

# SINTONIZACIÓN DE UN CONTROLADOR PID/ $H_\infty$ NO LINEAL PARA UN ROBOT MANIPULADOR

M. Román, M. G. Ortega, F.R. Rubio

Depto. de Ingeniería de Sistemas y Automática. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos, s/n – 41092 Sevilla (Spain)  
{manuelr, ortega, rubio}@cartuja.us.es

## Resumen

*El controlador para robots manipuladores presentado en [5] recuerda al clásico control PID por par calculado con una diferencia: las matrices de ganancia son variables con la posición y la velocidad de las articulaciones del robot. El efecto integral de la ley de control permite rechazar perturbaciones persistentes tales como un peso en el elemento final del robot. El objetivo de este trabajo es mostrar cómo se puede abordar la sintonización de este controlador con el apoyo de las simulaciones que han sido realizadas para un robot de dos grados de libertad, llegando a la conclusión de que pueden utilizarse las mismas ideas intuitivas que las usadas para sintonizar un PID lineal clásico.*

**Palabras clave:** Robots manipuladores, control  $H_\infty$  no lineal, rechazo de perturbaciones.

## 1 INTRODUCCIÓN

Una cuestión interesante en control automático es en que medida las leyes de control son capaces de rechazar las perturbaciones que pueden acaecer. En este trabajo un vector de señales de perturbación actuando sobre los canales de entrada (pares) del robot es usado para representar el efecto combinado de los errores de modelado y las perturbaciones externas. La capacidad del sistema de control para rechazar esas perturbaciones y mantener pequeño el error de seguimiento (sin excesivo esfuerzo de control) será medida en el sentido de la ganancia  $L_2$ . Con el objetivo de realizar un rechazo óptimo de las perturbaciones, se propone un diseño de la ley de control formulada dentro de un problema de optimización  $H_\infty$  no lineal ([6], [7]). Con base en esta formulación, se obtiene una ley de control  $H_\infty$  no lineal subóptima provista de una estructura de prealimentación/realimentación. La sintonización de este controlador, que puede hacerse actuando directamente sobre los pesos que ponderan los errores de seguimiento en una determinada función de coste, ha sido estudiada tomando como ejemplo el diseño de un sistema de control para un robot planar de dos grados de libertad.

El trabajo está organizado como sigue: una apro-

ximación a los conceptos de la ganancia  $L_2$  y la problemática de la optimización  $H_\infty$  en el contexto de los sistemas no lineales es introducida en la sección 2. Un controlador no lineal subóptimo es presentado en la sección 3, con el objetivo de maximizar la capacidad del manipulador robótico para rechazar perturbaciones externas actuantes sobre el canal de entrada, asumiendo un modelo perfecto del sistema. Así mismo se pondrá de manifiesto la relación existente entre el clásico controlador PID por par calculado y los resultados presentados. Como aplicación se han diseñado controladores  $H_\infty$  no lineales para un robot de dos grados de libertad. El resultado de las simulaciones realizadas es mostrado en la sección 4, junto con un estudio detallado de las matrices de ganancia que definen la ley de control. Finalmente las principales conclusiones son expuestas en la sección 5.

## 2 APROXIMACIÓN AL CONTROL $H_\infty$ NO LINEAL

Las ecuación dinámica de un sistema no lineal suave de orden  $n$  afectado por perturbaciones desconocidas puede expresarse de la forma

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)u + K(x, t)d, \quad (1)$$

donde  $u \in \mathbb{R}^p$  es el vector de señales de entrada,  $d \in \mathbb{R}^q$  es el vector de perturbaciones externas y  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados. El índice de comportamiento puede definirse usando la variable de coste  $z \in \mathbb{R}^{(m+p)}$  dada por la expresión

$$z = W \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix}, \quad (2)$$

donde  $h(x) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de errores que ha de ser controlado y  $W \in \mathbb{R}^{(m+p) \times (m+p)}$  es una matriz de ponderación. Si se asume que los estados  $x$  son medibles entonces el problema de optimización  $H_\infty$  puede plantearse como sigue:

*Encontrar el menor  $\gamma^* \geq 0$  tal que, para cualquier  $\gamma \geq \gamma^*$  exista un realimentación del estado  $u = u(x, t)$  tal que, la ganancia  $L_2$  del sistema –calculada tomando  $d$  como señal de entrada y  $z$  como señal de salida– sea menor o igual que  $\gamma$ ,*

esto es:

$$\int_0^T \|z\|_2^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|d\|_2^2 dt. \quad (3)$$

Desarrollando la expresión subintegral del lado izquierdo de (3) se tiene

$$\|z\|_2^2 = z^T z = \begin{bmatrix} h^T(x) & u^T \end{bmatrix} W^T W \begin{bmatrix} h(x) \\ u \end{bmatrix}.$$

La matriz  $W^T W$  puede partitionarse en la forma

$$W^T W = \begin{bmatrix} Q & \bar{C} \\ \bar{C}^T & R \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 \end{bmatrix},$$

donde  $Q$  y  $R$  son simétricas y definidas positivas con  $Q - \bar{C}R^{-1}\bar{C}^T > 0$ .

Para el sistema descrito en (1) se puede obtener la señal de entrada óptima  $u^*$  resolviendo la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi, véase [3].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^T V}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^T V}{\partial x} \left[ \frac{1}{\gamma^2} K K^T \right] \frac{\partial V}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^T V}{\partial x} [G R^{-1} G^T] \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^T V}{\partial x} G R^{-1} C^T h(x) + \\ & + \frac{1}{2} h^T(x) (Q - \bar{C} R^{-1} \bar{C}^T) h(x) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Para cada  $\gamma > \sqrt{\sigma_{\max}(R)}$  se tendrá una solución  $V(x, t)$  y la ley de control óptima por realimentación del estado ([2]) se obtiene como

$$u^* = -R^{-1} \left( \bar{C}^T h(x) + G^T(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} \right). \quad (5)$$

### 3 OPTIMIZACIÓN $H_\infty$ NO LINEAL PARA EL CONTROL DE ROBOTS MANIPULADORES

Para describir el comportamiento de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad se usaran las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange:

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) = \tau + d_\tau, \quad (6)$$

donde se supondrá que son medibles tanto el vector de posiciones de las articulaciones  $q$  como el vector de velocidades  $\dot{q}$ . El vector  $\tau$  (pares aplicados sobre los ejes de las articulaciones) es la señal de entrada al sistema y  $d_\tau$  representa el efecto conjunto de los errores de modelado del sistema y las perturbaciones externas. La matriz de inercia

$M(q)$  es simétrica y definida de positiva,  $V(q, \dot{q})$  es el vector de términos centripetos y de Coriolis y  $G(q)$  es un vector que contiene los términos gravitacionales.

Para el sistema (6) se va a considerar una ley de control con la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \tau &= M(q) \ddot{q} + V(q, \dot{q}) + G(q) - \\ & - \frac{1}{\rho} (M(q) T \dot{x} + C(q, \dot{q}) T x) + \frac{1}{\rho} u, \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$C(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{M}(q) + N(q, \dot{q}),$$

y las matrices  $\dot{M}(q)$  y  $N(q, \dot{q})$  han de ser calculadas con las siguientes expresiones

$$\dot{M}_{ij} = \frac{d}{dt} M_{ij} = \frac{\partial M_{ij}}{\partial q} \dot{q} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad (8)$$

$$N_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k, \quad (9)$$

pudiéndose demostrar ([1], [4]) que

$$V(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q}) \dot{q}.$$

Denotando por  $q_r$ ,  $\dot{q}_r$  y  $\ddot{q}_r$ , respectivamente, las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas de las articulaciones, el vector de errores  $x$  y su derivada  $\dot{x}$  vienen dados por

$$x = \begin{bmatrix} \dot{e} \\ e \\ \int e dt \end{bmatrix} \quad y \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \dot{e} \\ e \end{bmatrix}, \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} \ddot{e} &= \ddot{q} - \ddot{q}_r, \\ \dot{e} &= \dot{q} - \dot{q}_r, \\ e &= q - q_r, \\ \int e dt &= \int_0^t (q - q_r) dt. \end{aligned}$$

El vector  $u$  representa el esfuerzo de control adicional necesario para atenuar las perturbaciones.

La matriz  $T$  de la ecuación (7) puede partitionarse en la forma

$$T = [ T_1 \quad T_2 \quad T_3 ], \quad (11)$$

con  $T_1 = \rho I$ , donde  $\rho$  es un escalar positivo e  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ .

Sustituyendo la expresión de la ley de control (7) en la ecuación del modelo del robot y definiendo  $d = \rho d_\tau$  se llega a

$$M T \dot{x} + C T x = u + d, \quad (12)$$

que es la ecuación de un sistema no lineal de dimensión  $3n$ . El problema de control es ahora minimizar el error de seguimiento  $x$  en presencia de las perturbaciones  $d$  sin excesivo esfuerzo de control  $u$ .

La ecuación (12) puede reescribirse en la forma normalizada de la ecuación (1) con

$$f(x, t) = T_o^{-1} \Phi(x, t) T_o x, \quad (13)$$

donde

$$\Phi = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & O & O \\ \frac{1}{\rho}I & I - \frac{1}{\rho}T_2 & -I - \frac{1}{\rho}(T_3 - T_2) \\ O & I & -I \end{bmatrix}$$

y

$$G(x, t) = K(x, t) = T_o^{-1} \begin{bmatrix} M^{-1} \\ O \\ O \end{bmatrix}.$$

donde  $I$  es la matriz identidad,  $O$  la matriz nula, ambas de orden  $n$  y

$$T_o = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ O & I & I \\ O & O & I \end{bmatrix}.$$

En este caso, el vector de errores a controlar es precisamente  $h(x) = x$  y la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (4) queda

$$V(x, t) = \frac{1}{2} x^T T_o^T \begin{bmatrix} M & O & O \\ O & Y & S - Y \\ O & S - Y & Z + Y \end{bmatrix} T_o x, \quad (14)$$

donde las matrices  $Y, S, Z$  y  $T = [T_1 \ T_2 \ T_3]$  pueden obtenerse resolviendo la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} O & Y & S \\ Y & 2S & Z + 2S \\ S & Z + 2S & O \end{bmatrix} + \quad (15)$$

$$+ Q + \frac{1}{\gamma^2} T^T T - (\bar{C}^T + T)^T R^{-1} (\bar{C}^T + T) = 0.$$

Sustituyendo el valor de  $V(x, t)$  en la ecuación (5), la ley de control óptima  $u^*$  correspondiente al índice  $H_\infty$  de funcionamiento  $\gamma$  es

$$\begin{aligned} u^* &= -R^{-1} \left( \bar{C}^T x + G^T(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \\ &= -R^{-1} (\bar{C}^T + T) x. \end{aligned}$$

Para una prueba de estos resultado véase [5].

Sustituyendo las expresiones de  $T$ ,  $u^*$ ,  $\dot{x}$  y  $x$  en (7), y tras algunos cálculos la ley óptima de control puede escribirse:

$$\begin{aligned} \tau^* &= M(q) \ddot{q}_r + V(q, \dot{q}) + G(q) - \\ &- (K_D \dot{e} + K_P e + K_I \int e dt), \quad (16) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} K_D &= \frac{1}{\rho} (CT_1 + R^{-1} (\bar{C}_1^T + T_1) + MT_2), \\ K_P &= \frac{1}{\rho} (CT_2 + R^{-1} (\bar{C}_2^T + T_2) + MT_3), \\ K_I &= \frac{1}{\rho} (CT_3 + R^{-1} (\bar{C}_3^T + T_3)). \end{aligned}$$

Para dar a la ley de control la estructura clásica de un controlador PID por par calculado puede reescribirse la ecuación (17) en la forma

$$\begin{aligned} \tau^* &= M(q) (\ddot{q}_r - k_d \dot{e} - k_p e - k_i \int e dt) + \\ &+ V(q, \dot{q}) + G(q), \quad (17) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{1}{\rho} (M^{-1}CT_1 + M^{-1}R^{-1} (\bar{C}_1^T + T_1) + T_2), \\ k_p &= \frac{1}{\rho} (M^{-1}CT_2 + M^{-1}R^{-1} (\bar{C}_2^T + T_2) + T_3), \\ k_i &= \frac{1}{\rho} (M^{-1}CT_3 + M^{-1}R^{-1} (\bar{C}_3^T + T_3)). \end{aligned}$$

En el caso de que la matriz de ponderación  $W$  que aparece en la expresión (2) de la función de coste sea diagonal y escalar por bloques, esto es

$$W = \begin{bmatrix} w_1 I & O & O & O \\ O & w_2 I & O & O \\ O & O & w_3 I & O \\ O & O & O & w_u I \end{bmatrix}$$

se tiene que los bloques que componen la matriz  $W^T W$  satisfacen  $Q_1 = w_1^2 I$ ,  $Q_2 = w_2^2 I$ ,  $Q_3 = w_3^2 I$ ,  $R = w_u^2 I$ ,  $Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = O$ ,  $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = O$  y las matrices de ganancia toman la forma

$$\begin{aligned} K_D &= \frac{\sqrt{w_2^2 + 2w_1 w_3}}{w_1} M + C + \frac{1}{w_u^2} I, \\ K_P &= \frac{w_3}{w_1} M + \frac{\sqrt{w_2^2 + 2w_1 w_3}}{w_1} \left( C + \frac{1}{w_u^2} I \right), \\ K_I &= \frac{w_3}{w_1} \left( C + \frac{1}{w_u^2} I \right), \end{aligned}$$

y para el controlador escrito en la forma más clásica –ecuación (17)– se tiene

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{\sqrt{w_2^2 + 2w_1 w_3}}{w_1} I + M^{-1} \left( C + \frac{1}{w_u^2} I \right), \\ k_p &= \frac{w_3}{w_1} I + \frac{\sqrt{w_2^2 + 2w_1 w_3}}{w_1} M^{-1} \left( C + \frac{1}{w_u^2} I \right), \\ k_i &= \frac{w_3}{w_1} M^{-1} \left( C + \frac{1}{w_u^2} I \right). \end{aligned}$$

Las expresiones obtenidas verifican una importante propiedad: no dependen del índice subóptimo de funcionamiento  $\gamma$ . Por lo tanto, se ha obtenido expresiones algebraicas que permiten calcular la solución óptima general del caso particular que ha sido estudiado. Por otra parte es importante resaltar que tomando  $w_3 = 0$  en las expresiones anteriores se obtiene un controlador PD no lineal por par calculado, lo cual concuerda plenamente con los resultados de [2].

## 4 SIMULACIONES PARA UN ROBOT DE 2 GRADOS DE LIBERTAD

Han sido llevados a cabo estudios de simulación para verificar el comportamiento del esquema de control descrito en las secciones anteriores. En particular se ha implementado un sistema de control para un robot plano de dos grados de libertad como el de la figura 1.

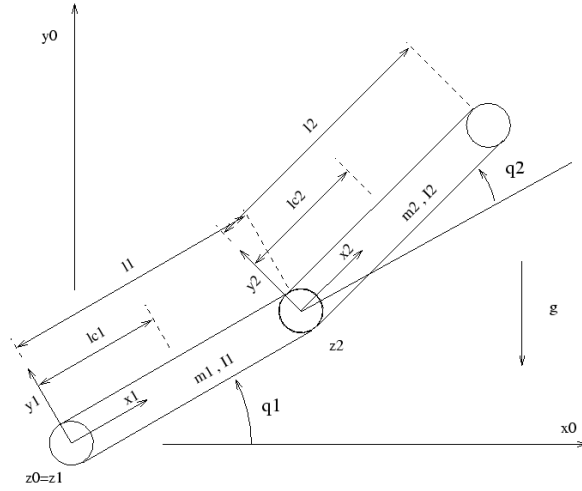


Figura 1: Robot de dos grados de libertad.

Las matrices y vectores que aparecen en las ecuaciones de Euler-Lagrange (6) para este robot son

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix},$$

donde

$$M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} c_2) + I_1 + I_2,$$

$$M_{12} = m_2 (l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_2,$$

$$M_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2,$$

$$V(q, \dot{q}) = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} -(2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2) \\ \dot{q}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$G(q) = g \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) c_1 + m_2 l_{c2} c_{12} \\ m_2 l_{c2} c_{12} \end{bmatrix},$$

con

$$c_1 = \cos q_1,$$

$$c_2 = \cos q_2,$$

$$c_{12} = \cos(q_1 + q_2).$$

Las matrices  $\dot{M}$  y  $N$ , calculadas usando las expresiones (8) y (9) están dadas por

$$\dot{M} = -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} 2\dot{q}_2 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \left( \dot{q}_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y por tanto se tiene que

$$C = \frac{1}{2} \dot{M} + N = m_2 l_1 l_{c2} \sin q_2 \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La tabla 1 muestra los valores nominales de los parámetros del robot y que han sido utilizados en el diseño del controlador.

Tabla 1: Parámetros del robot de dos grados de libertad.

Parámetro	Valor Nominal
Longitudes	$l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$
Posiciones de los centros de masa	$l_{c1} = l_{c2} = 0,5 \text{ m}$
Masas	$m_1 = m_2 = 3 \text{ kg}$
Momentos de inercia	$I_1 = I_2 = 0,2536 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

En la implementación de la planta (el modelo del robot a controlar) ha sido considerada como incertidumbre una desviación pseudoaleatoria de los parámetros del sistema en torno a sus valores nominales, siendo las desviaciones máximas consideradas de un  $\pm 20 \%$ .

Además se ha considerado que sobre el robot actuaba una carga consistente en escalones de par de  $7 \text{ N} \cdot \text{m}$  para el eje 1 y  $2 \text{ N} \cdot \text{m}$  para el eje 2 aplicados a los  $1,25 \text{ s}$  y  $0,75 \text{ s}$ , respectivamente, de comenzar las simulaciones.

Para las simulaciones se dispone de un generador de trayectorias que suministra al controlador las referencias de posición, velocidad y aceleración. Las referencias de posición para cada eje son polinomios de quinto grado entre la posiciones iniciales ( $0 \text{ rad}$  en ambos ejes) y finales ( $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  también en ambos ejes) con velocidades y aceleraciones iniciales y finales nulas.

Para el diseño del controlador se ha tomado una matriz de ponderación  $W$  diagonal y escalar por bloques. La tabla 2 muestra la relación existente entre los pesos que definen la ley de control y las señales sobre las que se está interesado en actuar.

Tabla 2: Pesos asociados a las señales que forman parte de la función de coste.

Señales	Pesos
Error en velocidad $\dot{e}$	$w_1$
Error en posición $e$	$w_2$
Error integral $\int e dt$	$w_3$
Esfuerzo de control adicional $u$	$w_u$

Se han ensayado varios controladores, siguiendo un proceso lógico de sintonización del sistema de control. Los pesos que se adoptaron para cada uno de ellos se muestran en la tabla 3.

Tabla 3: Pesos para los controladores PID  $H_\infty$  ensayados

Controladores $H_\infty$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_u$
Controlador 1	1	1	1	1
Controlador 2	1	1	1	0,01
Controlador 3	0,5	1	1	0,01
Controlador 4	1	1	2	0,01
Controlador 5	0,5	1	2	0,01

Para cada uno de estos controladores se presentará gráficamente la evolución temporal de los errores de posición de ambas articulaciones, esto es, las diferencias entre las posiciones reales y sus referencias.

Para el primer controlador ensayado —el controlador 1— se tomó la elección más sencilla, todos los pesos iguales a la unidad y se obtuvo el resultado de la figura 2.

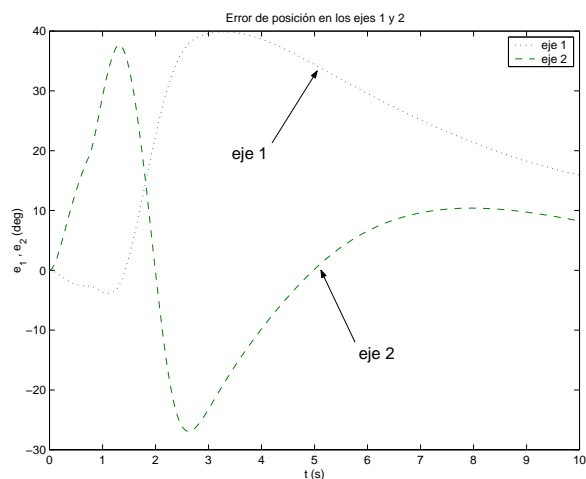


Figura 2: Error de posición para el controlador 1.

Para mejorar el comportamiento del controlador debe permitirse que el esfuerzo de control adicional  $u$  sea grande. Para ello basta hacer que su ponderación en la función de coste sea pequeña<sup>1</sup>. Reduciendo el valor de  $w_u$  desde 1 hasta 0,01 se obtiene el controlador 2 y los resultados que muestra la figura 3.

Puede verse cómo la respuesta mejora de forma muy notable, pero si se desea reducir el error en régimen transitorio y el tiempo de establecimiento aun puede mejorarse el controlador utilizando las ideas clásicas de sintonización de un PID lineal. Partiendo del controlador 2, si se reduce a la mitad el peso  $w_1$  correspondiente al error derivativo se obtiene el controlador 3 y los resultados de la figura 4 donde se puede comprobar que el error

<sup>1</sup>En la práctica  $w_u$  debe tomar el mínimo valor que no provoque saturación de las señales de control.

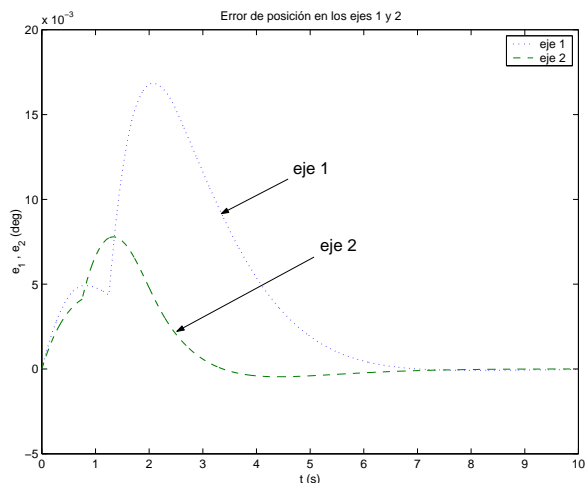
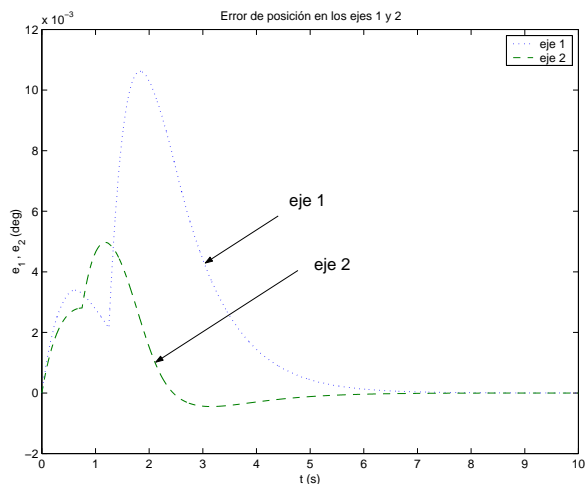


Figura 3: Error de posición para el controlador 2.

máximo del eje 1 se ha reducido a algo más de la mitad.



Si partiendo de nuevo del controlador 2 se duplica el valor del peso  $w_3$  asociado al error integral se obtiene el controlador 4 y los resultados de la figura 4 donde se comprueba que el tiempo de establecimiento ha disminuido, al menos para el eje 2 en aproximadamente 1 s.

Finalmente, si a un mismo tiempo se reduce a la mitad  $w_1$  y se duplica  $w_3$  se obtiene el controlador 5 para el cual se muestran los resultados de la figura 5. Respecto del controlador 2 ha habido una mejora del error máximo en el eje 1 que ha sido reducido a algo menos de la mitad. También ha disminuido el tiempo de establecimiento en aproximadamente 2 s.

Para el controlador 5, la figura 6 muestra los pares calculados (señales de control) que se aplican al robot.

En las figuras 7, 8 y 9 se muestra la evolución

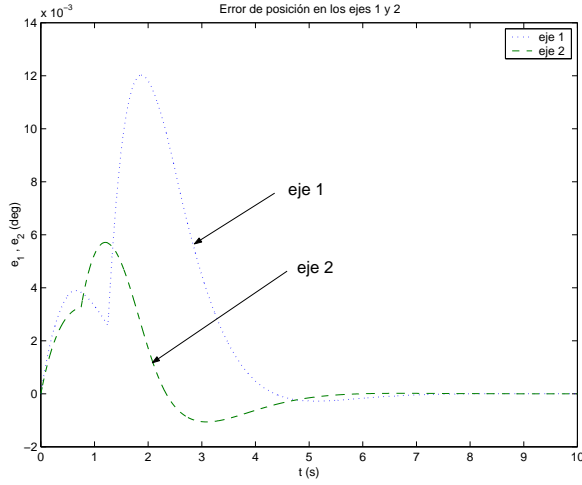


Figura 4: Error de posición para el controlador 4.

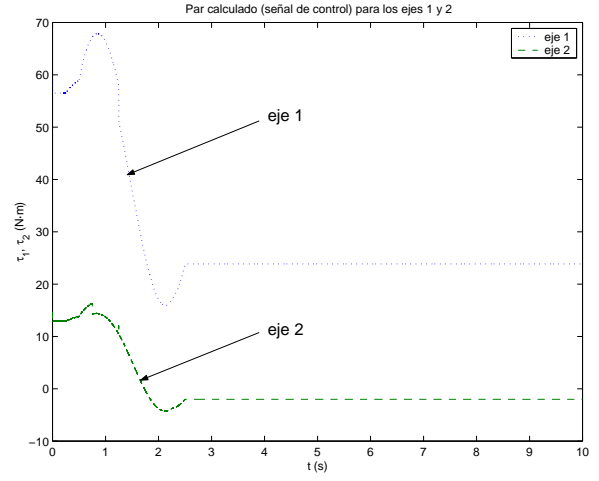


Figura 6: Par calculado para el controlador 5.

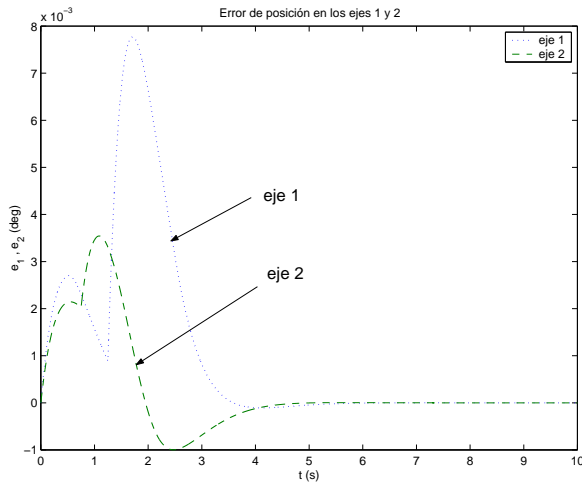


Figura 5: Error de posición para el controlador 5.

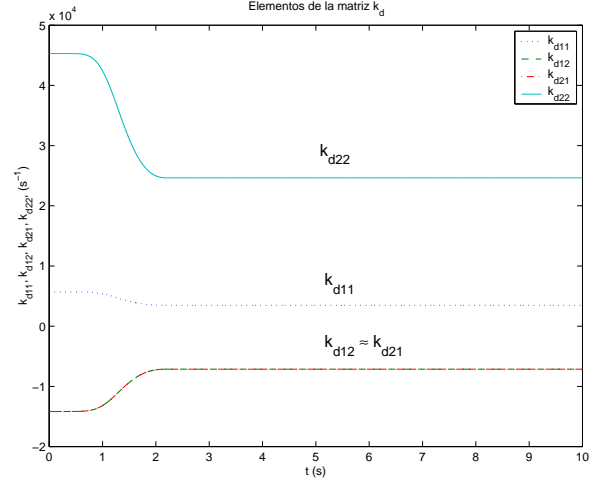


Figura 7: Elementos de la matriz  $k_d$  para el controlador 5.

temporal de los elementos de las matrices de ganancia  $k_d$ ,  $k_p$  y  $k_i$  obtenidas para el controlador 5. Estas matrices afectan, respectivamente, al error en velocidad, de posición e integral. En concreto estudiaremos las matrices que aparecen en la expresión del controlador escrito<sup>2</sup> en la forma de la ecuación (17) para que sea comparable con los valores que tomarían las matrices homólogas de un hipotético controlador PID lineal por par calculado.

Puede observarse que las matrices de ganancia del controlador obtenido no son diagonales, es decir el control no es desacoplado. Por otra parte se observa una superposición de las gráficas correspondientes a los elementos no diagonales de las ma-

<sup>2</sup>La implementación informática del controlador debe hacerse en la forma de la ecuación (16). En caso de utilizar la forma de la ecuación (17) es necesario invertir la matriz de inercia del robot en cada ciclo de control.

trices de ganancia. Un estudio cuidadoso de estos elementos permite observar que solo son exactamente iguales<sup>3</sup> en los instantes iniciales y finales, precisamente cuando la matriz  $C$  de términos centrípetos y de Coriolis se anula al ser nulas las condiciones iniciales y las referencias finales de velocidad. Cuando esto ocurre las matrices de ganancia se hacen simétricas pero no diagonales, es decir adoptan la misma forma que la inversa de la matriz de inercia  $M^{-1}$ . Todo esto no ha de resultar extraño si se tiene en cuenta que en el controlador utilizado las matrices de ganancia  $k_d$ ,  $k_p$  y  $k_i$  se obtienen como una combinación lineal de  $M^{-1}$ , el producto  $M^{-1}C$  y la matriz identidad  $I$ .

Finalmente la figura 10 muestra la evolución con el tiempo de la norma 2 de las matrices de ganancia

<sup>3</sup>La diferencia entre los elementos no diagonales de las matrices de ganancia es muy pequeña y no puede ser observada en las gráficas.

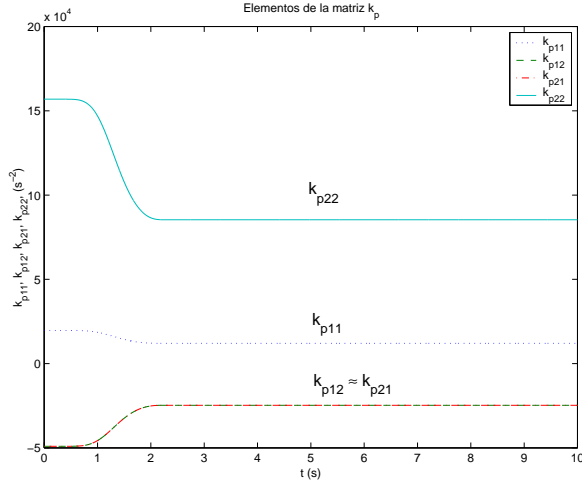


Figura 8: Elementos de la matriz  $k_p$  para el controlador 5.

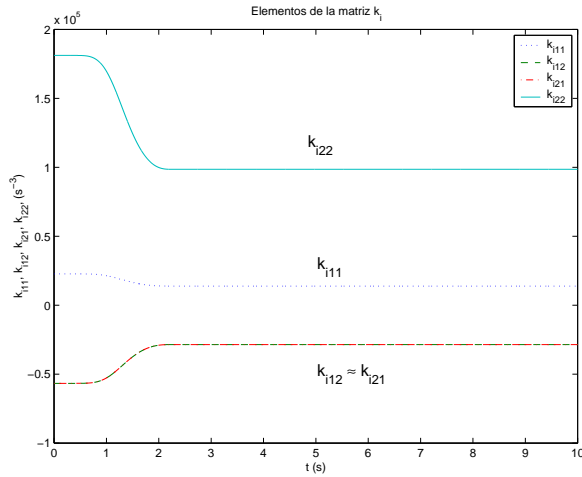


Figura 9: Elementos de la matriz  $k_i$  para el controlador 5.

anteriores, esto es, los valores máximos singulares de  $k_d$ ,  $k_p$  y  $k_i$ . Se observa como el control se hace menos energético a medida que el sistema alcanza las condiciones finales de posición y velocidad.

Como última aportación se hará una comparación de los resultados obtenidos con el controlador PID/ $H_\infty$  con un tradicional PID por par calculado con matrices diagonales y constantes. Buscando un tiempo de establecimiento similar al que ha sido obtenido con el controlador 5 se ha sintonizado un controlador por par calculado con un PID constante y desacoplado (matrices diagonales) en el bucle externo. Las matrices de ganancia elegi-

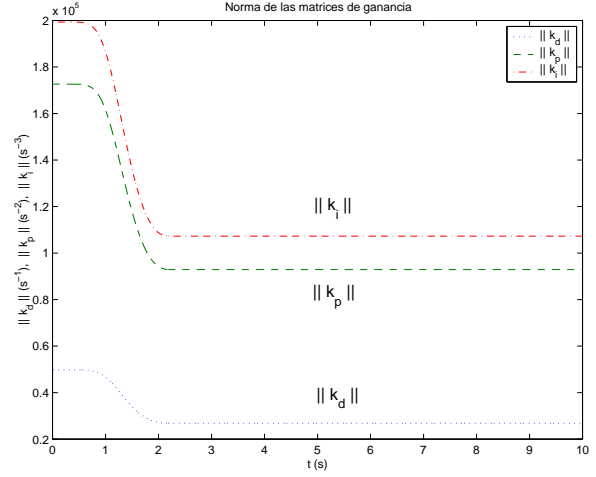


Figura 10: Normas  $\|k_d\|_2$ ,  $\|k_p\|_2$  y  $\|k_i\|_2$  para el controlador 5.

das vienen dadas por

$$k_d = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 240 \end{bmatrix},$$

$$k_p = \begin{bmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 14400 \end{bmatrix},$$

$$k_i = \begin{bmatrix} 24000 & 0 \\ 0 & 24000 \end{bmatrix},$$

y los resultados que se obtienen al utilizar este controlador son mostrados en la figura 11.

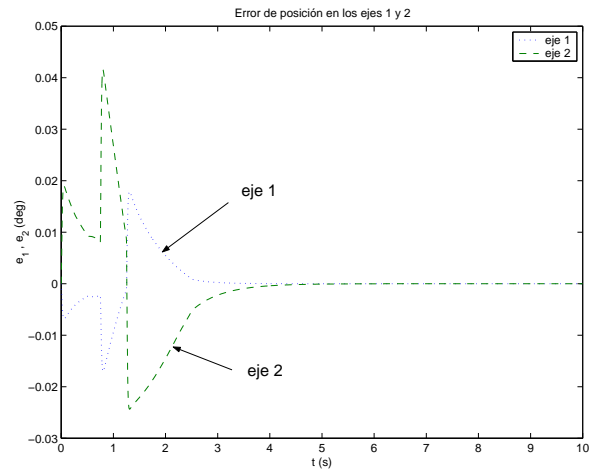


Figura 11: Error de posición para un control PID lineal por par calculado.

Se observa que para una rapidez comparable, el error de seguimiento con el controlador  $H_\infty$  no lineal que ha sido sintonizado es bastante menor.

## 5 CONCLUSIONES

Han sido obtenidas expresiones algebraicas explícitas para calcular una ley de control óptima

para robots manipuladores con las propiedades del clásico controlador PID por par calculado. La inclusión del efecto integral permite rechazar perturbaciones mantenidas como un peso en el elemento final del robot. La sintonización del controlador puede hacerse actuando directamente sobre las elementos de la matriz de ponderación correspondientes al error que se desea minimizar. Se ha mostrado como abordar la sintonización del controlador PID/ $H_\infty$  tomando como ejemplo las simulaciones realizadas para un robot plano de dos grados de libertad. El resultado de las simulaciones muestra un buen comportamiento del controlador propuesto y ventajas comparativas frente a esquemas de control similares con matrices de ganancia constantes.

### Agradecimientos

Los autores desean agradecer a CICYT y FEDER la financiación de este trabajo con cargo a los proyectos de investigación TAP98-0541, DPI2000-1218-C01 y 1FD97-0783.

### Referencias

- [1] Craig, J. J., (Marzo 1989) Introduction to Robotics, Mechanics and Control, Addison Wesley Reading.
- [2] Feng, W., Postlethwaite, I., (1994) "Robust Nonlinear  $H_\infty$ /Adaptive Control of Robot Manipulator Motion", *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol. 208, pp. 221–230.
- [3] Helton, W., James, M., (1999) "Extending  $H_\infty$  Control to Nonlinear Systems to Achieve Performance Objectives", SIAM.
- [4] Lewis, F. L., Abdallah, C. T., (1993) Control of Robot Manipulators, Mcmillan.
- [5] Ortega, M. G., (Julio 2001) "Aportaciones al Control  $H_\infty$  de Sistemas Multivariables", Tesis doctoral, Depto. de Ingeniería de Sistemas y Automática de la Universidad de Sevilla.
- [6] van der Schaft, A. J., (Junio 1992) " $L_2$ -Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback  $H_\infty$  Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 6.
- [7] van der Schaft, A. J., (2000)  $L_2$ -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control, Springer.