

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Implementación MATLAB del modelo de circulación general de Phillips para la realización de predicciones meteorológicas

Autor: Guillermo Vallejo Soto

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Implementación MATLAB del modelo de circulación general de Phillips para la realización de predicciones meteorológicas

Autor:

Guillermo Vallejo Soto

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Grado: Implementación MATLAB del modelo de circulación general de Phillips para la realización de predicciones meteorológicas

Autor: Guillermo Vallejo Soto
Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:

Agradecimientos

A mi familia, amigos y profesores, en especial a mi tutor, Miguel. Por todo el ejemplo, apoyo y conocimientos que me habéis transmitido para poder llegar hasta aquí.

Resumen

El pronóstico del tiempo ha sido una una necesidad crítica desde los albores de la humanidad por varios motivos socioeconómicos, esta es la razón por la que, cuando los ordenadores abandonaron parcialmente el motivo por el cual fueron fabricados, el cálculo de las trayectorias de misiles balísticos, uno de los primeros campos científicos que se vió potenciado por estas nuevas herramientas fue el campo de la Mecánica de Fluidos Atmosférica.

Las capacidades de los ordenadores no eran tan potentes como lo son a día de hoy, así que los físicos tuvieron que diseñar modelos atmosféricos simplificados que los superordenadores de la época fueran capaces de computarlos. Este es el contexto en el que este estudio se ubica. Siendo más específicos, ¿podría uno de estos modelos ser implementado en un ordenador actual de sobremesa? ¿Esta implementación mejoraría la eficiencia de estos antiguos métodos numéricos? Así que el principal propósito de este Trabajo de Fin de Grado es la implementación numérica en Matlab[®] de un método de predicción atmosférica basada en un modelo de atmosfera bicapa, usado originalmente por Norman A. Phillips en 1956. Este código seguirá una filosofía *Open Source* y será accesible para el usuario, para ayudar a aquellos estudiantes que quieran dar un pequeño paso adelante en el mundo de la predicción del tiempo.

Abstract

Weather forecasting has always been a critical need since the dawn of the humankind for many socio-economic motives. That's the reason why, when computers partially quit the main purpose they were built for, calculating trajectories of ballistic missiles, one of the first scientific fields empowered with this brand-new gadget was Atmospheric Fluid Dynamics.

Computer capabilities weren't as powerful as they are nowadays, so physicists had to design simplified atmospheric models in order to be able to carry out their numerical computations using supercomputers existing at that time. This is the context in which this study is placed. More specifically, could one of these models be nowadays programmed in a current desktop computer? Would this implementation improve the efficiency of the old numerical methods? So the main purpose of this end-of-degree project is the numerical implementation in Matlab[®] of a two-layer atmosphere based forecasting method designed originally by Norman A. Phillips in 1956. This code will follow an *Open Source* philosophy and will be user-friendly, to help those students that would like to take a look at the world of weather forecasting.

Índice Abreviado

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XI
1 Fundamentos teóricos	1
1.1 Introducción a la Mecánica de Fluidos Atmosférica	1
1.2 Equilibrio	2
1.3 Dinámica de vórtices	9
2 Modelado matemático del problema	15
2.1 La circulación general de la atmósfera	15
2.2 Ecuaciones de partida	15
2.3 Modelado de efectos	19
2.4 Expresión final de las ecuaciones	20
2.5 Condiciones de contorno	22
3 Implementación numérica	25
3.1 Cambio de enfoque	25
3.2 Mallado	25
3.3 Discretización de operadores y adimensionalización	27
3.4 Estructura del programa	28
3.5 Guía de uso	39
4 Resultados obtenidos	45
4.1 Comparativa de resultados	45
4.2 Estudio de perturbaciones	53
5 Conclusiones	63
5.1 Resultados	63
5.2 Futuras líneas de mejora	63
Apéndice A Código	65
A.1 Código principal	65

A.2 Código auxiliar	91
<i>Índice de Figuras</i>	95
<i>Índice de Tablas</i>	97
<i>Índice de Códigos</i>	99
<i>Bibliografía</i>	101

Índice

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice Abreviado</i>	VII
<i>Notación</i>	XI
1 Fundamentos teóricos	1
1.1 Introducción a la Mecánica de Fluidos Atmosférica	1
1.1.1 La atmósfera	1
1.1.2 Sistema de referencia	2
1.2 Equilibrio	2
1.2.1 Conservación de cantidad de movimiento	2
1.2.2 Conservación de masa	3
1.2.3 Conservación de energía	4
1.2.4 Coordenadas verticales	4
1.2.5 Viento geostrófico	7
1.3 Dinámica de vórtices	9
1.3.1 Vorticidad relativa y terrestre	9
1.3.2 Vorticidad potencial	11
1.3.3 Ondas de Rossby	12
1.3.4 Teoría cuasigeostrófica	13
2 Modelado matemático del problema	15
2.1 La circulación general de la atmósfera	15
2.2 Ecuaciones de partida	15
2.2.1 Modelo de atmósfera bicapa	16
2.3 Modelado de efectos	19
2.4 Expresión final de las ecuaciones	20
2.5 Condiciones de contorno	22
3 Implementación numérica	25
3.1 Cambio de enfoque	25
3.2 Mallado	25
3.3 Discretización de operadores y adimensionalización	27
3.3.1 Descomposición del problema	27
3.4 Estructura del programa	28

3.4.1	Cálculo de la función geopotencial	28
	Cálculo del campo geopotencial perturbado	28
	Método de cálculo	30
	Cálculo del campo geopotencial medio	33
	Adaptación del método de cálculo al problema medio	33
3.4.2	Avance temporal	35
	Descomposición del problema de vorticidades	37
3.4.3	Procesado de datos	38
	Cálculo de los vientos	38
	Cálculo de la Laplaciana y el Jacobiano numérico	39
3.5	Guía de uso	39
3.5.1	Modo depuración	39
	Campo geopotencial perturbado	40
	Campo geopotencial medio	41
3.5.2	Ejecución normal	42
3.5.3	Ejemplo de uso del programa	43
4	Resultados obtenidos	45
4.1	Comparativa de resultados	45
4.1.1	Tendencia de anticiclones	46
4.1.2	Tendencia de borrascas	49
4.1.3	Comparativa con el programa original	52
4.2	Estudio de perturbaciones	53
4.2.1	Caso 1	53
4.2.2	Caso 2	56
4.2.3	Caso 3	59
5	Conclusiones	63
5.1	Resultados	63
5.2	Futuras líneas de mejora	63
Apéndice A	Código	65
A.1	Código principal	65
A.1.1	Programa interfaz	65
A.1.2	Avance temporal	71
A.1.3	Código de las gráficas	81
A.1.4	Cálculo de la función geopotencial	86
A.2	Código auxiliar	91
	<i>Índice de Figuras</i>	95
	<i>Índice de Tablas</i>	97
	<i>Índice de Códigos</i>	99
	<i>Bibliografía</i>	101

Notación

\mathbb{R}	Cuerpo de los números reales
\mathbf{v}	Expresión genérica de vector.
$\ \mathbf{v}\ $	Norma del vector \mathbf{v}
$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$	Notación alternativa de vectores \mathbf{v}
$ \mathbf{A} $	Producto escalar de los vectores \mathbf{v} y \mathbf{w}
$\det(\mathbf{A})$	Determinante de la matriz cuadrada \mathbf{A}
\mathbf{A}^\top	Determinante de la matriz (cuadrada) \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Transpuesto de \mathbf{A}
\mathbf{A}^\dagger	Inversa de la matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Matriz pseudoinversa de la matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^*	Transpuesto y conjugado de \mathbf{A}
c.t.p.	Conjugado
c.q.d.	En casi todos los puntos
■	Como queríamos demostrar
□	Como queríamos demostrar
e.o.c.	Fin de la solución
e	En cualquier otro caso
Re	número e
Im	Parte real
sen	Parte imaginaria
tg	Función seno
arctg	Función tangente
$\sin^y x$	Función arco tangente
$\cos^y x$	Función seno de x elevado a y
$\frac{\partial y}{\partial x}$	Función coseno de x elevado a y
x°	Derivada parcial de y respecto a x
\mathbf{I}_n	Notación de grado, x grados.
diag(\mathbf{x})	Matriz identidad de dimensión n
diag(\mathbf{A})	Matriz diagonal a partir del vector \mathbf{x}
:	Vector diagonal de la matriz \mathbf{A}
$\stackrel{\text{def}}{=}$	Tal que
$\ \mathbf{x}\ $	Igual por definición
$ \mathbf{A} $	Norma-2 del vector \mathbf{x}
$\mathbf{x}_i, i = 1, 2, \dots, n$	Cardinal, número de elementos del conjunto \mathbf{A}
	Elementos i , de 1 a n , del vector \mathbf{x}

dx	Diferencial de x
\leq	Menor o igual
\geq	Mayor o igual
\backslash	Backslash
\Leftrightarrow	Si y sólo si
$x = a + 3 = 4$ \uparrow $a=1$	Igual con explicación
$\frac{a}{b}$	Fracción con estilo pequeño, a/b
Δ	Incremento
$b \cdot 10^a$	Formato científico
\rightarrow_x	Tiende, con x
O	Orden
TM	Trade Mark
ϕ	Latitud
λ	Longitud
$\frac{D()}{Dt}$	Derivada sustancial
$\frac{D_h()}{Dt}$	Derivada sustancial horizontal
ν	Coefficiente de viscosidad cinemática
Ω	Velocidad angular de rotación terrestre
f	Parámetro de Coriolis
J	Tasa de variación del calor
c_p	Calor específico a presión constante
R	Constante de los gases ideales
k	Constante orográfica
T	Temperatura
Θ	Temperatura potencial
g	Aceleración gravitatoria
φ_{SL}	Variable φ evaluada a nivel del mar
Z	Altura geopotencial
Φ	Energía potencial específica Campo geopotencial
\mathbf{u}_g	Viento geostrófico
$\nabla \nabla_h$	Gradiente Gradiente horizontal
$\nabla^2 \nabla_h^2$	Laplaciana Laplaciana horizontal
$\nabla \times$	Rotacional
ω	Velocidad vertical de presión
ξ	Vorticidad relativa
μ	Vorticidad total
β	Variación linealizada del parámetro de Coriolis
R_t	Radio de la Tierra
ψ	Campo geopotencial adimensional
λ	Constante de estabilidad
γ	Constante de estabilidad adimensional
q	Potencial de vorticidad relativa
η	Potencial de vorticidad relativa adimensional

1 Fundamentos teóricos

Para poder explicar el modelo de atmósfera simplificado que se ha implementado en el código, es necesario crear una base de conocimientos cimentada en las ecuaciones que recogen la física del problema. Es por esta razón que se dedicará este capítulo al completo para dar unas pinceladas acerca de este campo de la Mecánica de Fluidos, con objeto de facilitar al lector la comprensión de los capítulos venideros.

1.1 Introducción a la Mecánica de Fluidos Atmosférica

Una posible manera de acercarse a este problema es a través de un razonamiento inductivo, como el objeto de este capítulo es el de realizar una introducción y no el de desarrollar todo un curso de MFA, se plantearán los mecanismos por los cuales se han desarrollado las ecuaciones junto con las deducciones e hipótesis de partida.

1.1.1 La atmósfera

Si se considera que la atmósfera conforma el campo fluido de trabajo, cabe hacerse una serie de preguntas acerca de la misma, por ejemplo, ¿qué clase de sistema conforma? ¿Cuáles son los fenómenos que rigen su comportamiento? Estas cuestiones, y otras tantas, serán explicadas en los siguientes párrafos.

Es cierto que la cantidad de gases en la atmósfera y la composición de la misma varía ligeramente con el paso del tiempo, debido a fenómenos naturales, como la erupción de volcanes o la absorción de gases que realizan los océanos, pero debido a que estos empiezan a tener efecto significativo en lapsos de tiempo que se podrían considerar cuasigeológicos, la atmósfera se considerará un sistema cerrado en lo referente a materia.

Por otro lado, es un hecho que la radiación solar tiene un gran impacto en la circulación de energía del sistema de trabajo, aporta energía al sistema de forma heterogénea a lo largo de la superficie del planeta, creando una gran variedad de fenómenos. Por este aporte de energía, se considerará que, energéticamente hablando, el sistema es abierto.

Las principales fuerzas que tienen efecto en pequeños sistemas fluidos, también tienen su correspondencia en la atmósfera, los gradientes de presiones, la gravedad y las fuerzas de carácter disipativo tienen su injerencia en el comportamiento de esta. Pero debido al gran tamaño del sistema y a la geometría del mismo, cuasiesférica, se añaden efectos asociados a la curvatura, si a esto se suma el hecho de que el planeta se encuentra en rotación, se hace necesario incluir en el modelo las fuerzas aparentes asociadas al traslado del problema a unos ejes que conformen un sistema de referencia inercial, y así poder utilizar las leyes de Newton para plantear la conservación de la cantidad de momento lineal; estas fuerzas serán la de Coriolis y las centrífugas.

1.1.2 Sistema de referencia

El sistema de referencia resulta una cuestión crítica, dado que tiene que lidiar con el problema de la curvatura terrestre y con el hecho de que cada fuerza presenta un sistema de coordenadas propio que simplifica su expresión. Es por ello que se va a trabajar en un sistema de referencia que emplea una visión euleriana del problema, que resulta bastante conveniente, ya que emularía el comportamiento de la atmósfera como lo vería una estación fija en la superficie de la Tierra

Como el planeta es, en primera aproximación, muy parecido a una esfera, resulta conveniente trabajar con coordenadas esféricas, empleando el sistema de referencia conocido como geográfico, suponiendo una Tierra idealizada con un radio terrestre medio.

Con objeto de aclarar esta cuestión se adjunta la figura 1.1, donde cabe destacar que el eje x se encuentra fijo respecto a la Tierra, por lo que estos ejes conforman un sistema de referencia no inercial, de ahí la necesidad de añadir las fuerzas aparentes. Los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} , siguen las direcciones de crecimiento de longitud, latitud y radio respectivamente. Por norma general, cuando se haga referencia a los ejes x , y y z , se referirán a los ejes formados por la base canónica mencionada anteriormente, siguiendo una visión euleriana del problema, como ya se mencionó.

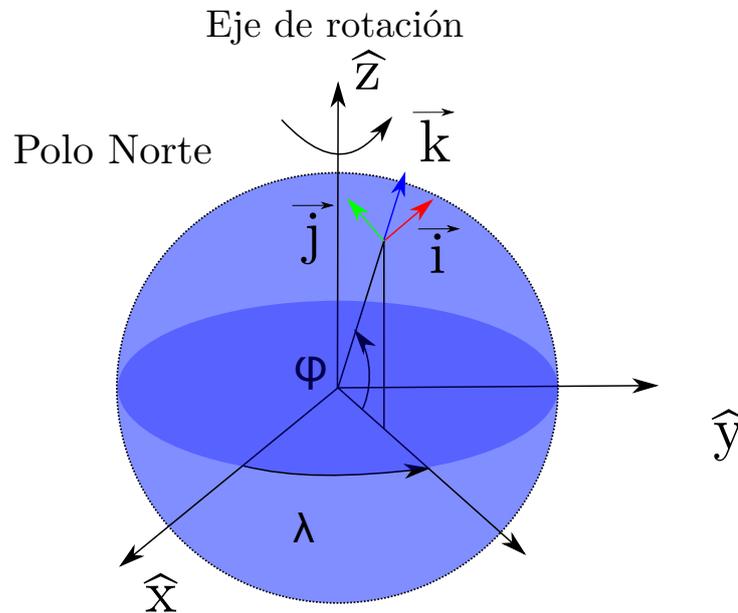


Figura 1.1 Sistema de referencia empleado.

1.2 Equilibrio

1.2.1 Conservación de cantidad de movimiento

El objetivo de este apartado será el planteamiento de las ecuaciones de conservación de movimiento a través del equilibrio de fuerzas, empleando para ellas un volumen de control adecuado.

Este volumen de control está conformado por un prisma rectangular que recogería un pequeño diferencial de volumen de la atmósfera. Si sobre este volumen de control se realiza un equilibrio de fuerzas, considerando las mencionadas en el apartado 1.1.1 y realizando una descomposición de las velocidades asociadas a la rotación del planeta y la presencia de curvatura, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{Du_x}{Dt} - \frac{u_x u_y \operatorname{tg}(\phi)}{r} + \frac{u_x u_z}{r} = \frac{-1}{\rho r \cos(\phi)} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + 2\Omega v_y \sin(\phi) - 2\Omega v_z \cos(\phi) + \nu \nabla^2 u_x; \quad (1.1)$$

$$\frac{Du_y}{Dt} + \frac{u_x^2 \operatorname{tg}(\phi)}{r} + \frac{u_y u_z}{r} = \frac{-1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} - 2\Omega v_x \sin(\phi) + \nu \nabla^2 u_y; \quad (1.2)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} - \frac{u_x^2 + u_y^2}{r} = \frac{-1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial r} + 2\Omega v_x \cos(\phi) + \nu \nabla^2 u_z. \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

Donde Ω es la velocidad de rotación de la Tierra, ϕ la latitud en ese punto y ν , el coeficiente de viscosidad cinemática.

Una hipótesis simplificativa que se puede realizar es la siguiente:

$$u_z \ll u_x, u_y. \quad (1.5)$$

Esta hipótesis es bastante acertada, ya que en la atmósfera es bastante usual, especialmente en los fenómenos que acontecen en latitudes medias, que las velocidades horizontales, es decir contenidas en un plano de altura constante, son mucho mayores que las verticales.

De ahora en adelante, también se despreciarán los términos asociados a la curvatura, que son aquellos divididos por el parámetro r , debido a que su influencia es muy pequeña, si se realiza un análisis de escala el orden de magnitud de este parámetro es uno o dos órdenes inferior al siguiente parámetro de menor influencia.

El parámetro de Coriolis cuantifica el efecto de la rotación terrestre sobre las velocidades, este se define como:

$$f = 2\Omega \sin(\phi). \quad (1.6)$$

Cuando se cumple la hipótesis de pequeñas velocidades verticales se obtiene que la injerencia de los términos asociados a las fuerzas de Coriolis sobre las velocidades es la siguiente:

$$\frac{Du_x}{Dt} = f u_y, \quad (1.7)$$

$$\frac{Du_y}{Dt} = -f u_x. \quad (1.8)$$

1.2.2 Conservación de masa

Si sobre el volumen de contorno anteriormente citado se realiza un equilibrio del flujo que atraviesa las paredes del prisma y considerando las variaciones de densidad que pudieran darse en el interior de este contorno, se obtiene la ecuación que relacionará el cambio de densidad en el volumen de control con el flujo a través de las paredes, la ecuación (1.9).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}); \quad (1.9)$$

$$(1.10)$$

Para los próximos apartados resultará útil el operador derivada sustancial, cuya expresión está reflejada en la siguiente ecuación. Este operador representa la variación de una propiedad asociada a una partícula fluida a lo largo de su trayectoria, lo que conforma la visión Lagrangiana del problema, esto sería equivalente al estudio de la variación de las características que mediría un

globo meteorológico. En la ecuación (1.11) se muestra la aplicación del operador para un campo escalar cualquiera, φ .

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{u}. \quad (1.11)$$

Si se expresa la ecuación (1.9) en términos de la derivada sustancial, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.12)$$

De la que se puede extraer una deducción directa, si la divergencia es positiva, la densidad en el volumen disminuirá, y si es negativa, aumentará la densidad.

1.2.3 Conservación de energía

Partiendo de la Primera Ley de la Termodinámica en formato diferencial, ecuación (1.13), y la Ley de los Gases Ideales, ecuación (1.14), se pueden realizar una serie de transformaciones que acabarán derivando en la ecuación (1.15).

$$\partial U = \partial W + \partial Q; \quad (1.13)$$

$$\frac{P}{\rho} = RT. \quad (1.14)$$

$$\frac{D}{Dt} \log \left[\frac{T}{T_0} \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}} \right] = \frac{J}{c_p T}. \quad (1.15)$$

$$(1.16)$$

En la ecuación (1.15), el término J es igual a la variación temporal del calor específico transferido al sistema, $J = \frac{\partial Q}{\partial t}$, R es la constante de los gases ideales y c_p el calor a presión constante del aire. Esta ecuación es bastante interesante ya que el balance energético puede ser estimado a partir de una temperatura y presión de referencias junto con la derivada sustancial de la temperatura potencial.

$$\frac{D}{Dt} \log \left[\frac{1}{T_0} \Theta \right] = \frac{J}{c_p T}. \quad (1.17)$$

La temperatura potencial es la temperatura que tendría una partícula fluida que fuera llevada adiabáticamente al nivel del mar, que sería la temperatura de referencia utilizada, es una definición similar a la que presentan las magnitudes de remanso. Es curioso resaltar el hecho de que un fenómeno que implique temperatura potencial constante, implica entropía constante en ese proceso. Si el calor aportado o perdido es constante, la temperatura potencial también lo será.

$$\Theta \equiv T \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (1.18)$$

1.2.4 Coordenadas verticales

Una de las últimas herramientas que se va a presentar será el uso de la presión como coordenada vertical, esta decisión no es arbitraria, matemáticamente simplifica los cálculos y sus implicaciones físicas en el cálculo son intuitivas.

Suponiendo, solo por esta vez, que la atmósfera se encuentra en reposo total, y tomando una columna vertical de aire y haciendo equilibrio de fuerzas, se realiza lo que se denomina un balance

hidrostático, y esto da lugar a la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -g. \tag{1.19}$$

Este equilibrio es válido siempre y cuando las aceleraciones que experimenta el fluido son mucho menores que la aceleración de la gravedad. Esta es una buena hipótesis a nivel global, a gran escala, pero a nivel local pueden darse fenómenos, como rachas o penachos térmicos, que hagan que su validez, a ese nivel de detalle, sea mucho menor.

Cabe destacar que a lo largo de este apartado se hace referencia a la variable z como la coordenada vertical local, que sería equivalente a la coordenada radial en la sección 1.1.2, donde se explicaba el sistema de referencia.

Aplicando el siguiente modelo exponencial de presión con la altura, que para un gran abanico de casos se adapta bastante bien a la realidad:

$$p(z) = p_{SL} \exp\left(-\frac{z}{H}\right). \tag{1.20}$$

Donde H es la altura sobre la cual se escala, $H = \frac{R_d T_0}{g}$.

Si se toma la energía potencial específica del fluido y se evalúa por unidad de masa, se obtiene el parámetro $\Phi = \frac{E_{pot}}{m}$ y representa la energía potencial específica, que si es dividida a su vez por g , se obtiene una variable con dimensiones de longitud, la altura geopotencial Z , donde $Z = \frac{\Phi}{g}$. Trabajar con esta altura implica un salto lógico importante: superficies de altura constante no implican superficies de altura geopotencial constante.

Partiendo de la ecuación del balance hidrostático, ecuación (1.19), y se deriva respecto a la altura la definición de altura geopotencial, igualando términos se llega a la ecuación hipsométrica:

$$h = Z_2 - Z_1 = \frac{RT}{g} \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right). \tag{1.21}$$

Esta ecuación permite estimar el espesor de una capa de atmósfera a través de una temperatura representativa de la misma y las diferencias de presión entre su parte superior e inferior.

Si se transforman las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, y las restantes que empleen la coordenada z local, la matemática del problema se simplifica pero ciertas formas de entender los distintos términos cambian. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\rho} (\nabla P)_z = (\nabla \Phi)_p, \tag{1.22}$$

donde se puede observar el cambio de enfoque. El primer término indica que a lo largo de una superficie de cota constante, indicado por el subíndice de ∇ , el motor del movimiento es la diferencia de presiones, mientras que en el segundo término el enfoque cambia, para una superficie de presión constante el mecanismo que desata el movimiento es la diferencia de altura geopotencial, es decir se busca la menor altura disponible.

El conjunto de todas las ecuaciones transformadas a coordenadas de presión son:

Tabla 1.1 Ecuaciones básicas de la MFA.

Concepto	Expresión
Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento ($v = 0$)	$\frac{D\mathbf{u}_h}{Dt} + f\mathbf{k} \times \mathbf{u}_h = -\nabla_p \Phi$

Tabla 1.1 ...continuación.

Concepto	Expresión
Relación hidrostática	$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{R_d T}{p}$
Ecuación de continuidad	$\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$
Ecuación termodinámica	$\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} - S_p \omega = \frac{J}{c_p}$
Ley de los Gases Ideales	$p = \rho R_d T$
Derivada material	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}$

Existen ciertas variables y nomenclatura de las ecuaciones que no han sido introducidas anteriormente, por lo que las dudas que pudieran surgir acerca de estas serán solventadas a continuación.

En la ecuación vectorial de la conservación de la cantidad de movimiento se emplea el término \mathbf{u}_h , que representa las velocidades en el plano horizontal correspondiente a una determinada altura geopotencial, $\mathbf{u}_h = (u_x, u_y)$.

La velocidad vertical de presión, ω , es la velocidad de una partícula fluida a través de superficies de presión constante, se define como $\omega \equiv \frac{Dp}{Dt}$.

En la ecuación termodinámica, el término S_p , representa la estabilidad estática, cuantifica la estabilidad de la atmósfera a través de la flotabilidad, $S_p = \left(-\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{R_d T}{p c_p}\right)$. Por otro lado, J es la variación temporal del calor específico transferido.

Para la troposfera es posible establecer un ratio de pérdida de temperatura con la altura, es decir, cuantos grados va disminuyendo la temperatura conforme se gana en altura. Este gradiente se puede expresar como:

$$\Gamma \equiv -\frac{\partial T_{env}}{\partial z}. \quad (1.23)$$

Si por otro lado definimos el decrecimiento de temperatura adiabático seco, Γ_d , que sería la variación de temperatura de una partícula fluida si esta es elevada adiabáticamente.

$$\Gamma_d \equiv \frac{g}{c_p} = -\frac{\partial T_{pf}}{\partial z}. \quad (1.24)$$

El término de estabilidad estática, S_p puede ser expresado en función de estos gradientes de temperatura:

$$S_p = \left(-\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{R_d T}{p c_p}\right) = \frac{-T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{\Gamma_d - \Gamma}{\rho g}. \quad (1.25)$$

Tomando una partícula fluida, con una temperatura T_p que se encuentra en el seno de un fluido que para cierta altura tiene una temperatura T_e , suponiendo que la partícula fluida se encuentra en equilibrio de presiones con el entorno a esa altura, esta partícula tendrá una densidad asociada, a través de la ley de los gases ideales. Una partícula tiene tendencia a subir siempre que su densidad sea menor que la del ambiente, principio de Arquímedes, lo que implica una mayor temperatura que la ambiente a esa cota.

Si se parte de la base de que la partícula fluida, que se ejemplificará con una nube en este caso, tiene mayor temperatura que la ambiente tenderá a flotar, ¿hasta cuándo?

Esto depende de S_p , si es mayor que cero, la nube pierde más temperatura con la altura que el ambiente por lo que llegará a un punto en el que su densidad será mayor que la del ambiente y se hundirá hasta llegar a la posición de partida y así oscilará, lo que se puede considerar estable.

Si S_p es menor que cero, el ambiente perderá más temperatura que la nube por lo que la densidad de esta siempre será menor que la del ambiente y ascenderá indefinidamente, o sea, presenta un comportamiento inestable.

El razonamiento es análogo para el caso en el que la nube en el punto de partida tiene menor temperatura que la ambiente; oscilaría para S_p mayor que cero, y se movería indefinidamente para S_p menor que cero.

1.2.5 Viento geostrófico

Una vez obtenida la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, es resulta interesante realizar un análisis de escala de las ecuaciones referentes a la componente x y a la y para determinar los órdenes de magnitud de los distintos términos y así poder determinar que fenómenos son los más importantes.

Es recomendable estimar las longitudes y derivadas a través de valores característicos de tormentas en el hemisferio Norte en latitudes medias. Estos datos pueden ser obtenidos a través de la observación y medición de fenómenos naturales, por ejemplo, a través de la observación de fotos y los lapsos de tiempos presentes entre estas tomadas por el satélite Meteosat, que se pueden encontrar en su página web oficial.

Pero dado que este análisis de escala es muy usual en la literatura, se ha decidido el tomar el realizado por Paul Ullrich, profesor de la Universidad de California, en su curso de "Introduction to Atmospheric Dynamics" [6].

Tabla 1.2 Definiciones de las magnitudes características.

Símbolo	Concepto	Valor
L	Distancia horizontal característica	$\approx 10^6 m$
U	Velocidad horizontal característica	$\approx 10^6 ms^{-1}$
T	Tiempo característico ($T = L/U$)	$\approx 10^5 s$
H	Distancia vertical característica	$\approx 10^4 m$
W	Velocidad vertical característica	$\approx 0.01 ms^{-1}$
$\Delta P/\rho$	Fluctuación característica de las variaciones de presión	$\approx 1000 Pa/1 kgm^{-3}$
$\Delta \rho/\rho$	Fluctuación característica de las variaciones de densidad	$\approx 10^{-2}$
f_0	Valor característico del parámetro de Coriolis	$\approx 10^{-4} s^{-1}$
a	Radio de la Tierra	$\approx 10^7 m$
g	Gravedad	$\approx 10 ms^{-2}$
ν	Viscosidad cinemática	$\approx 10^{-5} m^2 s^{-1}$

Tabla 1.3 Estimación de peso de los términos.

Estim.							
CCM según x	$\frac{Du_x}{Dt}$	$-\frac{u_x u_y \tan(\phi)}{r}$	$+\frac{u_x u_z}{r}$	$= \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$	$+2\Omega u_y \sin(\phi)$	$-2\Omega u_z \cos(\phi)$	$+v\nabla^2 u_x$
CCM según y	$\frac{Du_y}{Dt}$	$+\frac{u_x^2 \tan(\phi)}{r}$	$+\frac{u_y u_z}{r}$	$= \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$	$-2\Omega u_x \cos(\phi)$	$+0$	$+v\nabla^2 u_y$
Valor estimado	$\frac{U}{T}$	$U \cdot \frac{U}{a}$	$U \cdot \frac{W}{a}$	$\frac{\Delta P}{\rho L}$	$U f_0$	$W f_0$	$\frac{vU}{H^2}$
Valor numérico	10^{-4}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-3}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-12}

Como se puede extraer del análisis, es posible observar que los términos dominantes de la ecuación son los gradientes de presiones y el término asociado a las fuerzas de Coriolis. Conceptualmente, esto implica que el principal motor que desarrolla los fenómenos atmosféricos es el equilibrio entre los gradientes de presiones y las fuerzas producidas por la rotación terrestre, representadas en el término de Coriolis. Si se anula el resto de términos, debido al menor orden de magnitud de estos, se consiguen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega u_y \sin(\phi) = 0, \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\Omega u_x \sin(\phi) = 0; \quad (1.27)$$

estas ecuaciones representan ese equilibrio mencionado en el párrafo anterior. Este equilibrio es denominado como equilibrio geostrófico.

Sólo se ha realizado el análisis de escala para la conservación de cantidad de movimiento en el eje x e y , si este mismo análisis se realizara para el que podría denominarse eje p , el resultado obtenido de realizar este ejercicio sería el balance hidrostático.

Como se puede inferir de la interpretación de las ecuaciones (1.7) y (1.8), el efecto de las fuerzas de Coriolis sobre la velocidad es mayor conforme mayor sea la latitud, y si la fuerza de Coriolis es descompuesta en los vectores canónicos \mathbf{i} y \mathbf{j} , se puede observar que cuanto más grande sea la velocidad en el eje x , mayor será la fuerza que se generaría en el eje y y viceversa.

Este efecto, explicado de forma sencilla, lo que tiene tendencia a realizar es curvar la trayectoria de una partícula hacia la derecha de la dirección que lleve en el Hemisferio Norte, mientras que en el Hemisferio Sur esta tendencia sería la contraria, doblaría el flujo hacia la izquierda. Se adjunta la figura 1.2 para mostrar este efecto asociado al equilibrio geostrófico en el Hemisferio Norte.

El viento geostrófico, \mathbf{u}_g , es la componente del viento asociada al movimiento de aire producido por el equilibrio geostrófico. Dado que este equilibrio es el que tiene mayor injerencia en las ecuaciones, por norma general, el viento geostrófico es una aproximación bastante buena del viento real.

Es por esto que por lo general, al igual que se realiza en muchas otras disciplinas, como la Aerodinámica, se descompondrá el problema en dos partes, una asociada al equilibrio geostrófico, que será la dominante del problema e impondrá la base de la resolución, y otra parte asociada al estudio de las perturbaciones sobre ese fondo.

$$\kappa'(t, \mathbf{x}) = \kappa(t, \mathbf{x}) - \kappa_0(t, \mathbf{x}). \quad (1.28)$$

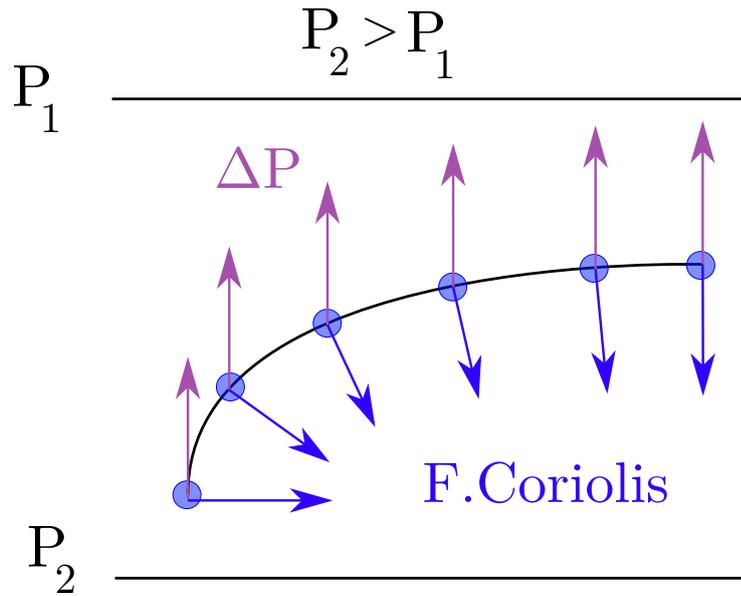


Figura 1.2 Equilibrio geostrófico.

Donde κ es una variable arbitraria perteneciente al problema completo, κ' es el resultado del problema asociado a las perturbaciones y κ_0 es la variable del problema base. Más adelante, cuando se explique el modelo numérico de resolución, las variables de perturbación serán denominadas pr , de prima, y el problema base med , de medio.

Si se supone que para un plano horizontal a una cota geopotencial Z las variaciones de densidad y del parámetro de Coriolis son pequeñas, lo que haría estos parámetros constantes; si se toma derivada parcial respecto a x en la ecuación (1.26) y respecto a y en la ecuación (1.27) se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{1}{f\rho} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) = 0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_g. \tag{1.29}$$

Operando a partir de la ecuación de continuidad, o de conservación de masa, se puede obtener la siguiente expresión que relaciona, para el problema base, las velocidades verticales de presión con el gradiente del viento:

$$\omega \approx \frac{-1}{\rho} \int_0^z \rho_0 \nabla_h \cdot \mathbf{u} dz' \tag{1.30}$$

Combinando los resultados de las ecuaciones (1.29) y (1.30), se puede extraer la conclusión de que el viento geostrófico no genera corrientes de aire verticales.

Como resultado adicional del análisis de escala, o de las ecuaciones (1.26) y (1.27), se puede inferir que el viento geostrófico no acelera el aire, sino que solo curva su trayectoria.

1.3 Dinámica de vórtices

1.3.1 Vorticidad relativa y terrestre

El teorema de Helmholtz permite la descomposición de cualquier movimiento bidimensional de un fluido, descomponiendo este movimiento en una parte rotacional y otra divergente. Desde un punto de vista más físico, es como si se descompusieran los vientos en una parte del movimiento

que genera movimientos dentro de un plano de cota constante y otra que genera movimientos entre distintas cotas.

Un rotacional positivo implica un movimiento ciclónico, esto se manifiesta como un vórtice que gira en sentido antihorario en el Hemisferio Norte (HN), lo que corresponde con una borrasca o ciclón. En el caso contrario, un rotacional negativo implica giro en sentido horario para el HN, lo que es un anticiclón.

El sentido de giro de las borrascas y anticiclones viene dado por la única configuración posible en la que se puede dar un equilibrio entre las fuerzas de Coriolis, las fuerzas de presión y la fuerza centrífuga.

Un anticiclón corresponde con una zona de alta presión, bajas temperaturas locales, giran en el HN en sentido horario, y suelen ser indicativos de estabilidad atmosférica y buen tiempo.

Los ciclones o borrascas corresponden, a su vez, con zonas de baja presión, alta temperatura local, giran en el HN en sentido antihorario, y son indicativos de mal tiempo y precipitaciones.

El efecto de la rotación terrestre sobre la vorticidad depende la latitud a la que se evalúe, el parámetro de Coriolis es la proyección sobre el vector \mathbf{k} de la vorticidad presente en la velocidad inducida por la rotación:

$$f = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}_{earth}) = 2\Omega \sin(\phi), \quad (1.31)$$

el efecto de esto en el HN, es que la vorticidad planetaria sea positiva, esto combinado con la vorticidad relativa provoca anticiclones débiles y borrascas de gran intensidad.

Como se ha visto en la ecuación (1.31), resulta interesante descomponer la velocidad absoluta, \mathbf{u}_{abs} , en dos partes: una asociada a la rotación terrestre \mathbf{u}_{earth} y otra asociada a los fenómenos de rotación que se desarrollen mediante otros mecanismos, \mathbf{u} , que es a la que se ha estado haciendo referencia todos los apartados anteriores.

Resolviendo el rotacional de \mathbf{u} se obtiene el siguiente desarrollo:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad (1.32)$$

los términos asociados a \mathbf{i} y \mathbf{j} representan fenómenos de movimiento de volcado y de cizalla vertical, pero para simulaciones en latitudes medias el término más determinante es el asociado a \mathbf{k} . Este término se denominará de ahora en adelante vorticidad relativa y su definición será la siguiente:

$$\xi = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (1.33)$$

Sumando la vorticidad relativa y la planetaria se puede obtener la vorticidad total, μ , factor que tendrá una gran influencia en la base conceptual del modelo de resolución.

$$\mu \equiv \xi + f. \quad (1.34)$$

Si se toman las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento:

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + fu_y; \quad (1.35)$$

$$\frac{Du_y}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - fu_x; \quad (1.36)$$

y se realiza la siguiente operación:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Du_y}{Dt} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Du_x}{Dt} \right), \quad (1.37)$$

Transformando y agrupando términos se obtiene la denominada ecuación de la vorticidad:

$$\frac{D}{Dt}(\xi + f) = -(\xi + f)(\nabla_h \cdot \mathbf{u}) - \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) - \left(\nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p \right) \cdot \mathbf{k}. \quad (1.38)$$

El primer término en el lado derecho de la ecuación representa una correspondencia entre divergencia del campo de velocidades y la vorticidad, estableciendo una relación inversamente proporcional, es similar al fenómeno de conservación del momento angular.

El segundo término corresponde a fenómenos asociados a la inclinación y al giro de los flujos de aire, como un efecto giroscópico. El tercero es el término solenoidal, que refleja cambios en la vorticidad debido al alineamiento de superficies de presión constante y de densidad constante. Es decir aquellos fenómenos derivados de que el flujo no sea barotrópico, es decir, que las superficies de presión y densidad constante no coincidan. Existe en la vida real una tendencia a que se dé la condición de equilibrio barotrópico.

1.3.2 Vorticidad potencial

Realizando un análisis de escala para la ecuación de la vorticidad y desarrollando todos los términos, despreciando aquellos de órdenes de magnitud mucho menores se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{D_h}{Dt}(\xi + f) = -(\xi + f)\nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.39)$$

Donde D_h es el operador derivada material, que recoge la siguiente serie de operaciones:

$$\frac{D_h}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.40)$$

Realizando sobre la ecuación (1.39) las hipótesis de flujo barotrópico, incompresible y homogéneo, que no distan mucho de la realidad, al menos con la precisión de estudio que se está usando, se puede obtener la siguiente conclusión:

$$\frac{D_h}{Dt} \left[\frac{\xi_g + f}{h} \right] = 0. \quad (1.41)$$

La vorticidad relativa asociada al balance geostrófico, ξ_g , que se ha supuesto aproximadamente igual a la vorticidad relativa total, sumada a la vorticidad planetaria y todo esto partido por la altura de la columna que conforma el ciclón, h , conforman una constante en el desarrollo de fenómenos en la atmósfera.

Esta constante se denomina vorticidad potencial, y su definición es la siguiente:

$$VP = \frac{\xi_g + f}{h}. \quad (1.42)$$

La conservación de esta cantidad en la vida real, rige los comportamientos ondulatorios a gran escala que se producen en la atmósfera, como las ondas de Rossby, como se explicará en el siguiente apartado, y también explica el comportamiento de vórtices a la hora de superar obstáculos, como la orografía del terreno.

En el modelo que se implementará se trabajará con la vorticidad total, η , y los cambios en la misma conformarán el núcleo del avance temporal en el programa, se relajarán ciertas hipótesis aquí realizadas para poder implementar una mayor variedad de efectos, como por ejemplo, la radiación solar.

1.3.3 Ondas de Rossby

Las ondas de Rossby son un fenómeno de escala planetaria, que resulta muy interesante comentar, dado que integra bien los conceptos de radiación asimétrica en el planeta con la generación de vorticidad debido a obstáculos. Se adjunta la figura 1.3 extraída de la página web de la AEMET para ilustrar el fenómeno.

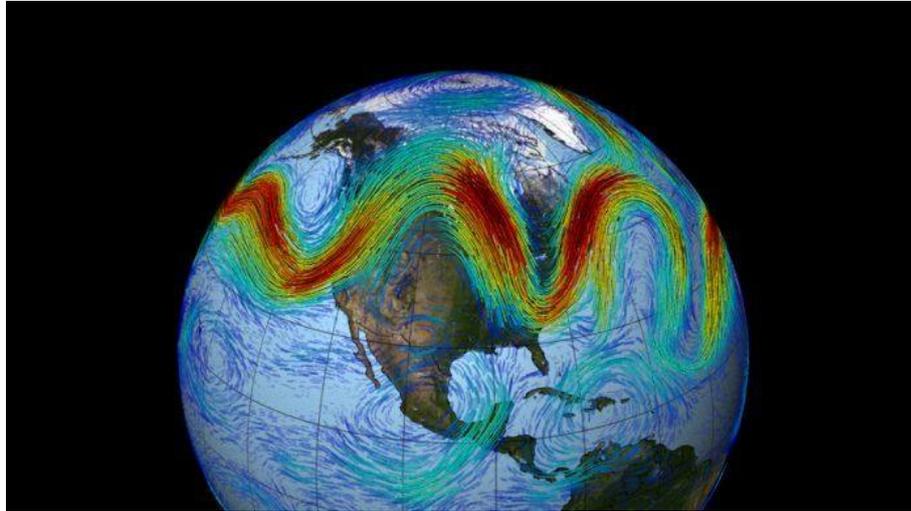


Figura 1.3 Onda de Rossby.

Como se puede observar son una serie de ondas, que se desplazan de Este a Oeste, ocupan un gran rango de latitudes para un sólo Hemisferio y pueden llegar a rodear el perímetro del globo. Tienen longitudes de onda muy grandes, por lo general suelen darse de tres a cinco periodos para rodear el globo.

Si se observa con detenimiento la ecuación (1.41), si se cumplen las hipótesis mencionadas en el apartado anterior, se establecen una serie de relaciones ante la variaciones de las variables presentes en ella. Para ello, usando como base la figura 1.4, se explicará el proceso de formación de ondas a través de una perturbación orográfica, como por ejemplo, una cadena montañosa.

En la figura 1.4, se puede observar una vista aérea arriba y una vista transversal del fenómeno abajo. Se ha dividido la evolución del flujo en una serie de fases, de la A a la E, para explicar paso a paso lo que va sucediendo.

En primer lugar, en la fase A, se toma un flujo que no presenta vorticidad relativa y se mueve en un plano horizontal con una dirección preferente, que lo conduce directo a una cordillera. La corriente de aire tiene tendencia a rebordear la cadena, dado que es incapaz de atravesarla, como es un flujo subsónico, el campo fluido está informado de lo que sucede aguas abajo por lo que existe cierta predisposición del flujo a evitar el contacto con el obstáculo.

Este flujo, al aumentar su altura, para conservar la vorticidad potencial, aumenta la vorticidad relativa, lo que curva la trayectoria hacia arriba, fase B. Hasta que llega al pico de la montaña, fase C, donde la altura es mínima, para compensar el aumento de la vorticidad planetaria y la disminución de la altura disminuye la vorticidad total, a través de la disminución de la vorticidad relativa. Esto curva el flujo de nuevo y hace que varíe su trayectoria curvándola hacia abajo.

Al bajar la cordillera de nuevo, aumenta de nuevo la altura de la columna y la vorticidad total debe aumentar en consonancia, como la vorticidad planetaria ha disminuido, aumenta la vorticidad relativa. Este flujo alcanza un movimiento periódico una vez pasado el obstáculo, dado que la vorticidad relativa y planetaria van variando la trayectoria y equilibrándose entre sí. Todo esto sumado a efectos de diferenciales de temperatura debido a radiación, prolongan este fenómeno.

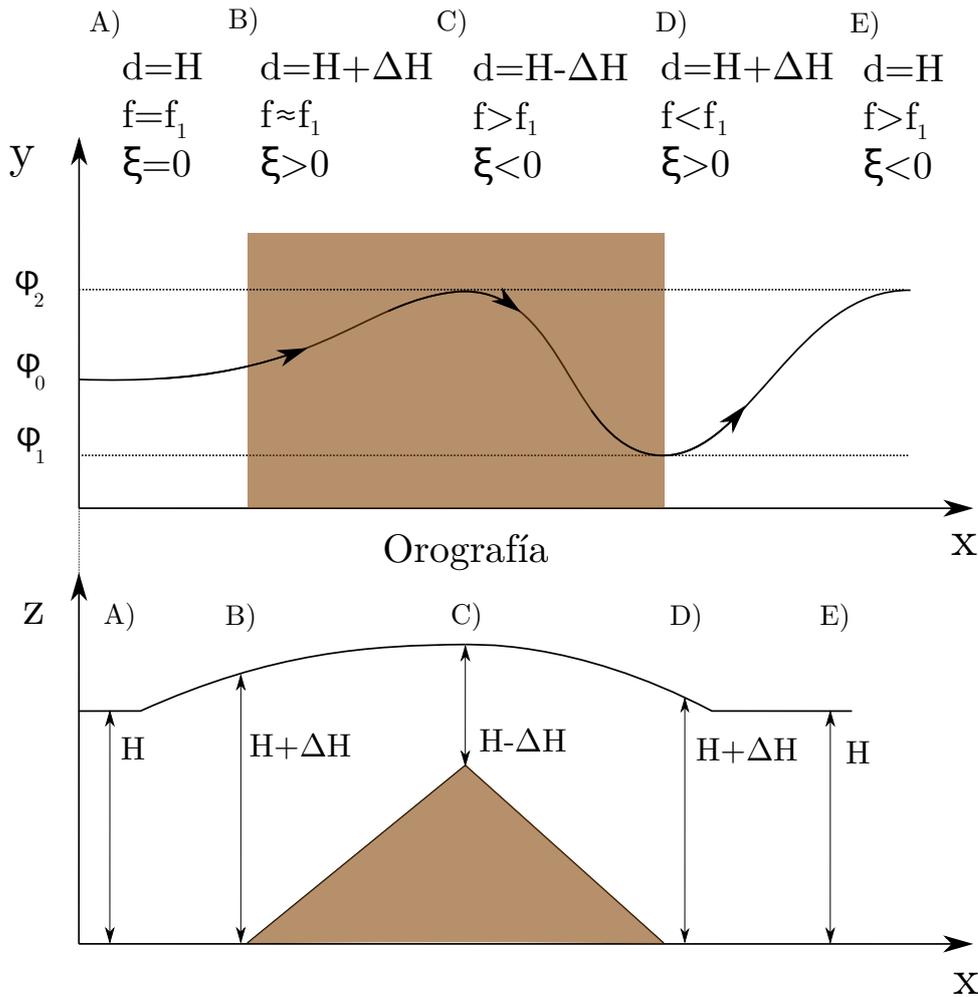


Figura 1.4 Generación de ondas por perturbación orográfica.

Un fenómeno parecido a las ondas de Rossby es observable en los periodos transitorios de las simulaciones realizadas con el software desarrollado. Parecido en el sentido de que es un fenómeno ondulatorio de transporte de materia a escala global desarrollado mayoritariamente por las diferencias de temperatura, dado que no se modela de forma tan específica la orografía del terreno.

1.3.4 Teoría cuasigeostrófica

Por lo general en la atmósfera existen una serie de condiciones que se cumplen en una gran variedad de casos, si se toman estos detalles empíricos y se emplean para adaptar las ecuaciones, se puede obtener una base teórica de ecuaciones bastante simplificadas con un coste de error cometido muy bajo.

Se puede observar en la atmósfera que las velocidades horizontales son cuasi geostróficas, hecho que deriva también del análisis de escala. Además, salvo ciertas circunstancias excepcionales, se puede considerar que la atmósfera es prácticamente hidrostática.

Se pueden realizar a partir de este punto las siguientes aproximaciones e hipótesis:

- El campo vectorial asociado al viento se puede descomponer en dos componentes, una geostrófica y otra ageostrófica.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \mathbf{u}_a; \quad (1.43)$$

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f_0} \mathbf{k} \times \nabla \Phi. \quad (1.44)$$

$$\mathbf{u}_g \gg \mathbf{u}_a. \quad (1.45)$$

- Dado que el viento geostrófico es mucho mayor que el ageostrófico, se puede aproximar que la componente de advección de la derivada material de la siguiente manera:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} \approx \frac{D_g \mathbf{u}_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_{xg} \frac{\partial}{\partial x} + u_{yg} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.46)$$

Es decir, la advección dentro del campo fluido está dominada por los vientos geostróficos.

- Las variaciones en el parámetro de Coriolis se pueden aproximar a través de su desarrollo de primer orden en series de Taylor:

$$f = f_0 + \beta y, f_0 = 2\Omega \sin(\phi_0) \quad (1.47)$$

$$\beta = \frac{2\Omega \cos(\phi_0)}{R_t}. \quad (1.48)$$

- La temperatura experimenta pequeñas perturbaciones verticales.

$$T(x, y, p, t) = T_0(p) + T'(x, y, p, t); \quad (1.49)$$

$$\left| \frac{\partial T_0}{\partial p} \right| \gg \left| \frac{\partial T'}{\partial p} \right| \quad (1.50)$$

A través de esta serie de aproximaciones e hipótesis, combinando adecuadamente las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento, lo que sería calcular las derivadas cruzadas, como en la ecuación (1.37) y aplicar las aproximaciones expuestas en este apartado. Se obtiene la ecuación de vorticidad cuasigeostrófica:

$$\frac{D_h \xi_g}{Dt} = -f_0 \left(\frac{\partial u_{xa}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ya}}{\partial y} \right) - \beta u_{yg}. \quad (1.51)$$

Esta es una de las múltiples formas en la que esta ecuación puede ser expresada.

2 Modelado matemático del problema

2.1 La circulación general de la atmósfera

La base que conforma el transfondo de este capítulo está fuertemente influenciada por el artículo de Norman A. Phillips con el nombre homónimo de este apartado, *The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment*, [4], siendo utilizadas parte de sus ecuaciones y deducciones.

La implementación y adaptación del método numérico a partir de las notas de Phillips fue un trabajo complejo, en la época de Phillips, debido a las limitaciones técnicas asociadas a la capacidad de computación de los ordenadores del momento, fue necesario emplear una filosofía de resolución que a día de hoy puede ser suplida mediante la potencia bruta de los ordenadores, si se busca la simplicidad.

Para recalcar mejor la gran diferencia presente en la capacidad de computación se mostrará una tabla de datos con las especificaciones técnicas del ordenador empleado para esta simulación en 1956, el que se encontraba en el *Institute for Advanced Study* en Princeton, y el que se ha empleado para esta ocasión, un ordenador portátil de gama media.

Tabla 2.1 Comparativa hardware empleado.

Característica	Phillips	Actualidad
Memoria RAM	8 Kbytes	8 Gbytes
Capacidad de almacenamiento	16 Kbytes	1 TByte
Operaciones por segundo	???	2.5 GHz

No hace falta aportar muchos datos adicionales para demostrar la abisal diferencia entre ambos computadores por lo que, a priori, es lógico que a la hora de implementarlos se priorice en distintas cuestiones. Phillips optó porque el código fuera altamente estable y eficiente computacionalmente, pero en este trabajo se ha priorizado en menor medida en la estabilidad y eficiencia, el principal foco ha estado puesto en todo momento sobre la sencillez y accesibilidad del código.

2.2 Ecuaciones de partida

Las ecuaciones de partida para el diseño del modelo son las planteadas en el capítulo introductorio con pequeñas modificaciones, pero en esencia, se modelan los mismos efectos de manera similar.

Por comodidad, se respetará la nomenclatura utilizada por Phillips pero con pequeñas adaptaciones para que sea consistente con toda la materia ya presentada anteriormente.

Las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en el eje x y el eje y junto con la ecuación de continuidad de materia y la ecuación termodinámica de la energía son las siguientes:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h u_x - f u_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + A_v \nabla_h^2 u_x + g \frac{\partial \tau_x}{\partial p}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h u_y + f u_x = -\frac{\partial \phi}{\partial y} + A_v \nabla_h^2 u_y + g \frac{\partial \tau_y}{\partial p}, \quad (2.2)$$

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{c_p T} \frac{DQ}{Dt} = \frac{D \ln \theta}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) \ln \theta. \quad (2.4)$$

Los parámetros que todavía no han sido presentados son los siguientes: A_v representa el coeficiente de viscosidad lateral cinemática asociada a torbellinos, $\tau_{x,y}$ son las componentes x e y de la tensión de fricción actuando a través de una superficie horizontal, o esfuerzos de cizalla.

Aunque aún no haya sido presentado este concepto teóricamente, A_T es el coeficiente de calor asociado a la difusión de los torbellinos, en el momento en el que se redactó el artículo de Phillips no existía manera de calcular el valor de este coeficiente ni de A_v . Se ha investigado en varias bases de datos con información meteorológica por cuestiones de realización de mejores estimaciones iniciales de las condiciones de contorno del problema, a día de hoy, los programas de simulación meteorológica emplean otra serie de parámetros, por lo que se ha considerado conveniente emplear la simplificación usada en su momento de igualar estos coeficientes entre sí y estimar su valor de la siguiente manera: $A_T = A_v = 10^5 m^2 s^{-1}$.

En lo referente a operadores, los operadores ∇_h representan conceptualmente lo mismo que los operadores ∇ , salvo que los primeros serían operadores bidimensionales, es decir las operaciones aplicarían sólo en los ejes x e y . Como a lo largo de los siguientes capítulos solo se hará referencia a los operadores horizontales, ∇_h , se omitirá el subíndice h para simplificar la notación.

Este problema de que las variables de trabajo se adecuen relativamente mal a valores que puedan ser extraídos de la realidad sucede a lo largo de todo el artículo de referencia, por lo que para ser fieles con el mismo e implementar un modelo con un comportamiento similar, y así poder trazar una comparativa, se tomarán estos valores usando el mismo criterio.

2.2.1 Modelo de atmósfera bicapa

La base principal del modelo de atmósfera de dos capas es la forma de dividir la atmósfera. Para ello se adjunta la figura 2.1, donde se puede ver las distintas divisiones que se han realizado de la atmósfera. Cada división presenta una presión de referencia, que lleva a su vez asociada una altura determinada. El cálculo de las variables se hará en los niveles [1] y [3]. El nivel [0] representa la capa más tenue de la atmósfera y el nivel [4], el nivel del mar. De ahora en adelante se usará la siguiente nomenclatura: ϕ_1 , representa el valor de la variable ϕ a la altura [1].

Las primeras condiciones de contorno que se pueden imponer a partir de los conceptos planteados son que, para los niveles extremos, [0] y [4], las velocidades verticales son prácticamente nulas y que los esfuerzos friccionales en el nivel [0] son insignificantes. Puesto que la estimación de este valor en el nivel [2] es inviable, se tomará como nulo también. Por otro lado en tierra estos valores tienen un efecto muy significativo por lo que es necesario considerarlos, por lo que, de acuerdo con Phillips, se modelará como:

$$|\tau_4| = \kappa \rho C^2. \quad (2.5)$$

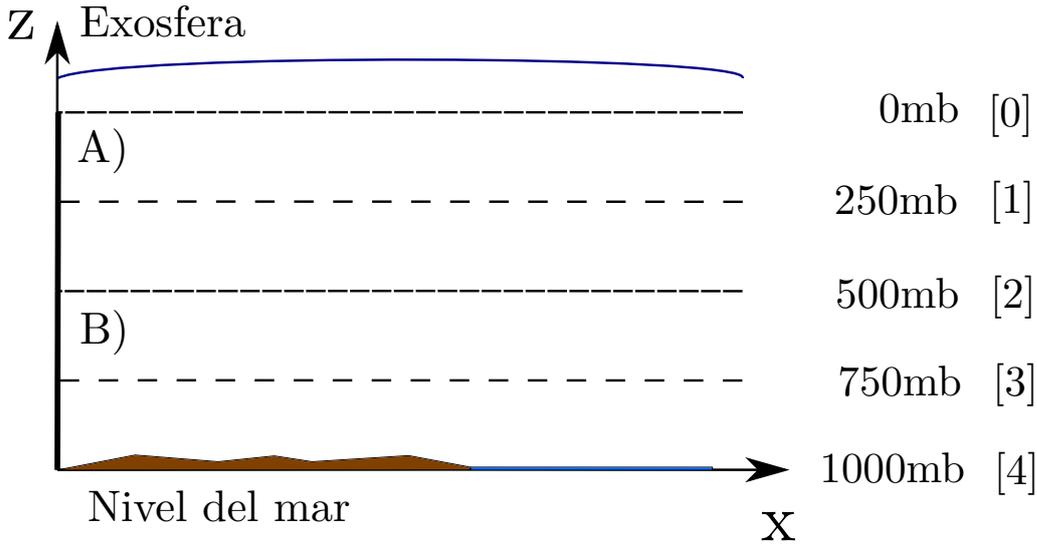


Figura 2.1 Modelo de atmósfera bicapa.

Al modelar el efecto de la fricción contra el suelo resulta razonable suponer que será directamente proporcional al viento medido en tierra al cuadrado, C , y a la densidad medida en ese mismo punto, y opuesto a la dirección del viento. κ es un factor de corrección con valor 0.003.

De ahora en adelante, dado que se trabajará con vorticidades, resulta conveniente el definir la vorticidad geostrófica en la superficie, ζ_4 :

$$\frac{g}{p_2} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right)_4 = -k \zeta_4, \tag{2.6}$$

$$k = 0.98g\kappa\bar{C}_g (RT_4)^{-1}. \tag{2.7}$$

El parámetro k está relacionado con la gravedad, el factor de corrección κ , el viento geostrófico característico en la superficie, \bar{C}_g , la constante de los gases ideales y la temperatura en superficie. Este término estima el efecto de la orografía sobre las ecuaciones por lo que podría llamarse constante orográfica. Un valor de \bar{C}_g característico es $11ms^{-1}$.

Para la vorticidad relativa hasta ahora se ha estado empleando el término ξ , pero dado que ha cambiado ligeramente el enfoque, pasando a usar la vorticidad relativa geostrófica, se ha estimado oportuno usar distinta notación, ya que no representan el mismo valor. La notación empleada para la vorticidad geostrófica es ζ .

Para calcular las relaciones existentes entre las distintas velocidades verticales, es necesario partir de la ecuación de continuidad, ecuación (2.3), y descomponer el término $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ calculando su valor numéricamente a través del método de las diferencias centradas:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial p} \right)_1 \simeq \frac{\omega_2 - \omega_0}{p_2}. \tag{2.8}$$

Estimando esta derivada para el nivel 3, y recordando que debido a la condición de contorno en ese nivel, la velocidad vertical en 0 y 4 es nula, se obtiene la siguiente relación:

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u}_1 = -\nabla_h \cdot \mathbf{u}_3 = -\frac{\omega}{p_2} \tag{2.9}$$

Aplicando la teoría del apartado 1.3.4, se puede llegar a las ecuaciones de vorticidad casi geostrófica para los niveles 1 y 3:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_h \right) (f + \zeta_1) - f \frac{\omega_2}{p_2} = A_v \nabla_h^2 \zeta_1, \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_3 \cdot 2la_h \right) (f + \zeta_3) - f \frac{\omega_2}{p_2} = A_v \nabla_h^2 \zeta_3 - k\zeta_4. \quad (2.11)$$

Se puede observar en estas ecuaciones los siguientes detalles que la diferencian de la ecuación (1.51). En primer lugar, en el término asociado al parámetro de Coriolis, no se ha aplicado todavía la hipótesis de linealización de las variaciones de f . Por otro lado, en este caso se han considerado efectos disipativos de vorticidad y debido al terreno, $k\zeta_4$, sólo válido esto último para el nivel 3.

Para la ecuación termodinámica, se puede evaluar en el nivel 2 usando también diferencias centradas y la relación siguiente para definir en este modelo la temperatura potencial a través de la distribución atmosférica:

$$\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial p} f(p) = -\frac{RT}{p} f(p). \quad (2.12)$$

Para pasar de la segunda igualdad a la tercera se ha empleado la relación hidrostática.

Si discretiza la ecuación termodinámica y se emplea la relación (2.12) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\omega_2}{p_2} \left[\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_2} \right] (\Phi_1 - \Phi_3)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (\Phi_1 - \Phi_3) - \frac{R}{c_p} \left(\frac{dQ}{dt} \right) \quad (2.13)$$

Rescatando la definición del parámetro de estabilidad estática S_p , ecuación (1.25), se puede observar que el signo del parámetro $\left[\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_2} \right]$, es un indicativo de estabilidad atmosférica, si es positivo la atmósfera es estable y si es negativo, inestable.

El modelo de atmósfera de dos capas es incapaz de pronosticar cambios en el parámetro de estabilidad vertical, por lo que es necesario considerarlo constante. Por otro lado, hay tener en cuenta que la variación relativa de ω_2 frente a $(\Phi_1 - \Phi_3)$ es mucho mayor, por lo que en el lado izquierdo de la ecuación este parámetro se considerará constante e igual a $(\Phi_1 - \Phi_3)_0$. Es por esto que los valores obtenidos referentes a Φ son desviaciones respecto a los valores nominales.

El término $\frac{\partial Q}{\partial t}$, estrictamente hablando, hace referencia a la variación del calentamiento específico no adiabático para el nivel 2; pero debido a la simplicidad del modelo de atmósfera bicapa, resulta más interesante plantearlo como un calentamiento medio de la columna de aire, desde el nivel 0 al 4. Haciendo esto se pierde la capacidad de modelar los efectos de transporte de energía vertical por pequeñas turbulencias. Pero los fenómenos importantes siguen siendo modelados, como la liberación del calor latente, los efectos de la radiación y la difusión lateral de torbellinos a una escala menor que la asociada a las grandes perturbaciones.

Los efectos de condensación y evaporación del agua reducen la estabilidad vertical efectiva, S_p , en las zonas de saturación. Yendo más allá, un exceso neto de condensación sobre la evaporación en una franja de latitudes corresponde a un calentamiento neto para esa región. Phillips no quiso cargar más el modelo con detalles acerca de la conservación de agua en el sistema, por lo que decidió reducir un 80% el parámetro factor de estabilidad de lo que sería su valor nominal atmosférico, para compensar el efecto de la liberación de calor latente debido al cambio de estado del agua.

2.3 Modelado de efectos

Una vez explicadas las ecuaciones y discretizadas para los niveles de interés, queda explicar de forma más específica cuestiones más técnicas, como la manera en la que los términos que se encuentran en las ecuaciones pueden ser expresados e implementados.

La primera cuestión que es necesaria aclarar es la geometría de la región de trabajo, ya que una selección correcta ayudará a simplificar la implementación y mejorará el modelado.

El programa empleará una geometría rectangular, cuyas dimensiones y propiedades se reflejarán en la figura 2.2. Cabe destacar que la rectangularidad del dominio es una aproximación, debido a que se trabajará con franjas de latitudes no muy grandes, entre 20 y 30 grados, la distancia vertical del mallado si será matemáticamente exacta, $2W = \pi R_T \Delta\phi$, pero la distancia horizontal se aproximará como una sección del perímetro del círculo paralelo al Ecuador que pasa por la latitud central, $L = 2\pi \cos(\phi_0) R_T / a$, donde a es un número real que definirá la dimensión de la franja.

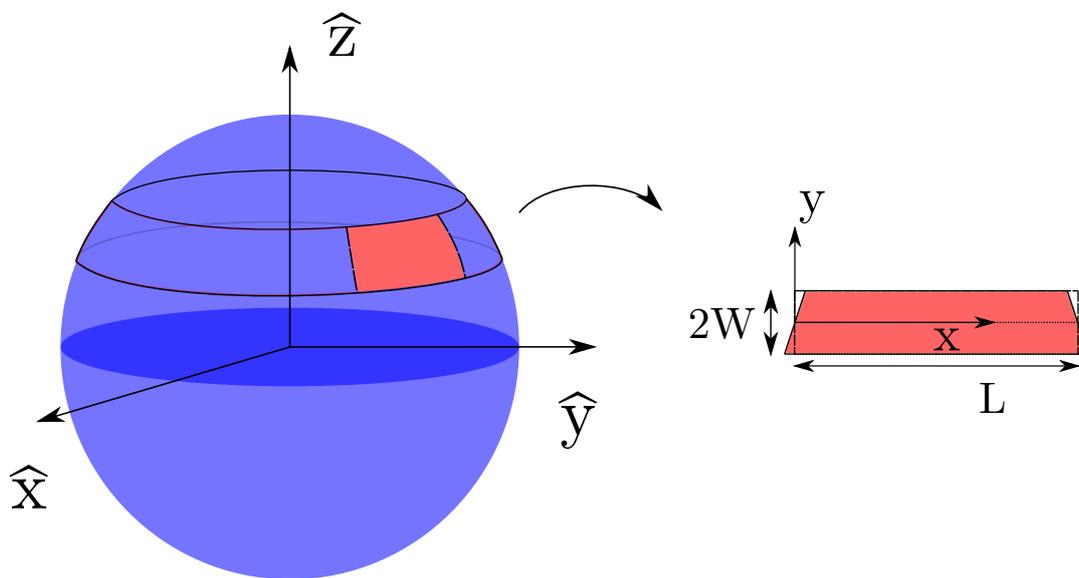


Figura 2.2 Desarrollo gráfico del dominio.

El dominio está acotado entre $y = -W$, límite Sur del recinto, e $y = W$, límite Norte del recinto. En lo que se refiere a la coordenada horizontal, para poder modelar los efectos que se pudieran dar en los extremos, la decisión tomada es la de aplicar condiciones de contorno cíclicas, o sea que los valores de las variables en los laterales del recinto sean iguales, ¿que puede significar esto? Estas condiciones de contorno pueden ser interpretadas de varias maneras, una posible de ellas, la visión más matemática, es la presencia de una secuencia infinita de regiones rectangulares situadas a lo largo del eje x que poseen los mismos desarrollos, como un movimiento ondulatorio en el espacio. Físicamente hablando, esta es una suposición muy fuerte ya que implica que todos los fenómenos de interés que se encuentren fuera de la franja de estudio están lo suficientemente lejos como para afectar mínimamente a lo que ocurre dentro de esta, lo cual no es estrictamente cierto pero en la práctica, la aplicación de estas hipótesis simplifica el cálculo y da buenos resultados, por esto este tipo de condición de contorno es frecuentemente utilizada en la literatura. Los valores de la franja, en lo referente a la dimensión horizontal estarán acotados entre $x = 0$ y $x = L$.

El calor radiado se supondrá función de y o lo que es equivalente, en función de la latitud, recibiendo el planeta energía por la zona inferior del dominio y perdiéndola por la parte superior.

La expresión formal es la siguiente:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{rad} = -2H(y/W). \quad (2.14)$$

Donde H es una constante, que corresponde a la tasa de calentamiento por unidad de masa entre los límites fijados, este calor es independiente del movimiento. El valor de esta constante debe ser extraída de la experimentación y observación, en el artículo original de Phillips este valor para un círculo ubicado a $\phi = 45^\circ$ para la totalidad del hemisferio, es la siguiente:

$$H \simeq 2 \times 10^{-3} \text{ j kg}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (2.15)$$

Por otro lado, en el artículo original de Phillips el efecto de la difusión lateral sobre la derivada temporal del calor, $J = \frac{\partial Q}{\partial t}$, basado en las medidas realizados por (Mintz, 1955) [3], (Starr and White, 1966, [5]) (Esta referencia es posterior debido a que la fuente original es ilocalizable en Internet, por lo que se ha tomado referencia de una recopilación posterior de artículos en la que se encuentra esta información) y (Benton y Estoque, 1954, [1]) y es la siguiente:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{diff} = c_p A_t \nabla^2 T_2 = \frac{c_p}{R} A_T \nabla^2 (\Phi_1 - \Phi_3). \quad (2.16)$$

Añadiendo la hipótesis de variación lineal del parámetro de Coriolis, o aproximación β , se puede ir algo más allá y hacer el siguiente añadido a la hipótesis planteada originalmente en el apartado 1.3.4: el parámetro de Coriolis es constante en todo el dominio, e igual a f_0 , excepto en aquellas ecuaciones que requieran su derivada, que se tomara entonces que: $\frac{df}{dy} \equiv \beta = cte$.

2.4 Expresión final de las ecuaciones

Las ecuaciones de vorticidad cuasigeostrófica para los niveles 1 y 3, ecuaciones (2.10) y (2.11), y la de conservación de energía en el nivel 2, ecuación (2.13), pueden ser simplificadas introduciendo el siguiente cambio de variables, gracias a la hipótesis realizada en el apartado anterior anterior:

$$\psi_1 = \frac{\Phi_1}{f_0}, \psi_3 = \frac{\Phi_3}{f_0}, \quad (2.17)$$

e introduciendo el siguiente parámetro para simplificar las ecuaciones:

$$\lambda^2 = \frac{f_0^2 \theta_2}{(\Phi_1 - \Phi_3)_0 (\theta_1 - \theta_3)} = cte. \quad (2.18)$$

Este término es constante porque los términos que lo componen pueden considerarse constantes: f_0^2 se ha supuesto aproximadamente constante gracias a la aproximación β , debido a la naturaleza intrínseca del modelo de dos capas el equivalente del parámetro de estabilidad vertical, $\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_2}$, se considera constante, como ya se mencionó en los párrafos anteriores, y $(\Phi_1 - \Phi_3)_0$ es la diferencia entre las referencias de geopotencial a las dos alturas, y esta ha definido como constante a efectos del cálculo. Debido a la naturaleza de los términos que componen λ podría definirse como una constante que determina la estabilidad.

Si se aplican estos cambios se obtiene un nuevo conjunto de ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla_h\right)(\beta y + \zeta_1) - f_0 \frac{\omega_2}{p_2} = A_v \nabla^2 \zeta_1, \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_3 \cdot \nabla\right)(\beta y + \zeta_3) + f_0 \frac{\omega_2}{p_2} = A_v \nabla_h^2 \zeta_3 - k \zeta_4, \quad (2.20)$$

$$\frac{f_0 \omega_2}{p_2} = \lambda^2 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h\right)(\psi_1 - \psi_3) + \frac{2RH}{f_0 c_p} \frac{y}{W} - A_T \nabla_h^2(\psi_1 - \psi_3) \right], \quad (2.21)$$

Estas ecuaciones deben ser adaptadas aún para que puedan expresarse de una manera que sea numéricamente eficiente, estas últimas transformaciones se plantearán en los próximos párrafos.

Es posible definir la vorticidad cuasigeostrófica en el nivel 4, ζ_4 , a partir de la capacidad de extrapolar linealmente los niveles 1 y 3:

$$\zeta_4 = \frac{3}{2} \zeta_3 - \frac{1}{2} \zeta_1, \quad (2.22)$$

donde se puede obtener \mathbf{u} y ζ a través de la relación geostrófica $u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ y $u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Para crear un método eficiente a partir de las ecuaciones, resulta interesante plantear la implementación numérica a partir del concepto de potencial de vorticidad relativa:

$$q_1 = \zeta_1 - \lambda^2(\psi_1 - \psi_3) = \nabla_h^2 \psi_1 - \lambda^2(\psi_1 - \psi_3), \quad (2.23)$$

$$q_3 = \zeta_3 - \lambda^2(\psi_1 - \psi_3) = \nabla_h^2 \psi_3 - \lambda^2(\psi_1 - \psi_3). \quad (2.24)$$

Combinando adecuadamente las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21), lo que implicaría sustituir la ecuación (2.21) en las ecuaciones (2.19) y (2.20) y agrupar términos para introducir q_1 y q_3 , se consiguen las ecuaciones finales que se discretizarán para ser implementadas en el ordenador.

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla(\beta y + q_1) + A \nabla^2 q_1 + \left(\frac{2RH \lambda^2}{f_0 c_p}\right) \left(\frac{y}{W}\right), \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = -\mathbf{u}_3 \cdot \nabla(\beta y + q_3) + A \nabla^2 q_3 - \left(\frac{2RH \lambda^2}{f_0 c_p}\right) \left(\frac{y}{W}\right) - \frac{k}{2} [3q_3 - q_1 - 4\lambda^2(\psi_1 - \psi_3)]. \quad (2.26)$$

Dónde cabe señalar que el operador ∇ representa operaciones horizontales, es decir, solo tiene injerencia sobre el eje x y el eje y . Por ejemplo el término $\nabla(a)$ representa el gradiente horizontal de a , siendo a un campo escalar diferenciable bidimensional. Que matemáticamente se expresaría como:

$$\nabla(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(a), \frac{\partial}{\partial y}(a) \right) \quad (2.27)$$

Estas ecuaciones combinan tanto la conservación de cantidad de movimiento como la de la energía, y conforman el mecanismo teórico que emplea el programa para avanzar en el tiempo.

Para explicar esto mejor, se va a plantear una pequeña explicación preliminar del funcionamiento del programa.

La filosofía de funcionamiento del programa empieza con las condiciones de contorno, estableciendo un punto de partida de las vorticidades en la atmósfera. A partir de estas vorticidades se calcula la función de corriente, o sea el campo geopotencial partido del parámetro de Coriolis, ψ . Después, a partir de las ecuaciones (2.25) y (2.26) se calcula como varían estas vorticidades con el tiempo. Una vez calculadas estas nuevas vorticidades, se calcula la función de corriente otra vez, y así sería el bucle que conforma la dinámica del programa.

2.5 Condiciones de contorno

Una vez expresadas las ecuaciones, es necesario plantear las condiciones de contorno que aplicarán en la ejecución, que no hay que confundir con las condiciones de contorno iniciales.

Las condiciones de contorno en la ejecución son aquellas que se impondrán en el cálculo de la función de corriente y la evolución de la vorticidad potencial, dando un sentido físico a los campos del problema.

Las condiciones en $x = 0$ y $x = L$ son intuitivas, una vez empleado el concepto de condición de contorno cíclica, ambas rectas a efectos prácticos se definen como las mismas posiciones, por lo que la función en ambos extremos debe ser continua y derivable si es posible, para así conservar la supuesta periodicidad.

Las condiciones en $y = \pm W$ no son directas en absoluto. Una buena elección de estas condiciones es lo que marcará un buen comportamiento del programa, tanto en estabilidad computacional como en fiabilidad de los resultados, conforme mayor se haga el tiempo de simulación peor serán los resultados, dado que unas condiciones de contorno poco adecuadas van corrompiendo los resultados y tomando un papel protagonista en lo referente a calidad de la simulación.

Este modelo se espera que sea capaz de realizar simulaciones de duración media-larga, es decir entre dos días y dos semanas, por lo que se realizarán una serie de estimaciones de las condiciones de contorno a través de la extrapolación de experimentos similares.

Es por ello que se supuso que las condiciones de contorno en $y = \pm W$, son equivalentes a la presencia de paredes imaginarias y aplicar así las condiciones de contorno que aplicarían a un muro. El problema con esto surge al combinar estas condiciones con la teoría cuasigeostrofica, entrando en conflicto ambas dos, la suposición geostrofica parece entorpecer la aplicación directa de las condiciones de contorno de la pared (Charney, 1954, [2]). Por lo que las condiciones de contorno serán adaptadas de estas mismas, una corrección heurística.

A la hora de plantear las condiciones de contorno resulta conveniente separar el problema en dos: un problema *medio* y otro *perturbado*, o de perturbación. La separación de los dos problemas presente en el resto de ecuaciones se hará más adelante, en el siguiente capítulo, como parte de la explicación de las medidas tomadas al implementar esta condición.

El valor medio de la función de corriente, ψ , queda definido como:

$$\bar{\psi}(y,t) \equiv \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x,y,t) dx, \quad (2.28)$$

a partir de esta definición y del valor nominal de ψ , se puede obtener el valor del flujo perturbado:

$$\psi'(x,y,t) \equiv \psi(x,y,t) - \bar{\psi}(y,t). \quad (2.29)$$

Estas definiciones son extensibles a todas las variables del problema propuesto, como q , ζ , u_x , u_y , ω y demás.

Cabe destacar que en la definición del flujo medio se puede observar como este solo depende de y , o lo que es equivalente, de la latitud. Esto se puede justificar viendo los órdenes de magnitud de las variables implementadas, los fenómenos más destacables son mayormente dependientes de la latitud, como la radiación solar o la difusión lateral de los torbellinos.

La primera condición de contorno que se puede deducir es :

$$\psi' \equiv 0 \text{ para } y = \pm W, \quad (2.30)$$

esto implica que la velocidad geostrófica normal a la pared en $y = \pm W$ es nula. Otra condición de contorno que se aplicará de forma relativamente arbitraria es:

$$\zeta' \equiv 0 \text{ para } y = \pm W, \quad (2.31)$$

Si se integra la ecuación de cantidad de movimiento (2.1) en la pared, usando la continuidad cíclica y el hecho de que las velocidades verticales en la pared se anulan, lo que lleva a la relación:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial y \partial t} = A \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial y^2}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \bar{\psi}_3}{\partial y \partial t} = A \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial y^2} - \frac{1}{2}k(3\bar{u}_3 - \bar{u}_1). \quad (2.33)$$

$$(2.34)$$

Por lo que se asumirá para todo t que:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \equiv 0 \text{ para } y = \pm W, \quad (2.35)$$

pero dado que \bar{u}_1 y \bar{u}_3 son inicialmente 0 en las paredes, estas deben continuar siendo nulas, de acuerdo a las ecuaciones (2.32) y (2.33). Por lo que la condición de contorno que al final se empleará en la pared para $\bar{\psi}$ es:

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \equiv 0 \text{ para } y = \pm W. \quad (2.36)$$

3 Implementación numérica

Los métodos numéricos presentados en el artículo de Norman A. Phillips no están mostrados de una manera que sea directamente implementable, por lo que ha supuesto todo un reto el planteamiento de una forma eficiente de cálculo. Para ello se ha llegado a soluciones de compromiso que serán explicadas en los siguientes apartados.

3.1 Cambio de enfoque

La principal diferencia entre los métodos de computación empleados por Phillips y el implementado en el programa actual, es el mecanismo de cálculo y resolución. Phillips emplea métodos numéricos estadísticos, como por ejemplo, Montecarlo, y la versión actualizada implementa los cálculos a través de la resolución directa de los sistemas.

¿Cuáles son las principales diferencias entre un método u otro? Pues los métodos estadísticos consumen una menor cantidad de recursos y dentro de unos márgenes de error, pueden encontrar soluciones de manera más rápida que mediante la computación directa. Por otro lado, este otro método, el de resolver las matrices, permite una implementación mucho más rápida e intuitiva para el usuario. Además, aún considerando estas diferencias en la velocidad de ejecución, el funcionamiento del programa se dinamiza gracias a la potencia bruta de los ordenadores modernos, permitiendo emplear mallados más finos y saltos temporales menores.

La resolución directa del problema alcanza el compromiso necesario entre sencillez, velocidad y precisión.

Existen más diferencias entre este programa y el realizado por Phillips como el enfoque de lo que se realiza usando lo calculado. Phillips ahondó en la cuestión de como la energía se transformaba a lo largo del desarrollo del sistema: cuanta energía potencial mantenía, en que momentos es mayor la energía cinética o cuanta de esta se estaba disipando. El nuevo programa se centra más en mostrar el campo de presiones y los vientos asociados a estas diferencias de presiones, buscando que la mayor facilidad de comprensión y visualización de los resultados.

3.2 Mallado

Antes de discretizar las ecuaciones, es necesario plantear la base del programa, la división del dominio y una nomenclatura a utilizar para poder simplificar la identificación de las distintas subdivisiones de este.

Para que las divisiones sean cómodas, sería interesante que estas fueran consistentes con los índices empleados para recorrer la matriz y que la localización de los elementos en la matriz guardara cierta correlación con su posición en el dominio. Para llevar a cabo este fragmentado se plantea la siguiente discretización:

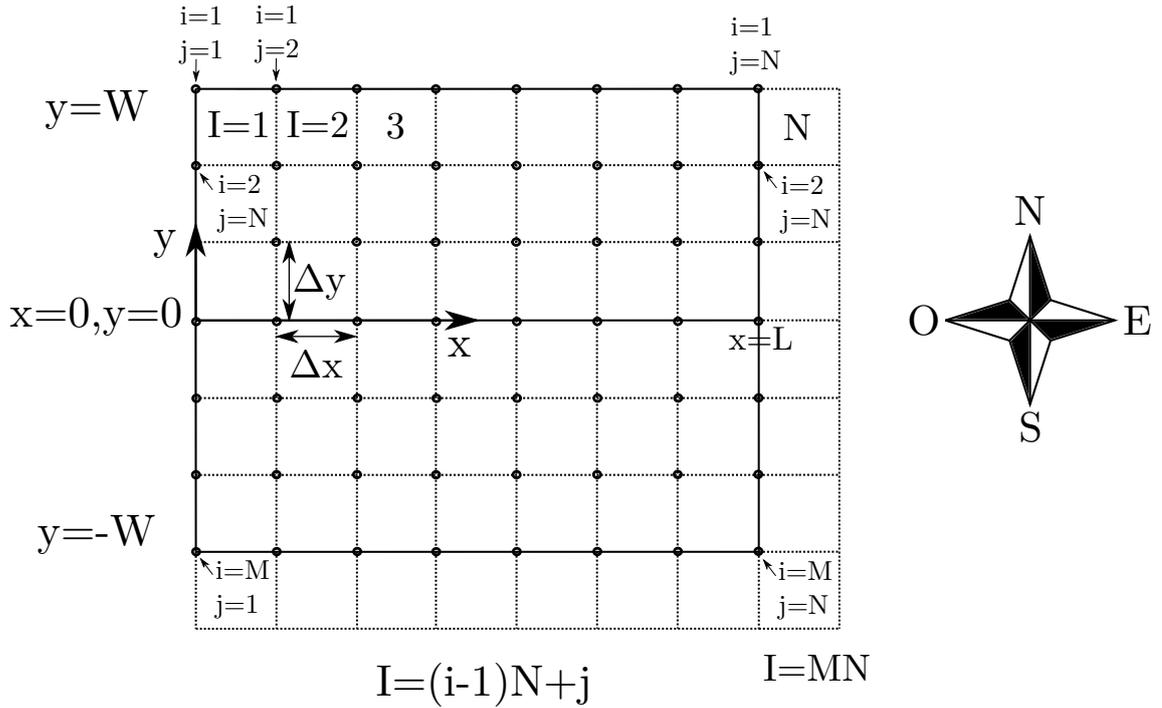


Figura 3.1 Discretización del dominio.

$$t = \Delta t(\tau - 1); \tag{3.1}$$

$$x = (j - 1)\Delta x; (j = 1, 2, \dots, N); \tag{3.2}$$

$$y = W - (i - 1)\Delta y; (i = 1, 2, \dots, M). \tag{3.3}$$

Δx y Δy , cuya representación queda reflejada en la figura 3.1, se definen estas dimensiones como:

$$\Delta x = \frac{L}{N - 1}; \tag{3.4}$$

$$\Delta y = \frac{2W}{M - 1}; \tag{3.5}$$

M y N cuantifican el número de puntos que conforman el mallado. El número de divisiones del mallado deriva de tomar el número de puntos y restar una unidad. Esta forma de plantear el problema da una composición ciertamente peculiar, dado que los paneles quedan caracterizados por sus esquinas superior izquierda y en el extremo $j = N$ se generan paneles cuya existencia es redundante, la existencia de estos paneles, figura 3.1, forma parte del mecanismo empleado para garantizar la continuidad cíclica. A la hora de tomar la decisión de caracterizar los paneles a partir de sus esquinas superior izquierda, ha primado la sencillez del modelo, esta decisión no ha afectado de forma signitiva al modelado de efectos en el programa.

El salto temporal, Δt , viene dado por parte del usuario, los puntos que deberían considerarse a la hora de tomar este valor son:

- Balance con los tiempos de computación de cada iteración completa. Existe una dependencia directa de estos tiempos con el grosor del mallado, resultaría contraproducente tomar un mallado increíblemente fino con saltos temporales pequeños, dado que tardaría más tiempo

en calcular el resultado que el tiempo transcurrido en la vida real, por lo que se pierde toda capacidad de pronóstico.

- Tiempo total de simulación: si se quieren realizar simulaciones largas, es necesario hacer el salto temporal lo más pequeño posible, dado que la probabilidad de que la solución se inestabilice aumenta con Δt y con el tiempo que ha transcurrido en la ejecución.
- Magnitud de la perturbación inicial: si las condiciones iniciales implican vorticidades muy grandes al empezar la ejecución, la solución puede inestabilizarse en las primeras iteraciones.

En el programa original diseñado por Phillips, el mallado utilizado era 16×16 , expresado en formato $M \times N$, y el orden de magnitud de los saltos temporales del orden de las horas. Por otra parte, en la versión renovada del programa, el mallado se recomienda que se encuentre entre 10×10 y 100×100 , esta cota superior viene dada por el tiempo de ejecución del bucle, que para ese mallado oscila alrededor de los 60 segundos. Por otro lado el salto temporal se recomienda que se encuentre entre $5min$, si el mallado es muy pequeño, y $1h$, si se desean hacer simulaciones rápidas.

3.3 Discretización de operadores y adimensionalización

Habiendo quedado definida la disposición del mallado y los valores que lo caracterizan, se hace imprescindible adaptar las operaciones que se emplean en las ecuaciones, adaptándolas al mallado explicado en el apartado anterior.

$$\Delta x^2 \nabla^2 S \simeq \mathcal{L}_{i,j} S = S_{i,j+1} + S_{i,j-1} - 2S_{i,j} + \varepsilon^2 (S_{i+1,j} + S_{i-1,j} - 2S_{i,j}), \quad (3.6)$$

$$4\Delta x \Delta y \mathcal{J} \left(\frac{R,S}{x,y} \right) \simeq \mathcal{J}_{i,j}(R,S) = (R_{i,j+1} - R_{i,j-1})(S_{i-1,j} - S_{i+1,j}) - (R_{i-1,j} - R_{i+1,j})(S_{i,j+1} - S_{i,j-1}). \quad (3.7)$$

Donde S y R representan variables matriciales genéricas.

La laplaciana adaptada se representará usando el operador \mathcal{L} , en su definición se ha empleado el término ε , que es el cociente $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. El jacobiano adaptado, se representará a su vez con el operador \mathcal{J} . Observando los índices, podría surgir una duda acerca de cómo se podrían computar estos términos para $j = 1$, $j = N$, $i = 1$ e $i = M$, dado que se excederían los límites de la matriz si se diera el caso. La solución es simple, como el jacobiano está compuesto por derivadas primeras se puede redefinir la expresión anteriormente expuesta para cambiar el enfoque de derivadas centradas a laterales sin ninguna complejidad adicional. Por otro lado, la laplaciana está compuesta por derivadas segundas, cuyo calculo es recomendable hacer empleando al menos tres puntos, por lo que se ha tomado la decisión de igualar los valores de los extremos a su fila, o columna aledaña según corresponda.

Por último, es posible adimensionalizar los siguientes términos:

$$\gamma = \lambda^2 \Delta x^2; \quad (3.8)$$

$$\eta_{i,j} = q_{i,j} \Delta x^2 \quad (3.9)$$

3.3.1 Descomposición del problema

Como se comentó en el apartado 2.5, es posible separar el problema en dos partes diferenciadas: un problema medio y otro de perturbado, o de perturbación. Estas definiciones trasladadas al problema numérico se expresan de la siguiente manera:

$$\bar{\Psi}_{i,\tau} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Psi_{i,j,\tau}, \quad (3.10)$$

$$\Psi'_{i,j,\tau} = \Psi_{i,j,\tau} - \bar{\Psi}_{i,\tau}. \quad (3.11)$$

Esta descomposición plantea una forma muy particular de resolver el problema, que será desarrollado a lo largo de los siguientes apartados.

3.4 Estructura del programa

Para esclarecer el asunto de como queda estructurado el programa, y para servir de guía de los siguientes apartados, se adjunta la figura 3.2, donde se puede observar un diagrama de flujo muy simplificado.

En los siguientes apartados se hará especial énfasis en los bloques rectángulos de color verde, que son aquellos en los que se está realizando la mayor parte de los cálculos del programa. Los bloques grises implican declaración de variables y cierre del programa, mientras que los bloques rojos son aquellos que requieren cierta interacción por parte del usuario e implican cierto postprocesado para crear una interfaz más accesible. Para este último tipo de bloques se añadirá al final del capítulo una pequeña guía de uso.

Cada bloque podría ser descompuesto en otros diagramas de flujo, pero el funcionamiento de cada bloque individual será explicado sin hacer uso de esta herramienta.

3.4.1 Cálculo de la función geopotencial

Como se ha explicado anteriormente, el programa parte con unas condiciones iniciales de base, es decir, las vorticidades potenciales para un momento inicial; a partir de estas calcula el valor asociado de la función geopotencial para esos puntos. Para ello emplea las ecuaciones (2.23) y (2.24), discretizadas y con los cambios de variable mostrados en los apartados anteriores.

Cálculo del campo geopotencial perturbado

Una vez transformadas adecuadamente las ecuaciones que relacionan la vorticidad potencial con el geopotencial, ecs. (2.23) y (2.24), se obtiene el siguiente sistema:

$$\mathcal{L}_{i,j} \Psi'_1 - \gamma(\Psi'_1 - \Psi'_3)_{i,j} - \eta'_{1,i,j} = 0; \quad (3.12)$$

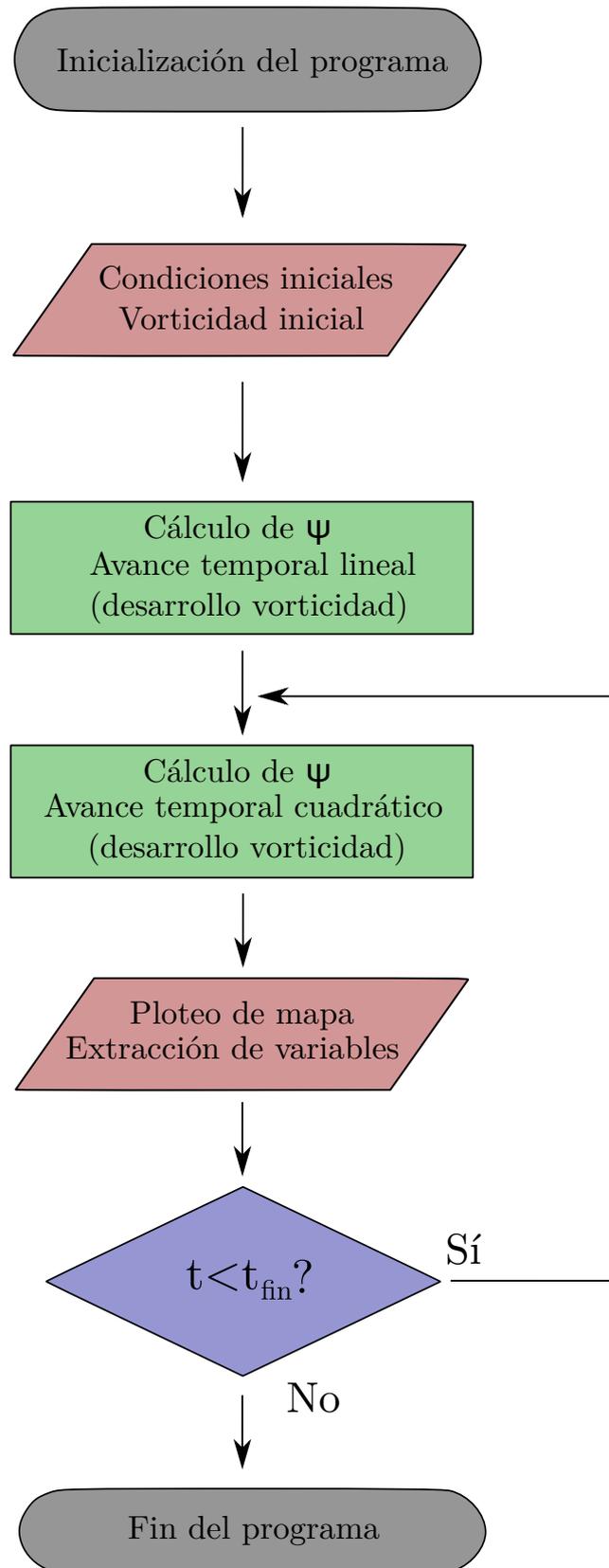
$$\mathcal{L}_{i,j} \Psi'_3 + \gamma(\Psi'_1 - \Psi'_3)_{i,j} - \eta'_{3,i,j} = 0; \quad (3.13)$$

Cabe señalar que las η' conforman el término independiente de este sistema y son variable de entrada de este problema, en el avance temporal, ecs. (2.25) y (2.26), estos valores de vorticidad potencial relativa se actualizarán para poder continuar con el ciclo.

La resolución de este sistema como está ahora mismo planteada es compleja y en el sentido estricto de la ejecución inutilizable, dado que conforman un sistema cuasihomogeneo al añadir las condiciones de contorno. Para ello es conveniente combinar las ecuaciones (3.12) y (3.13), el procedimiento a seguir será el siguiente: sumarlas para generar la primera ecuación del nuevo sistema, y restarlas entre sí para generar la segunda. Si a estas ecuaciones se les realiza el siguiente cambio de variables:

$$\Psi'_+ = \Psi'_1 + \Psi'_3; \quad \Psi'_- = \Psi'_1 - \Psi'_3, \quad (3.14)$$

El sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

**Figura 3.2** Flowchart-guía del programa.

$$\mathcal{L}_{i,j} \psi'_+ = \eta'_{1,i,j} + \eta'_{3,i,j}, \quad (3.15)$$

$$(\mathcal{L}_{i,j} - 2\gamma) \psi'_- = \eta'_{1,i,j} - \eta'_{3,i,j}. \quad (3.16)$$

Esta forma de tratar el problema tiene un pequeño inconveniente, sólo puede resolver el sistema para una atmósfera que cumpla la condición de presentar perturbaciones iniciales sobre el problema medio, lo que significa que debe existir en todo momento cierta variación de las condiciones respecto al eje x . Que no se diera esta condición implicaría que no existen variaciones de presión debido a estas perturbaciones, que presenta sentido matemático aunque es prácticamente imposible que este caso se diera en la realidad, por lo que no es un problema realmente, ni para el caso perturbado ni para el medio, al que se le puede aplicar un razonamiento análogo para este problema, que pudiera surgir al plantear la resolución de esta manera.

Las condiciones de contorno deben adaptarse también, pero no resulta un problema complicado aplicando la definición a los resultados ya obtenidos. Para ambos niveles las condiciones quedan definidas de la siguiente manera:

$$\psi'(i,j) = 0, \text{ para } \{i = 1, i = M\}, \quad (3.17)$$

$$\psi(1,j) = \psi(M,j); \quad (3.18)$$

$$\psi(2,j) = \psi(M-1,j); \quad (3.19)$$

La primera condición de contorno equivale a la condición de la ecuación (2.30), mientras que las últimas dos condiciones implican la continuidad cíclica. Las condiciones de contorno transformadas a estas variables y modificadas debidamente para evitar problemas de homogeneidad del sistema son:

$$\psi'_{+,-}(i,j) = 0, \text{ para } \{i = 1, i = M\}, \quad (3.20)$$

$$\psi'_{+,-}(i,1) = \psi'_{+,-}(i,2) \forall i \in (2, M-1); \quad (3.21)$$

$$\psi'_{+,-}(i,N) - \psi'_{+,-}(i,N-1) - (\psi'_{+,-}(i,2) - \psi'_{+,-}(i,1)) \forall i \in (2, M-1); \quad (3.22)$$

La primera condición de contorno permanece prácticamente igual, al igual que la segunda. Para el tercer caso ha sido necesario realizar un cambio de enfoque, en vez de igualar los valores a ambos lados, se han igualado las derivadas parciales a ambos lados, es decir, forzar continuidad y derivabilidad.

Una vez calculadas las variables suma y resta, es necesario de variables a partir de la definición, por lo que una vez terminada la ejecución del programa se obtienen las variables de interés:

$$\psi_1 = \frac{\psi'_+ + \psi'_-}{2}, \psi_3 = \frac{\psi'_+ - \psi'_-}{2}, \quad (3.23)$$

Método de cálculo

Una vez planteado el problema de cálculo de ψ' , se explicará el método general que se ha empleado para resolver todos los problemas que se han planteado, debido a que es un ejemplo muy representativo. Todas las resoluciones son muy parecidas entre sí, pero existen pequeñas diferencias que se explicarán cada una de ellas en su apartado correspondiente.

En primer lugar, se adjunta la figura 3.3, donde se explican las bases del cálculo empleadas y la distribución de los valores internos. El detalle más llamativo que se puede observar después de un primer vistazo es el tamaño de la matriz en comparación con el mallado de trabajo, las

empleando la siguiente relación: $I = (i - 1)N + j$.

¿Qué ventajas presenta esta forma de resolución a la hora de plantear la implementación numérica? Pues muestra una gran utilidad, la identificación de valores y dependencias dentro de la matriz, facilitando la visualización de la manera en la que las distintas variables están interconectadas. Un punto del dominio, caracterizado por (i_1, j_1) o I_1 , tiene inscrita en la fila I_1 de la matriz las relaciones con el resto de los MN puntos del dominio, incluido él mismo.

El vector b y el vector x contienen los valores de η y ψ para cada punto del mallado ordenados de $I = 1$ a $I = MN$, por lo que un valor distinto de 0 en $A(I_1, I_2)$, implica que el punto del mallado I_2 tiene injerencia sobre el punto I_1 .

Un ejemplo práctico sería el siguiente: si suponemos que $M \times N$ es igual a 5×5 , esta llevaría asociada una matriz A de dimensiones 25×25 . Se puede plantear el siguiente caso, en el que la celda $(3,3)$ está influenciada por $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$ y $(4,3)$, aplicando la definición de I se puede decir que las columnas 7, 12, 13, 14 y 17 de la fila 13 son distintos de 0. Esta combinación de celdas no ha sido elegida arbitrariamente, sino que es la que se emplea para definir la relación que impone la laplaciana, ecuación (3.6). Los comandos para introducir los valores en la matriz, en el caso de que se quisiera hacer a mano, serían los siguientes:

$$A(13,7) = \varepsilon^2; \quad (3.25)$$

$$A(13,12) = 1; \quad (3.26)$$

$$A(13,13) = -2(1 + \varepsilon^2); \quad (3.27)$$

$$A(13,14) = 1; \quad (3.28)$$

$$A(13,17) = \varepsilon^2; \quad (3.29)$$

$$(3.30)$$

Las condiciones de contorno se introducen de la misma manera: analizando que columnas están involucradas en la fila que representa la posición en la que condición de contorno se aplica. Por ejemplo, aplicando la condición de contorno (3.22), para la posición $(2,5)$ del ejemplo expuesto anteriormente, se obtendría lo siguiente:

$$A(10,6) = 1; \quad (3.31)$$

$$A(10,7) = -1; \quad (3.32)$$

$$A(10,9) = -1; \quad (3.33)$$

$$A(10,10) = 1; \quad (3.34)$$

Pero sería necesario no olvidar que en ese punto el término independiente no refleja la vorticidad, sino que contendría un valor nulo para imponer la relación de la condición de contorno. Esto aplicaría para todas las condiciones que fuera necesario introducir. Para todas aquellas filas que no estén asociadas a las condiciones de contorno, el término independiente depende de lo que haya en el otro extremo de la ecuación, que en este caso de ejemplo, para implementar la ecuación (3.15), sería la diferencia de las vorticidades entre ambos niveles, $\eta'_{1,i,j} - \eta'_{3,i,j}$.

Por supuesto, en el programa toda esta lógica que se ha explicado en este apartado está automatizada y puede ser modificada según sea necesario para adaptarla a los distintos subproblemas según sea pertinente. Para los problemas medios existen un par de modificaciones adicionales que ahorran tiempo de computación y añaden eficiencia al programa.

Calculo del campo geopotencial medio

El cálculo del campo geopotencial medio no presenta mayor misterio que para el caso perturbado, incluso resulta más sencillo de implementar debido a que no presenta variación respecto del eje x , lo que elimina términos de la laplaciana, como se puede observar en las ecuaciones que rigen este problema, que parten de la discretización y adimensionalización de las ecuaciones (2.23) y (2.24):

$$\varepsilon^2(\bar{\psi}_{1,i+1} + \bar{\psi}_{1,i-1} - 2\bar{\psi}_{1,i}) - \gamma(\bar{\psi}_{1,i} - \bar{\psi}_{3,i}) - \bar{\eta}_{1,i} = 0; \quad (3.35)$$

$$\varepsilon^2(\bar{\psi}_{3,i+1} + \bar{\psi}_{3,i-1} - 2\bar{\psi}_{3,i}) + \gamma(\bar{\psi}_{1,i} - \bar{\psi}_{3,i}) - \bar{\eta}_{3,i} = 0; \quad (3.36)$$

De forma análoga al cálculo del problema perturbado, la entrada del problema son las vorticidades portenciales relativas medias, $\bar{\eta}$, que conforman el término independiente del sistema. Estos datos también se actualizarán empleando las ecuaciones de avance temporal, ecs. (2.25) y (2.26), como se desarrollará en los siguientes apartados.

Son equivalentes a las del problema perturbado, salvo por el detalle de que el operador laplaciana queda descompuesto. Si se realiza el mismo cambio de variables que en el apartado anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\varepsilon^2(\bar{\psi}_{+,1,i+1} + \bar{\psi}_{+,1,i-1} - 2\bar{\psi}_{+,1,i}) - (\bar{\eta}_{1,i} + \bar{\eta}_{3,i}) = 0; \quad (3.37)$$

$$\varepsilon^2(\bar{\psi}_{-,1,i+1} + \bar{\psi}_{-,1,i-1} - 2\bar{\psi}_{-,1,i}) - 2\gamma(\bar{\psi}_{-,1,i}) - (\bar{\eta}_{1,i} - \bar{\eta}_{3,i}) = 0; \quad (3.38)$$

Las condiciones de contorno propuestas son las siguientes:

$$\bar{\psi}(i=1) = \bar{\psi}(i=2); \quad (3.39)$$

$$\bar{\psi}(i=N) = \bar{\psi}(i=N-1); \quad (3.40)$$

$$\bar{\psi}_3(i=M) = 0; \quad (3.41)$$

La continuidad cíclica no es necesaria incluirla ya que está implícita en la propia definición de problema medio. La tercera condición es arbitraria, aunque no descabellada físicamente, pero necesaria ya que si esta condición no es dada el problema es irresoluble. Esa conclusión deriva del álgebra intrínseco al problema, el programa es capaz de calcular las diferencias de presión entre distintas altitudes pero no es capaz de ubicar una referencia inicial sobre la cual situar la solución, es decir, debido a la simplicidad de la matriz, esta conforma un sistema homogéneo.

En el siguiente apartado se explicará la solución de compromiso tomada a la hora de implementar las condiciones de contorno.

Adaptación del método de cálculo al problema medio

El método expuesto en el apartado 3.4.1 es perfectamente aplicable para este caso, pero podría surgir una duda, ¿es realmente necesario resolver una matriz $MN \times MN$ cuando todos los datos dentro de una fila son iguales? ¿No se estarían invirtiendo demasiados recursos? Estas preguntas son legítimas, por lo que vale la pena hacer una versión ligeramente modificada que aproveche las diferencias entre ambos problemas.

A diferencia del caso anterior, dónde el objetivo principal era la obtención de una matriz de resultados $M \times N$, para este caso sólo hay que calcular un vector de resultados $2M \times 1$. La primera opción que pudiera plantearse como solución es la de resolverlo de forma directa como un problema matricial, implementando la laplaciana simplificada y las condiciones de contorno de forma directa; esto hubiera sido una solución muy eficiente y elegante, pero fueran cuales fueran las condiciones iniciales, esto era inviable matemáticamente, las columnas de la matriz se hacían linealmente dependientes entre sí, o sea, daba un sistema homogéneo.

Como se hizo imposible cambiar los valores de la matriz lo suficiente como para evitar la linealidad sin desvirtuar la naturaleza del problema, se tomó la decisión de darle una vuelta de tuerca adicional a la resolución: combinar la resolución sencilla con la filosofía de combinación de los resultados. Es decir, trabajar con un sistema como el siguiente:

$$(A)_{2M \times 2M}(\vec{x})_{2M \times 1} = (\vec{b})_{2M \times 1} \quad (3.42)$$

Donde \vec{x} concatena los resultados de las dos soluciones de la siguiente manera:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_+ \\ \bar{\psi}_- \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

El caso de \vec{b} es análogo, pero es necesario recordar que \vec{b} alterna valores del problema y los artificios matemáticos necesarios para aplicar satisfactoriamente las condiciones de contorno, esto se indicará con un asterístico en el superíndice:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} (\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_3)^* \\ (\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_3)^* \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

¿Cual es la principal ventaja que plantea esta forma de resolver el problema? Que solventa de forma apreciable el problema de la linealidad de las filas de la matriz, gracias a que esta filosofía permite trabajar de forma simultánea con las variables $\bar{\psi}_+$ y $\bar{\psi}_-$, $\bar{\psi}_1$ y $\bar{\psi}_3$.

Esto a efectos prácticos se traduce en que se pueden expresar y combinar la expresión de condiciones de contorno de varias maneras, mezclando variables suma y resta se puede imponer cualquier condición que se desee de forma que haga más complicado que las filas sean linealmente independientes.

Si se retoma el ejemplo del apartado 3.4.1, del mallado $M \times N$ igual a 5×5 , la matriz de operaciones asociadas al problema medio del campo geopotencial queda con las siguientes dimensiones 10×10 , nótese que es una matriz de cálculo mucho más pequeña que la empleada en el caso del problema perturbado, que era de 25×25 . Las primeras 5 filas de la matriz resuelven el problema de suma y las siguientes el problema de resta.

Aplicar una condición de contorno en el extremo superior del nivel 1 es tan sencillo como asignar una fila en la matriz que recoja esta condición, las filas 1, 5, 6, 9 10 corresponden a las zonas superior e inferior. Para seguir una regla nemotécnica, se ha asignado la localización de las condiciones de contorno asociadas al nivel 1 en las filas 1 y 5, y las filas 6, 9 y 10 para las asociadas al nivel 3. La última fila se ha reservado para poder imponer la condición (3.41).

Para el caso general, las condiciones de contorno que se han implementado son las siguientes:

$$\bar{\psi}_1(1) = \bar{\psi}_1(1); \quad (3.45)$$

$$\bar{\psi}_1(M-1) = \bar{\psi}_1(M); \quad (3.46)$$

$$\bar{\psi}_3(1) = \bar{\psi}_3(2); \quad (3.47)$$

$$\bar{\psi}_3(M) + \bar{\psi}_3(M-2) - 2\bar{\psi}_3(M-1) = 0; \quad (3.48)$$

$$\bar{\psi}_3(M) = 0; \quad (3.49)$$

Que expresado en función de las variables suma y resta quedarían representadas de la siguiente manera:

$$\bar{\psi}_+(1) + \bar{\psi}_-(1) = \bar{\psi}_+(2) + \bar{\psi}_-(2); \quad (3.50)$$

$$\bar{\psi}_+(M-1) + \bar{\psi}_-(M-1) = \bar{\psi}_+(M) + \bar{\psi}_-(M); \quad (3.51)$$

$$\bar{\psi}_+(1) - \bar{\psi}_-(1) = \bar{\psi}_+(2) - \bar{\psi}_-(2); \quad (3.52)$$

$$\bar{\psi}_+(M) - \bar{\psi}_-(M) - 2\bar{\psi}_+(M-1) + 2\bar{\psi}_-(M-1) + \bar{\psi}_+(M-2) - \bar{\psi}_-(M-2) = 0; \quad (3.53)$$

$$\bar{\psi}_+(M) - \bar{\psi}_-(M) = 0. \quad (3.54)$$

La cuarta condición de contorno, que debería corresponder con la de igualdad de los valores aledaños a los extremos, ha sido sustituido por una expresión equivalente a la derivada segunda nula en la penúltima fila del nivel 3. Esta decisión se ha realizado por un doble motivo, por un lado, una razón puramente práctica, ya que así la matriz no representa un sistema homogéneo, y por otro lado uno más físico; la condición de igualdad fuerza una discontinuidad en las líneas de presión y dado que el valor inferior está predefinido, se ha querido evitar forzar fallos en el modelo. Por lo que se ha tomado la decisión de validar este comportamiento, que como primera aproximación, tiene más sentido físico que la falta de continuidad en la tendencia natural que se sigue en el resto de los datos calculados.

En el programa, debido a la manera en la que está configurado el vector incógnita, las columnas recogidas entre $(1, M)$ representan la influencia de $\bar{\psi}_+$ y las filas entre $(M+1, 2M)$, las asociadas a $\bar{\psi}_-$. Pero para hacer la comprensión más sencilla se ha decidido trabajar con las variables suma y resto y no con el vector incógnita.

3.4.2 Avance temporal

Una vez calculados los valores del campo geopotencial, tanto para el problema medio como para el problema perturbado, sólo quedaría para cerrar la explicación de la base numérica del programa, describir como varía con el tiempo la vorticidad potencial, empleando versiones discretizadas de las ecuaciones (2.25) y (2.26).

El programa trabaja, por lo general, con tres instantes de tiempo de forma simultánea, si es que los hubiere, cosa que se desarrollará más adelante. Estos tres instantes son $t - \Delta t$, t y $t + \Delta t$, que corresponden según la notación adimensionalizada a $\tau - 1$, τ y $\tau + 1$. Estas tres instancias representan pasado próximo, presente y futuro próximo.

Antes de proceder a desarrollar las ecuaciones y las decisiones de desarrollo tomadas, resulta conveniente ahondar más en el funcionamiento del programa, para ello hay que sentar una serie de premisas: que el momento en el que se calcula el campo geopotencial es el presente y que en el avance temporal cuadrático se calcula el valor que tendrán las vorticidades potenciales, es decir, para la instancia *futuro*.

El funcionamiento del programa, explicado considerando el detalle del tratamiento temporal, es el siguiente: el programa comienza a ejecutarse a partir unas condiciones iniciales dadas en forma de vorticidad potencial, a partir de estas vorticidades se obtiene la expresión del campo geopotencial. Una vez se han empleado los valores de las coordenadas iniciales para calcular el campo geopotencial en el *presente*, estas son trasladadas a la instancia *pasado*, que entrarán en el subprograma de avance temporal lineal, que dará el valor de las vorticidades potenciales en el *presente*, a partir de la cual se calculará el campo geopotencial para este instante de tiempo.

A partir de las instancias *pasado* y *presente*, se emplea el programa avance temporal cuadrático que calcula el valor de las vorticidades en la instancia *futuro*. Para poder continuar con el bucle se realiza una permutación de valores para ahorrar espacio en memoria: la instancia *presente* se sobrescribe sobre *pasado* y *futuro* sobre *presente*, por lo que si se cumple la condición que mantiene el bucle este se repetirá calculando de nuevo el campo geopotencial y así continuaría hasta que se cortara la condición que mantiene el bucle.

Se ha hecho referencia a dos subprogramas que implementan la opción de avance temporal: un programa denominado lineal, y otro programa denominado como cuadrático. ¿En qué radica la diferencia entre ambos? En el número de instancias temporales que emplean para realizar los cálculos pertinentes.

Al ejecutar el programa, la cantidad de información que este tiene del problema es limitada, solo posee información acerca del instante inicial, que es considerado como *pasado*, se hace necesario desarrollar un método para calcular los valores en *presente* a partir de *pasado*. Si se discretizan las ecuaciones (2.25) y (2.26), empleando una filosofía como la empleada en el cálculo de las derivadas primeras laterales, $f'(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, se obtiene el siguiente juego de ecuaciones:

$$\eta_{1,\tau} = x_{1,i,j} = \eta_{1,\tau-1} + \frac{c}{2} \mathcal{J}_{i,j}(bj + \eta_1, \psi_1)_{\tau-1} + \alpha \mathcal{L}_{i,j}(\eta_{1,\tau-1}) + \frac{h(2i-1-M)}{1-M}; \quad (3.55)$$

$$\eta_{3,\tau} = x_{3,i,j} = \eta_{3,\tau-1} + \frac{c}{2} \mathcal{J}_{i,j}(bj + \eta_3, \psi_3)_{\tau-1} + \alpha \mathcal{L}_{i,j}(\eta_{3,\tau-1}) - \frac{h(2i-1-M)}{1-M} - \frac{k\Delta t}{2} [3\eta_{3,\tau-1} - \eta_{1,\tau-1} - 4\gamma(\psi_1 - \psi_3)_{\tau-1}]_{i,j}; \quad (3.56)$$

Se han sustituido los siguientes términos, que son los empleados por Phillips, para simplificar la expresión de la ecuación:

$$\alpha = \frac{A\Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad (3.57)$$

$$b = \beta \Delta x^2 \Delta y, \quad (3.58)$$

$$c = \frac{\Delta t}{2\Delta x \Delta y}, \quad (3.59)$$

$$h = \frac{4RH\gamma\Delta t}{f_0 c_p}. \quad (3.60)$$

Realizar esta discretización es un ejercicio bastante interesante, se llega a una solución muy similar a la planteada por Phillips, que es la versión cuadrática de las ecuaciones de variación de vorticidad potencial. La ejecución cuadrática es una manera de plantear la resolución con mayor precisión y estabilidad que la forma lineal, con el inconveniente de que necesita las instancias temporales de *pasado* y *presente* para poder ejecutarse, por lo que se empleará para el resto de los avances temporales, ya en esos casos si se tienen todos los datos de entrada necesarios.

La denominación de esta tipología de resolución como cuadrática no es casual, esta parte de dos conceptos presentes en el problema: que el cálculo está centrado en el tiempo empleando datos hacia delante, hacia atrás y en el punto, y que el método empleado es de segundo orden. Como este planteamiento es parecido a la fórmula que discretiza la derivada segunda, $f''(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$, se ha nombrado esta forma de resolver el problema de esta manera. De la misma manera, el problema lineal se ha llamado así debido a que el método empleado para realizar la discretización es de primer orden.

Las ecuaciones del avance temporal cuadrático son las siguientes:

$$[-\alpha\mathcal{L}_{i,j} + 1] \eta_{1,i,j,\tau+1} = x_{1,i,j} = \eta_{1,i,j,\tau-1} + c \mathcal{J}_{i,j}(bj + \eta_1, \psi_1)_\tau + \alpha\mathcal{L}_{i,j}(\eta_{1,\tau-1}) + \frac{h(2i-1-M)}{1-M}; \quad (3.61)$$

$$\left[-\alpha\mathcal{L}_{i,j} + 1 + \frac{3k\Delta t}{2}\right] \eta_{3,i,j,\tau+1} = x_{3,i,j} = \eta_{3,i,j,\tau-1} + c \mathcal{J}_{i,j}(bj + \eta_3, \psi_3)_\tau + \alpha\mathcal{L}_{i,j}(\eta_{3,\tau-1}) - \frac{h(2i-1-M)}{1-M} + k\Delta t \left[\frac{3}{2}\eta_{3,\tau-1} - \eta_{1,\tau} - 4\gamma(\psi_1 - \psi_3)_\tau\right]_{i,j}; \quad (3.62)$$

Las ecuaciones de avance lineal tienen una gran ventaja, aunque no sean tan precisas como las de avance cuadrático, pueden ser resueltas mediante una suma matricial, o vectorial, lo que computacionalmente resulta muy ventajoso, y no presenta ningún misterio.

La resolución del método de avance cuadrático es más compleja pero se puede trazar un método de resolución completamente análogo al empleado para el cálculo del campo geopotencial medio y perturbado.

Los términos $x_{1,i,j}$ y $x_{3,i,j}$ son conocidos de antemano, desarrollando un par de funciones que apliquen de manera directa el jacobiano y el laplaciano numérico, se puede formar una matriz $M \times N$, que cambiando el enfoque del uso de dos índices, (i,j) , al índice único, I , se obtiene un vector de datos, $MN \times 1$, que conforma el término independiente del sistema.

Se puede emplear el subíndice s , para indicar de forma genérica cualquiera de los dos niveles, un posible ejemplo de uso es el siguiente: $x_{s,i,j}$, es el término independiente del sistema para el nivel s . Al hacer esta pequeña adición a la notación, las ecuaciones para ambos niveles pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$[\alpha\mathcal{L}_{i,j} - \mu_s] \eta_{s,i,j,\tau+1} = -x_{s,i,j}. \quad (3.63)$$

Donde μ_s toma los siguientes valores: $\mu_1 = 1$ y $\mu_3 = 1 + \frac{3}{2}k\Delta t$. El operador matricial en este caso es el que conforma $[\alpha\mathcal{L}_{i,j} - \mu_s]$, que es totalmente análogo al empleado en el cálculo de ψ' .

Dado que se están señalando muchas similitudes entre la resolución tomada para el cálculo del geopotencial y el avance temporal, resulta más interesante comentar las dos principales diferencias que se encuentran entre ambos casos. Estas diferencias radican en dos puntos: la necesidad de diseñar un preprocesado de datos para obtener el término independiente y el hecho de que no se combinan las ecuaciones, se procesa cada nivel por separado.

Las condiciones de contorno a aplicar en este caso son las siguientes:

$$\eta'_s(j=1) = \eta'_s(j=N); \quad (3.64)$$

$$\bar{\eta}_s(i=1) = \bar{\eta}_s(i=1); \quad (3.65)$$

$$\bar{\eta}_s(i=2) = \bar{\eta}_s(i=M-1); \quad (3.66)$$

Descomposición del problema de vorticidades

La división del problema de la variación de la vorticidad potencial no es directa, es necesario evitar realizar una mala resolución del problema con errores, por ejemplo, que al realizar la separación, no utilizar como criterio de división las características implícitas de los distintos efectos que están modelados en el problema.

Realizar una mala descomposición puede estropear los resultados obtenidos. Un posible ejemplo puede ser un error que se cometió durante la implementación, en el cual se modelaba que el efecto de la radiación solar estaba presente tanto en la resolución del problema medio como la resolución del problema perturbado. Los resultados del problema perturbado se corrompieron, se dejó de

cumplir una de las hipótesis de partida, la de que los valores medios son mucho mayores que los perturbados, y se perdió toda variabilidad respecto al eje x .

Para evitar la presencia de más errores de ese estilo en la ejecución del programa, se realizó la siguiente descomposición, en la cual se esclarecen unas pautas a seguir a la hora de implementar el problema. Se mostrará la parte del estudio asociada al cálculo del nivel 3 que es el más complejo de ambos casos. Partiendo de la ecuación 2.26 y aplicando la definición que permite separar ambos problemas, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = -\mathbf{u}_3 \cdot \nabla(\beta y + q_3) + A\nabla^2 q_3 - \left(\frac{2RH\lambda^2}{f_0 c_p} \right) \left(\frac{y}{W} \right) - \frac{k}{2} [3q_3 - q_1 - 4\lambda^2(\psi_1 - \psi_3)] \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial t} + \frac{\partial q'_3}{\partial t} = & -\mathbf{u}_3 \cdot \nabla(\beta y + \bar{q}_3) - \mathbf{u}_3 \cdot \nabla(q'_3) + A\nabla^2 \bar{q}_3 + A\nabla^2 q'_3 - \left(\frac{2RH\lambda^2}{f_0 c_p} \right) \left(\frac{y}{W} \right) - \\ & - \frac{k}{2} [3\bar{q}_3 - \bar{q}_1 - 4\lambda^2(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_3)] - \frac{k}{2} [3q'_3 - q'_1 - 4\lambda^2(\psi'_1 - \psi'_3)], \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \bar{q}_3}{\partial t} = -\mathbf{u}_3 \cdot \nabla(\beta y + \bar{q}_3) + A\nabla^2 \bar{q}_3 - \left(\frac{2RH\lambda^2}{f_0 c_p} \right) \left(\frac{y}{W} \right) - \frac{k}{2} [3\bar{q}_3 - \bar{q}_1 - 4\lambda^2(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_3)]; \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial q'_3}{\partial t} = -\mathbf{u}_3 \cdot \nabla(q'_3) + A\nabla^2 q'_3 - \frac{k}{2} [3q'_3 - q'_1 - 4\lambda^2(\psi'_1 - \psi'_3)]. \quad (3.70)$$

Resulta razonable asignar al problema medio todos aquellos efectos que solo dependen de la coordenada y . A través de este desarrollo e identificando términos con la versión discretizada, la implementación es directa si se siguen las pautas desarrolladas anteriormente.

Todas las descomposiciones se han realizado teniendo en cuenta que el operador derivada y el operador laplaciano son lineales, pero existe un término que no es lineal, $\mathbf{u}_3 \cdot \nabla(\beta y + \bar{q}_3)$, que recordando la definición de viento cuasi geostrófico se puede realizar la siguiente aproximación:

$$\mathbf{v}_s = \left[-\frac{\partial \psi_s}{\partial y}, \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \right] \approx \left[-\frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial y}, \frac{\partial \bar{\psi}_s}{\partial x} \right]. \quad (3.71)$$

Debido a que el problema medio tiene un orden de magnitud mucho mayor que el problema perturbado, esta aproximación es bastante buena, esta también aplica para el nivel 1.

La ecuación de variación de la vorticidad potencial expresada en terminos simplificados del problema medio es la siguiente:

$$\alpha \varepsilon^2 (\bar{\eta}_{i+1} + \bar{\eta}_{i-1} - 2\bar{\eta}_i)_{s,\tau+1} - \mu_s \bar{\eta}_{s,\tau+1,i} = -x_{s,i}. \quad (3.72)$$

La resolución del problema medio es análogo a la resolución del campo geopotencial pero empleando una matriz $M \times M$, y resolviendo el problema para cada nivel por separado, siguiendo la misma lógica de vector incógnita desarrollado en función de I y preprocesado del término independiente.

3.4.3 Procesado de datos

Cálculo de los vientos

Un resultado muy interesante que se puede obtener a partir de los datos calculados y que tiene mucha utilidad a la hora de hacer la física del problema mucho más visual, es la obtención de los

vientos. Estos son fácilmente obtenibles a partir del campo geopotencial, aplicando de forma directa la definición:

$$\mathbf{v}_s = \left[-\frac{\partial \psi_s}{\partial y}, \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \right], \quad (3.73)$$

estimando las derivadas a través de diferencias centradas, cuando se evalúan valores del malla no pertenecientes a los extremos, y a través de diferencias laterales en caso contrario.

Usando el comando *quiver* de Matlab[®], que permite pintar en pantalla campos vectoriales, y probando valores a mano de distintos grosores de línea, tamaños de cabeza de flecha y número de valores mostrados, dado que puede llegar a ser contraproducente mostrar el viento en todos los puntos ya que saturaría la vista; se puede automatizar el programa para muestre los vientos de la manera más cómoda posible.

El viento calculado es el cuasigeostrófico, por lo que debería ser tangente a las líneas de presión constante, pero a veces en la representación esta condición no se llega a ver del todo. ¿A qué se puede deber este problema?

En primer lugar, la condición de ser cuasigeostrófico ya es una traba en sí para que el viento sea perfectamente tangente, pero sumado esto al hecho de que el escalado de los vectores viento depende de la magnitud máxima del viento en ese lapso de tiempo, dado que se ha tomado la decisión de no escalar los valores frente a una referencia y así evitar perder detalle en la visualización.

Un posible añadido a este problema es el hecho de que no coinciden a la perfección los puntos donde se plotea el viento con el viento que tendría exactamente ese punto, dado que las isóbaras son interpoladas por el comando *contour* de Matlab[®], y el malla no se puede hacer infinitésimo.

Aún así los vientos calculados se adaptan bastante bien a las líneas isóbaras, por lo que la solución del problema sigue conservando su sentido físico.

Cálculo de la Laplaciana y el Jacobiano numérico

La implementación de la función que introduce estos dos operadores en el problema de avance temporal no es especialmente complicada. Es un trabajo algo aparatoso debido a la adecuación de las variables de trabajo a la forma de mostrarlo que interese. Por ejemplo, el programa suele manejar los resultados de los problemas medios en forma vectorial, para así ahorrar espacio en memoria, pero interesa en otras partes del programa que ese vector este expresado en forma matricial, que se adapta a la del malla, por lo que existen subfunciones que transforman las distintas variables de un caso a otro.

Quitando este pequeño inconveniente, estas funciones implementan el laplaciano y el jacobiano numérico, ecuaciones (3.6) y (3.7), con pequeñas transformaciones para poder modelar mejor estos valores en los bordes.

Para el jacobiano este pequeño cambio solo implicó dividir los resultados dependiendo si se trabajaba con un borde o una esquina, cambiando el enfoque de diferencias centradas a laterales. Para la laplaciana, se igualaron los valores de los extremos a las filas o columnas aledañas.

3.5 Guía de uso

3.5.1 Modo depuración

A lo largo del desarrollo del programa ha sido necesario crear una serie de subfunciones, que bien no son material perteneciente de forma directa al programa resultado final, pero si son muy útiles para comprobar que este esté funcionando tal como se espera de él. En las primeras etapas de desarrollo, se estaba creando código desde 0, y cómo este iba sentar la base del resto del programa, fue complementamente necesario garantizar que no existieran errores.

Para ello se expondrán a continuación las partes del código que sirvieron para depurar las funciones que implementan el cálculo del campo geopotencial perturbado y el campo geopotencial medio. Para el avance temporal no se ha realizado un código específico para ello, el propio programa final, es capaz de dar suficiente feedback del funcionamiento interno del programa sin resultar imposible de analizar durante la ejecución. Aún así, se dejarán en los códigos de avance temporal lineal y cuadrático las líneas empleadas para realizar la depuración. Estos códigos estarán localizados en el capítulo que recoge todos los códigos, en el archivo *MAIN_debug.m*.

Campo geopotencial perturbado

A partir del código de depuración, se puede de forma más sencilla e intuitiva ver como funciona el programa final ya que el desarrollo es prácticamente el mismo.

El código se puede dividirse en 3 partes claramente diferenciadas: declaración de variables y adición de los datos al programa, computación y postprocesado.

Durante la declaración de variables se dan todos los valores iniciales necesarios para que funcione el programa, los datos son alojados en una estructura de datos, para poder simplificar el movimiento de la gran cantidad de información necesaria para la correcta ejecución de las funciones. Esta sección ocupa desde el principio del programa hasta la línea 18.

Para este casos los datos numéricos de entrada se han escalado a partir de los empleados por Phillips, de ahí esa fórmula de cálculo que define los valores de Δx y Δy . Los valores iniciales de η son aleatoriamente obtenidos, no se hacen las modificaciones pertinentes para adaptar este vector a la expresión que incluye los artificios matemáticos que incluyen las condiciones de contorno, dado que hacer esto durante el cálculo es más sencillo y requiere menos bucles. Todos estos datos son modificables según las necesidades del usuario para hacer distintas pruebas.

En la línea 19, se encuentra la llamada a la función que calcula el geopotencial, esta implementa todos los procedimientos indicados en su respectivo apartado, si se quieren modificar las condiciones de contorno o añadir nuevos efectos habría que entrar dentro de esta función y seguir las instrucciones internas indicadas en los comentarios.

A partir de la línea 20, se prepara un mallado genérico que permite mostrar las líneas de contorno de los campos geopotenciales a ambos niveles y también un pequeño muestreo en 3 dimensiones del campo. Aquí se puede comprobar que se están cumpliendo las condiciones de contorno y qué forma tienen las soluciones.

Se puede añadir si se requiere el tiempo computación invertido, los comandos *tic* y *toc* solucionan este problema.

Código 3.1 Modo debug de ψ' .

```

1 %% pruebapsipr
2 clc
3 close all
4 clear all
5
6 data.M=50;
7 data.N=50;
8
9 deltax=375*16/data.N*1e3;
10 deltay=625*16/data.M*1e3;
11 lambdacuad=1.5e-12;
12
13 data.epsilon=deltax/deltay;
14 data.gamma=lambdacuad*deltax^2;
```

```

15
16 etapr1=rand(data.M*data.N,1)/100;
17 etapr3=rand(data.M*data.N,1)/100;
18
19 [psipr1,psipr3]=resuelve_psipr(etapr1,etapr3,data);
20
21 psipr1mat=conviertematriz(psipr1,data);
22
23 psipr3mat=conviertematriz(psipr3,data);
24
25 x=1:data.M;
26 y=1:data.N;
27 [X,Y] = meshgrid(x,y);
28
29 figure(1)
30 contour(X,Y,psipr1mat)
31 title('\psi_{pr1} p=250mb')
32 xlabel('\$ \leftarrow 0 | E \rightarrow \$','Interpreter','Latex')
33 ylabel('\$ \frac{N \rightarrow}{\leftarrow S} \$','Interpreter','Latex')
34
35 hold on
36 figure(2)
37 contour(X,Y,psipr3mat)
38
39 title('\psi_{pr3} p=750mb')
40 xlabel('\$ \leftarrow 0 | E \rightarrow \$','Interpreter','Latex')
41 ylabel('\$ \frac{N \rightarrow}{\leftarrow S} \$','Interpreter','Latex')
42
43 figure(3)
44 surf(X,Y,psipr1mat)
45
46 'listo'

```

Campo geopotencial medio

La estructura del modo de depuración del campo geopotencial es prácticamente la misma. Una sección en la que se declaran los datos y las variables, líneas 1 a 15, una sección de cálculo, líneas 16 a 21, y otra de postprocesado, desde la línea 22 hasta el final.

Para este caso en particular se ha hecho un bucle, para mostrar la variación de las soluciones cuando se dan distintas condiciones iniciales. variando el número del rango de la línea 16 se pueden comparar el número de casos que se estime necesario.

Los datos de entrada son equivalentes para el caso perturbado, η y los distintos valores numéricos, como Δx o Δy .

Código 3.2 Modo debug de $\bar{\psi}$.

```

1 %% pruebapsimed
2 clc
3 close all
4 clear all
5

```

```

6 data.M=50;
7 data.N=50;
8
9 deltax=375*16/data.N*1e3;
10 deltay=625*16/data.M*1e3;
11 lambdacuad=1.5e-12;
12
13 data.epsilon=deltax/deltay;
14 data.gamma=lambdacuad*deltax^2;
15
16 for i=1:1
17 etamed1=rand(data.M,1)/100;
18 etamed3=rand(data.M,1)/100;
19
20 [psimed1,psimed3]=resuelve_psimed(etamed1,etamed3,data);
21
22 figure(1)
23 hold on
24 plot(1:data.M,psimed1)
25 title('psimed_1 250mb')
26 xlabel('$N\leftarrow S$', 'Interpreter', 'Latex')
27 figure(2)
28 hold on
29 plot(1:data.M,psimed3)
30 title('psimed_3 750mb')
31 xlabel('$N\leftarrow S$', 'Interpreter', 'Latex')
32
33 end
34
35 'listo'

```

3.5.2 Ejecución normal

En lo referente a la ejecución que se podría considerar la usual del programa, la lógica interna ya ha sido explicada a lo largo de este capítulo, y la implementación más allá de la filosofía seguida, no genera tanto interés, ya que es el empleo de Matlab. Aún así el código está comentado línea por línea explicando que parte de la algoritmia está implementando y de que manera. La ejecución y configuración del programa se hará a partir del código principal, cuyo código se encuentra dentro del archivo *MAIN_debug.m*.

Por ello se dedicará este apartado a explicar como arrancar el programa, ya que al carecer de una API, *Interfaz de programación de aplicaciones*, la configuración del programa es ligeramente compleja.

Existen 7 variables en el código principal que conforman la configuración de la ejecución del programa:

- *name*: Variable *string* que recoge el nombre del proyecto en el que se está trabajando actualmente.
- *modo*: Variable binaria que determina el modo de ejecución del programa, se recomienda hacer esta variable 0 si sólo se quieren hacer pruebas de funcionamiento, y 1 si se quieren hacer estudios de perturbaciones.

- *EXTRAEGRAF*: Variable binaria bandera que evita que se guarden las gráficas si al usuario no le interesa, 0. Si se quieren extraer las gráficas debe valer 1.
- *modopert*: Variable *string* que toma dos valores, *B*, si se quiere establecer el siguiente caso a ejecutar como la base, y *P*, si se quiere estudiar un caso derivado de un caso base ya definido.
- *numejec*: Variable numérica que toma valores naturales para distinguir los distintos casos si se da la situación de que se prueben distintas perturbaciones iniciales.
- *vmod*: Vector de valores numéricos que define las variaciones del caso base para las distintas condiciones iniciales.
- *tmuestreo*: Vector de valores numéricos a través del cual se le indica al programa los momentos en los que se requiere que extraiga gráficas.

El resto de variables presentes son modificables, están introducidos en el programa los valores empleados por Phillips para así usar las mismas referencias.

3.5.3 Ejemplo de uso del programa

Para que sirva de manual de instrucciones, se va a indicar, que pasos es necesario seguir a la hora de modificar las variables indicadas anteriormente y así poder configurar correctamente el programa a gusto del usuario:

1. Establecer el nombre del proyecto: introduciendo el nombre en la variable *name*.
2. Decidir si se quieren extraer gráficas: empleando la variable *EXTRAEGRAF*.
3. Indicar el modo de ejecución: Empleando la variable *modo*, si se toma la opción de realizar un estudio de perturbaciones, decidir el caso base si no se tiene, o indicar que ya se tiene, a través de la variable *modopert*. No olvidar, si es que se está estudiando perturbaciones, que hay que indicar con *numejec* el número distintivo del caso.
4. Si se estudian perturbaciones, emplear la variable *vmod* para indicar que variación se quiere realizar a partir de las condiciones iniciales del caso base.
5. Si se quieren extraer gráficas en momentos concretos, añadir el tiempo en horas desde el inicio de la simulación para los que se quiere esas gráficas empleando la variable *tmuestreo*.

En el paso 2, el programa dará error si el nombre del proyecto es distinto para el caso base que para el perturbado. Además, no se podrá estudiar una perturbación si no existe un caso base.

4 Resultados obtenidos

Una vez expuestas las entrañas del programa, resulta interesante mostrar que resultados se pueden extraer a partir de él. En este capítulo se presentarán dos corrientes de análisis de resultados, una centrada en la tipología de las condiciones iniciales y otra de análisis de perturbaciones sobre uno de los casos del primer estudio. Las imágenes se han tomado en momentos lo más significativos posibles, pero aún así no representan de forma fidedigna todo lo que está ocurriendo en la simulación en los lapsos de tiempo restantes, por lo que se recomienda que si se busca un mayor grado de detalle, que sería imposible plasmar en esta memoria, se emplease el código del programa, que se encuentra adjunto en el anexo.

4.1 Comparativa de resultados

Antes de empezar a comentar los resultados, existe una serie de puntos que resulta conveniente exponer de antemano para evitar confusiones en la interpretación.

Si se considera que las constantes del problema son válidas para la ejecución del programa que se quiere realizar y fijadas las condiciones geométricas del dominio, la única variable de control externa del programa son las condiciones iniciales, en forma de vorticidad potencial adimensional. Este valor es muy difícil de estimar, se han visitado varias bases de datos meteorológicas sin encontrar nada, ya este valor es técnicamente complicado de cuantificar, es más un artificio matemático. Por eso las condiciones iniciales se han obtenido a partir del generador de números pseudoaleatorios de Matlab®, donde se ha jugado con los valores de forma que dieran variabilidad en cuanto a signos y sus valores se encontrarán en torno a una referencia en magnitud. Adecuadamente elegidos estos valores, se pueden obtener simulaciones de fenómenos que se busquen, por ejemplo, vorticidades potenciales iniciales negativas generan desarrollos de borrascas y viceversa, cuando las vorticidades potenciales son positivas, la tendencia encontrada es que se generan anticiclones en el corto plazo, como se verá en el siguiente apartado.

Una vez visto esto, cabe hacerse una pregunta de carácter más metafísico, si las condiciones iniciales no corresponden a casos reales dados en la naturaleza, ¿se puede considerar que se está realizando una predicción meteorológica? En primera instancia, la respuesta a esta pregunta sería no, pero pensándolo con más detenimiento, la física del problema está presente en las ecuaciones, por lo que una distribución aleatoria de valores como condiciones iniciales que a priori pudiera no resultar realista, avanzando en el tiempo a través del cálculo, la tendencia del desarrollo de resultados si sería natural, dentro de los márgenes de las hipótesis, por lo que se podrían extraer conclusiones de los valores obtenidos. La línea que separa un simulador y un programa que resuelve las ecuaciones asociadas a un fenómeno físico es ciertamente fina.

Por otro lado, las isóbaras que se observan en las imágenes no están escaladas a partir de la presión. Esto quiere decir, que se muestran las líneas de contorno del campo geopotencial adimensional,

que recordando la definición: $\psi = \frac{gZ}{f_0}$, donde Z es la altura geopotencial, para poder relacionarla con líneas de contorno de presión, sería necesario establecer una relación a través de un modelo de atmósfera adecuado para esta situación. Como realmente las tendencias del campo son las mismas, ya que el modelo de atmósfera conectaría valores usando una relación biunívoca, no se perjudica el análisis de los datos si este se realiza de forma general.

4.1.1 Tendencia de anticiclones

Cuando las condiciones iniciales en vorticidad potencial del problema medio son todas positivas, se da el caso de que la normal ejecución del programa genera anticiclones a corto plazo.

A través de las figuras pertinentes, se puede observar en la leyenda la siguiente tendencia, en las primeras horas el campo entero estará a menor presión que la referencia y cuando ya ha pasado día y medio desde que comenzó la simulación, se ha desarrollado una mayor variabilidad en lo que a signos se refiere, existen zonas con mayor presión y con menor presión que la referencia. Las oscilaciones de larga longitud de onda parecen corresponder con fenómenos parecidos a las ondas de Rossby.

Para la mayoría de los casos planteados de esta manera, al comienzo de la simulación el viento se dirige de oeste a este, al principio de una manera uniforme y con poca magnitud pero conforme avanza la simulación, en la capa 250mb se puede observar la formación de un anticiclón local que transfunde sus efectos a la capa 750mb. Cuando han transcurrido 36 horas de simulación, se puede observar que el anticiclón ya no es relativo al campo, si no que es absoluto, ya que presenta más presión que la de referencia a esa cota, quedando bien definida en ambas alturas.

La formación de anticiclones en el programa presenta una gran estabilidad y una tendencia natural a formarse, lo cual tiene sentido físico, ya que la presencia de anticiclones implica estabilidad atmosférica, por lo que existe tendencia a que se formen, especialmente con las condiciones del programa implementadas. Esta tendencia se observará también en el siguiente caso de estudio.

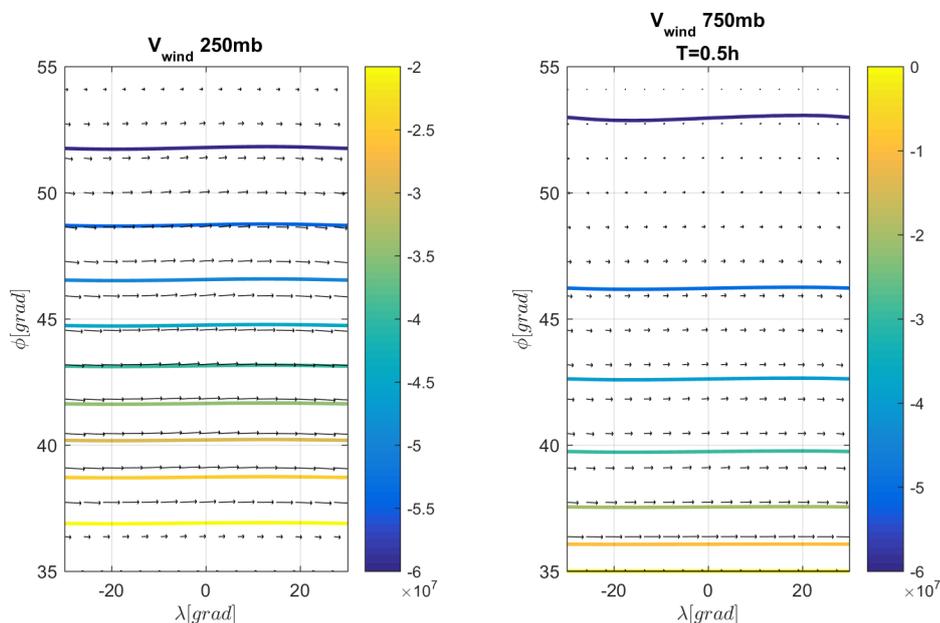


Figura 4.1 Caso anticiclón (0.5h).

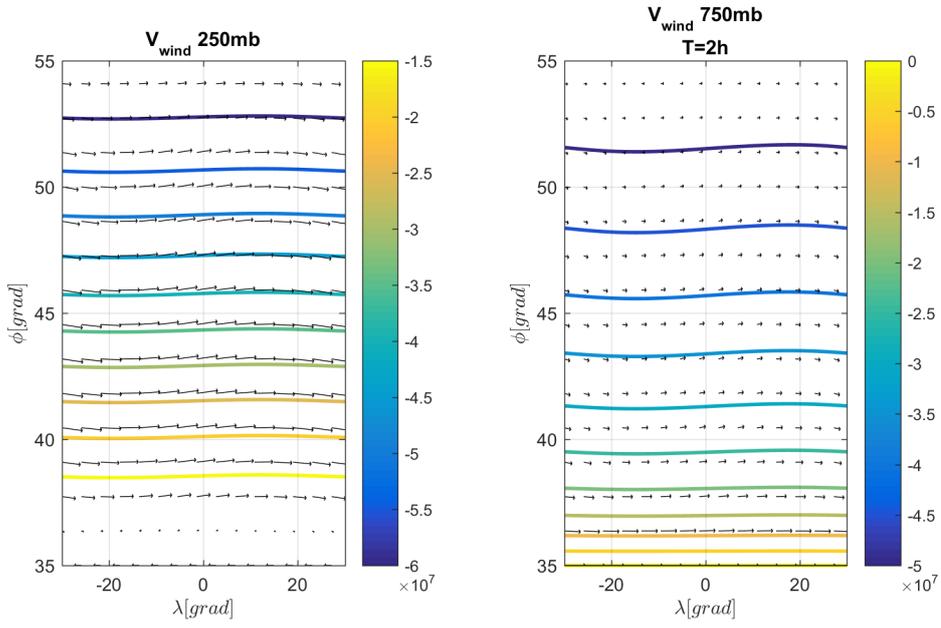


Figura 4.2 Caso anticiclón (2h).

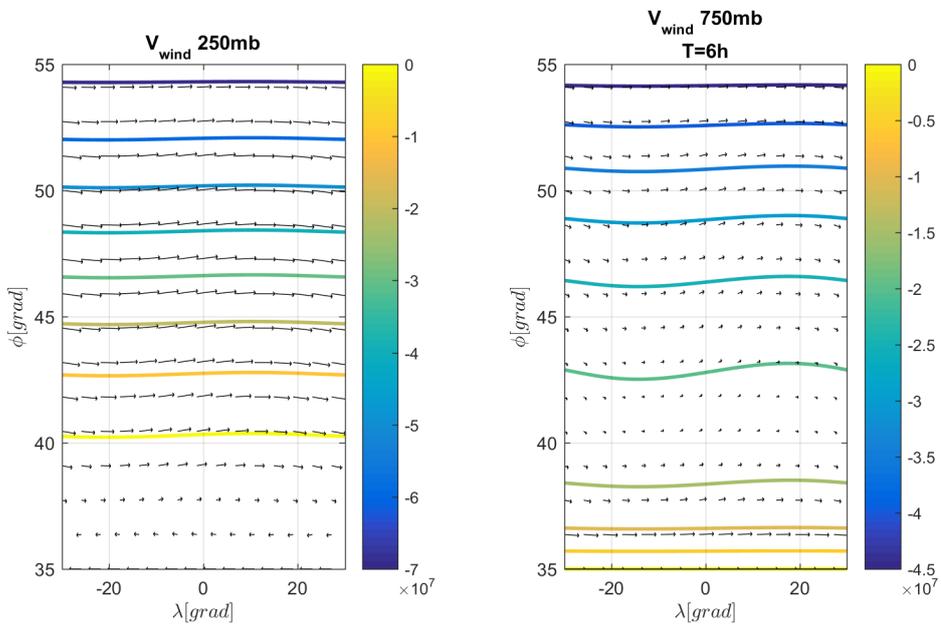


Figura 4.3 Caso anticiclón (6h).

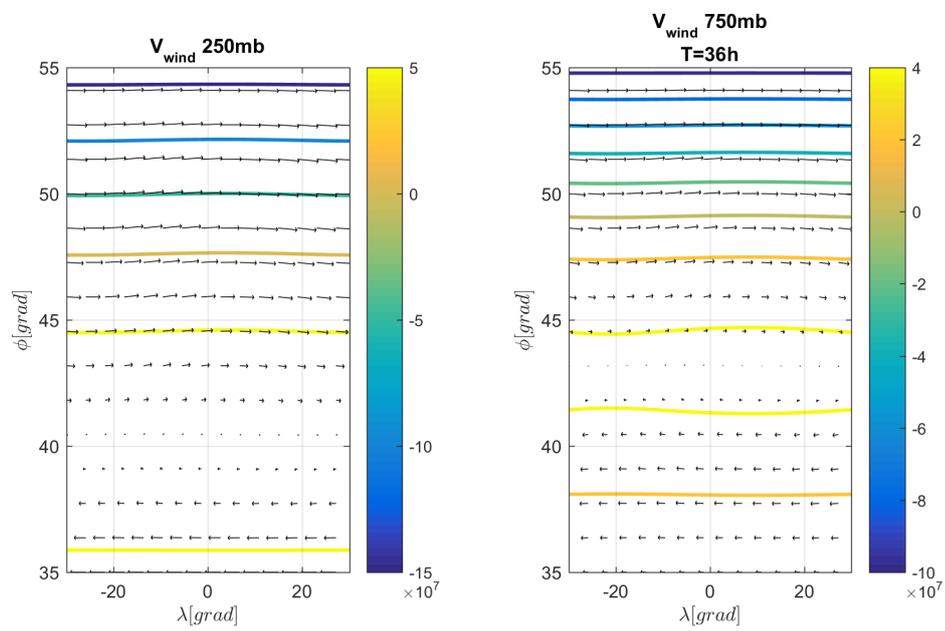


Figura 4.4 Caso anticiclón (36h).

4.1.2 Tendencia de borrascas

De manera contraria, si las condiciones iniciales son todas negativas se da cierta tendencia a la generación de borrascas a corto plazo que se disiparán en el largo plazo, al cabo de unos días.

El desarrollo es mucho más interesante que en el caso del anticiclón, en las primeras horas la distribución de presiones es la contraria, mayores presiones arriba y menores abajo, junto con vientos que se dirigen de este a oeste. Pero en las capas altas de la atmósfera, se puede observar como en pocas horas se empiezan a generar perturbaciones similares a una borrasca que acaban convergiendo en borrascas situadas en el noreste del recinto, que bien no transfunden totalmente hasta las capas más bajas de la atmósfera pero si se se puede observar correlación entre las perturbaciones. Para la figura 4.7 se puede observar en el sur un pequeño indicio de anticiclón, como una pequeña ola que gira en sentido de las agujas del reloj.

A lo largo de las siguientes horas, la borrasca se disipará poco a poco, y este anticiclón se desarrollará hasta generar un escenario similar al que se encontraba en el apartado anterior. Aunque para este caso, aunque el final sea similar conceptualmente, presentando anticiclones en ambas capas de la atmósfera, están mucho mejor desarrollados, es decir tienen mayor tamaño y forma mejor definida; aunque los vientos siguen siendo de pequeña magnitud en los alrededores del centro.

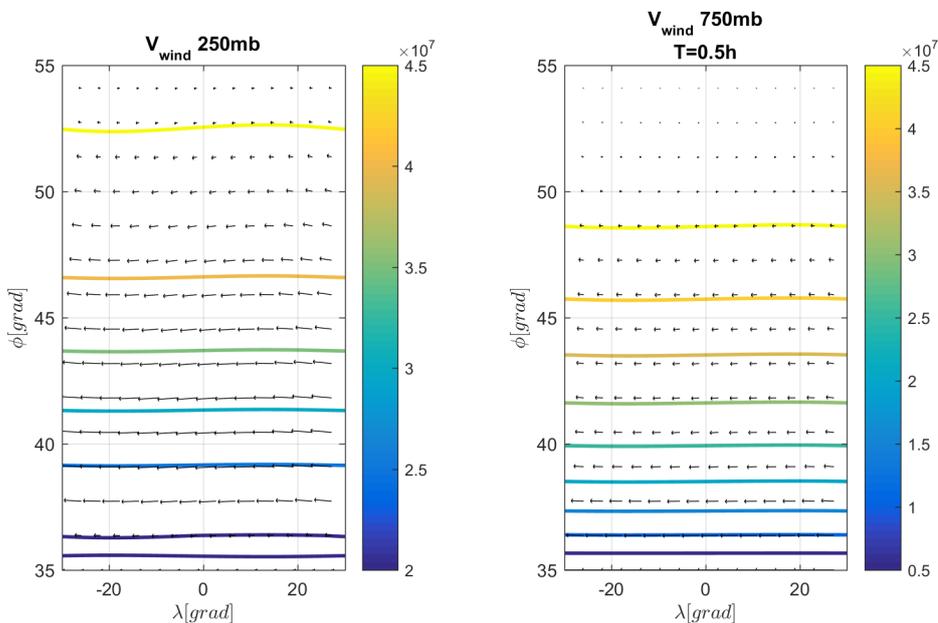


Figura 4.5 Caso borrasca (0.5h).

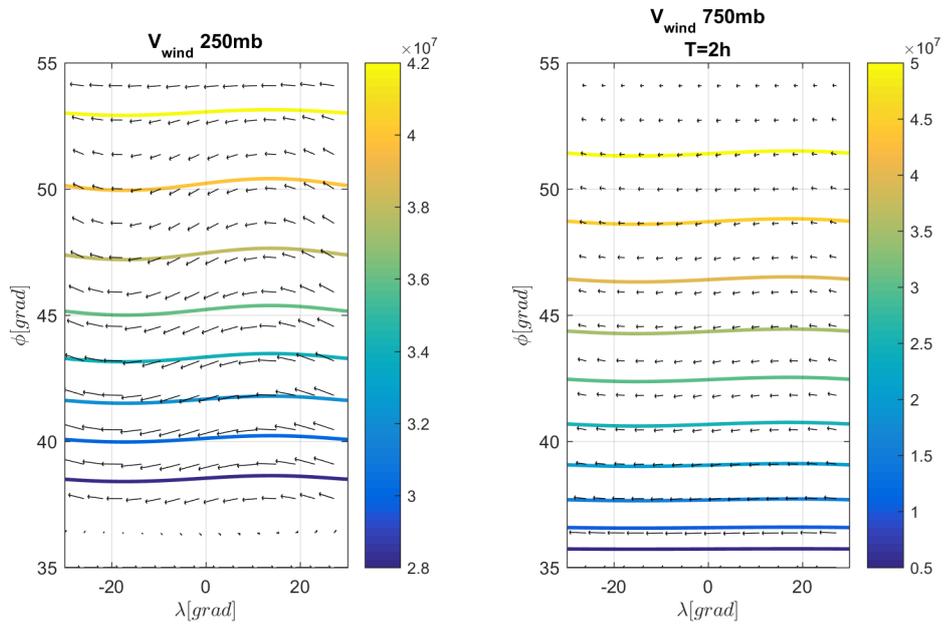


Figura 4.6 Caso borrasca (2h).

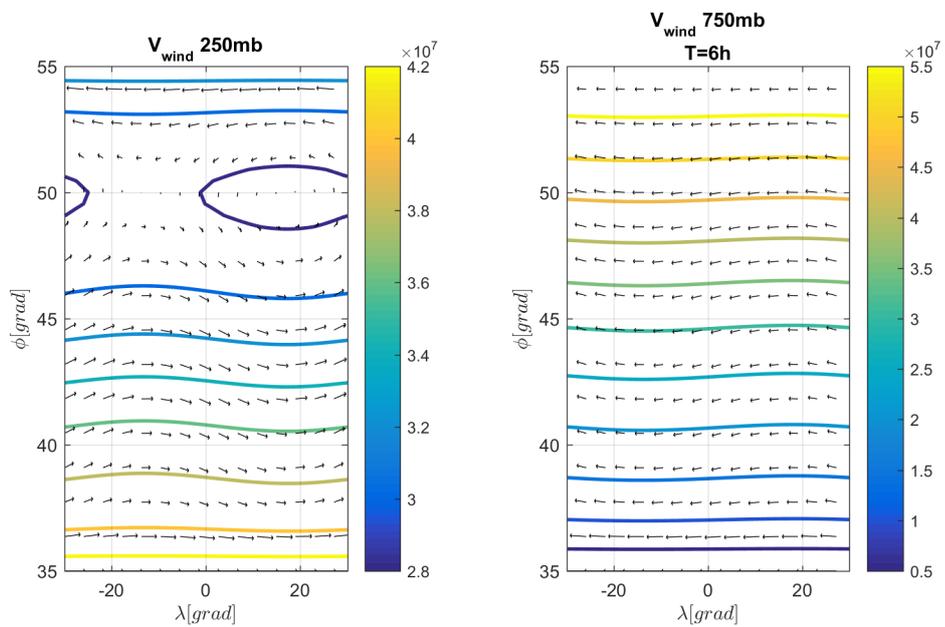


Figura 4.7 Caso borrasca (6h).

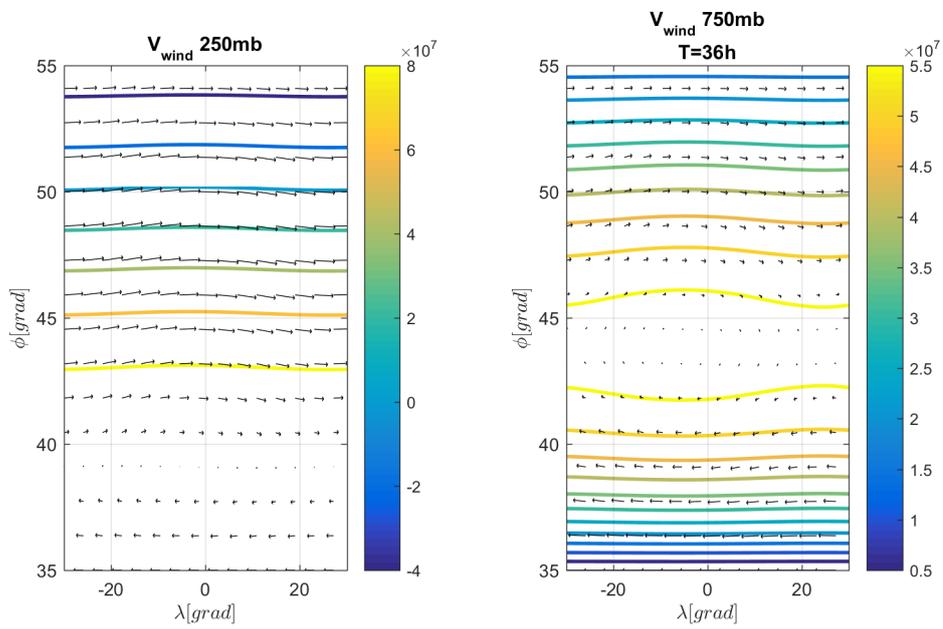


Figura 4.8 Caso borrasca (36h).

4.1.3 Comparativa con el programa original

Dado que Phillips no reflejó en el artículo de referencia por excelencia de este trabajo, "*The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment*", las condiciones iniciales realizar una comparativa exhaustiva de resultados no tiene sentido. Lo que si se puede observar es la similitud entre las tendencias que se encuentran en los resultados.

Se puede observar en la figura 4.9, un fenómeno muy similar al que se encuentra en la figura 4.7, borrascas en la parte noreste del cuadrante, e inicios de formación de anticiclón con menor intensidad. El resto de gráficas mostradas en el artículo original muestran variabilidad similar en cuanto a la forma del campo geopotencial. Las dos principales razones por la que existen discrepancias entre las gráficas calculadas con el programa actual que con el primigéneo son: la no concordancia de las condiciones iniciales empleadas, tanto en magnitud como en distribución, y el hecho de que los saltos de las líneas de contorno no son los mismos.

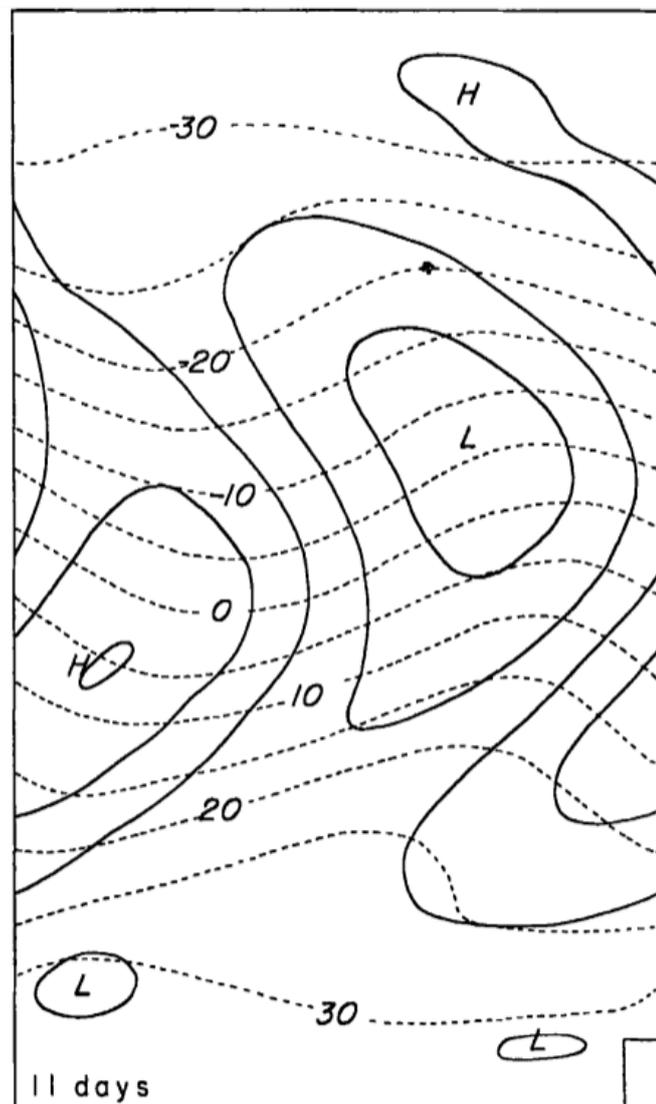


Figure 4. Distribution of 1,000-mb contour height at 200-foot intervals (solid lines) and 500-mb temperature at 5°C intervals (dashed lines) at 11 days. The small rectangle in the lower right corner shows the size of the finite-difference grid intervals Δx and Δy .

Figura 4.9 Gráfica extraída de "*The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment*", Norman A. Phillips 1956.

4.2 Estudio de perturbaciones

Un problema de estudio muy interesante en las simulaciones meteorológicas es la injerencia de la teoría del caos sobre la capacidad de realizar predicciones, dado que pequeñas perturbaciones pueden alterar totalmente la solución final cuanto mayor sea la cantidad de tiempo simulada. Por ello resulta interesante realizar una gran cantidad de simulaciones con diferentes perturbaciones y estimar el tiempo que hará realmente sintetizando estos resultados.

Por ello, se ha incorporado al software la capacidad de sobre un caso base, modificar las condiciones iniciales y así ver como varían los desarrollos. Se presentarán 3 casos distintos partiendo de las condiciones iniciales del apartado 4.1.2, que se mostrarán a continuación.

4.2.1 Caso 1

Para este caso, se modificarán las condiciones de contorno de vorticidad potencial perturbada, reduciendo estos valores a la mitad respecto al caso base.

A simple vista son prácticamente imperceptibles estas diferencias, debido a que por definición, los valores de perturbación son mucho más pequeños que los medios y es por esto, que el desarrollo de los fenómenos viene dado por el caso medio y los fenómenos asociados a este, como era razonable suponer desde un punto de vista matemático. Se puede observar en las isóbaras pequeños cambios en la curvatura respecto al caso original, pero más allá de esto las tendencias son exactamente las mismas y dan valores prácticamente idénticos.

Cabría hacerse la siguiente pregunta entonces, ¿porque el efecto de estas pequeñas perturbaciones sobre el caso perturbado no presentan grandes variaciones en el resultado final como sabemos que sí hace en la naturaleza? Esto se debe a que las ecuaciones están muy simplificadas y el problema se ha hecho prácticamente lineal, cuando en un principio era fuertemente no lineal, por lo que pequeñas perturbaciones no tienen el efecto que deberían. Esto es una limitación del modelo matemático a través del cual se plantea la resolución. El otro problema que pudiera plantearse, sería el hecho de que la simulación ha sido demasiado corta y no ha habido tiempo suficiente para que las soluciones diverjan, pero en los múltiples casos que se han comprobado para ver la estabilidad del programa, las diferencias seguían siendo nimias.

Existe una tendencia muy fuerte por parte del programa a converger a soluciones estables muy parecidas entre sí, por lo que podría resultar más interesante un estudio de perturbaciones sobre el problema perturbado si se diseñara una manera de introducir perturbaciones durante la ejecución. Esta idea es técnicamente fácil de implementar, pero el modelado de la perturbación para que tenga criterio físico es muy complejo por lo que se han descartado este tipo de perturbaciones por esta solución de compromiso más modesta.

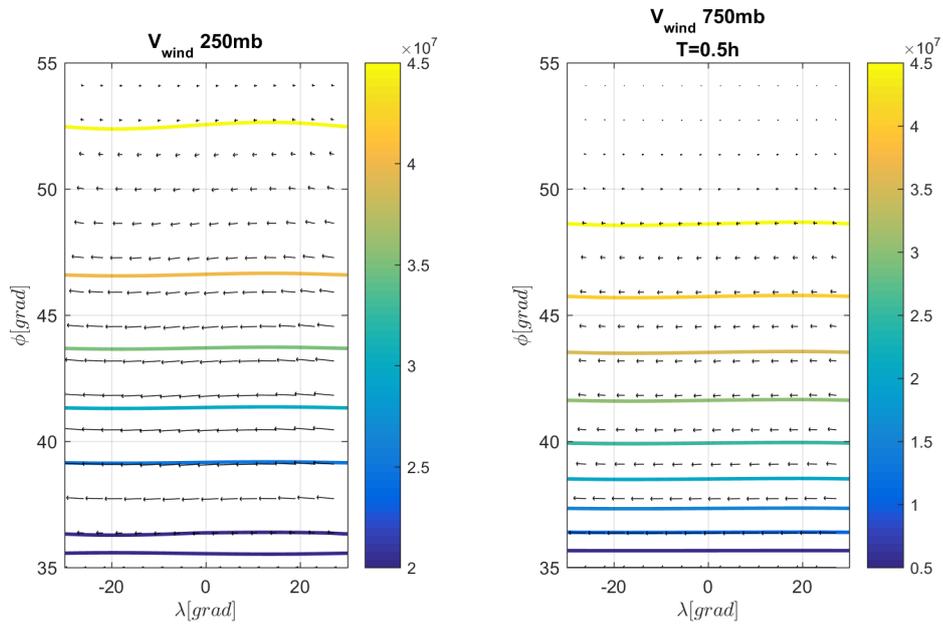


Figura 4.10 Caso perturbado 1 (0.5h).

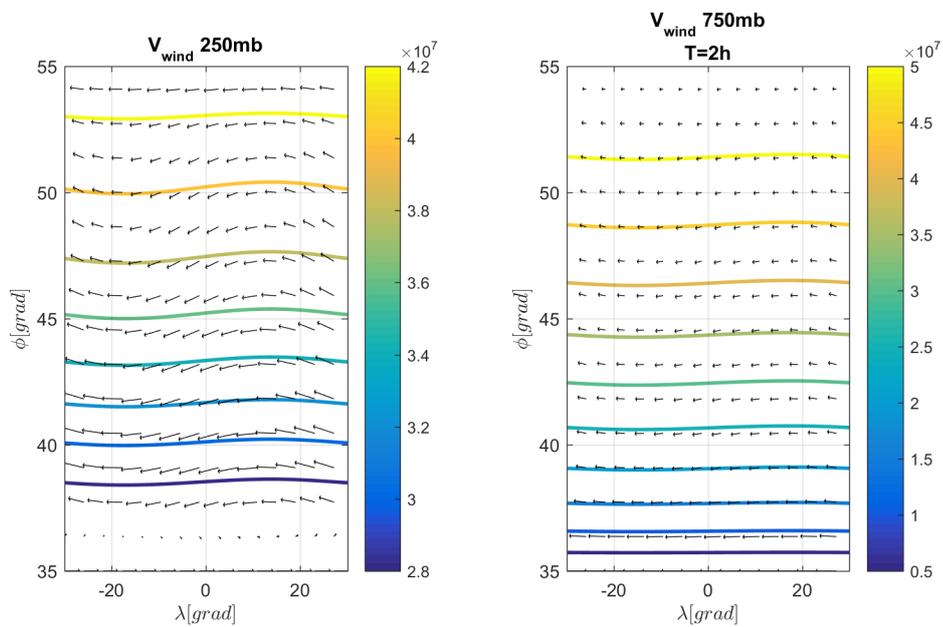


Figura 4.11 Caso perturbado 1 (2h).

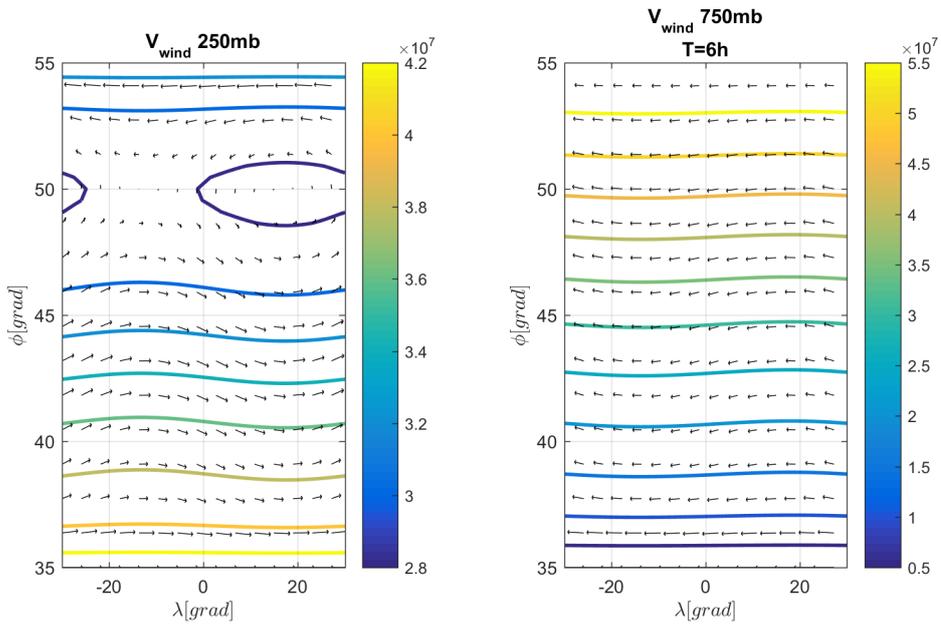


Figura 4.12 Caso perturbado 1 (6h).

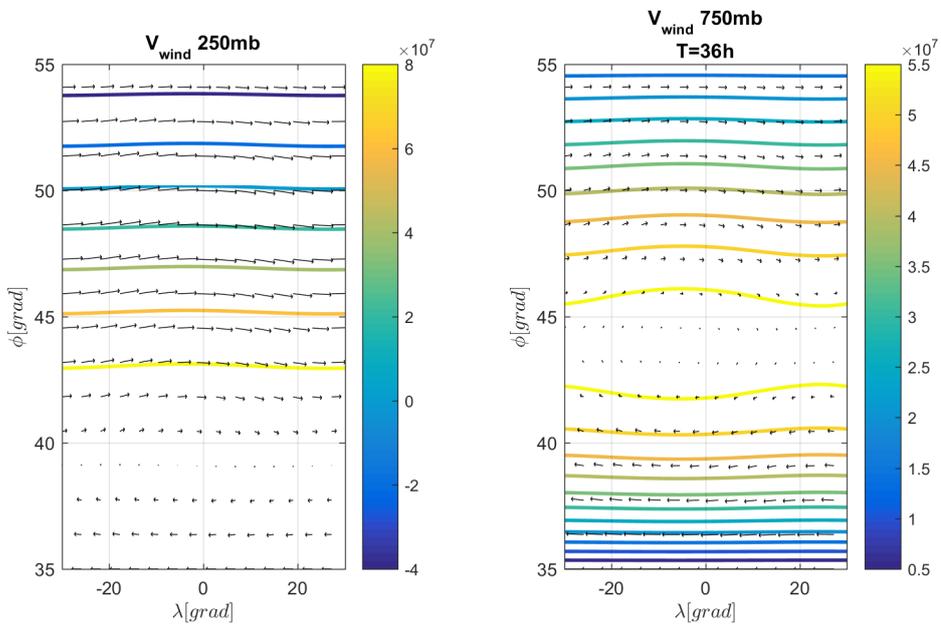


Figura 4.13 Caso perturbado 1 (36h).

4.2.2 Caso 2

Para este caso, las condiciones de contorno asociadas a la vorticidad potencial media se han reducido a la mitad, y en esta ocasión el desarrollo cambia de forma muy notable.

Como en el resto de casos, el principio es muy similar, durante las primeras ejecuciones de la simulación el programa trata de adaptar las vorticidades potenciales a unas que tengan una disposición más física, volviendo a traer a la luz el hecho de que las condiciones de contorno tienen una distribución dada por el generador de números pseudoaleatorios de Matlab.

Pero a partir de las dos horas de simulación se puede observar una gran diferencia respecto del caso original, se han formado dos ciclones, uno de pequeña intensidad arriba y otro de mayor intensidad abajo, en la parte este del recinto. Originalmente, la potencia del ciclón localizado en el sur era tal que ambos conformaban uno solo, mientras que ahora es posible observar como está remansando la parte que conecta ambos. Esto produce que, al cabo de 6 horas desde el comienzo de la simulación, el ciclón que en el caso original estaba bien formado y localizado en el norte, ahora está prácticamente disipado, aunque se pueda seguir observando en la misma localización aproximada. En la parte sur se observa que la dirección del viento ha cambiado de sentido, sentando los precedentes de la generación del anticiclón al que el resto de casos ha tendido a converger.

Nótese que aunque sean muy parecidas en forma las soluciones finales, no son totalmente idénticas, la magnitud de las diferencias de presión cambia, como se puede observar en la leyenda.

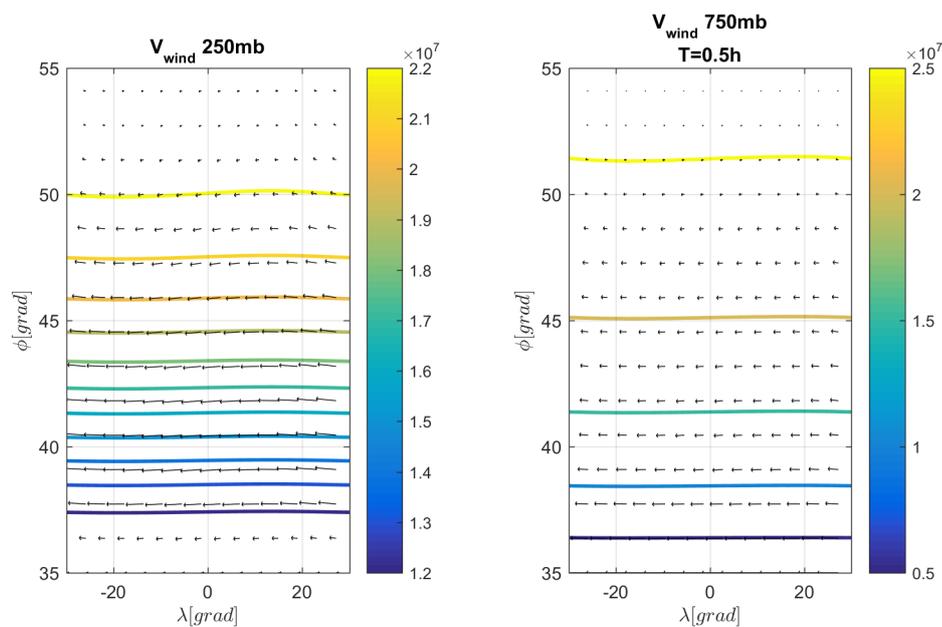


Figura 4.14 Caso perturbado 2 (0.5h).

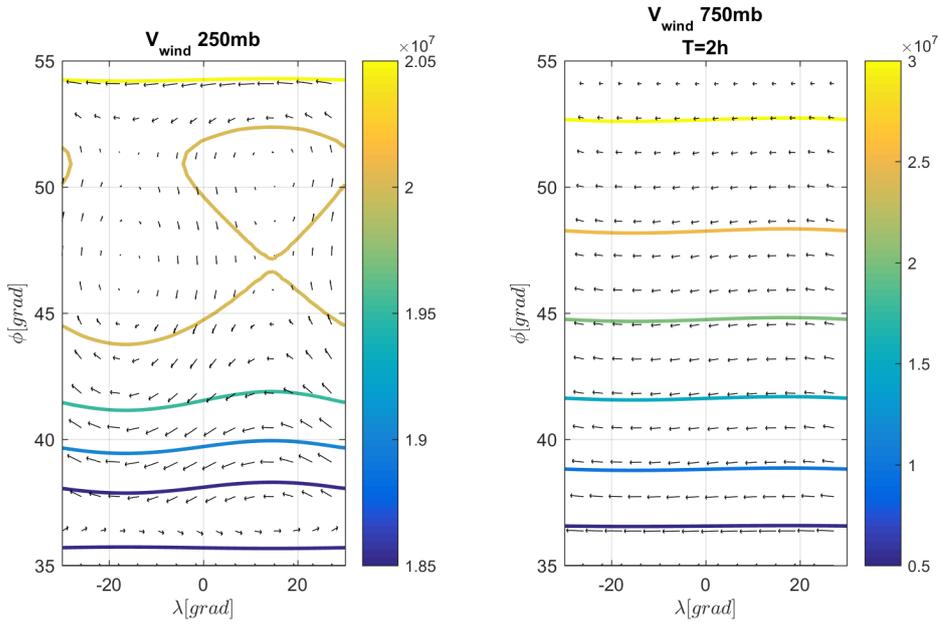


Figura 4.15 Caso perturbado 2 (2h).

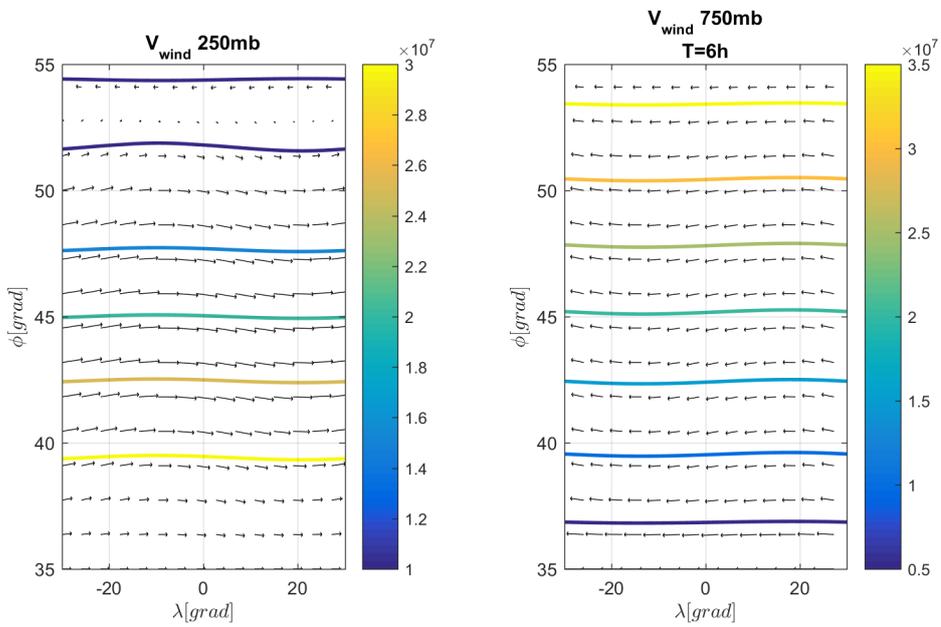


Figura 4.16 Caso perturbado 2 (6h).

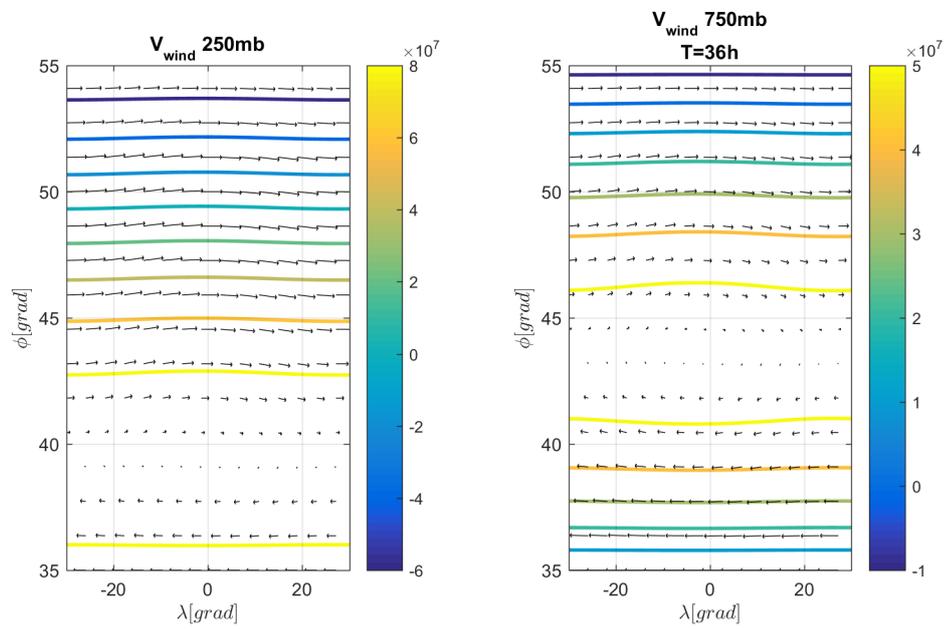


Figura 4.17 Caso perturbado 2 (36h).

4.2.3 Caso 3

Las modificaciones de las condiciones de contorno para este caso serán las opuestas a lo presentado anteriormente, todas las condiciones de contorno en vorticidad potencial serán multiplicadas por diez, tanto para el caso medio como para el perturbado.

Desde los primeros momentos de la ejecución ya se empiezan a notar las diferencias, la escala de la leyenda ha aumentado significativamente, además las isóbaras se ven más distanciadas entre sí y presentan menos curvatura. Como dato adicional, los vientos tienen mayor magnitud para las regiones sur en ambas alturas.

Dos horas después del comienzo del tiempo de la simulación, el ciclón todavía no ha tomado forma pero se puede observar como el campo de vientos señala su posición en el sur en las capas altas de la atmósfera. A las 6 horas, el ciclón ha tomado forma definida y se observa que es de mayor magnitud que en el resto de casos y no se ha desplazado hacia arriba. Además ha conseguido inferir en las capas inferiores de la atmósfera, donde se puede ver su efecto.

Después del transcurso de un día y medio el ciclón se ha desarrollado totalmente en la capa alta de la atmósfera permaneciendo estable de momento, sin terminar de calar del todo en las capas bajas, aunque se puede observar que parece que coexisten indicios de anticiclón y ciclón para una misma latitud. Es curioso observar que la distribución es similar a la del caso del anticiclón pero cambiando de capa en la atmósfera.

De esta pequeña prueba se puede extraer la siguiente conclusión: cambiar el orden de magnitud de las condiciones iniciales, varía significativamente el comportamiento y las tendencias del programa, por lo que se hace una tarea imprescindible el realizar una muy buena estimación de los valores del orden de magnitud de estas, para obtener así obtener datos realistas.

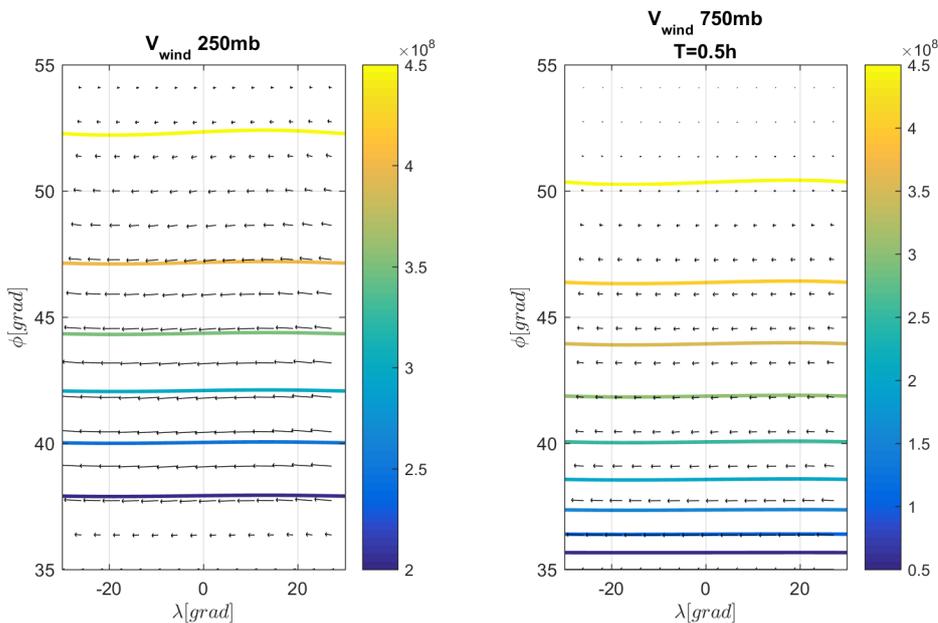


Figura 4.18 Caso perturbado 3 (0.5h).

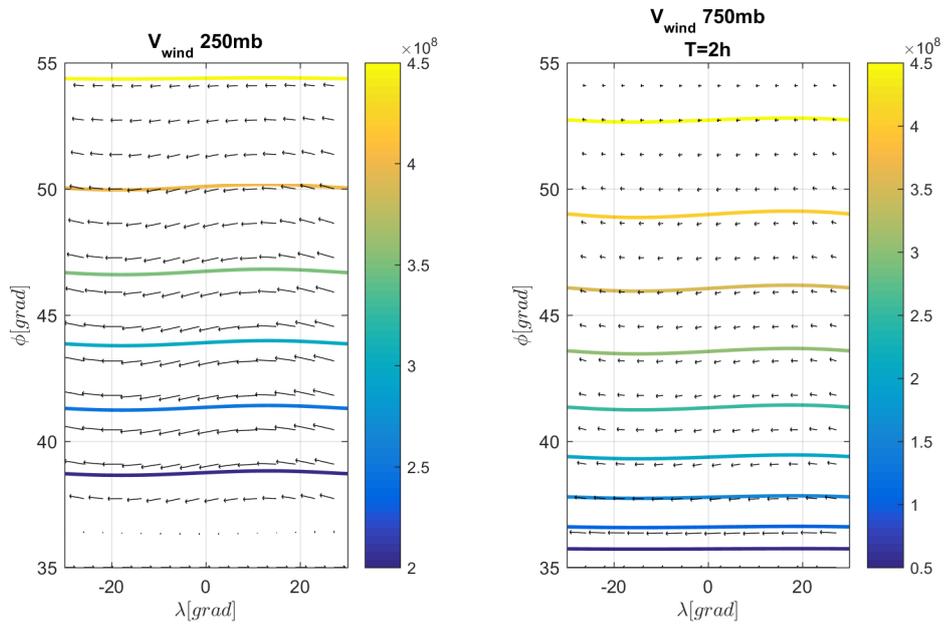


Figura 4.19 Caso perturbado 3 (2h).

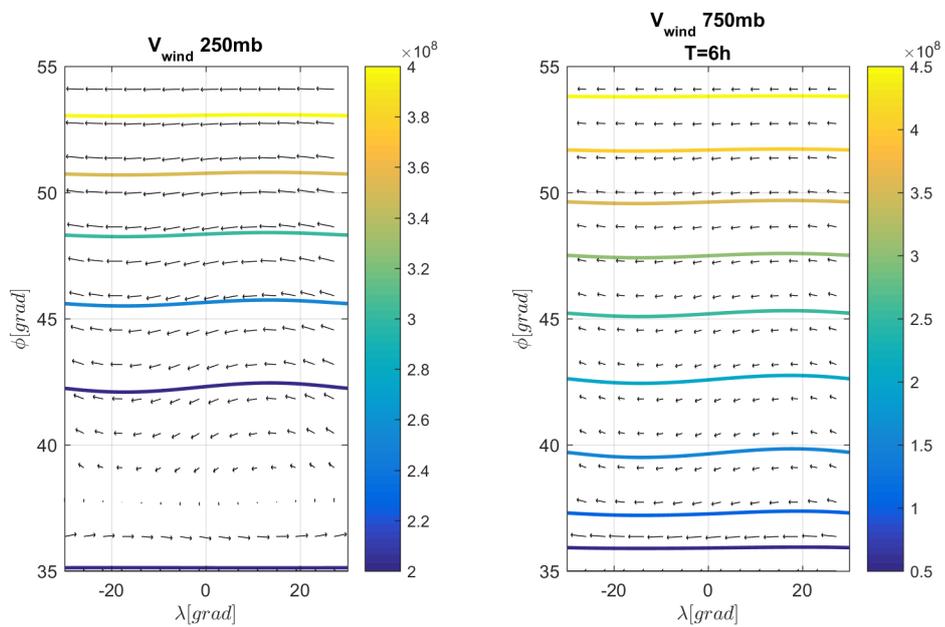


Figura 4.20 Caso perturbado 3 (6h).

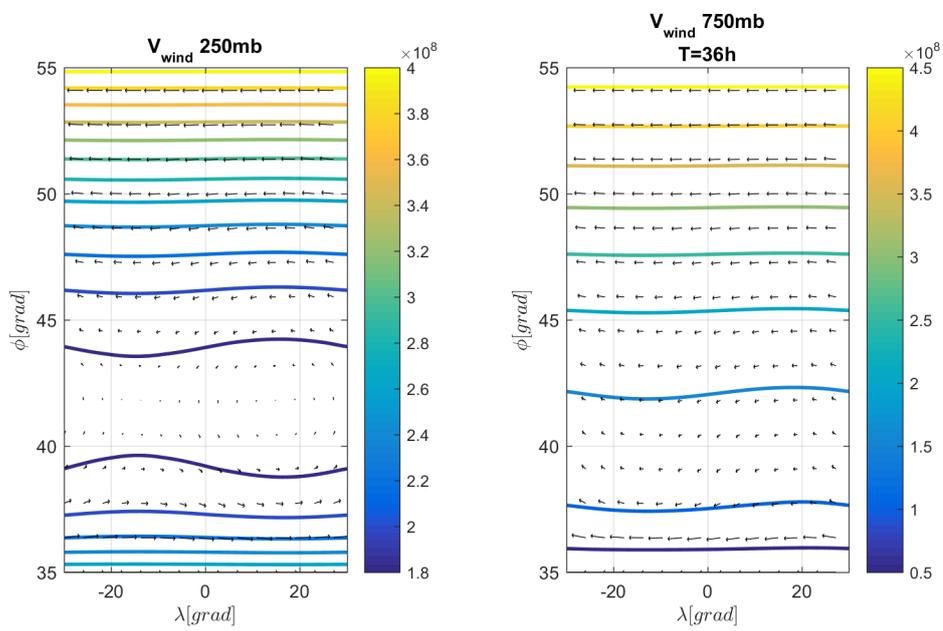


Figura 4.21 Caso perturbado 3 (36h).

5 Conclusiones

5.1 Resultados

La implementación del programa podría decirse que ha sido un éxito, tanto desde el punto de vista técnico, si se compara con el material original en cuanto a resultados como a tiempos de ejecución, y desde el punto de vista de objetivos adicionales a cumplir, el programa es funcional, sencillo de configurar si sabes como hacerlo y tiene una serie de funcionalidades adicionales que permiten su uso para fines académicos.

Pero siendo autocríticos, existen ciertos puntos que podrían añadirse para mejorar tanto el rendimiento del programa como la calidad de los resultados, y serán recogidos aquí como posibles líneas de mejora de cara al futuro.

5.2 Futuras líneas de mejora

En lo referente a posibles añadidos que se pudieran hacer a corto plazo, sería interesante añadir al programa un buen modelo de atmósfera que permitiera plotear líneas de contorno con saltos concretos de presión respecto a la referencia, dando resultados algo más visuales.

La velocidad de ejecución del programa mejoraría significativamente si se emplearan métodos estadísticos para resolver las ecuaciones, especialmente para los mallados muy finos. Aunque con el nivel de detalle actual de los efectos modelados en las ecuaciones sería un sinsentido, por lo que la relajación de ciertas hipótesis, especialmente en las condiciones de contorno y modelado de efectos, aumentaría la calidad de los resultados en mayor medida. El empleo de modelos atmosféricos multicapa implicaría añadir una gran capa de complejidad al cálculo pero sería más realista en lo que a obtención de buenos resultados se refiere.

Suponiendo que se mantiene casi al completo la base de todo lo realizado, sería interesante el diseño de una *API*, Interfaz de Programación de Aplicaciones, para hacer muchísimo más accesible la configuración del programa respecto a como está ahora mismo, que es la solución más cómoda que se puede plantear manteniendo un equilibrio entre funcionalidad y sencillez, empleando puro código.

Conectar el programa a través de la interfaz anteriormente planteada con datos reales de estaciones meteorológicas empleando herramientas de Big Data sería una mejora increíble, aunque para ello habría que tomar modelos de atmósfera más fáciles de conectar con datos medibles en la vida real. Además habría que mejorar las condiciones del mallado y localizar las estaciones y asociarlas a las distintas zonas. Si esto se pudiera realizar, si se realizaran cientos de estudios de perturbaciones cotejados y mejorados usando el algoritmo de Kalman, podrían obtenerse resultados muy certeros, casi al nivel de softwares profesionales.

Apéndice A

Código

En este capítulo se recopila todo el código que hace funcionar el programa, si este quiere ejecutarse, es absolutamente necesario que todas estas funciones se encuentren dentro del mismo directorio dónde se ejecute el programa. Se adjunta un código QR y un enlace mediante los cuales se puede acceder a un archivo que contiene todos los códigos contenidos en este capítulo, para mayor comodidad y accesibilidad para el lector.

[Clickar en esta línea para obtener el enlace de acceso al código \(Sólo ordenadores\).](#)



Figura A.1 QR.

A.1 Código principal

A.1.1 Programa interfaz

Código A.1 MAIN_maincode.m.

```
1 %Código principal
2
3 clc
4 clear all
5 %% Nombre del proyecto
6 name='prueba1';
```

```

7
8 %% Modo de ejecución
9 % El programa se va a ejecutar de:
10 % 0) forma normal (0) o
11 % 1) estudio de perturbaciones (1)
12 modo=1;
13 EXTRAEGRAF=1;%Si se quieren sacar las gráficas 1, si no 0
14 % Se está calculando el caso base ('B') o los perturbados ('P')
15 modopert='P';
16
17 nameaux=strcat(name,'_', 'B');
18 name=strcat(name,'_', modopert);
19
20 % Por si se quieren comparar varios casos a partir del base,
21 %   entrada   solo numérica!!!!
22
23 if strcmp(modopert, 'P')
24     %numero del caso de estudio, cambiar a mano para evitar
25     %sobreescritura!!!
26     numejec=2;
27     vmod=[1 1 0.25 2];%Parámetros de modificación de las variables de
28     %entrada [etapr1,etapr3,etamed1,etamed3]
29     name=strcat(name,num2str(numejec));
30 end
31
32 %% Arranque programa
33 data.M=45;
34 data.N=45;
35 data.paso=floor(data.M/15);%para que no se solapen las flechas que
36 %muestran los vientos
37 %Geometría tierra
38 data.phicent=45;%[grados]
39 data.deltaphitot=20;%amplitud del arco que recorre de y=-W a y=W
40 data.deltalongtot=60;%amplitud del arco que va de x=0 y x=L
41 ndivlong=360/data.deltalongtot;
42
43 deltat=450; %[s]
44 Rt=6.371e6;%Radio de la _Tierra en m
45
46 deltax=2*pi*cos(data.phicent/180*pi)*Rt/(data.N-1)/ndivlong;
47 deltay=pi*Rt*data.deltaphitot/180*pi/(data.M-1);
48
49
50 %Vector TIEMPO
51 days=10;%numero de días a simular!!!
52 vecT=0:deltat:(days*24*3600);
53

```

```

54
55
56 %Todos los datos están SI
57 Omega=7.26*1e-5;
58 f0=2*Omega*sin(data.phicent/180*pi);
59 lambdacuad=1.5e-12*(f0/1e-4)^2;%Valor escalado del empleado por Phillips
    [1/m^2]
60 A=10^8;
61 beta=1.6e-11;%[1/(ms)]
62 R=287;
63 H=2e-3;
64 cp=1004;
65
66 %introduciendo los valores en la estructura de datos
67 data.f0=f0;
68 data.deltax=deltax;
69 data.deltay=deltay;
70 data.deltat=deltat;
71 data.epsilon=deltax/deltay;
72 data.gamma=lambdacuad*deltax^2;
73 data.alpha=A*deltat/deltax^2;
74 data.b=beta*deltax^2*deltay;
75 data.c=deltat/(2*deltax*deltay);
76 data.h=4*R*H*data.gamma*deltat/(f0*cp);
77 data.k=4e-6;
78
79
80 %% Condiciones iniciales
81 %Inicialización datos aleatorios || generación primer n
82 %Discriminación según modo de ejecución
83
84 if modo==0
85 n.etapr1=(rand(data.M*data.N,1)-0.5*ones(data.M*data.N,1))*2*10;
86 n.etapr3=(rand(data.M*data.N,1)-0.5*ones(data.M*data.N,1))*2*1000;
87 n.etamed1=-rand(data.M,1)*1000;
88 n.etamed3=-rand(data.M,1)*100000;
89 elseif modo==1
90     if strcmp('B',modopert)
91         n.etapr1=(rand(data.M*data.N,1)-0.5*ones(data.M*data.N,1))*2*10;
92         n.etapr3=(rand(data.M*data.N,1)-0.5*ones(data.M*data.N,1))*2*1000;
93         n.etamed1=-rand(data.M,1)*1000;
94         n.etamed3=-rand(data.M,1)*100000;
95
96         nombreach=strcat('VAR_',name,'.mat');
97         save(nombreach,'n');
98
99
100     elseif strcmp('P',modopert)
101         nombreach=strcat('VAR_',nameaux,'.mat');
102         load(nombreach)

```

```
103 %TRANSFORMACIONES PERTINENTES
104 n.etapr1=n.etapr1.*vmod(1);
105 n.etapr3=n.etapr3.*vmod(2);
106 n.etamed1=n.etamed1.*vmod(3);
107 n.etamed3=n.etamed3.*vmod(4);
108 %
109
110 %Por si se quiere guardat
111     titulo=strcat('VAR_',num2str(umejec),'_',name,'.mat');
112     save(titulo,'n');
113 end
114 end
115
116 %% !!Extracción de gráficas!!
117 contadorfig=1;
118 tmuestreo=[1 2 4 8 24 36 48];%Tiempo en horas para los cuales se quiere
    sacar gráficas
119 fingraf=0; %esta es una variable bandera para que el programa no saque
    gráficas cuando se hayan sacado las necesarias
120
121
122 %% Todo los inputs del programa se modifican por encima de esta línea,
123 %no tocar abajo salvo que se quiera modificar la ejecución del programa
124
125 %% Comienzo ejecución de los cálculos
126
127 %Calculo psis
128 [psipr1,psipr3]=resuelve_psipr(n.etapr1,n.etapr3,data);
129 [psimed1,psimed3]=resuelve_psimed(n.etamed1,n.etamed3,data);
130
131 %Conversión para crear estructuras de datos que simplifiquen el avance
    temporal
132
133 [psipr1mat,psipr3mat,etapr1mat,etapr3mat]=conviertematrizmaspr(psipr1,
    psipr3,n.etapr1,n.etapr3,data);
134
135
136
137 %se espera que pr entre en forma de matriz y med en forma de vector
138
139 pr.psipr1=psipr1mat;
140 pr.psipr3=psipr3mat;
141 pr.etapr1=etapr1mat;
142 pr.etapr3=etapr3mat;
143
144
145 %los med se pasaran a matriz dentro de la función avancetemp
146 med.etamed1=n.etamed1;
147 med.etamed3=n.etamed3;
148 med.psimed1=psimed1;
```

```

149 med.psimed3=psimed3;
150 n.psimed1=psimed1;
151 n.psimed3=psimed3;
152
153 %Avance temp%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
154
155 [tp] = avancetemplin(pr,med,data);
156
157 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%55
158
159 %Generados los valores de entrada
160 %Nomenclatura: sin nada--> tau-1, tp--> tau,f-->tau+1
161 %OJO NO OLVIDAR PASARLOS A vector
162 %todo lo que sale de tp es matricial para avance lineal
163 [tp.etapr1tp,tp.etapr3tp,~,~]=desmat1(tp.etapr1tp,tp.etapr3tp,tp.
    etapr1tp,tp.etapr1tp,data);
164
165 [tp.etamed1tp,tp.etamed3tp,~,~]=desmat2(tp.etamed1tp,tp.etamed3tp,tp.
    etamed3tp,tp.etamed3tp,data);
166
167 %Para evitar que se computen soluciones inestables
168 INEST=0;
169
170 for i=1:length(vecT)
171     tic
172     %% Ejecución estática
173     %primas
174     [tp.psipr1tp,tp.psipr3tp]=resuelve_psipr(tp.etapr1tp,tp.etapr3tp,data);
175     %media
176     [tp.psimed1tp,tp.psimed3tp]=resuelve_psimed(tp.etamed1tp,tp.etamed3tp,
        data);
177
178     %% Ejecución dinámica
179     %n tiempo pasado, tp tiempo presente, f tiempo futuro
180     [f,MAT1,MAT2,bpr]=avancetempcuad(n,tp,data);
181
182
183     % a3=f.etapr1f;
184     % a4=f.etapr3f;
185     %
186     % [M3]=conviertematriz(a3,data);
187     % [M4]=conviertematriz(a4,data);
188
189
190     %% Actualización datos
191     %posiblemente la salida de avancetempcuad sea vectorial por lo que no
        harán
192     %falta correcciones seguramente
193     % las etas usadas pasan a pasado, eliminandose las antiguas
194     n.etapr1=tp.etapr1tp;

```

```
195 n.etapr3=tp.etapr3tp;
196
197 n.etamed1=tp.etamed1tp;
198 n.etamed3=tp.etamed3tp;
199
200 %Convertir futuro a presente
201 tp.etapr1tp=f.etapr1f;
202 tp.etapr3tp=f.etapr3f;
203
204 tp.etamed1tp=f.etamed1f;
205 tp.etamed3tp=f.etamed3f;
206
207 %Para trazar comparativas
208 n.psimed1=tp.psimed1tp;
209 n.psimed3=tp.psimed3tp;
210
211 ploteapsi(tp,vecT(i),data);
212 INEST=mapavientos(tp,vecT(i),data);
213
214
215 %Estas líneas de código son de una versión alpha de un detector de
216 %inestabilidad, funciona bien cuando las condiciones iniciales son
    livianas
217 %y no se producen corrientes de aire muy grandes. Para grandes
218 %desarrollos da muchos falsos positivos.
219
220 %Si se quiere modificar
221
222 % var=vecT(i);
223 % if INEST==1
224 %     aviso = msgbox(strcat('Sistema inestable. T_{error}=',num2str(var
        /3600),'h'), 'Error','error');
225 %     break
226 % end
227
228
229 % Para extraer figuras en la carpeta Resultados de los distintos
    momentos que se pidan
230
231 if vecT(i)>=tmuestreo(contadorfig)*3600 && fingraf==0 && EXTRAEGRAF==1
232
233 tiempo=strcat(num2str(tmuestreo(contadorfig)-mod(tmuestreo(contadorfig)
    ,1)),',',num2str(mod(tmuestreo(contadorfig),1)*100));
234
235
236 figure(1)
237 fig = gcf;
238 base=5;
239 res=1920/1080;
240 fig.PaperUnits = 'inches'; fig.PaperPosition = [0 0 base*res base];
```

```
241 print(strcat('FIG_',name,'_',tiempo,'h'), '-dpng','-r200')
242
243 contadorfig=contadorfig+1;
244
245 if contadorfig==length(tmuestreo)
246 contadorfig=contadorfig-1;
247 fingraf=1;
248 end
249
250 end
251
252 %Descomentar la línea inferior si se quiere tener un seguimientos de los
253 %tiempos de computación
254
255 % t1=toc
256
257 % break
258 end
```

A.1.2 Avance temporal

Código A.2 avancetempcuad.m.

```
1 function [f,MATpr,MATmed,bpr]=avancetempcuad(n,tp,data)
2 %% Cálculo de las primas
3 %calculo etapr1
4 MATpr=generaMATpr(1,data);
5 bpr=generabpr(n,tp,1,data);
6 f.etapr1f=MATpr\bpr;
7
8 %calculo etapr3
9 MATpr=generaMATpr(3,data);
10 bpr=generabpr(n,tp,3,data);
11 f.etapr3f=MATpr\bpr;
12
13
14 %% Cálculo de las medias
15 %cálculo etamed1
16 MATmed=generaMATmed(1,data);
17 bmed=generabmed(n,tp,1,data);
18 f.etamed1f=MATmed\bmed;
19
20 %cálculo etamed3
21 MATmed=generaMATmed(3,data);
22 bmed=generabmed(n,tp,3,data);
23 f.etamed3f=MATmed\bmed;
24
25 end
26 function MATpr=generaMATpr(modoejec,data)
```

```
27 %% Datos
28 M=data.M;
29 N=data.N;
30
31 %% Cálculo
32 MATpr=zeros(M*N,M*N);
33
34 %llamada al generador de filas
35 for i=2:M-1
36 for j=2:N-1
37 I=(i-1)*N+j;
38 MATpr(I,:)=generafilpr(i,j,modoejec,data);
39 end
40 end
41 %% Condiciones de contorno
42 %Condición de contorno cíclica
43
44 for i=2:M-1
45 %Continuidad valores
46 j=1;
47 I=(i-1)*N+j;
48
49 MATpr(I,(i-1)*N+1)=1;
50 MATpr(I,i*N)=-1;
51
52 %Continuidad derivada
53
54 j=N;
55 I=(i-1)*N+j;
56
57 MATpr(I,(i-1)*N+1)=-1;
58 MATpr(I,(i-1)*N+2)=1;
59 MATpr(I,(i-1)*N+N)=-1;
60 MATpr(I,(i-1)*N+N-1)=1;
61
62 end
63
64 %Valores nulos en la parte superior e inferior
65
66 for j=1:N
67 i=1;
68 I=(i-1)*N+j;
69 MATpr(I,I)=1;
70
71 i=M;
72 I=(i-1)*N+j;
73 MATpr(I,I)=1;
74
75 end
76
```

```
77 end
78 function fila=generafilpr(i,j,modoejec,data)
79 %% Datos
80 M=data.M;
81 N=data.N;
82 epsilon=data.epsilon;
83 alpha=data.alpha;
84 k=data.k;
85 deltat=data.deltat;
86
87 fila=zeros(1,M*N);
88
89 if modoejec==1
90 mu=1;
91 elseif modoejec==3
92 mu=1+3*k*deltat/2;
93 end
94
95 fila(1,(i-1)*N+j)=2*alpha*(1+epsilon^2)+mu;
96 fila(1,(i-2)*N+j)=-alpha*epsilon^2;
97 fila(1,i*N+j)=-alpha*epsilon^2;
98 fila(1,(i-1)*N+j-1)=-alpha;
99 fila(1,(i-1)*N+j+1)=-alpha;
100
101 end
102
103 function bpr=generabpr(n,tp,modoejec,data)
104 %% Datos
105 M=data.M;
106 N=data.N;
107
108 b=data.b;
109 c=data.c;
110 alpha=data.alpha;
111 h=data.h;
112 gamma=data.gamma;
113 %% Generación vectores
114 vecb=zeros(M*N,1);
115 vecQ=zeros(M*N,1);
116 for i=1:M
117 for j=1:N
118 I=(i-1)*N+j;
119
120 vecb(I)=b*(M-i);
121 vecQ(I)=h*(h*(2*i-1-M))/(1-M);
122
123 end
124 end
125
```

```
126 [psimed1aux,psimed3aux,~,~]=vecvert2mat(tp.psimed1tp,tp.psimed3tp,tp.
    psimed3tp,tp.psimed3tp,data);
127
128 if modoejec==1
129
130 bpr=n.etapr1+c.*jacobvec(vecb+tp.etapr1tp,psimed1aux,'pr',data)+alpha.*
    lapvec(n.etapr1,'pr',data)+0*vecQ;
131 elseif modoejec==3
132
133 bpr=n.etapr3+c.*jacobvec(vecb+tp.etapr3tp,psimed3aux,'pr',data)+alpha.*
    lapvec(n.etapr3,'pr',data)-0*vecQ+data.k*data.deltat.*(1.5*n.etapr3-
    tp.etapr1tp-4*gamma.*(tp.psipr1tp-tp.psipr3tp));
134
135 end
136
137 %% Condiciones de contorno
138 %%Condición de contorno cíclica
139
140 for i=2:M-1
141 %Continuidad valores
142 j=1;
143 I=(i-1)*N+j;
144 bpr(I)=0;
145
146 %Continuidad derivada
147 j=N;
148 I=(i-1)*N+j;
149 bpr(I)=0;
150 end
151
152 %Valores nulos en la parte superior e inferior
153
154 for j=1:N
155 i=1;
156 I=(i-1)*N+j;
157 bpr(I)=0;
158
159 i=M;
160 I=(i-1)*N+j;
161 bpr(I)=0;
162 end
163
164 end
165
166 function MATmed=generaMATmed(modoejec,data)
167 %% Datos
168 M=data.M;
169
170 MATmed=zeros(M);
171 %% Cálculo
```

```
172
173 for i=2:M-1
174 MATmed(i,:)=generafilmed(i,modoejec,data);
175 end
176
177 %% Condiciones de contorno
178 %Igualdad por arriba
179 MATmed(1,1)=1;
180 MATmed(1,2)=-1;
181
182 %Igualdad por abajo
183 MATmed(M,M-1)=1;
184 MATmed(M,M)=-1;
185
186 end
187
188 function fila=generafilmed(i,modoejec,data)
189 %% Datos
190 M=data.M;
191 k=data.k;
192 deltat=data.deltat;
193 epsilon=data.epsilon;
194 alpha=data.alpha;
195
196 %% Generación fila
197 fila=zeros(1,M);
198
199 if modoejec==1
200 mu=1;
201 elseif modoejec==3
202 mu=1+3*k*deltat/2;
203 end
204
205 fila(1,i)=2*alpha*epsilon^2+mu;
206 fila(1,i-1)=-alpha*epsilon^2;
207 fila(1,i+1)=-alpha*epsilon^2;
208
209 end
210
211 function bmed=generabmed(n,tp,modoejec,data)
212 %% Datos
213 M=data.M;
214
215 b=data.b;
216 c=data.c;
217 alpha=data.alpha;
218 h=data.h;
219 gamma=data.gamma;
220
221 %% Cálculo
```

```

222 vecb=zeros(M,1);
223 vecQ=zeros(M,1);
224
225 for i=1:M
226   vecb(i)=b*(M-i);
227   vecQ(i)=h*(h*(2*i-1-M))/(1-M);
228 end
229
230 if modoejec==1
231   bmed=n.etamed1+c.*jacobvec(vecb+tp.etamed1tp,tp.psimed1tp,'med',data)+
       alpha.*lapvec(n.etamed1,'med',data)+vecQ;
232 elseif modoejec==3
233   bmed=n.etamed3+c.*jacobvec(vecb+tp.etamed3tp,tp.psimed3tp,'med',data)+
       alpha.*lapvec(n.etamed3,'med',data)-vecQ+data.k*data.deltat.*(1.5*n.
       etamed3-tp.etamed1tp-4*gamma.*(tp.psimed1tp-tp.psimed3tp));
234 end
235
236 %% Condiciones de contorno
237 bmed(1)=0;
238 bmed(M)=0;
239
240 end
241
242 function Jvec=jacobvec(Rvec,Svec,modo,data)
243 M=data.M;
244 N=data.N;
245 J=zeros(M,N);
246
247 if strcmp(modo,'pr')
248   [R,S,~,~]=conviertematrizmaspr(Rvec,Svec,Rvec,Rvec,data);
249 elseif strcmp(modo,'med')
250   [R,S,~,~]=vecvert2mat(Rvec,Svec,Svec,Svec,data);
251 end
252
253 for i=1:M
254   for j=1:N
255     if i>1 && i<M && j>1 && j<N %Interior
256       J(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i+1,j))-(R(i-1,j)-R(i+1,j))*(
         S(i,j+1)-S(i,j-1)));
257     elseif i==1 && j>1 && j<N %Parte superior
258       J(i,j)=2*((R(i,j+1)-R(i,j-1))*(S(i,j)-S(i+1,j))-(R(i,j)-R(i+1,j))*(S
         (i,j+1)-S(i,j-1)));
259
260     elseif i==M && j>1 && j<N %Parte inferior
261       J(i,j)=2*((R(i,j+1)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i,j))-(R(i-1,j)-R(i,j))*(
         S(i,j+1)-S(i,j-1)));
262
263     elseif j==1 && i>1 && i<M %Parte izquierda
264       J(i,j)=2*((R(i,j+1)-R(i,j))*(S(i-1,j)-S(i+1,j))-(R(i-1,j)-R(i+1,j))
         *(S(i,j+1)-S(i,j)));

```

```

265
266     elseif j==N && i>1 && i<M %Parte derecha
267     J(i,j)=2*((R(i,j)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i+1,j))-
                (R(i-1,j)-R(i+1,j))
                *(S(i,j)-S(i,j-1)));
268
269     elseif i==1 && j==1 %Esq sup izq
270     J(i,j)=4*((R(i,j+1)-R(i,j))*(S(i,j)-S(i+1,j))-
                (R(i,j)-R(i+1,j))*(S(i,
                j+1)-S(i,j)));
271
272     elseif i==1 && j==N %Esq sup der
273     J(i,j)=4*((R(i,j)-R(i,j-1))*(S(i,j)-S(i+1,j))-
                (R(i,j)-R(i+1,j))*(S(i,
                j)-S(i,j-1)));
274
275     elseif i==M && j==1 %Esq inf izq
276     J(i,j)=4*((R(i,j+1)-R(i,j))*(S(i-1,j)-S(i,j))-
                (R(i-1,j)-R(i,j))*(S(i,
                j+1)-S(i,j)));
277
278     elseif i==M && j==N %Esq sup der
279     J(i,j)=4*((R(i,j)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i,j))-
                (R(i-1,j)-R(i,j))*(S(i,
                j)-S(i,j-1)));
280
281     end
282
283 end
284 end
285
286 if strcmp(modos,'pr')
287 [Jvec,~,~,~]=desmat1(J,J,J,J,data);
288 elseif strcmp(modos,'med')
289 [Jvec,~,~,~]=desmat2(J,J,J,J,data);
290 end
291
292 end
293
294 function Lvec=lapvec(Svec,modos,data)
295 M=data.M;
296 N=data.N;
297 epsilon=data.epsilon;
298
299 if strcmp(modos,'pr')
300 [S]=conviertematriz(Svec,data);
301 elseif strcmp(modos,'med')
302 [S,~,~,~]=vecvert2mat(Svec,Svec,Svec,Svec,data);
303 end
304
305 L=zeros(M,N);
306
307 for i=2:M-1
308 for j=2:N-1

```

```

309 L(i,j)=S(i,j+1)+S(i,j-1)-2*S(i,j)+epsilon^2*(S(i+1,j)+S(i-1,j)-2*S(i,j))
      ;
310 end
311 end
312
313 L(2:(M-1),1)=L(2:(M-1),2);%lat izq
314 L(2:(M-1),N)=L(2:(M-1),N-1);%lat der
315
316 L(1,1:N)=L(2,1:N);%lat sup con esq
317 L(M,1:N)=L(M-1,1:N);%lat inf con esq
318
319
320 if strcmp(modos,'pr')
321 [Lvec,~,~,~]=desmat1(L,L,L,L,data);
322 elseif strcmp(modos,'med')
323 [Lvec,~,~,~]=desmat2(L,L,L,L,data);
324 end
325
326 end

```

Código A.3 avancetemplin.m.

```

1 function [tp] = avancetemplin(pr,med,data)
2 %% Comentarios
3 %pr se espera que se meta como matriz y med como vector(se corregirá en
   su apartado)
4 %
5 %% Ajuste datos
6 M=data.M;
7 N=data.N;
8 b=data.b;
9 c=data.c;
10 alpha=data.alpha;
11 h=data.h;
12 gamma=data.gamma;
13 k=data.k;
14 deltat=data.deltat;
15
16 etap1=pr.etapr1;
17 etap3=pr.etapr3;
18 psip1=pr.psipr1;
19 psip3=pr.psipr3;
20
21 etamed1=med.etamed1;
22 etamed3=med.etamed3;
23 psimed1=med.psimed1;
24 psimed3=med.psimed3;
25
26 %% Generación valores auxiliares

```

```

27
28 bmat=zeros(M,N);
29 for i=1:M
30 bmat(i,:)=(b*(M-i)).*ones(1,N);
31 end
32
33 Qmat=zeros(M,N);
34
35 for i=1:M
36 Qmat(i,:)=(h*(2*i-1-M)/(1-M)).*ones(1,N);
37 end
38
39 %% Cálculo de las primas
40 %eta1tp es el de presente
41
42 %0* son añadidos para corregir el cálculo
43 [psimed1aux,psimed3aux,~,~]=vecvert2mat(psimed1,psimed3,psimed3,psimed3,
    data);
44 etapr1tp=etapr1+c/2.*jacob(bmat+etapr1,psimed1aux,data)+alpha.*Lap(
    etapr1,data)+0*0.5.*Qmat;
45
46 etapr3tp=etapr3+c/2.*jacob(bmat+etapr3,psimed3aux,data)+alpha.*Lap(
    etapr3,data)-0*0.5.*Qmat -(k*deltat/2).*(3*etapr3-etapr1-4*gamma*(
    psipr1-psipr3));
47
48 %% Cálculo de las medias
49
50 [etamed1,etamed3,psimed1,psimed3]=vecvert2mat(etamed1,etamed3,psimed1,
    psimed3,data);
51
52 etamed1tp=etamed1+c/2.*jacob(bmat+etamed1,psimed1,data)+alpha.*Lap(
    etamed1,data)+0.5.*Qmat;
53
54 etamed3tp=etamed3+c/2.*jacob(bmat+etamed3,psimed3,data)+alpha.*Lap(
    etamed3,data)-0.5.*Qmat -(k*deltat/2).*(3*etamed3-etamed1-4*gamma.*(
    psimed1-psimed3));
55
56 %% Extracción resultados
57
58 tp.etapr1tp=etapr1tp;
59 tp.etapr3tp=etapr3tp;
60 tp.etamed1tp=etamed1tp;
61 tp.etamed3tp=etamed3tp;
62 %OJO salen como matrices todas
63 end
64
65
66 function J=jacob(R,S,data)
67 M=data.M;
68 N=data.N;

```

```

69 J=zeros(M,N);
70
71 for i=1:M
72 for j=1:N
73     if i>1 && i<M && j>1 && j<N %Interior
74         J(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i+1,j))-
(R(i-1,j)-R(i+1,j))*(S(i,j+1)-S(i,j-1)));
75     elseif i==1 && j>1 && j<N %Parte superior
76         J(i,j)=2*((R(i,j+1)-R(i,j-1))*(S(i,j)-S(i+1,j))-
(R(i,j)-R(i+1,j))*(S(i,j+1)-S(i,j-1)));
77
78     elseif i==M && j>1 && j<N %Parte inferior
79         J(i,j)=2*((R(i,j+1)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i,j))-
(R(i-1,j)-R(i,j))*(S(i,j+1)-S(i,j-1)));
80
81     elseif j==1 && i>1 && i<M %Parte izquierda
82         J(i,j)=2*((R(i,j+1)-R(i,j))*(S(i-1,j)-S(i+1,j))-
(R(i-1,j)-R(i+1,j))*(S(i,j+1)-S(i,j)));
83
84     elseif j==N && i>1 && i<M %Parte derecha
85         J(i,j)=2*((R(i,j)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i+1,j))-
(R(i-1,j)-R(i+1,j))*(S(i,j)-S(i,j-1)));
86
87     elseif i==1 && j==1 %Esq sup izq
88         J(i,j)=4*((R(i,j+1)-R(i,j))*(S(i,j)-S(i+1,j))-
(R(i,j)-R(i+1,j))*(S(i,j+1)-S(i,j)));
89
90     elseif i==1 && j==N %Esq sup der
91         J(i,j)=4*((R(i,j)-R(i,j-1))*(S(i,j)-S(i+1,j))-
(R(i,j)-R(i+1,j))*(S(i,j)-S(i,j-1)));
92
93     elseif i==M && j==1 %Esq inf izq
94         J(i,j)=4*((R(i,j+1)-R(i,j))*(S(i-1,j)-S(i,j))-
(R(i-1,j)-R(i,j))*(S(i,j+1)-S(i,j)));
95
96     elseif i==M && j==N %Esq sup der
97         J(i,j)=4*((R(i,j)-R(i,j-1))*(S(i-1,j)-S(i,j))-
(R(i-1,j)-R(i,j))*(S(i,j)-S(i,j-1)));
98
99     end
100
101 end
102 end
103
104 end
105
106 function L=Lap(S,data)
107
108 M=data.M;
109 N=data.N;

```

```

110 epsilon=data.epsilon;
111 L=zeros(M,N);
112
113 for i=2:M-1
114 for j=2:N-1
115 L(i,j)=S(i,j+1)+S(i,j-1)-2*S(i,j)+epsilon^2*(S(i+1,j)+S(i-1,j)-2*S(i,j))
        ;
116 end
117 end
118
119 L(2:(M-1),1)=L(2:(M-1),2);%lat izq
120 L(2:(M-1),N)=L(2:(M-1),N-1);%lat der
121
122 L(1,1:N)=L(2,1:N);%lat sup con esq
123 L(M,1:N)=L(M-1,1:N);%lat inf con esq
124
125 end

```

A.1.3 Código de las gráficas

Código A.4 ploteapsi.m.

```

1 function ploteapsi(tp,tact,data)
2 %% Procesado preliminar
3 %Extraccion data
4 %phicent=data.phicent;
5 M=data.M;
6 N=data.N;
7 %Preparado datos
8 [psimed1,psimed3,~,~]=vecvert2mat(tp.psimed1tp,tp.psimed3tp,tp.psimed3tp
    ,tp.psimed3tp,data);
9 [psipr1,psipr3,~,~]=conviertematrizmaspr(tp.psipr1tp,tp.psipr3tp,tp.
    psipr3tp,tp.psipr3tp,data);
10
11 %Preparado mallado
12 phicent=data.phicent;
13 deltaphimed=data.deltaphitot/2;
14 deltalongmed=data.deltalongtot/2;
15
16 phi=linspace(-deltaphimed+phicent,deltaphimed+phicent,M);
17 lambda=linspace(-deltalongmed,deltalongmed,N);
18
19 [PHI,LAMBDA]=meshgrid(phi,lambda);
20
21 texto=strcat('T=',num2str(tact/3600),'h');
22
23 % ojo que v debería estar invertido, aunque se ha revisado que sea
24 % coherente la lógica de posición, es decir, arriba norte, izquierda
    oeste

```

```

25
26 %% Ploteos
27 figure(1)
28 subplot(1,2,1);
29
30 MAT=psimed1+psipr1;
31 MAT=MAT';
32 [~,B]=size(MAT);
33
34 contour(LAMBDA,PHI,MAT(:,B:-1:1),'LineWidth',2);
35
36 title('\psi_{1}')
37 xlabel('\lambda [grad]$', 'Interpreter','latex')
38 ylabel('\phi [grad]$', 'Interpreter','latex')
39 grid on
40 colorbar
41
42 hold on
43
44 subplot(1,2,2);
45
46 MAT=psimed3+psipr3;
47 MAT=MAT';
48 [~,B]=size(MAT);
49 contour(LAMBDA,PHI,MAT(:,B:-1:1),'LineWidth',2);
50
51 title( {'\psi_{3}',texto})
52 xlabel('\lambda [grad]$', 'Interpreter','latex')
53 ylabel('\phi [grad]$', 'Interpreter','latex')
54 grid on
55 colorbar
56
57 hold on
58 end

```

Código A.5 mapavientos.m.

```

1 function INEST=mapavientos(tp,tact,data)
2 %% Extracción de datos
3 M=data.M;
4 N=data.N;
5 paso=data.paso;
6
7 %Criterio que determina cuan grande debe ser un viento puntual respecto
  de
8 %la media para considerar que la solución se ha inestabilizado
9 limest=5.5;
10
11 %Datos geométricos

```

```

12 phicent=data.phicent;
13 deltaphimed=data.deltaphitot/2;
14 deltalongmed=data.deltalongtot/2;
15 phi=linspace(-deltaphimed+phicent,deltaphimed+phicent,M);
16 lambda=linspace(-deltalongmed,deltalongmed,N);
17
18 [PHI,LAMBDA]=meshgrid(phi,lambda);
19
20 texto=strcat('T=',num2str(tact/3600),'h');
21
22 INEST=0;
23
24 %% Procesado
25 [psipr1,psipr3,~,~]=conviertematrizmaspr(tp.psipr1tp,tp.psipr3tp,tp.
    psipr1tp,tp.psipr1tp,data);
26 [psimed1,psimed3,~,~]=vecvert2mat(tp.psimed1tp,tp.psimed3tp,tp.psimed1tp
    ,tp.psimed1tp,data);
27
28 %% Vientos 1
29 [MATx,MATy]=psitovent(psipr1+psimed1,data);
30
31 figure(1)
32 subplot(1,2,1);
33
34 MATx=MATx';
35 MATy=MATy';
36
37 [A,B]=size(MATx);
38 [C,D]=size(LAMBDA);
39
40 % quiver(LAMBDA(1:pasos:C,1:pasos:D),PHI(1:pasos:C,1:pasos:D),MATx(1:pasos:A,
    B:-pasos:1),MATy(1:pasos:A,B:-pasos:1),'AutoScale','on','
    AutoScaleFactor',1.1,'MaxHeadSize',0.0075,'Color',[0 0 0]);
41 quiver(LAMBDA(1:pasos:C,1:pasos:D),PHI(1:pasos:C,1:pasos:D),MATx(1:pasos:A,B
    :-pasos:1),MATy(1:pasos:A,B:-pasos:1),'AutoScale','on','AutoScaleFactor
    ',1.1,'MaxHeadSize',0.015,'Color',[0 0 0]);
42
43 title('V_{wind} 250mb')
44 xlabel('$\lambda$ [grad]$','Interpreter','latex')
45 ylabel('$\phi$ [grad]$','Interpreter','latex')
46 grid on
47 axis([-deltalongmed deltalongmed -deltaphimed+phicent deltaphimed+
    phicent])
48
49 %Comprobación inestabilidad
50 MATMAG=sqrt(MATx.^2+MATy.^2);
51 MEDMAT=sum(sum(MATMAG))/(A*B);
52
53 vec=zeros(A*B,1);
54 for i=1:A

```

```

55     for j=1:B
56         vec((i-1)*A+j)=MATMAG(i,j)/MEDMAT;
57 if MATMAG(i,j)>limest*MEDMAT
58     INEST=1;
59     break
60     break
61 end
62     end
63 end
64
65 %% Vientos 3
66 [MATx,MATy]=psitovent(psipr3+psimed3,data);
67
68 hold off
69
70 subplot(1,2,2);
71
72 MATx=MATx';
73 MATy=MATy';
74
75
76 quiver(LAMBDA(1:paso:C,1:paso:D),PHI(1:paso:C,1:paso:D),MATx(1:paso:A,B
       :-paso:1),MATy(1:paso:A,B:-paso:1),'AutoScale','on','AutoScaleFactor
       ',1.1,'MaxHeadSize',0.015,'Color',[0 0 0]);
77
78 title({'V_{wind} 750mb',texto})
79 xlabel('\lambda [grad]$','Interpreter','latex')
80 ylabel('\phi [grad]$','Interpreter','latex')
81 grid on
82 axis([-deltalongmed deltalongmed -deltaphimed+phicent deltaphimed+
       phicent])
83
84 %Comprobación inestabilidad
85 MATMAG=sqrt(MATx.^2+MATy.^2);
86 MEDMAT=sum(sum(MATMAG))/(A*B);
87
88 vec=zeros(A*B,1);
89 for i=1:A
90     for j=1:B
91         vec((i-1)*A+j)=MATMAG(i,j)/MEDMAT;
92 if MATMAG(i,j)>limest*MEDMAT
93     INEST=1;
94     break
95     break
96 end
97     end
98 end
99
100 pause(0.001)
101

```

```
102 hold off
103 end
104
105 function [vx,vy]=psitovent(R,data)
106 M=data.M;
107 N=data.N;
108 vx=zeros(M,N);
109 vy=zeros(M,N);
110 deltax=data.deltax;
111 deltay=data.deltay;
112
113
114 for i=1:M
115 for j=1:N
116
117     if i>1 && i<M && j>1 && j<N %Interior
118     vx(i,j)=- (R(i-1,j)-R(i+1,j))/(2*deltay);
119     vy(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j-1))/(2*deltax);
120     elseif i==1 && j>1 && j<N %Parte superior
121     vx(i,j)=- (R(i,j)-R(i+1,j))/(deltay);
122     vy(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j-1))/(2*deltax);
123     elseif i==M && j>1 && j<N %Parte inferior
124     vx(i,j)=- (R(i-1,j)-R(i,j))/(deltay);
125     vy(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j-1))/(2*deltax);
126     elseif j==1 && i>1 && i<M %Parte izquierda
127     vx(i,j)=- (R(i-1,j)-R(i+1,j))/(2*deltay);
128     vy(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j))/(deltax);
129     elseif j==N && i>1 && i<M %Parte derecha
130     vx(i,j)=- (R(i-1,j)-R(i+1,j))/(2*deltay);
131     vy(i,j)=(R(i,j)-R(i,j-1))/(deltax);
132     elseif i==1 && j==1 %Esq sup izq
133     vx(i,j)=- (R(i,j)-R(i+1,j))/(deltay);
134     vy(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j))/(deltax);
135     elseif i==1 && j==N %Esq sup der
136     vx(i,j)=- (R(i,j)-R(i+1,j))/(deltay);
137     vy(i,j)=(R(i,j)-R(i,j-1))/(deltax);
138     elseif i==M && j==1 %Esq inf izq
139     vx(i,j)=- (R(i-1,j)-R(i,j))/(deltay);
140     vy(i,j)=(R(i,j+1)-R(i,j))/(deltax);
141     elseif i==M && j==N %Esq sup der
142     vx(i,j)=- (R(i-1,j)-R(i,j))/(deltay);
143     vy(i,j)=(R(i,j)-R(i,j-1))/(deltax);
144     end
145
146 end
147 end
148
149 end
```

A.1.4 Cálculo de la función geopotencial

Código A.6 resuelve_psimed.m.

```

1 %programa que debería servir para resolver el problema de cálculo de
2 %psimedia
3
4 %data debe incluir al menos:
5 %-el número de divisiones del mallado (M,N)
6 %-relación x/y (epsilon)
7 %-cte gamma
8
9 %etamed es la vorticidad total en forma vectorial, vector columna "PONER
    UNO PARA ETAPR1 Y ETAPR3"
10
11
12 function [psimed1,psimed3]=resuelve_psimed(etamed1,etamed3,data)
13 M=data.M;
14 MAT=generaMAT_psipr(data);
15
16 %%
17
18     %calculo de SUMA
19     b=generab(etamed1,etamed3,data);
20     psicombi=MAT\b;
21
22
23
24 psisum=psicombi(1:M);
25 psires=psicombi(M+1:2*M);
26
27 psimed1=(psisum+psires)/2;
28 psimed3=(psisum-psires)/2;
29 %para debugg
30 % psimed3(1)
31 % psimed3(2)
32 end
33
34 function fila=filagen_psimed(i,tipo,data)
35 gamma=data.gamma;
36 epsilon=data.epsilon;
37 M=data.M;
38
39 fila=zeros(1,2*M);
40
41 if strcmp(tipo,'S')
42 fila(1,i)=-2*epsilon^2;
43 elseif strcmp(tipo,'R')
44 fila(1,i)=-2*epsilon^2-2*gamma;

```

```

45 end
46
47 fila(1,i-1)=epsilon^2;
48 fila(1,i+1)=epsilon^2;
49 end
50
51 function MAT=generaMAT_psipr(data)
52 %% Generación matriz de cálculo
53 %A lo largo de la iteración epsilon y gamma permanecen constantes por lo
54 %que la matriz debe permanecer igual, así se ahorra el tener que
    resolver
55 %varias veces el mismo bucle
56 M=data.M;
57
58 MAT=zeros(2*M);
59
60 %Condición de contorno
61 %a) mismos valores contorno superior psimed1
62 MAT(1,1)=1;
63 MAT(1,M+1)=1;
64 MAT(1,2)=-1;
65 MAT(1,M+2)=-1;
66 %b)mismos valores contorno inferior psimed1
67 MAT(M,M-1)=1;
68 MAT(M,2*M-1)=1;
69 MAT(M,M)=-1;
70 MAT(M,2*M)=-1;
71 %c)mismos valores contorno superior psimed3
72 MAT(M+1,1)=1;
73 MAT(M+1,M+1)=-1;
74 MAT(M+1,2)=-1;
75 MAT(M+1,M+2)=1;
76
77 %d)mismos valores contorno inferior psimed3
78 %probar a imponer derivada continua||se ha implementado derivada segunda
79 %nula
80 % MAT(2*M-1,M-1)=1;
81 % MAT(2*M-1,2*M-1)=-1;
82 % MAT(2*M-1,M)=-1;
83 % MAT(2*M-1,2*M)=1;
84
85 %se ha impuesto derivada segunda nula pero no ha funcionado para imponer
86 %continuidad der
87 MAT(2*M-1,M)=1;
88 MAT(2*M-1,2*M)=-1;
89 MAT(2*M-1,M-1)=-2;
90 MAT(2*M-1,2*M-1)=2;
91 MAT(2*M-1,M-2)=1;
92 MAT(2*M-1,2*M-2)=-1;
93

```

```

94 %e)psimed3=0
95 MAT(2*M,M)=1;
96 MAT(2*M,2*M)=-1;
97
98 tipo='S';
99 for i=2:M-1
100 MAT(i,:)=filagen_psimed(i,tipo,data);
101 end
102
103 tipo='R';
104
105 for i=M+2:2*M-2
106 MAT(i,:)=filagen_psimed(i,tipo,data);
107 end
108
109 end
110
111 function b=generab(etamed1,etamed3,data)
112 M=data.M;
113
114 b(:,1)=etamed1(:)+etamed3(:);
115 b(M+1:2*M)=etamed1(:)-etamed3(:);
116 b(1)=0;
117 b(M)=0;
118 b(M+1)=0;
119 b(2*M)=0;
120
121
122 b(2*M-1)=0;
123 end

```

Código A.7 resuelve_psipr.m.

```

1 %programa que debería servir para resolver el problema de cálculo de
2 %psiprima
3
4 %data debe incluir al menos:
5 %-el número de divisiones del mallado (M,N)
6 %-relación x/y (epsilon)
7 %-cte gamma
8
9 %etapr es la vorticidad en forma vectorial, vector columna "PONER UNO
   PARA ETAPR1 Y ETAPR3"
10 %psipr3it debe entrar en forma de vector columna
11
12 function [psipr1,psipr3]=resuelve_psipr(etapr1,etapr3,data)
13
14 MATS=generaMAT_psipr('S',data);
15 MATR=generaMAT_psipr('R',data);

```

```

16 %%
17
18 %calculo de SUMA
19 b=generab(etapr1+etapr3,data);
20 psisum=MATS\b;
21
22 %calculo de RESTA
23 b=generab(etapr1-etapr3,data);
24
25 psires=MATR\b;
26
27
28 psipr1=(psisum+psires)/2;
29 psipr3=(psisum-psires)/2;
30
31 end
32
33 function fila=filagen_psipr(i,j,tipo,data)
34 gamma=data.gamma;
35 epsilon=data.epsilon;
36 M=data.M;
37 N=data.N;
38
39 %fila vacía de base
40 fila=zeros(1,M*N);
41
42 %Las siguientes ecuaciones implementan el laplaciano por  $\Delta x^2$  de
    psipr y añaden
43 %gamma
44 %Implican las influencias de unas partes del mallado con otras
45
46 %Las sumas de MAT son para evitar que se sobrescriban daatos en la
    matriz
47 if strcmp(tipo,'S')
48 fila(1,(i-1)*N+j)=-2*(1+epsilon^2);
49 elseif strcmp(tipo,'R')
50 fila(1,(i-1)*N+j)=-2*(1+epsilon^2)-2*gamma;
51 end
52
53 fila(1,(i-2)*N+j)=epsilon^2;
54 fila(1,i*N+j)=epsilon^2;
55 fila(1,(i-1)*N+j-1)=1;
56 fila(1,(i-1)*N+j+1)=1;
57 end
58
59 function MAT=generaMAT_psipr(tipo,data)
60 %% Generación matriz de cálculo
61 %A lo largo de la iteración epsilon y gamma permanecen constantes por lo
62 %que la matriz debe permanecer igual, así se ahorra el tener que
    resolver

```

```
63 %varias veces el mismo bucle
64
65 M=data.M;
66 N=data.N;
67
68 MAT=zeros(M*N);
69
70 %Condición de contorno superior e inferior
71 for j=1:N
72 i=1;
73 I=(i-1)*N+j;
74 MAT(I,I)=1;
75
76 i=M;
77 I=(i-1)*N+j;
78 MAT(I,I)=1;
79 end
80
81 %Condición de contorno cíclica
82 for i=2:M-1
83 j=1;
84 I=(i-1)*N+j;
85 MAT(I,(i-1)*N+1)=1;
86 MAT(I,(i-1)*N+N)=-1;
87
88 j=N;
89 I=(i-1)*N+j;
90 MAT(I,(i-1)*N+2)=-1;
91 MAT(I,(i-1)*N+1)=1;
92 MAT(I,(i-1)*N+N)=1;
93 MAT(I,(i-1)*N+N-1)=-1;
94
95 end
96
97 %Programa que implementa el resto de relaciones, derivadas de los
98 %operadores
99 for i=2:(M-1)
100     for j=2:N-1
101
102 I=(i-1)*N+j;
103 MAT(I,:)=filagen_psipr(i,j,tipo,data);
104
105     end
106 end
107
108 end
109
110 function b=generab(etapr,data)
111 M=data.M;
112 N=data.N;
```

```
113
114 b=zeros(M*N,1);
115
116 b(:)=etapr(:);
117
118 %Condiciones de contorno
119 for i=2:M-1
120 %Condición contorno continuidad cíclica
121 I=(i-1)*N+1;
122 b(I)=0;
123
124 %Condición de contorno continuidad derivada
125 I=(i-1)*N+N;
126 b(I)=0;
127
128 end
129
130 for j=1:N
131 I=j;
132 b(I)=0;
133
134 I=(M-1)*N+j;
135 b(I)=0;
136
137 end
138
139 end
```

A.2 Código auxiliar

Estos son programas que sirven para realizar operaciones de transformación de las variables para adaptarlas según sea necesario.

Código A.8 `conviertematriz.m`.

```
1 function [mat]=conviertematriz(vec,data)
2 M=data.M;
3 N=data.N;
4 mat=zeros(M,N);
5 for i=1:M
6 for j=1:N
7 I=(i-1)*N+j;
8
9     mat(i,j)=vec(I);
10
11 end
12 end
13 end
```

Código A.9 `conviertematrizmaspr.m`.

```
1 function [M1,M2,M3,M4]=conviertematrizmaspr(V1,V2,V3,V4,data)
2 M=data.M;
3 N=data.N;
4 M1=zeros(M,N);
5 M2=zeros(M,N);
6 M3=zeros(M,N);
7 M4=zeros(M,N);
8
9 for i=1:M
10 for j=1:N
11 I=(i-1)*N+j;
12 M1(i,j)=V1(I);
13 M2(i,j)=V2(I);
14 M3(i,j)=V3(I);
15 M4(i,j)=V4(I);
16 end
17 end
18 end
```

Código A.10 `desmat1.m`.

```
1 function [V1,V2,V3,V4] = desmat1(MAT1,MAT2,MAT3,MAT4,data)
2 M=data.M;
3 N=data.N;
4 V1=zeros(M*N,1);
5 V2=zeros(M*N,1);
6 V3=zeros(M*N,1);
7 V4=zeros(M*N,1);
8
9 for i=1:M
10 for j=1:N
11 I=(i-1)*N+j;
12 V1(I)=MAT1(i,j);
13 V2(I)=MAT2(i,j);
14 V3(I)=MAT3(i,j);
15 V4(I)=MAT4(i,j);
16 end
17 end
18
19 end
```

Código A.11 `desmat2.m`.

```
1 function [V1,V2,V3,V4]=desmat2(M1,M2,M3,M4,data)
2 M=data.M;
3
4 a=length(M1(1,:));
```

```
5 b=length(M2(1,:));
6 c=length(M3(1,:));
7 d=length(M4(1,:));
8
9 V1=zeros(M,1);
10 V2=zeros(M,1);
11 V3=zeros(M,1);
12 V4=zeros(M,1);
13
14 for i=1:M
15 V1(i)=sum(M1(i,:))/a;
16 V2(i)=sum(M2(i,:))/b;
17 V3(i)=sum(M3(i,:))/c;
18 V4(i)=sum(M4(i,:))/d;
19 end
20
21 end
```

Código A.12 vecvert2mat.m.

```
1 function [M1,M2,M3,M4]=vecvert2mat(V1,V2,V3,V4,data)
2 M=data.M;
3 N=data.N;
4 M1=zeros(M,N);
5 M2=zeros(M,N);
6 M3=zeros(M,N);
7 M4=zeros(M,N);
8
9 for i=1:M
10 M1(i,:)=V1(i)*ones(1,N);
11 M2(i,:)=V2(i)*ones(1,N);
12 M3(i,:)=V3(i)*ones(1,N);
13 M4(i,:)=V4(i)*ones(1,N);
14 end
15 end
```


Índice de Figuras

1.1	Sistema de referencia empleado	2
1.2	Equilibrio geostrófico	9
1.3	Onda de Rossby	12
1.4	Generación de ondas por perturbación orográfica	13
2.1	Modelo de atmósfera bicapa	17
2.2	Desarrollo gráfico del dominio	19
3.1	Discretización del dominio	26
3.2	Flowchart-guía del programa	29
3.3	Base del cálculo matricial empleado	31
4.1	Caso anticiclón (0.5h)	46
4.2	Caso anticiclón (2h)	47
4.3	Caso anticiclón (6h)	47
4.4	Caso anticiclón (36h)	48
4.5	Caso borrasca (0.5h)	49
4.6	Caso borrasca (2h)	50
4.7	Caso borrasca (6h)	50
4.8	Caso borrasca (36h)	51
4.9	Gráfica extraída de " <i>The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment</i> ", Norman A. Phillips 1956	52
4.10	Caso perturbado 1 (0.5h)	54
4.11	Caso perturbado 1 (2h)	54
4.12	Caso perturbado 1 (6h)	55
4.13	Caso perturbado 1 (36h)	55
4.14	Caso perturbado 2 (0.5h)	56
4.15	Caso perturbado 2 (2h)	57
4.16	Caso perturbado 2 (6h)	57
4.17	Caso perturbado 2 (36h)	58
4.18	Caso perturbado 3 (0.5h)	59
4.19	Caso perturbado 3 (2h)	60
4.20	Caso perturbado 3 (6h)	60
4.21	Caso perturbado 3 (36h)	61
A.1	QR	65

Índice de Tablas

1.1	Ecuaciones básicas de la MFA	5
1.2	Definiciones de las magnitudes características	7
1.3	Estimación de peso de los términos	8
2.1	Comparativa hardware empleado	15

Índice de Códigos

3.1	Modo debug de ψ'	40
3.2	Modo debug de $\bar{\psi}$	41
A.1	MAIN_maincode.m	65
A.2	avancetempcuad.m	71
A.3	avancetemplin.m	78
A.4	ploteapsi.m	81
A.5	mapavientos.m	82
A.6	resuelve_psimed.m	86
A.7	resuelve_psipr.m	88
A.8	conviertematriz.m	91
A.9	conviertematrizmaspr.m	92
A.10	desmat1.m	92
A.11	desmat2.m	92
A.12	vecvert2mat.m	93

Bibliografía

- [1] George S. Benton and Mariano A. Estoque, *Water-Vapor Transfer over the North American Continent*, **11** (1954), 462.
- [2] J. G. Charney, *Numerical prediction of cyclogenesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences **40** (1954), no. 2, 99.
- [3] Yale Mintz, *Investigations of the General Circulation of the Atmosphere · Contrails*, 1955.
- [4] Norman A. Phillips, *The general circulation of the atmosphere: A numerical experiment*, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society **82** (1956), no. 352, 123–164.
- [5] Victor P. Starr and Richard White, *Studies of the atmospheric general circulation*, V., mar 1966, p. 186.
- [6] Paul Ullrich, (2014). *Youtube: Introduction to Atmosphere Dynamics*. Recuperado de: https://www.youtube.com/channel/UCrm3Nkw_0wPJxjOolmZe5iA.