Pub. Mat. UAB
N° 20 Set. 1980
Actes VII JMHL

SOBRE CIERTAS EXPRESIONES DE LA FUNCION RANGO, INDEPENDIENTES DE LA TEORIA DE ORDINALES

Mario de J. Pérez-Jiménez

Facultad de Matemáticas
Universidad de Barcelona

In the present work we obtain several representations of the rank function associated to a well founded relation in terms of transitive and supertransitive closures, by means of transfinite recursion theorems concerning these relations and with no use of ordinals theory . Moreover, specifical representations are obtained for the ordinary rank function in certain transitive classes .

Notación: Representaremos por $\mathcal{U}$ la clase universal, por $\mathcal{O}$ la clase de los números ordinales y por ϕ^* la gráfica vacía. Si R es una relación bien fundamentada sobre una clase A entonces notaremos por R^t la extensión transitiva de R, por $S_R(x)$ el R-segmento inicial de extremo $x \in A$ y por $M_R(A)$ la clase de los elementos R-minimales de A. Si A es una clase notaremos por $\hat{A}$ y $\hat{A}^s$, respectivamente, las clausuras transitiva y supertransitiva de A ; por $\check{A}$ el interior transitivo de A ; por $\in_A$ la restricción a A de la $\in$-relación; por $(\hat{a})_A = S_{\in^t_A}(a)$ $(a \in A)$; y por A^+ la clase siguiente de A .

Teorema 1

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional ρ^R_A de A en $\mathcal{U}$ tal que :

i) dom $\rho^R_A = A$; ii) $(\forall x)\ (x \in M_R(A) \Longrightarrow \rho^R_A(x) = 0)$; y

iii) $(\forall x)\ (x \in A - M_R(A) \Rightarrow \rho^R_A(x) = \bigcup_{y \in S_R(x)} [\rho^R_A(y)]^+)$.

Además, en tal situación $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \rho^R_A(x) \in \mathcal{O})$ y (recρ^R_A es una clase ordinal).

demostración: La existencia y unicidad de ρ^R_A resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R-gráfica de recurrencia H de A en $\mathcal{U}$ definida así : $H(\phi^*) = 0$ y si $x\in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_R(x);\mathcal{U}) - \{\phi^A\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y\in S_R(x)} [F(y)]^+$.

Finalmente , por R-inducción transfinita se establece que $(\forall x)(x\in A \Rightarrow \Rightarrow T(\rho_A^R(x)))$ y que $T(\text{rec } \rho_A^R)$.

Definición:Bajo la nomenclatura del teorema 1,la gráfica ρ_A^R se denomina función rango sobre A asociada a R.Si $A = \mathcal{U}$ y $R = \in_{\mathcal{U}}$ entonces notaremos $\text{rank} = \rho_{\mathcal{U}}^{\in_{\mathcal{U}}}$ (es la función rango ordinaria sobre la clase universal) .

Corolario:Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional ρ_A de A en $\mathcal{U}$ tal que : i) dom $\rho_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\in_A}(A) \Rightarrow \rho_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x\in A - M_{\in_A}(A) \Rightarrow \rho_A(x) = \bigcup_{y\in x\cap A} [\rho_A(y)]^+)$.

Además , en tal situación se verifica :

1.- $\rho_{A|\check{A}} = \text{rank}_{|\check{A}}$ y $(\forall x)(x\in\check{A} \Rightarrow \text{rank}(x) = \text{rec } \rho_{A|x})$.

2.- $\rho_{\mathcal{U}} = \text{rank}$ y $(\forall x)(x\in\mathcal{U} \Rightarrow \text{rank}(x) = \text{rec } \rho_{\mathcal{U}|x})$.

3.- Si A es una clase propia transitiva entonces $\text{rec } \rho_A = \Theta$.

4.- Si A es un conjunto transitivo entonces $\text{rec } \rho_A = \text{rank}(A)$.

demostración: Aplíquese el teorema 1 a $R = \in_A$.

1.- Basta aplicar R-inducción transfinita sobre $\check{A}$ y tener presente que si $a\in\check{A}$ entonces $a \cap A = a$.

3.- Basta observar que si A es una clase propia entonces

$$(\forall x)(x \in \Theta \Rightarrow (\exists y)(y\in A \wedge \text{rank}(y) > x)) .$$

4.- Basta tener presente que $\text{rank}(A) = \bigcup_{x\in A} [\text{rank}(x)]^+$ y $T(\text{rec } \rho_A)$.

Teorema 2

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional F_A^R de A en $\mathcal{U}$ tal que :

i) dom $F_A^R = A$; ii) $(\forall x)\ (x \in M_R(A) \Rightarrow F_A^R(x) = 0)$; y

iii) $(\forall x)\ (x\in A - M_R(A) \Rightarrow F_A^R(x) = \widehat{\bigcup_{y\in S_R(x)} \{F_A^R(y)\}})$.

Además , en tal situación se verifica $F_A^R = \rho_A^R$.

demostración:La existencia y unicidad de F_A^R resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R-gráfica de recurrencia H de A en $\mathcal{U}$ definida así : $H(\phi^*) = 0$ y si $x\in A$ y $F\in \mathcal{G}(S_R(x);\mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \widehat{\bigcup_{y\in S_R(x)} \{F(y)\}}$.

Finalmente , por R-inducción transfinita se establece que $F_A^R = \rho_A^R$.

Corolario: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional F_A de A en $\mathcal{U}$ tal que : i) dom $F_A = A$; ii) $(\forall x)\left(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow F_A(x) = 0\right)$ y iii) $(\forall x)\left(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow F_A(x) = \widehat{\bigcup_{y \in x \cap A} \{F_A(y)\}}\right)$.

Además, en tal situación se verifica $F_A = \rho_A$.

Del corolario anterior resulta que $F_{\mathcal{U}} = \mathrm{rank}$; en consecuencia

$$(\forall x)\left(x \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathrm{rank}(x) = \widehat{\bigcup_{y \in x} \{\mathrm{rank}(y)\}}\right).$$

Teorema 3

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional G_A^R de A en $\mathcal{U}$ tal que :

i) dom $G_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow G_A^R(x) = 0)$ y

iii) $(\forall x)\left(x \in A - M_R(A) \Rightarrow G_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_{R^t}(x)} \{G_A^R(y)\}\right)$.

Además, en tal situación se verifica $G_A^R = F_A^R = \rho_A^R$.

demostración: La existencia y unicidad de G_A^R resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R^t-gráfica de recurrencia H de A en $\mathcal{U}$ definida así : $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{F}(S_{R^t}(x); \mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_{R^t}(x)} \{F(y)\}$; y observando que $M_R(A) = M_{R^t}(A)$.

Finalmente, por R-inducción transfinita se establece que $G_A^R = \rho_A^R$.

Corolario 1: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional G_A de A en $\mathcal{U}$ tal que : i) dom $G_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow G_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)\left(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow G_A(x) = \bigcup_{y \in (\hat{x})_A} \{G_A(y)\}\right)$.

Además, en tal situación se verifica $G_A = F_A = \rho_A$.

Corolario 2: Si A es una clase transitiva entonces existe una única gráfica funcional G_A de A en $\mathcal{U}$ tal que : i) dom $G_A = A$; ii) $G_A(0) = 0$ y iii) $(\forall x)\left(x \in A - \{0\} \Rightarrow G_A(x) = \bigcup_{y \in x} \{G_A(y)\}\right)$.

Además, en tal situación se verifica $G_A = \mathrm{rank}|_A$

Corolario 3: Si A es un conjunto entonces $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\hat{A})$.

Teorema 4

Si A es una clase y R es una relación bien fundamentada sobre A entonces existe una única gráfica funcional J_A^R de A en $\mathcal{U}$ tal que :

i) dom $J_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow J_A^R(x) = 0)$ y

iii) $(\forall x)\left(x \in A - M_R(A) \Rightarrow J_A^R(x) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \widehat{\{J_A^R(y)\}}\right)$.

Además, en tal situación se verifica $J_A^R = G_A^R = F_A^R = \rho_A^R$

demostración: La existencia y unicidad de $\mathcal{J}_A^R$ resulta de la aplicación del teorema de recurrencia transfinita a la R-gráfica de recurrencia H de A en $\mathcal{U}$ definida así : $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_R(x);\mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_R(x)} \widehat{\{F(y)\}}$.

Finalmente , por R-inducción transfinita se establece que $\mathcal{J}_A^R = F_A^R$.

Corolario: Si A es una clase entonces existe una única gráfica funcional $\mathcal{J}_A$ de A en $\mathcal{U}$ tal que : i) dom $\mathcal{J}_A = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow \mathcal{J}_A(x) = 0)$ y iii) $(\forall x)(x \in A - M_{\epsilon_A}(A) \Rightarrow \mathcal{J}_A(x) = \bigcup_{y \in x \cap A} \widehat{\{\mathcal{J}_A(y)\}})$.

Del corolario anterior resulta que $\mathcal{J}_{\mathcal{U}} = \text{rank}$; en consecuencia

$$(\forall x)(x \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{rank}(x) = \bigcup_{y \in x} \widehat{\{\text{rank}(y)\}}) .$$

Teorema 5

Si A es una clase transitiva tal que todos sus elementos son cerrados por clausuras transitivas y R es una relación bien fundamentada sobre A verificando $(\forall x)(x \in A \Rightarrow S_R(x) \subset \hat{x} \wedge P_R(\hat{x}) = \{y \in A : S_R(y) \subset \hat{x}\} \in \mathcal{U})$ entonces existe una única gráfica funcional L_A^R de A en $\mathcal{U}$ tal que :

i) dom $L_A^R = A$; ii) $(\forall x)(x \in M_R(A) \Rightarrow L_A^R(x) = 0)$ y

iii) $(\forall x)(x \in A - M_R(A) \Rightarrow L_A^R(x) = \bigcup_{y \in \bigcup_{z \in S_R(x)} P_R(\hat{z})} \widehat{\{L_A^R(y)\}})$.

demostración: Se considera la relación T sobre A definida así: si $(x,y) \in A \times A$ entonces $(x,y) \in T \Leftrightarrow (\exists z)(z \in S_R(y) \wedge S_R(x) \subset \hat{z})$. Se demuestra que T es bien fundamentada sobre A y se aplica el teorema de recurrencia transfinita a la T-gráfica de recurrencia H de A en $\mathcal{U}$ definida así: $H(\phi^*) = 0$ y si $x \in A$ y $F \in \mathcal{G}(S_T(x);\mathcal{U}) - \{\phi^*\}$ entonces $H(F) = \bigcup_{y \in S_T(x)} \widehat{\{F(y)\}}$, observando que $S_T(x) = \bigcup_{z \in S_R(x)} P_R(\hat{z})$ y que $M_T(A) = M_R(A)$.

Corolario: Si A es una clase supertransitiva tal que todos sus elementos son cerrados por clausuras transitivas , entonces existe una única gráfica funcional L_A de A en $\mathcal{U}$ tal que : i) dom $L_A = A$; ii) $L_A(0) = 0$ y iii) $(\forall x)(x \in A - \{0\} \Rightarrow L_A(x) = \bigcup_{y \in \hat{x}^s} \widehat{\{L_A(y)\}})$.

Además , en tal situación se verifica $L_A = \text{rank}_{|A}$

demostración: Obsérvese que si $\underline{a}$ es un conjunto cerrado por clausuras transitivas entonces $\hat{a}^s = \bigcup_{x \in a} P(\hat{x})$.

Bibliografía

1.-ENDERTON H.B."Elements of set theory".Academic Press.New York(1977).

2.-JECH T. "Set theory" . Academic Press . New York (1978) .

3.- LEVY A. "Basic set theory" . Springer-Verlag . Londres (1979) .

4.- TARSKI A."The notion of rank in axiomatic set theory and some of its applications" .Bull.Amer.Math.Soc.61(1955).p.443