

DIFERENCIACIÓN MEDIANTE CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

R. Romero, J. Stojanov, A.S.I. Zinober y F.R. Rubio

Dept Ingeniería de Sistemas y Automática

Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla

e-mails: {romevi,rubio}@cartuja.us.es, jivko777@yahoo.com, a.zinober@shef.ac.uk

Resumen

En este artículo se analizan diversos métodos para la diferenciación de señales con ruido. Recientes progresos en control por modos deslizantes avanzado son presentados como una alternativa prometedora para lograr resultados robustos y precisos. En particular puede emplearse el Control por Modo Deslizante de Orden Superior y el Control por Modo Deslizante Dinámico. El concepto, ventajas, simulaciones y ejemplos son mostrados para ambas técnicas. Se presenta un ejemplo práctico de un robot manipulador industrial, las medidas de posición de los ejes requieren ser diferenciadas con el fin de obtener velocidades y aceleraciones. Otras aproximaciones numéricas, como el filtro de Savitzky-Golay, son analizadas y comparadas con los diferenciadores basados en Modos Deslizantes.

Palabras clave: Diferenciador, Savitzky-Golay, SMC, HOSMC, DSMC, Control por Modos Deslizantes

1 INTRODUCCIÓN

La diferenciación en tiempo real es un conocido y ampliamente estudiado problema desde hace mucho tiempo. La principal dificultad a afrontar estriba en la sensibilidad que presenta ante ruidos en la señal de entrada. Diferentes alternativas han sido empleadas a lo largo de las últimas décadas. Diversos métodos numéricos fueron desarrollados como una alternativa eficaz cuando se desconoce la forma analítica de la función a derivar, cuando la señal está contaminada por ruido o cuando proviene de la salida de un sistema no modelado.

Uno de los métodos más empleados ha sido la diferenciación numérica simple seguida de la aplicación de un filtro para la eliminación de las componentes de la señal no deseadas. Este método presenta el inconveniente de que se requiere una elección adecuada del filtro, que no deteriore demasiado la señal deseada lo cual no siempre es fácil de conseguir.

Un camino alternativo consiste en ajustar un polinomio en una determinada "ventana" de los datos

a partir de una adecuada ley de ajuste. Este método se presentó en un conocido artículo de Savitzki y Golay ([10]). Una implementación software puede encontrarse en el libro "Numerical Recipes in C".

Otras recientes aportaciones, como la presentada en [1] no son apropiadas para su uso con señales ruidosas como se ha comprobado con simulaciones que serán presentadas en este artículo.

Los últimos avances en técnicas de control basadas en Modos deslizantes, como HOSMC o DSMC, han abierto una nueva posibilidad para la diferenciación de este tipo de señales. Con estas técnicas se generalizan y mejoran los resultados obtenidos con el control por modo deslizante tradicional y se eliminan las restricciones que este presenta. Aplicadas como observadores, estos métodos pueden utilizarse para diferenciar señales con la ventaja de que la diferenciación es exacta en ausencia de ruido y robusta en su presencia.

2 INTRODUCCIÓN AL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

El método de modos deslizantes tradicional (ver [4]) puede ser presentado sucintamente como la aplicación de una señal de control conmutando a alta frecuencia que consigue llevar el estado del sistema a una superficie $\sigma = 0$ denominada superficie de deslizamiento y una vez en ella mantenerlo ante posibles perturbaciones externas. Dicha superficie de deslizamiento será definida por el diseñador con el objeto de que el estado cumpla las especificaciones deseadas. La principal ventaja del control por modos deslizantes es que aporta robustez ante perturbaciones, tanto internas como externas, cuando estas tienen cotas conocidas.

Por desgracia, este método posee un par de restricciones importantes. En primer lugar, el grado relativo del sistema, que puede definirse como el número de veces que hay que derivar la función que describe la superficie de deslizamiento ($\sigma(x, u)$) para que la señal de control aparezca explícitamente, debe ser uno. En segundo lugar el

efecto “chattering” provocado por la conmutación de alta frecuencia de la señal de control puede ser muy perjudicial en determinadas aplicaciones practicas y se ha visto a menudo como el principal argumento para desaconsejar este método. Por ejemplo, la implantación de este método en el control de robots y otros sistemas mecánicos pueden causar vibraciones capaces de excitar la frecuencia fundamental del sistema con desastrosos resultados o provocar el deterioro de las partes móviles por efecto de la fatiga. Sin embargo, en otro tipo de aplicaciones, como es en el control de sistemas electrónicos con alta capacidad de conmutación o en el caso de diferenciación de señales, que es el caso que nos ocupa, tales efectos nocivos no aparecen y este método de control podría ser utilizado sin ninguna modificación en particular. En los demás casos es posible suavizar la ley de control a consta de perder precisión. Diversas metodologías han sido propuestas al respecto en la bibliografía especializada ([3]).

2.1 Ejemplo de SMC

Para aclarar conceptos un ejemplo de SMC convencional se muestra a continuación (Para mas información ver [11]). Supongamos que el sistema a controlar tiene la forma descrita por (1) y que deseamos reducir el orden del sistema de forma que el estado cumpla la ecuación $\sigma = 0$ correspondiente a la de un sistema de primer orden.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= bu \end{aligned} \quad (1)$$

para tal fin puede definirse una superficie deslizante en la forma

$$\sigma = gx_1 + x_2 \quad (2)$$

y una señal de control como

$$u = -sign(\sigma) \quad (3)$$

Como puede observarse (figuras 1 y 2), después de un corto transitorio, se logra alcanzar la condición de deslizamiento (es decir, $\sigma = 0$). Es interesante apreciar que el parámetro b en la ecuación del sistema (1) podría ser desconocido, y no obstante la condición de deslizamiento seguiría alcanzándose dentro de un amplio rango de variación del parámetro. Como puede inferirse de este sencillo ejemplo, este tipo de control es robusto frente a indeterminaciones acotadas en el modelo del sistema. Además puede demostrarse que la precisión en régimen permanente del deslizamiento ($sup(|\sigma|)$) es del orden del paso de integración (τ).

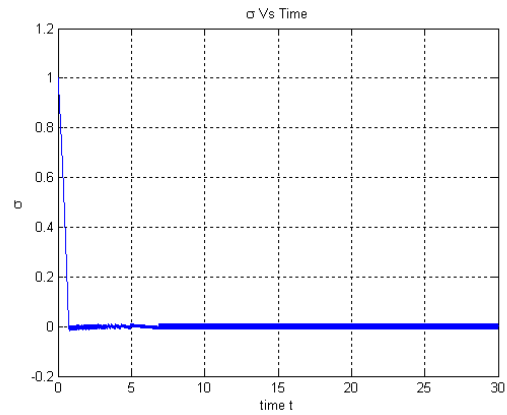


Figura 1: Evolución de la función de deslizamiento σ .

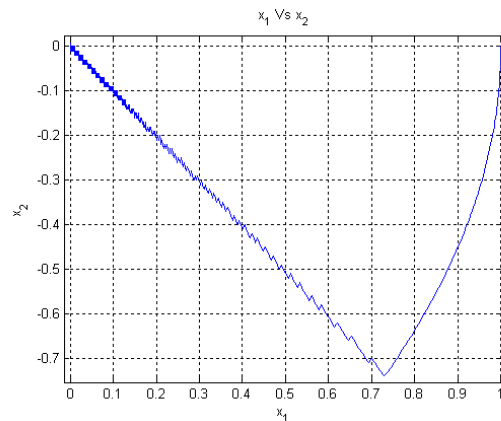


Figura 2: Mapa de estados x_1 y x_2 .

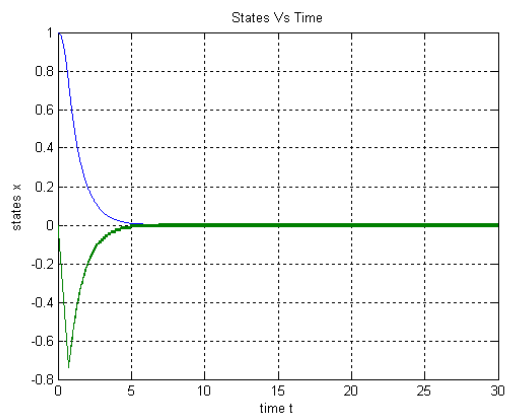


Figura 3: Evolución de los estados. Convergencia exponencial.

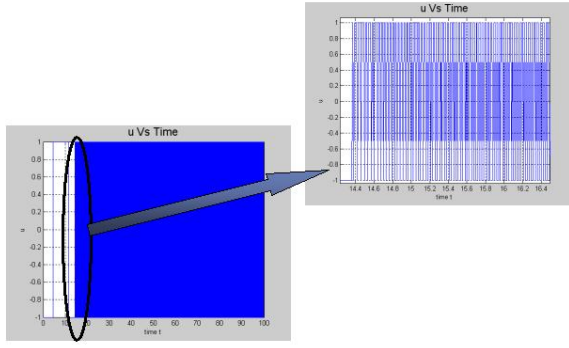


Figura 4: Evolución de la señal de control. Efecto chattering.

La figura 3 muestra la evolución temporal de los estados, que como puede apreciarse, presenta una convergencia exponencial al origen.

El efecto del *chattering*, comentado anteriormente, puede ser fácilmente vislumbrado en la figura 4.

3 CONTROL POR MODO DESLIZANTE DE ORDEN SUPERIOR (HOSMC)

Posteriormente han aparecido importantes avances en el control por modos deslizantes con la aparición del control por modo deslizante de orden superior [2]. La idea subyacente es controlar términos de orden superior de la superficie deslizante imponiendo no solo que se anule la función que la define ($\sigma = 0$) sino también sus $r-1$ primeras derivadas ($\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{r-1} = 0$). Este método preserva y generaliza las principales ventajas del control por modo deslizante tradicional. Además se mejora notablemente la precisión alcanzada en el control (ahora $\sup(|\sigma|) \simeq \tau^r$) y se eliminan las restricciones que limitaban a aquel (desaparece el efecto *chattering* y es posible controlar sistemas con grado relativo $r > 1$).

A continuación se presentan ejemplos de leyes de control basadas en este método:

$$u = -\alpha \text{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{1/2} \text{sign}(\sigma))$$

$$u = -\alpha \text{sign}(\ddot{\sigma} + 2|\dot{\sigma}|^3 + |\sigma|^2)^{1/6} \text{sign}(\dot{\sigma} + |\sigma|^{2/3} \text{sign}(\sigma))$$

3.1 HOSMC como diferenciador

En [2] se presenta una interesante aplicación del HOSMC. La idea es utilizar el método como observador para diferenciar una señal. Como ventajas más notables cabe destacar que se consigue un diferenciador que es exacto en ausencia de ruidos y robusto en presencia de ruidos.

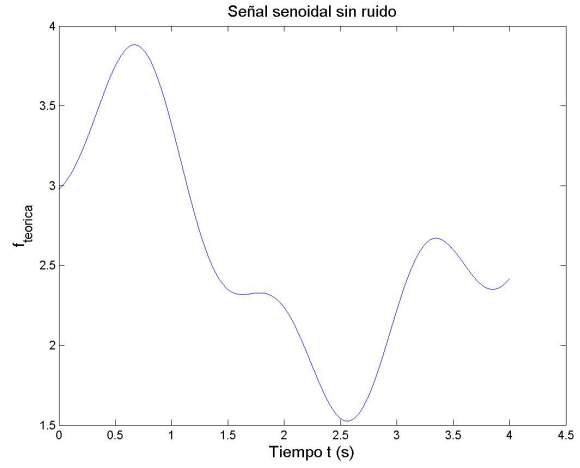


Figura 5: Función senoidal teórica en ausencia de ruidos. $f_{teorica}$

En el citado artículo se presenta el diferenciador de Levant en el siguiente modo. Dada una señal $f(t)$ a diferenciar, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= v_0, & v_0 &= \lambda_0 L^{1/3} |z_0 - f|^{2/3} \text{sign}(z_0 - f) + z_1 \\ \dot{z}_1 &= v_1, & v_1 &= \lambda_1 L^{1/2} |z_1 - f|^{1/2} \text{sign}(z_1 - f) + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 L \text{sign}(z_2 - v_1) \end{aligned} \quad (4)$$

proporciona estimaciones de la función $f(z_0)$ y de sus derivadas primera y segunda (z_1 y z_2)

3.2 Simulaciones

El diferenciador de Levant ha sido programado en lenguaje C para su simulación. Para analizar sus resultados con un ejemplo representativo se ha utilizado una función senoidal teórica (ecuación 5) como objeto de ensayo a la que se le ha añadido un significativo ruido gaussiano $n(t)$ con desviación típica 0.2 para analizar la robustez del diferenciador.

$$\begin{aligned} f_{teorica} &= f_t = 2 + \sin(0.5t) + \cos(t) \\ &+ 0.5 * \sin(2t + 0.5) - 0.3\cos(5t - 0.5) \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_{teorica+ruido} = f_{tr} = f_t + n(t) \quad (6)$$

así pues, la derivada exacta de la función, en ausencia de ruido, debería ser:

$$\begin{aligned} f_{dt_{teorica}} &= f_{dt} = 0.5\cos(0.5t) - \sin(t) \\ &+ \cos(2t + 0.5) + 1.5\sin(5t - 0.5) \end{aligned} \quad (7)$$

El resultado de la simulación se representa en la figura 8. Tras un periodo transitorio (que

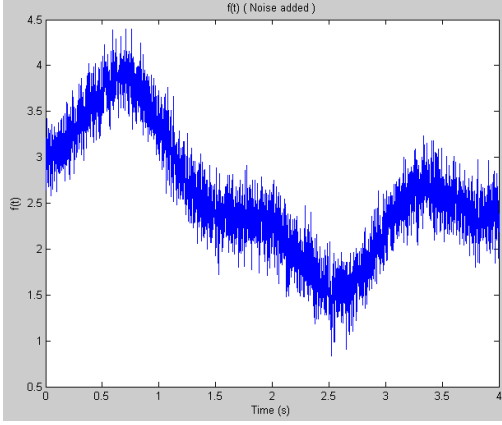


Figura 6: Función senoidal teórica más ruido.
 $f_{teorica+ruido}$

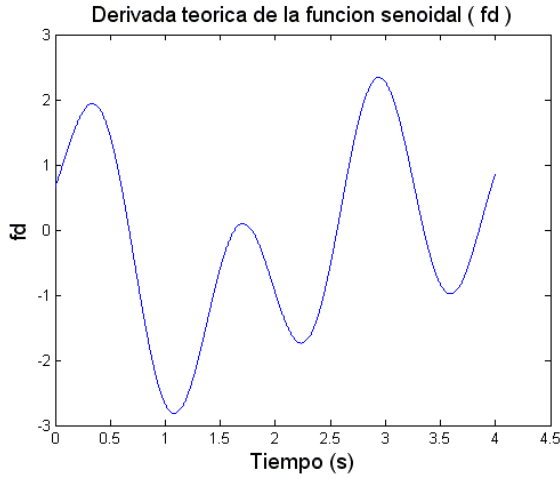


Figura 7: Derivada exacta de la función senoidal (fd) en ausencia de ruidos.

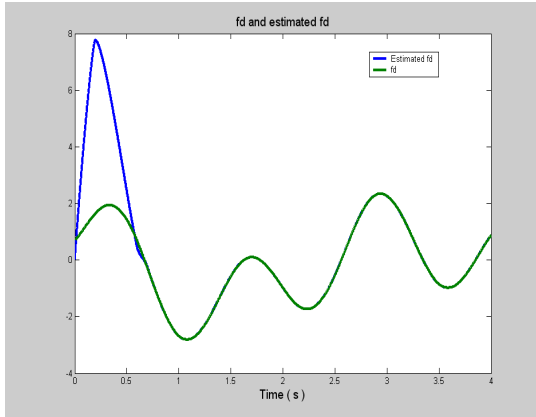


Figura 8: Representación de la derivada estimada por Levant y la derivada exacta.

se reduce significativamente cuanto mayor es el conocimiento que tenemos del valor inicial de la derivada a estimar) el diferenciador se ajusta con gran precisión al valor real de la derivada.

4 CONTROL POR MODO DESLIZANTE DINAMICO

El concepto que subyace a esta metodología es introducir dinámica adicional al sistema. Con ello se consigue combinar las características de un control por modo deslizante convencional (insensibilidad ante perturbaciones y no linealidades acotadas) y las de un compensador dinámico tradicional (adaptación a perturbaciones no acotadas). Puede demostrarse que este controlador permite alcanzar el modo de deslizamiento ($\sigma = 0$) en tiempo finito.

Un ejemplo de ley de control no lineal DSMC puede ser implementado en la siguiente forma ([7]):

$$\dot{\chi} = b \frac{\sigma}{\sigma^{0.5}} - a \frac{(\chi + \sigma)}{|\chi + \sigma|^{0.5}}$$

$$J = \chi + \sigma \quad (8)$$

siendo la ley de control en este caso:

$$u = -\rho \text{sign}(J) \quad (9)$$

4.1 DSMC como diferenciador

Una nueva clase de diferenciador ha sido presentada por Yuri Shtessel ([6]). Como en el caso anterior, este diferenciador deriva de un controlador usado como observador para derivar una señal. El control por modo deslizante dinámico puede ser usado como diferenciador de segundo orden mediante la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$\ddot{\chi} = \rho_0 \text{sign}(J_0)$$

$$\dot{\chi} = b \frac{e}{|e|^{0.5}} - a \frac{(\chi + e)}{|\chi + e|^{0.5}} \quad (10)$$

$$J_0 = \chi - e \quad (11)$$

$$e = \chi - \hat{\chi} \quad (12)$$

Finalmente la estimación de la derivada de la función χ puede obtenerse como:

$$y = \dot{\chi} = \int \rho_0 \text{sign}(J_0) d\tau \quad (13)$$

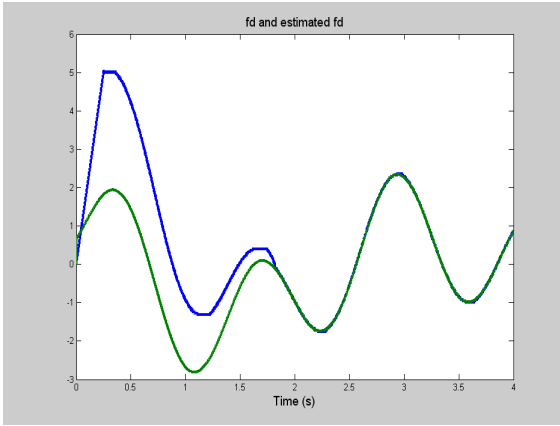


Figura 9: Representación de la derivada estimada por Shtessel y la derivada exacta.

4.2 Simulaciones

La implementación software del citado diferenciador en la forma de ecuaciones antes descritas ha sido simulada en C con el objeto de analizar su eficacia con la señal senoidal teórica anteriormente citada (ecuación 5).

La figura 9 muestra el resultado de las simulaciones comprobándose de nuevo, tras el correspondiente transitorio, que una buena estimación de la derivada es obtenida. Como en el caso del diferenciador de Levant, el periodo transitorio es despreciable si se conocen los valores iniciales de la derivada a estimar.

5 OTRAS TÉCNICAS DE DIFERENCIACION

A lo largo de las últimas décadas, muchas han sido las técnicas desarrolladas para derivar señales. En casos teóricos ideales, en ausencia de ruidos y otras perturbaciones, y cuando las funciones que interesa derivar son conocidas, pueden usarse métodos analíticos cada vez más abordables gracias a herramientas de cálculo simbólico como Maple, Matlab, etc. Una alternativa novedosa es la presentada en [9] donde se sugiere la diferenciación automática (Automatic Differentiation, AD) para su uso en algoritmos de control. Esta técnica, al contrario que los procesos analíticos, no requiere de una fórmula explícita para el cálculo de derivadas y devuelve un valor numérico para la estimación de interés dados los valores de las variables implicadas.

Cuando la función que deseamos diferenciar no es conocida, como suele ocurrir en la mayoría de las aplicaciones prácticas, se hace imprescindible el uso de otras técnicas. El desarrollo en serie de Fourier puede ser un método a aplicar

para obtener fórmulas de cálculo de derivadas de cualquier orden de una señal cuyo modelo analítico se desconoce. Desgraciadamente esta técnica no presenta buenos resultados en presencia de ruidos por lo que no es interesante para muchas situaciones de la vida real.

Entre las modernas técnicas que pueden ser empleadas para la diferenciación de señales cuya fuente es desconocida y que presentan ruidos u otras perturbaciones, se puede hacer una división en dos categorías ([8]). La primera consiste en ajustar un polinomio determinado en una "ventana" de tamaño fijo de los datos a diferenciar $y(t)$ y que se mueve a lo largo de la variable independiente (t). El interesado podrá profundizar en este método leyendo el artículo de Savitzky-Golay. La segunda versión se conoce como diferencias finitas y ha sido probablemente la más usada y popular por su sencillez.

La técnica de diferencias finitas más sencilla para diferenciar una señal $y = f(t_i)$ consiste en aplicar el método de la diferencia "hacia delante" que se puede definir con la fórmula :

$$f'(t_i) = [f(t_i + h) - f(t_i)]/h \quad (14)$$

para $i = 1 \dots n - 1$ y siendo $f'(t_i)$ la primera derivada de f en t_i y h el intervalo entre dos muestras sucesivas. El error de esta fórmula es $h/2 * f''(t_i)$ y puede hacerse excesivo si h no tiene un valor suficientemente pequeño. El inconveniente más importante de este segundo método es que este error es significativamente mayor en presencia de ruidos lo que puede paliarse con la introducción de filtros que suavicen el resultado, pero a costa de incorporar posibles distorsiones a la señal (recorte de picos máximos y mínimos, retrasos, etc).

Savitzky y Golay ([10]) proponen ajustar la señal a diferenciar en el instante t_i por un polinomio en una ventana de los datos definida por n_l puntos "pasados" ($t_j < t_i$) y por n_r puntos "futuros" ($t_k > t_i$). De tal forma, la señal f a diferenciar quedara aproximada en un punto t , por una combinación lineal g_t mediante la fórmula:

$$g_t = \sum_{n=nl}^{nr} c_n f_{t+n} \quad (15)$$

Si se calculan los coeficientes c_n no como valores constantes sino como polinomios de mayor orden (típicamente orden 2 o 4) es posible preservar momentos de orden superior en la señal. Así pues, primero se ajusta por mínimos cuadrados un polinomio con los puntos $n_l + n_r + 1$ de la ventana de datos y después se calcula el valor que toma en

el instante t (g_t). Esta idea, pero en forma optimizada para su computación, es la que se presenta en el algoritmo de Savitzky-Golay que puede encontrarse en [10]. En esta función, el parámetro ld indica que coeficientes c_n desean obtenerse con la llamada a la función. Es decir, con $ld = 0$ se obtienen los coeficientes para la señal filtrada, con $ld > 1$ los de la estimación de la ld -ésima derivada. De esta forma, con $ld = 1$ por ejemplo, una estimación de la primera derivada de f puede ser obtenida con la convolución definida por la fórmula (15) dividida por el paso de integración h .

6 COMPARATIVAS

Una comparativa de las distintas técnicas analizadas puede ser esclarecedora sobre que tipo de diferenciador puede ofrecer mejores resultados.

Para ello se ha utilizado la función senoidal teórica (5) ya introducida en 3.2.

El diferenciador basado en series de Fourier y el introducido por Savitzky-Golay (analizados en el punto 5) son comparados con el diferenciador HOSMC en las figuras 10 y 11 respectivamente.

Como se adelantaba en 5 el basado en series de Fourier presenta malos resultados en presencia de ruidos incluso cuando estos tienen una desviación típica muy reducida. En la figura 10 por ejemplo se comparan los resultados entre el diferenciador de Levant cuando el ruido de la señal original ($f_{teorica+ruido}$) tiene desviación típica 0.2 y el de Khan cuando el ruido es de desviación típica 0.02. Sin embargo, tras el transitorio, la estimación de Levant presenta mucho menos ruido.

El diferenciador de Savitzky-Golay requiere de un alto número de muestras en la "ventana" de ajuste del polinomio para producir resultados aceptables. Sin embargo, incluso en el mejor de los casos, los resultados conseguidos no son tan espectaculares como los alcanzados con el diferenciador HOSMC.

Finalmente, mediante la observación de las figuras 9 y 8 y la representación de los errores en las figuras 12 y 13, una comparativa entre el diferenciador HOSMC y el DSMC puede ser establecida. Como puede apreciarse, la precisión alcanzada en este caso por ambos diferenciadores es comparable aunque una vez más el diferenciador HOSMC parece ser la mejor alternativa tanto en precisión como en la rapidez en superar el transitorio.

7 UNA APLICACIÓN REAL

Con el fin de justificar la eficacia del diferenciador HOSMC se ha procedido ha ensayar el algoritmo comentado en 3.1 para obtención de aceleraciones

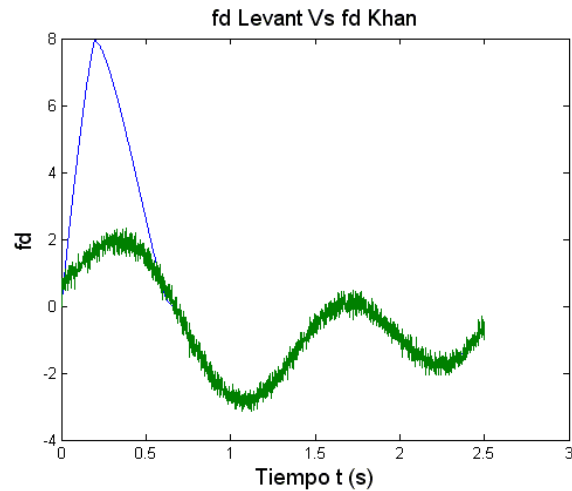


Figura 10: Comparación entre las derivadas estimadas por el diferenciador de Levant y el basado en series de Fourier (Khan).

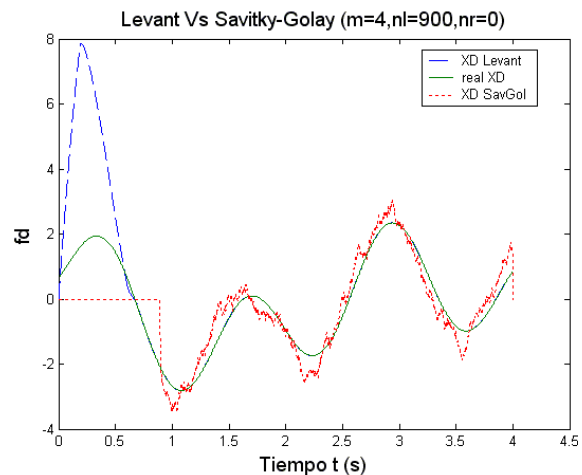


Figura 11: Comparación entre las derivadas estimadas por el diferenciador de Levant y el propuesto por Savitzky-Golay.

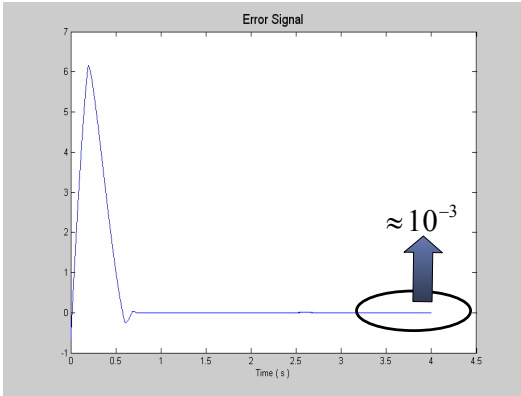


Figura 12: Señal de error en la estimación de la derivada ($fd - fd_{estimada}$) (Levant).

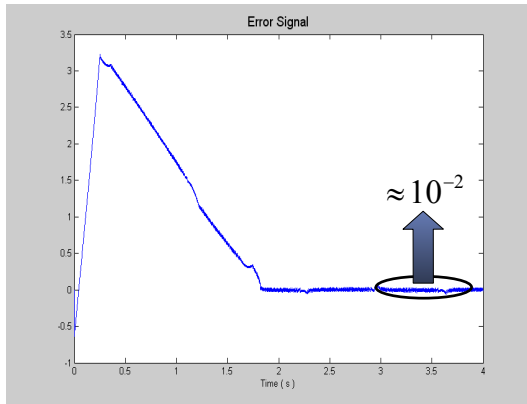


Figura 13: Señal de error en la estimación de la derivada ($fd - fd_{estimada}$) (Shtessel).

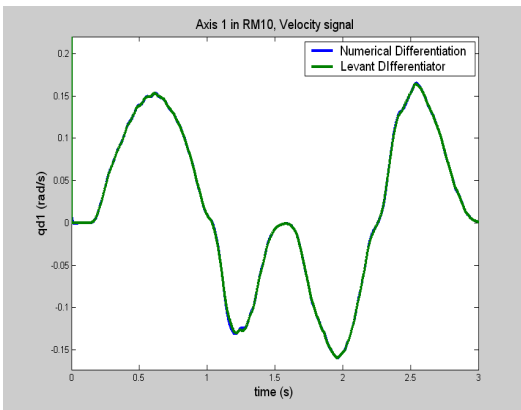


Figura 14: Estimaciones de velocidad del primer eje del robot procedentes de la diferenciación numérica standard y el diferenciador de Levant.

en un robot real ([5]). Para ello se ha hecho uso de las señales procedentes de sensores colocados en un robot manipulador industrial. Los encoders situados en los ejes del robot proporcionan medidas de posición de los mismos pero, por requerimientos de control avanzado, se precisan asimismo medidas de velocidad y aceleración.

Como puede comprobarse en la figura 14 la velocidad del eje puede ser estimada fácilmente mediante sencilla diferenciación numérica siendo los resultados obtenidos mediante esta técnica suficientemente aceptables y el ruido de la señal casi inapreciable. Sin embargo, en la figura 15 se puede comprobar como una segunda diferenciación produce resultados totalmente inadmisibles desde el punto de su uso en el control del robot debido a su excesivo ruido.

El uso de filtros más acusados provoca una distorsión de la señal igualmente inaceptable. Sin embargo, mediante el uso del diferenciador HOSMC se puede obtener mucho mejores resultados, como puede verse en la figura 16. Ahora la señal diferenciada es suficientemente suave como para ser empleada en posibles controladores como realimentación y presenta un valor más preciso de medidas de aceleración de los ejes.

8 CONCLUSIONES FINALES

Las más recientes técnicas de control basadas en modos deslizantes han sido presentadas. El Control por Modo Deslizante de Orden Superior y el Control por Modo Deslizante Dinámico se presentan como novedosos y prometedores métodos que pueden ser empleados para diferenciar señales en presencia de ruidos. Su robustez y precisión ha sido mostrada con simulaciones diversas. Los ensayos parecen reflejar que los mejores resultados se obtienen con el diferenciador HOSMC (Levant) si bien los diferenciadores basados en DSMC (Shtessel) presentan una menor complejidad.

Otras técnicas de diferenciación han sido analizadas y comparadas con el diferenciador HOSMC, volviendo a mostrarse éste, como el método más eficaz en el caso de señales muy ruidosas.

Un caso práctico ha sido asimismo presentado en el que la señal de aceleración de un eje de un robot manipulador industrial es estimada mediante el diferenciador HOSMC, comprobándose significativas ventajas respecto a los métodos tradicionales de diferenciación.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por fondos de la comisión europea bajo el programa Marie Curie/Control Training Site (CTS). Así mismo los

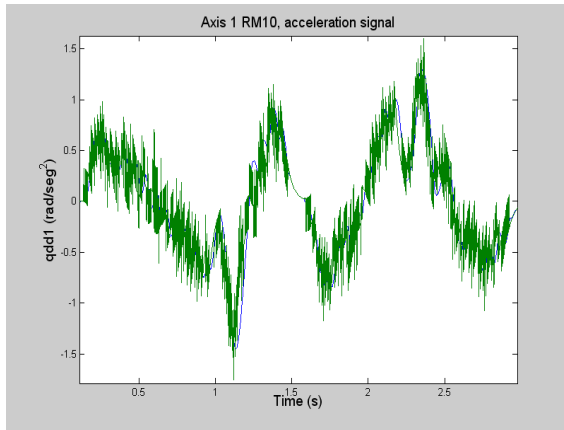


Figura 15: Estimación de la aceleración procedente de la diferenciación numérica standard de la señal de velocidad.

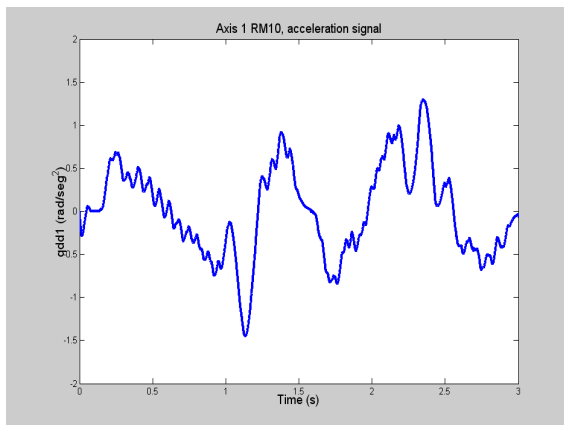


Figura 16: Estimación de la aceleración procedente de la diferenciación de la señal de velocidad proporcionada por el método de Levant.

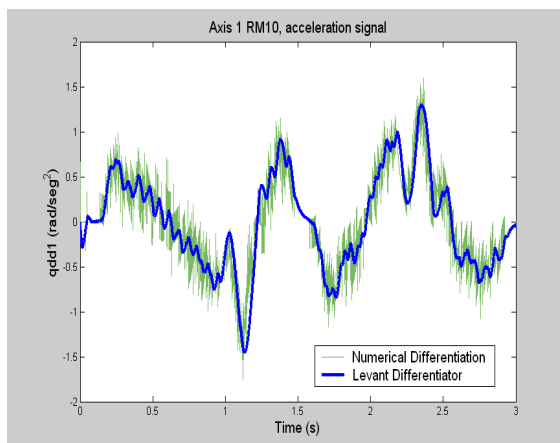


Figura 17: Comparativa de estimaciones (diferenciador standard/Levant).

autores desean expresar su agradecimiento al Ministerio de Ciencia y Tecnología por financiar parcialmente este trabajo en el marco del proyecto DPI2001-2424-C02-01.

Referencias

- [1] Ishtiaq Rasool Khan and Ryoji Ohba, *New finite difference formulas for numerical differentiation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 126, 2000.
- [2] Arie Levant, *Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control*, International Journal of Control in the upcoming 65th birthday special issue for Prof. V. Utkin[2003], 2003.
- [3] Yean-Ren Hwang Min-Shin Chen and Masayoshi Tomizuka, *A state-dependent boundary layer design for sliding mode control*, IEEE Transactions On Automatic Control, Vol. 47, No. 10, 2002.
- [4] Stanislaw H.Zak Raymond A.DeCarlo and Gregory P.Matthews, *Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial*, Proceedings of the IEEE, Vol.76 No.3, 1988.
- [5] Rafael Romero Vicente, *Plataforma de experimentación de controladores para robots industriales*, Universidad de Sevilla, 2001.
- [6] Y. Shtessel, *Second order sliding mode exact differentiator using ndsm technique*, Seminar on Sliding Mode Control, University Of Sheffield, 2001.
- [7] Yuri Shtessel, *Second order sliding mode control based on nonlinear dynamic sliding manifold*, Seminar on Sliding Mode Control, University Of Sheffield, 2001.
- [8] Shyam S. Shukla and James F. Rusling, *Comparison of methods for numerical differentiation*, trends in analytical chemistry, vol. 4, no. 9, 1985.
- [9] Edward Moore Stephen L. Campbell and Yangchun Zhong, *Utilization of automatic differentiation in control algorithms*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, No.5, 1994.
- [10] Saul A. Teukolsky William H. Press and William T. Vetterling, *Numerical recipes in c*, Cambridge University Press, 2002.
- [11] Alan S.I. Zinober, *Variable structure and lyapunov control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 193, Springer-Verlag, 1994.