

ANALISIS PASO A PASO NO-HOLONOMICO DE ESTRUCTURAS PLANAS SOMETIDAS A CARGAS REPARTIDAS

R. PICON

y

J. CAÑAS

Cátedra de Elasticidad y Resistencia de Materiales

E.T.S. Ingenieros Industriales

Avda. Reina Mercedes, s/n. Sevilla

RESUMEN

Se presenta en este trabajo, en primer lugar, una técnica sistemática para la generación automática de las ecuaciones de equilibrio que relacionan los momentos flectores en los extremos de las barras de una estructura; esta forma de las ecuaciones de equilibrio es útil para el caso en que las deformaciones debidas al esfuerzo axial no son consideradas. Posteriormente se generaliza (modificándolo en algunos aspectos) un método paso a paso de análisis elastoplástico de estructuras planas ya existente para tener en cuenta la existencia de cargas distribuidas. La ley de comportamiento admitida es no-holónica (irreversible) lo que permite detectar las descargas locales que se produzcan. Se presenta la resolución detallada de un ejemplo.

SUMMARY

A systematic technique for the automatic generation of the equilibrium equations which relate the bending moments at the ends of an element of a structure, is presented in this work. In this way, the case where the axial strains are not considered, can be easily formulated. A previously developed step by step elastoplastic method, is modified to take into account the existence of distributed loads. A non-holonomic behavior is assumed. This makes possible to detect the local unloading that might appear. Finally the solution of an example is presented.

INTRODUCCION

Como es bien sabido, el comportamiento plástico de un material es irreversible y, dado un programa de cargas externas, cabe la posibilidad de que se produzcan descargas en determinados puntos pasando a comportarse elásticamente zonas que estaban plastificadas. Dicho fenómeno se da, en general, sea cual sea la ley de variación de las cargas, incluso en el caso de que éstas crezcan proporcionalmente. Teóricamente, por tanto, cualquier evolución elastoplástica de un sólido debe analizarse mediante un método paso a paso que contemple la plastificación progresiva de éste.

En el caso de carga proporcional tal fenómeno de descarga es poco frecuente y, cuando se da, su influencia en el valor final de las deformaciones y desplazamientos

Recibido: Abril 86

suele ser pequeño. Aun así, los verdaderos resultados (por ejemplo, de las deformaciones plásticas) pueden ser mayores que los obtenidos suponiendo que no existen descargas¹, lo que, en teoría, abre la posibilidad de que queden encubiertas deformaciones inadmisibles para el material. En todo caso el análisis paso a paso proporciona una útil información de la evolución de la estructura y permite el estudio de ésta a cualquier nivel de carga. Por último, los programas reales de carga no siempre son proporcionales y en este caso el análisis paso a paso es la única posibilidad.

En cuanto a las cargas a que está sometida una estructura, frecuentemente son de tipo distribuido. Un método directo de análisis que tiene en cuenta este tipo de cargas fue presentado previamente²; las aplicaciones realizadas pusieron de manifiesto que pueden obtenerse sensibles diferencias entre la carga de colapso (hasta de un 10% del lado de la inseguridad) y los desplazamientos y deformaciones (hasta de un 30%) obtenidos con las cargas uniformes y los obtenidos con sustituciones estáticamente equivalentes que no aumenten el número de secciones; asimismo, el ajuste de las rótulas plásticas a sus verdaderas posiciones provoca variaciones en los resultados que pueden llegar a ser del orden del 25%. Por todo ello, parece interesante que el método de análisis pueda manejar directamente las cargas repartidas.

En este trabajo se plantea un método para el análisis paso a paso de estructuras planas sometidas a cargas repartidas. Previamente, se plantea un método eficiente para la generación automática de ecuaciones de equilibrio entre momentos; este método sintetiza las ideas presentadas en forma más heurística en⁸.

Las hipótesis de partida se presentan a continuación

- a) Los cambios geométricos no alteran las ecuaciones básicas (teoría de primer orden).
- b) El momento flector es el único esfuerzo activo en cuanto a deformaciones y plasticificación de las secciones de las barras.
- c) El factor de forma de las secciones se considera la unidad, lo que implica que las deformaciones plásticas se concentran en determinadas secciones críticas de la estructura.
- d) El programa de carga de la estructura se discretiza en una serie de tramos de carga proporcional. Las cargas pueden ser concentradas o aplicarse uniformemente repartidas sobre las barras.
- e) La ley de comportamiento del material se supone elastoplástica ideal irreversible (no-holonómica). El límite de fluencia se supone igual para tracción y compresión, como es usual para el acero.

El algoritmo básico que se ha utilizado es el descrito en³, modificado convenientemente para incluir la existencia de cargas repartidas. Adicionalmente, y respecto a dicho algoritmo: 1) las descargas se han detectado de una forma más simple; y 2) las nuevas matrices a utilizar en el caso de descargas se han establecido de forma que no se requieren nuevas inversiones matriciales.

Teniendo en cuenta la hipótesis b), el método se plantea ventajosamente a partir de las ecuaciones de equilibrio de momentos, que deducimos a continuación.

ECUACIONES DE EQUILIBRIO ENTRE MOMENTOS

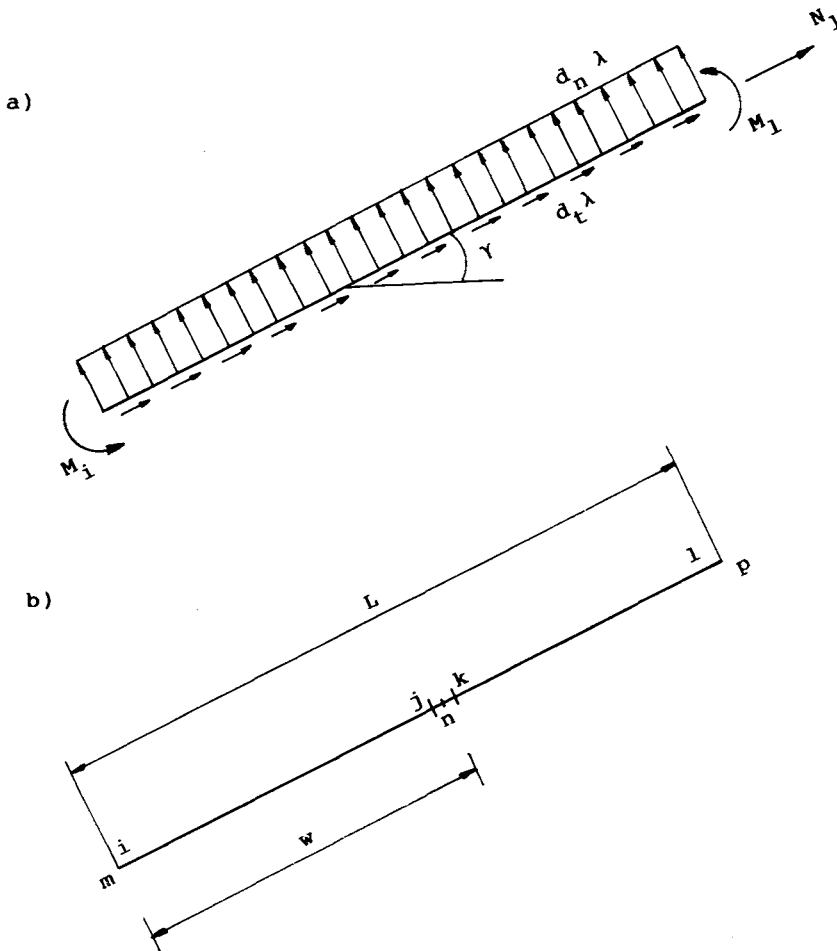


Figura 1. Barra Cargada.

El tipo de barra cargada que se va a manejar es el indicado en la Fig. 1a, en la que λ indica el factor de proporcionalidad. Los nudos extremos m y p (Fig. 1b) son fijos, así como las secciones extremas de las barras, i y l . El nudo intermedio, n , es un nudo variable, situado a una distancia w del origen i , que da lugar a dos nuevas secciones variables j y k . El valor w es inicialmente $L/2$; si aparece una rótula plástica en algún punto de la barra cargada, el nudo variable pasa a ocupar dicha posición, redefiniéndose convenientemente las magnitudes que dependen de w . Las ecuaciones de equilibrio globales de la estructura, que relacionan los esfuerzos internos en los extremos de las barras con las cargas aplicadas, pueden establecerse (fijados unos valores de las variables w) a partir de las ecuaciones de equilibrio de una barra, relacionando los esfuerzos en los dos sistemas de ejes global y local de la Fig. 2a y 2b. Dichas ecuaciones son

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{Q}^e - \mathbf{S}_d^e \quad (1a)$$

$$(\mathbf{S}^e)^T = (X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ Z_i \ Z_j) \quad (1b)$$

$$(\mathbf{C}^e)^T = \begin{bmatrix} -s/L & c/L & s/L & -c/L & 1 & 0 \\ -s/L & c/L & s/L & -c/L & 0 & 1 \\ -c & -s & c & s & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1c)$$

$$(\mathbf{Q}^e)^T = (M_i M_j N_j) \quad (1d)$$

$$(\mathbf{S}_d^e)^T = (d_t \lambda L \quad d_n L \lambda / 2) \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & -s & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1e)$$

siendo $c = \cos \gamma$ y $s = \sin \gamma$. El superíndice e indica relativo al elemento.

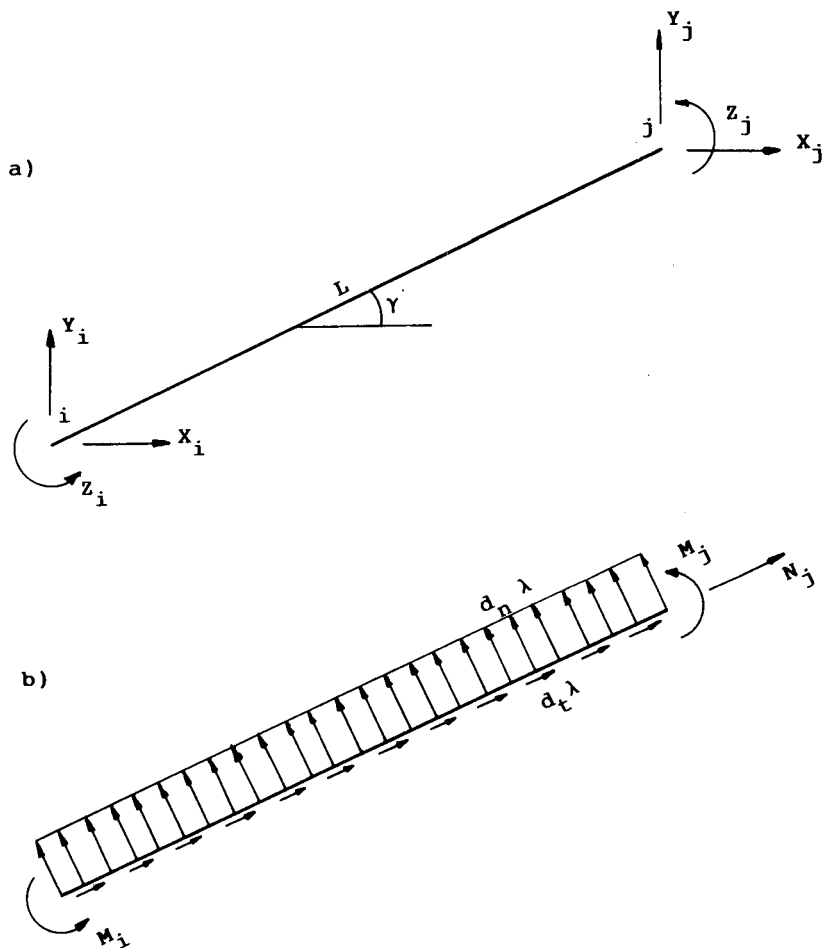


Figura 2. Sistema global y local.

Recorriendo todos los grados de libertad no coaccionados de la estructura (primero los traslacionales y después los rotacionales) y expresando el equilibrio entre las cargas externas y la parte correspondiente de las matrices \mathbf{S}^e de las barras que concurren al nudo se obtendrían las ecuaciones de equilibrio de cada nudo; por cada barra cargada que concorra en él habría que sumar, a las cargas externas concentradas, las filas 1, 2 y 5 (3, 4 y 6) del vector \mathbf{S}_d^e , si la sección de la barra que concurre al nudo es una sección origen (extremo). Así obtendríamos un vector de cargas equivalentes en nudos que añadido a las cargas concentradas, da las cargas totales cuyos valores se agrupan en el vector \mathbf{K}_F . Sea \mathbf{F} , genéricamente, un vector de variables asociadas a las cargas externas. Las ecuaciones de equilibrio serían

$$\mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (2a)$$

o bien

$$\begin{matrix} t \\ r \end{matrix} \begin{bmatrix} 2b & b \\ \mathbf{C}_{Mt} & \mathbf{C}_{Nt} \\ \mathbf{C}_{Mr} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix} \quad (2b)$$

siendo $\mathbf{Q}^T = (\mathbf{M}^T \ \mathbf{N}^T)$ un vector de $3b$ componentes ($b = n^\circ$ de barras) que agrupa, en primer lugar, los momentos flectores en las c secciones críticas de la estructura, que suponemos son los extremos de las barras ($c=2b$), y después los esfuerzos axiales en el vector \mathbf{N} , de b componentes. El símbolo \mathbf{I}_a indica una matriz unidad de a axa; los vectores \mathbf{F}_t y \mathbf{F}_r son las fuerzas según los grados de libertad traslacionales y rotacionales. Se han indicado en la Ec. 2b el número de filas y columnas de cada matriz; $t(r)$ es el número de grados de libertad traslacionales (rotacionales); el número total de grados de libertad es $g=t+r$.

La forma más inmediata de obtener las ecuaciones de equilibrio entre momentos es realizar un proceso de triangulación en la matriz \mathbf{C} para transformar \mathbf{C}_{Nt} en una matriz unidad de $b \times b$ con una matriz de ceros debajo, de dimensión $(t-b) \times b$ (obsérvese que las ecuaciones rotacionales están ya desacopladas y la triangulación sólo ha de realizarse sobre t filas y $3b+t$ columnas). Así se obtiene

$$\begin{matrix} b \\ t-b \\ r \end{matrix} \begin{bmatrix} 2b & b \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{I}_b \\ \mathbf{C}_t^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_r^m & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_t^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_t^m \\ \mathbf{F}_r^m \end{bmatrix} \quad (2c)$$

Respecto a las Ecs. 2b se ha hecho $\mathbf{C}_r^m = \mathbf{C}_{Mr}$ y $\mathbf{U}_r^T = \mathbf{I}_r$, simplemente por mantener la uniformidad de la formulación; los vectores \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_t^m y \mathbf{F}_r^m son vectores reducidos de carga, obtenidos mediante combinaciones lineales de \mathbf{F}_t y \mathbf{F}_r . Las b filas superiores de las Ecs. 2c permiten calcular los esfuerzos axiales a partir de los momentos flectores; las $t-b+r$ filas inferiores son las ecuaciones de equilibrio entre momentos (ecuaciones que están asociadas a los denominados mecanismos independientes de la estructura)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_t^m \\ \mathbf{C}_r^m \end{bmatrix} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_t^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_r^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_t^m \\ \mathbf{F}_r^m \end{bmatrix} \quad (3a)$$

o bien, en forma compacta

$$\mathbf{C}^m \mathbf{M} = \mathbf{U}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^m \quad (3b)$$

El número de mecanismos independientes es $m=t-b+r=g-b$. Denominando n al número de nudos, x al número de reacciones y h al grado de hiperestaticidad de la estructura se tiene $g=3n-x$, $h=3b-3n+x$, con lo que $g=3b-h$, y se obtiene la forma usual que da los mecanismos independientes, $m=2b-h$.

En determinadas situaciones excepcionales el número de mecanismos independientes no viene dado por $2b-h$ (así, en el caso de una viga biempotrada cargada en el centro, se obtiene $m=1$). Ello se traduce en que el rango de \mathbf{C}_{Nt} es menor que b . El número correcto de mecanismos independientes es g -rango (\mathbf{C}_{Nt}).

El método descrito requiere realizar b pivotamientos sobre una matriz de $tx(3b+t)$. Un método más eficiente de calcular las matrices que aparecen en las Ecs. 3b se presenta a continuación.

Apliquemos el Principio de Contragredencia a las Ecs. 2b.

$$\begin{matrix} 2b \\ b \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{Mt}^T & \mathbf{C}_{Mx}^T \\ \mathbf{C}_{Nt}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \quad (4)$$

Los vectores \mathbf{q}_M y \mathbf{q}_N representan las deformaciones debidas al momento flector y al esfuerzo axil. \mathbf{u}_t y \mathbf{u}_r son las traslaciones y rotaciones de los nudos de la estructura. Consideremos las b últimas ecuaciones de las Ecs. 4

$$\mathbf{q}_N = \mathbf{C}_{Nt}^T \mathbf{u}_t \quad (5a)$$

La matriz \mathbf{C}_{Nt} se forma directamente, sin necesidad de disponer de la matriz \mathbf{C} completa. En efecto, el Principio de Contragredencia aplicado a las Ecs. la (considerando el vector \mathbf{S}_a^e como acciones externas equivalentes en el extremo de la barra), dá la deformación axil de una barra en función de las traslaciones de sus nudos extremos

$$\mathbf{q}_{Nj} = (-c \ -s \ c \ s) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (5b)$$

Aplicando una ecuación como la 5b para cada barra se obtiene directamente la matriz \mathbf{C}_{Nt} . Pongamos ahora el vector \mathbf{q}_N de las Ecs. 5a como $\mathbf{I}_b \mathbf{q}_N$; las Ecs. 5a quedan

$$\mathbf{I}_b \mathbf{q}_N = \mathbf{C}_{Nt}^T \mathbf{u}_t \quad (5c)$$

Vamos a convertir la matriz \mathbf{C}_{Nt}^T en otra que contenga una matriz unidad desordenada. El procedimiento consiste en buscar, en cada fila de \mathbf{C}_{Nt}^T (empezando por la primera), el mayor elemento (pivote), dividir la fila por él y crear ceros en el resto de la columna del pivote mediante operaciones entre filas; las mismas operaciones se realizan en \mathbf{I}_b . Cuando el proceso se ha realizado para todas las filas, la matriz \mathbf{C}_{Nt}^T se ha convertido en otra matriz $\check{\mathbf{C}}_{Nt}^T$ que contiene b columnas pivotadas y $t-b$ columnas sin pivotar, y la matriz \mathbf{I}_b se ha convertido en la matriz $\check{\mathbf{I}}_b$ (que ya no es una matriz unidad). Siguiendo la terminología de la Programación Lineal denominamos variables básicas (no básicas) a las asociadas a las columnas pivotadas (no pivotadas). Evidentemente, las variables básicas están asociadas a un conjunto de columnas independientes de \mathbf{C}_{Nt}^T .

Las variables básicas (que van multiplicadas por una matriz unidad) pueden ser expresadas directamente en función de las no básicas, que denominamos \mathbf{u}_{tH} y del vector \mathbf{q}_N . Añadiendo identidades entre las variables no básicas se llega a la descomposición.

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{X}_H \mathbf{u}_{tH} + \mathbf{X}_N \mathbf{q}_N \quad (6)$$

Este tipo de descomposición es análoga a la habitualmente utilizada en el método de las fuerzas para la elección automática de incógnitas hiperestáticas (ver, por ejemplo,^{4 o 5})

Si en el proceso descrito aparece una fila de ceros (esto habrá que chequearse con una determinada tolerancia, debido a errores numéricos), ello indica que el rango de \mathbf{C}_{Nt}^T es menor que b y que \mathbf{u}_{tH} contendrá más de $t-b$ componentes (una más por cada fila de ceros que aparezca). Por lo demás, basta ignorar las filas de ceros, no eligiendo en ellas ninguna variable básica. Procediendo así, al final del proceso se obtendrá el número correcto de traslaciones independientes, que viene dado por t -rango (\mathbf{C}_{Nt}^T).

Sustituyendo las Ecs. 6 en las Ecs. 5a se encuentra que

$$\mathbf{C}_{Nt}^T \mathbf{X}_H = \mathbf{0} \quad " \quad \mathbf{C}_{Nt}^T \mathbf{X}_N = \mathbf{I}_b \quad (7a), (7b)$$

Premultiplicando ahora las t primeras filas de las Ecs. 2b por \mathbf{X}_N^T , primero y por \mathbf{X}_H^T , después, obtenemos

$$\begin{matrix} b \\ t-b \end{matrix} \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{X}_N^T \\ \mathbf{X}_H^T \end{bmatrix} \mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} 2b & b \\ \mathbf{X}_N^T & \mathbf{C}_{Mt} & \mathbf{I}_b \\ \mathbf{X}_H^T & \mathbf{C}_{Mt} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Comparando con las t primera filas de las Ecs. 2c vemos que

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{X}_N \quad " \quad \mathbf{U}_t = \mathbf{X}_H \quad (9a),(9b)$$

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{X}_N^T \mathbf{C}_{Mt} \quad " \quad \mathbf{C}_t^m = \mathbf{X}_H^T \mathbf{C}_{Mt} \quad (9c),(9d)$$

Para efectuar los productos matriciales de las Ecs. 9c y 9d, no es preciso almacenar \mathbf{C}_{Mt} . En efecto, observando las Ecs. 4 vemos que premultiplicando un vector de traslaciones por \mathbf{C}_{Mt}^T obtenemos las deformaciones de flexión \mathbf{q}_M . Como cada fila de \mathbf{X}_N^T y \mathbf{X}_H^T representa un vector de traslaciones, al posmultiplicar por \mathbf{C}_{Mt} obtenemos filas que contienen las deformaciones de flexión provocadas por dichas traslaciones. Estas deformaciones se obtienen sin más que aplicar el Principio de Contragredencia, nuevamente, a las Ecs. 1a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{Mi} \\ \mathbf{q}_{Mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s/L & c/L & s/L & -c/L \\ -s/L & c/L & s/L & -c/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (10)$$

Aplicando la Ec. 10 para cada barra, primero con cada columna del vector \mathbf{X}_N y luego con cada columna de \mathbf{X}_H , obtenemos las matrices \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_t^m . Obsérvese que el proceso realizado no es más que una aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales (del que es consecuencia el Principio de Contragredencia) entre los esfuerzos internos y fuerzas reales, por un lado, y las deformaciones y desplazamientos virtuales asociado a cada columna de \mathbf{X}_N y \mathbf{X}_H , por otro.

El método propuesto es ventajoso respecto al anterior en cuanto a requerimientos de memoria y volumen de operaciones, pues requiere (para pasar de las Ecs. 5a a las Ecs. 6 la realización de b pivotamientos sobre una matriz de $b \times (t + b)$ elementos.

Si el estado de carga es proporcional tenemos

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_F \lambda \quad (11)$$

$$\mathbf{F}^m = \mathbf{K}^m \lambda \quad (12)$$

$$\mathbf{K}^m = \mathbf{U}^T \mathbf{K}_F \quad (13)$$

El cálculo automático de las ecuaciones de equilibrio entre momentos ha sido objeto de algunos trabajos relativamente recientes^{6,7}; el método propuesto en⁶ es notablemente complicado frente al que aquí se propone, que se desarrolló (aunque de forma más heurística), en⁸; la técnica descrita es, en algunos aspectos, similar a la expuesta en⁷.

ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD

Aplicando el Principio de Contragredencia a las dos parejas de Ecs. 2c, denominando \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_t^m y \mathbf{u}_r^m a los desplazamientos asociados (energéticamente) a los vectores de carga \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_t^m y \mathbf{F}_r^m respectivamente, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_M \\ \mathbf{q}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & (\mathbf{C}_t^m)^T & (\mathbf{C}_r^m)^T \\ \mathbf{I}_b & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_t^m \\ \mathbf{u}_r^m \end{bmatrix} \quad (14a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{U}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_t^m \\ \mathbf{u}_r^m \end{bmatrix} \quad (14b)$$

Como las deformaciones axiales se consideran nulas ($\mathbf{q}_N = 0$) las Ecs. 14a dan $\mathbf{u}_1 = 0$ y las ecuaciones de compatibilidad quedan

$$\mathbf{q}_M = (\mathbf{C}^m)^T \mathbf{u}^m \quad (14c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \mathbf{u}^m \quad (14d)$$

habiéndose hecho

$$\mathbf{u}^m = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t^m \\ \mathbf{u}_r^m \end{bmatrix} \quad \text{"} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_r \end{bmatrix} \quad (15)$$

LEY DE COMPORTAMIENTO

La ley de comportamiento elastoplástica ideal no holonómica viene definida por las siguientes ecuaciones (ver, por ejemplo⁹)

$$\mathbf{q}_M = \mathbf{A} \mathbf{M} + \mathbf{p} + \mathbf{q}_d \lambda \quad (16a)$$

$$|\mathbf{M}| \leq \mathbf{M}_p \quad (16b)$$

$$(|M_i| - M_{pi}) \dot{p}_i = 0, \quad i=1,2b \quad (16c)$$

$$\dot{M}_i \dot{p}_i = 0 \quad , \quad i=1,2b \quad (16d)$$

$$M_i \dot{p}_i \geq 0 \quad , \quad i=1,2b \quad (16e)$$

La Ec. 16a dá las deformaciones como suma de las provocadas por los momentos flectores (\mathbf{A} es la matriz de flexibilidad desacoplada de la estructura), más las deformaciones plásticas, más las debidas a las cargas uniformes; estas últimas, para una barra cargada ij , como la de la Fig. 2, vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} q_{di} \\ q_{dj} \end{bmatrix} = \frac{d_n L^3}{24 EI} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (16f)$$

Aplicando la Ec 16f para cada barra se obtiene el vector \mathbf{q}_d . Las Ecs. 16b-16e caracterizan el comportamiento elastoplástico ideal irreversible de la estructura; la Ec. 16b fuerza a que los momentos flectores no sobrepasen el correspondiente valor del momento plástico de cada sección, agrupados en el vector \mathbf{M}_p ; las Ecs. 16c obligan a que la deformación plástica se produzca sólo si se ha alcanzado el momento plástico (el símbolo \dot{p}_i indica derivada respecto al tiempo); las Ecs. 16d permiten la deformación plástica si el momento no varía, y viceversa; por último, las Ecs. 16e fuerzan a que el trabajo plástico sea de disipación.

CONDENSACION DE LAS ECUACIONES

Vamos a sintetizar las Ecs. 3b, 14c y 16a en un solo grupo. Para ello pongamos las Ecs. 3b en la forma

$$\mathbf{C}^m \mathbf{M} = \mathbf{I}_m \mathbf{F}^m \quad (17a)$$

y efectuemos sobre ellas una descomposición como la realizada sobre las Ecs. 5c para pasar a las Ecs. 6

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_H \mathbf{M}_H + \mathbf{b}_m \cdot \mathbf{F}^m \quad (17b)$$

Las Ecs. 17 expresan los momentos flectores en función de un conjunto posible de incógnitas hiperestáticas, \mathbf{M}_H , y de las cargas externas. Por razones que se justificarán más tarde, el conjunto \mathbf{M}_H va a estar asociado sólo a secciones fijas; ello siempre puede conseguirse pues los nudos variables podrían verse como nudos auxiliares, que no son esenciales para el análisis de la estructura. En cuanto a la implementación práctica, basta con que el algoritmo de triangulación (que convierte las Ecs. 17a en las Ecs. 17b) escoja como variable básica una sección variable, siempre que ello sea posible; este procedimiento dá como resultado final el que todas las variables no-básicas (columnas no pivotadas) estén asociadas a nudos fijos. Sustituyendo las Ecs. 17b en las Ecs. 17a se encuentra

$$\mathbf{C}^m \mathbf{b}_H = 0 \quad \mathbf{C}^m \mathbf{b}_m = \mathbf{I}_m \quad (18a), (18b)$$

Sustituyendo las Ecs. 14c en las Ecs. 16a y premultiplicando por \mathbf{b}_H^T obtenemos, teniendo en cuenta las Ecs. 18a y las Ecs. 17b

$$\mathbf{0} = \mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H \mathbf{M}_H + \mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_m \mathbf{F}^m + \mathbf{b}_H^T \mathbf{p} + \mathbf{b}_H^T \mathbf{q}_d \lambda \quad (19a)$$

Haciendo

$$\mathbf{Y} = -(\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H)^{-1} \quad (19b)$$

y poniendo $\mathbf{F}^m = \mathbf{K}^m \lambda$ obtenemos

$$\mathbf{M}_H = (\mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_m \mathbf{K}^m + \mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \mathbf{q}_d) \lambda + \mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \mathbf{p} \quad (19c)$$

que sustituida en las Ecs. 17a da

$$\mathbf{M} = ((\mathbf{b}_H \mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_m + \mathbf{b}_m) \mathbf{K}^m + \mathbf{b}_H \mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \mathbf{q}_d) \lambda + \mathbf{b}_H \mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \mathbf{p} \quad (19d)$$

Haciendo

$$\mathbf{Z} = \mathbf{b}_H \mathbf{Y} \mathbf{b}_H^T \quad (19d)$$

y

$$\mathbf{b}_F = (\mathbf{Z} \mathbf{A} \mathbf{b}_m + \mathbf{b}_m) \mathbf{K}^m + \mathbf{Z} \mathbf{q}_d \quad (19e)$$

obtenemos finalmente

$$\mathbf{M} = \mathbf{b}_F \lambda + \mathbf{Z} \mathbf{p} \quad (19f)$$

Las Ecs. 19f representan una resolución explícita de la estructura; el vector \mathbf{b}_F representa la solución elástica en equilibrio con las cargas externas y la matriz \mathbf{Z} transforma las deformaciones plásticas (consideradas impuestas a la estructura como dislocaciones) en un conjunto de esfuerzos internos autoequilibrados; la matriz \mathbf{Z} es simétrica a la vista de su definición.

Por otra parte, las Ecs. 18b permiten calcular los desplazamientos reducidos \mathbf{u}^m a partir de las deformaciones \mathbf{q}_M . Así, premultiplicando las Ecs. 14c por \mathbf{b}_m^T obtenemos

$$\mathbf{u}^m = \mathbf{b}_m^T \mathbf{q}_M \quad (19g)$$

Sabido \mathbf{u}^m , las Ecs. 14d dan los desplazamientos reales, \mathbf{u} .

Las Ecs. 19f, junto con las Ecs. 16b-16e definen ahora el problema.

ALGORITMO INCREMENTAL

El hecho de admitir leyes elastoplásticas lineales por tramos, junto con la concentración en determinadas secciones críticas de las deformaciones plásticas, permite plantear el problema en forma incremental. Así, las Ecs. 19f, 16b-16e quedan

$$\Delta \mathbf{M} = \mathbf{b}_F \Delta \lambda + \mathbf{Z} \Delta \mathbf{p} \quad (20a)$$

$$-\mathbf{M}_p \leq \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M} \leq \mathbf{M}_p \quad (20b)$$

$$(|M_i| - M_{p,i}) \Delta p_i = 0, \quad i=1,2b \quad (20c)$$

$$\Delta M_i \Delta p_i = 0, \quad i=1,2b \quad (20d)$$

$$M_i \Delta p_i \geq 0, \quad i=1,2b \quad (20e)$$

Las Ecs. 20c,d y e se derivan de las correspondientes Ecs. 16 substituyendo \dot{M}_i y \dot{p}_i por ΔM_i y Δp_i , y poniendo el momento flector como $M_i + \Delta M_i$; en las Ecs. 20c y e se han eliminado los productos $\Delta M_i \Delta p_i$, haciendo uso de la Ec. 20d.

El problema a resolver en cada etapa sería

$$\text{Max } \Delta \lambda \quad | \quad \text{Ecs. 20a} - \text{20e} \quad (20f)$$

indicando el símbolo | "sujeto a".

La resolución paso a paso del problema elastoplástico propuesto se va a hacer suponiendo, en principio, que las secciones plastificadas no varían a lo largo de una etapa, entendiéndose por etapa el intervalo transcurrido entre la formación de dos rótulas plásticas. Así, admitamos que los valores \mathbf{M} que aparecen en las Ecs. 20 corresponden a valores al final de la etapa $j-1$ y que los incrementos que aparecen son los que sufren las variables durante la etapa j ; dicha etapa, por otra parte, estará dentro de un tramo de carga K , en el que \mathbf{b}_F tendrá una expresión determinada. Denominemos por $\hat{\mathbf{M}}$ el conjunto de valores de \mathbf{M} que están en la cota superior o inferior al final de la etapa $j-1$; sólo el vector $\Delta \hat{\mathbf{p}}$ (asociado a $\hat{\mathbf{M}}$) puede ser en principio distinto de cero durante la etapa j . Sea $\bar{\mathbf{M}}$ el resto de los momentos y $\Delta \bar{\mathbf{p}} (= \mathbf{0})$ el vector asociado. Bajo estas suposiciones, las Ecs. 20 quedan, particionando las matrices convenientemente

$$\Delta \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{b}}_F^K \Delta \lambda + \hat{\mathbf{Z}} \Delta \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (21a)$$

$$\Delta \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{b}}_F^K \Delta \lambda + \bar{\mathbf{Z}} \Delta \bar{\mathbf{p}} \quad (21b)$$

$$-\bar{\mathbf{M}}_p \leq \bar{\mathbf{M}} + \Delta \bar{\mathbf{M}} \leq \bar{\mathbf{M}}_p \quad (21c)$$

$$\hat{M}_s \Delta \hat{p}_s \geq 0, \quad s=1, \hat{s} \quad (21d)$$

$$\Delta \lambda \leq \Delta \lambda^K \quad (21e)$$

siendo s un índice que recorre las \hat{s} secciones donde $M_s = \pm M_{ps}$. La Ec. 21e impone que no se sobrepase el multiplicador que define el tramo de carga K . Nuestro problema sería

$$\text{Max } \Delta\lambda \quad | \quad \text{Ecs. 21} \quad (22)$$

El problema propuesto se va a resolver mediante el algoritmo descrito en 3. Los pasos a dar se indican a continuación.

1) Cálculo de las rotaciones plásticas.

Despejemos $\Delta\mathbf{p}$ de las Ecs. 21a

$$\Delta\hat{\mathbf{p}} = -\hat{\mathbf{Z}}^{-1} \hat{\mathbf{b}}_F^K \Delta\lambda = \hat{\mathbf{x}} \Delta\lambda \quad (23)$$

Si $\hat{\mathbf{Z}}$ no es singular no estamos en el colapso ni ha aparecido un pseudomecanismo; seguir en 2). Si $\hat{\mathbf{Z}}$ es singular, seguir en 6).

2) Chequeo de descargas

Si $\hat{M}_s \hat{x}_s \geq 0$ (lo que implica $\hat{M}_s \Delta\hat{p}_s \geq 0$) para todo s , no hay descargas (ver Ecs. 21d); seguir en 3). Si no es así, hay descargas y es necesario investigar, del conjunto de secciones plastificadas, cuales se descargan; seguir en 7).

3) Cálculo de $\lambda, \mathbf{M}, \mathbf{p}$.

Sustituyendo las Ecs. 23 en las Ecs. 21b éstas quedan

$$\Delta\bar{\mathbf{M}} = (\bar{\mathbf{b}}_F^K + \bar{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{x}}) \Delta\lambda = \mathbf{D} \Delta\lambda \quad (24a)$$

Sea e un índice que recorre las secciones asociadas a $\bar{\mathbf{M}}$ (en número \bar{e}). Entonces el $\Delta\lambda$ máximo permitido se obtiene de

$$\Delta\lambda = \min_{\forall e} \frac{(\pm\bar{M}_{pe} - \bar{M}_e)}{D_e} \quad (24b)$$

tomándose el signo más o el menos según que D_e sea positivo o negativo. El valor obtenido de la Ec. 24b, sin embargo sólo prevé la formación de una nueva rótula en las actuales secciones críticas; no obstante, puede ser que la nueva rótula aparezca en algún punto dentro de una barra cargada. El valor del momento máximo en una barra cargada como la de la Fig. 1, sometida en sus extremos a unos momentos $M_i + \Delta M_i$ y $M_l + \Delta M_l$, y sobre la que actúa una carga distribuida $\lambda + \Delta\lambda$, es

$$M_{\max} = -(M_i + \Delta M_i) + 0.5(M_i + \Delta M_i + M_l + \Delta M_l) - \frac{(M_i + \Delta M_i + M_l + \Delta M_l)^2}{2 L^2 d_n (\Delta \lambda + \lambda)} - \frac{d_n L^2 (\lambda + \Delta \lambda)}{8} \quad (24c)$$

Poniendo $\Delta M_i = D_i \Delta \lambda$ si M_i pertenece al conjunto \bar{M} ($\Delta M=0$ si pertenece al \hat{M}), haciendo lo mismo con ΔM_l , e igualando el M_{\max} al momento plástico de la barra obtenemos de la Ec. 24c una ecuación cuadrática que da dos valores de $\Delta \lambda$. Igualando M_{\max} al momento plástico de la barra cambiado de signo se obtienen otros dos valores; del total de cuatro valores se toma el menor positivo. Hecho esto para todas las barras cargadas y obtenido un $\Delta \lambda$ para cada una, el mínimo de todos ellos es el $\Delta \lambda$ adoptado si es menor que el valor obtenido de la Ec. 24b y si el momento máximo se produce dentro de la barra, es decir $0 < w' < L$, siendo w' la posición de momento máximo

$$w' = \frac{L}{2} - \frac{(M_i + \Delta M_i + M_l + \Delta M_l)}{d_n L (\lambda + \Delta \lambda)} \quad (24d)$$

Si el punto de máximo momento está fuera de la barra, se adopta como $\Delta \lambda$ el que resulta de la Ec. 24b.

Un punto importante para el algoritmo de inversión que luego describiremos es que se supone que las rótulas plásticas aparecen de una en una; si, realmente, varias rótulas se forman simultáneamente para el mismo $\Delta \lambda$ (es decir si se obtiene el $\Delta \lambda$ mínimo para varias secciones) se adopta uno cualquiera arbitrariamente. Ello significa que en una siguiente etapa se formarían nuevas rótulas para un $\Delta \lambda = 0$; un valor de $\Delta \lambda = 0$ es, por tanto, perfectamente admisible siempre que dé lugar a la aparición de una nueva sección plastificada.

Si el $\Delta \lambda$ así obtenido no satisface la Ec. 21e deberá tomarse $\Delta \lambda = \Delta \lambda^K$. Sabido $\Delta \lambda$, las Ecs. 24a y 23 permiten obtener los incrementos de momentos y deformaciones plásticas y en consecuencia, los valores totales de estas magnitudes al final de la etapa j . Si la rótula formada es variable, en ella se hará el momento igual a más (o menos) el momento plástico.

Si no se ha formado una nueva rótula, habría ahora que actualizar K_F , K^m y q_d , lo que da el nuevo valor de b_F (Ec. 19e) en el siguiente tramo de carga; seguir en 1).

Si ha aparecido una nueva rótula y no es variable, seguir en 5); si la rótula formada es variable, seguir en 4).

4) Actualización de magnitudes dependientes de las posiciones de las rótulas variables.

En primer lugar, la Ec. 24d permite redefinir las nuevas longitudes de las dos barras (ij y kl , ver Fig. 1b) que concurren al nudo variable. Sabiendo éstas, la Ec. 16f permite construir el nuevo vector q_d y la nueva matriz A (Ecs. 16a); asimismo, habrán de redefinirse las cargas equivalentes a cargas repartidas lo que da un nuevo vector K_F .

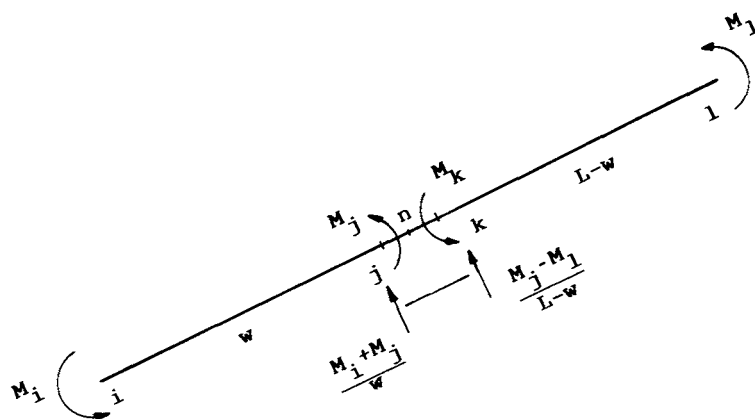


Figura 3. Equilibrio de cortantes en un nudo variable.

Ahora debería usarse la Ec. 13 para calcular \mathbf{K}^m . En este sentido es importante observar que la matriz \mathbf{U} no depende de las posiciones de las rótulas variables; en efecto, la matriz \mathbf{U}_r es una matriz identidad y la matriz \mathbf{C}_{N_t} (de la que deriva \mathbf{U}_t ; ver Ecs. 5 y 6) no depende de w , según observamos en la Ec. 5b. Así pues, \mathbf{U} no varía y la Ec. 13 da el nuevo \mathbf{K}^m .

Asimismo, necesitamos actualizar las matrices \mathbf{b}_H y \mathbf{b}_m . Ello se realiza calculando la nueva matriz \mathbf{C}^m (ec. 17a) que sí depende de las posiciones de las rótulas variables (pues en las Ecs. 10 interviene la longitud de las barras) y realizando nuevamente la descomposición indicada en las Ecs. 17b.

Ahora deberíamos aplicar las Ecs. 19b, 19d y 19e para actualizar las matrices \mathbf{Z} y \mathbf{b}_F . Una observación crucial en cuanto a la eficiencia computacional del método es que la matriz \mathbf{Y} no depende de la posición de las rótulas variables. En efecto, cada columna de \mathbf{b}_H^T es, a la vista de las Ecs. 17, un vector de esfuerzos internos obtenido haciendo igual a uno una incognita hiperestática y cero todas las demás, y anulando las fuerzas externas. Sea $(\mathbf{M}_v)_i$ una columna genérica i de \mathbf{b}_H . Un término genérico ij de $\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H$ está formado por $(\mathbf{M}_v)_i^T (\mathbf{q}_{M_v})_j$, siendo $(\mathbf{q}_{M_v})_j = \mathbf{A} (\mathbf{M}_v)_j$ las deformaciones virtuales provocadas por $(\mathbf{M}_v)_j$. Los productos $(\mathbf{M}_v)_i^T (\mathbf{q}_{M_v})_j$ representan un trabajo virtual que depende solamente de las leyes de esfuerzos $(\mathbf{M}_v)_i$ y $(\mathbf{M}_v)_j$ a lo largo de la estructura, y dichas leyes vienen definidas por las incógnitas hiperestáticas. Como éstas no están asociadas a nudos variables, las leyes de esfuerzos virtuales no dependen de donde estén las rótulas variables, y por tanto $\mathbf{b}_H^T \mathbf{A} \mathbf{b}_H$ no depende de dichas posiciones. La Fig. 4b ilustra el caso en que una sección variable es adoptada como incognita hiperestática en una viga empotrada-apoyada (Fig. 4a); obviamente la ley obtenida depende de donde se encuentre la sección variable, cosa que no sucede en el caso de la Fig. 4c, en el que la incognita hiperestática está asociada a un nudo fijo.

Así pues, para actualizar \mathbf{Z} basta aplicar la Ec. 19d con la matriz \mathbf{b}_H actualizada. La Ec. 19e da el nuevo vector \mathbf{b}_F .

Conviene mencionar por último que la actualización de \mathbf{b}_H puede ser realizada de una forma más simple a partir de la ecuación que liga los momentos en los extremos

de una barra cargada con el momento $M_j (= -M_k)$ en la sección variable. Así, realizando el equilibrio de esfuerzos cortantes en el nudo variable n (Fig. 3) se obtiene

$$\frac{M_i + M_j}{w} + \frac{M_j - M_i}{L - w} = 0 \quad (25a)$$

de donde

$$M_j = -\frac{L - w}{L} M_i + \frac{w}{L} M_i \quad (25b)$$

En general, en la Ec. 25b aparecerían, además, unos términos debidos a las cargas equivalentes en el nudo n ; estos términos no alteran la matriz \mathbf{b}_H .

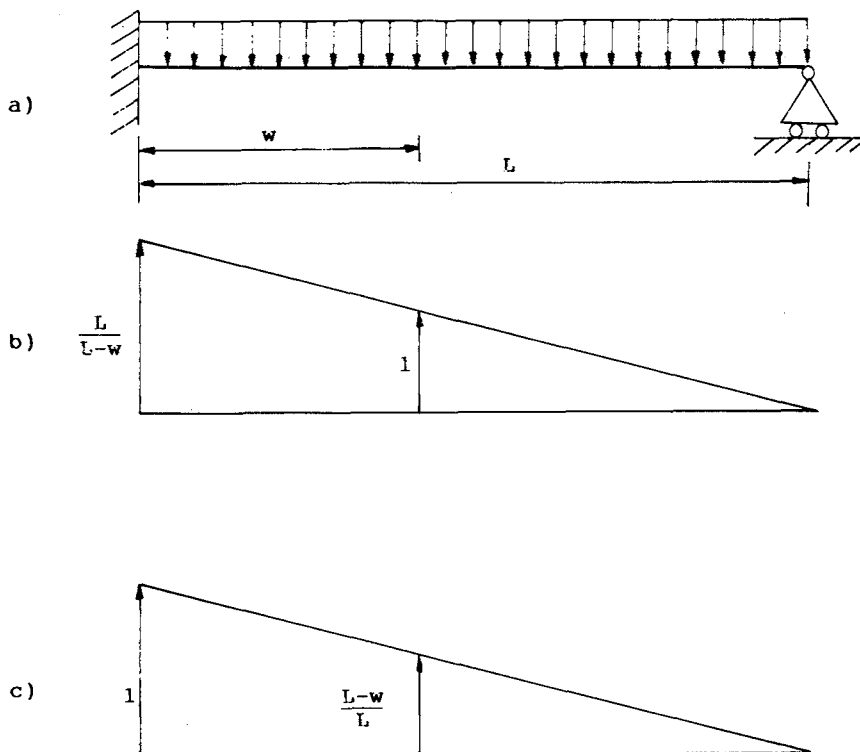


Figura 4. Leyes de esfuerzos virtuales.

Ahora considérese la matriz \mathbf{b}_H que se obtuvo con los nudos variables en una posición dada (la mitad de las barras); despejemos M_i y M_l de las Ecs. 17b. La Ec. 25b queda

$$M_j = \left(-\frac{L-w}{L} (\mathbf{b}_H)_i^T + \frac{w}{L} (\mathbf{b}_H)_l^T \right) \mathbf{M}_H \quad (25c)$$

más términos dependientes de las cargas externas. El símbolo $(\cdot)_i^T$ indica la fila i de la matriz (\cdot) . La Ec. 25c permite actualizar la fila j de la matriz \mathbf{b}_H ; la fila k es igual y cambiada de signo. Obsérvese que la Ec. 25c requiere, para ser válida, que \mathbf{M}_H no contenga secciones variables; obsérvese, asimismo, que, debido a este hecho las filas de \mathbf{b}_H asociadas a secciones fijas son invariantes y no necesitan ser actualizadas.

Usando la Ec. 25c para actualizar \mathbf{b}_H , sólo \mathbf{b}_m requiere ser actualizada mediante el algoritmo de triangulación; sabidas, de una primera triangulación, las columnas básicas elegidas en \mathbf{C}^m , basta con manejar sólo esas columnas actualizadas para calcular \mathbf{b}_m (pues las columnas de \mathbf{b}_m asociadas a variables no básicas sólo contienen ceros).

5) Cálculo de los desplazamientos

Las Ecs. 16a permiten obtener los valores totales de \mathbf{q}_M y la aplicación de las Ecs. 19g da los desplazamientos reducidos de la estructura; las Ecs. 14d, a partir de ellos, dan los desplazamientos reales. Obsérvese que si se ha formado una rótula variable se obtienen los desplazamientos en la nueva posición del nudo.

6) Cálculo de la nueva matriz $(\hat{\mathbf{Z}})^{-1}$

Sea "n" la sección en que ha aparecido la nueva rótula. El vector $\Delta \hat{\mathbf{M}}$ de la Ec. 21a debe ampliarse para incluir ΔM_n (y el vector $\Delta \hat{\mathbf{M}}$ dejaría de incluir a la sección n). Las Ecs. 21a se convertirían en

$$\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{M}} \\ \Delta M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_F^K \\ b_{Fn}^K \end{bmatrix} \Delta \lambda + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}^j & \mathbf{z}_n \\ \mathbf{z}_n^T & z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{p}} \\ \Delta p_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

De la etapa anterior conocemos $(\hat{\mathbf{z}}^j)^{-1}$; ahora necesitamos calcular la inversa de la nueva matriz $\hat{\mathbf{z}}^{j+1}$ de la Ec. 26. Un algoritmo para realizar dicha inversión se presentó en 3):

$$(\hat{\mathbf{z}}^{j+1})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{d}_n \\ \mathbf{d}_n^T & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (27a)$$

siendo

$$d_{nn} = 1/H \text{ con } H = Z_{nn} - \mathbf{z}_n^T (\hat{\mathbf{Z}}^j)^{-1} \mathbf{z}_n \quad (27b),(27c)$$

$$\mathbf{d}_n = -((\hat{\mathbf{Z}}^j)^{-1} \mathbf{z}_n) d_{nn} = \hat{\phi} d_{nn} \quad (27d)$$

$$\mathbf{D} = (\hat{\mathbf{Z}}^j)^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{z}_n \mathbf{d}_n^T) \quad (27e)$$

Mediante las Ecs. 27 la nueva matriz inversa para la etapa $j+1$ es calculada sin necesidad de invertir nuevamente una matriz. Obsérvese que si $H=0$, la matriz $\hat{\mathbf{Z}}^{j+1}$ es singular; el chequeo mencionado en el paso 1) se hace mediante el valor de H .

Una vez calculada $(\hat{\mathbf{Z}}^{j+1})^{-1}$ y redefinidos $\hat{\mathbf{M}}$ y $\hat{\mathbf{M}}$ el proceso sigue en el paso 1).

6) Detección del colapso o de la existencia de pseudomecanismos.

Se ha encontrado que $\hat{\mathbf{Z}}^{j+1}$ es singular; el vector $\begin{pmatrix} \Delta \hat{\mathbf{p}} \\ \Delta p_n \end{pmatrix}$ no puede ser despejado de las Ecs. 26. La estructura no puede soportar incrementos de carga. Haciendo $\Delta \lambda = 0$ y prescindiendo de la última fila de las Ecs. 26 obtenemos

$$\Delta \mathbf{p} = -(\hat{\mathbf{Z}})^{-1} \mathbf{z}_n \Delta p_n \quad (28a)$$

La Ec. 28a define el supuesto modo de colapso de la estructura, en el que una de las rotaciones plásticas puede tomar un valor arbitrario. Demosle a Δp_n un valor arbitrario unidad; obtenemos así un supuesto vector de rotaciones de colapso

$$\hat{\phi}_c = \begin{bmatrix} -(\hat{\mathbf{Z}})^{-1} \mathbf{z}_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28b)$$

Si se cumple

$$\hat{M}_s \hat{\phi}_{cs} \geq 0, \quad s=1, \hat{s} \quad (28c)$$

ó

$$\hat{M}_s \hat{\phi}_{cs} \leq 0, \quad s=1, \hat{s} \quad (28d)$$

ello significa que las rotaciones plásticas son acordes con el signo de los momentos y se ha llegado al colapso. El modo de colapso, $\hat{\mathbf{p}}_c$, viene definido por $\hat{\phi}_c$ ó $-\hat{\phi}_c$ según que se cumpla la Ec. 28c o la Ec. 28d.

Si no se satisfacen las Ecs. 28c ó 28d, ello significa que ha aparecido un pseudomecanismo; tal situación se da cuando se ha alcanzado el momento plástico en un número suficiente de secciones como para convertir a la estructura en un mecanismo, pero las rotaciones que se produjerán, en las distintas secciones, al moverse la estructura como un mecanismo no son acordes con el signo de los momentos que actúan en ellas.

Se deduce que en el instante mismo de empezar a moverse la estructura como mecanismo se produciría una descarga y la estructura recuperaría su capacidad portante. Por tanto hay que investigar qué rótulas se descargan de entre el conjunto de las que definen el pseudomecanismo; seguir en 7).

7) Detección de las secciones que sufren descarga

Sea ahora $\Delta \hat{\mathbf{p}}$ un conjunto de secciones plastificadas de entre las que debemos investigar cuales se descargan; dicha situación puede aparecer en una etapa normal del programa (paso 2)) o cuando se de un pseudomecanismo (paso 6))

En cualquier caso las rótulas que se descargan se obtienen de la solución del siguiente problema

$$\Delta \hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{p}}^{\mathbf{K}} + \hat{\mathbf{z}} \Delta \hat{\mathbf{p}} \quad (29a)$$

$$\Delta \hat{M}_s^+ \leq 0 \quad " \quad \Delta \hat{p}_s^+ \geq 0 \quad (29b)$$

$$-\Delta \hat{M}_s^- \leq 0 \quad " \quad \Delta p_s^- \leq 0 \quad (29c)$$

$$\Delta \hat{M}_s \quad \Delta p_s = 0 \quad \left| \quad s=1, \hat{s} \quad (29d)$$

en el que el superíndice +(-) está asociado a las componentes de $\hat{\mathbf{M}}$ y $\hat{\mathbf{p}}$ que están en la cota superior (inferior). Obsérvese que se ha hecho $\Delta \lambda = 1$; en efecto, buscamos la solución de las Ecs. 29 para un $\Delta \lambda$ positivo arbitrario, que se ha tomado la unidad. El problema definido por las Ecs. 29 es un Problema Lineal Complementario que, alternativamente, puede formularse como un problema equivalente de Programación Cuadrática.¹⁰ En el método que proponemos aquí, la descarga se ha detectado en la forma que se describe a continuación.

Si se trata de un pseudomecanismo, calculamos el trabajo plástico de deformación; admitimos que los signos correctos de $\hat{\phi}_c$ (Ec. 29b) son aquellos que dan un trabajo plástico positivo. Así pues evaluamos $\hat{\mathbf{M}}^{\mathbf{T}} \hat{\phi}_c$; si es positivo, los $\hat{\phi}_c$ permanecen como están, y si es negativo, hacemos $\hat{\phi}_c = -\hat{\phi}_c$. Ahora, las secciones que se suponen sufren descargas son aquellas en las que el signo del momento no es acorde con el de $\hat{\phi}_c$. Si ν es un índice que recorre las secciones descargadas, será

$$\nu = (s \mid \hat{M}_s \hat{\phi}_{cs} < 0, s=1, \hat{s}) \quad (30a)$$

Si se trata de una descarga en una etapa normal (paso 2)) admitimos que se descargan las secciones en las cuales el momento y los incrementos de rotaciones no sean concordantes en signo, es decir

$$\nu = (s \mid \hat{M}_s \Delta \hat{p}_s < 0, s=1, \hat{s}) \quad (30b)$$

Esta forma de detectar las descargas ha funcionado correctamente en todos los casos resueltos.

Si las rótulas descargadas corresponden todas a secciones fijas, seguir en 9); si alguna es variable seguir en 8).

8) Plastificaciones no coincidentes en secciones variables.

Sometida una estructura a un programa de carga no proporcional es posible que una sección variable plastifique, se descarge y vuelva luego a producirse plastificación en una posición diferente a la inicial. Como la idea del algoritmo propuesto es disponer secciones en los puntos plastificados, se hace necesario tratar una barra que contenga una deformación plástica en alguna sección intermedia. Así, considérese la barra de la Fig. 5a, sometida a una carga repartida, en la que inicialmente se produce la plastificación de las secciones variables, que distan w_a del nudo i . Definamos la deformación plástica total en el nudo variable como

$$p_a = p_g - p_h \quad (31)$$

(de hecho, el algoritmo descrito sólo asignará rotaciones plásticas en una de las dos secciones); admitamos ahora que esa sección plastificada se descarga y, en una etapa posterior, vuelve a producirse una plastificación en la posición definida por w_n (Fig. 5b). Las ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y comportamiento incrementales siguen siendo válidas en la barra ij , pues las secciones g y h pasan a comportarse como elásticas a partir del instante de la descarga. La ley de comportamiento que da los valores totales de q_M (Ecs. 16a), sin embargo, debe ser corregida para tener en cuenta el efecto de la deformación plástica intermedia p_a . Para estudiar este efecto, consideremos la barra ij de la Fig. 5b, sometida únicamente a una discontinuidad de rotación plástica p_a , a una distancia w_a del nudo i , como se muestra en la Fig. 6. Evidentemente las deformaciones producidas por la deformación plástica intermedia valen

$$\begin{bmatrix} q_{Mi} \\ q_{Mj} \end{bmatrix} = p_a \begin{bmatrix} (w_a/w_n) - 1 \\ w_a/w_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

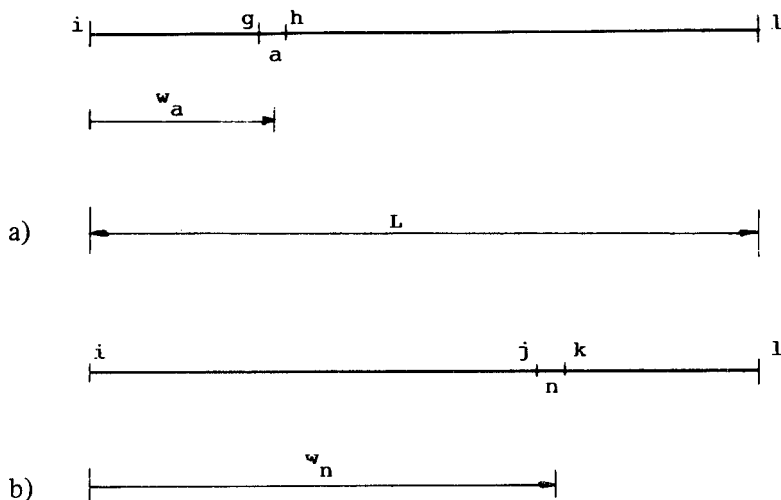


Figura 5. Secciones variables no coincidentes.

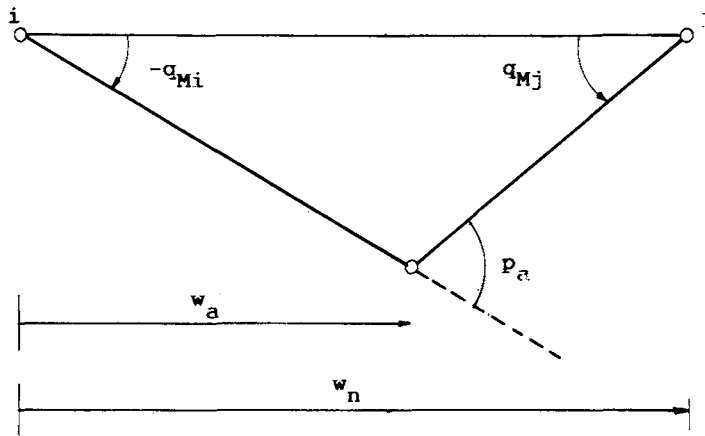


Figura 6. Deformación Plástica intermedia.

Este término deberá ser añadido a los del segundo miembro de las Ecs. 16a para corregir la ley de comportamiento. Las deformaciones q_M así obtenidas permiten obtener el valor correcto de los desplazamientos del nudo n (Fig. 5b) mediante las Ecs. 19g. Así pues, si se descarga una rótula variable, se guardarán los valores w_a y p_a para el caso en que suceda una plastificación en una sección diferente. El proceso sigue en el paso 9).

9) Algoritmo de descargas.

Admitamos que el conjunto de secciones ν , dadas por la Ec. 30a o la Ec. 30b, sufren descarga; evidentemente, debemos ahora calcular la matriz inversa de una matriz deducida de la última matriz \hat{Z} de que disponíamos, pero eliminándole las filas y columnas asociadas al conjunto ν , cuyas variables deben pasar a forma parte del conjunto \bar{M} . El método que aquí proponemos para calcular esa nueva matriz inversa está basado en la aplicación inversa del algoritmo descrito en las Ecs. 27. Así, consideremos una sección genérica ν del conjunto de secciones que se descargan y escribamos las relaciones entre las matrices \hat{Z}^{j+1} y \hat{Z}^j

$$\hat{Z}^{j+1} = \begin{bmatrix} \hat{Z}^j & z_n \\ z_n^T & z_{nn} \end{bmatrix} \quad (33a)$$

$$(\hat{Z}^{j+1})^{-1} = \begin{bmatrix} D & d_n \\ d_n^T & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (33b)$$

Observemos ahora que de la Ec. 27e puede obtenerse la inversa de la etapa anterior a partir de la inversa actual $(\hat{Z}^{j+1})^{-1}$; en efecto

$$(\hat{Z}^j)^{-1} = D + (\hat{Z}^j)^{-1} Z_n d_n^T = D - (d_n d_n^T)/d_{nn} \quad (33c)$$

Cambiando en $(\hat{Z}^{j+1})^{-1}$ la fila ν por la n (última en formarse), y luego la columna ν por la n se obtendrían, como vectores \hat{p} y \hat{M} , los vectores asociados a las secciones 1.. n .. ν , en vez de los asociados a las secciones 1.. ν .. n . Las matrices de las Ec. 33b se convertirían en otras matrices diferentes. Si ahora aplicamos la Ec. 33c con dichas nuevas matrices y vectores, obtendríamos la inversa de una matriz derivada de la matriz Z^{j+1} cambiando en esta las filas y columnas ν y n y eliminando la última fila y columna, asociada a la sección ν . El proceso descrito se aplica sucesivamente para todas las secciones del conjunto ν . Con este algoritmo evitamos la inversión de nuevas matrices. Una vez agotado el conjunto ν el proceso continúa en el paso 1).

Un diagrama de bloques aclaratorio del proceso descrito se muestra en la Fig. 7

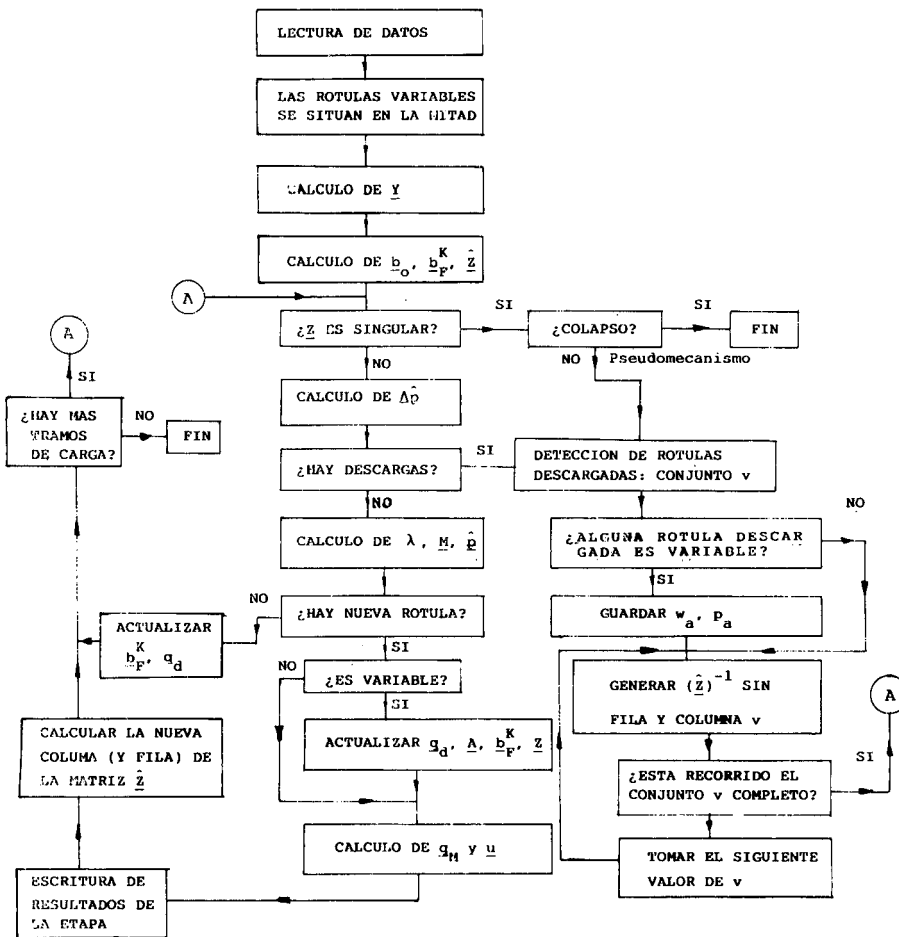


Figura 7. Diagrama de bloques del proceso incremental.

EJEMPLO

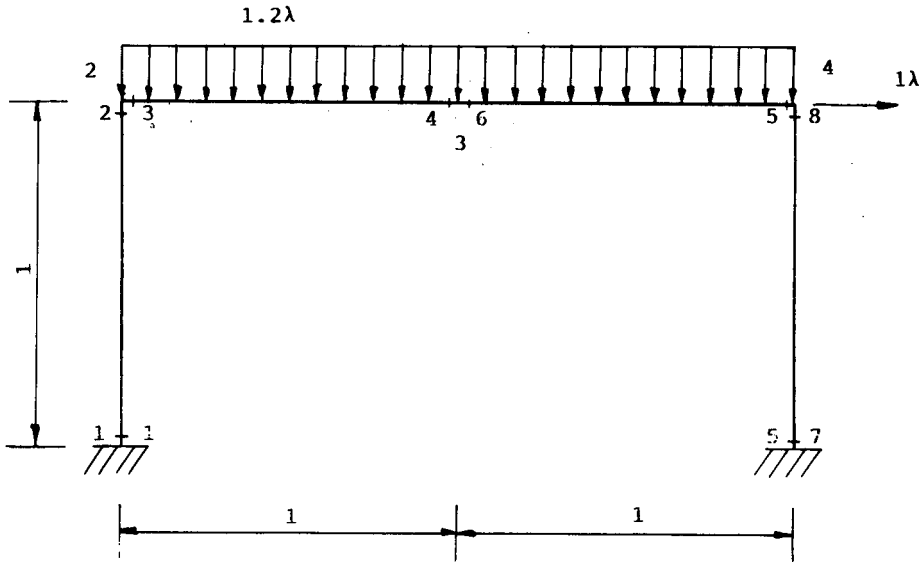


Figura 8. Ejemplo. Geometría y Cargas.

MATRIZ.	GRADOS DE LIBERTAD									Nº DE FILAS.							
	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	α_2	α_3	α_4								
U_{Nt}^T	0	0	0	1	0	0				b							
	-1	0	1	0	0	0											
	0	0	-1	0	1	0											
	0	0	0	0	0	1											
U_F^T	0	0	0	1	0	0		1	0	0	t-b						
												1	0	1	0	1	0
											r						
	K_F^T	0	-0.6	0	-1.2	1					-0.6	0.	0.	0.	1		

Tabla 1. Magnitudes asociadas a los nudos.

Considérese la estructura de la Fig. 8, de geometría y cargas las mostradas, y en la que $E = I = M_p = 1$ para todas las barras. Aplicando la Ec. 5b para todas las barras se obtiene la matriz C_{Nt}^T , que se muestra en la Tabla 1. La descomposición indicada por las Ecs. 6 da la matriz U_t^T y la U_1^T , de las cuales la primera se muestra en la Tabla 1; añadiendo la matriz U_r^T tenemos la matriz U (obsérvese que U_r es una matriz identidad, que no necesita ser almacenada).

Aplicando la Ec. 10 a las columnas de U_t y U_r obtenemos la matriz C^m que se muestra en la Tabla 2. (Ver Ecs. 17a). Triangulando C^m obtenemos la matriz \check{C}^m , convirtiéndose la matriz I_m en la \check{I}_m ; obsérvese cómo las secciones variables (4 y 6) son básicas. A partir de ahí, es inmediato calcular b_H y b_m (Ecs. 17b). Nótese que b_m tiene ceros en las columnas no básicas por lo que para obtenerla nuevamente si cambia C^m basta manejar las columnas básicas de ésta.

MATRIZ	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	F_1^m	F_2^m	F_3^m	F_4^m	F_5^m	MATRIZ					
C^m	C_t^m								1	0	0	0	0	I_m					
									0	1	0	0	0		1	1	0	1	0
C^m	C_r^m								0	0	1	0	0	I_m					
									0	1	1	0	0		0	0	0	0	
									0	0	0	1	0		1	0	0	0	1
									0	0	0	0	1		0	0	1	0	0
C^*	C^*								$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	I_m					
									0	1	-1	0	-1		0	1	0	-1	
									0	0	1	0	0		0	0	0	0	
									$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$		0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
									0	0	0	0	1		0	0	0	0	1
b_H^T	b_H^T								1	-1	1	-1/2	0	1/2	0	0			
									1	0	0	1/2	1	-1/2	0	-1			
									-1	0	0	0	0	0	1	0			
b_m^T	b_m^T								0	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0			
									1	0	0	0	0	0	0	0			
									-1	1	0	0	0	0	0	0			
									0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0			
									0	0	0	0	0	0	0	0			1
b_F^T (x400)	b_F^T (x400)								61	-53	53	112	-203	-112	189	203			

Tabla 2. Magnitudes asociadas a las barras.

El vector equivalente de cargas concentradas \mathbf{K}_F , se muestra en la última fila de la Tabla 1. Usando la Ec. 13 obtendríamos \mathbf{K}^m y las Ecs. 19b, 19d y 19e dan \mathbf{b}_F (que se muestra al final de la Tabla 2) y \mathbf{Z} . Obsérvese que no es necesario almacenar \mathbf{Z} completa para formar \mathbf{b}_F ; formando la fila i de \mathbf{Z} mediante la Ec. 19d, la Ec. 19c permite obtener el término i de \mathbf{b}_F ; posteriormente en el algoritmo incremental, sólo se irán necesitando las filas de \mathbf{Z} asociadas al conjunto $\hat{\mathbf{M}}$; dichas filas pueden irse construyendo a medida que se necesiten.

ETAPA	1	2	3	4			5				
\underline{n}	—	5	7	4			1				
\underline{z}_n^T	—	—	-.17	-.35	.24		-.57	1.22	-.15		
z_{nn}	—	-.77	- 1.97	-.40			- 1.97				
H	—	-.77	- 1.93	-.19			- 3.65 $10^{-8} \cong 0$				
s	—	5	5	7	5	7	4	5	7	4	1
$(\hat{\underline{z}})^{-1}$	0	- 1.29	1.32	.12	-2.63	.56	2.64	COLAPSO			
			.12	-.52	.56	-.67	-.89				
					2.64	-.89	-.5.32				
$(\hat{\underline{x}})^T$	0	-.65	-.72	.30	-2.38	.86	3.33				
$\Delta\lambda$	1.97	.177	-575		.047						
λ	1.97	2.08	2.663		2.7098						
$\hat{\underline{m}}^T$	—	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
$\hat{\underline{p}}^T$	—	-.07	-.49	.17	-.60	.21	.16				
w	1	1	.881		.881			.881			
$\hat{\underline{p}}_c^T$	—	—	—	—	—			- 1.79 1 1.79 1			

Tabla 3. Resultados de las iteraciones.

En la Tabla 3 se describen las distintas etapas. La primera corresponde a la resolución elástica de la estructura; a la vista de \mathbf{b}_F , la primera rótula se forma en la sección 5 (el $\Delta\lambda$ que forma una rótula variable, obtenido de la Ec. 24c, $\Delta\lambda_d$ es 3.39). En la etapa 2 sólo desarrolla rotación la sección 5. La columna 5 de la matriz \mathbf{Z} es (traspuesta)

$$\frac{1}{40} (-23 \ -1 \ 1 \ -16 \ -31 \ 16 \ -7 \ 31)$$

luego \mathbf{Z}_{nn} valdrá $-31/40$. La Ec. 27c da H (igual a \mathbf{Z}_{nn} en este caso) y la Ec. 27a da la nueva inversa. No existe descarga, como se puede ver comparando $\bar{\lambda}_5$ (Ecs. 23) con M_5 . Aplicando las Ecs. 24b se obtiene $\Delta\lambda = .117$ ($\Delta\lambda_d = 0.798$), formándose la nueva rótula en la sección 7. En la tercera etapa desarrollan rotaciones las secciones 5 y 7, que forman el conjunto s ; la estructura no es un mecanismo ($H \neq 0$) y la nueva inversa se obtiene nuevamente mediante las Ecs. 27 a partir de $(\hat{\mathbf{Z}}^2)^{-1}$ y de la columna 7 de \mathbf{Z} , que se genera mediante la Ec. 19d; dicha columna es

$$\frac{1}{40} (49 \ 23 \ -23 \ 8 \ -7 \ -8 \ -79 \ 7)$$

Ahora, el menor $\Delta\lambda$ que provoca el momento plástico en una sección fija vale $\Delta\lambda = 0.61$, en la sección 4 (supuesta fija); sin embargo, de la Ec. 24c se obtiene $\Delta\lambda = 0.5746$ para una distancia $w = w' = 0.8811$ (Ec. 24d). Por tanto se forma una rótula variable y hay que actualizar las matrices de cálculo. La Ec. 25c con $w = 0.8811$, $i = 3$, $p = 5$, permite actualizar $(\mathbf{b}_H)_4^T = (-.55945 \ .44055.0)$; además, $(\mathbf{b}_H)_6^T = -(\mathbf{b}_H)_4^T$ con lo que podemos ya calcular la nueva fila 4 de \mathbf{Z} , que es

$$\frac{1}{40} (-6.216 \ -17.783 \ 17.783 \ -16.212 \ -14.217 \ 16.212 \ 9.783 \ 14.217)$$

En cuanto a la nueva matriz \mathbf{b}_m , para su cálculo sólo se requiere actualizar \mathbf{C}^m ; esto se traduce en que la primera fila de \mathbf{C}^m se convierte en

$$(0.0 \ -1.135 \ -1.135 \ 0.8937 \ 0.8937 \ 0 \ 0)$$

Usando las columnas 1, 2, 4, 6 y 8 de \mathbf{C}^m y realizando la triangulación (Ecs. 17a y 17b) obtenemos la nueva matriz \mathbf{b}_m , cuyas filas 4 y 6 son, respectivamente

$$(-0.493 \ 0. \ 0. \ 0.4405 \ 0.)$$

$$(\ 0.493 \ 0. \ 0. \ 0.5595 \ 0.)$$

Podemos plantear ya la cuarta etapa, calculando la matriz $\hat{\mathbf{Z}}$ asociada a las secciones 5, 7 y 4; nuevamente, se encuentra que la estructura no es un mecanismo ($H \neq 0$) y que no hay descarga. Al plantear la etapa cinco, se encuentra que $H = 0$ (dentro de una cierta tolerancia); como se cumple la Ec. 28c el vector dado por la Ec. 28b representa el mecanismo de colapso, que se muestra en la última fila de la Tabla 3.

Conviene hacer notar, por último, que cuando en etapas intermedias del proceso se forma una rótula variable la ley final de momentos obtenida es, estrictamente hablando, insegura. Ello es debido a que la superposición de dos funciones cuadráticas, una con el máximo en una determinada sección (ley de momentos en una barra cargada en el instante de formarse una rótula variable) y la otra con un cero en la misma sección (incrementos de momentos en la etapa siguiente) desplaza levemente el punto de máximo. Sin embargo, tal efecto es siempre despreciable. Así, la solución final del ejemplo propuesto da el momento máximo para un valor de $w = 0.89086$ y el valor

del momento máximo es 1.0001547. Ello hace que las soluciones de un mismo problema por un método paso a paso y por un método directo puedan no ser exactamente coincidentes. Así, la resolución del ejemplo propuesto por un método directo², da un valor de la carga de colapso de 2.70967, siendo la posición de la rótula $w = 0.89087$.

REFERENCIAS

1. M.Z. Cohn y A. Franchi, "STRUPL: A Computer System for Structural Plasticity". Engineering Plasticity by Mathematical Programming. *Proc. of the NATO Advanced Institute*, (1977).
2. J. Cañas y R. Picón, "Análisis Límite de Estructuras Planas Sometidas a Cargas Repartidas". *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 1, n.º 1, (1983).
3. A. Franchi y M.Z. Cohn, "Computer Analysis of Elastic-Plastic Structures". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 21, (1980).
4. R.K. Livesley, "The Selection of Redundant Forces in Structures, with an Application to the Collapse Analysis of Frameworks". *Proc. Roy. Soc. A*. Vol. 301, (1967).
5. R.K. Livesley, "Matrix Methods of Structural Analysis". Pergamon Press, 2nd Ed., (1975).
6. V.B. Watwood, "Mechanism Generation for Limit Analysis of Frames". *Journal of the Structural Division (ASCE)*, Vol. 109, ST1, (1979).
7. D.H. Nguyen, "CEPAO-an Automatic Program for Rigid-Plastic and Elastic-Plastic Analysis and Optimization of Frame Structures". *Engineering Structures*, Vol. 6, n.º 1, (1984).
8. R. Picón, J. Cañas y F. Medina, "Cálculo Plástico de Estructuras Planas Mediante Ordenador". *Anales de Ingeniería Mecánica*, Año 0, n.º 2, (1982).
9. O. De Donato, "Fundamentals of Elastic-Plastic Analysis" *Proc. of the NATO Advanced Institute*, (1977).
10. R.W. Cottle, "Fundamentals of Quadratic Programming and Linear Complementarity". Engineering Plasticity by Mathematical Programming. *Proc. of the NATO Advanced Institute*, (1977).