

# GENERACIÓN Y ESTABILIZACIÓN DE OSCILACIONES EN EL ROBOT INDUSTRIAL RM10

M.A. Corchero, J. Aracil, F.R. Rubio

Escuela Superior de Ingenieros (Sevilla), {macperu, aracil, rubio}@cartuja.us.es

## Resumen

*El trabajo se centra en el problema de la generación y estabilización de oscilaciones en el sistema mecánico formado por el robot industrial RM10. El método propuesto, basado en moldeo de energía, funciona en sistemas plenamente actuados, como el propuesto, e incluso en sistemas subactuados, como el péndulo invertido de Furuta. Se presentará una explicación del método general y los resultados obtenidos en su aplicación al robot manipulador industrial RM10.*

**Palabras clave:** Robótica, Bifurcación de Hopf, Generación de Oscilaciones, Moldeo de energía, Sistemas Hamiltonianos.

## 1 INTRODUCCIÓN

El trabajo se centra en la posibilidad de llevar un sistema electromecánico a un estado de oscilación automantenida mediante la aplicación de una ley de control basada en moldeo de energía.

La metodología propuesta hace corresponder la dinámica del brazo manipulador con la de un sistema Hamiltoniano generalizado elegido adecuadamente, que puede presentar oscilaciones robustas. El nuevo sistema muestra comportamientos muy interesantes porque puede derivar en una bifurcación de Hopf en función de los valores que tome un determinado parámetro. Por lo tanto, el sistema puede presentar oscilaciones robustas asociadas a un ciclo límite. El método introducido consiste en encontrar una ley de control que asocie el sistema en bucle abierto con este comportamiento deseado en bucle cerrado.

El método usado para conseguir las leyes de control corresponde a la familia de métodos de moldeo de energía ([8]). En la mayoría de los casos, estos métodos intentan encontrar leyes de control que conduzcan el sistema controlado a un punto de equilibrio aislado. Sin embargo, aquí nuestro objetivo es alcanzar una curva cerrada (ciclo límite) que produzca un comportamiento oscilatorio estable. Merece la pena mencionar que este ciclo límite nace a través de una bifurcación de

Hopf supercrítica. Además, para ciertos valores del parámetro de bifurcación, el sistema tiene un punto atractor, que es el caso considerado normalmente en los sistemas de control convencionales por moldeo de energía. Sin embargo, para otros valores de ese parámetro, el conjunto de atracción del sistema dinámico cambia a un ciclo límite y, por tanto, el sistema oscila de forma estable y robusta.

Se presentará el compendio teórico que sustenta la metodología y topología del control implementado, y la implementación práctica del control, con las peculiaridades propias derivadas de la plataforma de experimentación elegida.

## 2 OSCILACIONES EN UN SISTEMA HAMILTONIANO GENERALIZADO

En esta sección, se introduce un sistema Hamiltoniano generalizado que presenta una bifurcación de Hopf supercrítica. El formalismo de sistema Hamiltoniano generalizado es particularmente adecuado para resolver los problemas de diseño de controladores por moldeo de energía. Bajo este formalismo, el comportamiento deseado del sistema en bucle cerrado puede ser establecido tal y como se explicará a continuación.

Dado que nuestro objetivo es la generación de oscilaciones robustas y autónomas en un sistema mecánico, un buen punto de partida para el estudio es el comportamiento del oscilador armónico clásico. Como se sabe las ecuaciones dinámicas de éste son de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -w_c^2 x_1 \end{cases} \quad (1)$$

Ya sabemos que las oscilaciones que proporciona este sistema no son robustas, en el sentido que ante la más mínima perturbación el sistema abandona la órbita de oscilación dirigiéndose al punto de equilibrio.

Para lograr definir un comportamiento de oscilación robusto en el sistema planteamos la

función de Hamilton deseada en bucle cerrado siguiente:

$$\begin{aligned} H_d &= \frac{1}{4}(w_c^2 x^2 + \dot{x}^2)^2 - \frac{\mu}{2}(w_c^2 x^2 + \dot{x}^2) = \\ &= \frac{1}{4}\Gamma^2 - \frac{\mu}{2}\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

siendo  $\Gamma = w_c^2 x^2 + \dot{x}^2$ .

Haciendo  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  y usando el formalismo de sistema Halmiltoniano generalizado incluyendo un factor de amortiguamiento, podemos expresar el sistema dinámico asociado a la función de Hamilton anterior de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R}) \cdot \nabla H_d \quad (3)$$

Siendo  $\mathbf{J}$  una matriz antisimétrica y  $\mathbf{R}$  una matriz de amortiguamiento, que tienen la forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Gamma - \mu} \\ \frac{-1}{\Gamma - \mu} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_a \end{bmatrix} \quad (4)$$

Obtenemos por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Gamma - \mu} \\ \frac{-1}{\Gamma - \mu} & -K_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x_1} H_d \\ D_{x_2} H_d \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dado que:

$$\begin{cases} D_{x_1} H_d = w_c^2 x_1 (\Gamma - \mu) \\ D_{x_2} H_d = x_2 (\Gamma - \mu) \end{cases} \quad (6)$$

Tendremos que la dinámica que presenta este sistema viene dada por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -w_c^2 x_1 - K_a \Psi x_2 \end{cases} \quad (7)$$

$$\ddot{x} = -w_c^2 x - K_a \Psi \dot{x} \quad (8)$$

Siendo  $\Psi = \Gamma - \mu = (w_c^2 x_1^2 + x_2^2 - \mu)$  el factor que determina el amortiguamiento introducido en el sistema oscilador armónico ( $K_a \Psi x_2$ ). De todas las órbitas de oscilación posibles, el sistema tenderá a aquella en la que  $\Gamma = 0$ , corrigiendo el sistema autónomamente cualquier perturbación que lo saque de dicha órbita, es decir, las oscilaciones generadas son robustas.

Éste es un sistema muy interesante en su comportamiento, ya que deriva en una bifurcación de Hopf supercrítica cuando el parámetro  $\mu = 0$ .

La forma geométrica de  $H_d$  como función de diferentes valores del parámetro  $\rho = \sqrt{\Gamma}$  se muestra en la Figura 1.

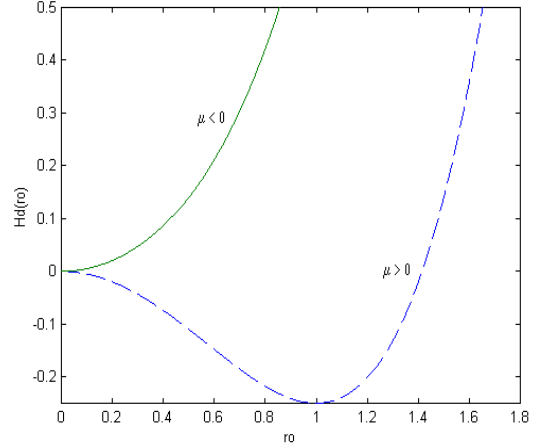


Figura 1: Curvas  $H_d(\rho)$

La Figura 2 se puede obtener por medio de una rotación elipsoidal de las curvas anteriores. De éstas se deduce fácilmente que para valores  $\mu < 0$ , tienen un valor mínimo simple en el origen, pero para valores  $\mu > 0$ , el mínimo se convierte en un máximo local, y el mínimo se alcanza ahora en una elipse cerrada que rodea al origen. Estas formas dan una idea geométrica intuitiva del comportamiento del sistema. Suministran el molde de energía deseado, el cual será el objetivo en nuestro problema de control.

Notar que el razonamiento anterior es válido para cualquier  $\Psi$  de la forma  $\Psi = \frac{x_2^2}{2} + f(x_1)$ , que de lugar a una curva cerrada.

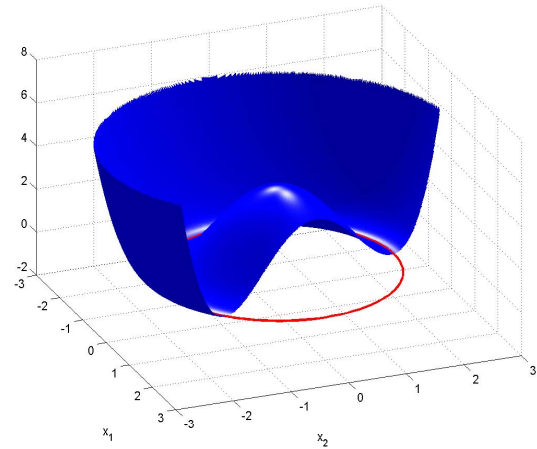


Figura 2: Función de Hamilton deseada para el bucle cerrado

## 2.1 ANÁLISIS DE LA BIFURCACIÓN PRODUCIDA

La linealización del sistema 7 en el origen viene dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_c^2 & K_a\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

cuyo polinomio característico es:

$$\lambda^2 - K_a\mu\lambda + w_c^2 \quad (10)$$

y los correspondientes autovalores:

$$\lambda_{1,2} = \frac{K_a\mu \pm \sqrt{K_a^2\mu^2 - 4w_c^2}}{2} \quad (11)$$

Entonces, para valores negativos de  $\mu$  la parte real de los autovalores es negativa y por tanto el origen es estable. Para  $\mu = 0$ ,  $\lambda = \pm jw_c$ , y el origen es un centro; y para valores positivos de  $\mu$ , la parte real de los autovalores es positiva, por lo que el origen es inestable.

Por lo tanto, el sistema tiene un solo punto de equilibrio en el origen para  $\mu < 0$ , y para  $\mu > 0$  este equilibrio se vuelve inestable y las trayectorias tienden a un ciclo límite. Siendo así, se produce una bifurcación de Hopf para  $\mu = 0$ , donde la estabilidad en el origen cambia de estable a inestable.

Las condiciones para una bifurcación de Hopf se satisfacen completamente ya que:

$$\left. \frac{dRe[\lambda(\mu)]}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \frac{K_a}{2} \neq 0 \quad (12)$$

El periodo inicial (de la oscilación de amplitud cero) es:

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_c} \quad (13)$$

Ésto da una aproximación razonablemente válida para el período de las oscilaciones esperadas, tanto más válida cuanto más pequeños sean los valores de  $\mu$ .

Considérese en el plano  $(x_1, x_2)$  la familia de curvas dada por  $\rho^2 = w_c^2 x_1^2 + x_2^2$ , donde  $\rho \geq 0$  es una coordenada radial. Entonces, es inmediato demostrar que:

$$\rho\dot{\rho} = -K_a(\rho^2 - \mu)x_2^2 \quad (14)$$

lo cual significa que para  $\rho < \sqrt{\mu}$ ,  $\dot{\rho} > 0$  y entonces  $\rho$  crece. Por otra parte, para  $\rho > \sqrt{\mu}$ ,  $\dot{\rho} < 0$  y

entonces  $\rho$  decrece. La curva correspondiente a  $\rho = 0$  es invariante ( $\dot{\rho} = 0$ ) y, por tanto, es un ciclo límite. Este ciclo límite corresponde a la curva cerrada definida por el mínimo de  $H_d$  de la Figura 2.

## 3 APLICACIÓN AL ROBOT INDUSTRIAL RM10

### 3.1 DESCRIPCIÓN DEL EQUIPO UTILIZADO

El robot utilizado es un brazo manipulador de seis grados de libertad, siendo todas sus articulaciones de revolución. El par de control en cada uno de sus ejes es proporcionado por un motor de corriente continua sin escobillas con una inercia pequeña. Estos motores son capaces de aplicar un par elevado en cada una de las articulaciones, permitiendo así un control donde se requiera grandes picos en los valores del par solicitado.

Los motores están acoplados a los ejes del brazo manipulador a través de reductoras de engranajes, siendo por tanto un robot de accionamiento indirecto. Las articulaciones también están provistas de frenos eléctricos para poder bloquear al robot en cualquier posición.

La medida de la posición del brazo manipulador se obtiene a partir de unos sensores inductivos de dos polos acoplados a cada motor. El controlador original del robot utilizaba una arquitectura basada en un bus VME, incluyendo tarjetas de control independientes para cada uno de los ejes. Esta estructura ha sido modificada para poder implementar controladores propios.

Ésto se ha llevado a cabo manteniendo la parte de potencia y las tarjetas de cada eje, e introduciendo una nueva tarjeta de control en tiempo real modelo DS1103, de la marca comercial dSPACE, en la que son implementadas las leyes de control. Esta tarjeta de control está insertada en una ranura de expansión del bus de un PC comercial, el cual dispone de un PowerPC a 333 MHz como procesador principal, además de un DSP adicional para gestionar las señales de entrada/salida del controlador del robot.

El sistema se completa con un el armario de control y una pistola de programación que permite la teleoperación del robot por parte del usuario (ver Figura 3). El brazo dispone además de un efector de sujeción en forma de pinza retráctil.

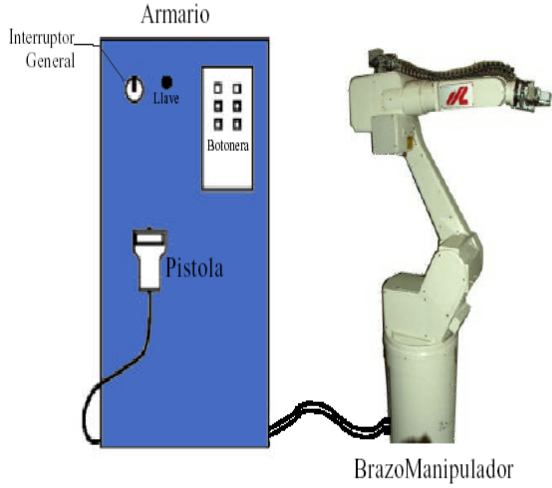


Figura 3: Diagrama del robot RM10

### 3.2 APLICACIÓN A LA DINÁMICA EN BUCLE CERRADO DEL ROBOT

El objetivo es diseñar un controlador que haga corresponder el sistema original en bucle abierto con el comportamiento deseado en bucle cerrado descrito en la ecuación 8. El método se ilustrará aplicado al robot RM10.

Como es bien conocido, la dinámica de un brazo manipulador puede ser descrita en términos de su ecuación de Euler-Lagrange, que es de la forma:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + G(q) + F(\dot{q}) + V(q, \dot{q})\dot{q} \quad (15)$$

donde cada uno de los términos corresponde a:

- $\tau$ : Vector de pares de fuerza aplicados a cada articulación ( $6 \times 1$ ).
- $M(q)$ : Matriz de inercias del robot ( $6 \times 6$ ).
- $G(q)$ : Vector de pares gravitatorios ( $6 \times 1$ ).
- $F(\dot{q})$ : Vector de pares de fricción ( $6 \times 1$ ).
- $V(q, \dot{q})$ : Matriz de efectos dinámicos provocados por fuerzas centrípetas y de Coriolis ( $6 \times 6$ ).
- $(q, \dot{q}, \ddot{q})$ : Vectores de posición, velocidad y aceleración angulares ( $6 \times 1$  c/u).

Esta ecuación es la que usamos como descriptora de la dinámica de nuestro sistema en bucle abierto. Dado que la dinámica deseada en bucle cerrado viene dada por la ecuación 8, sin más que sustituir 8 en 15 nos queda que las señales de par que

deberemos aplicar a cada articulación para conseguir las oscilaciones deseadas vienen dadas por:

$$\tau_d = -M(q)[-w_c^2 \cdot q - K_a \cdot (w_c^2 q^2 + \dot{q}^2 - \mu)] + G(q) + F(\dot{q}) + V(q, \dot{q})\dot{q} \quad (16)$$

De esta forma, aplicando los pares de fuerza dados por la ecuación anterior, obtendremos en el sistema un comportamiento oscilatorio como el descrito en la ecuación 8. Así, el robot oscilará alrededor de su posición de equilibrio dada por  $q = [000000]^T$ .

Las distintas matrices que se incluyen en el modelo tienen que ser identificadas mediante procedimientos de ajuste paramétrico.

De cara a tener un modelo en primera aproximación más manejable que solo identifique los pares más significativos, se propone un modelo simplificado que supone despreciables los pares de Coriolis-Centrífugos y considera la inercia efectiva del sistema como una matriz diagonal de constantes. Asimismo se considera un modelo de fricción estático y asimétrico que se verá en detalle más adelante. Cada uno de los parámetros viene dado en la Tabla 1.

Tabla 1: Valores de los parámetros de  $G(q)$

Parámetro	Descripción	Constante
$\alpha$	$G_1(s_{23}c_5 + c_{23}c_4c_5)$	$G_1 = 0.9903$
$\beta$	$G_2s_{23}$	$G_2 = 12.4131$
$\gamma$	$G_3c_{23}$	$G_3 = -5.0611$
$\delta$	$G_4c_2$	$G_4 = -46.7298$
$\varepsilon$	$G_5s_2$	$G_5 = -1.4120$
$\lambda$	$G_6c_{23}c_4$	$G_6 = -0.1874$
$\sigma$	$G_7c_{23}s_4$	$G_7 = -0.8992$

Las matrices incluidas son de la forma:

$$M(q) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon - \lambda - \sigma \\ \alpha + \beta + G_3s_{23} - \lambda - \sigma \\ -G_1s_{23}s_4s_5 + G_6s_{23}s_4 - G_7s_{23}c_4 \\ G_1(c_{23}s_5 + s_{23}c_4c_5) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para la estimación de los pares de fricción se ha empleado el modelo estático representado en la Figura 4. Con el fin de obtener un modelo más realista se ha optado por una característica de fricción asimétrica. Por tanto, para definir completamente el modelo ha sido necesario identificar cuatro parámetros de fricción por cada eje: las fricciones de Coulomb y viscosa para cada uno de los dos sentidos de movimiento.

La notación utilizada es:

- $F_c^\pm$ : Fricción de Coulomb para velocidades positivas/negativas.
- $F_v^\pm$ : Fricción viscosa para velocidades positivas/negativas.
- $v_{sp}^\pm$ : Velocidades límite de la zona de transición positiva/negativa.

Los valores tomados para estos parámetros se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2: Valores de los parámetros de fricción

Eje	$F_c^+$	$F_v^+$	$F_c^-$	$F_v^-$
1	3.2	6.4	-3.4	7.0
2	5.0	10.0	-1.0	1.8
3	3.0	2.0	-2.0	2.0
4	3.7	4.3	-3.6	4.3
5	7.4	12.6	-12.4	13.0
6	4.9	5.5	-6.0	4.4

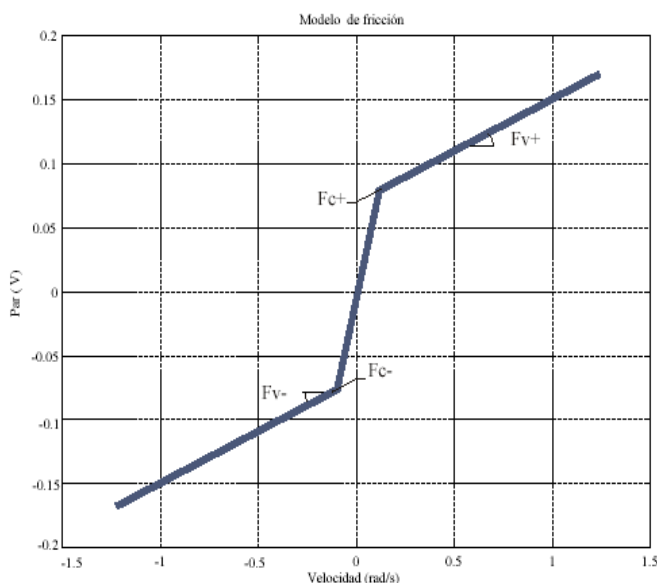


Figura 4: Modelo utilizado para el par fricción

### 3.3 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Desde el primer momento se pensó en la posibilidad de que el generador de oscilaciones actuará independientemente sobre las articulaciones, es decir, que se pudiera elegir en cualquier momento que articulaciones queremos que oscilen y cuales no. A la hora de la realización práctica, esto parecía tener fácil solución, quitarle los frenos a las articulaciones que debían oscilar aplicándoles la ley de control adecuada y dejar habilitados los frenos de las que no debían oscilar. Ésto, sin embargo, no es posible dado que el relé que habilita/deshabilita los frenos de las articulaciones es único, por lo que todas se habilitan/deshabilitan a la vez.

Para solucionarlo, se implementó además del control generador de oscilaciones, un control en velocidad PID que actuara sobre las articulaciones que no estaban oscilando manteniéndolas inmóviles.

En cuanto a la significación o repercusión en las oscilaciones que cada uno de los parámetros de la ley de control va a tener, varía en función de cual sea la articulación que estamos observando, pero básicamente puede resumirse como sigue:

- En cuanto a la  $w_c$ , tiene importancia en la frecuencia de las oscilaciones que vamos a generar. Si aumenta su valor, el periodo de las oscilaciones disminuye, es decir, aumenta la frecuencia, provocando el efecto contrario si su valor disminuye. También repercute, aunque en mucha menor medida, en la amplitud y velocidad de las oscilaciones. Si aumenta la  $w_c$ , aumenta la amplitud y disminuye un poco la velocidad, y al contrario.
- El efecto de la  $K_a$  es algo más complejo pero igualmente intuitivo. Lo primero, al disminuir la  $K_a$ , aumenta la amplitud de las oscilaciones y la velocidad; y al aumentarla lo contrario. El otro efecto que tiene la variación de la  $K_a$  es que puede controlar el valor de posición en el que se centra la oscilación de esa articulación; es decir, aunque la dinámica impuesta teóricamente para el bucle cerrado impone que cada articulación oscile en torno a cero, debido a un efecto de deriva, la oscilación se produce en torno a un valor distinto, que se puede modificar variando  $K_a$ .
- El papel de la  $\mu$  está claramente relacionado con la amplitud y velocidad de las oscilaciones. Cuanto mayor es la  $\mu$ , mayor serán tanto la amplitud como la velocidad, mientras que a menor  $\mu$ , disminuyen la velocidad y la amplitud de las oscilaciones.

La Figura 5 muestra los resultados obtenidos al hacer oscilar cada una de las articulaciones de forma independiente. Las pruebas se han realizado con la asignación de parámetros dada en la Tabla 3.

Tabla 3: Asignación de parámetros para el control

Eje	$\mu_i$	$K_{a_i}$	$w_{c_i}$	F. Escala	ccii (rad)
1	0.09	3.98	3.1	0.12	0.065
2	0.05	4.96	2.19	0.12	0.051
3	0.39	0.82	1	0.19	-0.39
4	1.43	4.02	1	1.17	0.95
5	0.43	4.02	1	0.39	-0.32
6	0.9	4.07	1	0.6	0.65

Podemos observar como, independientemente de la condición inicial desde la que se parta, cada articulación evoluciona a una oscilación mantenida alrededor del origen ( $q_i = 0$ ).

En algunas articulaciones se observa en la oscilación una cierta deriva respecto al origen y un amortiguamiento de la amplitud de las oscilaciones. Esto se debe principalmente a la incapacidad del controlador de corregir el término de fricción en el par, debido a la falta de un modelo preciso de este fenómeno.

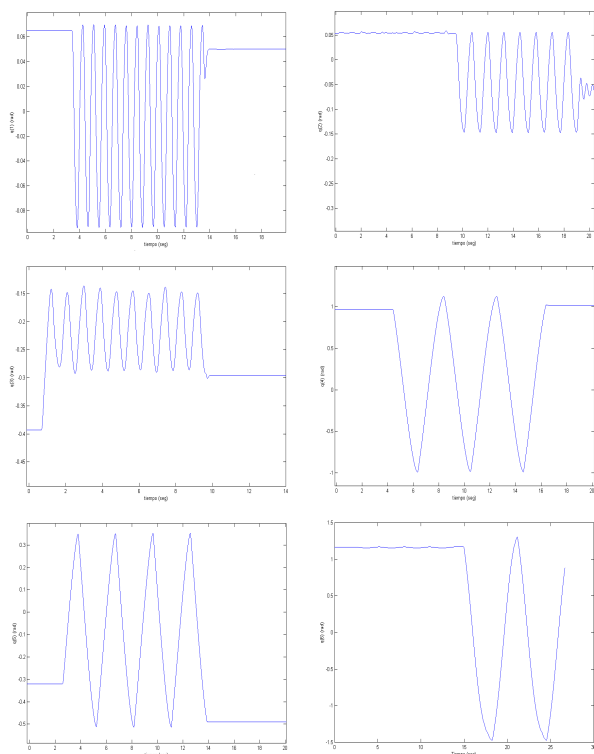


Figura 5: Oscilación independiente de cada una de las articulaciones

En la Figura 7 se presentan los resultados

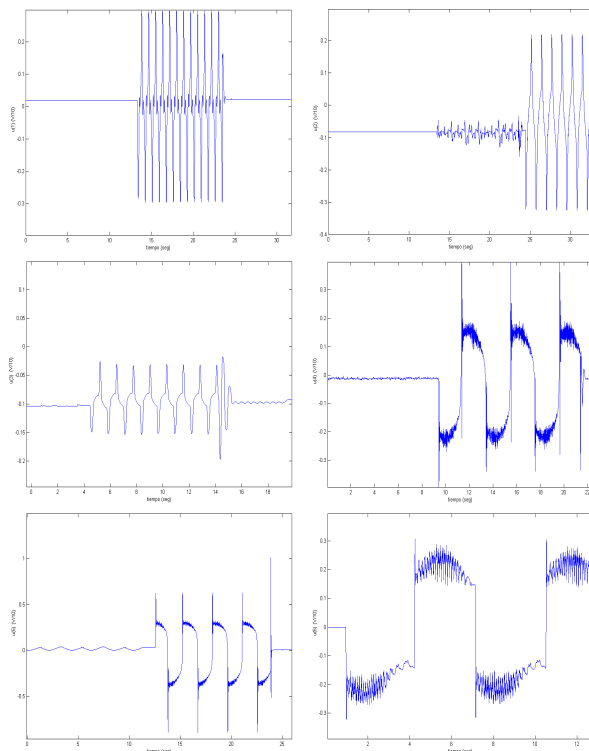


Figura 6: Señales de control aplicadas para provocar la oscilación independiente de cada una de las articulaciones

obtenidos en el experimento de oscilación conjunta de todas las articulaciones. El procedimiento que se ha seguido en el ensayo es hacer oscilar desde la articulación 6 hasta la 1 de forma progresiva de forma que fenómenos como el amortiguamiento de las oscilaciones y el acoplamiento entre las mismas se pueda observar convenientemente.

La asignación de parámetros que se ha seguido esta vez se observa en la Tabla 4.

Tabla 4: Asignación de parámetros para el control

Eje	$\mu_i$	$K_{a_i}$	$w_{c_i}$	F. Escala	ccii (rad)
1	0.09	3.98	3.1	0.12	-0.17
2	0.05	4.96	2.19	0.12	-0.15
3	0.39	0.82	1	0.19	-0.37
4	1.43	4.02	1	1.17	-1.6
5	0.43	4.02	1	0.39	0.74
6	0.9	4.07	1	0.6	1.25

Si observamos las gráficas en el tiempo vemos como se van activando progresivamente las oscilaciones de cada una de las articulaciones, empezando por la articulación 6 y terminando por la articulación 1. Tal y como era de esperar, debido a la propia forma del brazo robótico, el mayor acoplamiento se presenta en el movimiento de las

articulaciones 2 y 3, pues son las que presentan mayores inercias.

El fenómeno de acoplamiento en el movimiento de ambas articulaciones se observa claramente en las gráfica 7 (se ha rodeado la parte en la que se observa en la gráfica con un círculo).

Se puede observar como al empezar a moverse la articulación 3, una pequeña oscilación que no es debida al generador de oscilaciones se provoca en la articulación 2, debida a que el acoplamiento de esta articulación con el movimiento de la 3 provoca unas oscilaciones que el PID en velocidad no es capaz de corregir.

De la misma manera, al empezar la oscilación propiamente dicha de la articulación 2, se produce una degradación en el perfil de oscilación de la articulación 3, igualmente debido al acoplamiento del movimiento de ambas articulaciones.

Hay dos formas de disminuir el efecto de este acoplamiento. Por una parte se puede intentar que las oscilaciones de las articulaciones en cuestión (2 y 3) se produzcan a una menor velocidad, y para ello podemos, por ejemplo, aumentar un poco la  $K_a$  o la  $\mu$ , y por otra parte intentar meter en la implementación de la ley de control un modelo más fiel de la dinámica del robot, donde se tengan en cuenta los fenómenos de acoplamiento entre articulaciones por medio de términos de inercia cruzados distintos de cero, etc.

### 3.4 CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha presentado una técnica para provocar oscilaciones estables y robustas en un sistema mecánico, aplicándolo al caso del robot industrial RM10. Se ha mosrado como la ley de control que se aplica conduce al sistema a un comportamiento como el deseado, provocado por un ciclo límite estable asociado a la aparición de una bifurcación de Hopf en un sistema hamiltoniano generalizado. Los resultados han sido expuestos en forma gráfica y están disponibles algunos experimentos en formato de vídeo digital.

#### Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias a una beca concedida Ministerio de Educación y Ciencia (Secretaría de Estado de Educación y Universidades) y financiado por los proyectos DPI2001-2424-C02-01 y DPI2003-00429

#### Referencias

[1] Aracil, J., K.J. Åström and D. Pagano (1998). Global Bifurcations in the Furuta pendulum. In: *Proceedings of the Nonlinear*

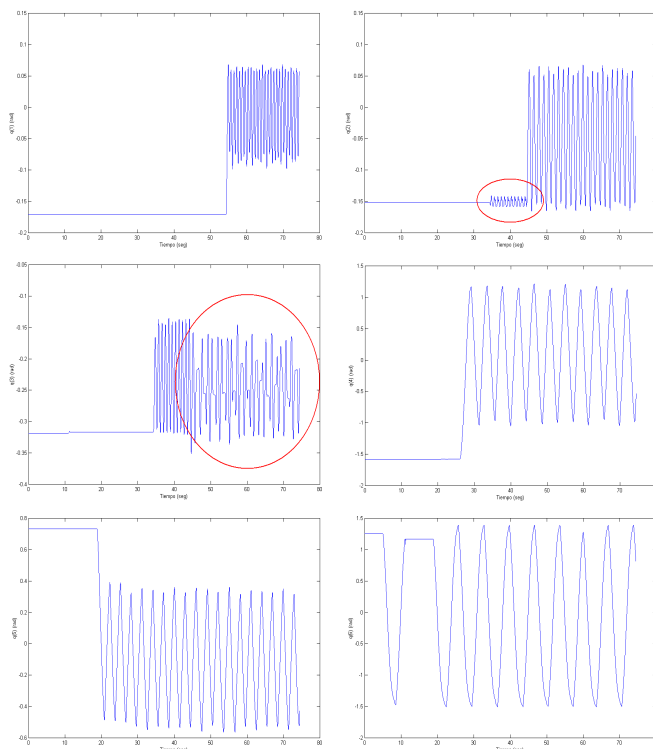


Figura 7: Oscilación conjunta de cada una de las articulaciones

*Control Systems Design Symposium (NOLCOS'98)*. Vol. 1. pp. 35-40. Academic Press. Enschede, The Netherlands.

[2] Aracil, J., Gordillo, F., Acosta, J.A. (2002). *Stabilization of Oscillations in the Inverted Pendulum*. 15th IFAC World Congress (Barcelona).

[3] Åström, K.J. and K. Furuta (1996). Swinging up a pendulum by energy control. In: *13th IFAC World Congress*. pp. 37-42. Academic Press. San Francisco, USA.

[4] Fradkov, A.L. and A.Y. Pogromsky (1998). *Introduction to control of oscillations and chaos*. World Scientific.

[5] Hale, J.K. and H. Koçak (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.

[6] Khalil, H.K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.

[7] Kuznetsov, Y.A. (1995). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag.

[8] Ortega, R., A. Van der Schaft, I. Mareels and B. Maschke (2001) Energy shaping control revisited. In: *Advances in the Control of Nonlinear Systems* (A. Baños, F. Lamnabhi-Lagarrigue and F.J. Montoya, Eds.). Springer.

- [9] Van der Schaft, A. (1998). *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in nonlinear Control*. Springer-Verlag