

Proyecto Fin de Carrera
Grado en Ingeniería de las Tecnologías
Industriales

Análisis con Elementos Finitos de Ejes con Cambio
de Sección Sometidos a Momento Flector

Autor: Antonio Collado Rodríguez

Tutor: Alfredo de Jesús Navarro Robles

Dpto. Ingeniería Mecánica y Fabricación
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería en Tecnologías Industriales

Análisis con Elementos Finitos de Ejes con Cambio de Sección Sometidos a Momento Flector

Autor:

Antonio Collado Rodríguez

Tutor:

Alfredo de Jesús Navarro Robles

Catedrático

Dpto. de Ingeniería Mecánica y Fabricación

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Carrera: Análisis con Elementos Finitos de Ejes con Cambio de Sección Sometidos
a Momento Flector

Autor: Antonio Collado Rodríguez

Tutor: Alfredo de Jesús Navarro
Robles

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Resumen

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es analizar un eje circular con cambio de sección sometido a un momento flector mediante un programa de Elementos Finitos (EF). Tras esto, comparar los resultados con las tablas de concentradores de tensiones del libro *Peterson's stress Concentration Factors* Segunda edición, W.D Pilkey, 1997.

Abstract

The objective of this end-of-degree work is to analyse a stepped bar of circular section with a circumferential shoulder fillet subjected to bending with a Finite Element (FE) program, after that, compare the results with charts in *Peterson's stress Concentration Factors, Second edition*, W.D Pilkey, 1997.

Resumen	9
Abstract	11
Índice	13
Índice de Tablas	15
Índice de Figuras	17
Notación	19
1 Introducción y motivación	1
2 Concentrador de tensiones	3
2.1 <i>Cálculo de factores de concentración de tensiones</i>	4
2.2 <i>Cálculo con elementos finitos</i>	5
3 Modelado y Análisis	11
3.1 <i>Parámetros</i>	11
3.2 <i>Geometría</i>	12
3.3 <i>Mallado</i>	14
3.4 <i>Condiciones de contorno</i>	16
3.5 <i>Análisis y solución</i>	19
4 Resultados y comparación	23
4.1 <i>Comparación para distintos casos de D/d</i>	26
4.2 <i>Comentarios sobre los resultados.</i>	35
5 Conclusión	37
6 Bibliografía	39
7 Anexo: Códigos	41
7.1 <i>Código Ansys: caso R menor que H</i>	41
7.2 <i>Código Ansys: Caso R igual a H</i>	44
7.3 <i>Código Ansys: caso R mayor que H</i>	47
7.4 <i>Código Matlab: cálculo del parámetro para el caso de R mayor que H.</i>	51
7.5 <i>Código Matlab: Gráficas</i>	51

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1 Parámetros para la ecuación de Rolovic para la tensión principal.	25
Tabla 4-2 Parámetros para la ecuación de Rolovic para la tensión equivalente de Von Misses.	25
Tabla 4-3 Parámetros para la ecuación de mis resultados del tipo $a \cdot x^b + b$.	26

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1 Líneas del campo de tensiones que atraviesan una placa plana con un agujero. [1]	3
Figura 2-2 “Relief Groove” [3]	4
Figura 2-3 Factor de concentración de tensiones para una barra plana con entallas opuestas en forma de U. [3]	5
Figura 3-1 Esquema eje con cambio de sección sometido a flexión. [3]	11
Figura 3-2 Geometría del SOLID187. [4]	12
Figura 3-3 Sección transversal del eje.	13
Figura 3-4 Volumen completo del eje.	13
Figura 3-5 Esquema dimensiones del eje.	14
Figura 3-6 Distancia “A” a la que empieza el radio de acuerdo para el caso $r > h$.	14
Figura 3-7 Mallado completo del eje.	15
Figura 3-8 Mallado del radio de acuerdo.	16
Figura 3-9 Montaje del experimento a torsión, [4]	17
Figura 3-10 Nodos de la cara fija con las restricciones de movimiento.	17
Figura 3-11 Fuerzas en el extremo del eje.	18
Figura 3-12 Fuerza distribuida.	19
Figura 3-13 Forma deformada del eje.	20
Figura 3-14 Tensiones en la cara donde se aplican las fuerzas.	21
Figura 3-15 Tensiones en la cara fija.	21
Figura 4-1 Gráfica de factores de concentración de esfuerzos para ejes con cambio de sección sometidos a momento flector, [2].	23
Figura 4-2 Esquema de modelado, [7]	24
Figura 4-3 Ecuación de Rolovic.	25
Figura 4-4 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=1.02$.	28
Figura 4-5 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=1.05$.	29
Figura 4-6 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=1.1$.	30
Figura 4-7 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=1.2$.	31
Figura 4-8 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=1.5$.	32
Figura 4-9 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=2$.	33
Figura 4-10 Comparación de K_{σ} para el caso $D/d=3$.	34

NOTACIÓN

EF	Elementos Finitos
K_t	Factor de concentración de tensiones teórico
K_σ	Factor de concentración de tensiones
σ_{max}	Tensión máxima
σ_{nom}	Tensión nominal
τ_{max}	Tensión cortante máxima
τ_{nom}	Tensión cortante nominal
S₁	Tensión principal 1
S₃	Tensión principal 3
D/d	Cociente entre el diámetro grande y el pequeño
r/d	Cociente entre el radio de acuerdo y el diámetro pequeño

1 INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN

El placer más noble es el júbilo de comprender.

- Leonardo da Vinci -

El cálculo y diseño de máquinas es una disciplina clave en la industria actual, conocer como se transmiten las fuerzas y como éstas afectan al funcionamiento, mantenimiento y duración de las piezas son aspectos muy importantes que hay que tener en cuenta durante todo el proceso de creación de una máquina.

Un ingeniero que diseñe una máquina tiene que conocer las distribuciones de las tensiones en los distintos puntos de ésta, ya que unas tensiones muy altas pueden provocar el fallo de la máquina, pero esto es una tarea para nada sencilla, hay muchos factores que afectan a la distribución de las tensiones.

Por ejemplo, las zonas en las que hay cambios de geometría, las tensiones nominales pueden verse incrementadas varias veces por efecto de los concentradores de tensiones, de los que hablaré más tarde.

En la actualidad tenemos la suerte de que, gracias a los programas de Elementos Finitos, podemos hacer simulaciones que nos otorgan resultados muy parecidos a los de la realidad.

El objetivo de este trabajo es crear un archivo en uno de estos programas, en el que puedas introducir los datos de la geometría deseada y obtener sin esfuerzo una solución de las tensiones a lo largo de la pieza. En realidad, es una parte de un proyecto en el que varios alumnos aportarán una geometría, en concreto se quiere ofrecer las geometrías que aparecen en el libro *Peterson's stress Concentration Factors* Segunda edición, W.D Pilkey, 1997. Con estas aportaciones se pretende crear una web "Open Source" donde quien quiera pueda acceder, descargarse el fichero de la geometría que le interese y poder analizarla desde su ordenador con los parámetros que quiera.

Durante muchos años se han usado distintas tablas de concentradores de tensiones como guía para el diseño de distintas piezas y con este trabajo se pretende que se sustituyan por estos archivos de programas de EF. La mayoría de investigaciones de este tipo ofrecen solo la solución, una ecuación actualizada con la que calcular K_t , pero con el resultado de este trabajo se ofrecerá el código entero. De esta forma, se podrá usar en docencia para que los alumnos visualicen las distribuciones de tensiones y puedan "jugar" con los distintos parámetros e incluso usarse en investigación o diseño de piezas.

Yo me basaré en el TFG de Fernando Pascual *Numerical investigation through Finite Elements of Neuber's and Molski-Glinka's rules for calculation of elastoplastic stress and strain in notched elements*, en el que analiza placas planas con distintas entallas.

En mi caso voy a analizar ejes circulares con cambio de sección sometidos a momento flector e intentaré seguir la estructura del trabajo de Fernando Pascual.

Mi trabajo puede servir de base para otros muchos proyectos similares, ya sea con la misma geometría, pero con otro tipo de cargas u otras geometrías.

2 CONCENTRADOR DE TENSIONES

Un concentrador de tensiones es una parte de un sólido en la que las líneas del campo de tensiones se concentran. Estas zonas se generan en las zonas en las que hay un cambio de la geometría de la pieza, como pueden ser agujeros, cambios de sección, esquinas, chaveteros, etc.

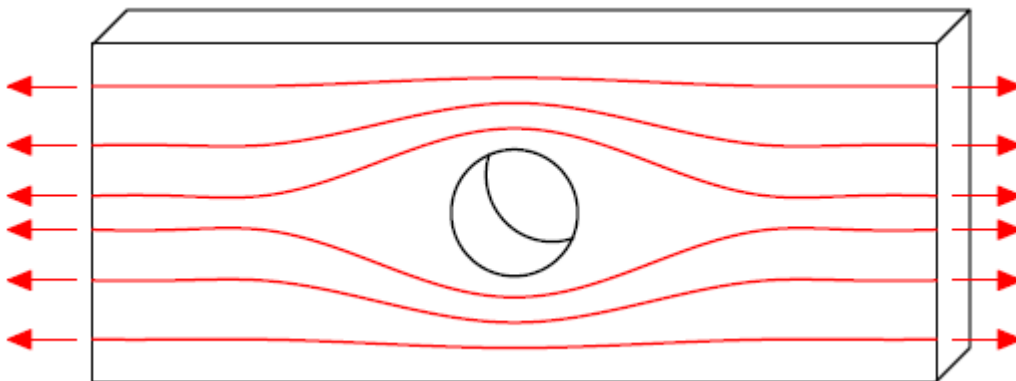


Figura 2-1 Líneas del campo de tensiones que atraviesan una placa plana con un agujero. [1]

En los puntos en los que las líneas están más juntas y tengan un mayor gradiente, el esfuerzo interno es mucho mayor que el que produce la fuerza aplicada en el resto de la pieza, como se puede ver en la figura 2-1. Esto es importante para el cálculo de la carga máxima que puede soportar y de la vida a fatiga. Una gran parte de la disciplina del Diseño de Máquinas se ocupa de intentar disminuir estas tensiones localizadas mediante distintas técnicas. El principal objetivo es suavizar estas líneas de tensión, en el caso de este trabajo, un eje con cambio de sección, se usa un radio de acuerdo para que no sea tan brusco el cambio. Cuanto mayor sea el radio de acuerdo, mejor se adaptan las líneas al cambio de sección y producen un esfuerzo menor. Otro factor que influye es como de grande es el cambio de sección, cuanto más se parezcan ambos diámetros, menos le “cuesta” a las líneas de tensión adaptarse. [2]

Otra técnica que se usa, aunque no es tan común, es la llamada “relief Groove” que se trata de hacer una pequeña entalla antes del cambio de sección (Figura 2-2) que hace que las líneas empiecen a adaptarse antes al salto.

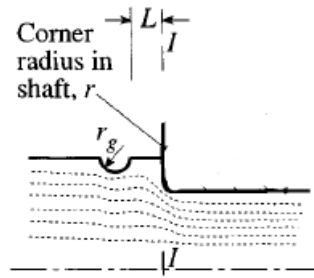


Figura 2-2 “Relief Groove” [3]

Se define como factor de concentración de tensiones de una región de una pieza al cociente de la tensión máxima en esta región dividido por la tensión nominal.

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \text{ (Para flexión, tracción y compresión)}$$

$$K_{\tau} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} \text{ (Para torsión)}$$

2.1 Cálculo de factores de concentración de tensiones

Tradicionalmente se calculaban analíticamente en laboratorios con métodos como la fotoelasticidad que son muy caros y consumidores de tiempo. Al tener recursos limitados, solo podían hacer un número limitado de experimentos con una serie de combinaciones de parámetros y con estos hacer tablas y buscar ecuaciones que se ajustasen a los resultados para obtener resultados con otras geometrías. En la actualidad, existen varias gráficas realizadas por científicos, como Peterson o I. M. Allison entre otros, con los que se pueden obtener resultados bastante fiables y útiles de una serie de geometrías y cargas concretas.

Un ejemplo de esto es la figura 2-3, donde introducimos el radio de la entalla y el ancho máximo y mínimo de la placa y sacamos el concentrador de tensión en la zona de la entalla para una carga axial.

También se ha usado la teoría de la elasticidad y distintas analogías para calcular el factor de concentración de tensiones teórico, pero este método solo se podía aplicar a geometrías muy sencillas.

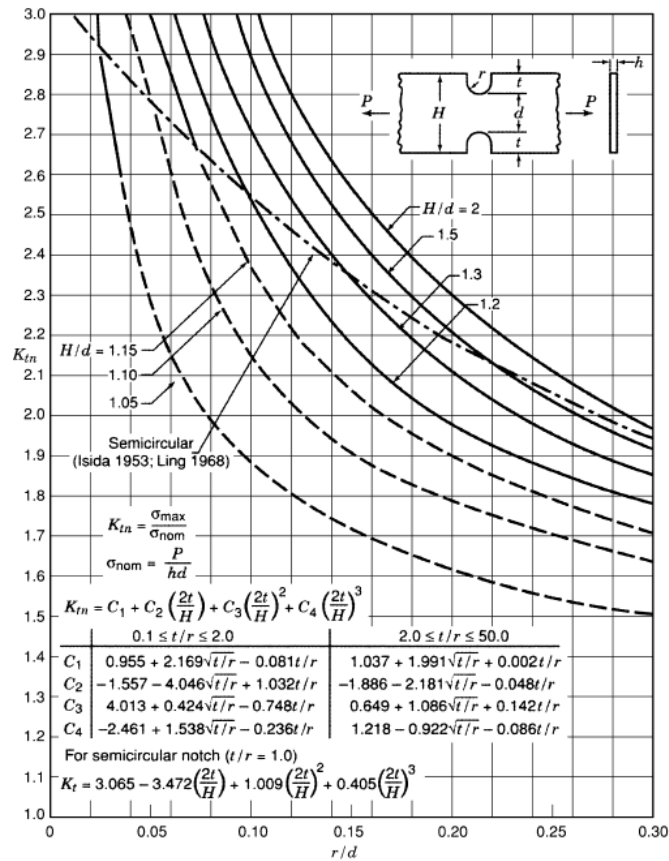


Figura 2-3 Factor de concentración de tensiones para una barra plana con entallas opuestas en forma de U. [3]

2.2 Cálculo con elementos finitos

Como se ha comentado antes, las tablas disponibles son limitadas en cuanto a la geometría de las piezas y están hechas a base de promedios de distintos experimentos. Con el poder computacional disponible actualmente para prácticamente cualquiera que tenga un ordenador, conviene más hacer los cálculos mediante un programa de elementos finitos. Con ellos se puede modelar la pieza que se desee y analizarla bajo las condiciones que uno quiera. Esto último es lo más importante y la mayor ventaja del cálculo con elementos finitos, el no estar limitado en la geometría y las cargas, tener infinidad de combinaciones de diámetros, radios de acuerdo, grosores, etc.

Un programa de elementos finitos calcula mediante las ecuaciones de la teoría de la resistencia de materiales las tensiones en todo el sólido que previamente es mallado, dividiéndolo en muchos elementos y nodos. Hay que tener en cuenta que estos programas suelen usar sólidos ideales, pero en la práctica, las piezas tienen pequeños defectos que pueden aumentar la diferencia entre las tensiones obtenidas en ambos casos.

Para este trabajo se usará el Programa *ANSYS*®, que servirá tanto para modelar las piezas como para la solución y posterior análisis.

Con un programa de EF podremos ver las tensiones en cualquier parte de la pieza, por lo que podremos saber el punto exacto en el que se produce la tensión máxima, dato muy importante en el diseño de máquinas.

3 MODELADO Y ANÁLISIS

Como se comentó antes, se usará el programa *ANSYS*® porque permite realizar tanto el modelado como el análisis, además de ser sencillo e intuitivo. El objetivo es hacer un código con distintos parámetros con los que cambiar fácilmente distintas combinaciones de geometría y cargas.

En mi caso, he elegido el caso de un eje circular con cambio de sección sometido a un momento flector. Esta situación es una de las más comunes e importantes en el mundo de la ingeniería, ya que un gran porcentaje de las máquinas tiene un eje para transmitir una fuerza, y en muchos casos se tiene que incluir un cambio de sección para poder acoplar otros elementos o para que quepa en una disposición determinada, entre otras razones. En este cambio de sección se le suele poner un radio de acuerdo para relajar las tensiones en la esquina y es muy importante diseñarlo bien porque muchas veces se colocan rodamientos u otros elementos y tiene que ajustarse bien, sin contactos extraños que puedan deteriorar la pieza a lo largo del tiempo.

Saber las tensiones máximas que sufre el eje es vital para calcular la carga máxima que puede soportar, y sobre todo, tenerlo en cuenta para el cálculo a fatiga, debido a que los ejes están sometidos a muchos ciclos a lo largo de su vida útil.

Los resultados que obtenga se compararán con los que presenta Pilkey en su libro *Peterson's stress Concentration Factors* [3] para comprobar la diferencia entre los resultados experimentales y los de EF.

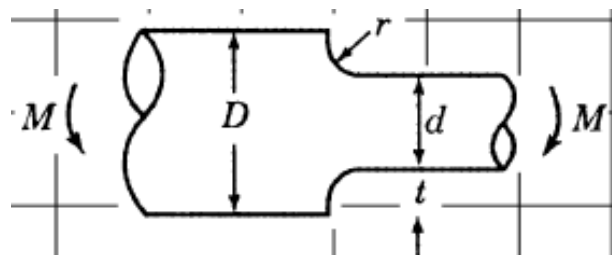


Figura 3-1 Esquema eje con cambio de sección sometido a flexión. [3]

3.1 Parámetros

Los parámetros serán la herramienta para probar las distintas combinaciones y tener una visión mejor del comportamiento de la pieza. Los parámetros usados son los siguientes:

- Diámetros: la relación entre el diámetro grande (D) y el pequeño (d) es clave en el factor de concentración de tensiones. Es un dato que hay que introducir en las gráficas del libro de Pilkey para obtener K . En este caso se fijará el tamaño de “ D ” a 20 mm y se variará el de “ d ”

para trabajar con los distintos ratios “D/d”.

- Radio de acuerdo: es el elemento que se introduce para aliviar las tensiones en el cambio de sección y es de vital importancia encontrar el radio adecuado para aliviar las tensiones sin estorbar a los elementos que se coloquen en el cambio de sección, como puede ser un rodamiento. La relación entre el radio(r) y el diámetro pequeño(d) es otro de los datos que se introducen en las tablas de Pilkey.
- Longitud: para ser eficientes en la generación de la solución, hay que utilizar una longitud de eje (L , que es la mitad de la longitud total del eje) que no sea excesivamente larga (como sería un eje en la práctica) pero tampoco muy corta ya que los resultados podrían variar por la cercanía de la zona de aplicación de las cargas. Tras realizar algunas pruebas, se usará $L=50\text{mm}$ porque, aunque se aumente, los resultados quedan bastante estables.
- Propiedades del material: para este trabajo se modelará la pieza como si fuera de acero, pero en el caso de querer analizar la pieza con otro material, solo habrá que cambiar los parámetros del módulo de elasticidad (E_{young}) y el coeficiente de Poisson (ν). En principio, la curva de concentración de tensiones solo depende de la geometría, el material no debería influir. Aún así hice alguna prueba cambiando el módulo de Young y el coeficiente de Poisson manteniendo la geometría, pero el resultado de la tensión máxima fue el mismo. También se trabaja con un material homogéneo e isótropo, por lo que estas propiedades serán las mismas en todas las direcciones.
- Carga: finalmente, se puede elegir la carga que usar y que más tarde se explicará como está aplicada.

Un aspecto muy importante que hay que definir antes del modelado en sí, es el tipo de elemento que se va a usar. Como la pieza en este caso es un sólido 3-D, usaré elementos tipo *SOLID*, pero dentro de esta categoría hay distintos tipos con distintas cantidades de nodos y formas de interpolar. La forma del radio de acuerdo da problemas con elementos *brick*, por ello se usará un elemento tetrahédrico, en concreto el *SOLID187*, un elemento tetrahédrico de 10 nodos y un comportamiento cuadrático [4].

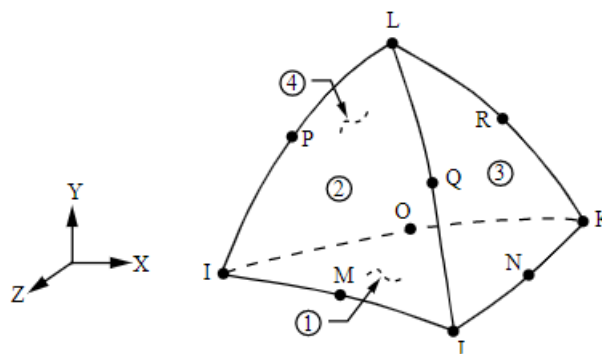


Figura 3-2 Geometría del SOLID187. [4]

3.2 Geometría

La forma de crear el eje será definiendo la mitad superior de la sección de un corte a lo largo y después rotarlo 360 grados con el commando *VROTAT*. Primero se definen los *Keypoints*, con los que

posteriormente se definen las líneas y finalmente las áreas, en la figura 3-3 se puede observar la sección transversal. El número de divisiones en la rotación afectará al mallado como posteriormente se explicará, cuantas más divisiones más fino será, es por ello que las áreas más cercanas al cambio de sección tendrán un mayor número de divisiones. Ansys genera un volumen por cada división del comando *VROTAT*, así que se unirán todos los volúmenes con el comando *VADD*.

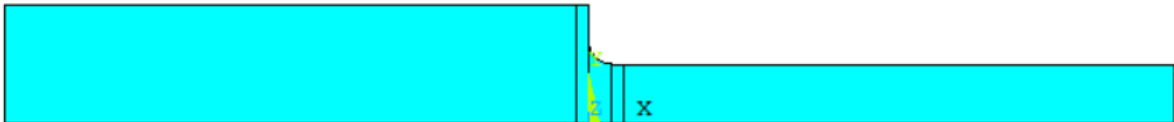


Figura 3-3 Sección transversal del eje.

Hay que comentar que en cada definición de un elemento (*Keypoint*, línea, área, etc) se usará el comando **GET* para guardar ese elemento como parámetro con el nombre deseado y así poder usarlo en otros comandos con más facilidad. El comando *EXTOPT* se usa para que todas las propiedades anteriormente definidas de éstas áreas sean trasladadas a los volúmenes generados por *VROTAT*.

Como se puede observar en la figura 3-4, el volumen queda dividido por más o menos líneas según las divisiones de la rotación. La zona del radio de acuerdo es la que más divisiones tiene ya que será ahí donde las tensiones máximas se darán y conviene tener una mayor precisión, es decir, elementos más pequeños para obtener la mejor solución posible.

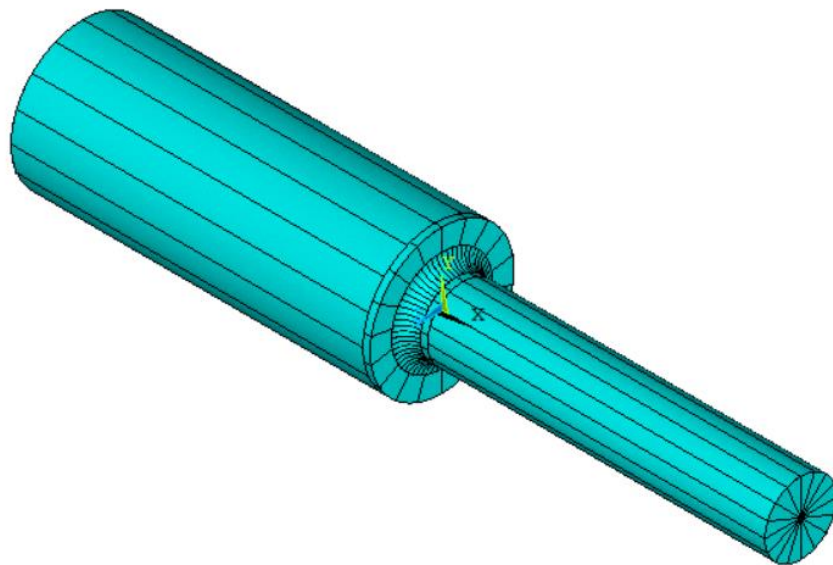


Figura 3-4 Volumen completo del eje.

Con el modelado surge un pequeño problema y es que depende de los valores de r y h la geometría del radio de acuerdo cambia ligeramente. Cuando h es mayor que r , no hay mucho problema ya que el radio de acuerdo sería simplemente un cuarto de circunferencia, pero cuando es al revés, este cuarto de circunferencia no “cabe”. En este caso, el arco empieza paralelo al diámetro pequeño y acaba en la

esquina del diámetro grande pero no llega a completar los 90° de la circunferencia. He hecho un pequeño programa de Matlab® para calcular la distancia a la que empieza el radio de acuerdo (A, figura 3-6). Este parámetro se introduce en una variación del código principal para los casos en los que $r > h$. También he hecho un código parecido para el caso de $r = h$.

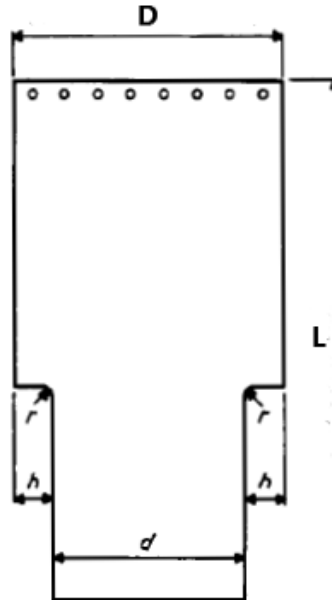


Figura 3-5 Esquema dimensiones del eje.

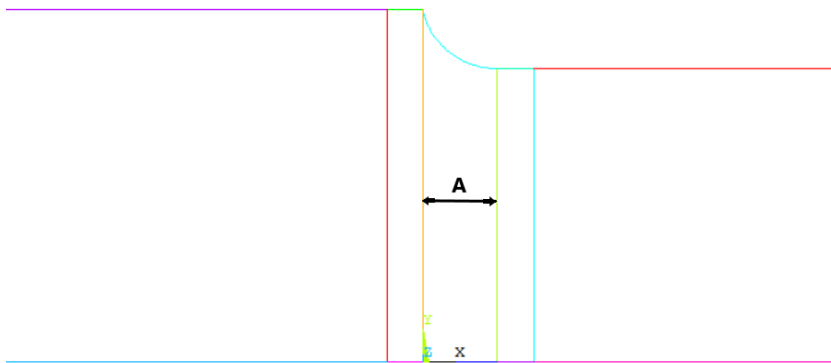


Figura 3-6 Distancia "A" a la que empieza el radio de acuerdo para el caso $r > h$.

3.3 Mallado

El mallado es un proceso clave para que la solución sea correcta y lo más fiel posible a la realidad. Cuanto más fino sea el mallado, más precisión se tendrá, pero esto tiene un coste en tiempo de procesamiento, cuanto más fino sea el mallado, más elementos habrá y por lo tanto más ecuaciones tendrá que resolver el programa. Por lo tanto, interesa recortar en precisión donde no sea muy necesaria, en este caso, en las zonas lejanas al cambio de sección.

El mallado se controlará mediante las divisiones de las líneas generadas con la rotación de la sección (se pueden observar en la figura 3-4). Con el comando *LESIZE* se puede elegir el número de divisiones

de las líneas y el ratio del tamaño entre las divisiones del principio y final de la línea, así se puede tener un mallado más fino en un extremo de la línea (más cercano al cambio de sección) y mas grueso en el otro extremo. Conviene cambiar el número de divisiones del mallado del radio de acuerdo dependiendo de lo grande que sea, ya que si se usa un radio pequeño y muchas divisiones el número de elementos se dispara y el tiempo de cálculo se incrementa demasiado.

Gracias al comando *EXTOPT* comentado anteriormente, con dividir las líneas creadas para la sección transversal basta, ya que, al rotar las áreas, las divisiones se trasladarán a las demás líneas creadas a lo largo de todo el volumen. Combinando el numero de divisiones de la rotación de cada área y el número de divisiones de las líneas, se puede controlar el grosor del mallado en cada zona del eje. Con el comando *SMARTSIZE*, puedes indicarle al programa como de fino quieres que te genere el mallado. En el caso de este proyecto, se usa *SMARTSIZE*, 3, es decir, un mallado de 3 en una escala de 1 a 10, siendo 1 lo más fino y 10 lo más grueso.

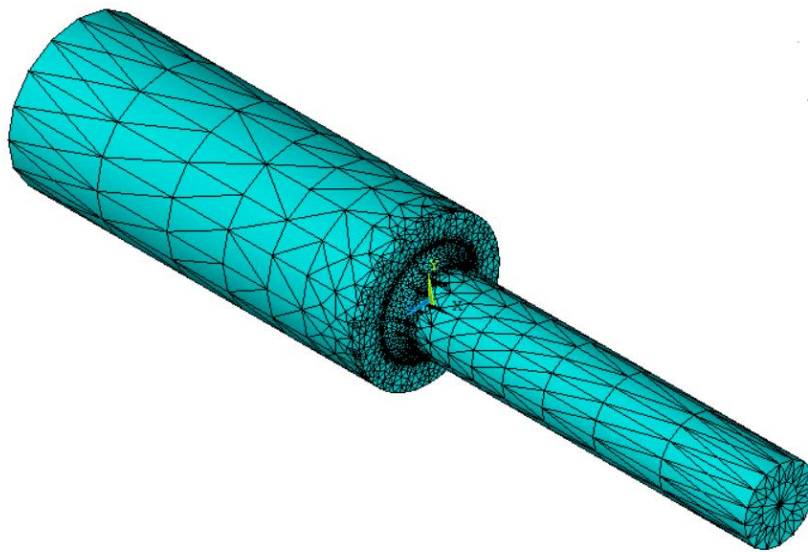


Figura 3-7 Mallado completo del eje.

Como podemos ver en la figura 3-7 y 3-8, el mallado en la zona del radio de acuerdo es mucho más fino que en los extremos.

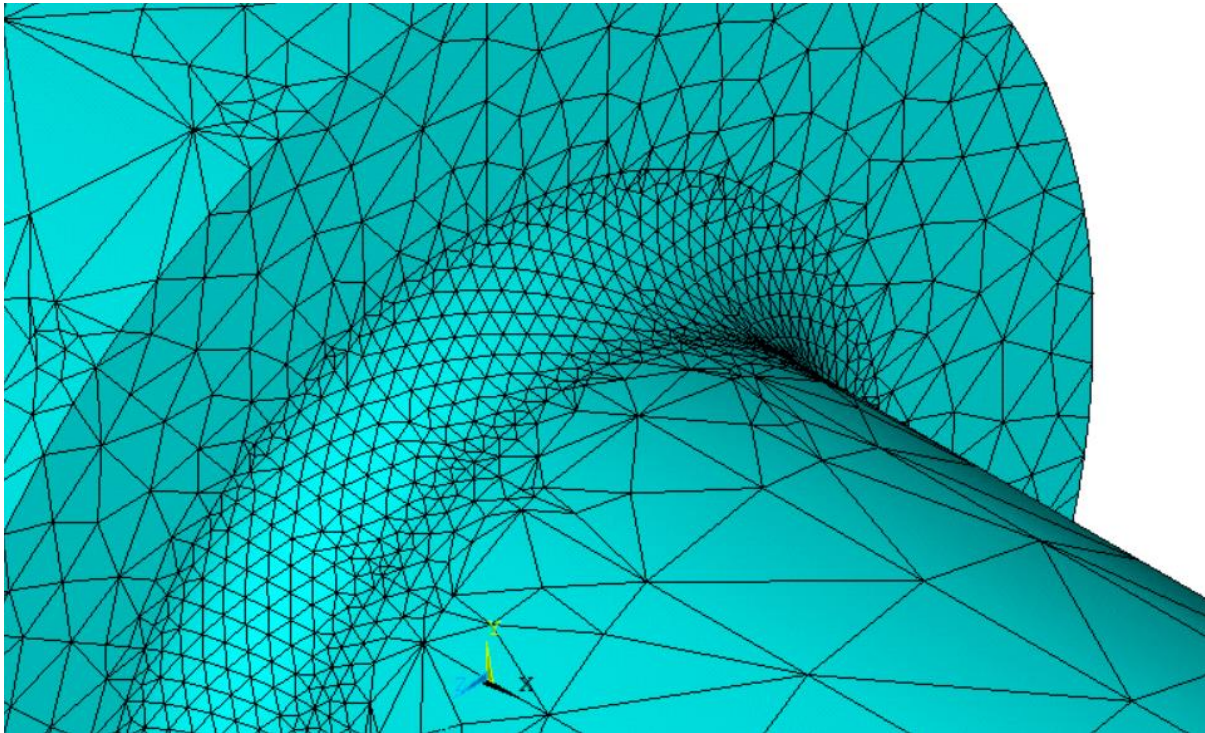


Figura 3-8 Mallado del radio de acuerdo.

3.4 Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son lo último que queda por definir para realizar la simulación. Es muy importante que sean las adecuadas para que el comportamiento de la pieza sea lo más parecido a los experimentos con los que compararemos los resultados.

Primero hay que definir la “sujeción” de la pieza, es decir, qué grados de libertad restringimos y en qué parte de la pieza lo hacemos y esto es relativamente sencillo de hacer. En el artículo *The Elastic Stress Concentration Factors in Shouldered Shafts Part III: Shafts Subjected to Torsion*, Allison, 1961, [5] se muestra en una figura (Figura 3-9), y es explicado en el texto, que el extremo del diámetro pequeño acaba ensanchándose en forma cónica y esta es pegada a un soporte fijo, para que se mueva lo menos posible. Este montaje lo he trasladado al programa de modo que toda la cara final del eje, por la parte del diámetro pequeño, quede fija, es decir, restringir todos sus grados de libertad. Esto se lleva a cabo primero seleccionando todos los nodos que estén situados en la coordenada $x=L$, con el comando *NSEL*, y después restringiendo todos los grados de libertad con el comando *D*, con lo que queda toda la cara fija (figura 3-10).

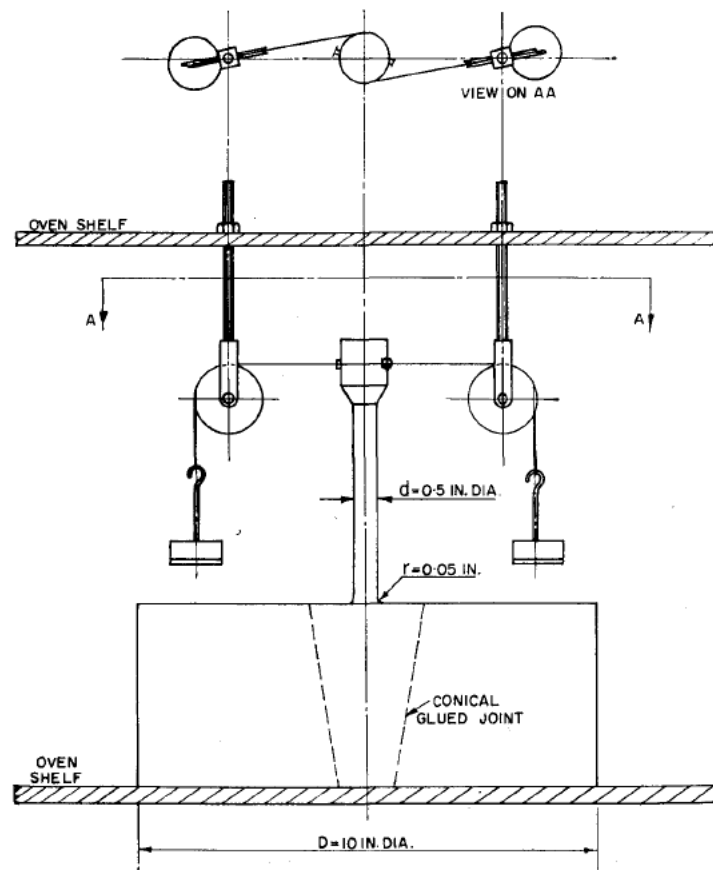


Figura 3-9 Montaje del experimento a torsión, [4]

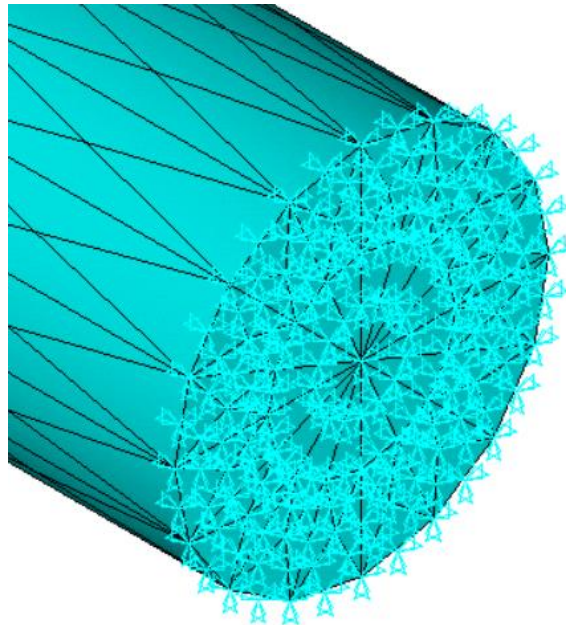


Figura 3-10 Nodos de la cara fija con las restricciones de movimiento.

Hice pruebas con otras dos formas de restricción de grados de libertad. La primera es bloqueando los grados de libertad de la línea neutra y aplicar las fuerzas simétricamente en ambas caras de manera que estén equilibradas. La segunda es simplemente aplicando fuerzas simétricas en ambas caras para que estén equilibradas, más tarde hablaré de la aplicación de las fuerzas en otro apartado. Para los 3 casos los resultados fueron prácticamente idénticos, ya que en el fondo son sistemas equivalentes, pero quería comprobar que el programa de elementos finitos lo trataba de la misma forma.

Las siguientes condiciones de contorno que hay que aplicar son las fuerzas y aquí surge un pequeño problema, *ANSYS®* no deja aplicar momentos flectores con los elementos tipo *SOLID187*, ya que éstos no tienen grados de libertad de rotación. Es por esto que para generar un momento flector hay que aplicar un par de fuerzas que sea equivalente al momento flector. En este caso he aplicado en los extremos del diámetro grande dos fuerzas, paralelas al eje de la pieza, y opuestas entre sí (figura 3-11).

He realizado este paso seleccionando el nodo deseado, con el comando *NSEL* y las coordenadas donde se encuentra, y aplicando la fuerza con el comando *F*. Para hacer las cosas más sencillas, he mantenido siempre el diámetro grande en 20 mm y he ido cambiando el diámetro pequeño para generar los distintos ratios de D/d . De esta forma también puedo aplicar siempre la misma fuerza y tener un momento constante en todos los análisis, en mi caso he aplicado 5000 N en ambos extremos para tener así un momento flector de 100 N/m.

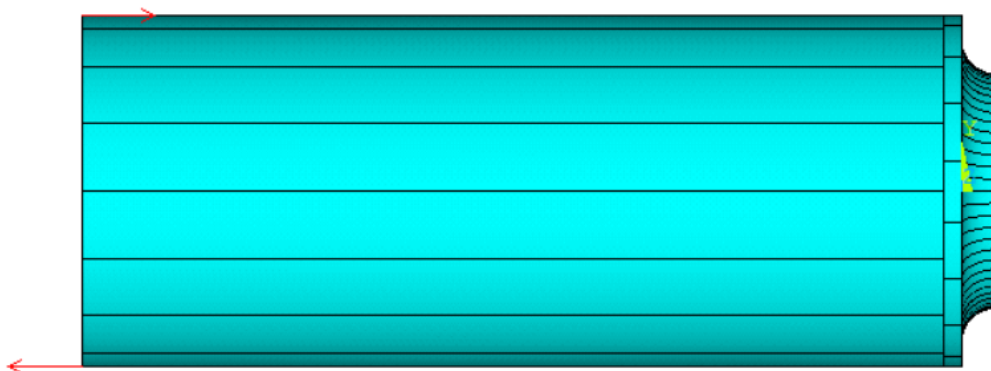


Figura 3-11 Fuerzas en el extremo del eje.

También en los experimentos de I.M Allison se aplica la fuerza de una forma similar. Como podemos ver en la figura 3-9, el momento torsor se genera con dos fuerzas puntuales, con un sistema de poleas, en ese caso perpendiculares al eje. Aunque no se muestra ningún esquema de cómo era el montaje para el caso de momento flector, indica que se usó un montaje muy similar al caso de torsión.

Como comenté antes, probé varias formas de aplicar las condiciones de contorno, con respecto a las fuerzas lo más importante era si aplicarlas de forma puntual o distribuida. Hice la prueba con las fuerzas distribuidas a lo largo de 8 nodos de la línea media del extremo del eje por el diámetro grande, y al comparar los resultados observé que la variación en los resultados era despreciable, por lo que decidí aplicarla de forma puntual para simplificar un poco el código y ser más fiel a los experimentos de I.M Allison.

En la figura 3-12 se puede observar la fuerza distribuida que, aunque las flechas aparezcan del mismo tamaño, la fuerza aplicada en cada nodo es proporcional a la distancia al centro del diámetro.

Es sencillo adaptar el código para las cargas de torsión y tracción, usando el código para el caso que yo he estudiado y únicamente cambiar el sentido de las fuerzas. Esto podría ser interesante y sencillo de estudiar para algún futuro trabajo que continúe con este proyecto.

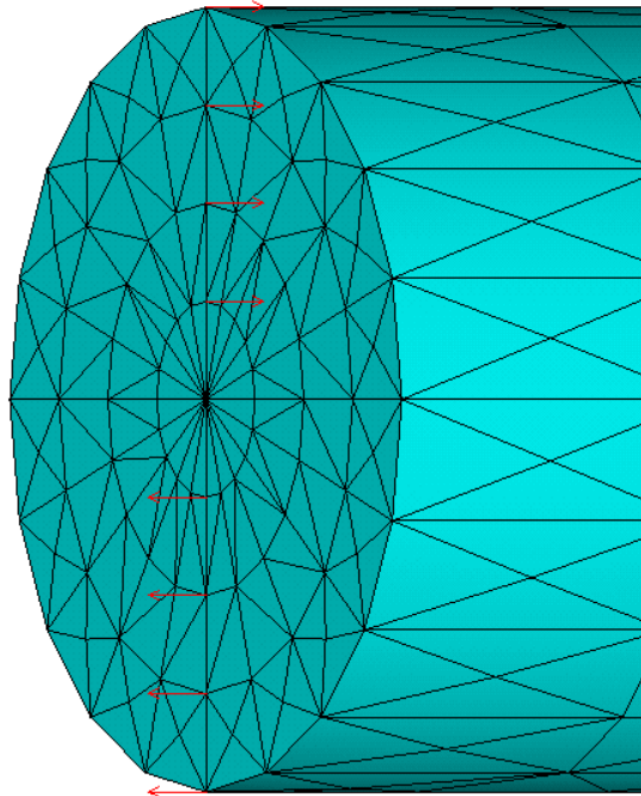


Figura 3-12 Fuerza distribuida.

3.5 Análisis y solución

Cuando toda la parte del modelado está terminada, solo queda realizar el análisis y generar una solución. Para esto hay que cambiar del procesador “Preprocessor”, con el que se hace el modelado, al procesador “Solution” y realizar el análisis, en este caso de tipo estático (se define con el comando *ANTYPE*), y generar la solución con el comando *SOLVE*.

En este caso interesa encontrar las tensiones máximas en la zona del cambio de sección para poder calcular más tarde el factor de concentración de esfuerzos. El programa te da dos opciones para calcular las tensiones, en los elementos o en los nodos, y son estos últimos los que usaré para el análisis. Esto se debe a que la solución real de las ecuaciones de la teoría de resistencia de materiales es en los nodos, la solución en los elementos es un promedio de los nodos que pertenecen a cada elemento mediante unas funciones de forma.

En los extremos del eje, las tensiones en los nodos pueden ser muy altas por la aplicación puntual de las fuerzas y de las restricciones de grados de libertad (Figura 3-14 y 3-15), por lo que centraré la solución en el radio de acuerdo, seleccionando solo los nodos ahí situados, que es donde nos interesan

las tensiones máximas. Tras esto solo hay que obtener la tabla de las tensiones y guardar la tensión máxima y el nodo en el que se encuentra.

El programa deja elegir entre varias tensiones, como pueden ser las tensiones principales, Tensión equivalente de Von Misses y muchas más. Para este análisis me centraré en la primera tensión principal S1, aunque la tensión S3 es la misma, pero con signo opuesto. En este caso solo se le aplica un momento flector al eje, pero si se combinaran varias cargas a la vez sería conveniente buscar la tensión de Von Misses máxima.

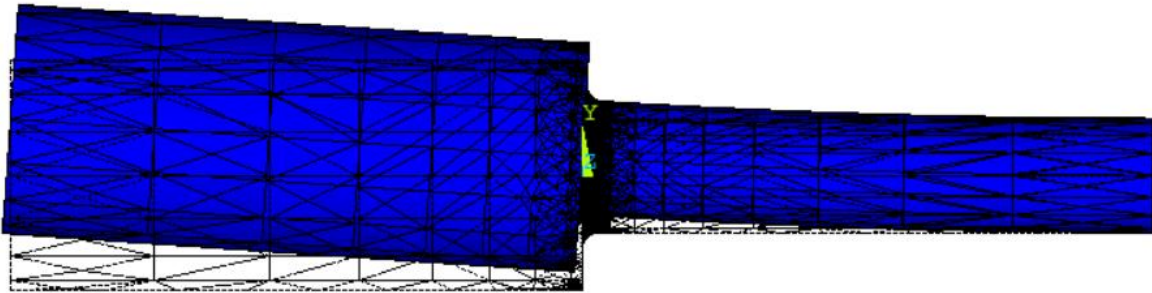


Figura 3-13 Forma deformada del eje.

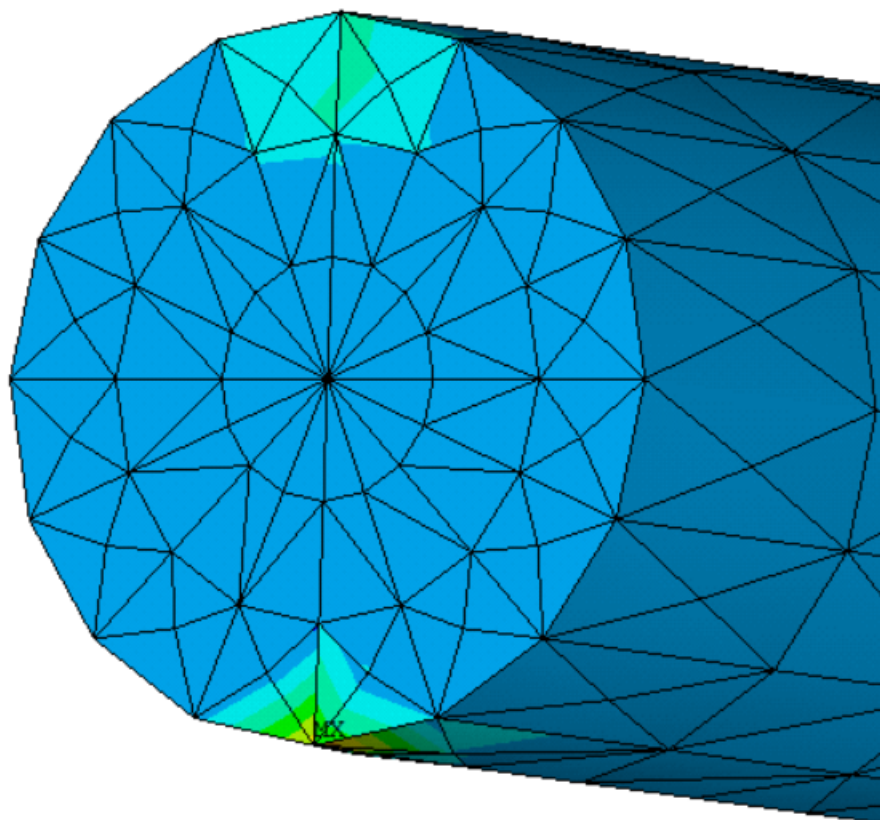


Figura 3-14 Tensiones en la cara donde se aplican las fuerzas.

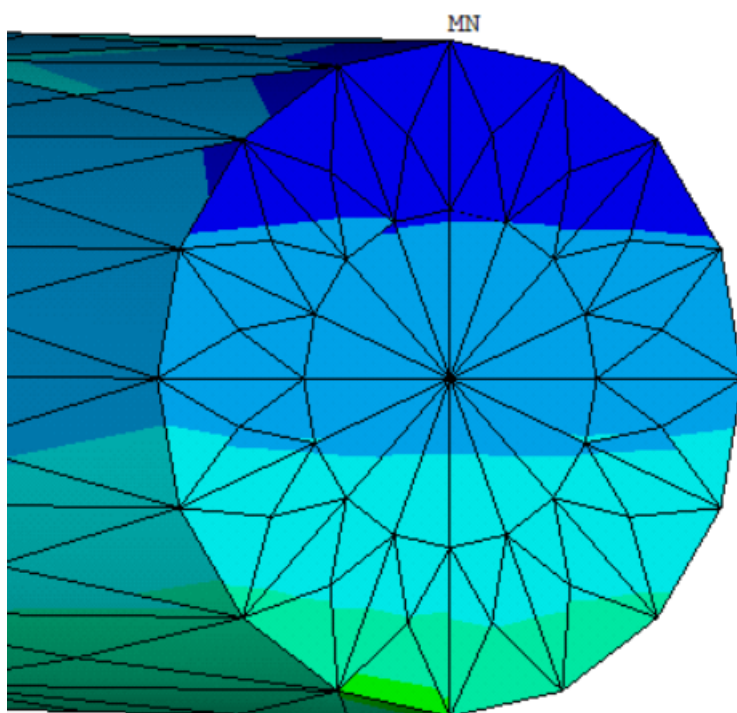


Figura 3-15 Tensiones en la cara fija.

4 RESULTADOS Y COMPARACIÓN

Con el modelado terminado, ya se puede pasar a obtener los resultados y comprobar que son correctos. Esto último es muy importante, ya que compararlo con otros resultados de otros autores es una forma fiable de que no has tenido errores. En este caso se compararán los resultados con la tabla del libro de Pilkey (Figura 4-1), una gráfica en la que se muestra el factor de concentración de tensiones frente al cociente r/d para distintos ratios de D/d . He obtenido la solución para esos valores de D/d a lo largo del rango de valores de r/d , unos 10 puntos por cada D/d .

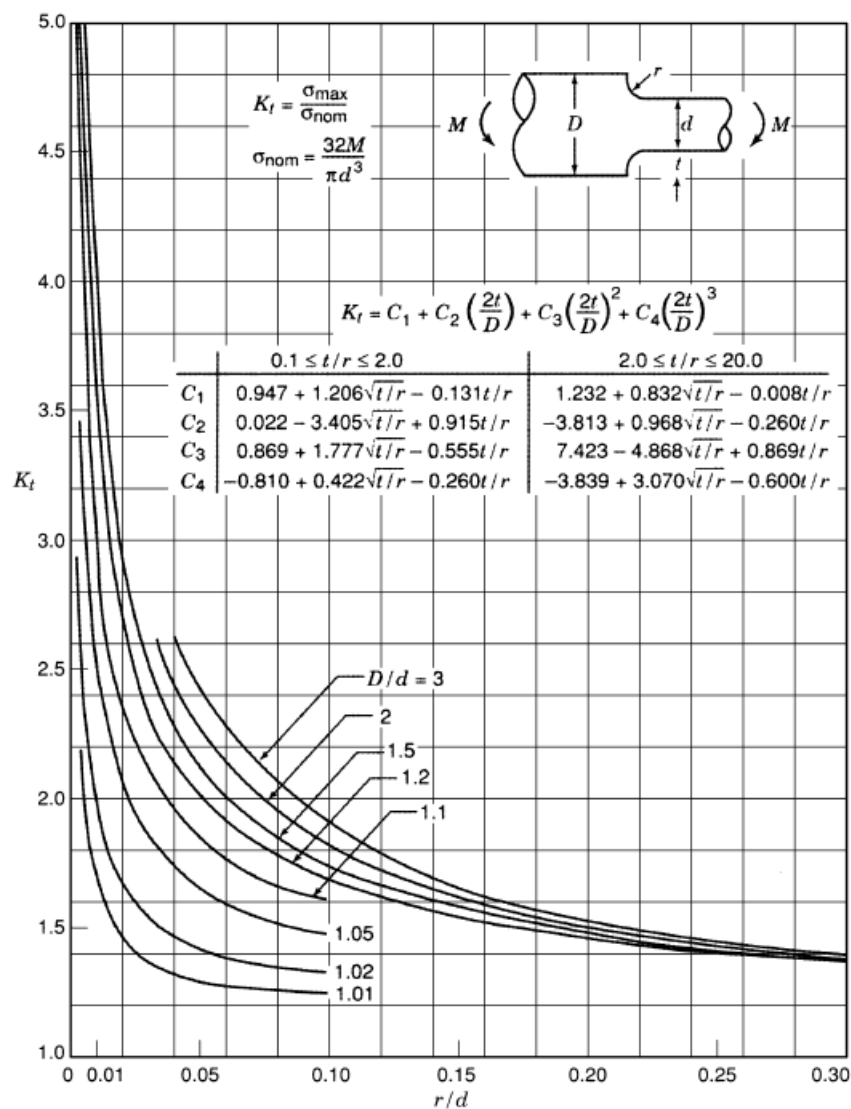


Figura 4-1 Gráfica de factores de concentración de esfuerzos para ejes con cambio de sección sometidos a momento flector, [2].

Estos K_t los saca a partir de los experimentos de Leven y Hartman [6] y Wilson y White [7], en los que hacen sus análisis en placas planas y con estos resultados hacer estimaciones para el caso 3-D, los trabajos de I.M Allison si que son en modelo 3-D, pero fueron escasos.

Por comodidad, las distintas soluciones las he pasado a un documento Excel® el cual para cada caso calcula la tensión nominal, el valor de r/d en el que r es igual a H y finalmente introduciendo el valor de tensión máxima calculaba K_σ . Como mencioné anteriormente, se pueden elegir todo tipo de tensiones, pero en mi caso usé la tensión principal máxima S_1 . Es importante cambiar de código cuando se llegue al valor límite de r/d y calcular el parámetro necesario con el programa auxiliar de Matlab anteriormente mencionado, ya que en caso contrario el resultado será muy diferente al real e incluso el código no compilará bien.

Tras recoger los resultados en el Excel®, éstos se pasan a un código de Matlab® que cree, el cual lo inserta en una gráfica junto con los resultados de Peterson. Para más claridad, hice una curva que se ajustara a los resultados obtenidos para poder apreciar mejor las diferencias. Solo hay que indicar los valores de los factores de concentración de esfuerzos y en qué valores de r/d y D/d los has calculado y automáticamente hace la gráfica. El tipo de curva que he elegido para ajustarse a los datos es exponencial, ya que las polinómicas les costaba más adaptarse y se desviaban mucho de la tendencia sobretodo al principio y final de la curva, y son del tipo $a * x^b + b$.

Aunque la intención principal de este trabajo era comparar los resultados de mi programa de EF con los del libro de Pilkey, resultaba interesante compararlo también con otros trabajos en EF de otros autores. Los métodos experimentales como la fotoelasticidad usada en las gráficas del libro de Pilkey son muy diferentes a una simulación en un ordenador, por lo que mis resultados podrían variar bastante de los obtenidos con esos métodos. Esto hace que compararlo con otros trabajos en EF pueda darte una idea de si tus resultados van bien encaminados.

En mi caso he usado los resultados de Rolovic, Tipton y Sorem en su artículo *Multiaxial Stress Concentration in Filleted Shafts, 2001* [8], en el que afirma que los resultados experimentales de algunos autores, entre ellos los de Peterson, tienen una diferencia de hasta el 21% en el caso de momento flector con los resultados de distintos análisis con EF. En el artículo explica que muchas de las gráficas están hechas a partir de datos de experimentos anticuados y de estimaciones con casos parecidos en 2-D y 3-D. Finalmente propone su propia ecuación para los K para tracción, flexión y torsión.

En su análisis usan también *Ansys*® pero cambian el modo de aplicar las condiciones de contorno, en concreto el modo de aplicar el momento. Usan dos fuerzas perpendiculares al eje como se muestra en la figura 4-2. En principio no debería de alterar el resultado ya que el momento resultante es el mismo.

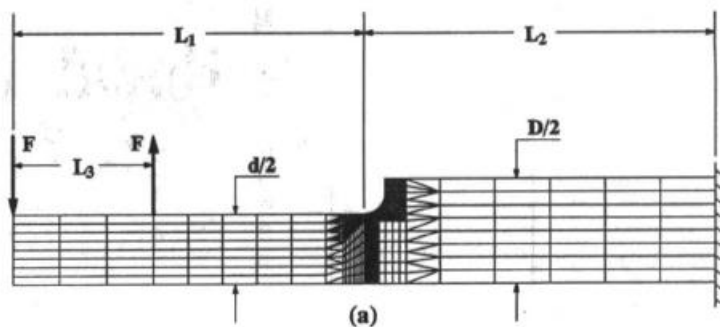


Figura 4-2 Esquema de modelado, [7]

Otra diferencia es que ellos dejan fija la cara del diámetro grande mientras que yo fijo la del diámetro pequeño, pero esto no debería afectar mucho a los resultados.

En la Figura 4-3 y las Tablas 4-1 y 4-2 se muestran la ecuación de Rolovic y sus parámetros. Para cada tipo de carga (tracción, flexión y torsión) hay unos parámetros distintos, incluso se puede elegir el concentrador de tensiones teniendo en cuenta la tensión principal máxima o la tensión equivalente de Von Misses.

En la tabla 4-3 podemos ver los parámetros de las ecuaciones de las curvas que se ajustan a mis resultados para cada caso de D/d , que como comenté anteriormente son del tipo $a * x^b + b$.

Finalmente, inserté en la misma gráfica los tres resultados para así tener una visión mejor de las diferencias entre los tres modelos. Como se pueden ver en las figuras del siguiente apartado, los resultados en las tres son bastante parecidos, con la misma tendencia general, pero con algunas diferencias que comentar.

$$K_{t,q} = c_1 + c_2 \left(\frac{D}{d}\right)^{c_3} + \left(\frac{r}{d}\right)^{c_4} \sqrt{\frac{c_5 + c_6 \left(\frac{D}{d}\right)^2 + c_7 \left(\frac{D}{d}\right)^4}{1 + c_8 \left(\frac{D}{d}\right)^2 + c_9 \left(\frac{D}{d}\right)^4}}$$

Figura 4-3 Ecuación de Rolovic.

Loading	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉
Bending	0.632	0.377	-4.4	-0.5	-0.14	-0.363	0.503	-2.39	3.368
Tension	0.493	0.48	-2.43	-0.48	3.43	-3.41	-0.0232	-8.85	-0.078
Torsion	0.78	0.2	-10	-0.46	0.002	-0.125	0.123	-2.75	2.55

Tabla 4-1 Parámetros para la ecuación de Rolovic para la tensión principal.

Loading	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄	c ₅	c ₆	c ₇	c ₈	c ₉
Bending	0.622	0.38	-4.3	-0.5	-0.322	-0.277	0.599	-2.55	5.27
Tension	0.496	0.472	-2.85	-0.48	2.921	-2.945	0.0217	-9.59	0.053

Tabla 4-2 Parámetros para la ecuación de Rolovic para la tensión equivalente de Von Misses.

	a	b	c
D/d=3	0.295	-0.5786	0.7556
D/d=2	0.2623	-0.6023	0.8147
D/d=1.5	0.3746	-0.5093	0.6363
D/d=1.2	0.3195	-0.5126	0.7234
D/d=1.1	0.3189	-0.4562	0.6928
D/d=1.05	0.1256	-0.5551	1.059
D/d=1.02	0.1093	-0.4861	1.014

Tabla 4-3 Parámetros para la ecuación de mis resultados del tipo $a \cdot x^b + c$.

4.1 Comparación para distintos casos de D/d

- Caso D/d=1.02, Figura 4-4: Para este caso las curvas de mi modelo y la de Rolovic se asemejan bastante en todo el rango de r/d, llegando incluso a solaparse las curvas entre los valores de r/d de 0.3-0.4. La diferencia entre las dos es de un 1% más o menos en la zona central (0.3-0.6) y algo mayor en los extremos. En el caso de la curva de Pilkey, ésta se aleja bastante de las otras para r/d altos, llegando tener valores un 12.5% superiores que mis resultados y 14% que los de Rolovic. Para r/d los valores de Pilkey son ligeramente menores que los otros dos.
- Caso D/d=1.05, Figura 4-5: Aquí podemos observar como mi curva y la de Rolovic están juntas en todo el rango de r/d, con una diferencia de entre el 3% y 6%, estando esta última siempre con valores menores a los míos. La de Pilkey se queda muy por debajo para valores de r/d bajos, hasta un 12% menores, aunque se igualan las tres curvas para r/d altos.
- Caso D/d=1.1, Figura 4-6: En este caso mi curva se acerca a la de Rolovic, un poco menos en la zona central (entre los valores de r/d de 0.15 y 0.65) y prácticamente solapadas para r/d altos y quedando la mía siempre por encima. La de Pilkey otra vez tiene un error importante respecto a las otras dos para la mayor parte del rango de r/d, acercándose más para la parte más a la derecha de la gráfica.
- Caso D/d=1.2, Figura 4-7: Este caso mi curva tiene unos valores notablemente más altos que la de Rolovic (unos 6%-7% mayores) para valores de r/d bajos, disminuyendo bastante a medida que avanza y siendo casi iguales al final. La curva de Pilkey sigue siendo notablemente menor que la de Rolovic, aunque menos que en los casos anteriores.
- Caso D/d=1.5, Figura 4-8: Caso muy parecido al anterior, aunque con diferencias menores en

los valores para r/d bajos.

- Caso $D/d=2$, Figura 4-9: En esta gráfica las curvas se parecen más en todo el rango de r/d , siendo la mía la que tiene valores más altos y la de Pilkey los más bajos, quedando la de Rolovic entre las dos.
- Caso $D/d=3$, Figura 4-10: En este caso las tres curvas son muy similares, teniendo valores muy parecidos en todo el rango de r/d .

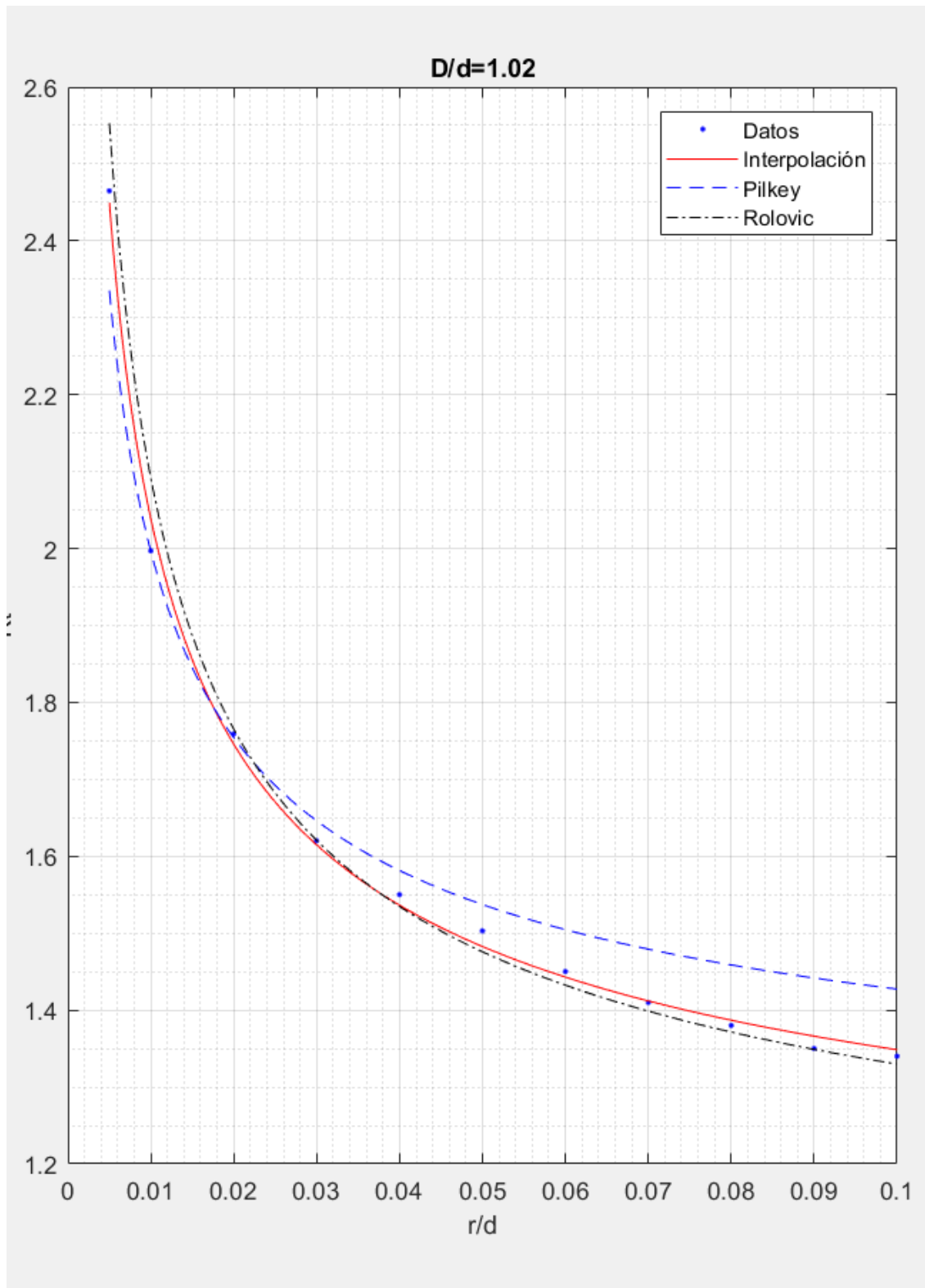
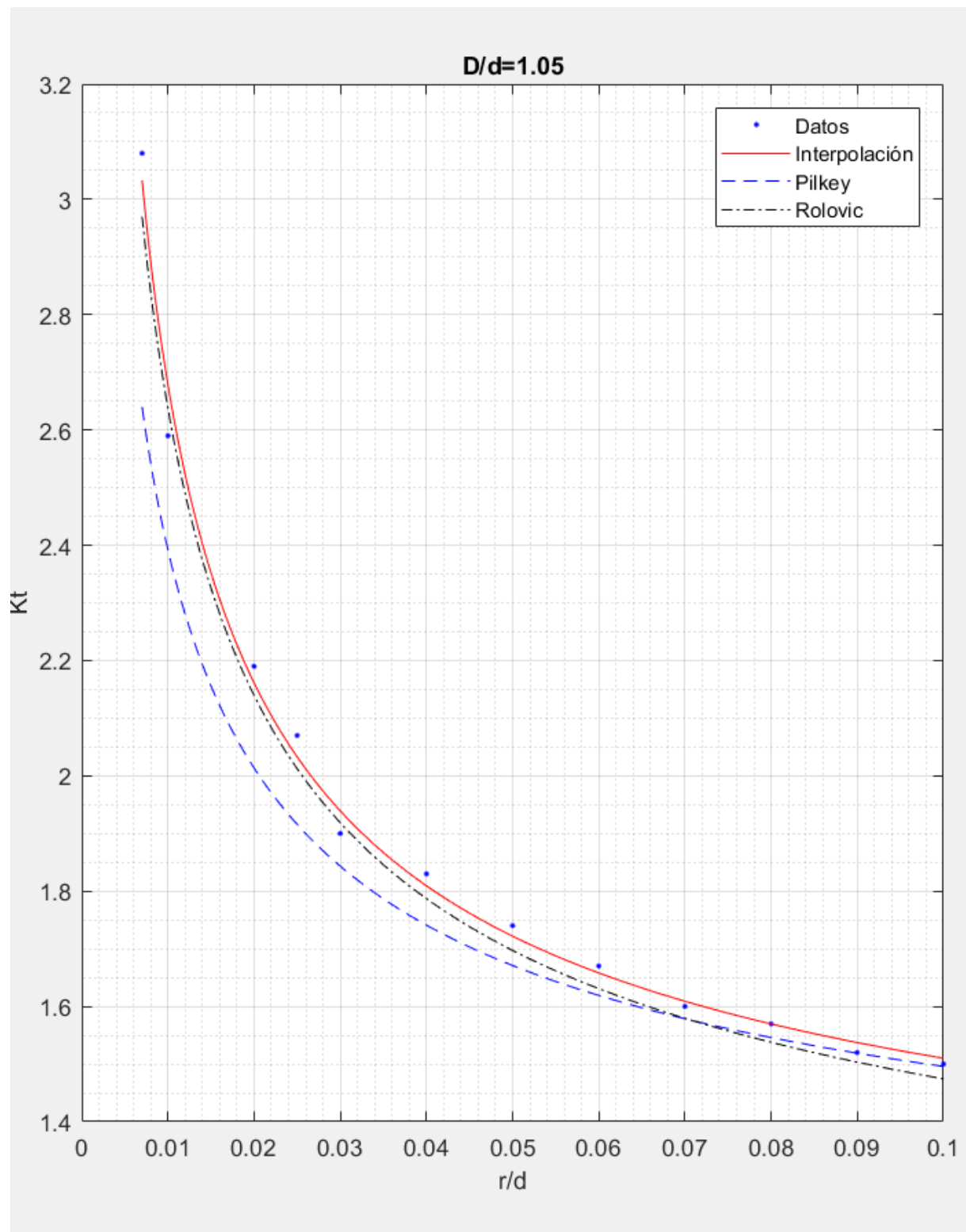
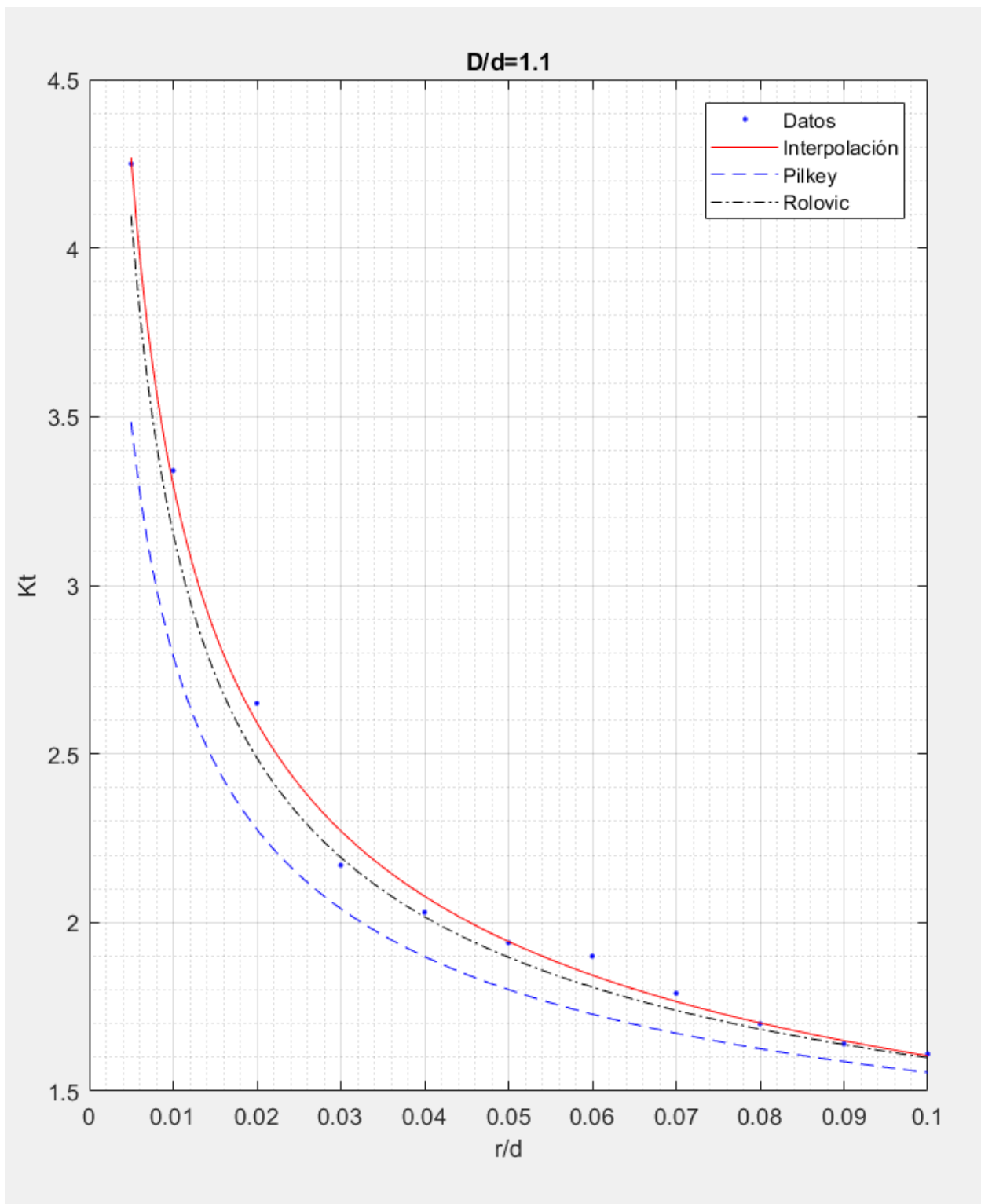
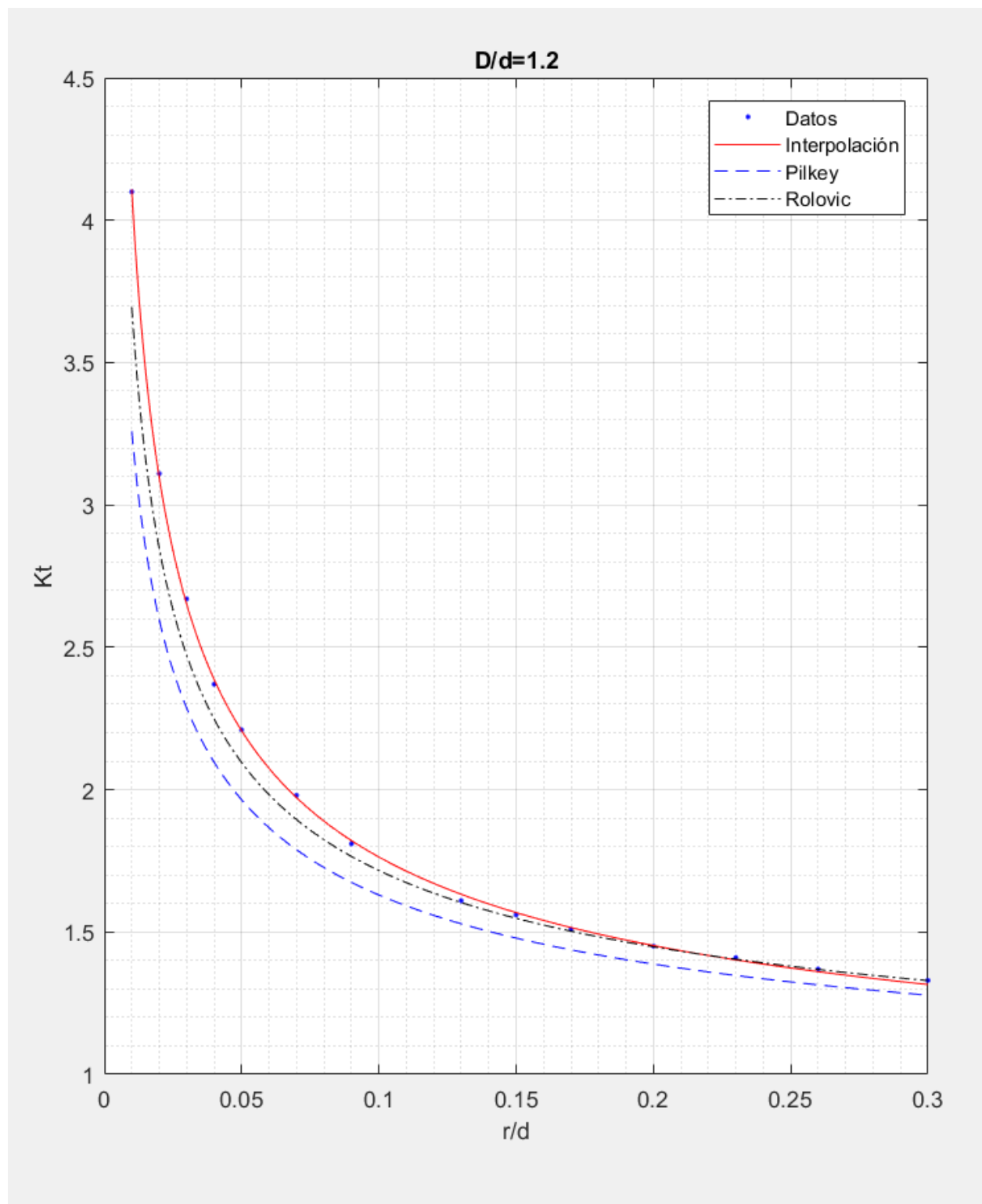
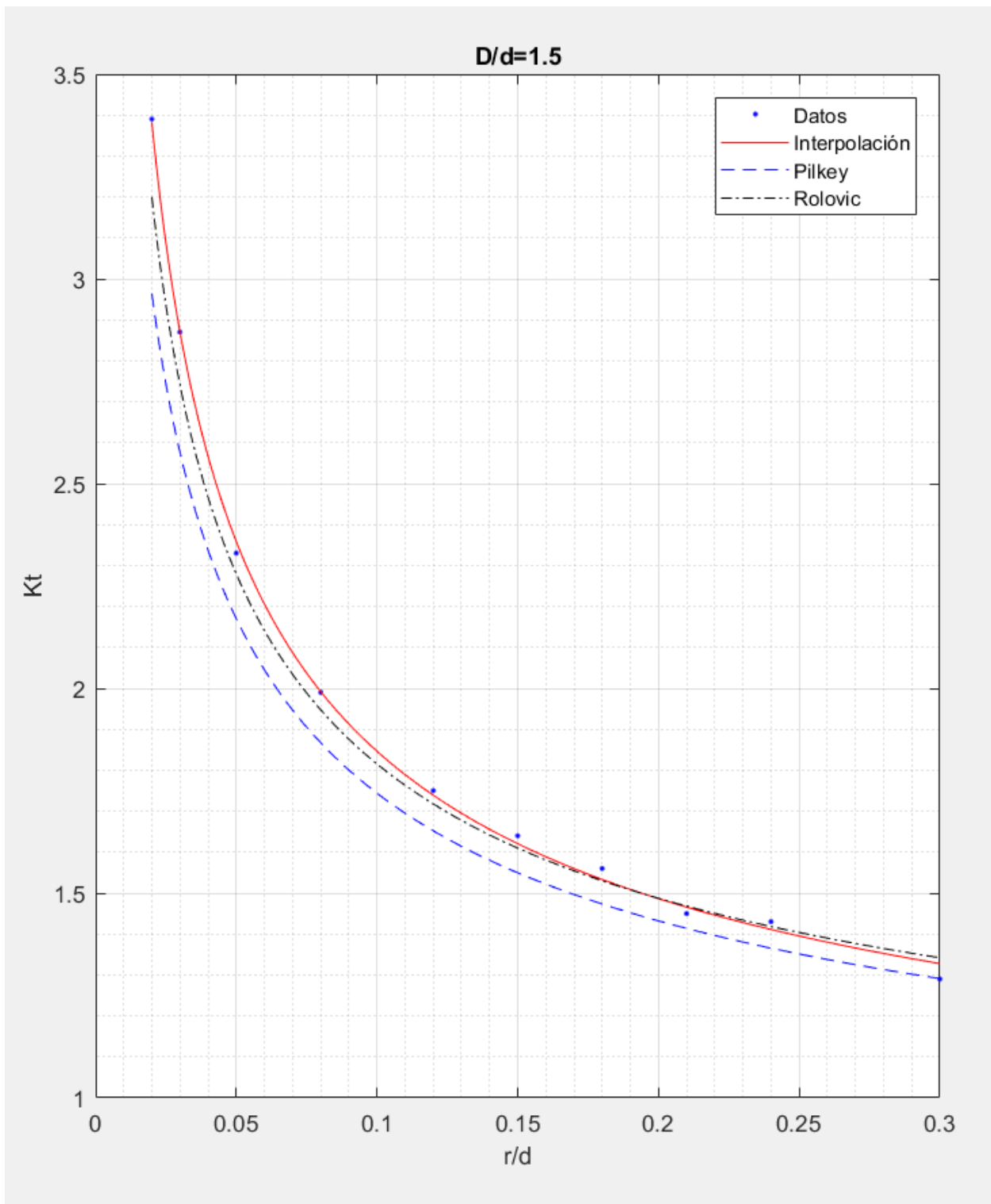


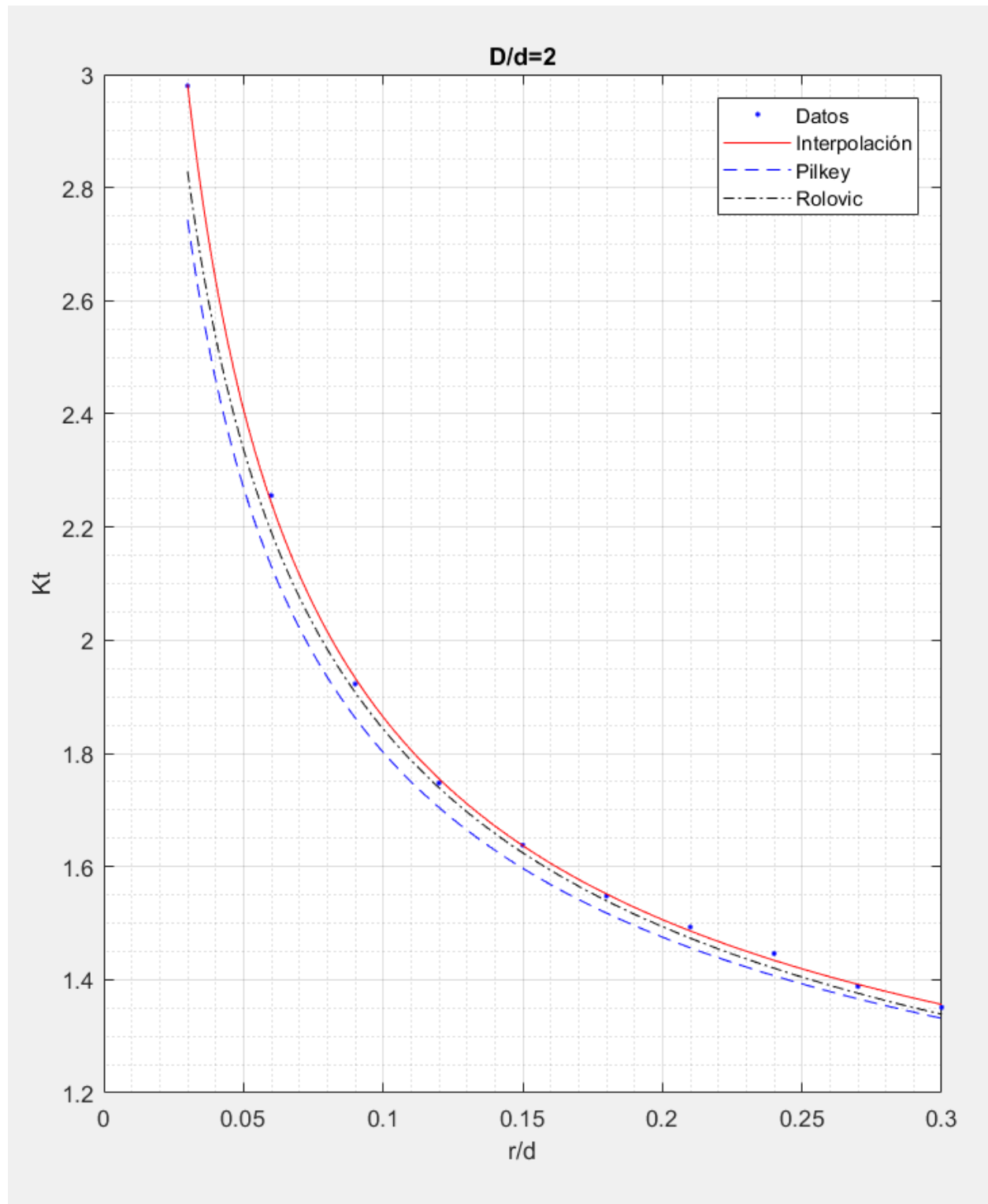
Figura 4-4 Comparación de K_σ para el caso $D/d=1.02$.

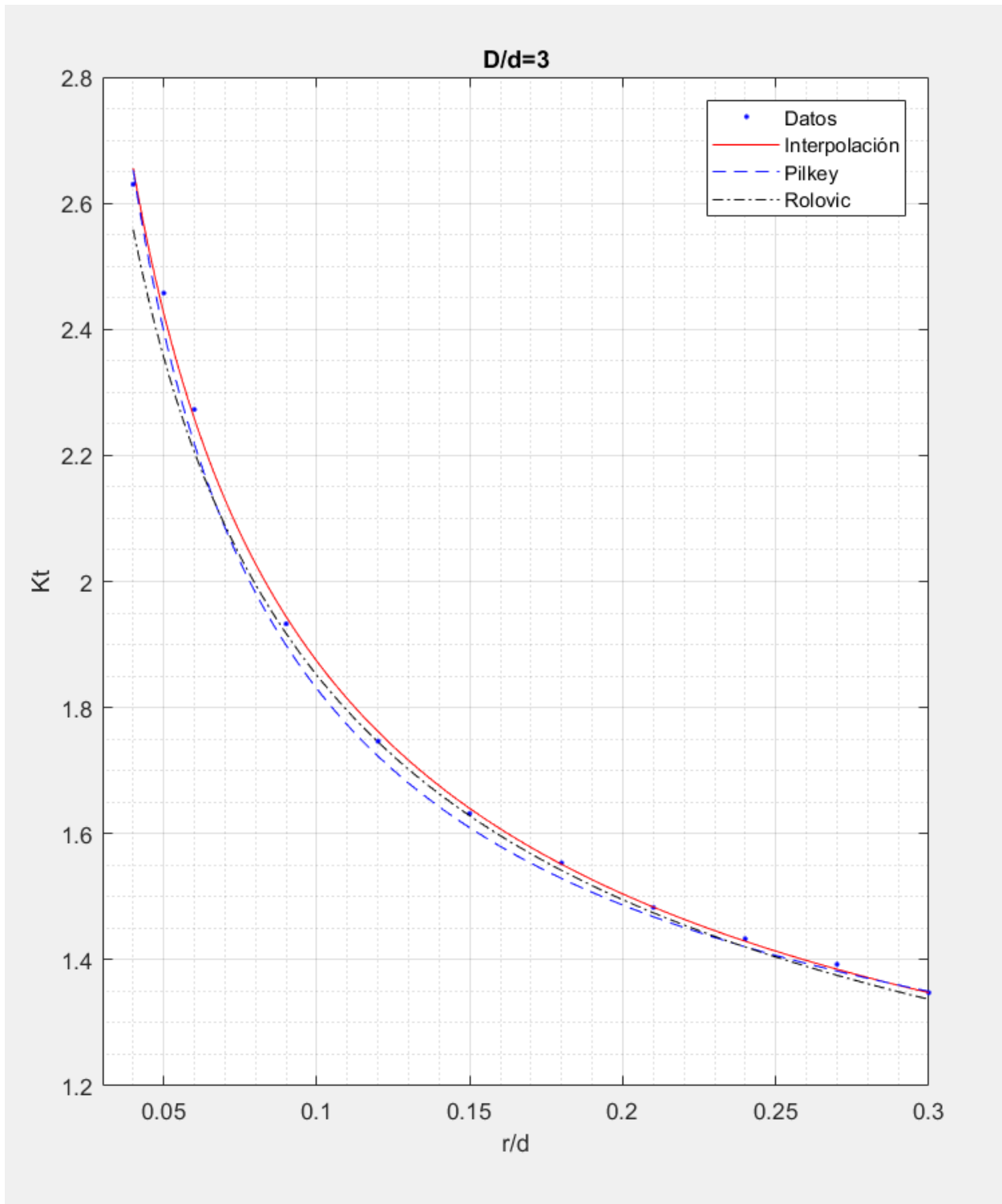
Figura 4-5 Comparación de K_σ para el caso $D/d=1.05$.

Figura 4-6 Comparación de K_σ para el caso $D/d=1.1$.

Figura 4-7 Comparación de K_σ para el caso $D/d=1.2$.

Figura 4-8 Comparación de K_σ para el caso $D/d=1.5$.

Figura 4-9 Comparación de K_σ para el caso $D/d=2$.

Figura 4-10 Comparación de K_t para el caso $D/d=3$.

4.2 Comentarios sobre los resultados.

Algunos comentarios en general sobre los resultados:

- Los resultados que he obtenido con mi modelado son en general bastante parecidos a los de Rolovic para todos los casos, en ningún caso se nota una diferencia preocupante. Esto sugiere que el modelado es correcto y se comporta bien.

En la investigación de Rolovic contaban con más recursos que yo y podían hacer muchas más simulaciones, en los artículos hablan de miles, por ejemplo, cambiando los valores de los diámetros, pero manteniendo la relación entre ellos, esto hace que puedan obtener resultados más precisos.

Aun así, se puede observar que la mayoría de los valores de mi modelo son ligeramente mayores que los de Rolovic, lo que indica que las diferencias en el modelado y mallado entre los dos hace que los resultados difieran.

- Las curvas que ofrece Pilkey en su libro difieren en muchos de los casos de los obtenidos con mi modelo y el de Rolovic, sobre todo para valores de r/d bajos. Esto indica que probablemente los experimentos con los que sacaron las tablas no eran precisos y tenían algún problema.

Que las mayores diferencias sean a r/d bajos posiblemente tenga que ver con problemas en la creación de los modelos. Los experimentos de estas investigaciones tuvieron lugar hace decenas de años, probablemente no tendrían acceso a técnicas de fabricación muy precisas y esto introdujo errores en los radios de acuerdo tan pequeños o puede que el método de la fotoelasticidad fuera menos preciso en radios de acuerdo pequeños.

También influiría seguramente, como comenta Rolovic, que los ensayos se hacían en placas planas y después se hacía una conversión de 2-D a 3-D y podría ser que estas conversiones dieran valores erróneos para pequeños radios de acuerdo.

Un aspecto muy importante de comentar es que los valores de las curvas de Pilkey son por lo general menores que las de las obtenidas con Elementos Finitos, con un error bastante grande en algunos casos (de hasta 14%). Esto es un problema en la práctica, ya que si diseñabas un eje guiándote con esos valores y el concentrador de tensiones que has tenido en cuenta es mucho menor que el que hay realmente, podrías acabar con una pieza que puede fallar mucho antes de lo que pensabas. Tipton comenta en su artículo que un error del 10% en el concentrador de tensiones, puede conllevar a cálculos de vida a fatiga erróneos por un factor de 5 o más [9].

Para valores de D/d muy bajos y r/d altos pasa lo contrario, el concentrador de tensiones que te da la curva es mucho mayor de lo que en realidad es, lo que conllevaría un sobrecoste en el diseño de la pieza. A partir de valores de D/d de 1.05, para r/d altos los valores los resultados son relativamente parecidos a los que dan los programas de Elementos Finitos. En estos rangos parece que los modelos experimentales y las conversiones 2-D a 3-D funcionan mejor.

5 CONCLUSIÓN

Las tablas de concentradores de tensiones se han usado durante muchos años como punto de partida en el diseño de distintas piezas y para la docencia, pero como se ha comprobado en este trabajo, han quedado un poco desfasadas. Los valores que se ofrecen en el Libro de Pilkey, sacados de investigaciones y costosos experimentos de Peterson, Leven, Hartman, Allison y muchos más, se alejan de la realidad por un margen importante, además, estas tablas te dan poca libertad de elección de geometrías. En un mundo en el que los programas de elementos finitos son cada vez más accesibles e intuitivos, usar este tipo de tablas queda un obsoleto. Cada vez se exige más precisión en los diseños de las piezas para mejorar el comportamiento en servicio y reducir costes y coeficientes de seguridad y esas tablas no son suficientemente precisas.

Poder modelar tu propia pieza con las medidas y cargas que necesites. Con el proyecto conjunto de la web que comentaba al principio del trabajo, pretendemos que estos modelos sean accesibles para cualquier persona, ya que modelar y analizar todas las geometrías que se presentaban en esas tablas es un trabajo tedioso. Futuros estudiantes podrán continuar y profundizar con mi trabajo y el de Fernando Pascual, incluyendo más geometrías, otro tipo de cargas e incluso mejorando los modelos que hemos creado.

Estos resultados pueden ser útiles para la docencia, aprender el extenso y complicado mundo de la elasticidad y resistencia de materiales y del cálculo, diseño y ensayo de máquinas con herramientas como las de este trabajo, ayudando a visualizar las tensiones y deformaciones, puede ser de gran ayuda a los alumnos.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] F. Pascual Goce, Numerical investigation through Finite Elements of Neuber's and Molski-Glinka's rules for calculation of elastoplastic stress and strain in notched elements, Sevilla: ETSI, 2019.
- [2] M. Abasolo, S. Navalpotro, E. Iriondo y J. Corral, Diseño de máquinas, OpenCourseWare, ISSN 2255-2316, Universidad el País Vasco.
- [3] W. D. Pilkey, Peterson's Stress Concentration Factors, Segunda Edición, JOHN WILEY & SONS, INC., 2008.
- [4] ANSYS, ANSYS modeling and meshing guide, 2004.
- [5] I. M. Allison, The Elastic Stress Concentration Factors in Shouldered Shafts PART I: Shafts Subjected to Torsion, *Aeronautical Q.*, Vol. 12, p. 189., 1961.
- [6] L. Hartman, FACTORS OF STRESS CONCENTRATION FOR THE BENDING CASE OF FILLETS IN FLAT BARS AND SHAFTS WITH CENTRAL ENLARGED SECTION, *Proc. SESA*, Vol. 19, No. 1, p. 53., 1951.
- [7] I. H. Wilson y D. J. White, «STRESS-CONCENTRATION FACTORS FOR SHOULDER FILLETS AND GROOVES IN PLATES,» 1973.
- [8] R. Rolovic, S. M. Tipton y J. R. Solem, «Multiaxial Stress Concentration in Filleted Shafts,» 2001.
- [9] S. M. Tipton, J. R. Sorem y R. D. Rolovic, «Updated Stress Concentration Factors for Filleted Shafts in Bending and Tension,» 1996.
- [10] I. M. Allison, «The Elastic Stress Concentration Factors in Shouldered Shafts PART II: Shafts Subjected to Bending,» *Aeronautical Q.*, , vol. 12, nº 219, 1961.
- [11] I. M. Allison, «The Elastic Stress Concentration Factors in Shouldered Shafts PART III: Shafts Subjected to Tension,» *Aeronautical Q.*, vol. 13, nº 129, 1962.
- [12] A. J. Muminovic, I. Saric y N. Repcic, «Numerical Analysis of Stress Concentration Factors,» *ScienceDirect*, 2014.

7 ANEXO: CÓDIGOS

7.1 Código Ansys: caso R menor que H

```
/BATCH
/PREP7
D = 20e-3
dp = D/2
r = (dp)*(0.15)
L = 50e-3
Eyoung=202375000000
Poisson = 0.33
Carga = 5000
et,1,187
MP,EX,1,Eyoung
MP,EY,1,Eyoung
MP,EZ,1,Eyoung
MP,PRXY,1,Poisson
MP,PRXZ,1,Poisson
MP,PRYZ,1,Poisson
K,,0,0,0,
K1=KP(0,0,0)
K,,0,D/2,0,
K3=KP(0,D/2,0)
K,,L,0,0,
K4=KP(L,0,0)
K,,L,dp/2,0,
K5=KP(L,dp/2,0)
K,,-L,0,0,
K6=KP(-L,0,0)
K,,-L,D/2,0,
K7=KP(-L,D/2,0)
K,,0,(dp/2)+r,0,
```

```

K8=KP(0,(dp/2)+r,0)
K,,r,dp/2,0,
K9=KP(r,dp/2,0)
K,,r,(dp/2)+r,0,
K10=KP(r,(dp/2)+r,0)
K,,r,0,0,
K11=KP(r,0,0)
K,,-1e-3,0,0,
K12=KP(-1e-3,0,0)
K,,-1e-3,D/2,0,
K13=KP(-1e-3,D/2,0)
K,,r+1e-3,0,0,
K15=KP(r+1e-3,0,0)
K,,r+1e-3,dp/2,0,
K16=KP(r+1e-3,dp/2,0)
LARC,K8,K9,K10,r,
*GET,Fillet,LINE,,NUM,MAX
L,K13,K7
*GET,L1,LINE,,NUM,MAX
L,K13,K12
*GET,L2,LINE,,NUM,MAX
L,K12,K6
*GET,L3,LINE,,NUM,MAX
L,K6,K7
*GET,L4,LINE,,NUM,MAX
AL,L1,L2,L3,L4
*GET,A1,AREA,,NUM,MAX
L,K3,K13
*GET,L5,LINE,,NUM,MAX
L,K3,K8
*GET,L6,LINE,,NUM,MAX
L,K8,K1
*GET,L7,LINE,,NUM,MAX
L,K1,K12
*GET,L8,LINE,,NUM,MAX
AL,L2,L5,L6,L7,L8
*GET,A2,AREA,,NUM,MAX
L,K9,K11

```

```
*GET, L10, LINE, , NUM, MAX
L, K11, K1
*GET, L11, LINE, , NUM, MAX
AL, Fillet, L10, L11, L7
*GET, AFillet, AREA, , NUM, MAX
L, K9, K16
*GET, L12, LINE, , NUM, MAX
L, K15, K16
*GET, L9, LINE, , NUM, MAX
L, K15, K11
*GET, L13, LINE, , NUM, MAX
AL, L10, L12, L9, L13
*GET, A3, AREA, , NUM, MAX
L, K16, K5
*GET, L14, LINE, , NUM, MAX
L, K5, K4
*GET, L15, LINE, , NUM, MAX
L, K4, K15
*GET, L16, LINE, , NUM, MAX
AL, L9, L14, L15, L16
*GET, A4, AREA, , NUM, MAX
LESIZE, Fillet, , , 8, , , ,
LESIZE, L6, , , 4, , , ,
LESIZE, L5, , , 2, , , ,
LESIZE, L14, , , 8, 6, , , ,
LESIZE, L1, , , 7, 4, , , ,
LESIZE, L4, , , 3, , , ,
LESIZE, L15, , , 2, , , ,
EXTOPT, ON
VROTAT, AFillet, , , , K6, K4, 360, 60
VROTAT, A3, , , , K6, K4, 360, 18
VROTAT, A2, , , , K6, K4, 360, 18
VROTAT, A1, , , , K6, K4, 360, 16
VROTAT, A4, , , , K6, K4, 360, 16
VADD, ALL
SMRTSIZE, 3
MSHKEY, 0
VMESH, ALL
```

```

NSEL,S,LOC,X,L,L
D,ALL,ALL,0
ALLSEL
NSEL,S,LOC,X,-L,-L,,
NSEL,R,LOC,Y,D/2,D/2,
NSEL,R,LOC,Z,0,0
F,ALL,FX,Carga
ALLSEL
NSEL,S,LOC,X,-L,-L,,
NSEL,R,LOC,Y,-D/2,-D/2,
NSEL,R,LOC,Z,0,0
F,ALL,FX,-Carga
ALLSEL
/Sol
ANTYPE,0
Solve
/POST1
NSEL,S,LOC,X,0,r,,
PRNSOL,S,PRIN

```

7.2 Código Ansys: Caso R igual a H

Código 2.1 Parámetros en el caso de R menor que H.

```

/BATCH
/PREP7
D = 20*(1e-3)
dp = D/(1.02)
r = (dp)*(0.01)
L = 50e-3
Eyoung = 202375000000
Poisson = 0.33
Carga = 5000
H=(D-dp)/2
et,1,187
MP,EX,1,Eyoung
MP,EY,1,Eyoung

```

```

MP,EZ,1,Eyoung
MP,PRXY,1,Poisson
MP,PRXZ,1,Poisson
MP,PRYZ,1,Poisson
K,,0,0,0,
K1=KP(0,0,0)
K,,0,D/2,0,
K3=KP(0,D/2,0)
K,,L,0,0,
K4=KP(L,0,0)
K,,L,dp/2,0,
K5=KP(L,dp/2,0)
K,,-L,0,0,
K6=KP(-L,0,0)
K,,-L,D/2,0,
K7=KP(-L,D/2,0)
K,,r,dp/2,0,
K9=KP(r,dp/2,0)
K,,r,(dp/2)+r,0,
K10=KP(r,(dp/2)+r,0)
K,,r,0,0,
K11=KP(r,0,0)
K,,-1e-3,0,0,
K12=KP(-1e-3,0,0)
K,,-1e-3,D/2,0,
K13=KP(-1e-3,D/2,0)
K,,r+1e-3,0,0,
K15=KP(r+1e-3,0,0)
K,,r+1e-3,dp/2,0,
K16=KP(r+1e-3,dp/2,0)
LARC,K9,K3,K10,r,
*GET,Fillet,LINE,,NUM,MAX
L,K13,K7
*GET,L1,LINE,,NUM,MAX
L,K13,K12
*GET,L2,LINE,,NUM,MAX
L,K12,K6
*GET,L3,LINE,,NUM,MAX

```

```

L,K6,K7
*GET,L4,LINE,,NUM,MAX
AL,L1,L2,L3,L4                                !Area
*GET,A1,AREA,,NUM,MAX
L,K3,K13
*GET,L5,LINE,,NUM,MAX
L,K3,K1
*GET,L7,LINE,,NUM,MAX
L,K1,K12
*GET,L8,LINE,,NUM,MAX
AL,L2,L5,L7,L8
*GET,A2,AREA,,NUM,MAX
L,K9,K11
*GET,L10,LINE,,NUM,MAX
L,K11,K1
*GET,L11,LINE,,NUM,MAX
AL,Fillet,L10,L11,L7
*GET,AFillet,AREA,,NUM,MAX
L,K9,K16
*GET,L12,LINE,,NUM,MAX
L,K15,K16
*GET,L9,LINE,,NUM,MAX
L,K15,K11
*GET,L13,LINE,,NUM,MAX
AL,L10,L12,L9,L13
*GET,A3,AREA,,NUM,MAX
L,K16,K5
*GET,L14,LINE,,NUM,MAX
L,K5,K4
*GET,L15,LINE,,NUM,MAX
L,K4,K15
*GET,L16,LINE,,NUM,MAX
AL,L9,L14,L15,L16
*GET,A4,AREA,,NUM,MAX
LESIZE,Fillet,,,3,,,,,
!LESIZE,L6,,,4,,,,,
LESIZE,L5,,,1,,,,,
LESIZE,L14,,,8,6,,,,,

```

```

LESIZE,L1,,,7,4,,,,,
LESIZE,L4,,,3,,,,,
LESIZE,L15,,,2,,,,,
EXTOPT,ON
VROTAT,AFillet,,,,,K6,K4,360,120
VROTAT,A3,,,,,K6,K4,360,18
VROTAT,A2,,,,,K6,K4,360,18
VROTAT,A1,,,,,K6,K4,360,16
VROTAT,A4,,,,,K6,K4,360,16
VADD,ALL
SMRTSIZE,3
MSHKEY,0
VMESH,ALL
NSEL,S,LOC,X,L,L
D,ALL,ALL,0
ALLSEL
NSEL,S,LOC,X,-L,-L,,
NSEL,R,LOC,Y,D/2,D/2,
NSEL,R,LOC,Z,0,0
F,ALL,FX,Carga
ALLSEL
NSEL,S,LOC,X,-L,-L,,
NSEL,R,LOC,Y,-D/2,-D/2,
NSEL,R,LOC,Z,0,0
F,ALL,FX,-Carga
ALLSEL
/So1
ANTYPE,0
Solve
/POST1
NSEL,S,LOC,X,0,r,,
PRNSOL,S,PRIN

```

7.3 Código Ansys: caso R mayor que H

```

/BATCH
/PREP7

```

```

D = 20*(1e-3)
dp = D/(1.2)
r = (dp)*0.26
L = 50e-3
Eyoung=202375000000
Poisson = 0.33
Carga = 5000
A=(3.415650255319866)*(1e-3)
H=(D-dp)/2
et,1,187
MP,EX,1,Eyoung
MP,EY,1,Eyoung
MP,EZ,1,Eyoung
MP,PRXY,1,Poisson
MP,PRXZ,1,Poisson
MP,PRYZ,1,Poisson
K,,0,0,0,
K1=KP(0,0,0)
K,,0,D/2,0,
K3=KP(0,D/2,0)
K,,L,0,0,
K4=KP(L,0,0)
K,,L,dp/2,0,
K5=KP(L,dp/2,0)
K,,-L,0,0,
K6=KP(-L,0,0)
K,,-L,D/2,0,
K7=KP(-L,D/2,0)
K,,A,dp/2,0,
K9=KP(A,dp/2,0)
K,,A,(dp/2)+r,0,
K10=KP(A,(dp/2)+r,0)
K,,A,0,0,
K11=KP(A,0,0)
K12=KP(-1e-3,0,0)
K,,-1e-3,D/2,0,
K13=KP(-1e-3,D/2,0)
K,,r+1e-3,0,0,

```



```

K15=KP(r+1e-3,0,0)
K, , r+1e-3, dp/2, 0,
K16=KP(r+1e-3, dp/2, 0)
LARC, K9, K3, K10, r,
*GET, Fillet, LINE, , NUM, MAX
L, K13, K7
*GET, L1, LINE, , NUM, MAX
L, K13, K12
*GET, L2, LINE, , NUM, MAX
L, K12, K6
*GET, L3, LINE, , NUM, MAX
L, K6, K7
*GET, L4, LINE, , NUM, MAX
AL, L1, L2, L3, L4                                !Area
*GET, A1, AREA, , NUM, MAX
L, K3, K13
*GET, L5, LINE, , NUM, MAX
L, K3, K1
*GET, L7, LINE, , NUM, MAX
L, K1, K12
*GET, L8, LINE, , NUM, MAX
AL, L2, L5, L7, L8
*GET, A2, AREA, , NUM, MAX
L, K9, K11
*GET, L10, LINE, , NUM, MAX
L, K11, K1
*GET, L11, LINE, , NUM, MAX
AL, Fillet, L10, L11, L7
*GET, AFillet, AREA, , NUM, MAX
L, K9, K16
*GET, L12, LINE, , NUM, MAX
L, K15, K16
*GET, L9, LINE, , NUM, MAX
L, K15, K11
*GET, L13, LINE, , NUM, MAX
AL, L10, L12, L9, L13
*GET, A3, AREA, , NUM, MAX
L, K16, K5

```

```

*GET, L14, LINE, , NUM, MAX
L, K5, K4
*GET, L15, LINE, , NUM, MAX
L, K4, K15
*GET, L16, LINE, , NUM, MAX
AL, L9, L14, L15, L16
*GET, A4, AREA, , NUM, MAX
LESIZE, Fillet, , , 7, , , , ,
LESIZE, L5, , , 1, , , , ,
!LESIZE, L12, , , 3, , , , ,
LESIZE, L14, , , 8, 6, , , ,
LESIZE, L1, , , 7, 4, , , ,
LESIZE, L4, , , 3, , , , ,
LESIZE, L15, , , 2, , , , ,
EXTOPT, ON
VROTAT, AFillet, , , , , K6, K4, 360, 60
VROTAT, A3, , , , , K6, K4, 360, 18
VROTAT, A2, , , , , K6, K4, 360, 18
VROTAT, A1, , , , , K6, K4, 360, 16
VROTAT, A4, , , , , K6, K4, 360, 16
VADD, ALL
SMRTSIZE, 3
MSHKEY, 0
VMESH, ALL
NSEL, S, LOC, X, L, L
D, ALL, ALL, 0
ALLSEL
NSEL, S, LOC, X, -L, -L, ,
NSEL, R, LOC, Y, D/2, D/2,
NSEL, R, LOC, Z, 0, 0
F, ALL, FX, Carga
ALLSEL
NSEL, S, LOC, X, -L, -L, ,
NSEL, R, LOC, Y, -D/2, -D/2,
NSEL, R, LOC, Z, 0, 0
F, ALL, FX, -Carga
ALLSEL
/Sol

```

```
ANTYPE,0
Solve
/POST1
NSEL,S,LOC,X,0,A,,
PRNSOL,S,PRIN
```

7.4 Código Matlab: cálculo del parámetro para el caso de R mayor que H.

```
clc
clear all
format long
D=20;
dd=1.2;
d2=D/dd;
rd=0.26;
h=(D-d2)/2;
r=d2*rd;
A=sqrt((r^2)-((r-h)^2))
```

7.5 Código Matlab: Gráficas

```
clc
clear all
DD=0.02;
d=[0.0066,0.01,0.0133,0.0166,(0.02/1.1),(0.02/1.05),(0.02/1.02)];
D_d=[3,2,1.5,1.2,1.1,1.05,1.02];
t=(DD-d)/2;
rd2=[0.03:0.03:0.3]';
rdrolo=linspace(0.03,0.3,500);
```

```

rd3=[0.04,0.05,0.06,0.09,0.12,0.15,0.18,0.21,0.24,0.27,0.3]';
rd1_5=[0.02,0.03,0.05,0.08,0.12,0.15,0.18,0.21,0.24,0.3]';
rd1_2=[0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.07,0.09,0.13,0.15,0.17,0.2,0.23,0.26,0.3]';
rd1_1=[0.005,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1]';
rd1_05=[0.007,0.01,0.02,0.025,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1]';
rd1_02=[0.005,0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.09,0.1]';
rd(1,:)=linspace(0.04,0.3,300);
rd(2,:)=linspace(0.03,0.3,300);
rd(3,:)=linspace(0.02,0.3,300);
rd(4,:)=linspace(0.01,0.3,300);
rd(5,:)=linspace(0.005,0.1,300);
rd(6,:)=linspace(0.007,0.1,300);
rd(7,:)=linspace(0.005,0.1,300);
for i=1:length(d)
    for j=1:(length(rd(i,:)))
        Ktrollo(i,j)=0.632+0.377*(D_d(i)^(-4.4))+(rd(i,j)^(-0.5))*sqrt((-0.14-
0.363*((D_d(i))^2)+0.503*(D_d(i))^4)/(1-2.39*((D_d(i))^2)+3.368*(D_d(i))^4));
    end
end

Kt2=[2.98 2.255859875 1.922851054 1.747510914 1.63794787 1.547823431 1.493140083
1.446310718 1.388093079 1.351081191]';
Kt3=[2.63          2.45745,          2.2728,          1.9328,          1.7468,
2, 1.5535, 1.4831, 1.4333, 1.3926, 1.34773]';
Kt1_5=[3.39 2.87 2.33 1.99 1.75 1.64 1.56 1.45 1.43 1.29]';
Kt1_2=[4.1 3.11 2.67 2.37 2.21 1.98 1.81 1.61 1.56 1.51 1.45 1.41 1.37 1.33]';
Kt1_1=[4.25 3.34 2.65 2.17 2.03 1.94 1.9 1.79 1.7 1.64 1.61]';
Kt1_05=[3.08 2.59 2.19 2.07 1.9 1.83 1.74 1.67 1.6 1.57 1.52 1.5]';
Kt1_02=[2.465 1.997 1.759 1.62 1.55 1.503 1.45 1.41 1.38 1.35 1.34]';
for j=1:length(d)
    r(j,:)=rd(j,:).*d(j);
    for i=1:(length(rd(j,:)))
        if 0.5<=(t(j)/r(j,i))<2
            C1=0.947+1.206*sqrt(t(j)/r(j,i))-0.13*t(j)/r(j,i);
            C2=0.022-3.405*sqrt(t(j)/r(j,i))+0.915*t(j)/r(j,i);

```

```

        C3=0.869+1.777*sqrt(t(j)/r(j,i))-0.555*t(j)/r(j,i);
        C4=-0.810+0.422*sqrt(t(j)/r(j,i))-0.260*t(j)/r(j,i);
    end
    if 2<=(t(j)/r(j,i))<=20
        C1=1.232+0.832*sqrt(t(j)/r(j,i))-0.008*t(j)/r(j,i);
        C2=-3.813+0.968*sqrt(t(j)/r(j,i))-0.260*t(j)/r(j,i);
        C3=7.423-4.868*sqrt(t(j)/r(j,i))+0.869*t(j)/r(j,i);
        C4=-3.839+3.070*sqrt(t(j)/r(j,i))-0.600*t(j)/r(j,i);
    end
    Kt(j,i)=C1+C2*(2*t(j)/DD)+C3*((2*t(j)/DD)^2)+C4*((2*t(j)/DD)^3);
end
end

figure(1)
int1=fit(rd3,Kt3,'power2');
plot(int1,rd3,Kt3)
title('D/d=3')
hold on
plot(rd(1,:),Kt(1:,:),'b--')
hold on
plot(rd(1,:),Ktrollo(1:,:),'k-.')
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')
axis([0.03 0.3 1.2 2.8])

figure(2)
int2=fit(rd2,Kt2,'power2');
plot(int2,rd2,Kt2)
title('D/d=2')
hold on
plot(rd(2,:),Kt(2:,:),'b--')
hold on
plot(rd(2,:),Ktrollo(2:,:),'k-.')

```

```
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')

figure(3)
int3=fit(rd1_5,Kt1_5,'power2');
plot(int3,rd1_5,Kt1_5)
title('D/d=1.5')
hold on
plot(rd(3,:),Kt(3,),'b--')
hold on
plot(rd(3,:),Ktrollo(3,),'k-.')
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')

figure(4)
int4=fit(rd1_2,Kt1_2,'power2');
plot(int4,rd1_2,Kt1_2)
title('D/d=1.2')
hold on
plot(rd(4,:),Kt(4,),'b--')
hold on
plot(rd(4,:),Ktrollo(4,),'k-.')
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')

figure(5)
int5=fit(rd1_1,Kt1_1,'power2');
plot(int5,rd1_1,Kt1_1)
title('D/d=1.1')
```

```
hold on
plot(rd(5,:),Kt(5,),'b--')
hold on
plot(rd(5,:),Ktrollo(5,),'k-.')
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')

figure(6)
int6=fit(rd1_05,Kt1_05,'power2');
plot(int6,rd1_05,Kt1_05)
title('D/d=1.05')
hold on
plot(rd(6,:),Kt(6,),'b--')
hold on
plot(rd(6,:),Ktrollo(6,),'k-.')
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')

figure(7)
int7=fit(rd1_02,Kt1_02,'power2');
plot(int7,rd1_02,Kt1_02)
title('D/d=1.02')
hold on
plot(rd(7,:),Kt(7,),'b--')
hold on
plot(rd(7,:),Ktrollo(7,),'k-.')
grid on
grid minor
xlabel('r/d')
ylabel('K')
legend('Datos','Interpolación','Pilkey','Rolovic')
```