

# Control Predictivo con Restricciones en el Control para Plataforma de 2 GDL.

J. Yanes y F.R. Rubio

Depto. Ingeniería de Sistemas y Automática  
Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos s/n. 41092 - Sevilla.  
e-mail: pepeya@telefonica.net, rubio@cartuja.us.es

## Resumen

*En este artículo se presenta un estudio experimental del sistema de control en posición y velocidad de un sistema de orientación de 2 grados de libertad, mediante el uso de un controlador predictivo lineal, basado en polinomios de control con restricciones. Se estudia el ruido presente en la señal de control y distintas alternativas para reducirlo. Se han comparado sobre el sistema real las distintas alternativas, resultando el controlador predictivo con restricciones en el control muy adecuado para este tipo de sistemas. Así mismo la implementación realizada reduce la carga computacional notablemente.*

**Palabras clave:** Control Predictivo, Control con Restricciones, Control de Sistemas Electromecánicos, Control de Posicionamiento.

## 1. Introducción

Las plataformas para posicionamiento son la base de distintas aplicaciones. Estas plataformas se encuentran en barcos, aviones o vehículos terrestres, donde se necesiten dispositivos como cámaras que deben ser posicionados con precisión. Aplicaciones típicas de este tipo de dispositivo son sistemas de vigilancia o reconocimiento y sistemas de comunicaciones.

Las plataformas presentan no-linealidades y restricciones debidas, entre otros muchos factores, a la presencia de resonancias mecánicas, fenómenos de ruidos que son causados en gran medida, por la discretización de los valores obtenidos de los sensores de posición, por fenómenos de fricción, zona muerta en el par motor, holguras en los engranajes, y todo aquello que introduzca términos no lineales en la dinámica del sistema, además de otras causas a priori no medibles. Todo ello unido a la constante de tiempo característica (que suele ser muy pequeña), hace que este tipo de plantas sean difíciles de controlar. Ello lleva a la consideración de la necesidad de aplicar técnicas de control que tengan en cuenta estos efectos.

Para lograr una señal de control suave, sin compo-

nentes de alta frecuencia, para una plataforma de 2 grados de libertad, se ha propuesto un controlador predictivo con restricciones en el control. De esta forma se pretende sacar partido de las técnicas de control predictivas para reducir el ruido. La incorporación de restricciones en el control tiene como doble objetivo: reducir el ruido, y disminuir la carga computacional.

Este artículo se organiza de la siguiente manera: en la sección 2 se introduce la técnica ya conocida de Control Predictivo Generalizado [1], y se desarrolla ampliamente el concepto de restricciones en el control basado en polinomios, incorporándose además una extensión de la función de costes, que añade versatilidad y estabilidad. En la sección 3 se realiza un análisis dimensional de la ley de control, y un estudio de la complejidad y carga computacional para la implantación del controlador. En la sección 4 se expone el modelo de la plataforma de orientación, y los datos obtenidos en los experimentos de comparación práctica del controlador predictivo desarrollado, con un controlador PI. Finalmente en la sección 5 se exponen las conclusiones.

## 2. GPC: Control Predictivo Generalizado

Basándonos en el modelo CARIMA usado por el GPC, describimos el proceso como:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \frac{e(t)}{\Delta} \quad (1)$$

donde  $u(t)$  y  $y(t)$  son las secuencias de control y salida del proceso, y  $e(t)$  es un ruido blanco de media nula.  $A$  y  $B$  son polinomios de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_naz^{-na} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nbz^{-nb} \end{aligned}$$

y

$$\Delta = 1 - z^{-1}$$

El algoritmo del GPC consiste en aplicar una secuencia de control que minimice una función de

costes de la forma:

$$J(N_p, N_c) = \sum_{j=1}^{N_p} \lambda [\hat{y}(t+j|t) - r(t+j)]^2 + \sum_{j=0}^{N_c-1} [\Delta u(t+j)]^2$$

donde  $\hat{y}(t+j|t)$  es una predicción de la salida del proceso obtenida mediante (1),  $N_p$  y  $N_c$  son los horizontes de predicción y control,  $\lambda$  es una matriz de ponderación del coste, y  $r(t+j)$  es la trayectoria de referencia futura.

A partir de (1) se puede obtener la ecuación de predicción en la forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{y} = \hat{y}(t+j|t)$  es un vector de dimensión  $N_p$  de futuras salidas,  $\mathbf{G}$  es una matriz triangular inferior de dimensión  $(N_p, N_c)$  que relaciona las futuras actuaciones y salidas,  $\Delta\mathbf{u} = \Delta u(t+j)$  es un vector de actuaciones de dimensión  $N_c$ , y  $\mathbf{f}$  es un vector de dimensión  $N_p$  que relaciona las salidas futuras con las salidas y actuaciones pasadas. Una descripción y resolución de los valores de  $\mathbf{y}$ ,  $\Delta\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{G}$  y  $\mathbf{f}$  lo podemos encontrar en [1].

Podemos expresar la función de costes en forma vectorial:

$$J = (\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{r})^T \lambda (\mathbf{G}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{r}) + \Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} \quad (3)$$

Que puede ser reescrita como:

$$J = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^T \mathbf{h} + \mathbf{f}_0$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{G}^T \lambda \mathbf{G} + \mathbf{I} \\ \mathbf{h} &= \mathbf{G}^T \lambda (\mathbf{r} - \mathbf{f}) \end{aligned}$$

Minimizar  $J$  respecto a  $\Delta\mathbf{u}$  conduce a:

$$\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{h} = (\mathbf{G}^T \lambda \mathbf{G} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \lambda (\mathbf{r} - \mathbf{f}) \quad (4)$$

Únicamente se envía al proceso el primer elemento de la secuencia  $\Delta\mathbf{u}(t)$ , por lo que la ley de control se puede expresar como:

$$\Delta u(t) = \mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{f})$$

donde  $\mathbf{k}$  es la primera fila de  $(\mathbf{G}^T \lambda \mathbf{G} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \lambda$

### 2.1. Funciones base en el polinomio de control con restricciones.

Como en el algoritmo de control PFC (Predictive Functional Control) [2], se propone ahora estructurar la ley de control mediante el uso de polinomios, así:

$$\Delta u(k) = b_0 + b_1 k + \dots + b_p k^p \quad (5)$$

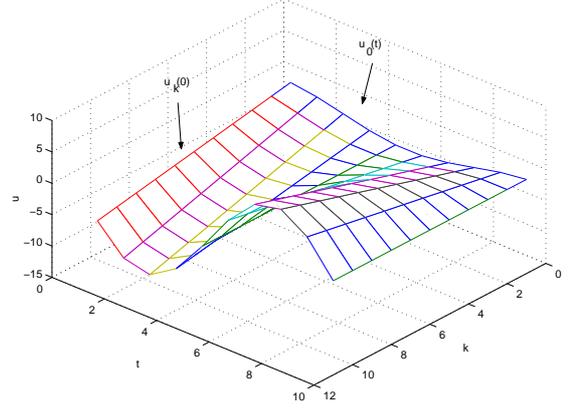


Figura 1: Polinomio de primer grado con restricciones

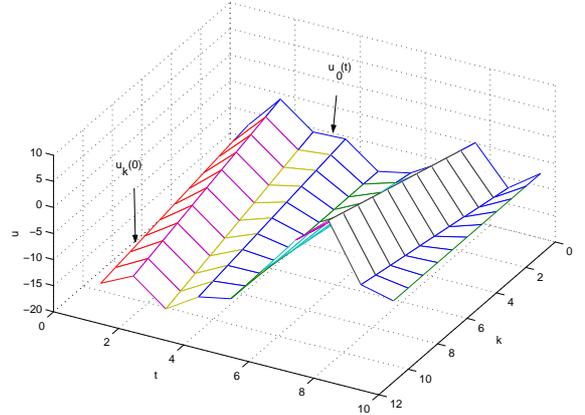


Figura 2: Polinomio de primer grado sin restricciones

Además se le añade la restricción de enlazar la secuencia obtenida en un instante, con la obtenida en los instantes anteriores, de forma que la curva polinómica propuesta esté obligada a pasar por los puntos que ya han sido enviados a la actuación en instantes anteriores.

En la figura 1 se muestra un ejemplo de polinomios de control de primer grado, es decir rectas, con restricciones, y como se puede observar, la curva de aplicación de la señal es suave. Esto cambia en el caso de eliminar las restricciones, ya que se deja a la señal evolucionar libremente, por lo que pueden aparecer elevadas brusquedades (figura 2).

Expresando las restricciones en forma matricial,

se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{-q} \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_{-1} \\ \Delta \mathbf{u}_0 \\ \dots \\ \Delta \mathbf{u}_{N_c-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & (-q)^p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & (-1)^p \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & (N_c-1)^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

donde  $p$  es el grado del polinomio de control,  $q$  es el grado de restricción del polinomio. En forma compacta se puede expresar:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta \mathbf{u}} \\ \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_1 & \bar{\mathbf{K}}_2 \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix}$$

donde  $\bar{\Delta \mathbf{u}}$  es un vector de actuaciones pasadas de dimensión  $q$ ,  $\bar{\mathbf{b}}$  es el vector de coeficientes restringidos del polinomio de dimensión  $q$ , y  $\mathbf{b}$  es el vector que contiene los coeficientes libres del polinomio de control de dimensión  $p+1-q$

Operando podemos llegar a:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_p \mathbf{b} + \mathbf{K}_c \bar{\Delta \mathbf{u}}$$

donde  $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 \bar{\mathbf{K}}_2^{-1} \bar{\mathbf{K}}_1$  y  $\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_2 \bar{\mathbf{K}}_2^{-1}$

Introduciendo ahora estas ecuaciones en las obtenidas para el GPC (2 y 3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{G}' \mathbf{b} + \mathbf{f}' \\ J &= \frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{H}' \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{h}' + \mathbf{f}'_0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \mathbf{G} \mathbf{K}_p \\ \mathbf{f}' &= \mathbf{G} \mathbf{K}_c \bar{\Delta \mathbf{u}} + \mathbf{f} \end{aligned}$$

Minimizando ahora (6) respecto a  $\mathbf{b}$  obtenemos:

$$\mathbf{b} = -\mathbf{H}'^{-1} \mathbf{h}'$$

con:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= \mathbf{K}_p^T \mathbf{H} \mathbf{K}_p \\ \mathbf{h}' &= \mathbf{K}_p^T (\mathbf{H} \mathbf{K}_c \bar{\Delta \mathbf{u}} + \mathbf{h}) \end{aligned}$$

Dado que al proceso sólo se le envía el primer elemento ( $k=0$ ) de la secuencia de control, podemos expresar según (5):

$$\Delta u(t) = b_0 = \mathbf{k}_1 (\mathbf{r} - \mathbf{f}') + \mathbf{k}_2 \bar{\Delta \mathbf{u}}$$

donde  $\mathbf{k}_1$  es la primera fila de  $(\mathbf{H}'^{-1} \mathbf{G}'^T \lambda)$  y  $\mathbf{k}_2$  es la primera fila de  $(-\mathbf{H}'^{-1} \mathbf{K}_p^T \mathbf{K}_c)$

## 2.2. Extensión de la función de costes.

Con el objetivo de tener mayor versatilidad en el control, se añade otro término a la función de costes. Se penaliza ahora también el error en velocidad. Este nuevo término amplía las posibilidades de sintonización, añadiendo soluciones más estables. El coste queda ahora como:

$$J = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r})^T \lambda (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{r}) + (\hat{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{r}})^T \delta (\hat{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{r}}) + \Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \quad (7)$$

donde  $\dot{\mathbf{r}}$  es la derivada de la referencia,  $\hat{\mathbf{v}}$  es la predicción de la velocidad, y  $\delta$  es la matriz de ponderación del coste del error en velocidad.

Para ello es necesario otro modelo tensión-velocidad, que puede obtenerse analíticamente a partir del modelo de la posición:

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}_v \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_v \quad (8)$$

Y realizando un desarrollo similar al anterior se llegaría a:

$$\Delta u(t) = \mathbf{k}_1 (\mathbf{r} - \mathbf{f}') + \mathbf{k}_2 (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{f}}'_v) + \mathbf{k}_3 \bar{\Delta \mathbf{u}} \quad (9)$$

donde  $\mathbf{k}_1$  es la primera fila de  $(\mathbf{H}_v^{-1} \mathbf{G}'^T \lambda)$ ,  $\mathbf{k}_2$  es la primera fila de  $(\mathbf{H}_v^{-1} \mathbf{G}'_v^T \delta)$ , y  $\mathbf{k}_3$  es la primera fila de  $(-\mathbf{H}_v^{-1} \mathbf{K}_p^T \mathbf{K}_c)$ . Con  $\mathbf{G}'_v = \mathbf{G}_v \mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{H}_v = [\mathbf{G}'^T \lambda \mathbf{G}' + \mathbf{G}'_v^T \delta \mathbf{G}'_v + \mathbf{K}_p^T \mathbf{K}_p]$

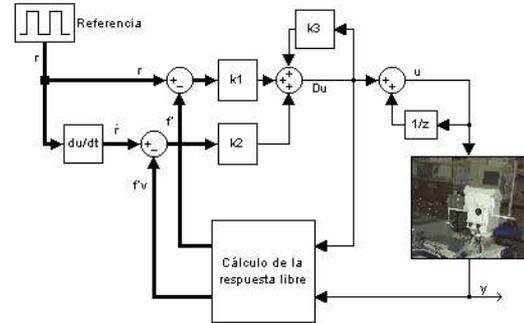


Figura 3: Esquema de control

## 3. Implantación del controlador

El grado de complejidad, en la resolución en tiempo real, de las ecuaciones de un GPC, viene dado sobre todo por el tamaño de la matriz  $\mathbf{H}$  que tiene que invertirse. En un GPC con horizonte de predicción  $N_p$ , y horizonte de control  $N_c$ , se obtiene una matriz  $\mathbf{H}$  de dimensión  $(N_c, N_c)$ . Si se realiza una estructuración de la ley de control, mediante polinomios con restricciones, se obtiene una matriz  $\mathbf{H}$  de dimensión  $(p+1-q, p+1-q)$ . Para el caso particular  $p=q$ , es decir, que sólo quede un coeficiente libre en el polinomio, se obtiene una

matriz  $\mathbf{H}$  de dimensión (1,1), o sea, un escalar. De esta forma, se puede incorporar con mayor facilidad un sistema de identificación en tiempo real, al haber reducido la carga computacional de las ecuaciones.

## 4. Experimentos

Con el objetivo de comprobar la bondad de este control polinómico con restricciones, se ha implementado el controlador en una plataforma de orientación de 2 GDL (figura 4) situada en los Laboratorios del Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática, de la Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla. Para la realización del controlador se ha usado un ordenador personal, conectado a la plataforma mediante tarjetas de control DSPACE [3], basadas en procesadores digitales de señal (DSP).

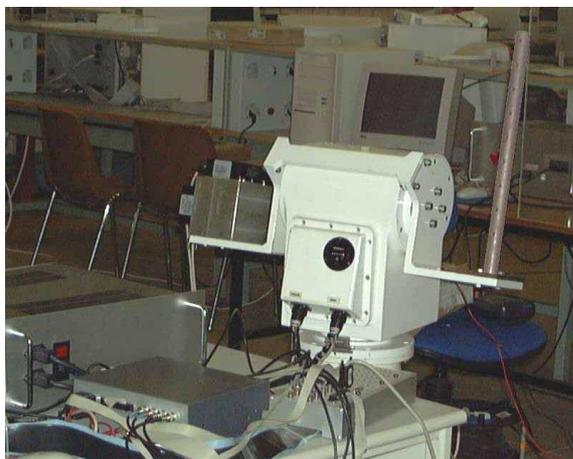


Figura 4: Plataforma de orientación

Para caracterizar el comportamiento par-posición de la plataforma se usa para caja eje un modelo de primer orden mas un integrador:

$$T(s) = Js^2\theta(s) + Bs\theta(s)$$

donde  $J$  y  $B$  representan la inercia y la fricción viscosa respectivamente. Otros términos de fricción no lineales no se incorporan en las ecuaciones lineales del modelo de predicción. Se transmite la potencia, a un motor de continua sin escobillas [4], mediante un servo amplificador PWM [5] cuya señal de control es una tensión. Finalmente, mediante un encoder incremental [6], que transmite la posición, se puede cerrar el lazo de control.

Debido a las reductoras presentes en los motores que accionan cada eje de la plataforma, el sistema está muy desacoplado, por lo que el control se puede realizar de forma independiente en cada eje (orientación y elevación). En el resto del artículo se presentan los resultados experimentales del eje

de elevación, siendo los resultados para el eje de orientación muy similares.

Analizado todo el comportamiento en su conjunto, se ha creado un modelo integrador+polo que relaciona la tensión de control con la posición angular de la plataforma, quedando para el eje de elevación:

$$\frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{K_M}{s(T_M s + 1)}$$

que representado de forma discreta resulta:

$$\frac{\theta(z^{-1})}{U(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - a z^{-1})}$$

donde, para el período de muestreo de  $T = 10ms$  se identificó:

$$\begin{aligned} b_1 &= 0,006127 \text{ }^\circ/V \\ b_2 &= 0,005566 \text{ }^\circ/V \\ a &= 0,7558 \end{aligned}$$

### Comparación de controladores

Se realiza una comparación de los siguientes controladores:

**”PI”, proporcional integral.** Este controlador es uno de los más simples que se pueden realizar, y se incluye en los experimentos prácticos con el fin de comparar los resultados obtenidos con los otros controladores.

**”GPC-PR”, GPC polinómico con restricciones.** Este controlador, objetivo central del estudio realizado, es un GPC básico al que se le añade un término de error en velocidad a la función de costes, y se estructura la ley de control mediante polinomios con restricciones. Se ha experimentado con la siguiente sintonización:  $N_p = N_c = 30$ ,  $p = q = 1$ ,  $\lambda = 100$  y  $\delta = 1$ .

**”GPC-P”, GPC polinómico sin restricciones.** Este controlador, se ensaya con el fin de mostrar el efecto de liberar la ley de control polinómica de sus restricciones.

#### 4.1. Referencias en escalón.

Se aplican referencias en escalón de 2 grados de amplitud, y se comparan los resultados obtenidos con los tres controladores.

El controlador PI está sintonizado para evitar las oscilaciones, pero debido a la gran amplificación del ruido que produciría añadirle un término derivativo al control (PID), no puede conseguir tener una rápida respuesta sin sobreoscilaciones. Por el contrario, los GPC-PR y GPC-P logran menores errores en el seguimiento del escalón, gracias en gran medida al conocimiento de la referencia con antelación (figura 5).

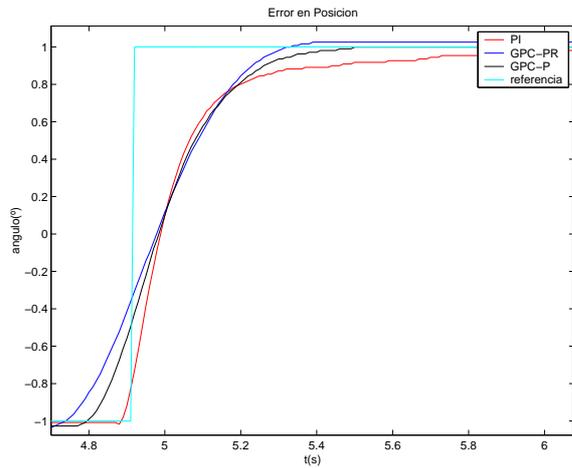


Figura 5: Seguimiento de escalones de 2 grados

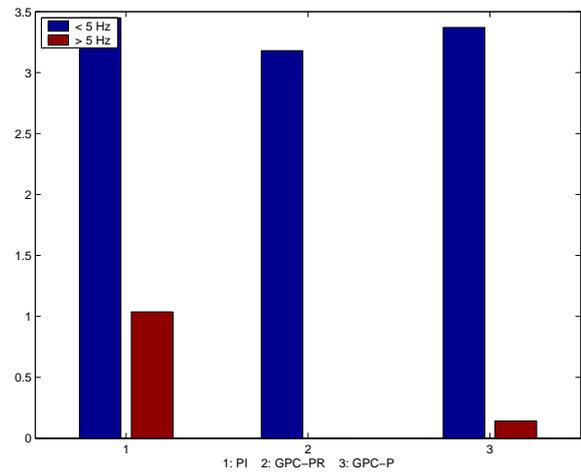


Figura 7: Tension aplicada a baja y alta frecuencia en el seguimiento de escalones de 2 grados

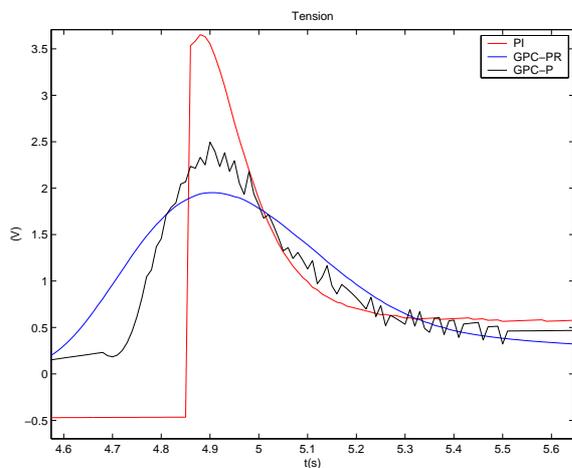


Figura 6: Detalle de las tensiones aplicadas en el seguimiento de escalones de 2 grados

Como se observa en la figura 6, la tensión aplicada es mucho más brusca con un controlador PI, mientras que los GPC's varían la tensión aplicada con suavidad, cuando se encuentran con un escalón en la referencia.

El controlador PI intenta aplicar una tensión de control que, en gran medida tiene una componente frecuencial mayor de 5 Hz. Por el contrario, el GPC-PR aplica la señal de control de forma muy suave y sin componentes de alta frecuencia (figura 7). El control proporcionado por el GPC-P contiene, en cierta medida, valores de alta frecuencia.

#### 4.2. Referencias senoidales.

Aplicando ahora una referencia senoidal de amplitud 10 grados y frecuencia 0.2 Hz, se comprueba el comportamiento de los mismos controladores, con la misma sintonización que en el caso anterior.

Se puede comprobar (figura 8) que el contro-

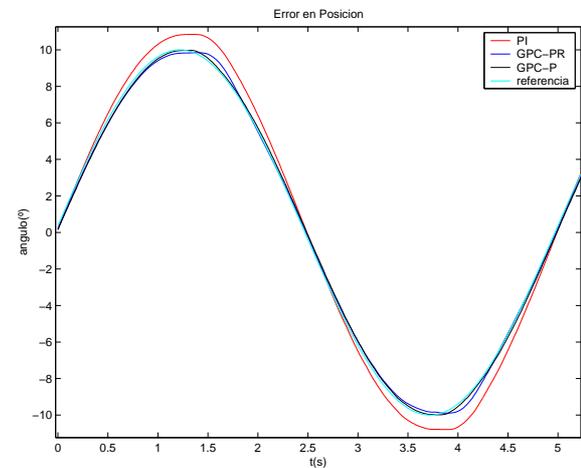


Figura 8: Seguimiento de la referencia  $r=10 \sin(1.26t)$

lador PI tiene un pequeño problema de ganancia y fase, ya que fue sintonizado para comportarse suavemente ante escalones. Una sintonización para el seguimiento de senoides hubiera producido grandes sobreoscilaciones con referencias en escalón. El GPC-PR y el GPC-P realizan muy buen seguimiento sin ninguna necesidad de resintonización.

La tensión aplicada en el seguimiento de referencias senoidales contiene mucho ruido en el caso del GPC-P (figura 9), mientras que apenas aparece alguna componente de alta frecuencia para los controladores PI y GPC-PR (figura 10).

#### 4.3. Ruido en el sensor de posición.

Para comprobar como afecta a la tensión de control, la discretización del sensor de posición, y los posibles ruidos que pueden aparecer en la medi-

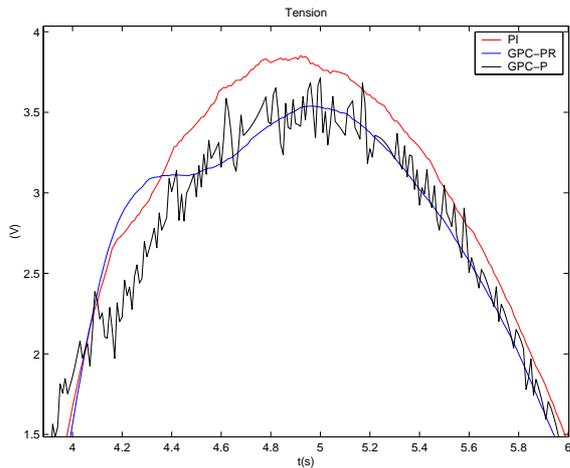


Figura 9: Detalle de las tensiones aplicadas en el seguimiento de la referencia  $r=10\sin(1.26t)$

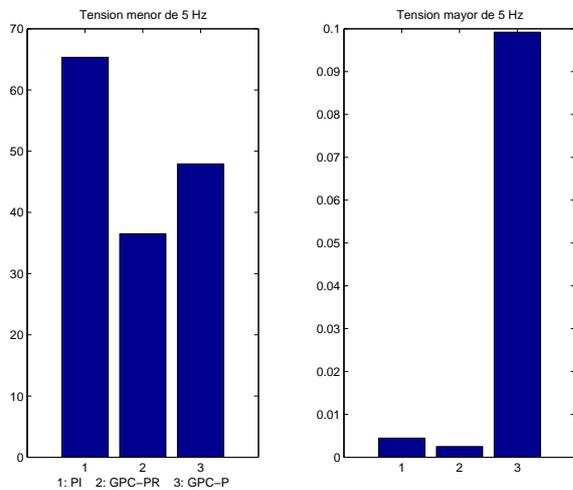


Figura 10: Tension aplicada a baja y alta frecuencia en el seguimiento de la referencia  $r=10 \sin(1.26t)$

ción, se inyecta mediante software un ruido uniforme de media nula en el sensor de posición.

Tanto el controlador PI como el GPC-PR mantienen la posición suavemente en torno a la referencia, mientras que el GPC-P varía bruscamente su posicionamiento debido al ruido inyectado (figura 11).

Se comprueba que el controlador GPC-P presenta elevados picos de tensión (figura 12), ante la presencia del ruido inyectado en el sensor.

El controlador GPC-P presenta mucho ruido de alta frecuencia en la aplicación de la tensión (figura 13), como consecuencia del ruido en el sensor. El GPC-PR y el PI apenas contienen ruido en la señal de control.

Finalmente, en la figura 14, se representa de man-

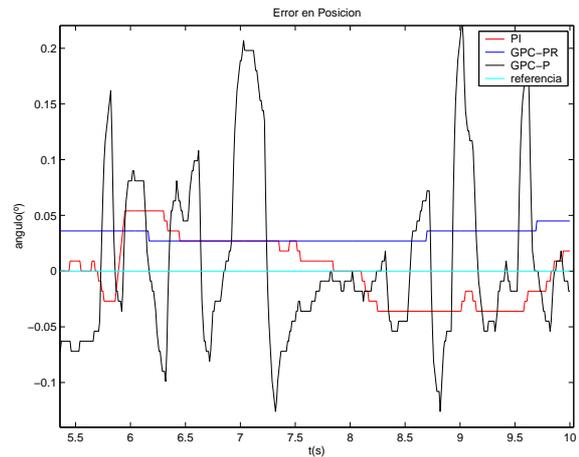


Figura 11: Posicionamiento con ruido añadido en el sensor de posición

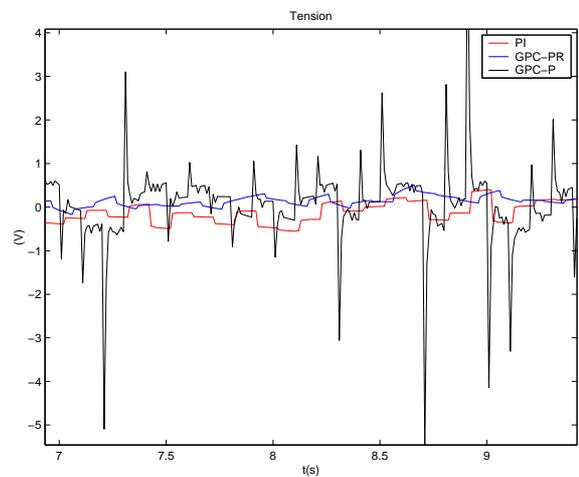


Figura 12: Detalle de las tensiones aplicadas en el posicionamiento con ruido añadido en el sensor de posición

era logarítmica, la distribución frecuencial acumulada de la tensión aplicada, representando para cada  $frecuencia = f_0$ , el tanto por ciento de la tensión que tiene componentes de frecuencia mayores que  $f_0$ . Se observa que para el GPC-PR el 1% es mayor de  $7 Hz$ , mientras que para el PI el 1% es mayor de  $40 Hz$

#### 4.4. Resultados

**GPC-P:** A la vista de los experimentos, se observa que la ausencia de restricciones en el polinomio de control, conduce a la presencia de elevados ruidos de alta frecuencia en la tensión aplicada.

**GPC-PR:** Se ha podido comprobar, mediante los experimentos realizados, que con este controlador se obtiene una ley de control muy suave y sin la presencia, apenas, de ruidos de alta frecuencia. Además, se obtiene el mismo comportamiento in-

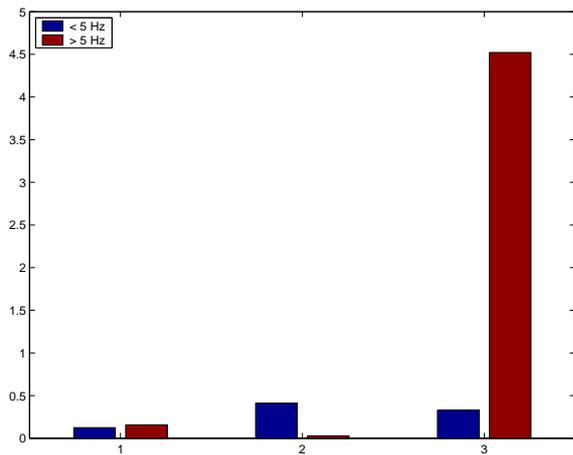


Figura 13: Tension aplicada a baja y alta frecuencia en el posicionamiento con ruido añadido en el sensor de posición

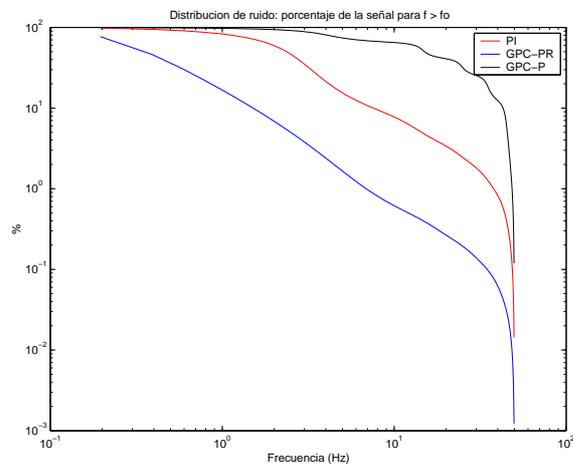


Figura 14: Distribución frecuencial de la tensión aplicada en el posicionamiento con ruido añadido en el sensor de posición

dependientemente de la referencia adoptada, sin tener la necesidad de realizar resintonizaciones, ni tener en cuenta otras variaciones.

## 5. Conclusiones

Se ha presentado un estudio experimental de un sistema de control en posición y velocidad, mediante el uso de un controlador predictivo lineal, basado en polinomios de control con restricciones.

Con dicho estudio, se ha podido comprobar la bondad del controlador diseñado, y la capacidad para rechazar el ruido presente en los sensores de posición.

Se ha reducido la carga computacional respecto a un GPC con la ley de control no estructurada en funciones base.

## Agradecimientos

Los autores desean agradecer al MCyT-FEDER la financiación de este trabajo con cargo al proyecto de investigación DPI2001-2424-C02-01.

## Referencias

- [1] E.F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control*. Springer, 1999.
- [2] J. Richalet. *Practique de la commande predictive*. Hermes, 1992.
- [3] dSPACE. *DS1102 PPC Controller Board, RTI Reference*. 1999.
- [4] AB Motors. Catálogo. ld-series brushless servo motor, 2002.
- [5] Advanced Motion Controls. Catálogo. be15a series brushless servo amplifiers, 2001.
- [6] Eltra. Catálogo. eh-el53a / b encoder incremental, 2002.