TRABAJOS DE ESTADÍSTICA Y
DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA
Vol. 35. Núm. 1, 1984, pp. 65 a 82

CRITERIO PARA DETECTAR OUTLIERS EN POBLACIONES NORMALES BIVARIANTES

Joaquín Muñoz García
Departamento de Estadística y de Investigación Operativa.
Universidad de Sevilla.

Resumen

Damos un procedimiento de detección de outliers para muestras procedentes de poblaciones normales bivariantes, que viene dado por el cuadrado de la distancia entre matrices de sumas de cuadrados y sumas de productos de observaciones muestrales, la cual se ha obtenido a partir de la forma métrica diferencial de MAAS.

1. INTRODUCCIÓN

Para definir el cuadrado de la distancia entre matrices de sumas de cuadrados y sumas de productos nos basamos en la distancia geodésica entre matrices simétricas definidas positivas, utilizando para ello la forma métrica diferencial dada por MAAS (1955).

1.1 Definición. Sea K un espacio conexo sobre el que se ha definido una forma métrica diferencia $(ds)^2$; la distancia entre dos puntos $X, Y \in K$ viene dada por.

$$d(X, Y) = \inf \int_X^Y ds$$

(*) Recibido, Julio, 1981

1.1 Teorema. La función $d(X, Y)$ verifica las siguientes propiedades

$$d(X, Y) \geqslant 0$$
$$d(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$$
$$d(X, Y) = d(Y, X)$$
$$d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$$

y la topologia definida por d es equivalente a la topología inicial del espacio K. [KOBAYASHI, NOMIZU (1963)]

1.2 Teorema. Las matrices simétricas definidas positivas de dimensión $p \times p$ forman un cono convexo en el espacio euclideo $R^{p(p+1)/2}$.

DEMOSTRACIÓN. Basta considerar, cáda matriz simétrica como un punto del espacio euclideo $p(p + 1)/2$ – dimensional.

1.3 Teorema. Sean A y B dos matrices simétricas definidas positivas. Tomando como forma diferencial la dada por Maas, la distancia geodésica entre estas matrices viene dada por

$$d(A, B) = \left(\sum_{i=1}^{p} (\log \lambda_i)^2 \right)^{1/2}$$

donde λ_i son las raíces de la ecuación determinante $|B - \lambda A| = 0$.

La demostración de este teorema, se puede ver en MUÑOZ (1980).

2. DISTRIBUCIÓN DEL ESTADÍSTICO DISTANCIA ENTRE MATRICES DE SUMAS DE CUADRADOS Y SUMAS DE PRODUCTOS

Aplicaremos los resultados anteriores a las matrices de sumas de cuadrados y sumas de productos de observaciones muestrales, pero veamos en primer lugar que esto es posible.

Sea

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots\ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots\ldots & x_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots\ldots & x_{pn} \end{pmatrix}$$

una muestra aleatoria simple procedente de una población $N_p(\mu, \Sigma)$ no singular, entonces la matriz de s. c. y s. p. de observaciones muestrales para esta muestra de tamaño n viene dada por

$$S_{(n)} = X(I - \tfrac{1}{n}E_{nn})X'$$

que es una matriz simétrica y además si no conocemos los parametros poblacionales, $S_{(n)}$ se distribuye según una ley de Wishart p-dimensional con $n-1$ grados de libertad y matriz asociada $\Sigma[W_p(n-1, \Sigma)]$ ANDERSON (1958) y si se tiene que $n > p$, entonces $S_{(n)}$ es definida positiva con probabilidad uno, lo cual se puede representar simbólicamente como

$$\int_{S_{(n)}>0} W_p(n-1, \Sigma)\, dS_{(n)} = 1$$

Y con esto podemos afirmar que las matrices de s. c. y s. p. de observaciones muestrales cumplen las condiciones exigidas para poder definir la función distancia $d(S_{(n-k)}, S_{(n)})$, con ($n > p$ y $n - k > p$) salvo conjuntos de medida nula, en la forma.

$$d(S_{(n-k)}, S_{(n)}) = \left(\sum_{i=1}^{p} (\log \lambda_i)^2 \right)^{1/2} \tag{1}$$

donde $S_{(n-k)}$ es la matriz de s. c. y s. p. de $n-k$ observaciones y los λ_i son las soluciones de la ecuación determinante

$$|S_{(n-k)} - \lambda S_{(n)}| = 0$$

Como estamos trabajando con matrices de tipo aleatorio, la distancia definida en (1), podemos considerarla como una variable aleatoria y por tanto podemos hablar de la distribución de la variable aleatoria distancia. Para calcular dicha distribución vamos a basarnos en los siguientes lemas y teoremas.

2.1 Lema. Sea X una muestra aleatoria simple de tamaño $n (n > p)$ procedente de una población $N_p(\mu, \Sigma)$ no singular. La matriz de s. c. y s. p. de la muestra X, $S_{(n)}$ puede descomponerse de la siguiente forma.

$$S_{(n)} = S_{(n-k)} + S_{(k)} + \frac{k(n-k)}{n}(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})$$

donde $S_{(n-k)}$ es la matriz de s. c. y s. p. de $n-k (n-k>p)$ observaciones y $\bar{X}_{(n-k)}$ su vector media, siendo $S_{(k)}$ la matriz de s. c. y s. p. de las $k (k>p)$ observaciones restantes y $\bar{X}_{(k)}$ su vector media.

Además

$$S_{(k)} + \frac{k(n-k)}{n}(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})' \in W_p(K, \Sigma)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$S_{(n)} = X(I - \tfrac{1}{n}E_{nn})X' = (X_{(n-k)}|X_{(k)})(I - \tfrac{1}{n}E_{nn})(X_{(n-k)}|X_{(k)})'$$

$$S_{(n)} = X(I - \tfrac{1}{n}E_{nn})X' = X_{(n-k)}X'_{(n-k)} + X_{(k)}X'_{(k)} -$$
$$- \tfrac{1}{n}[X_{(n-k)}E_{(n-k),(n-k)}X'_{(n-k)} + X_{(n-k)}E_{(n-k),k}X'_{(k)} +$$
$$+ X_{(k)}E_{k,(n-k)}X'_{(n-k)} + X_{(k)}E_{kk}X'_{(k)}$$

Sumando y restando

$$\tfrac{1}{n-k}X_{(n-k)}E_{(n-k),(n-k)}X'_{(n-k)}; \qquad \tfrac{1}{k}X_{(x)}E_{k,k}X'_{(k)}$$

se obtiene

$$S_{(n)} = S_{(n-k)} + S_{(k)} + \frac{k(n-k)}{n}(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})'$$

Por último como

$$S_{(x)} \in W_p(K, \Sigma)$$

y

$$\frac{k(n-k)}{n}(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})'$$

se distribuye según una ley pseudo-Wishart p-dimensional con un grado de libertad y matriz asociada Σ. Y al ser ambas variables independientes [WILKS (1962)] se tendrá que

$$S_1 = S_{(k)} + \frac{k(n-k)}{n}(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})(\bar{X}_{(n-k)} - \bar{X}_{(k)})'$$

se distribuye según una ley Wishart p-dimensional con k grados de libertad y matriz asociada Σ.

2.2 Lema. Sea S_1 una matriz $p \times p$ que se distribuye según una ley $W_p(k, \Sigma)$ y $S_{(n-k)}$ una matriz $p \times p$ que se distribuye según una ley $W_p(n-k-1, \Sigma)$ independiente de la anterior y sea $S_{(n)} = S_{(n-k)} + S_1$. Entonces la distribución conjunta de las raíces de la ecuación

determinante

$$|S_{(n-l)} - \lambda S_{(n)}|0$$

es de la forma

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) = A \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=i+1}^{p} (\lambda_j - \lambda_i)[\prod_{i=1}^{p} \lambda_i]^{1/2(n-k-p-2)} \times$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^{p} (1 - \lambda_i) \right]^{1/2(k-p-1)}$$

donde

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \leqslant \lambda_p \leqslant 1$$

y

$$A = \pi^{p/2} \prod_{i=1}^{p} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n-i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n-k-i)]\Gamma[\frac{1}{2}(k-i+1)]\Gamma[\frac{1}{2}(p-i+1)]}$$

Es un caso particular de los resultados debidos a HSU (1939), FISHER (1939), ROY(1939), y KHRISNAIAH (1978).

2.1 Teorema. Sea X una muestra aleatoria simple de tamaño n ($n > 2$) extraida de una población con distribución $N_2(\mu, \Sigma)$ no singular. Sea $S_{(n)}$ la matriz de s. c. y s. p. de las observaciones muestrales y $S_{(n-k)}$ la matriz de s. c. y s. p. de $(n-k)$ observaciones ($k > 2$).

La función de densidad del estadistico cuadrado de la distancia

$$U = d^2(S_{(n-k)}, S_{(n)}) = (\log \lambda_1)^2 + (\log \lambda_2)^2$$

donde λ_1 y λ_2 son las soluciones de la ecuación determinante

$$|S_{(n-k)} - \lambda S_{(n)}| = 0$$

viene dada por

$$f(u) = \begin{cases} A e^{-\sqrt{e}\frac{n-k-2}{2}} \int_{\sqrt{2}-1}^{1} (e^{-\sqrt{u}\frac{1+w^2}{1-w^2}} - e^{-\sqrt{u}\frac{1+w^2}{2w}\frac{1-w}{}}) e^{-\sqrt{u}(n-k-2)w} \, 1 \mp \\ + w^2 \\ [(1 - e^{-\sqrt{u}\frac{2w}{1+w^2}})(1 - e^{-\sqrt{u}\frac{1-w^2}{1+w^2}})]^{\frac{k-3}{2}} dw \quad 0 < u < \infty \\ 0 \text{ en el resto} \end{cases}$$

siendo

$$A = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-1)]\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-2)]}{\Gamma(\frac{1}{2}[n-k-1)]\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-k-2)]\,\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{k-1}{2})}$$

DEMOSTRACIÓN. Partiendo de la función de densidad dada en el Lema 2.2 para el caso en que $p = 2$.

Y realizando las trasformaciones

$$\begin{aligned} X &= -\ln \lambda_1 \\ Y &= -\ln \lambda_2 \end{aligned} \qquad 0 < Y < X < \infty$$

y a continuación

$$\begin{aligned} \theta &= X^2 \\ \varphi &= Y^2 \end{aligned}$$

se obtiene

$$f(\theta, \varphi) = \tfrac{A}{4}(e^{-\sqrt{e}} - e^{-\sqrt{\theta}})e^{-(\sqrt{\theta}+\sqrt{\varphi})^{\frac{1}{2}}(n-k-2)} \times$$

$$\times [(1 - e^{-\sqrt{e}})(1 - e^{-\sqrt{\theta}})]^{\frac{k-3}{2}}(\theta\varphi)^{-1/2}$$

$$0 < \varphi < \theta < \infty$$

seguidamente realizamos los cambios de variables

$$\begin{aligned} U &= \theta + \varphi \\ t &= \theta \end{aligned} \qquad 0 < u < \infty \qquad \tfrac{u}{2} < t < u$$

$$Z = \sqrt{\frac{2(U-t)}{U}} \qquad 0 < Z < 1$$

y por último la trasformación

$$\sqrt{1 - \frac{z^2}{2}} = \left(1 + \frac{Z}{\sqrt{2}}\right)w$$

dándonos:

$$f(u) = Ae^{-\sqrt{u}}\frac{n-k-2}{2}\int_{\sqrt{2}-1}^{1}(e^{-\sqrt{u}\frac{1+w^2}{\times}} - e^{-\sqrt{u}\frac{1+w^2}{}})e^{-\sqrt{u}(n-k-2)w\frac{1+w^2}{}}-$$

$$\times [(1 - e^{-\sqrt{u}\frac{2w}{1+w^2}})(1 - e^{-\sqrt{u}\frac{1-w^2}{1+w^2}})]^{\frac{k-1}{2}} \frac{dw}{1+w^2} \quad 0 < u < \infty$$

siendo

$$A = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-1)]\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-2)]}{\Gamma(\frac{1}{2}[n-k-1])\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-k-2)]\,\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{k-1}{2})}$$

3. CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN g

Dada la dificultad de tabulación de la función de distribución F debido a la función de densidad f vamos a construir una función de densidad g cuya función de distribución G será dominada estocásticamente por F siendo más fácil su tabulación. Estos resultados son consecuencia de los siguientes teoremas y programas.

3.1 Teorema. La función

$$f(u) = Ae^{-\sqrt{u}\frac{n-k-2}{2}} \int_{\sqrt{2}-1}^{1} (e^{-\sqrt{u}\frac{1+w^2}{\times}} - e^{-\sqrt{u}\frac{2w}{1+w^2}}) e^{-\sqrt{u}(n-k-2)w\frac{1+w^2}{}} -$$

$$\times \frac{1}{1+w^2}\Bigg[(1 - e^{-\sqrt{u}\frac{2w}{1+w^2}})(1 - e^{-\sqrt{u}\frac{1-w^2}{1+w^2}})]^{\frac{k-3}{2}} dw \quad 0 < u < \infty$$

siendo

$$A = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-1)]\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-2)]}{\Gamma(\frac{1}{2}[n-k-1])\,\Gamma[\frac{1}{2}(n-k-2)]\,\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{k-1}{2})}$$

está acotada superiormente por la función

$$g_1(U) = Ae^{-\sqrt{u}\frac{n-k-2}{2}}(1 - e^{-\sqrt{u}})^{k-2} \qquad 0 < U < \infty$$

Este resultado se obtiene aplicando sucesivamente la siguiente propiedad de la integración.

Sean $h(x)$ y $t(x)$ integrales sobre el intervalo (a, b), sea M el supremo de $h(x)$ en (a, b). Sea, además $t(x) \geqslant 0$ en (a, b). En estas condiciones se tiene:

$$\int_a^b h(x)t(x)dx \leqslant M\int_a^b t(x)dx$$

Y a partir de esta función g_1 construimos la función de densidad dada por el siguiente teorema.

3.2 Teorema. La función $g(x)$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{2\sum_{j=0}^{k-2}\left[\binom{k-2}{j}(-1)^j \frac{1}{\left(\frac{n-k-2}{2}+j\right)^2}\right]} e^{-\sqrt{x}\left(\frac{n-k-2}{2}\right)}\left(1-e^{-\sqrt{x}}\right)^{k-2} \qquad 0<x<\infty$$

con $k>2$ y $n-k>2$ es función de densidad.

A continuación damos dos programas de ordenador. El primero nos sirve para la tabulación de la función $G(x)$, estando realizado en la situación $n=15$ y $k=5$. Y el segundo, incluye las representaciones de $f(u)$ y $g(x)$ en el caso particular $n=55$ y $k=10$.

Tabulación de la función de distribución $G(x)$:

```
      DOUBLE PRECISION FUNCTION SIM3NI(FX,H,E,REL,MAXIT,FX,*)          SIM3NI
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C INTEGRACION NUMERICA UTILIZANDO LA REGLA 3/8 DE SIMPSON              SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C DIMENSION A(2)                                                      SIM3NI
      LOGICAL REL                                                     SIM3NI
      PREV=0                                                          SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C INICIALIZAR H X N M S                                               SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
      H=(A(2)-A(1))/3                                                 SIM3NI
      X=A(1)                                                          SIM3NI
      N=0                                                             SIM3NI
      M=3                                                             SIM3NI
      S=0                                                             SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C CICLO HASTA EL MAXIMO NUMERO DE EVALUACIONES                        SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
      DO 3 J=1,MAXIT                                                  SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C CICLO PARA EL NUMERO DE EVALUACIONES                                SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
      DO 1 I=N,M                                                      SIM3NI
      R=3                                                             SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C DETERMINACION DEL COEFICIENTE R                                     SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
      IF(MOD(I,3).EQ.2*N) R=N+1                                       SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
C SUMA DE LAS EVALUACIONES DE LA FUNCION                              SIM3NI
C-----------------------------------------------------------------------SIM3NI
```

```
33*    S=S+FX(X,FK)*R                                                    SIM3NI
34* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
35* C  INCREMENTAR X                                                     SIM3NI
36* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
37*    1 X=X+H                                                           SIM3NI
38* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
39* C  OBTENCION DEL NUEVO VALOR DE INTEGRACION                         SIM3NI
40* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
41*    SIM 3NI=S*N* 375D0/(N+1 DO)                                       SIM3NI
42* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
43* C  TEST PARA EL PRIMER CICLO                                        SIM3NI
44* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
45*    1F(N EQ 0) GO TO 2                                                SIM3NI
46* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
47* C  PARA LOS CICLOS DISTINTOS DEL PRIMERO,
       MITAD DE H Y DOBLE DE M                                           SIM3NI
48* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
49*    H=H* 5DO                                                          SIM3NI
50*    M=2*M                                                             SIM3NI
51* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
52* C  REVISION DEL ERROR DE CONTROL                                    SIM3NI
53* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
54*    R=SIM3NI-PREV                                                     SIM3NI
55*    IF(REL) R=R/SIM3NI                                                SIM3NI
56* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
57* C  SI EL ERROR ESTA DENTRO DE LOS LIMITES DADOS,FIN                 SIM3NI
58* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
59*    IF(DABS(R) LT E) GO TO 4                                          SIM3NI
60* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
61* C  FIJAR UN NUEVO VALOR DE INTEGRACION                              SIM3NI
62* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
63* C  2 PREV=SIM3NI                                                    SIM3NI
64* C    N=1                                                            SIM3NI
65* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
66* C  OBTENER EL NUEVO LIMITE INFERIOR PARA LA EVALUACION DE LA FUNCION SIM3NI
67* C-------------------------------------------------------------------SIM3NI
68*    3 X X=A(1)+ 5DO*H                                                 SIM3NI
69*      RETURN 7                                                        SIM3NI
70*    4 RETURN                                                          SIM3NI
71*      END                                                             SIM3NI

 END OF COMPILATION        NO DIAGNOSTICS


 1*     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
 2*     EXTERNAL F1
 3*     LOGICAL PEL
 4*     COMMON N,K
 5*     N=15
 6*     K=5
 7*     DIMENSION A(2)
 8*     B=4 *(N-k-2 )**2
 9*     K2=k-2
10*     DO 1 IR=1,k2
```

```
 11*  1 B=B+(-1)**IR*(FACT(K2)/(FACT(IR)*FACT(K2-IR)))*
 12*    *(4./(N-K-2+2*IR)**2)
 13*    A(1)=0
 14*    A(2)=9
 15*    E=1.D-6
 16*    MAXIT=200
 17*    REL=.TRUE.
 18*    DO 3 I=1,200
 19*    A(2)=A(2)+1.D-1
 20*    AINT=SIM3NI(F1,A,E,PEL,MAXIT,1.D,$2)
 21*    F=AINT/(2*B)
 22*    PRINT 6,A(2),F
 23*  6 FORMAT(10X,'F(',D9.4,')=',D20.10)
 24*    GO TO 3
 25*  2 PRINT 4,N,K
 26*  4 FORMAT('   ERROR EN LA INTEGRAL PARA N=',I4,' K=' 14)
 27*  3 CONTINUE
 28*    STOP
 29*    END


       END OF COMPILATION        NO DIAGNOSTICS


  1*    DOUBLE PRECISION FUNCTION FACT(M)
  2*    COMMON N,K
  3*    IF(M) 1,3,4
  4*  1 PRINT 2,N,K
  5*  2 FORMAT(' ARGUMENTO NEGATIVO PARA UN FACTORIAL  N=' I4,' K= ',I4)
  6*    STOP
  7*  3 FACT=1
  8*    RETURN
  9*  4 FACT=1
 10*    DO 5 I=1,M
 11*  5 FACT=FACT*I
 12*    RETURN
 13*    END


END OF COMPILATION        NO DIAGNOSTICS


  1*    DOUBLE PRECISION FUNCTION F1(U,K)
  2*    IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  3*    COMMON N,K
  4*    F1=(DEXP(-DSQRT(U)*(N-K-2 )/2.)))*(1-DEXP(-DSQRT(U)))**(K-2)
  5*    RETURN
  6*    END


END OF COMPILATION:       NO DIAGNOSTICS


  1*    DOUBLE PRECISION FUNCTION SIM3NI(FN,A,E,PEL,MAXIT,FK,$)
```

```
 2*     IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
 3*     DIMENSION A(2)
 4*     LOGICAL REL
 5*     PREV=0.
 6*     H=(A(2)-A(1))/3.
 7*     X=A(1)
 8*     N=0
 9*     M=3
10*     S=0
11*     DO 3 J=1,MAXIT
12*     DO 1 I=N,M
13*     R=3.
14*     IF(MOD(I,3).EQ 2*N) R=N+1.
15*     2=S+FX(X,FK)*R
16*   1 X=X+H
17*     SIM 3NI=S*H*.375DO/(N+1.DO)
18*     IF(N.EQ.0) GO TO 2
19*     H=H*.5DO
20*     M=2*M
21*     R=SIM 3NI-PREV
22*     IF(REL) R=R/SIM3NI
23*     IF(DABS(R).LT.E) GO TO 4
24*   2 PREV=SIM3NI
25*     N=1
26*   3 X=A(1)+.5D0*H
27*     RETURN 7
28*   4 RETURN
29*     END

END OF COMPILATION:       NO DIAGNOSTICS.


 1*     DOUBLE PRECISION FUNCTION FACT(M)
 2*     COMMON N,K
 3*     IF(M) 1,3,4
 4*   1 PRINT 2,N,K
 5*   2 FORMAT(' ARGUMENTO NEGATIVO PARA UN FACTORIAL ,N=',I4,' K=',I4)
 6*     STOP
 7*   3 FACT=1
 8*     RETURN
 9*   4 FACT=1
10*     DO 5 I=1,M
11*   5 FACT=FACT*I
12*     RETURN
13*     END

END OF COMPILATION.       NO DIAGNOSTICS.


 1*     DOUBLE PRECISION FUNCTION F1(T,FK)
 2*     IMPLICIT DOUBLE PRECISON (A-H,O-U,W-Z)
```

```
 3*      COMMON N,K,U
 4*      R=DEXP (-DSQRT(U)*(1  -T**2)/(1  +T**2))
 5*      S=DEXP(-DSQRT(U)*2  *T/(1  +T**2))
 6*      Q=DEXP(-DSQRT(U)*(N-K-2)*T*(1  -T)/(1  +T**2))
 7*      F1=(P-S)*Q*((1  -S)*(1  -R))**((K-3)/2  )/(1  +T**2)
 8*      RETURN
 9*      END

END OF COMPILATION        NO DIAGNOSTICS.
```

Representación gráfica de las funciones $f(u)$ y $g(x)$.

```
 1* C ------------------------------------------------------------------ SIM3NI
 2* C COMPARACION Y REPRESENTACION DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD DE LA VARIABLE
 3* C DISTANCIA AL CUADRADO F(U) Y LA DADA EN EL TEOREMA 3 2
 4* C (EN EL PROGRAMA, F(U) ES F, Y LA DEL TEOREMA ES G)
 5* C ------------------------------------------------------------------ SIM3NI
 6*       IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-U,W-Z)                          SIM3NI
 7*       COMMON N,K,U                                                    SIM3NI
 8*       DIMENSION A(2),V(61,81),U1(61),F2(61),G1(61)                    SIM3NI
 9*       EXTERNAL F1                                                     SIM3NI
10*       LOGICAL REL                                                     SIM3NI
11*       N=55                                                            SIM3NI
12*       U=0                                                             SIM3NI
13*       K=10                                                            SIM3NI
14*       DO 10 I=1,61                                                    SIM3NI
15*       DO 10 J=1,81                                                    SIM3NI
16*    10 V(I,J)=' '                                                      SIM3NI
17*       DO 11 I=1,61                                                    SIM3NI
18*    11 V(I,1)='I'                                                      SIM3NI
19*       DO 12 I=1,81                                                    SIM3NI
20*    12 V(1,I)='-'                                                      SIM3NI
21*       G1(1)=0                                                         SIM3NI
22*       F2(1)=0                                                         SIM3NI
23*       U1(1)=0                                                         SIM3NI
24* C ------------------------------------------------------------------ SIM3NI
25* C CALCULO DE LAS CONSTANTES B Y C                                     SIM3NI
26* C ------------------------------------------------------------------ SIM3NI
27*       B=4 /(N-K-2 )**2                                                SIM3NI
28*       K2=K-2                                                          SIM3NI
29*       DO 1 IR=1,K2                                                    SIM3NI
30*     1 B=B+(-1)**IR*(FACT(K2)/(FACT(IR)*FACT(K2-IR)))*                 SIM3NI
31*       *(4 /(N-K-2+2*IR)**2)                                           SIM3NI
32*       C=FACT(N-3)/(4*FACT(K2)*FACT(N-K-3)                             SIM3NI
33* C ------------------------------------------------------------------ SIM3NI
34* C CALCULO DE LAS FUNCIONES F Y G                                      SIM3NI
35* C ------------------------------------------------------------------ SIM3NI
36*       H(1)=DSQRT(2 D)-1 D                                             SIM3NI
37*       H(2)=1 D                                                        SIM3NI
38*       E=1 D-6                                                         SIM3NI
```

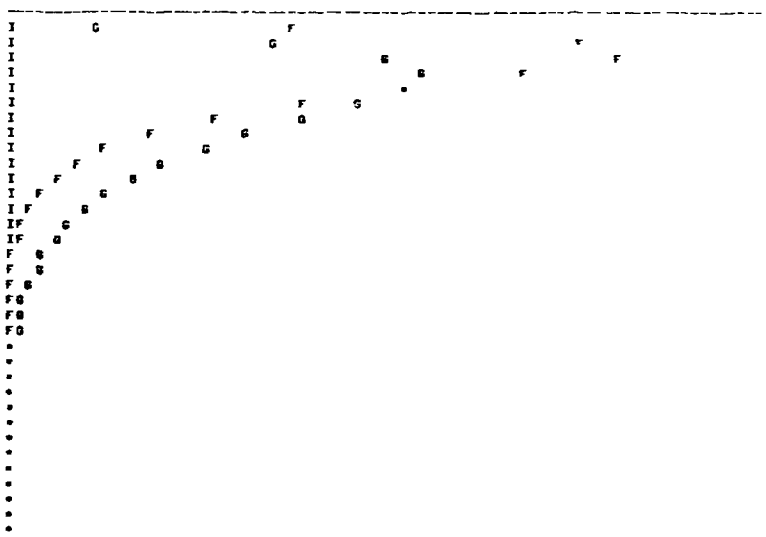
```
39*       MAXIT=200                                                      SIM3NI
40*       REL= TRUE                                                      SIM3NI
41*       PPINT 9                                                        SIM3NI
42*     9 FORMAT(1X,/ 1X  'VALORES COMPARATIVOS DE LAS FUNCIONES F Y G'  )  SIM3NI
43*       DO 2 I=1 60                                                    SIM3NI
44*       U=U+ 25/10                                                     SIM3NI
45*       AINT=SIM3NI(F1 A,E,REL,MAXIT,1 D,$3)                           SIM3NI
46*       F=C*AINT*DEXP(-DSQRT(U)*(N-k-2)/2  )                           SIM3NI
47*       G=((DEXP(-DSQRT(U)*((N-K-2)/2 )))*(1 -DEXP(-DSQPT(U)))---(K-2))  SIM3NI
48*       G=G/(2*8)                                                      SIM3NI
49*       II=I+1                                                         SIM3NI
50*       JF=(90*F)/10+1                                                 SIM3NI
51*       JG=(90*G)/10+1                                                 SIM3NI
52*       IF(JF NE JG) GO TO 22                                          SIM3NI
53*       V(II,JF)='*'                                                   SIM3NI
54*       GOTO 23                                                        SIM3NI
55*    22 V(II,JF)='F'                                                   SIM3NI
56*       V(II,JG)='G'                                                   SIM3NI
57*    23 G1(II)=G                                                       SIM3NI
58*       F2(II)=F                                                       SIM3NI
59*       U1(II)=U                                                       SIM3NI
60*       PRINT 6,U,F,G                                                  SIM3NI
61*     6 FORMAT(1X,'U= 'D9 3,10X,'10X,'F(U)= 'D12 67,10X,'G(X)= 'D12 6,/)  SIM3NI
62*       GOTO 2                                                         SIM3NI
63*     3 PRINT 7,U                                                      SIM3NI
64*     7 FORMAT(1X,'ERROR EN U=' D9 3)                                  SIM3NI
65*     2 CONTINUE                                                       SIM3NI
66* C ---------------------------------------------------------------    SIM3NI
67* C GRAFICA DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD F Y G                         SIM3NI
68* C ---------------------------------------------------------------    SIM3NI
69*       PRINT 31                                                       SIM3NI
70*    31 FORMAT(1H1)                                                    SIM3NI
71*       PRINT 30,((U1(I),F2(I),G1(I),(V(I,J),J=1,81)),I=1,61)          SIM3NI
72*    30 FORMAT(1X,D9 3,1X,D12 5,1X D12 5,10X,81A1)                     SIM3NI
73*       STOP                                                           SIM3NI
74*       END                                                            SIM3NI


END OF COMPILATION       NO DIAGNOSTIC


U=  250-001    F(U)= .336041+001    G(X)= .105735+001
U= .500-001    F(U)= .686483+001    G(X)= .321111+001
U= .750-001    F(U)= .722893+001    G(X)= .455085+001
U=  100+000    F(U)= .612100+001    G(X)= .492349+001
U= .125+000    F(U)= .470783+001    G(X)= .467910+001
U= .150+000    F(U)=  345121+001    G(X)= .413799+001
U= .175+000    F(U)= .246709+001    G(X)= .350369+001
U= .200+000    F(U)= .174066+001    G(X)= .288556+001
U= .225+000    F(U)=  122053+001    G(X)= .233355+001
U= .250+000    F(U)= .854046+000    G(X)= .186422+001
U= .275+000    F(U)= .597888+000    G(X)= .147708+001
```

```
U=  .300+000    F(U)=  .419435+000    G(X)=  .116392+001
U=  .325+000    F(U)=  .295162+000    G(X)=  .913881+000
U=  .350+000    F(U)=  .208492+000    G(X)=  .715980+000
U=  .375+000    F(U)=  .147886+000    G(X)=  .560267+000
U=  .400+000    F(U)=  .105359+000    G(X)=  .438223+000
U=   425+000    F(U)=  .754015-001    G(X)=  .342802+000
U=  .450+000    F(U)=  .542088-001    G(X)=  .268300+000
U=   475+000    F(U)=  .391504-001    G(X)=  .210167+000
U=  .500+000    F(U)=  .284028-001    G(X)=  .164808+000
U=  .525+000    F(U)=  .206973-001    G(X)=  .129402+000
U=  .550+000    F(U)=  .151480-001    G(X)=  .101744+000
U=  .575+000    F(U)=  .111337-001    G(X)=  .801179-001
U=  .600+000    F(U)=  .821729-002    G(X)=  .631876-001
U=  .625+000    F(U)=  .608932-002    G(X)=  .499159-001
U=  .650+000    F(U)=  .453015-002    G(X)=  .394973-001
U=  .675+000    F(U)=  .338309-002    G(X)=  .313059-001
U=  .700+000    F(U)=  .253585-002    G(X)=  .248553-001
U=  .725+000    F(U)=  .190763-002    G(X)=  .197675-001
U=  .750+000    F(U)=  .144006-002    G(X)=  .157477-001
U=  .775+000    F(U)=  .109078-002    G(X)=  .125666-001
U=  .800+000    F(U)=  .828939-003    G(X)=  .100448-001
U=  .825+000    F(U)=  .631965-003    G(X)=  .804248-002
U=  .850+000    F(U)=  .483291-003    G(X)=  .644984-002
U=  .875+000    F(U)=  .370707-003    G(X)=  .518098-002
U=  .900+000    F(U)=  .285181-003    G(X)=  .416840-002
U=  .925+000    F(U)=  .220010-003    G(X)=  .335901-002
U=  .950+000    F(U)=  .170201-003    G(X)=  .271099-002
U=  .975+000    F(U)=  .132022-003    G(X)=  .219134-002
U=  .100+001    F(U)=  .102674-003    G(X)=  .177396-002
U=  .102+001    F(U)=  .800521-004    G(X)=  .143821-002
U=   105+001    F(U)=  .625686-004    G(X)=  .116770-002
U=  .107+001    F(U)=  .490209-004    G(X)=  .949436-003
U=  .110+001    F(U)=  .384964-004    G(X)=  .773054-003
U=  .112+001    F(U)=  .303003-004    G(X)=   630312-003
U=  .115+001    F(U)=  .239020-004    G(X)=  .514626-003
U=  .117+001    F(U)=  .188955-004    G(X)=  .420735-003
U=  .120+001    F(U)=  .149691-004    G(X)=  .344427-003
U=  .122+001    F(U)=  .118830-004    G(X)=  .282323-003
U=  .125+001    F(U)=  .945195-005    G(X)=  .231711-003
U=  .127+001    F(U)=  .753296-005    G(X)=  .190409-003
U=  .130+001    F(U)=  .601502-005    G(X)=  .156662-003
U=   132+001    F(U)=  .481189-005    G(X)=  .129051-003
U=  .135+001    F(U)=  .383641-005    G(X)=  .106432-003
U=  .137+001    F(U)=  .309614-005    G(X)=  .878806-004
U=  .140+001    F(U)=  .249006-005    G(X)=  .726456-004
U=  .142+001    F(U)=  .200602-005    G(X)=  .601195-004
U=  .145+001    F(U)=  .161875-005    G(X)=  .498084-004
U=  .147+001    F(U)=  .130837-005    G(X)=  .413107-004
U=  .150+001    F(U)=  .105917-005    G(X)=  .342995-004
```

000	000000	000000
250-001	336041+001	105735+001
500-001	686483+001	321111+001
750-001	722893+001	455085+001
100+000	612100+001	492349+001
125+000	470783+001	467910+001
150+000	345121+001	413799+001
175+000	246709+001	350369+001
200+000	174066+101	288566+001
225+000	122053+001	233355+001
250+000	854046+000	186422+001
275+000	597888+000	147708+001
300+000	419435+000	116392+001
325+000	295162+000	913881+000
350+000	208402+000	715980+000
375+000	147886+000	560267+000
400+000	105359+000	438223+000
425+000	754015-001	342802+000
450+000	542088-001	268300+000
475+000	391504-001	210167+000
500+000	284028-001	164808+000
525+000	206973-001	129402+000
550+000	151480-001	101744+000
575+000	111337-001	801179-001
600+000	821729-002	631876-001
625+000	608932-002	499159-001
650+000	453015-002	394973-001
675+000	338309-002	313059-001
700+000	253585-002	248553-001
725+000	190763-002	197675-001
750+000	144006-002	157477-001
775+000	109078-002	125666-001
800+000	828939-003	100448-001
825+000	631[illegible]-003	804248-002
850+000	483291-003	644984-002
875+000	370707-003	518098-002
900+000	285181-003	416840-002
925+000	220010-003	335901-002
950+000	170201-003	271099-002
975+000	132022-003	219134-002
100+001	102674-003	177396-002
102+001	800521-004	143821-002
105+001	625686-004	116770-002
107+001	490209-004	949436-003
110+001	384964-004	773054-003
112+001	303003-004	630312-003
115+001	239020-004	514626-003
117+001	188955-004	420[illegible]55-003
120+001	149691-004	344427-003
122+001	118830-004	282323-003
125+001	945195-005	231711-003
127+001	753296-005	190409-003
130+001	601502-005	156662-003
132+001	481189-005	129051-003
135+001	385641-005	106432-003
137+001	309614-005	878806-004
140+001	249006-005	726456-004
142+001	200602-005	601195-004
145+001	161875-005	498084-004
147+001	130837-005	413107-004
150+001	105917-005	342995-004



4. DETECCIÓN DE OUTLIERS

Mediante el teorema 2.1 hemos obtenido la función de densidad de el cuadrado de la distancia entre la matriz de suma de cuadrados y suma de productos de una muestra aleatoria de tamaño n extraida de una población $N_2(\mu, \Sigma)$ no singular y la matriz de s. c y s. p. de $n - k$ de estas observaciones.

Debido a que se pueden extraer de $\binom{n}{k}$ formas diferentes estas $n - k$ observaciones de entre las n de la muestra para dada k fijo variando dentro de las condiciones del teorema 2.1. Por otro lado bajo la hipótesis de que los elementos de la muestra de tamaño n pertenecen a la misma población $N_2(\mu, \Sigma)$ se tendrá que $\exists\ q \in \mathbb{R}\ q > 0$ tal que:

$$d^2[S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}] < q \qquad \forall i, i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}$$

y por tanto

$$\max_i d^2[S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}] \leqslant q$$

Evidentemente si $\max_i d^2[S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}] > q$ esto se interpretaria afirmando que los n elementos que componen la muestra no pertenecen a la misma población. Además los k elementos que se han suprimido de la muestra para obtener $S_{(n-k)}$ serían los elementos que no pertenecen a la población $N_2(\mu, \Sigma)$ ya que al añadir estos k elementos a la muestra de tamaño $n - k$ se produce una dispersión que hace que la distancia entre dichas matrices sobrepase a esa cota. Estos k elementos serán los posibles outliers para esa distribución $N_2(\mu, \Sigma)$.

Al no ser los estadísticos $\{d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)});\ i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}\}$ independientes, vamos a recurrir a hallar una cota superior para la cola de la distribución del estadístico $\max_i d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)})$. Es decir acotaremos

$$P\left[\max_i d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}) > q\right]$$

Si definimos C_i como el suceso $\{d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}) > q\}$ para $i = 1, 2, \ldots, \binom{n}{k}$, entonces

$$P\left[\max_i d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}) > q\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{\binom{n}{k}} C_i\right] \leqslant \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} P(C_i) =$$

$$= \binom{n}{k} P(C_i) = \binom{n}{k} P[d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}) > q]$$

sin embargo interesa trabajar con la variable aleatoria X cuya función de densidad viene dada en el teorema 3.2. Por lo que tendremos.

$$P\left[\max_i d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)}) > q_\alpha\right] \leqslant \binom{n}{k} P\left[d^2(S_{(n-k)}, S_{(n)}) > q_\alpha\right] \leqslant$$

$$\leqslant \binom{n}{k} P[X > q_\alpha] = \alpha$$

En definitiva el proceso a seguir sería el siguiente:

Dado un nivel de significación α se determina el cuantil q_α mediante la función de distribución de la variable aleatoria X.

A continuación calcularemos el valor del estadístico $\max_i d^2(S^{(i)}_{(n-k)}, S_{(n)})$ y la regla de decisión sería la siguiente:

Si

$$\max_i d^2(S_{(n-k)}, S_{(n)}) > q_\alpha$$

los n elementos que componen la muestra no pertenecen a la misma población, siendo considerados como outliers los k elementos que se han suprimido de la muestra para obtener $S_{(n-k)}$.

SUMMARY

We present in this paper a procedure for the detection of outliers for data taken from bivariant normal populational.

The procedure in question appears as a function of the square of the distance between matrices of sums of squares and sums of products of particular data. Such a distance has obtained from the Maas differential metric form.

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON T. W. (1958). An introduction to multivariate statistical analysis. Wiley

FISHER R. A. (1939). The sampling distribution of some statistics obtained from non-linear equations. Annals of Eugenics Vol. 9 pp. 238-249

HSU P. L. (1939) On the distribution of roots of certain determinantal equations. Annals of Eugenics Vol. 9 pp. 250-258.

KOBAYASHI S. and NOMIZU K. (1963). Foundation of differential geomatry. Vol. 1. Wiley Interscience

KRISHNAIAH P. R. (1978). Some recent developments on real multivariate distribution. In Developments in Statistics, Krishnaiah (ed.). Academic Press.

MAAS H. (1955). Die bestimmung der dirichletreihem mit groseencharakteren zu den modulformen n – ten grades. J. Indian Math. Soc. Vol. 19 pp. 1-23.

MUÑOZ J. (1980). Algunas técnicas sobre detección de outliers. Public. Universidad de Sevilla.

ROY S. N. (1939). *P*-statistics, or some generalizations in analysis of variance appropriate to multivariate problems. Sankhya Vol. 4 pp. 381-396.

WILKS S. S. (1962). Mathematical statistics. Wiley.