

IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES MEDIANTE FILTRO DE KALMAN

C. Pérez, F.R. Rubio

Dep. Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad de Sevilla

Camino de los Descubrimientos s/n
41092 - Sevilla (Spain)

e-mail: { cpf@cartuja.us.es, rubio@cartuja.us.es }

Resumen

Se presenta en este artículo una aplicación del filtro de Kalman para sistemas no lineales. El filtro de Kalman es aplicado en el formato extendido para la identificación de parámetros de un sistema dinámico. En concreto se utiliza un sistema mecánico con fricción en el que se identifican los parámetros del sistema.

Palabras clave: Identificación, Kalman

1 Introducción

El filtro de Kalman es una herramienta ampliamente conocida en la teoría de sistema. Este trabajo tiene como objetivo el ilustrar como se aplica la técnica del filtro de Kalman a la identificación de sistemas no lineales.

En concreto se estudiará como se modifica el algoritmo clásico del filtro de Kalman y como se aplica a un caso concreto. El caso práctico elegido es la identificación de un sistema mecánico con presencia de fricción.

2 El filtro de Kalman

Es bien conocido el algoritmo del filtro de Kalman aplicado a sistemas lineales del tipo:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{cases}$$

El conjunto de ecuaciones para el filtro de Kalman en su forma discreta es el siguiente:

$$\hat{x}(k+1|k) = A\hat{x}(k|k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K(k)[z(k) - B\hat{x}(k)] \quad (2)$$

$$K(k) = P(k+1|k)B^T \cdot [BP(k+1|k)B^T + R]^{-1}$$

$$P(k+1|k) = A(k)P(k|k)A(k)^T + Q \quad (3)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k)B]P(k+1|k) \quad (4)$$

donde las matrices Q y R vienen dadas por:

$$R = E[v(t)v(t)^T] \quad (5)$$

$$Q = E[w(t)w(t)^T] \quad (6)$$

Nuestro interés se centra en sistemas no lineales que se expresan de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) + w(t) \\ y(t) &= h(x(t)) + v(t) \end{cases}$$

Para poder aplicar el filtro de Kalman a este tipo de sistema se puede proceder a su linealización, dando lugar a lo que se conoce como el filtro de Kalman *Extendido*. Dicha técnica es aplicada a menudo en sistemas de navegación de robots móviles [1].

La linealización del sistema puede realizarse en torno a un punto fijo de trabajo, pero esto puede producir que la salida del filtro no sea la adecuada si no estamos cerca de ese punto.

Para intentar evitar este problema, en la técnica del filtro de Kalman Extendido se recalcula la linealización del sistema usando las nuevas estimaciones a medida que están disponibles.

De este modo dado un sistema no lineal podemos linealizar de la forma:

$$F(x(k), u(k)) = \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{x=\hat{x}} \quad (7)$$

$$H(x(k)) = \left. \frac{\partial}{\partial x} h(x) \right|_{x=\hat{x}} \quad (8)$$

El conjunto de ecuaciones que definen el algoritmo del filtro de Kalman extendido para un sistema discreto sería:

$$\hat{x}(k+1|k) = f(\hat{x}(k|k), u(k)) \quad (9)$$

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) \quad (10)$$

$$+ K(k)[z(k) - H\hat{x}(k)] \quad (11)$$

$$K(k) = P(k+1|k)H^T \quad (12)$$

$$\cdot [HP(k+1|k)H^T + R]^{-1}$$

$$P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)^T + Q \quad (13)$$

$$P(k+1|k+1) = [I - K(k)H]P(k+1|k) \quad (14)$$

Se puede ver en las ecuaciones anteriores que en la ecuación de predicción del estado aún se conserva el carácter no lineal del sistema.

3 Sistemas con fricción

Como ejemplo de aplicación del algoritmo del filtro de Kalman Extendido se ha elegido un sistema mecánico con fricción [3]. En concreto se aplicará a un motor que mueve una carga donde el fenómeno de fricción es el dominante y no existen efectos debidos a la gravedad.

La ecuación diferencial que gobierna la dinámica del sistema será:

$$\tau = J \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \tau_f(\dot{\theta}) \quad (15)$$

Donde τ_f es el par de fricción que se opone al movimiento, y es una función no lineal de la velocidad del sistema. Así mismo, J es la inercia del sistema y τ es el par motor.

El modelo de fricción elegido para este trabajo es el conocido como *estático*, donde para cada velocidad del sistema se corresponde un par de fricción determinado, excepto para velocidad cero en el que el par será el necesario para mantener la carga en reposo.

La evolución del par de fricción cuando la carga está en movimiento puede verse en la figura 1. Una vez el par motor a superado el par de Stribek F_s , el par inicialmente decae, para después incrementarse linealmente entrado en la zona viscosa. En general los coeficientes F_c , F_s , F_v y B pueden ser distintos según el sentido del movimiento, en este caso se a elegido el subíndice 1 para las velocidades positivas y el subíndice 2 para las negativas. La expresión analítica para la característica

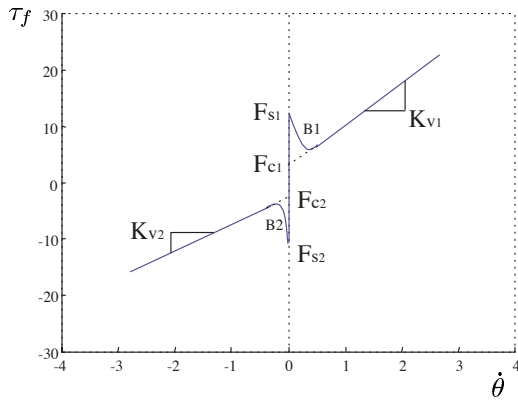


Figura 1: Característica estática de fricción

de fricción estática viene dada por:

$$\begin{aligned} \tau_f = & \left[K_{V1} |\dot{\theta}| + F_{C1} + \right. \\ & \left. (F_{S1} - F_{C1}) e^{-B_1 |\dot{\theta}|} \right] sgn_1(\dot{\theta}) + \\ & \left[K_{V2} |\dot{\theta}| + F_{C2} + \right. \\ & \left. (F_{S2} - F_{C2}) e^{-B_2 |\dot{\theta}|} \right] sgn_2(\dot{\theta}) \quad (16) \end{aligned}$$

Donde las funciones $sgn_1()$ y $sgn_2()$ están definidas por:

$$\begin{aligned} sgn_1(\dot{\theta}) = & \begin{cases} 1 & (\dot{\theta} \geq 0) \\ 0 & (\dot{\theta} < 0) \end{cases} \\ sgn_2(\dot{\theta}) = & \begin{cases} 0 & (\dot{\theta} \geq 0) \\ -1 & (\dot{\theta} < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

En las ecuaciones anterior los parámetros se denominan:

- F_S Fricción de Stribek.
- F_C Fricción de Coulomb.
- K_V Coeficiente de fricción viscosa.
- B Exponente del efecto Stribek.

Sustituyendo la expresión 16 del par de fricción en la ecuación 15 obtenemos:

$$\begin{aligned} \tau = & J \frac{d\dot{\theta}}{dt} + \left[K_{V1} |\dot{\theta}| + F_{C1} + \right. \\ & \left. (F_{S1} - F_{C1}) e^{-B_1 |\dot{\theta}|} \right] sgn_1(\dot{\theta}) + \\ & \left[K_{V2} |\dot{\theta}| + F_{C2} + \right. \\ & \left. (F_{S2} - F_{C2}) e^{-B_2 |\dot{\theta}|} \right] sgn_2(\dot{\theta}) \quad (17) \end{aligned}$$

4 Formulación del problema

Nuestro objetivo es implementar el algoritmo correspondiente a las ecuaciones 9 a 14, al sistema no lineal de la ecuación 16.

En primer lugar se necesita un modelo discretizado del sistema tal y como aparece en la ecuación 9 del algoritmo. Para ello podemos usar una aproximación de Euler, obteniendo la siguiente ecuación para el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(k+1) = & \dot{\theta}(k) + \frac{T}{J} u(k) - \quad (18) \\ & - \frac{T}{J} \left[K_{V1} |\dot{\theta}(k)| + F_{C1} + \right. \\ & \left. + (F_{S1} - F_{C1}) e^{-B_1 |\dot{\theta}(k)|} \right] sgn_1(\dot{\theta}(k)) - \\ & - \frac{T}{J} \left[K_{V2} |\dot{\theta}(k)| + F_{C2} + \right. \\ & \left. + (F_{S2} - F_{C2}) e^{-B_2 |\dot{\theta}(k)|} \right] sgn_2(\dot{\theta}(k)) \end{aligned}$$

A continuación es necesario construir un vector de estados del sistema ampliado en el que se incluyan los distintos parámetros que se pretenden identificar. En nuestro caso se plantea el siguiente vector de estados:

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8] \\ &= [\dot{\theta} \ \frac{T}{J}K_{V1} \ \frac{T}{J}K_{V2} \ \frac{T}{J}F_{S1} \ \dots \\ &\dots \ \frac{T}{J}F_{S2} \ \frac{T}{J}F_{C1} \ \frac{T}{J}F_{C2} \ \frac{T}{J}] \end{aligned} \quad (19)$$

Con lo que el sistema quedaría en la forma más apropiada:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_7 u(k) - [x_2 |x_1(k)| + x_6 + \\ &+ (x_4 - x_6)e^{-B_1|x_1(k)|}] sgn_1(x_1(k)) - \\ &- [x_3 |x_1(k)| + x_6 + \\ &+ (x_5 - x_6)e^{-B_2|x_1(k)|}] sgn_2(x_1(k)) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) \\ &\vdots \\ x_8(k+1) &= x_8(k) \end{aligned} \quad (20)$$

En el conjunto de ecuaciones anteriores aparecen las ecuaciones para los parámetros. Estas ecuaciones, únicamente expresan que los parámetros a identificar del sistema son constantes.

Con el sistema formulado de esta manera es posible calcular las matrices F y H necesarias para el algoritmo. Para la matriz H se tiene:

$$\begin{aligned} H(x(k)) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} h(x) \right|_{x=\hat{x}} = \\ &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned} \quad (21)$$

y la matriz F se calcula como:

$$\begin{aligned} F(x(k), u(k)) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, u) \right|_{x=\hat{x}} = \\ &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_8 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

donde los elementos K_i resultan ser:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 - [x_2 - B_1(x_4 - x_6)e^{-B_1|x_1|}] sgn_1(x_1) - \\ &- [x_3 - B_2(x_5 - x_6)e^{-B_2|x_1|}] sgn_2(x_1) \\ F_2 &= -|x_1| sgn_1(x_1) \\ F_3 &= -|x_1| sgn_2(x_1) \\ F_4 &= -e^{-B_1|x_1|} sgn_1(x_1) \\ F_5 &= -e^{-B_2|x_1|} sgn_2(x_1) \\ F_6 &= -[1 - e^{-B_1|x_1|}] sgn_1(x_1) \\ F_7 &= -[1 - e^{-B_2|x_1|}] sgn_2(x_1) \\ F_8 &= u \end{aligned} \quad (23)$$

Con estas matrices ya se puede programar el algoritmo, únicamente es necesario dar valores iniciales a los distintos estados y a la matriz P de covarianzas. En las simulaciones se ha usado como estado iniciales un vector de ceros, y para la matriz P de covarianzas se a usado una matriz diagonal con todos los elementos inicializados a 100.

5 Simulación del algoritmo

Para poder evaluar el algoritmo se ha implementado con la herramienta de simulación de Matlab, Simulink. En primer lugar se ha simulado el algoritmo frente a un sistema continuo que se puede modelar según la ecuación 17. Para la simulación del sistema continuo se ha usado la solución de Karnopp y un paso de integración variable.

Dada la respuesta en bucle abierto del sistema, se ha elegido un tiempo de muestreo para el algoritmo de $T=0.01$ seg. Los resultados de esta simulación se observan en las figuras 3, 4, 5 y 6.

Para el proceso de identificación se han usado señales senoidales de entrada, el algoritmo en un

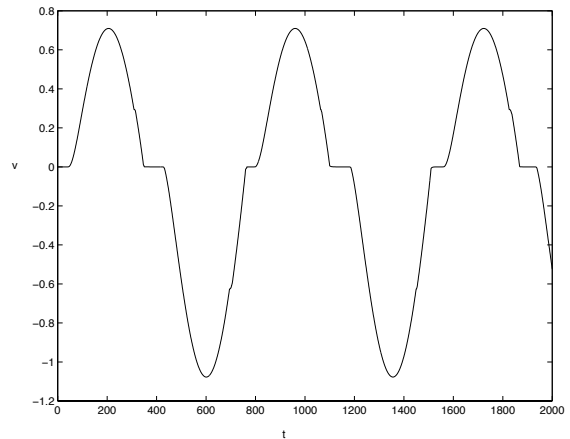


Figura 2: Salida del sistema ante la excitación senoidal

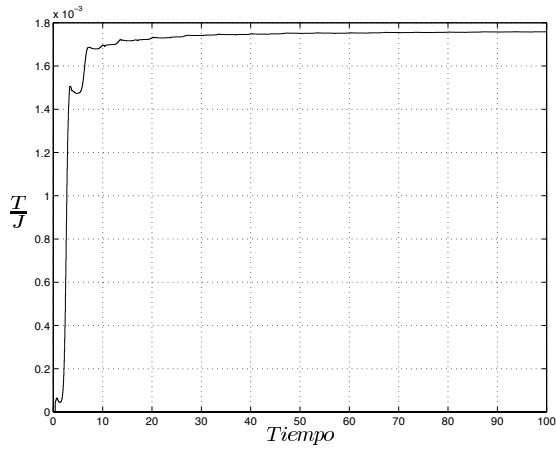


Figura 3: Estimación de la inercia del sistema

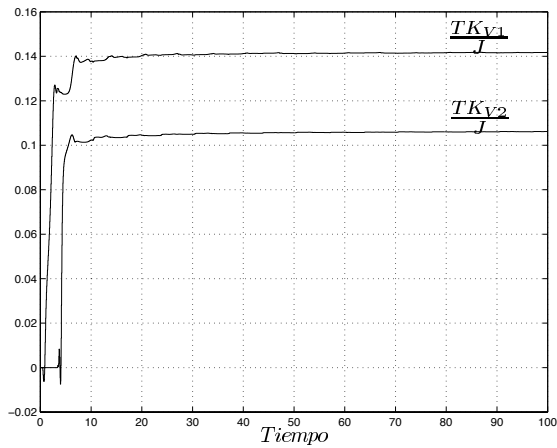


Figura 4: Estimación de la fricción viscosa

par de ciclos de la señal ya tiene unos valores próximos al estacionario. Para dicha simulación se ha usado en el modelo un modelo asimétrico, a pesar de ello el algoritmo responde identificando todos los parámetros con un margen de error pequeño. El algoritmo también se ha probado usando datos, que previamente se han introducido en un algoritmo de identificación distinto (mínimos cuadrados). En concreto se han usado datos de un simulador hardware de un servomecanismo, del cual se conocen los parámetros, pero las señales están contaminadas de ruido. Se ha podido comprobar que los resultados obtenidos por uno u otro algoritmo son similares. Las figuras presentan los resultados obtenidos, se puede ver que la inercia del sistema y los coeficientes estáticos de fricción convergen más rápidamente que los otros parámetros.

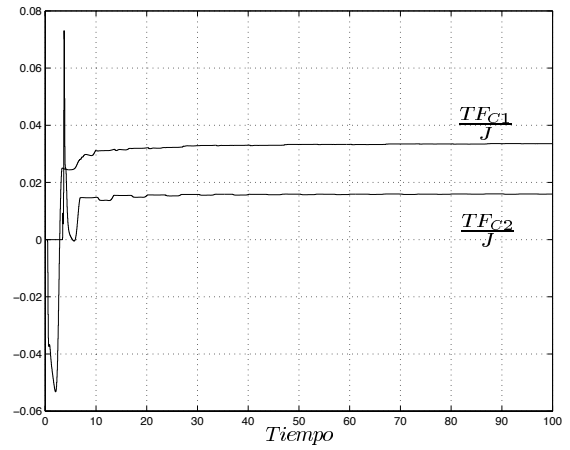


Figura 5: Estimación de la fricción de Coulomb

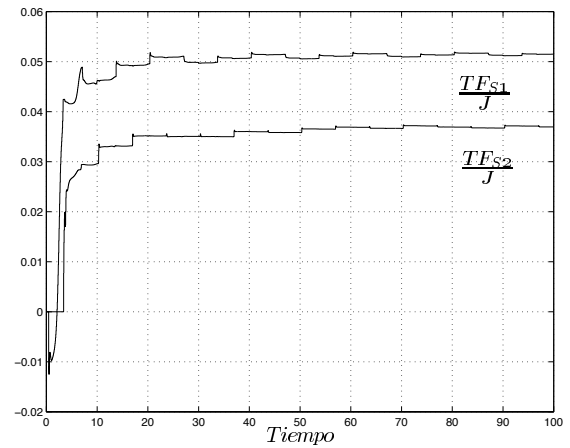


Figura 6: Estimación de la fricción de Stribek

6 Conclusiones

Con este trabajo se ha estudiado otro posible algoritmo de identificación a parte de los ya tradicionalmente conocidos. Uno de los problemas del filtro de Kalman extendido puede ser la convergencia ante la presencia de mínimos locales, para evitar estos mínimos se podría usar alguna técnica [2].

En el caso práctico en el que se ha implementado el algoritmo se podrían incluir los términos B_1 y B_2 , sin embargo dado que la zona donde tienen importancia dichas constantes es pequeña la identificación es difícil.

Dado el carácter recursivo del algoritmo, su implementación en tiempo real puede ser inmediata, aunque para ello habría que incluir comprobaciones de tipo práctico para evitar problemas de tipo inestabilidad numérica.

Como desarrollo futuro, el algoritmo se pretende integrar en un sistema de control adaptativo para

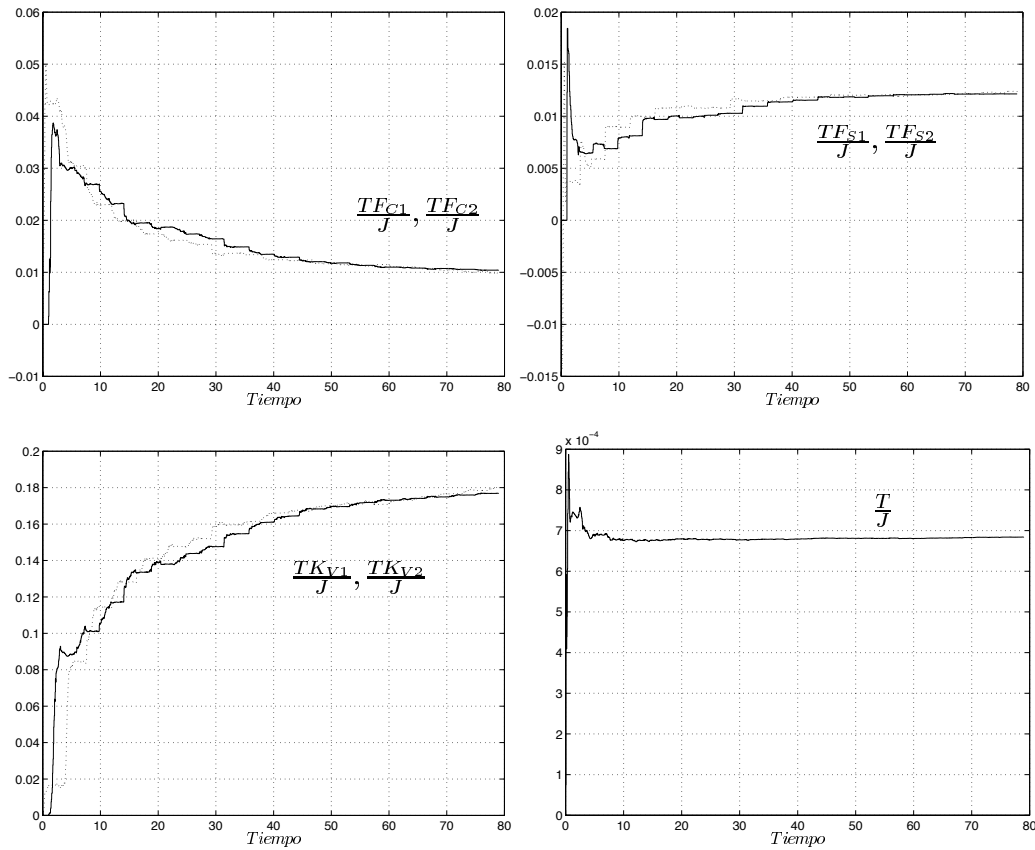


Figura 7: Resultados de simulación con simulador hardware.

la compensación de sistemas con fricción. Así mismo, se pretende generalizar el método cuando se utiliza el modelo de LuGre [4] para la fricción.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto CICYT TAP-98-0541 y por el fondo europeo de desarrollo regional bajo el proyecto FEDER 1FD97-0783

Referencias

- [1] Thor I. Fossen, 1994, *Guidance and Control of Ocean Vehicles*, Ed., John Wiley & Sons.
- [2] Lennart Ljung, (1979), *Asymptotic Behavior of the Extended Kalman Filter as a Parameter Estimator for Linear Systems*, Transactions on Automatic Control, Vol. AC-24, No. 1.
- [3] Elhami, M.J., Brookfield, D.J., (1997), *Sequential Identification of Coulomb and Viscous friction in Robot Drives*, Automatica, vol 33, No. 3, pp 393-401.

- [4] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström and P. Lischinsky "A New Model for Control on Systems with Friction" IEEE Transactions of Automatic Control, Vol 40, No. 3, March 1995.