p_{i_1} + \dot{p}_{i_2}) \dot{q}_i + p_{i_2} \ddot{q}_i - L \Rightarrow$$

$$H = p_{i_1} \dot{q}_i - L \quad (11)$$

puesto que,

$$\dot{p}_{i_2} \dot{q}_i = -p_{i_2} \ddot{q}_i$$

y escribir las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_{i_1}} \\ \dot{p}_{i_1} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq n \quad (12)$$

Las ecuaciones (12) nos definen la colagrangiana mediante la transformación de Legendre:

$$F = q_i \dot{p}_{i1} + H \Rightarrow$$

$$dF = \dot{p}_{i1} dq_i + q_i d\dot{p}_{i1} + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_{i1}} dp_{i1} + \frac{\partial H}{\partial t} dt =$$

$$= q_i d\dot{p}_{i1} + q_i dp_{i1} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \Rightarrow$$

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_{i1}} \quad ,, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_{i1}} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial p_{i1}} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_{i1}} = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

PROPOSICION IV.

Si la lagrangiana L es invariante a una traslación en el origen de tiempos, H es una constante en la evolución del sistema.

DEMOSTRACION:

Derivamos respecto al tiempo la expresión (11) de H:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} (p_{i1} \dot{q}_i - L) \Rightarrow$$

$$\frac{dH}{dt} = \dot{p}_{i1} \dot{q}_i + p_{i1} \ddot{q}_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{\ddot{q}}_i \right)$$

De las fórmulas (10), deducimos:

$$\dot{p}_{i_1} \dot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

$$p_{i_1} \ddot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{\ddot{q}}_i$$

y sustituyendo estas expresiones en la de $\frac{dH}{dt}$ se obtiene:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \text{const.}$$

PROPOSICION V.

Si las fuerzas generalizadas admiten como función potencial

$$V = V(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \dots, q_i^{(n)})$$

tal que

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) \dots + \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial V}{\partial \ddot{q}_i} \right) +$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial V}{\partial q_i^{(n)}} \right)$$

las ecuaciones de evolución pueden formularse bajo la forma recíproca del Principio de Hamilton.

JUSTIFICACION:

Esta proposición es una generalización de la proposición anterior, tomando como momentos conjugados:

$$p_{i_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dots + (-1)^{n+1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(n)}} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{p}_{i_1} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$p_{i_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dots + (-1)^n \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(n)}} \right)$$

$$p_{i_3} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-3}}{dt^{n-3}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(n)}} \right)$$

$$p_{i_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dots + (-1)^{n-k+2} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^{(n)}} \right)$$

$$p_{i_n} = \frac{\partial L}{\partial q_i^{(n)}}$$

Estas definiciones nos permiten escribir la función H mediante la transformación de Legendre:

$$\begin{aligned} H &= \dot{q}_i (p_{i_1} + \dot{p}_{i_2}) + \ddot{q}_i (p_{i_2} + \dot{p}_{i_3}) + \dots + q_i^{(n)} p_{i_n} - L = \\ &= p_{i_1} \dot{q}_i - L \end{aligned}$$

puesto que,

$$\dot{p}_{i_2} \dot{q}_i = -p_{i_2} \ddot{q}_i \quad , , \quad \dot{p}_{i_3} \ddot{q}_i = -p_{i_3} \dddot{q}_i \dots$$

y escribir al grupo de ecuaciones de Hamilton

$$\dot{p}_{i_1} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = + \frac{\partial H}{\partial p_{i_1}}$$

$1 < i < n$

Lo cual nos lleva a definir la colagrangiana del sistema por:

$$F = \dot{p}_{i_1} q_i + H$$

Diferenciando y siguiendo un proceso similar al de la proposición anterior resulta:

$$dF = q_i d\dot{p}_{i_1} + \dot{q}_i dp_{i_1} \quad \Rightarrow$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_{i_1}} \quad , \quad q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_{i_1}} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_{i_1}} \right)$$

$1 < i < n$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_{i_1}} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_{i_1}} = 0$$

NOTA 2. De la misma forma que en la proposición anterior se demuestra: que si la lagrangiana es un invariante a una traslación en el origen de los tiempos, H es una constante en la evolución.

GENERALIZACION DEL CONCEPTO DE POTENCIAL

El problema de formular las ecuaciones de evolución de un sistema, mediante el Principio recíproco de Hamilton, quedó, subordinado, en el planteamiento del problema, a encontrar una definición de momento conjugado tal, que permitiese, en primer lugar, mediante la transformación de Legendre definir la Hamiltoniana del sistema. Y, en segundo lugar, que el segundo grupo de ecuaciones de Hamilton careciese de términos complementarios, pues en tal caso, la segunda transformación de Legendre, inducida por dichas ecuaciones nos conduce directamente a una colagrangiana, cuyos gradientes igualados a cero son las ecuaciones de evolución del sistema.

La clásica definición de momento conjugado en los sistemas conservativos satisface ambas condiciones y tales sistemas admiten como leyes de evolución el Principio recíproco de Hamilton. Sin embargo, la proposición contraria no es cierta, es decir, existen sistemas no-conservativos cuyas leyes de evolución pueden formularse bajo el principio de energía complementaria. Esto nos aconseja generalizar el concepto de sistema conservativo y por lo tanto el de potencial, hasta abarcar unos y otros sistemas.

Una forma de llegar a tal generalización es definir el sistema conservativo como aquel cuya trayectoria en el espacio de las configuraciones son las extremales de una cierta funcional $\int_{t_1}^{t_2} \phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)}) dt$ de las coordenadas y de sus derivadas respecto al tiempo.

La forma de ϕ se determina de modo que las ecuaciones de Euler correspondientes a

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dots, q^{(n)}) dt = 0$$



se identifiquen con las ecuaciones de evolución del sistema.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} &= -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) \dots + (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i^{(n)}} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -\frac{\partial (T-V)}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \ddot{q}_i} \right) + \dots \\ &\dots + (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i^{(n)}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \ddot{q}_i} = \dots = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i^{(n)}} = 0$$

lo que implica $\phi = T - V$ y el operador de Euler aplicado a $\phi(q_i, \dot{q}_i, \dots, \dot{q}_i^{(n)})$ se identifica con las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

cuando Q_i deriva de la función potencial $V = T - \phi$.

Pues en este caso, la definición de impulso conjugado dado en las proposiciones anteriores nos conduce a una hamiltoniana generalizada cuyo segundo grupo de ecuaciones de Hamilton nos lleva a una colagrangiana que permite expresar las ecuaciones de evolución bajo el Principio recíproco de Hamilton.

Es de observar que esta definición de sistema conservativo contiene a los clásicos, es decir, a aquellos para los cuales el potencial es $V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$. En efecto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial (T - \phi)}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - \phi)}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Es decir, en este caso $\phi(q_i, \dot{q}_i) \equiv L(q_i, \dot{q}_i)$.

CONCLUSIONES.

Las aportaciones que creemos originales en este capítulo son:

1°. Extender el principio de energía complementaria a los sistemas discretos no-conservativos, cuyas fuerzas admiten potenciales que son funciones de las coordenadas lagrangianas y sus derivadas sucesivas respecto al tiempo.

2°. Definir un momento conjugado capaz de generar una colagrangiana cuyos gradientes igualados a cero son las ecuaciones de evolución del sistema.

3°. Esta definición de momento conjugado nos conduce a la definición de una función dinámica, que hemos llamado hamiltoniana generalizada, por analogía. Su propiedad más destacada es la de ser constante de evolución, si el potencial es un invariante a una traslación en el origen de los tiempos. Dicha hamiltoniana puede o no identificarse con la energía total del sistema.

4°. Se generaliza el concepto de sistema conservativo considerando como tal aquel cuyas trayectorias son las extremales en el espacio de las configuraciones de una funcional perfecta determinada.

Esta nueva definición abarca tanto a los sistemas conservativos clásicos como a los estudiados en este capítulo.

C A P I T U L O I I

SISTEMAS DISIPATIVOS.

Los sistemas disipativos pueden tratarse dentro del esquema lagrangiano introduciendo la función disipativa de Rayleigh

$$R = \frac{1}{2} b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad 1 \leq i \leq n$$

como una cierta función potencial de la fuerza disipativa

$$F_i = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}$$

Sin embargo, no es posible definir un momento conjugado capaz de conducirnos a una colagrangiana cuyos gradientes igualados a cero sean las ecuaciones de evolución de los sistemas disipativos. Ello no excluye la posibilidad de encontrar nuevos puntos de partida en su tratamiento. Uno puede ser asociar al sistema disipativo M otro sistema hipotético antidisipativo \bar{M} , llamado sistema imagen, tal que su punto representativo en el espacio de las fases satisfaga a las relaciones:

$$\bar{q}_i(t) = q_i(-t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{q}}_i(t) = -\dot{q}_i(-t)$$

Partiendo de esta definición de sistema imagen y tomando como lagrangiana del sistema total, definiciones de momentos conjugados y hamiltoniana, del trabajo (*), se define la colagrangiana del sistema total y se demuestran las siguientes proposiciones

(*) El sistema imagen en los sistemas disipativos marcofianos.
M.P. Hervás Burgos. Gaceta Matemática. 1^a Serie, Tomo XXVI - 5 y 6.

LAGRANGIANA del sistema total $\langle M, \bar{M} \rangle$

$$L^* = T - V - \frac{1}{2} R$$

con

$$T = a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad V = c_{ij} q_i \bar{q}_j \quad R = b_{ij} (\dot{q}_i \bar{q}_j - q_i \dot{\bar{q}}_j)$$

DEFINICIONES

1. Impulsos de los sistemas objeto e imagen

$$p_i = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L^*}{\partial q_i}$$

$$\bar{p}_j = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\bar{q}}_j} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{p}}_j = \frac{\partial L^*}{\partial \bar{q}_j}$$

2. Hamiltoniana

$$H = \dot{q}_i p_i + \dot{\bar{q}}_j \bar{p}_j - L^*$$

3. Colagrangiana

$$F^* = \dot{p}_i q_i + \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j + H = \frac{d}{dt} (p_i q_i + \bar{p}_j \bar{q}_j) - L^*$$

F^* es la función de Lagrange del sistema $\langle M^*, \bar{M}^* \rangle$ complementario del $\langle M, \bar{M} \rangle$.

PROPOSICION VI

Las ecuaciones de evolución de los sistemas discretos disipativos pueden formularse bajo la forma recíproca del Principio de Hamilton

DEMOSTRACION

Sea la lagrangiana del sistema $\langle M, \bar{M} \rangle$

$$L^* = a_{ij} \dot{q}_i \dot{\bar{q}}_j - \frac{1}{2} b_{ij} (\dot{q}_i \bar{q}_j - q_i \dot{\bar{q}}_j) - c_{ij} q_i \bar{q}_j$$

Construimos la hamiltoniana,

$$H(q_i, \bar{q}_j, p_i, \bar{p}_j) = p_i \dot{q}_i + \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - L^*$$

y la colagrangiana

$$F^*(p_i, \bar{p}_j, \dot{p}_i, \dot{\bar{p}}_j) = \dot{p}_i q_i + \dot{\bar{p}}_j \bar{q}_j + p_i \dot{q}_i + \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j - L^*$$

Diferenciando los términos de la última igualdad:

$$dF^*(p_i, \bar{p}_j, \dot{p}_i, \dot{\bar{p}}_j) = \frac{\partial F^*}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F^*}{\partial \bar{p}_j} d\bar{p}_j + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_i} d\dot{p}_i + \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\bar{p}}_j} d\dot{\bar{p}}_j$$

$$dF^* = \dot{p}_i dq_i + q_i d\dot{p}_i + \dot{\bar{p}}_j d\bar{q}_j + \bar{q}_j d\dot{\bar{p}}_j +$$

$$+ p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i + \bar{p}_j d\dot{\bar{q}}_j + \dot{\bar{q}}_j d\bar{p}_j -$$

$$- \frac{\partial L^*}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L^*}{\partial \bar{q}_j} d\bar{q}_j - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\bar{q}}_j} d\dot{\bar{q}}_j =$$

$$\begin{aligned}
&= (\dot{p}_i - \frac{\partial L^*}{\partial q_i}) dq_i + (\dot{\bar{p}}_j - \frac{\partial L^*}{\partial \bar{q}_j}) d\bar{q}_j + \\
&+ (p_i - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}) d\dot{q}_i + (\bar{p}_j - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\bar{q}}_j}) d\dot{\bar{q}}_j + \\
&+ q_i d\dot{p}_i + \bar{q}_j d\dot{\bar{p}}_j + \dot{q}_i dp_i + \dot{\bar{q}}_j d\bar{p}_j
\end{aligned}$$

Todos los paréntesis del segundo miembro son nulos por las definiciones 1, con lo cual la última expresión de dF^* queda de la forma:

$$dF^* = q_i d\dot{p}_i + \bar{q}_j d\dot{\bar{p}}_j + \dot{q}_i dp_i + \dot{\bar{q}}_j d\bar{p}_j$$

Identificando términos en las dos expresiones de dF^* :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F^*}{\partial p_i} \quad (13)$$

$$q_i = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_i} \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_i} \right) \quad (14)$$

$$\dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial F^*}{\partial \bar{p}_j} \quad (15)$$

$$\bar{q}_j = \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\bar{p}}_j} \Rightarrow \dot{\bar{q}}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{\bar{p}}_j} \right) \quad (16)$$

Iguando (13) y (14) obtenemos las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial p_i} = 0$$

recíprocas de las:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0$$

Iguando (15) y (16)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial p_j} = 0$$

recíprocas de:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = 0$$

PROPOSICION VII.

Los operadores de las ecuaciones de evolución de un sistema discreto disipativo, son los adjuntos de los operadores de las ecuaciones de evolución en su formulación complementaria, tomando como lagrangiana la del sistema $\langle M, \bar{M} \rangle$.

DEMOSTRACION

Sea,

$$L^* = a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} b_{ij} (\dot{q}_i \bar{q}_j - q_i \dot{\bar{q}}_j) - c_{ij} q_i \bar{q}_j$$

la lagrangiana del sistema $\langle M, \bar{M} \rangle$ que da lugar a las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} \ddot{q}_j - b_{ij} \dot{q}_j + c_{ij} \bar{q}_j = 0 \quad \text{I} \quad (\text{A})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} \ddot{q}_i + b_{ij} \dot{q}_i + c_{ij} q_i = 0 \quad \text{II}$$

Por las definiciones 1 escribimos:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij} \dot{q}_j - \frac{1}{2} b_{ij} \bar{q}_j \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = \frac{1}{2} b_{ij} \dot{q}_j - c_{ij} \bar{q}_j \\ \bar{p}_j &= \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} = a_{ij} \dot{q}_i + \frac{1}{2} b_{ij} q_i \\ \dot{\bar{p}}_j &= \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = \frac{1}{2} b_{ij} \dot{q}_i - c_{ij} q_i \end{aligned} \quad (17)$$

y por la 2,

$$\begin{aligned} F^* &= p_i \dot{q}_i + \dot{p}_i q_i + \bar{p}_j \dot{q}_j + \dot{\bar{p}}_j q_j - a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \\ &+ \frac{1}{2} b_{ij} (\dot{q}_i \bar{q}_j - q_i \dot{q}_j) + c_{ij} q_i \bar{q}_j \end{aligned}$$

Sustituyendo las igualdades (17) en la expresión de la colagrangiana total F^* del sistema $\langle M^*, \bar{M}^* \rangle$ podemos escribirla de la forma:

$$F^* = -K_{ij}^{-1} a_{ij} \dot{p}_i \dot{\bar{p}}_j + \frac{1}{2} K_{ij}^{-1} b_{ij} (p_i \dot{\bar{p}}_j - \dot{p}_i \bar{p}_j) + K_{ij}^{-1} c_{ij} p_i \bar{p}_j$$

siendo

$$K_{ij} = a_{ij} c_{ij} - \frac{1}{4} b_{ij}^2$$

dando lugar a las siguientes ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial p_i} = 0 & \Leftrightarrow a_{ij} \ddot{p}_j + b_{ij} \dot{p}_j + c_{ij} \bar{p}_j = 0 & \text{I} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \dot{p}_j} \right) - \frac{\partial F^*}{\partial p_j} = 0 & \Leftrightarrow a_{ij} \ddot{p}_i - b_{ij} \dot{p}_i + c_{ij} p_i = 0 & \text{II} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Las I-A son autoadjuntas de las I-B.

Las II-A son autoadjuntas de las II-B.

VARIABLES CICLICAS.

DEFINICION:

4. Dado el sistema $\langle M, \bar{M} \rangle$, definimos como coordenada cíclica q_α (\bar{q}) $_\alpha$ del mismo, aquella que verifica la expresión:

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial L^*}{\partial \bar{q}_\alpha} = 0 \quad \alpha \in \{m+1, \dots, n\}$$

siendo L^* la lagrangiana del sistema total.

Las ecuaciones precedentes implican:

$$p_\alpha + \bar{p}_\alpha = \text{const.}$$

CONCLUSIONES.

Las aportaciones originales de este capítulo son:

1°. En la proposición VI demostramos que las ecuaciones de evolución de los sistemas discretos disipativos pueden formularse bajo la forma recíproca del Principio de Hamilton.

Esta demostración parece un tanto superflua, pues construida la lagrangiana del sistema total, su paso a la formulación complementaria, según vimos en el capítulo anterior, es inmediata. Sin embargo no sólo es propósito de este trabajo demostrar la posible existencia de la formulación complementaria sino realizarla. Y esta demostración nos proporciona las ecuaciones de evolución del sistema objeto y del sistema imagen en el espacio de los impulsos. Aparte de que la formulación hamiltoniana de tales sistemas no está suficientemente desarrollada.

2°. En la proposición VII demostramos que los operadores de las ecuaciones de evolución en el espacio de las configuraciones del sistema objeto son adjuntos de los operadores de las ecuaciones de evolución en el espacio de los impulsos y recíprocamente.

Además, como la relación "de ser adjuntos" se verifica entre los operadores del sistema objeto e imagen en ambos espacios por separado, se concluye fácilmente en la igualdad entre las leyes de evolución del sistema objeto en coordenadas lagrangianas y las leyes de evolución del sistema imagen en momentos conjugados.

C A P I T U L O I I I

SISTEMAS CONTINUOS

INTRODUCCION

Consideremos un medio continuo que ocupa una región D , simplemente conexa, del espacio E^3 , referida al sistema cartesiano $\{0, x_1, x_2, x_3\}$. Admitamos que al $\partial D = \bar{D} - D$ sea de la clase C^1 y D interior a \bar{D} .

El estado físico del medio en el instante t , quedará determinado por el conjunto de valores que las funciones $\psi_i(x_k, t)$ y $\dot{\psi}_i(x_k, t)$ $1 \leq i \leq n$ toman en cada $(x_k) \in \bar{D}$. Estas funciones traducen las propiedades físicas del medio en el instante t . El medio continuo así considerado, puede tratarse como un campo, es decir, como un conjunto de funciones

$$\{\psi_i(x_k, t), \dot{\psi}_i(x_k, t)\}, 1 \leq i \leq n$$

cuyo dominio de existencia es $D \times I_t$, siendo I_t el intervalo de tiempo en la evolución.

Para introducir el concepto de coordenada lagrangiana seguimos el procedimiento clásico: realizamos una partición sobre \bar{D} , en N celdas, se toma un punto $P_j(a_j, b_j, c_j)$ de cada celda y se considera el conjunto de puntos P_1, P_2, \dots, P_N extraído del medio

El estado físico del sistema $\{P_j\}$ está determinado por el conocimiento de las funciones:

$$\begin{aligned} & \{\psi_j(a_j, b_j, c_j, t)\} \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq j \leq N \\ & \{\dot{\psi}_j(a_j, b_j, c_j, t)\} \end{aligned}$$

que sólo dependen de t, mientras el medio continuo exige para su determinación los conjuntos de funciones:

$$\begin{aligned} & \{\psi_i(x_1, x_2, x_3, t)\} \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq i \leq N \\ & \{\dot{\psi}_i(x_1, x_2, x_3, t)\} \end{aligned}$$

que son funciones de x_k y de t.

Es evidente que el estado físico del sistema $\{P_j\}$ coincidirá, tanto más, con el estado físico del medio cuanto menor sea el diámetro de la partición celular. En otras palabras, en virtud del proceso de "paso al continuo", las funciones $\psi_i(x_k, t)$ y $\dot{\psi}_i(x_k, t)$ pueden considerarse como coordenadas lagrangianas, funciones sólo de t, en índices discretos i, e índices continuos $\{x_1, x_2, x_3\}$. Apareciendo el medio como un sistema holónomo de infinitos grados de libertad: triplemente infinito no numerable.

Siguiendo la formulación lagrangiana de la teoría de campos, hacemos las siguientes:

DEFINICIONES.

5. Densidad lagrangiana:

$$L(x_k, \psi_i, \dot{\psi}_i, \nabla_k \psi_i, t)$$

relacionada con la lagrangiana L del campo por: (*)

$$L = \int_D L d\tau(x_k)$$

6. Impulso generalizado

$$p_i(\psi_i, \dot{\psi}_i, \nabla\psi_i) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i}$$

relacionado con la densidad de impulso por

$$p = \int_D \pi d\tau \rightarrow \int_D \pi d\tau = \frac{\delta}{\delta \dot{\psi}} \int_D L d\tau \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \quad (**)$$

7. Densidad hamiltoniana

$$H(\psi_i, \pi_i, \nabla_k \psi_i) = \pi_i \dot{\psi}_i - L$$

relacionada con la hamiltoniana del campo por la igualdad:

$$H = \int_D (\pi_i \dot{\psi}_i - L) d\tau(x_k) = \int_D H d\tau$$

(*) D es fijo

(**) $\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla_k \dot{\psi}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i}$ pues en nuestro caso no es

función de los gradientes.

8. Densidad colagrangiana

$$F(\pi_i, \dot{\pi}_i, \nabla_k \pi_i) = \dot{\pi}_i \psi_i + H$$

que nos permite expresar la colagrangiana del campo:

$$F = \int_D F d\tau$$

PROPOSICION VIII.

Si un campo admite como ecuaciones de evolución:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} + \nabla_k \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) = 0$$

admite como ecuaciones de evolución en formulación complementaria:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial \pi_i} + \nabla_k \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_k \pi_i)} \right) = 0$$

DEMOSTRACION.

La densidad colagrangiana la relacionamos con la densidad lagrangiana por:

$$F = \dot{\pi}_i \psi_i + \pi_i \dot{\psi}_i - L$$

tomando como densidad de momento conjugado el definido en 6.

Realizamos la variación δ síncrona $\delta(dt)=d(\delta t)$:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_D F d\tau dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_D (\dot{\pi}_i \psi_i + \pi_i \dot{\psi}_i - L) d\tau dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D (\dot{\pi}_i \delta \psi_i + \psi_i \delta \dot{\pi}_i + \pi_i \delta \dot{\psi}_i + \dot{\psi}_i \delta \pi_i - \\ &\quad - \{ \frac{\partial L}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \nabla_k \psi_i} \delta (\nabla_k \psi_i) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \delta \dot{\psi}_i \}) d\tau dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_D F d\tau dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_D (\dot{\pi}_i \delta \psi_i + \psi_i \delta \dot{\pi}_i + \pi_i \delta \dot{\psi}_i + \dot{\psi}_i \delta \pi_i - \\ &\quad - \{ \frac{\partial L}{\partial \psi_i} \delta \psi_i - \nabla_k \frac{\partial L}{\partial \nabla_k \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \delta \dot{\psi}_i \}) d\tau dt \end{aligned}$$

Por la definición 6:

$$\begin{aligned} \pi_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\pi}_i &= \frac{\partial L}{\partial \psi_i} - \nabla_k \frac{\partial L}{\partial \nabla_k \psi_i} \end{aligned}$$

por tanto:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_D F d\tau dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_D (\psi_i \delta \dot{\pi}_i + \dot{\psi}_i \delta \pi_i) d\tau dt$$

De donde resulta:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{\delta F}{\delta \dot{\pi}_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_i} \\ \dot{\psi}_i &= \frac{\partial F}{\partial \pi_i} - \nabla_k \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla_k \pi_i} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial \pi_i} + \nabla_k \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla_k \pi_i} \right) = 0$$

En esta proposición extendemos el principio de acción complementaria a funciones dependientes de las funciones campo y sus gradientes. La extensión se ha realizado sin generalizar el concepto de momento conjugado.

EJEMPLO.

Consideremos el campo definido en un recinto D fijo, con condiciones de contorno estacionarias en la frontera $\partial D \Rightarrow \dot{\psi} = 0$ y densidad lagrangiana:

$$L = \frac{\psi^2}{2\rho} - \frac{1}{2E} \frac{\psi^2 \dot{\psi}^2}{\sum_k (\nabla_k \psi)^2} \quad ke\{x_1, x_2, x_3\}$$

La densidad de impulso o momento generalizado es:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = - \frac{1}{E} \frac{\psi^2 \dot{\psi}}{\sum_k (\nabla_k \psi)^2} \quad (18)$$

e introduciendo las variables auxiliares α_i , definidas por:

$$\alpha_i = \frac{\partial L}{\partial \nabla_i \psi} = \frac{1}{E} \frac{\psi^2 \dot{\psi}^2 \nabla_i \psi}{\{\sum_k (\nabla_k \psi)^2\}^2} \quad (19)$$

la derivada temporal de π se sintetiza en:

$$\dot{\pi} = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \dot{\psi}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\pi} + \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por ψ y teniendo presente el teorema de Euler de las funciones homogéneas, se tiene:

$$\dot{\pi}\psi + \psi \left(\sum_i \alpha_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \right) = \psi \frac{\partial L}{\partial \psi} = 2L$$

De la composición de (18) y (19) resulta:

$$\pi\dot{\psi} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0$$

y por aplicación de condiciones de contorno:

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\psi \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

lo que nos permite concluir que:

$$\pi\dot{\psi} = \psi \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} \Rightarrow \dot{\pi}\psi + \pi\dot{\psi} = 2L \quad (20)$$

Comparando (18), (19) y la expresión de la densidad lagrangiana L :

$$\dot{\pi}\psi + \pi\dot{\psi} = \frac{\psi^2}{\rho} + \pi\dot{\psi} \Rightarrow \psi = \rho\dot{\pi} \quad (21)$$

Por otra parte, en (18)

$$\dot{\psi} = -\frac{E\pi}{\psi^2} \sum_k \{ \nabla_k \psi \}^2 \quad (22)$$

y como

$$\psi \frac{\partial \pi}{\partial x_i} = -\pi \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \dot{\psi} = -\frac{E}{\pi} \sum_k (\nabla_k \pi)^2$$

Calculamos la densidad colagrangiana

$$F(\pi, \dot{\pi}, \nabla_k \pi) = \dot{\pi} \psi + \pi \dot{\psi} - L(\psi, \dot{\psi}, \nabla_k \psi)$$

que por aplicación de (20), se transforma en:

$$F = L(\pi, \dot{\pi}, \nabla_k \pi)$$

Por tanto, atendiendo a (18), (21) y (22):

$$F = \frac{1}{2} \rho \dot{\pi}^2 - \frac{1}{2} E (\nabla_k \pi)^2 \quad k \in \{x_1, x_2, x_3\}$$

y aplicando las ecuaciones de evolución:

$$\frac{\delta F}{\delta \pi} = \frac{\partial F}{\partial \pi} - \nabla_k \left(\frac{\partial F}{\partial \nabla_k \pi} \right) = E \nabla_k (\nabla_k \pi)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \dot{\pi}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}} = \rho \dot{\pi}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \pi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta F}{\delta \dot{\pi}} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \nabla^2 \pi = \rho \ddot{\pi}$$

PROPOSICION IX.

Si la densidad de fuerza generalizada admite como función potencial

$$U = U(\psi_i, \dot{\psi}_i, \ddot{\psi}_i, \nabla_k \psi_i, \nabla_k \dot{\psi}_i, \nabla_k \ddot{\psi}_i)$$

tal que

$$Q_i = -\frac{\delta}{\delta\psi_i} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta U}{\delta\dot{\psi}_i} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta U}{\delta\psi_i} \right)$$

las ecuaciones de evolución del campo pueden formularse bajo el principio recíproco de Hamilton.

Donde el operador

$$\frac{\delta}{\delta\psi_i} = \frac{\partial}{\partial\psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial(\nabla_k \psi_i)} \right)$$

DEMOSTRACION.

Designando $T=T(\psi_i, \dot{\psi}_i)$ a la densidad de energía cinética del campo, las ecuaciones de evolución vienen dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = Q_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Introduciendo la función densidad $L=T-U$, las ecuaciones de evolución pueden escribirse:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \psi_i} \right) \right) \right\} - \frac{\delta L}{\delta \psi_i} = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

Tomando como variables las funciones campos, sus derivadas primera y segunda y sus gradientes, podemos definir la función dinámica H mediante la transformación:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial L}{\partial \nabla_k \psi_i} \frac{\partial \dot{\psi}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial L}{\partial \nabla_k \psi_i} \frac{\partial \dot{\psi}_i}{\partial x_k} - L \Rightarrow$$

$$H = \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) \right\} \dot{\psi}_i + \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) \right\} \dot{\psi}_i - L$$

$$H = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} \dot{\psi}_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \right) \dot{\psi}_i - L$$

Haciendo,

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} \right) = \pi_i$$

tenemos,

$$H = \pi_i \dot{\psi}_i - L$$

Función que podemos considerar como una densidad hamiltoniana del campo y que nos permite escribir como ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= \frac{\delta H}{\delta \pi_i} = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} - \nabla_k \frac{\partial H}{\partial (\nabla_k \pi_i)} & 1 \leq i, k \leq n \\ \dot{\pi}_i &= - \frac{\delta H}{\delta \psi_i} = - \frac{\partial H}{\partial \psi_i} + \nabla_k \frac{\partial H}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \end{aligned}$$

Ahora bien, el segundo grupo de ecuaciones de Hamilton, son capaces de generar la transformación de Legendre:

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\psi}_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial H}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) + H = \\ &= \left\{ \frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial H}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) \right\} \dot{\psi}_i + H \Rightarrow \\ &\Rightarrow F = \pi_i \dot{\psi}_i + H \end{aligned}$$

La cual nos permite escribir las ecuaciones de evolución de la forma:

$$\begin{aligned}\psi_i &= \frac{\delta F}{\delta \dot{\pi}_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial (\nabla_k \dot{\pi}_i)} \\ \dot{\psi}_i &= \frac{\delta F}{\delta \pi_i} = \frac{\partial F}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial (\nabla_k \pi_i)} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta F}{\delta \dot{\pi}_i} \right) - \frac{\delta F}{\delta \pi_i} &= 0 \quad 1 \leq i \leq n\end{aligned}$$

En esta proposición, tomando como funciones independientes, las funciones campo, sus derivadas temporales primera y segunda, así como sus gradientes, la misma estructura de la transformación de Legendre nos ha conducido a definir un operador, tal que, aplicado a la densidad lagrangiana hace las veces de un momento conjugado en los campos conservativos, esto es, generar las transformaciones de Legendre capaces de conducirnos a la formulación complementaria de los campos.

PROPOSICION X.

Si la densidad de fuerzas generalizadas de un campo son de la forma:

$$Q_i = -\frac{\delta U}{\delta \psi_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta U}{\delta \dot{\psi}_i} \right) \dots + (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\delta U}{\delta \psi_i^{(n)}} \right)$$

con

$$U = U(\psi_i, \dot{\psi}_i, \dots, \psi_i^{(n)}, \nabla_k \psi_i, \nabla_k \dot{\psi}_i, \dots, \nabla_k \psi_i^{(n)})$$

las ecuaciones de evolución del sistema admiten forma recíproca.

JUSTIFICACION.

Esta proposición es una generalización de la anterior, al caso de una densidad lagrangiana función de las funciones campo, de sus derivadas temporales, así como de sus gradientes. La estructura de la transformación de Legendre, considerando a todas estas funciones como independientes, nos conduce al operador que aplicado a la función densidad L nos lleva a:

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \psi_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_i} \right) \dots + (-1)^{n+1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{\delta L}{\delta \psi_i^{(n)}} \right)$$

que genera la densidad hamiltoniana, mediante:

$$H = \pi_i \dot{\psi}_i - L$$

y reduce las ecuaciones de evolución a:

$$\dot{\psi}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i}$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\delta H}{\delta \psi_i}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

El segundo grupo de ecuaciones de Hamilton nos define la colagrangiana

$$F = \dot{\pi}_i \psi_i + H$$

La cual nos lleva a formular las ecuaciones de campo bajo la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_k \pi_i)} \right) \right) - \frac{\partial F}{\partial \pi_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_k \pi_i)} \right) = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

MEDIOS DISIPATIVOS.

Las ecuaciones de evolución de un campo disipativo marcofiano con infinitos grados de libertad viene definido por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial L}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) + \frac{\partial R}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial R}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) = 0$$

donde la densidad lagrangiana y la función disipativa son:

$$L = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{\psi}_i \dot{\psi}_j - \frac{1}{2} c_{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} e_{ikjr} \nabla_k \psi_i \nabla_r \psi_j$$

$$R = \frac{1}{2} \{ b_{ij} \dot{\psi}_i \dot{\psi}_j + b_{ijk r} \nabla_k \dot{\psi}_i \nabla_r \dot{\psi}_j \}$$

Al igual que los sistemas disipativos de naturaleza discreta, no es posible definir una densidad de momento conjugado capaz de conducirnos a una colagrangiana cuyos gradientes igualados a cero representen las ecuaciones de evolución del campo. El acoplamiento del campo dado M , con otro \bar{M} , tal que, entre las funciones de campo de M y \bar{M} existan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (x_k, t) \in \bar{D} \times I_t & \rightarrow 1^\circ \psi_i(x_k, t) = \bar{\psi}_i(x_k, -t) \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} & 2^\circ \dot{\psi}_i(x_k, t) = -\dot{\bar{\psi}}_i(x_k, -t) \end{aligned}$$

nos va a permitir la formulación complementaria del campo $\langle M, \bar{M} \rangle$ y en particular la de M .

Tomando del trabajo (9) las expresiones de las densidades correspondientes al $\langle M, \bar{M} \rangle$:

9. Lagrangiana

$$L^* = T^* - U^* - \frac{1}{2} R^*$$

siendo

$$T^* = a_{ij} \dot{\psi}_i \dot{\bar{\psi}}_j$$

$$U^* = c_{ij} \psi_i \bar{\psi}_j + c_{ikjr} \nabla_k \psi_i \nabla_r \bar{\psi}_j$$

$$R^* = b_{ij} (\dot{\psi}_i \bar{\psi}_j - \psi_i \dot{\bar{\psi}}_j) + b_{ikjr} (\nabla_k \dot{\psi}_i \nabla_r \bar{\psi}_j - \nabla_k \psi_i \nabla_r \dot{\bar{\psi}}_j)$$

10. Densidad de momento conjugado.

$$\pi_i = \frac{\delta L^*}{\delta \dot{\psi}_i} = a_{ij} \dot{\psi}_j - \frac{1}{2} b_{ij} \bar{\psi}_j + \frac{1}{2} b_{ikjr} \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla_r \bar{\psi}_j)$$

$$\bar{\pi}_j = \frac{\delta L^*}{\delta \dot{\bar{\psi}}_j} = a_{ij} \dot{\psi}_i + \frac{1}{2} b_{ij} \psi_i - \frac{1}{2} b_{ikjr} \frac{\partial}{\partial x_k} (\nabla_k \psi_i)$$

11. Definimos como densidad colagrangiana:

$$F^* = \dot{\pi}_i \psi_i + \dot{\bar{\pi}}_j \bar{\psi}_j + H^*$$

y establecemos la siguiente proposición:

PROPOSICION XI.

Las ecuaciones de evolución de un sistema disipativo marcofiano con infinitos grados de libertad pueden formularse bajo el recíproco del Principio de Hamilton.

DEMOSTRACION.

La definición de momento conjugado (10) nos permite, mediante la transformación de Legendre, definir la hamiltoniana:

$$H^* = \pi_i \dot{\psi}_i + \bar{\pi}_j \dot{\bar{\psi}}_j - L^*$$

y escribir las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{\bar{\psi}}_j = \frac{\partial H^*}{\partial \bar{\pi}_j} - \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_r \bar{\pi}_j)} \right) \quad (I)$$

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial H^*}{\partial \pi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_k \pi_i)} \right)$$

$$\dot{\bar{\pi}}_j = \frac{\partial H^*}{\partial \bar{\Psi}_j} + \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_r \bar{\Psi}_j)} \right) \quad (II)$$

$$\dot{\pi}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right)$$

Ahora bien, teniendo presente que:

$$\frac{\partial H^*}{\partial \bar{\Psi}_j} \bar{\Psi}_j + \frac{\partial \bar{\Psi}_j}{\partial x_r} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_r \bar{\Psi}_j)} \right) = \left\{ \frac{\partial H^*}{\partial \bar{\Psi}_j} - \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_r \bar{\Psi}_j)} \right) \right\} \bar{\Psi}_j$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} \psi_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) = \left\{ \frac{\partial H^*}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial H^*}{\partial (\nabla_k \psi_i)} \right) \right\} \psi_i$$

el segundo grupo de las ecuaciones de Hamilton nos permite expresar la densidad colagrangiana por:

$$F^* = \dot{\bar{\pi}}_j \bar{\Psi}_j + \dot{\pi}_i \psi_i + H^* \quad \rightarrow$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_D F^* d\tau dt = \delta \int_1^2 \int_D (\dot{\bar{\pi}}_j \bar{\Psi}_j + \dot{\pi}_i \psi_i + H^*) d\tau dt \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \int_D \left(\frac{\delta F^*}{\delta \dot{\bar{\pi}}_j} \delta \dot{\bar{\pi}}_j + \frac{\delta F^*}{\delta \bar{\pi}_j} \delta \bar{\pi}_j + \frac{\delta F^*}{\delta \dot{\pi}_i} \delta \dot{\pi}_i + \frac{\delta F^*}{\delta \pi_i} \delta \pi_i \right) d\tau dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_D (\bar{\Psi}_j \delta \dot{\bar{\pi}}_j + \dot{\bar{\Psi}}_j \delta \bar{\pi}_j + \psi_i \delta \dot{\pi}_i + \dot{\psi}_i \delta \pi_i) d\tau dt$$

$$\bar{\psi}_j = \frac{\delta F^*}{\delta \dot{\pi}_j} \quad \dot{\bar{\psi}}_j = \frac{\delta F^*}{\delta \pi_j} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\psi_i = \frac{\delta F^*}{\delta \dot{\pi}_i} \quad \dot{\psi}_i = \frac{\delta F^*}{\delta \pi_i} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta F^*}{\delta \dot{\pi}_j} \right) - \frac{\delta F^*}{\delta \pi_j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta F^*}{\delta \dot{\pi}_i} \right) - \frac{\delta F^*}{\delta \pi_i} = 0$$

En esta proposición hemos intentado abarcar la mayor parte de los campos de naturaleza mecánica que se presentan en la Mecánica de los Medios Continuos. Ello encierra la posibilidad de establecer las ecuaciones de equilibrio y movimiento bajo la formulación complementaria en los siguientes sistemas o medios:

a) Sistemas lineales conservativos.

$$b_{ij} = 0$$

$$b_{ikrj} = 0 \quad \left| \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$c_{ikrj} = 0 \quad \left| \quad \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\}$$

b) Sistemas disipativos

$$b_{ikjr} = 0 \quad \left| \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$c_{ikjr} = 0 \quad \left| \quad \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\}$$

c) Fluidos perfectos

$$\begin{array}{l|l}
 c_{ikjr} = \lambda \delta_{ij} & \lambda = \text{coef de Lamé} \\
 b_{ij} = 0 & \\
 c_{ij} = 0 & \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\
 b_{ikjr} = 0 & \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\}
 \end{array}$$

d) Medios elásticos homogéneos

$$\begin{array}{l|l}
 c_{ijji} = \lambda \mu \quad , \quad c_{ijij} = \mu & \\
 & \lambda, \mu = \text{const. de Lamé} \\
 b_{ij} = 0 & \\
 c_{ij} = 0 & \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\
 b_{ikjr} = 0 & \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\} \\
 c_{ikjr} = 0 & \begin{array}{l} i \neq k \\ j \neq k, r \end{array}
 \end{array}$$

e) Medios elásticos anisótropos

$$\begin{array}{l|l}
 c_{ikjr} \neq 0 & \\
 b_{ij} = 0 & \\
 c_{ij} = 0 & \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\
 b_{ikjr} = 0 & \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\}
 \end{array}$$

f) Fluidos viscosos

$$b_{ikjr} = \nu \delta_{ij} \quad \nu = \text{coef. de viscosidad}$$

$$c_{ikjr} = \lambda \delta_{ij}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_{ij} = 0 \\ c_{ij} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array}$$

g) Medios viscoso-elásticos homogéneos

$$c_{ijji} = (\lambda + \mu) \quad c_{ijij} = \mu$$

$$b_{ikjr} = \nu \delta_{ij}$$

$$\left. \begin{array}{l} b_{ij} = 0 \\ c_{ij} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array}$$

h) Medios viscoso-elásticos anisótropos

$$\left. \begin{array}{l} c_{ikjr} \neq 0 \\ b_{ikjr} \neq 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \forall k, r \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array}$$

APLICACION.

Como aplicación vamos a tratar la ecuación de difusión.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = k \nabla^2 \Psi$$

Haciendo

$$\Psi(x_k, t) = \bar{\Psi}(x_k, -t) \quad (x_k, t) \in D \times I_t$$

la ecuación de evolución del campo imagen es

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} = -k \nabla^2 \bar{\Psi}$$

Ambas admiten como densidad lagrangiana

$$L = -k \nabla \bar{\Psi} \nabla \Psi - \frac{1}{2} (\bar{\Psi} \dot{\Psi} - \dot{\bar{\Psi}} \Psi)$$

y como momentos conjugados

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = -\frac{1}{2} \bar{\Psi} \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi} = -2\pi$$

$$\bar{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = \frac{1}{2} \Psi \quad \Rightarrow \quad \Psi = 2\bar{\pi}$$

que nos permite definir como densidad hamiltoniana:

$$H = \pi \dot{\Psi} + \bar{\pi} \dot{\bar{\Psi}} - L = k \nabla \bar{\Psi} \nabla \Psi$$

y como colagrangiana

$$F = \dot{\pi} \Psi + \dot{\bar{\pi}} \bar{\Psi} + H = 2 \{ (\dot{\pi} \bar{\pi} - \pi \dot{\bar{\pi}}) - 2k \nabla \pi \nabla \bar{\pi} \} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = (\dot{\pi} \bar{\pi} - \pi \dot{\bar{\pi}}) - 2k (\nabla \pi \cdot \nabla \bar{\pi})$$

cuyas ecuaciones de evolución son:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial t} = k \nabla^2 \pi$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial t} = k \nabla^2 \bar{\pi}$$

CAMPOS DE COMPONENTES COMPLEJAS.

Existen medios no disipativos cuyas componentes de campo son de la forma:

$$\phi = \phi_1(x_1, x_2, x_3, t) + i\phi_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

y satisfacen a ecuaciones de evolución contenidas en la expresión general de los campos disipativos. Dado que la formulación lagrangiana depende únicamente de la forma funcional de las ecuaciones y no de la naturaleza de las funciones campo, podemos aplicar a tales campos los resultados obtenidos en el capítulo III.

APLICACION

Consideremos la ecuación de Schroedinger correspondiente a la partícula de masa m bajo la acción de un potencial: $V = V(x_k, t)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V(x_k, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

La ecuación de evolución del campo imagen será:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\Psi} + V(x_k, t) \bar{\Psi} = -i\hbar \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}$$

De ambas deducimos como lagrangiana:

$$L = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi \nabla \bar{\Psi} - V(x_k, t) \Psi \bar{\Psi} + \frac{1}{2} i \hbar (\bar{\Psi} \dot{\Psi} - \dot{\Psi} \bar{\Psi})$$

que nos permite obtener como momentos

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = \frac{1}{2} i \hbar \bar{\Psi} \Rightarrow \bar{\Psi} = \frac{2}{i \hbar} \pi$$

$$\bar{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\Psi}}} = -\frac{1}{2} i \hbar \Psi \Rightarrow \Psi = -\frac{2}{i \hbar} \bar{\pi}$$

como densidad hamiltoniana

$$H = \pi \dot{\Psi} + \bar{\pi} \dot{\bar{\Psi}} - L = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \Psi \nabla \bar{\Psi} + V(x_k, t) \Psi \bar{\Psi}$$

y como densidad colagrangiana

$$\begin{aligned} F &= \dot{\pi} \Psi + \dot{\bar{\pi}} \bar{\Psi} + H = \\ &= \frac{2}{i \hbar} \{ \dot{\pi} \pi - \dot{\bar{\pi}} \bar{\pi} \} + \frac{2}{m} \nabla \pi \cdot \nabla \bar{\pi} + \frac{4}{\hbar^2} V(x_k, t) \pi \bar{\pi} \rightarrow \\ \rightarrow &= \frac{4}{\hbar^2} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \pi \nabla \bar{\pi} + V(x_k, t) \pi \bar{\pi} \right\} - \frac{2i}{\hbar} (\dot{\pi} \pi - \dot{\bar{\pi}} \bar{\pi}) \end{aligned}$$

la cual nos da como ecuaciones de evolución en la formulación complementaria:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \pi + V(x_k, t) \pi = -i \hbar \frac{\partial \pi}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \bar{\pi} + V(x_k, t) \bar{\pi} = i \hbar \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial t}$$

adjuntas de las ecuaciones de evolución en el espacio de las configuraciones.

CONCLUSIONES

Las aportaciones originales en este capítulo según nuestro criterio son:

1°. Extendemos el principio de acción complementaria a funciones dependientes de funciones campo y de sus gradientes. La extensión se ha realizado sin generalizar el concepto de momento conjugado.

2°. Tomando como funciones independientes las funciones campo, sus derivadas temporales y sus gradientes, la transformación de Legendre nos ha llevado a definir un operador que aplicado a la densidad lagrangiana conduce a un momento conjugado en los campos conservativos, capaz de conducirnos a la formulación complementaria de los medios continuos.

3°. En la proposición XI hemos intentado abarcar la mayor parte de los campos de naturaleza mecánica que se presentan en la Mecánica de los Medios Continuos.

4°. Finalmente y dado que la formulación lagrangiana depende únicamente de la forma funcional de las ecuaciones y no de la naturaleza de las funciones campo, hemos aplicado los resultados obtenidos para medios disipativos a campos de componentes complejas.

SEGUNDA PARTE

C A P I T U L O I V

LEYES DE CONSERVACION EN LA FORMULACION COMPLEMENTARIA. SISTEMAS DISCRETOS.

INTRODUCCION

Los métodos derivados del principio de mínimo de energía complementaria han sido aplicados con éxito, en los últimos años, al análisis de sistemas mecánicos conservativos lineales. Métodos que pueden extenderse al estudio de circuitos eléctricos, tomando como coordenadas lagrangianas las cargas eléctricas, como momentos conjugados los flujos magnéticos y como fuerzas generalizadas las fuerzas electromotrices. A esta transposición analógica y, más aún, a demostrar el carácter lagrangiano intrínseco de las cargas y de los flujos, hemos dedicado algún tiempo. Sin embargo creemos que los resultados no añaden nada nuevo al actual sofisticado análisis de la teoría de circuitos.

El presente capítulo está dedicado al punto donde los métodos analíticos son más activos, esto es, al estudio de coordenadas cíclicas en la formulación complementaria. Para ello partimos de la definición clásica de variables cíclicas y mediante la teoría de transformaciones puntuales establecemos un conjunto de proposiciones-aplicables, tanto a los sistemas conservativos

como a los generalizados- que están en relación directa con la existencia de variables cíclicas en la formulación complementaria.

DEFINICION

12. Si la colagrangiana es un invariante a una transformación en el origen del momento conjugado p_i , se dice que p_i es una variable cíclica.

PROPOSICION XII.

Si el momento conjugado es una variable cíclica, la coordenada lagrangiana q_i es una constante de evolución del sistema.

DEMOSTRACION

Si $F(p_i, p_i, t)$ no depende explícitamente de p_i :

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$$

como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} = \text{const.} \Rightarrow q_i = \text{const.}$$

PROPOSICION XIII (Recíproca de la XII)

Si q_i es una constante en la evolución, p_i es cíclica.

DEMOSTRACION

Si

$$q_i = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p_i} = \text{const.}$$

y

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$$

PROPOSICION XIV.

Si las ecuaciones de evolución en la formulación complementaria.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

admiten una integral lineal y homogénea de la forma

$$f_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + f_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} + \dots + f_n \frac{\partial F}{\partial p_n} = \text{const.}$$

siendo

$$f_i = f_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

existe una transformación puntual de las variables $\{p_k\}$ en $\{\bar{p}_i\}$ tal, que la variable $\{\bar{p}_n\}$ es cíclica.

DEMOSTRACION.

Consideremos el sistema de (n-1) ecuaciones

$$\frac{dp_1}{f_1(p_i)} = \frac{dp_2}{f_2(p_i)} = \dots = \frac{dp_n}{f_n(p_i)} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (23)$$

de solución

$$\bar{p}_k(p_1, p_2, \dots, p_n) = c \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

Haciendo

$$d\bar{p}_n = \frac{dp_n}{f_n}$$

y sustituyendo en (23)

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{f_1} = \frac{dp_2}{f_2} = \dots = \frac{dp_n}{f_n} = d\bar{p}_n \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_n} = f_k \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (24) \end{aligned}$$

Si la transformación es puntual $\{p_k\} \rightarrow \{\bar{p}_i\}$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_i} = \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right)$$

y para $i=n$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_n} = \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right)$$

Por tanto, en virtud de (24) y de la hipótesis inicial:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_n} = f_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + f_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} - \dots - f_n \frac{\partial F}{\partial p_n} = \text{const.}$$

$$\bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_k} = f_1 q_1 + f_2 q_2 + \dots + f_n q_n = \text{const.}$$

como $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_n}$ es constante, \bar{p}_n es cíclica en $\bar{F}(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)$

PROPOSICION XV (Recíproca de la XIV)

Si el sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

admite una transformación puntual que le convierte en otro de variable cíclica \bar{p}_i , dicho sistema posee una integral lineal homogénea de la forma:

$$f_1 \frac{\partial F}{\partial p_1} + f_2 \frac{\partial F}{\partial p_2} + \dots + f_n \frac{\partial F}{\partial p_n} = \text{const.}$$

donde $f_i = f_i(p_1, p_2, \dots, p_n)$

DEMOSTRACION.

En la transformación puntual

$$\{p_k\} \rightarrow \{\bar{p}_i\}$$

se verifica

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_i} = \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_i} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right)$$

Si \bar{p}_n es cíclica.

$$\bar{q}_n = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{p}_n} = \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right) = \text{const.} \quad (25)$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial p_k}{\partial p_n} = f_k(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

que sustituido en (25)

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} f_n = \text{const.}$$

PROPOSICION XVI.

La condición necesaria y suficiente para que, en un sistema lineal, exista una coordenada cíclica es que la matriz de los impulsos sea nula.

DEMOSTRACION.

En un sistema lineal, la función de Lagrange viene dada por:

$$L = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}b_{ij}q_iq_j$$

el momento:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = a_{ij}\dot{q}_j$$

la hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}a_{ij}^{-1}p_i p_j + \frac{1}{2}b_{ij}q_i q_j$$

y la colagrangiana:

$$F = \frac{1}{2}b_{ij}^{-1}\dot{p}_i\dot{p}_j - \frac{1}{2}a_{ij}^{-1}p_i p_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{1}{2}B_{ij}\dot{p}_i\dot{p}_j - \frac{1}{2}A_{ij}p_i p_j$$

Si F no depende de p_i , entonces $|A_{ij}|=0$ (condición necesaria).

Si A es singular $|A_{ij}|=0$. Sean las ecuaciones de evolución del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i}\right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (26)$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = A_{ij} p_j$$

que por ser $|A_{ij}| = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \sum_{k \neq i}^n \alpha_k \frac{\partial F}{\partial p_k}$$

Multiplicando las ecuaciones (26) por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ y sumando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \alpha_n \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p_1} \alpha_1 + \frac{\partial F}{\partial p_2} \alpha_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial p_n} \alpha_n = \text{const.}$$

que en virtud de la proposición XV indica la existencia de una variable cíclica.

PROPOSICION XVII.

Si un sistema conservativo generalizado admite coordenadas cíclicas en la representación complementaria, una parte de la energía asociada a las derivadas temporales de los impulsos del sistema inicial puede considerarse como energía asociada a los impulsos en el sistema reducido.

Esta proposición es una norma interpretativa en el análisis de la evolución de un sistema desde el punto de vista energético. La energía asociada a las derivadas temporales de los impulsos es de tipo potencial o electrostático, mientras que la energía asociada a los impulsos es de tipo cinético o magnético. La proposición es aplicable a cualquier sistema conservativo generalizado. Por su carácter de norma interpretativa haremos una aplicación a los sistemas conservativos lineales, donde la interpretación de energía cinética y potencial es clara.

DEMOSTRACION.

Sea un sistema con n grados de libertad, de coordenadas (p_1, p_2, \dots, p_n) con α coordenadas cíclicas. En tal caso, la colagrangiana F se escribe:

$$F^* = V^* - T^* = \frac{1}{2} B_{rs} \dot{p}_r \dot{p}_s - \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j \quad \begin{array}{l} r, s \in \{1, 2, \dots, n\} \\ i, j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad m < n \\ \alpha \in \{m+1, \dots, n\} \end{array}$$

Sean p_α ($\alpha \in \{m+1, \dots, n\}$) las coordenadas cíclicas. Se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\alpha} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\alpha} = q_\alpha = k_\alpha$$

$$k_\alpha = \frac{\partial V^*}{\partial \dot{p}_\alpha} = B_{\alpha i} \dot{p}_i + B_{\alpha \beta} \dot{p}_\beta \quad \alpha, \beta \in \{m+1, \dots, n\}$$

de donde

$$\dot{p}_\beta = B_{\alpha\beta}^{-1} (k_\alpha - B_{\alpha i} \dot{p}_i) = B_{\alpha\beta}^{-1} k_\alpha - \gamma_{\alpha i} \dot{p}_i$$

llamando

$$\gamma_{\alpha i} = B_{\alpha\beta}^{-1} B_{\alpha i}$$

La energía potencial V^* puede ser desarrollada en la forma siguiente:

$$V^* = \frac{1}{2} B_{ij}^* \dot{p}_i \dot{p}_j + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^* q_\alpha q_\beta + \frac{1}{2} B_{i\alpha}^* \dot{p}_i q_\alpha$$

Se demuestra que

$$B_{i\alpha}^* = 0$$

y que

$$B_{ij}^* = B_{ij} - B_{\alpha\beta}^{-1} B_{\alpha i} B_{\beta j} \quad , \quad B_{\alpha\beta}^* = B_{\alpha\beta}^{-1}$$

Por tanto,

$$V^* = \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{\alpha\beta}^{-1} B_{\alpha i} B_{\beta j}) \dot{p}_i \dot{p}_j + \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^{-1} k_\alpha k_\beta$$

Para el sistema reducido:

$$\begin{aligned} R^*(p_i, \dot{p}_i, k_\alpha) &= k_\alpha \dot{p}_\alpha - F = \\ &= k_\alpha (B_{\beta\alpha}^{-1} k_\beta - \gamma_{\beta i} \dot{p}_i) - V^* + T^* = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_{\beta\alpha}^{-1} k_{\alpha} k_{\beta} - k_{\alpha} \gamma_{\beta i} \dot{p}_i - \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{\alpha\beta}^{-1} B_{\alpha i} B_{\beta j}) \dot{p}_i \dot{p}_j + \\
&+ \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j - \frac{1}{2} B_{\alpha\beta}^{-1} k_{\alpha} k_{\beta} = \\
&= \frac{1}{2} B_{\beta\alpha}^{-1} k_{\alpha} k_{\beta} - k_{\alpha} \gamma_{\beta i} \dot{p}_i - \\
&- \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{\alpha\beta}^{-1} B_{\alpha i} B_{\beta j}) \dot{p}_i \dot{p}_j + \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j
\end{aligned}$$

La energía potencial de este sistema reducido, donde se han eliminado las coordenadas cíclicas es:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} (B_{ij} - B_{\alpha\beta}^{-1} B_{\alpha i} B_{\beta j}) \dot{p}_i \dot{p}_j$$

y la cinética del mismo sistema

$$\Gamma^* = \frac{1}{2} B_{\alpha\beta} k_{\alpha} k_{\beta} + \frac{1}{2} A_{ij} p_i p_j - \gamma_{\beta i} k_{\alpha} \dot{p}_i$$

Verificándose, en cualquier caso:

$$T^* + V^* = \Gamma^* + \Pi^* - \gamma_{\beta i} q_{\alpha} \dot{p}_i$$

DEFINICION.

13. Se dice que la evolución de un sistema conservativo es estacionaria si las coordenadas no cíclicas del sistema permanecen constantes a lo largo de la evolución.

Las evoluciones estacionarias respecto a las coordenadas lagrangianas pueden encontrarse en cualquier

tratado de Mecánica Analítica. Sobre las evoluciones estacionarias respecto a los impulsos conjugados podemos establecer la siguiente:

PROPOSICION XVIII.

En toda evolución estacionaria de un sistema conservativo, respecto de los impulsos, las coordenadas lagrangianas del sistema son constantes de evolución, en otras palabras, el sistema está en reposo.

DEMOSTRACION.

Sea un sistema conservativo, tal que su colagrangiana es:

$$F = \frac{1}{2} A_{rs} \dot{p}_r \dot{p}_s - \frac{1}{2} B_{ij} p_i p_j \quad \begin{matrix} r, s \in \{1, 2, \dots, n\} \\ m < n \\ i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{matrix}$$

siendo

$$A_{rs} = A_{rs}(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

$$B_{ij} = B_{ij}(p_1, p_2, \dots, p_m)$$

y las variables cíclicas

$$p_\alpha \quad \forall \alpha \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$$

Por ser el movimiento estacionario:

$$p_i = k_i \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Por otra parte, las ecuaciones de evolución para el caso de impulsos cíclicos, son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\alpha} \right) &= 0 & \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\alpha} &= \text{const.} \quad \Leftrightarrow \\ & & & i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\alpha} &= A_{\alpha i} \dot{p}_i + A_{\alpha \beta} \dot{p}_\beta = \text{const.} & & \alpha, \beta \in \{m+1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Como $\dot{p}_i = 0$ y $A_{\alpha i}(p_1, p_2, \dots, p_m)$ son constantes, resulta:

$$A_{\alpha \beta} \dot{p}_\beta = \text{const.} \Rightarrow \dot{p}_\beta = \text{const.} \\ \beta \in \{m+1, \dots, n\}$$

En otras palabras, la evolución estacionaria de los impulsos está caracterizada por:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= 0 & i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ \dot{p}_\alpha &= k_\alpha & \alpha \in \{m+1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$q_i = \frac{\partial F}{\partial \dot{p}_i} = A_{ij} \dot{p}_j + A_{i\alpha} p_\alpha = q_i^0$$

Como p_α cíclica implica $q_\alpha = q_\alpha^0$, resulta que las evoluciones estacionarias respecto a los impulsos están caracterizadas porque las coordenadas lagrangianas permanecen constantes.

CONCLUSIONES

Las aportaciones que creemos originales en este capítulo son:

1°. Introducir en la formulación complementaria el concepto de variable cíclica, duplicando de esta forma la posibilidad de encontrar nuevas constantes de evolución.

2°. Establecer y demostrar la Proposición XIV y su recíproca, que mediante la teoría de las transformaciones puntuales enlazan las integrales lineales y homogéneas de las derivadas de la colagrangiana con la existencia de momentos conjugados cíclicos.

3°. La Proposición XVI que señala la equivalencia, en los sistemas lineales, entre la existencia de un momento cíclico y la singularidad de la matriz de los impulsos.

4°. Extender el concepto de movimiento reducido a la formulación complementaria y mostrar su utilidad en el análisis energético de los sistemas.

5°. Establecer que la evolución estacionaria respecto de los impulsos, de un sistema conservativo, implica que las coordenadas lagrangianas de dicho sistema son constantes en la evolución.

C A P I T U L O V

LEYES DE CONSERVACION EN FORMULACION COMPLEMENTARIA

SISTEMAS CONTINUOS

INTRODUCCION

Dentro del esquema analítico, las funciones $\pi_i(x_k, t)$ son consideradas como coordenadas lagrangianas, funciones sólo del tiempo, con índices discretos i , e índices continuos $\{x_1, x_2, x_3\}$. La invariancia de la colagrangiana a las simetrías del espacio y del tiempo nos conduce a las correspondientes leyes de conservación. Así la invariancia de la densidad colagrangiana a una traslación en el origen de los tiempos nos conduce a una ley de continuidad que viene a coincidir con la obtenida por los métodos clásicos. Por analogía con la densidad de momento ondulatorio del campo, definimos un nuevo vector f_i y un nuevo tensor u_{ij} que se relacionan por una ley de continuidad, en el caso de que la colagrangiana no dependa explícitamente de x_i . Siguiendo el proceso analógico, se define una magnitud análoga al momento angular ondulatorio del campo, cuya conservación depende de la simetría del tensor u_{ij} y recíprocamente. Por último, con las condiciones ordinarias de frontera y por integración a lo largo de la región ocupada por el campo, obtenemos las correspondientes leyes de conservación.

DEFINICION.

14. Por analogía definimos como flujo de densidad de energía complementaria del campo, el vector

$$\vec{\pi} = \dot{\pi}_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial (\nabla_1 \pi_k)} \vec{u}_1 + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_2 \pi_k)} \vec{u}_2 + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_3 \pi_k)} \vec{u}_3 \right\}$$

PROPOSICION XIX.

Si

$$\dot{\pi}_k(x_i, t) = 0 \quad (x_i) \in \partial D, \quad t \in I_t$$

entonces

$$\operatorname{div} \vec{\pi} = 0 \quad (x_k) \in D, \quad t \in I_t$$

DEMOSTRACION.

Si se verifican las condiciones de frontera de $\pi_k(x_i, t)$, la definición de $\vec{\pi}$ implica que

$$\vec{\pi} = 0 \quad \forall (x_i) \in \partial D \text{ y } t \in I_t$$

lo que exige

$$\int_{\partial D} \vec{\pi} \cdot d\vec{s} = 0$$

y en virtud del teorema de Gauss

$$\int_D \text{div} \vec{\pi} d\tau = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{\pi} = 0 \quad (x_k) \in D, t \in I_t$$

PROPOSICION XX.

Si la densidad colagrangiana es un invariante a una traslación en el origen de los tiempos:

$$\frac{dH}{dt} = \text{div} \vec{\pi}$$

DEMOSTRACION.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \pi_k} \dot{\pi}_k + \frac{\partial F}{\partial \ddot{\pi}_k} \ddot{\pi}_k + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_i \pi_k)} \frac{\partial \dot{\pi}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Multiplicando las ecuaciones de evolución en la formulación complementaria por $\dot{\pi}_k$ y sumando

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \right) \dot{\pi}_k - \frac{\partial F}{\partial \pi_k} \dot{\pi}_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_i \pi_k)} \right) \dot{\pi}_k = 0$$

Despejando $\frac{\partial F}{\partial \pi_k} \dot{\pi}_k$ y sustituyendo en la anterior:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \ddot{\pi}_k} \ddot{\pi}_k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \right) \dot{\pi}_k + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_i \pi_k)} \right) \dot{\pi}_k + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_i \pi_k)} \frac{\partial \dot{\pi}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(F - \dot{\pi}_k \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_i \pi_k)} \right) \dot{\pi}_k + \frac{\partial F}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{dH}{dt} = \text{div} \vec{\pi} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

Si

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \text{div} \vec{\pi}$$

Identificando H como la densidad de energía total, esta situación puede interpretarse como ecuación de continuidad de la energía, como ley de conservación diferencial.

PROPOSICION XXI.

El vector flujo de densidad de energía complementaria y el vector flujo de densidad de energía del campo tienen sus fuentes opuestas.

DEMOSTRACION.

En la teoría clásica de los campos se demuestra, mediante un proceso análogo:

$$\frac{dH}{dt} + \text{div} \vec{P} = 0$$

Comparando esta expresión con la obtenida en la proposición anterior:

$$\text{div} \vec{P} = -\text{div} \vec{\pi}$$

Esta proposición nos permite interpretar el vector flujo densidad de energía complementaria como un

vector con fuentes opuestas al vector clásico flujo densidad de energía del medio.

DEFINICION.

15. Por analogía con la densidad de momento ondulatorio del campo:

$$g_i = - \frac{\partial L}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_i}$$

podemos definir en la formulación complementaria el vector:

$$f_i = - \frac{\partial F}{\partial \pi_k} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i}$$

Estas magnitudes, en el caso de campos mecánicos tienen las dimensiones de un momento lineal ordinario. Pues en este caso $\frac{\partial F}{\partial \pi_k} = u_k$, es decir, la componente del vector desplazamiento en la dirección k y $\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i}$ es el gradiente de la densidad de momento del medio según la dirección i , es decir, en el caso de movimiento unidimensional

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial (\rho v)}{\partial x_i}$$

Físicamente representa el producto del desplazamiento por la cantidad de materia que atraviesa la unidad de superficie normal a la dirección i en la unidad de tiempo. Esta magnitud no tiene que identificarse con

la densidad de momento del medio pues sólo existe cuando $\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \neq 0$

PROPOSICION XXII.

Si la densidad colagrangiana es un invariante a una traslación en la dirección i , la variación total del vector f_i es igual a la divergencia del tensor

$$u_{ij} = F \delta_{ij} - \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)}$$

DEMOSTRACION.

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)} \frac{\partial^2 \pi_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)} \right) \quad (27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial \pi_k} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \frac{\partial \dot{\pi}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)} \frac{\partial^2 \pi_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Si

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_k} \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \right) = - \frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)} \frac{\partial^2 \pi_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Sustituyendo en (27), tenemos

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \pi_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)} \right) \right\} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \right)$$

En virtud de las ecuaciones de evolución en formulación complementaria:

$$\frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \pi_k} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial (\nabla_j \pi_k)} \right) \right\} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \right) \frac{\partial \pi}{\partial x_i}$$

Sustituyendo de nuevo

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_k} \right) \frac{\partial \pi_k}{\partial x_i} \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{df_i}{dt} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} \quad (28)$$

Estas magnitudes pueden considerarse como las componentes de vectores que representan el flujo del momento ondulatorio complementario \vec{f} .

DEFINICION:

16. Por analogía con la densidad de momento angular del campo, podemos definir en la formulación complementaria el tensor:

$$m_{ij} = x_i f_j - x_j f_i$$

y establecer la siguiente:

PROPOSICION XXIII.

Si $\int_0 m_{ij} dt$ es una constante de evolución, el tensor u_{ij} es simétrico.

$$\begin{aligned} \frac{dm_{ij}}{dt} &= x_i \frac{df_j}{dt} - x_j \frac{df_i}{dt} = x_i \frac{\partial u_{kj}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial u_{ki}}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i u_{kj} - x_j u_{ki}) - (u_{ij} - u_{ji}) \end{aligned}$$

Integrando en el dominio D

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D m_{ij} d\tau &= \int_D \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i u_{kj} - x_j u_{ki}) d\tau + \\ &+ \int_D (u_{ji} - u_{ij}) d\tau = \int_{\partial D} (x_i u_{kj} - x_j u_{ki}) ds + \\ &\int_D (u_{ji} - u_{ij}) d\tau \end{aligned}$$

Como la integral de superficie es nula, para las condiciones ordinarias de frontera, y por hipótesis: $\int_D m_{ij} d\tau$ es una constante de evolución, implica:

$$u_{ij} = u_{ji} \quad \forall (x_k) \in D$$

Esta proposición admite la recíproca:

Si $u_{ij} = u_{ji}$ la $\int_D m_{ij} d\tau$ es una constante en la evolución.

OTRAS LEYES DE EVOLUCION.

a) Integrando la ecuación de continuidad de la energía a lo largo del recinto D.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D H d\tau = \int_D \operatorname{div} \vec{\pi} d\tau = \int_{\partial D} \vec{\pi} d\vec{s}$$

La integral de superficie es nula si la región ocupada por el campo está contenida en el interior de ∂D , o bien, si el campo ocupa una región infinita con condiciones periódicas en la frontera. Tanto en un caso como en el otro $\frac{dH}{dt} = 0 \Rightarrow H = \text{const.}$, es decir, si $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ y se cumplen las condiciones ordinarias de frontera, la hamiltoniana total del campo es una constante de evolución. Resultado que coincide con el de la teoría clásica.

b) Integrando las ecuaciones (28) a lo largo del dominio D.

$$\frac{dF_j}{dt} = \frac{d}{dt} \int_D f_j d\tau = \int_D \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_i} d\tau = \int_{\partial D} u_{ij} ds_i$$

La integral de superficie se anula si $u_{ij} = 0 \forall (x_k) \in \partial D$, condición de contorno ordinaria. En este caso $F = \text{const.}$ Es decir, si $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ y $u_{ij} = 0 \forall (x_k) \in \partial D$ entonces, la componente total del vector momento ondulatorio complementario es una constante de evolución.

CONCLUSIONES.

En este capítulo hemos intentado obtener los resultados que derivan de la invariancia de la colagrangiana a las simetrías del espacio y del tiempo. El tratamiento utilizado es clásico y los resultados que creemos más originales son:

1°. A partir de la definición de vector flujo de energía complementaria se llega a una nueva forma de la ecuación de continuidad de la energía. Y de la comparación con la ley clásica se deduce que el vector flujo densidad de energía complementaria y el vector flujo de energía tienen sus fuentes opuestas.

2°. De la definición del vector f_i se establece la correspondiente ley de continuidad mediante la divergencia del tensor u_{ij} , en el caso de que la densidad colagrangiana no dependa explícitamente de x_i .

3°. De la conservación de la magnitud análoga al momento angular del campo, se deduce la simetría del tensor u_{ij} y recíprocamente.

4°. Las leyes de continuidad por integración a lo largo de la región ocupada por el campo con las condiciones ordinarias de frontera para la densidad de momento π_k y de sus gradientes conducen a las correspondientes leyes de conservación: hamiltoniana total del campo, componentes totales del campo del vector f_i y componentes del tensor $\int_D m_{ij} d\tau$.

B I B L I O G R A F I A

(1).- IÑIGUEZ Y CID PALACIOS. *Mecánica teórica.*
Dossat (1965).

(2).- TOUPIN, R.A. "A Variational Principle
for the Mesh-Type Analysis
of Mechanical System".
Trans. ASME, Vol. 74 1952,
pp, 151-152.

(3).- GLADWELL, G. and ZIMMERMANN, G.
"On Energy and Complementary Energy Formulation of
Acoustic and Structural Vibrations Problems". *Journal
of Soun and Vibration*, Vol.
3, 1966, pp. 233-241.

(4).- WASHIZU, K. "Note on the Principle of
Stationary Complementary
Energy Applied to Free Vibrations of an Elastic Body". *International Journal
of Solids and Structural*.
Vol. 2, 1966, pp. 27-35.

(5).- KARNOPP, B.H. "Complementary Variational
Principles in lineal Vibrations". *J. Franklin Institute*.
Vol. 284, 1967, pp.
56-58

- (6).- TABARROK, B. *"Some Remarks on the Zero Frequency Modes".*
The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society. Vol. 72, 1968, pp. 68-70.
- (7).- SAKAGUCHI, R. L. and TABARROK, B. *"Calculations of Plate Frequencies from Complementary Energy Formulations". International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 2, 1970, pp. 283-293.*
- (8).- ELIAS, Z.M. *"On the Reciprocal form of Hamilton Principle".*
Journal of Applied Mechanics. March. 1973, pp. 93-100.
- (9).- HERVAS BURGOS, P. *"Tesis Doctoral".*

T E X T O S C O N S U L T A D O S

- ADRE-MERCIER .-Analytical and Canonical formalism in Physics. Oxford Mathematical (1980).
- ARNOLD V. .-Chapithes supplementaires de la Theorie des equations differentieles ordinaires. Mir Publishers (1980).
- ARNOLD V. .-Méthode Matematiques de la Mecanique Clássique. Oxford Mathematical (1980).
- ARTHURS A.M. .- Complementary Variational Principles. Oxford Mathematical (1980).
- CARTAN E. .-Leç sur les invariants integraux. Hermann (1971).
- COURANT and HILBERT .- Methode of Mathematical Physic. Intersciencie Pub. (1962).
- GRANDALL, DAHL and LARDNER. -An introduction to the Mechanics of Solids. Mc. Graw-Hill (1973).

- FUNG Y.C. .-Foundations of Solids Me-
chanics.
Prentice-Hall of India
Private Limited (1968).
- GANTMACHER F. .-Lecture in Analytical Me-
chanics.
Mir Publishers (1975).
- GERMAIN and MULLER .-Introduction a la Mecani-
que des Milieux continus.
Masson (1980).
- HURTY and RUBINSTEIN .-Dynamics of Structures.
Prentice-Hall of India
Private Limited.
- LAMB H. .-Hidrodinamics.
Cambridge University.
Press (1932).
- LANCZOS C. .-The Variational Principles
of Mechanics.
University of Toronto.
Press (1970).
- LANDAU and LIFSHITZ .-Teoria Clásica de los
campos.
Reverté S.A. (1966).
- LEECH J.W. .-Elements de Mecanique
Analytique.
Dunod (1961).

- LANDAU and LIFSHITZ .-Electrodinámica de los medios continuos. Reverté S.A. (1975).
- LIN T.H. .-Theory of inelastic Structures. J. Wiley and Sons Ing (1968).
- LUR'E L. .-Mecanique Analytique. Tomos I y II Masson (1968).
- MIKHLIN S.G. .-Mathematical Physics an advanced course. North Hollad (1970).
- MORSE-FESHBACH .-Methods of Theoretical Physics. Mc.Graw-Hill (1953).
- NOWACKI W. .-Thermoelasticity Pergamon Press (1964).
- PANOFSKY-PHILLIPS .-Classical Electricity and Magnetism. Addison -Wesley Pub. Company. (1972).
- PARS L.A. .-Analytical Dynamics. Heinemann (1968).
- SOKOLNIKOFF I.S. .-Analisis Tensorial. Index-Prial (1971).

- SOKOLNIKOFF I.S. .-*Mathematical theory of Elasticity.*
J. Wiley and Sons (1956).
- SOMMERFELD .-*Electrodynamics.*
Academic Press (1952).
- SOMMERFELD .-*Mechanics.*
Academics Press (1952).
- SYMPOSIUM HERRANALB
(GERMANY) Septembre 1969 .-*Instability of Continuous Systems.*
Springer-Verlag (1971).
- TRUESDELL C. .-*Mechanics of Solids II.*
Handbuch der Physik.
Vol. VIa/2.
Springer-Verlag.
- VALID R. .-*Mechanics of continuous media and analysis of Structures.*
North-Holland Pub. Company (1981).

I N D I C E

<u>INTRODUCCION</u>	Pag. 1
---------------------------	-----------

PRIMERA PARTE

CAPITULO I

Sistemas discretos

Formulacion del problema....	9
Proposiciones.....	10
Aplicaciones.....	12
Generalizacion del concepto de potencial.....	23
Conclusiones.....	25

CAPITULO II

Sistemas discretos disipativos

Definiciones.....	27
Proposiciones.....	28
Variables cíclicas.....	32
Conclusiones.....	33

CAPITULO III

Medios continuos

Introducción.....	35
Definiciones.....	36

	Pag.
Proposiciones.....	38
Aplicaciones.....	40
Medios disipativos.....	47
Proposición.....	49
Aplicaciones.....	51
Campos de componentes comple- jas.....	55
Aplicación.....	55
Conclusiones.....	57

SEGUNDA PARTE

CAPITULO IV

Leyes de conservación en la formu-
lación complementaria. Sistemas
discretos.

Introducción.....	58
Definición de momento conju- gado cíclico.....	59
Defnición de evolución esta- cionaria en el espacio de los impulsos.....	68
Conclusiones.....	71

CAPITULO V

Leyes de conservación en formula-
ción complementaria. Medios con-
tinuos.

Introducción.....	72
-------------------	----



	Pag.
Definición de flujo de densidad de energía complementaria de campo.....	73
Proposición.....	73
Defnición de densidad de momento ondulatorio del campo.	76
Proposición.....	77
Definición de densidad de momento angular complementario.....	78
Proposición.....	78
Otras leyes de conservación.	80
Conclusiones.....	81
 BIBLIOGRAFIA.....	 82

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
D.^a Concepción Velázquez Álvarez
titulada "Formas recíprocas del Principio de
Hamilton"

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente
"cum laude"

Sevilla, 23 de diciembre

1.982

El Vocal,

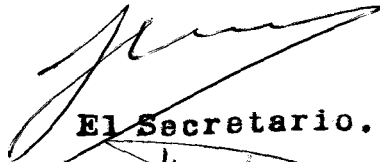
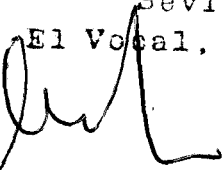
El Vocal,

El Vocal,

El Presidente,

El Secretario,

El Doctorado,



Muñiquen

