

ESTUDIO COMPARATIVO DE DIFERENTES TÉCNICAS DE CUANTIFICACIÓN

I. Jurado, P. Millán, M.G. Ortega y F.R. Rubio
Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, España
ijurado, pmillan, ortega@cartuja.us.es y rubio@esi.us.es

Resumen

En este artículo se estudia el problema de estabilizar un sistema lineal e invariante en el tiempo usando medidas muestreadas y cuantificadas del estado, de manera que la información sobre el mismo está limitada. Se estudian varias técnicas de cuantificación, comparándolas entre sí. Estas comparaciones se llevan a cabo diseñando los esquemas de cuantificación/codificación correspondientes a un vehículo basado en péndulo invertido.

Palabras clave: Cuantificación, Control con información limitada, Control a través de redes.

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo estudia el problema de estabilizar un sistema lineal e invariante a partir de información limitada del estado. Algunos trabajos que han tratado este problema son [6], [7], [8] y [3].

El problema de estabilización con información limitada surge, por ejemplo, cuando las medidas del estado se transmiten a través de un canal de comunicación con capacidad limitada. El término *información limitada* se refiere a los siguientes procesos:

- **Muestreo:** El controlador recibe medidas en instantes discretos $0, \tau, 2\tau, \dots$, donde $\tau > 0$ es un *tiempo de muestreo* fijo.
- **Cuantificación/Codificación:** En cada uno de estos instantes de muestreo, las medidas recibidas por el controlador deben ser números contenidos en un conjunto numerable finito $\{0, 1, \dots, N\}$ donde N es un número entero positivo fijo.

Por tanto, los datos disponibles para el controlador consisten en una serie de números enteros:

$$q_0(x(0)), q_1(x(\tau)), q_2(x(2\tau)), \dots$$

donde $q_k(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$ es, para cada k , una *función de codificación*. Las distintas técnicas

que se consideran en este trabajo son *cuantificación lineal*, *cuantificación logarítmica* y *cuantificación variable*.

La cuantificación clásica lineal, se puede englobar dentro de la clase de cuantificadores *fijos*. Éstos son aquellos cuyos parámetros no varían con el tiempo. En el caso de la cuantificación lineal, los intervalos de cuantificación son uniformes y están centrados en el origen del espacio de estados del sistema.

La cuantificación logarítmica que se estudia y aplica en este trabajo fue desarrollada en [3]. En este caso también es fija, pero la división de los intervalos de cuantificación es de tipo logarítmica.

Por último se considera un caso de cuantificación variable, desarrollada en [6]. Esta clase de cuantificadores considera posible variar en cada instante de muestreo los parámetros de cuantificación en función de la evolución del estado del sistema.

A continuación se detalla la organización de este trabajo. En la sección 2 se estudian en detalle las técnicas de cuantificación referidas. En la sección 3 se toma un modelo del sistema que se ha utilizado para el estudio comparativo. En la sección 4, se aplican y resuelven las cuantificaciones anteriormente mencionadas para el modelo particular, y muestran distintas simulaciones. Puede verse cómo el sistema en bucle cerrado es estabilizado y se comparan los resultados obtenidos con las distintas cuantificaciones. Por último, en la sección 5 se presentan algunas conclusiones.

2. TÉCNICAS DE CUANTIFICACIÓN

2.1. CUANTIFICACIÓN LOGARÍTMICA

En esta sección se describe cómo un cuantificador logarítmico con un número finito de niveles de cuantificación es suficiente para alcanzar la *estabilidad práctica* del sistema. Los resultados se enuncian para sistemas en tiempo discreto, si bien pueden ser extendidos a sistemas en tiempo continuo con algunas modificaciones.

Dado el sistema en tiempo discreto

$$x^+ = Ax + Bu \quad (1)$$

definimos el concepto de cuantificador simétrico finito como

Definición 1: Un cuantificador simétrico finito de orden N es una función $\mathcal{F}_N : X \rightarrow \mathcal{U}_N$ que toma valores en el conjunto finito:

$$\mathcal{U}_N = \{u_i \in \mathbb{R} : i = -(N-1), \dots, 0, \dots, (N-1), \\ u_i = -u_{-i}\}$$

Definición 2: Un cuantificador ρ -logarítmico simétrico finito de orden N es un cuantificador simétrico finito donde:

$$\mathcal{U}_N = \{-u_0, -\rho u_0, \dots, -\rho^{N-1}u_0, 0, \\ \rho^{N-1}u_0, \dots, \rho u_0, u_0 : u_0 \in \mathbb{R}\} \quad (2)$$

donde $0 < \rho < 1$.

2.1.1. Estabilizabilidad cuadrática relajada

La inclusión de cuantizadores en el lazo de control degrada la *calidad* de la información disponible para control. Una consecuencia práctica de este hecho es, tal como se describe en [2], la imposibilidad de conducir el estado del sistema asintóticamente al origen según el sentido clásico.

Por este motivo introducimos la noción de *estabilizabilidad en sentido práctico* que es una versión relajada de estabilizabilidad cuadrática ([3], [4], [9] y [5]).

Definición: El sistema (1) es estabilizable en sentido práctico si existe una función de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, $P > 0$, tal que, para cualquier conjunto compacto \mathcal{C} que contenga el origen, y cualquier conjunto $\Omega_s \subset \mathcal{C}$ con $\Omega_s = \{x \in X : V(x) \leq \beta_s\}$, existe un controlador por realimentación de estado $f(x)$, función de \mathcal{C} y β_s , tal que $V(x) > V(x^+)$ para todo $x \in \mathcal{C} \setminus \Omega_s$, y tal que $x^+ \in \Omega_s$ cuando $x \in \Omega_s$.

Según la definición anterior, Ω_s es un atractor de \mathcal{C} , de forma que las trayectorias que comienzan en \mathcal{C} fuera de Ω_s son atraídas hacia Ω_s y aquellas que comienzan en Ω_s nunca abandonan el conjunto.

2.1.2. Estabilidad y construcción del cuantificador logarítmico

Teorema 1: (ver [3])

Si el sistema (1) es estabilizable, entonces es *estabilizable en sentido práctico* por un cuantificador finito ρ -logarítmico de orden N suficiente.

En particular, dados \mathcal{C} y β_s , con β_s tal que $\Omega_s \subset \mathcal{C}$, y β_0 tal que:

$$\Omega_0 = \{x \in X : V(x) \leq \beta_0\} \supseteq \mathcal{C} \quad (3)$$

N , el orden del cuantificador, tiene que ser:

$$N \geq \frac{1}{2} \log_{\rho} \left(\frac{\beta_s}{\gamma \alpha_0^2} \right) \quad (4)$$

donde:

$$\alpha_0 = \max_{x \in \Omega} K_{GD} x \quad (5)$$

$K_{GD} = -\frac{B^T P A}{B^T P B}$, y γ es la solución del problema de optimización convexa dado por (6).

$$\begin{aligned} \min \quad & \gamma, \tau \\ & \gamma \Gamma - \bar{A}^T \Pi \bar{A} - \tau \Sigma \geq 0 \\ & \gamma > 0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1} A T$$

$$\Pi = T^T P T$$

y

$$\Sigma = \bar{A}^T \Pi \bar{A} - \Pi$$

siendo:

$$T = [W, K_{GD}^T]$$

donde W forma una base ortonormal del espacio nulo de K_{GD} .

P es la matriz correspondiente a la función de Lyapunov $V(x) = x^T P x$, siendo $P > 0$. Para encontrar esta función de Lyapunov, es necesario perturbar ligeramente con $\varepsilon \rightarrow 0$ el problema LQR

correspondiente al caso de mínima energía de control (8), convirtiéndose éste en (9). De esta manera se garantiza una matriz P definida positiva. La ecuación de Riccati que resulta de (9) es (10):

$$\min \sum_{k=0}^{\infty} u_k^2, \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad \text{estable} \quad (8)$$

$$\min \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon x_k^T S x_k + u_k^2, \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad \text{estable} \quad (9)$$

$$P = A^T P A - \frac{A^T P B B^T P A}{B^T P B} + \varepsilon S \quad (10)$$

donde $S > 0$ y ε es un número positivo muy pequeño.

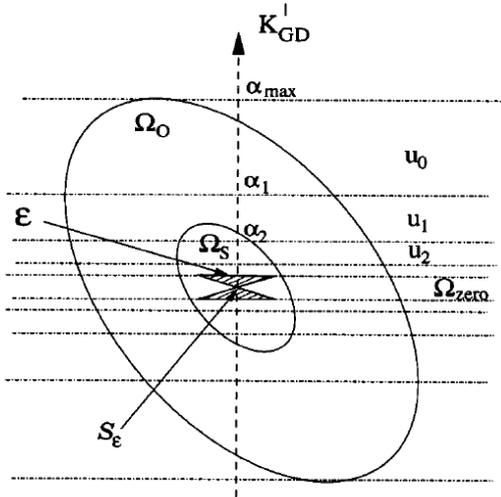


Figura 1: Representación de la cuantificación logarítmica.

La Figura 1 muestra la relación los distintos conjuntos involucrados.

2.2. CUANTIFICACIÓN VARIABLE

En este caso como punto de partida para el problema se parte del siguiente sistema lineal estable en tiempo continuo (11):

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

Teorema 2: (ver [6])

Para el caso de la cuantificación del estado, la estabilidad asintótica global de (11) es posible si se cumplen las siguientes condiciones:

$$Np \geq 2^n \quad (12)$$

y

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} \|e^{At}\|_{\infty} < \lfloor \sqrt[n]{Np} \rfloor \quad (13)$$

Para ver como se logra alcanzar estabilidad asintótica global en el caso de cuantificación variable, se asume que se conoce una cota máxima E_0 para el estado inicial de manera que:

$$\|x(0)\|_{\infty} \leq E_0 \quad (14)$$

Esto significa que el estado del sistema en $t = 0$ está en una caja cuadrada $B_{\infty}^n(0, E_0)$, donde:

$$B_{\infty}^n(0, E_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - 0\|_{\infty} \leq E_0\} \quad (15)$$

La forma de obtener E_0 se detalla en ([6]). Para llevar a cabo la cuantificación se divide la caja $B_{\infty}^n(0, E_0)$ en Np cajas cuadradas iguales, de esta forma, cada una de ellas tienen un lado de $2E_0/\sqrt[n]{Np}$. Tomando el estado estimado $\hat{x}(0)$ como el centro de la caja en la que se encuentre $x(0)$ se obtiene:

$$\|x(0) - \hat{x}(0)\|_{\infty} \leq E_0/\sqrt[n]{Np} \quad (16)$$

De esta forma, para $t \in [0, \tau)$, se toma la señal de control en función de la estimación del estado como:

$$u(t) = K\hat{x}(t) \quad (17)$$

donde

$$\hat{x}(t) = e^{(A+BK)t}\hat{x}(0) \quad (18)$$

y K es cualquier controlador tal que la matriz $(A+BK)$ tiene todos sus autovalores con parte real negativa.

Definiendo $\Lambda = \max_{0 \leq t \leq \tau} \|e^{At}\|_{\infty} \geq 1$, se llega sin dificultad a:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|_\infty \leq \Lambda \|x(0) - \hat{x}(0)\|_\infty \quad (19)$$

para $0 \leq t < \tau$. Esto significa que para $0 \leq t < \tau$, el estado $x(t)$ pertenece a $B_\infty^n(\hat{x}(t), \Lambda E_0 / \sqrt[n]{Np})$.

En $t = \tau$ se divide la caja $B_\infty^n(\hat{x}(\tau^-), \Lambda E_0 / \sqrt[n]{Np})$ en Np cajas cuadradas iguales. Tomando el estado estimado $\hat{x}(\tau)$ como el centro de la caja a la que pertenece $x(\tau)$ se tiene:

$$\|x(\tau) - \hat{x}(\tau)\|_\infty \leq \Lambda E_0 / (\sqrt[n]{Np})^2 \quad (20)$$

Para $t \in [\tau, 2\tau)$, se define la ley de control con la fórmula (17), donde:

$$\hat{x}(t) = e^{(A+BK)(t-\tau)} \hat{x}(\tau) \quad (21)$$

y se llega a:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|_\infty \leq \Lambda \|x(\tau) - \hat{x}(\tau)\|_\infty \quad (22)$$

$$\Lambda \|x(\tau) - \hat{x}(\tau)\|_\infty \leq \Lambda^2 E_0 / (\sqrt[n]{Np})^2$$

para $\tau \leq t < 2\tau$.

Continuando con este proceso se obtiene:

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|_\infty \leq \Lambda^k E_0 / (\sqrt[n]{Np})^k \quad (23)$$

para $\tau \leq t < k\tau$.

Esto implica que si $\Lambda < \sqrt[n]{Np}$, lo cual es equivalente a (13), entonces $\|x(t) - \hat{x}(t)\|_\infty$ converge a 0 cuando $t \rightarrow \infty$. El sistema en bucle cerrado puede escribirse entonces como:

$$\dot{x} = (A + BK)x + e \quad (24)$$

donde $e = BK(\hat{x} - x) \rightarrow 0$.

3. DESCRIPCIÓN DEL PPCAR

Con el fin de realizar el estudio comparativo de las cuantificaciones descritas anteriormente se han realizados diversas simulaciones tomando como

base un vehículo basado en péndulo invertido, denominado PPCar (*Personal Pendulum Car*) [10]. En este apartado se describe el sistema.

El PPCar es un sistema que consta de dos subsistemas: un robot móvil con tracción diferencial y un péndulo invertido sobre el vehículo móvil. El esquema del modelo aparece en la Figura 2.

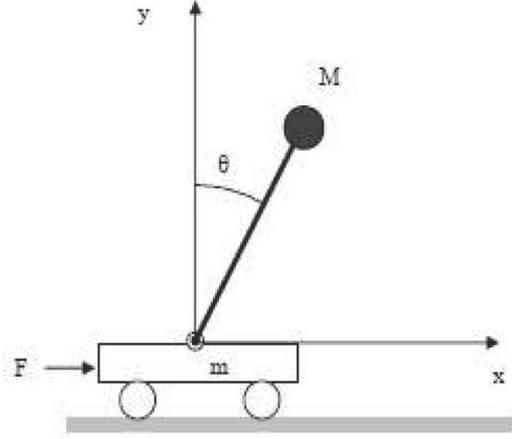


Figura 2: Modelo del PPCar.

Haciendo equilibrio de fuerzas y de momentos se pueden obtener las ecuaciones del modelo del sistema:

$$(M + m)\ddot{x} + Ml\ddot{\theta}\cos\theta - Ml\dot{\theta}^2 = F \quad (25)$$

$$\ddot{x}Ml\cos\theta + Ml^2\ddot{\theta} - Mgl\sin\theta = 0 \quad (26)$$

donde:

m: masa del carro.

M: masa del péndulo.

l: altura del centro de masa.

g: aceleración de la gravedad.

La variable de control del sistema es la fuerza F , las variables de estado son: el ángulo θ , la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la velocidad lineal $\dot{x} = v$.

El sistema se puede linealizar en torno al punto de equilibrio $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$, $v = 0$ y $F = 0$ que es localmente inestable, pudiendo hacer las aproximaciones $\cos\theta \approx 1$ y $\sin\theta \approx 0$, de modo que, las ecuaciones en forma matricial queden:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{ml} & 0 & 0 \\ -\frac{Mg}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{ml} \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \quad (27)$$

4. RESULTADOS

En esta sección se muestran los resultados obtenidos de las simulaciones realizadas. Se han aplicado distintas cuantificaciones y se han comparado los resultados.

Los datos numéricos del sistema son:

$$l = 1m$$

$$m = 35Kg$$

$$M = 70Kg$$

$$g = 9,81m/s^2$$

El controlador K que estabiliza el sistema en bucle cerrado es:

$$K = [1,85 \quad 0,42 \quad 0,093] \cdot 10^3$$

Se toma el siguiente tiempo de muestreo: $\tau = 0,15s$, con condiciones iniciales:

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las Figuras 3, 4 y 5 muestran la evolución del estado del sistema cuando se aplica una la cuantificación variable descrita anteriormente. En este caso, se ha usado una cota máxima E_0 para el valor inicial de cada componente del estado de (1). Además, se han usado 7 intervalos de cuantificación para cada componente del estado, es decir, se han usado 343 intervalos en total.

La Figura 6 muestra la evolución de la tercera componente del estado, v , también en el caso de cuantificación variable, incluyendo además los intervalos de cuantificación. De esta manera, puede observarse cómo en cada instante de muestreo la cuantificación se centra en punto distinto, de forma que va siguiendo al estado, además de ir disminuyendo la amplitud de los intervalos a medida que el estado se aproxima al equilibrio.

Las Figuras 7, 8 y 9 muestran la evolución del estado del sistema cuando se utiliza una cuantificación logarítmica. El número de intervalos de cuantificación en este caso es de 25.

Las Figuras 10, 11 y 12 muestran la evolución del estado del sistema cuando se utiliza una cuantificación lineal.

5. CONCLUSIONES

Este artículo presenta un estudio comparativo de diversas técnicas de cuantificación sobre la esta-

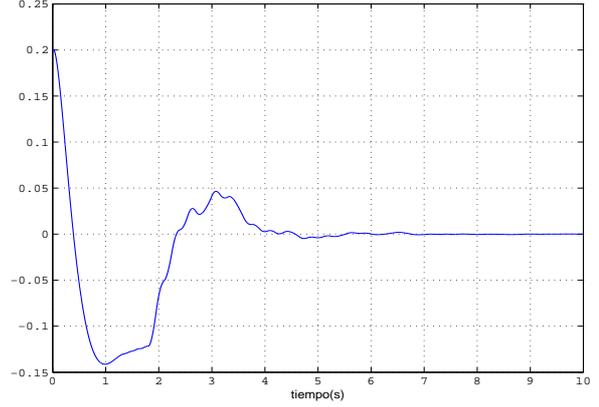


Figura 3: Evolución de θ con la cuantificación variable.

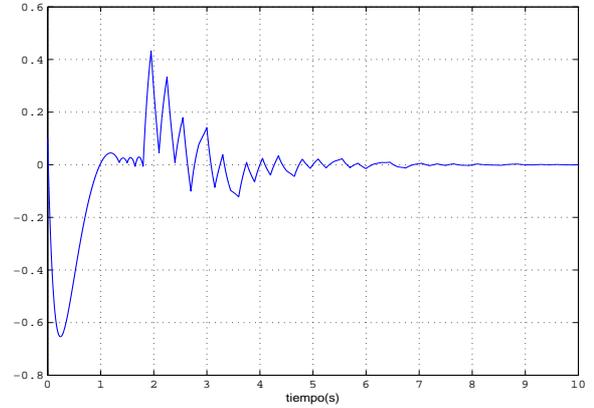


Figura 4: Evolución de $\dot{\theta}$ con la cuantificación variable.

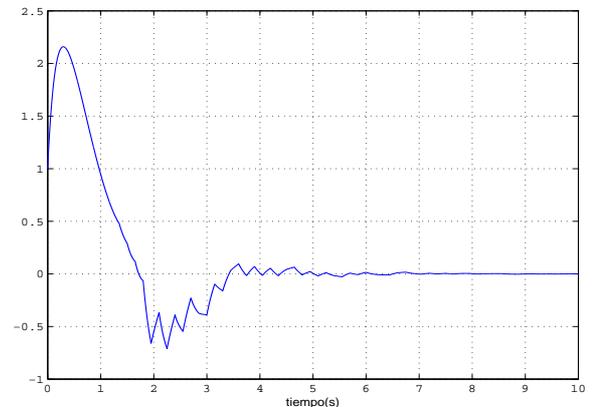


Figura 5: Evolución de v con la cuantificación variable.

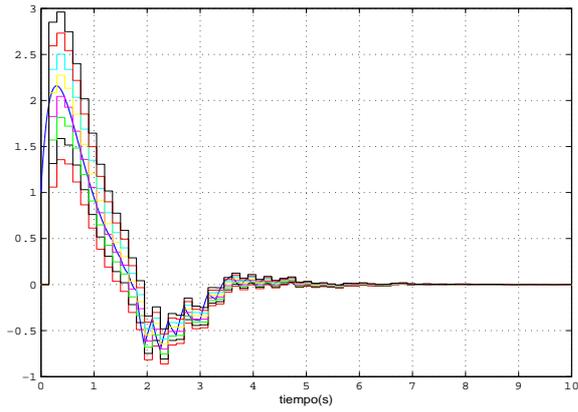


Figura 6: Evolución de v con la cuantificación variable junto con los intervalos de cuantificación.

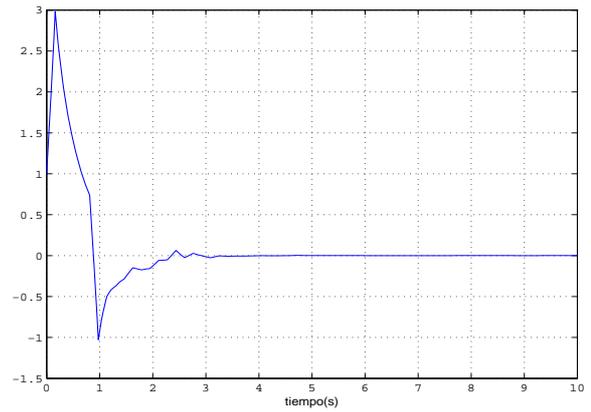


Figura 9: Evolución de v con la cuantificación logarítmica.

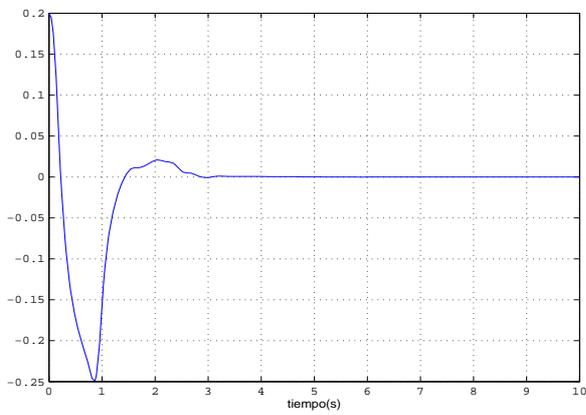


Figura 7: Evolución de θ con la cuantificación logarítmica.

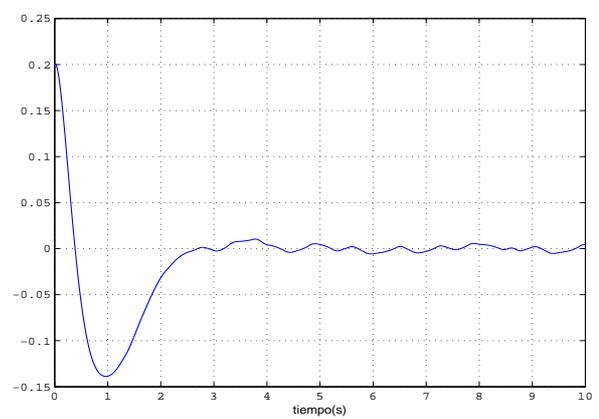


Figura 10: Evolución de θ con la cuantificación lineal.

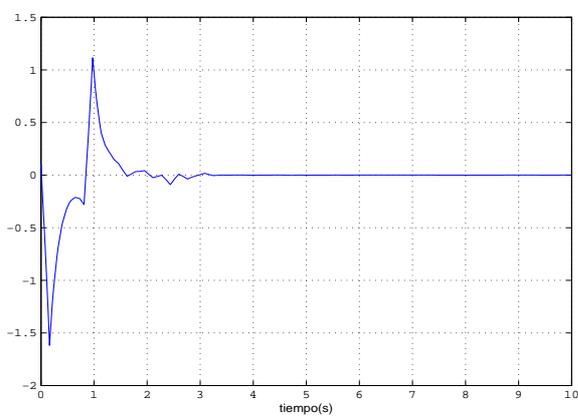


Figura 8: Evolución de $\dot{\theta}$ con la cuantificación logarítmica.

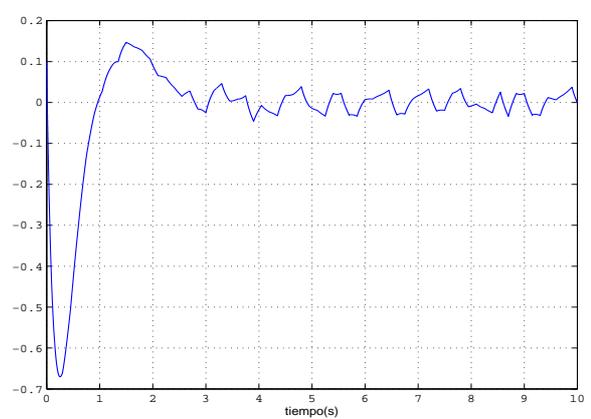


Figura 11: Evolución de $\dot{\theta}$ con la cuantificación lineal.

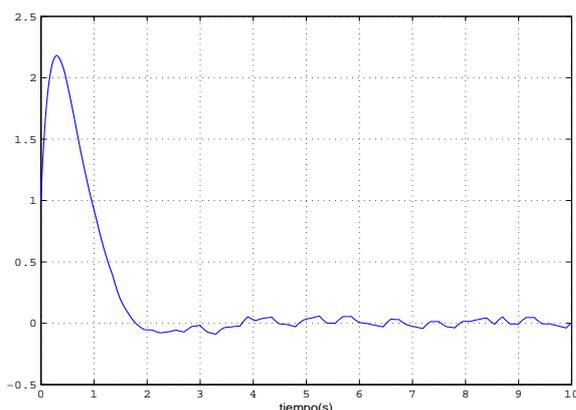


Figura 12: Evolución de v con la cuantificación lineal.

bilización de sistemas con información limitada. Concretamente, se han considerado los casos de cuantificación variable, cuantificación logarítmica y cuantificación lineal.

Se han obtenido resultados a partir de simulaciones realizadas sobre el modelo de un sistema de *Vehículo unipersonal basado en péndulo invertido* denominado PPCar.

Los resultados muestran que todos los cuantificadores logran estabilizar el sistema, si bien las cuantificaciones variable y logarítmica realizan esta tarea de forma más eficaz que el cuantificador lineal, mejorando la suavidad de evolución en el régimen transitorio con un error de régimen permanente considerablemente más reducido.

Desde el punto de vista de la robustez, es importante mencionar que en el esquema de cuantificación variable el sistema de control es muy vulnerable a cualquier tipo de incertidumbre o perturbación. De hecho, cualquier pequeña perturbación inestabiliza el sistema. El cuantificador logarítmico es sin embargo robusto por construcción.

Desde el punto de vista de la robustez de las estrategias, es importante mencionar que en el esquema de cuantificación variable el sistema de control es totalmente vulnerable a cualquier tipo de incertidumbre o perturbación. De hecho, cualquier pequeña perturbación inestabilizaría el sistema. El cuantificador logarítmico es sin embargo robusto por construcción.

En la optimización (minimización) de la *densidad de muestreo* ($\tau \times Np$), el cuantificador logarítmico presenta resultados mucho mejores, estabilizando el sistema con densidades un orden de magnitud inferiores. Por tanto, la cuantificación logarítmica, logra estabilizar el sistema empleando muchos menos intervalos de cuantificación que los necesarios

con la cuantificación variable. Este último aspecto es especialmente relevante por cuanto permite reducir la cantidad de información que es necesario transmitir sobre la red para realizar la misma tarea de control.

Agradecimientos

Los autores agradecen a CICYT por financiar este trabajo bajo el proyecto DPI2007-64697.

Referencias

- [1] Albea, C., Ortega, M. G., Salas, F., Rubio, F. R., (2006) Aplicación del control H_∞ al PPCar, XXVII Jornadas de Automática, Almería.
- [2] Delchamps, D. F., (1990) Stabilizing a linear system with quantized state feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 35, pp. 916-924.
- [3] Elia, N., Mitter, S. K., (2001) Stabilization of linear systems with limited information, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, núm. 9.
- [4] Isidori, A., (1996) Semiglobal robust regulation of nonlinear systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 215, p. 27.
- [5] Khalil, H. K., Esfandiari, F., (1993) Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 38, pp. 1412-1415.
- [6] Liberzon, D., (2002) A note on stabilization of linear systems using coding and limited communication, Proceedings of the 41st IEEE, Conference on Decision and Control.
- [7] Liberzon, D., (2003) Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals, Automatica, vol. 39, pp 1543-1554.
- [8] Liberzon, D., Hespanha, J. P., (2005) Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 50, núm. 6.
- [9] Lin, Z., Saberi, A., (1995) Robust semiglobal stabilization of minimum-phase input-output linearizable systems via partial state and output feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, pp. 1029-1041.
- [10] Viguria, A., Prieto, A., Fiacchini, M., Cano, R., Rubio, F. R., Aracil, J., Canudas-de-Wit, C., (2006) Desarrollo y experimentación de

un vehículo basado en péndulo invertido (PP-Car), Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, vol. 3, núm. 4, pp 54-63.