

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/283901964>

# Mejora de la robustez de controladores LQG/LTR. Aplicación a un sistema multivariable

Article · September 1995

CITATIONS

0

READS

128

2 authors, including:



**Manuel J Lopez**

Universidad de Cádiz

120 PUBLICATIONS 157 CITATIONS

SEE PROFILE

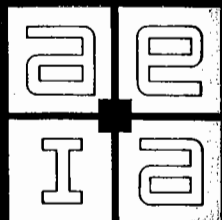
Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



ORPHEO. Optimization and Control of Hybrid Plataforms for Wind Power Generators and Wave Energy Converters [View project](#)



Unmaned surphace marine vehicles control and methods for obstacle avoidance systems [View project](#)



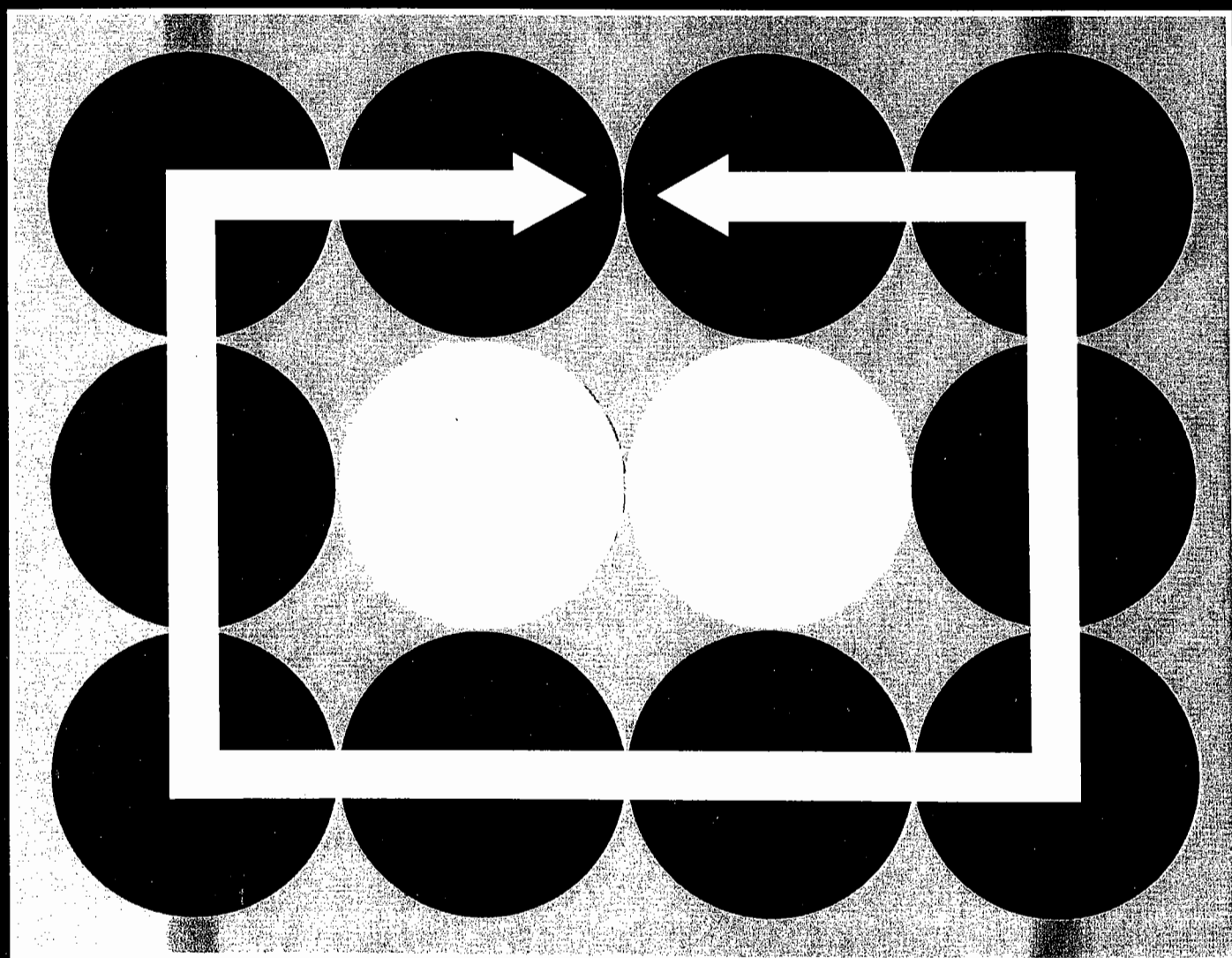
# INFORMATICA Y AUTOMATICA

MEJORA DE LA ROBUSTEZ DE CONTROLADORES LQG/LTR. APLICACION A UN SISTEMA MULTIVARIABLE

SEGUIMIENTO VISUAL BASADO EN DIFERENCIAS ACUMULADAS

UN ALGORITMO SECUENCIAL EFICIENTE PARA LA RRQR

CALIBRACION PRECISA DE CAMARAS CON MODELO DE DISTORSION Y RECONSTRUCCION ROBUSTA DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES



# Mejora de la robustez de controladores LQG/LTR. Aplicación a un sistema Multivariable

Manuel Jesús López Sánchez y Francisco Rodríguez Rubio

*En el presente artículo se realiza un estudio de métodos de diseño LTR, demostrándose su utilidad con la aplicación a un sistema multivariable. El planteamiento se realiza en el espacio de estados para el cálculo e implementación de los algoritmos de control, y un tratamiento en el dominio de la frecuencia para el análisis de robustez. Se describen diferentes técnicas de diseño que emplean una filosofía de síntesis similar, conocida como LTR. Para evaluar los controladores se proponen unos indicadores de robustez. Se realizan diferentes diseños para un sistema multivariable, comparando los resultados obtenidos entre el regulador LQC/LTR convencional y un controlador LTR con estructura no basada en observador. Por último, se propone un controlador para mejorar la robustez y aplicabilidad del controlador LQR/LTR convencional.*

**Palabras clave:** Control robusto, sistemas multivariable, controladores LTR, indicadores de robustez, dinámica inmodelada.

## 1. INTRODUCCION

**E**l control de procesos industriales requiere que se tengan en consideración algunos aspectos de importancia práctica, tales como son aquellos que se refieren a los errores de modelado o incertidumbres, siempre existentes en mayor o menor grado en los sistemas reales. Dado que un controlador puede llegar a ser como máximo tan bueno como el modelo matemático de la planta empleado para su diseño, resulta ventajoso realizar un trabajo previo intenso para adecuar y mejorar en lo posible el modelo matemático, obteniéndose también de dicho

trabajo algún tipo de caracterización de las incertidumbres que afecten al sistema.

Si un proceso industrial, para una condición de trabajo dada, se modela de forma adecuada como un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), los errores de modelado van a ser debidos a diferentes factores, entre los que cabe destacar: 1) Modificaciones en el punto de trabajo de la planta o con respecto al modelo nominal; 2) dinámica no lineal no considerada; 3) dinámica de alta frecuencia no modelada, 4) retardos de tiempo no contemplados, 5) imprecisiones en los parámetros, debidas al método de identificación y/o modelado empleado. Estos factores se pueden agrupar en dos grandes grupos: las incertidumbres paramétricas (1) y (5) y las estructurales (2), (3) y (4). Con respecto al conocimiento disponible sobre las causas de las incertidumbres puede distinguirse entre incertidumbre estructurada y no estructurada.

En el caso de incertidumbre no estructurada solo se conoce que existen discrepancias entre el modelo y la planta real, y posiblemente puede conocerse también el tamaño de las desviaciones de determinadas medidas entrada/salida (por ejemplo, la

Manuel J. López. Departamento Ingeniería de Sistemas y Automática, Tecnología Electrónica y Electrónica. Facultad de Ciencias Náuticas de la Universidad de Cádiz. Polígono Río San Pedro, 11510 Puerto Real (Cádiz). Telf. 34-56-470842. E-mail: lopezsan@cvl.uca.es, Fax: 34-56-470803

Francisco R. Rubio. Departamento Ingeniería de Sistemas y Automática Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla. Avda. Reina Mercedes s/n, 41012-Sevilla. Telf. 34-5-4556876. E-mail: rubio@esi.us.es, Fax: 34-5-4556849/4629205

discrepancia en la respuesta frecuencial causada por la dinámica de alta frecuencia no modelada y/o diferencia en la respuesta temporal debido a la no consideración de un elemento no lineal). Si se conoce de la incertidumbre que en cierta medida se debe a algunos elementos diferenciados de la planta, en la forma de tolerancias de sus valores (por ejemplo, la incertidumbre en el valor de un polo y/o un cero), en ese caso se trata de una incertidumbre estructurada. Es posible también, que se tenga un conocimiento parcial y separado de las fuentes de incertidumbre, en cuyo caso también podrá hablarse de incertidumbre estructurada (por ejemplo, el hecho práctico de que las incertidumbres existentes en distintos actuadores sean independientes entre sí).

El control de sistemas con incertidumbres entra dentro del campo de estudio de la disciplina conocida como Control Robusto. La década de los ochenta se considera el período de desarrollo de la Teoría de Control Robusto, pudiéndose destacar entre otros los desarrollos teóricos realizados durante este período: 1) Métodos  $H_\infty$  [20,9]; 2) métodos LTR (Loop Transfer Recovery) [11,18]; 3) método de diseño IMC (Internal Model Control) [16]; 4) métodos de Kharatinov [3]; 5) método de Síntesis- $\mu$  [2]; 6) método GPC (Generalized Predictive Control) [5]; 7) método QFT (Quantitative Feedback Theory) [13]. Las principales aplicaciones de la teoría de control robusto realizadas en los últimos años se han llevado a cabo en las áreas de control de procesos químicos, robótica, estructuras flexibles y control de aeronaves [8]. Como consecuencia de los buenos resultados obtenidos, y del interés despertado en la comunidad científica y técnica por la nueva disciplina, han surgido diferentes paquetes de CACSD (Diseño de Sistemas de Control Asistido por Computador) para el diseño de sistemas de control robusto, como ejemplos significativos se pueden citar: Program CC [19], Robust-Control Toolbox [4], y  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox [2] (ambos para Matlab). Este trabajo se centra en la metodología de diseño LTR, habiéndose empleado para el diseño los dos paquetes de CACSD citados anteriormente en primer lugar.

El método de diseño de sistemas de control denominado *Recuperación de la función de Transferencia del Lazo abierto* (LTR), surgió como consecuencia del objetivo de mejorar la robustez de los controladores basados en el procedimiento LQG *Lineal Cuadrático Gaussiano* [10]. Posteriormente la teoría en torno a LTR ha trascendido de sus orígenes, constituyendo una metodología de diseño sistemática y flexible para sistemas de control tanto escalares como multivariables. Durante la década de los ochenta tuvo su época de desarrollo e implantación [1,18], y en la actualidad sigue siendo un tema de investigación y estudio [22,7]. El método de diseño basado en la teoría LQG, junto con un procedimiento para recuperar cierta función de transferencia en lazo abierto especificada, constituye la técnica conocida como LQG/LTR.

En este trabajo se realiza un estudio de algunos métodos de diseño LTR, y se desarrolla un ejemplo de diseño para un sistema multivariable. En el apartado 2 se plantean las especificaciones de diseño en el dominio de la frecuencia, en el 3 se describen las metodologías de diseño LTR-i y LTR-o con estructura convencional, en el apartado 4 se hace lo propio para una estructura no basada en observador; en el apartado 5 se presentan los indicadores de comportamiento y robustez propuestos para evaluar los diseños; en el apartado 6 se describe el modelo de la planta empleado en las simulaciones y se desarrollan controladores para ambas estructuras, comparándose entre sí los resulta-

dos; finalmente se exponen las conclusiones en el apartado 7.

## 2. FORMULACION DE LAS ESPECIFICACIONES DE DISEÑO

Para caracterizar el comportamiento de un sistema de control genérico como el de la figura 1 (donde  $d_i$ ,  $d_o$  representan las perturbaciones actuantes sobre el sistema,  $n$  es el ruido de medida,  $r$  es la señal de referencia,  $e$  la señal de error,  $u$  la señal de control generada por el controlador  $K$ , e  $y$  es la respuesta de la planta  $G$ ) resulta útil definir una serie de funciones de transferencia (matrices en el caso multivariable):

- Lazo Abierto o Razón de Retorno:

$$L_i = K G \quad ; \quad L_o = GK$$

- Sensibilidad

$$S_i = (I+L_i)^{-1} \quad ; \quad S_o = (I+L_o)^{-1}$$

- Sensibilidad Complementaria

$$T_i = I-S_i \quad ; \quad T_o = I-S_o$$

donde los subíndices  $\{i,o\}$  hacen referencia a que el operador se define a la entrada o a la salida de la planta respectivamente. La respuesta del sistema ( $y$ ) y la señal de error ( $e$ ) pueden expresarse respectivamente como:

$$y = T_o(r - n) + S_o d_o + S_o G d_i$$

$$e = S_o(r - d_o - n) - S_o G d_i$$

Para un sistema multivariable las especificaciones de diseño pueden darse empleando las *ganancias principales extremas* de las funciones de sensibilidad ( $S$ ) y sensibilidad complementaria ( $T$ ):

$$\bar{\sigma}[S(j\omega)W_S(j\omega)] \leq 1, \quad \bar{\sigma}[T(j\omega)W_T(j\omega)] \leq 1, \quad \forall \omega$$

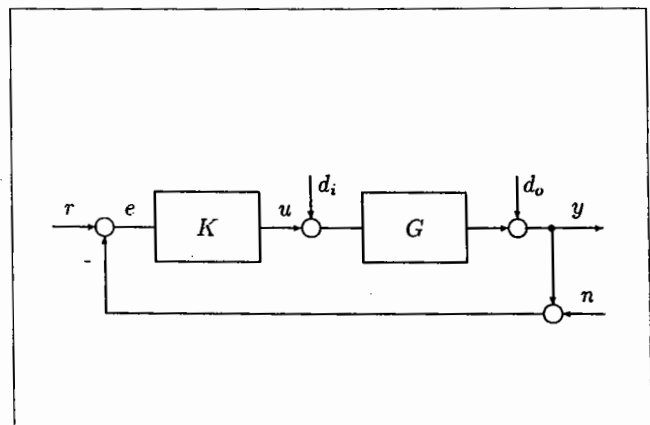


Figura 1. Sistema de control.

donde las funciones de ponderación ( $W_s, W_r$ ) se eligen de forma que se tengan en cuenta los objetivos a cumplir en cada intervalo de frecuencias:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S) &\ll 1, \quad \forall \omega \leq \omega_l, && \text{condición de comportamiento nominal (NP)} \\ \bar{\sigma}(T) &\ll 1, \quad \forall \omega \geq \omega_h, && \text{condición de estabilidad robusta (RS)} \end{aligned}$$

Las especificaciones anteriores, se pueden interpretar empleando las ganancias principales extremas en lazo abierto a partir de las relaciones siguientes:

$$\underline{\sigma}(L) \approx \frac{1}{\bar{\sigma}(S)}, \quad \forall \omega \leq \omega_l$$

$$\bar{\sigma}(L) \approx \bar{\sigma}(T), \quad \forall \omega \geq \omega_h$$

Por tanto, una manera de formular las especificaciones de diseño consiste en definir la función (matriz) de transferencia en lazo abierto deseada (FTLAD)  $L_d(s)$ . En la literatura se han sugerido dos métodos para obtener  $L_d(s)$  [18,21]. Uno se basa en el empleo de la teoría de control óptimo cuadrático (LQR), y otro en la teoría del filtro Kalman (KBF). La ventaja esgrimida para el empleo de estos métodos es que el sistema adquiere de forma automática ciertas propiedades muy atractivas desde el punto de vista del comportamiento nominal y de la robustez de la estabilidad.

**Obtención de la función de transferencia en lazo abierto deseada (FTLAD)**

Considérese que el modelo de la planta (incluidos posibles escalados y/o ampliaciones), junto con las perturbaciones se puede representar por el conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \Gamma v_1 \\ y &= Cx + v_2 \end{aligned} \tag{1}$$

supuestos  $v_1, v_2$  realizaciones de ruido blanco gaussiano caracterizados por:

$$E[v_1, v_1^T] = W \geq 0, \quad E[v_2, v_2^T] = R_o > 0$$

donde  $W, \Gamma, R_o$  son conocidos, estimados o elegidos de forma arbitraria de cara al diseño del observador.

El comportamiento deseado del sistema puede especificarse de forma conveniente mediante la minimización de una función de coste  $J$  (LQR).

$$J = \int_0^\infty (x^T M^T Q M x + u^T R_c u) dt \tag{2}$$

donde:

$$Q = Q^T \geq 0, \quad R_c = R_c^T > 0, \quad Q_c = M^T Q M$$

La solución es de la forma

$$u = -K_c x$$

obteniéndose la matriz de realimentación de estados ( $K$ ) a partir de la solución  $P_c = P_c^T \geq 0$  de la ecuación algebraica de Riccati de control (AREc) siguiente:

$$\begin{aligned} A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c &= 0 \\ K_c &= R_c^{-1} B^T P_c \end{aligned} \tag{3}$$

La función de transferencia en lazo abierto deseada (FTLAD), relación entre la señal que entra por el punto «a» y la que retorna por el punto «b» de la figura 2 viene dada por:

$$H_c(s) = K_c \Phi(s) B, \quad \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

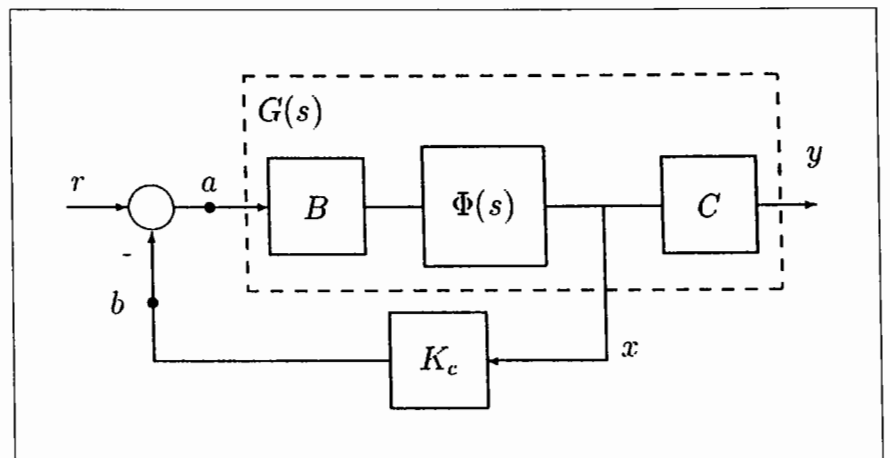


Figura 2. Estructura regulador LQR y definición de la FTLAD.

Se demuestra que un controlador LQR tiene las siguientes propiedades [18,15]: 1) ley de control óptima (frente a un índice de comportamiento cuadrático); 2) amplios márgenes de fase (MF), ganancia (MG) y tolerancia a reducción de la ganancia (TRG) ( $MG = \infty$ ,  $MF 60^\circ$ ,  $TRG \geq -6 \text{ db}$ ); 3) robustez de la estabilidad frente a incertidumbres de tipo multiplicativo situadas a la entrada de la planta (de hasta un 50 por ciento de incertidumbre tolerable), y 4) respuesta en frecuencia en lazo abierto con una pendiente de caída suave a alta frecuencia ( $-20 \text{ db/dec}$ ). Las propiedades anteriores son todas, salvo la última, muy atractivas para un sistema de control. Sería deseable además, si ello fuera posible, que manteniendo las tres primeras casi sin alteración se consiguiera un aumento de la pendiente de caída a alta frecuencia; ya que es en esa zona donde se manifiestan fundamentalmente los errores de modelado, con lo que de este modo se reforzaría la robustez frente a la dinámica inmodelada de alta frecuencia. Este es uno de los objetivos del procedimiento LTR propuesto en este trabajo.

### 3. CONTROLADOR LTR CONVENCIONAL

#### Método LTR-i

Si el vector de estado no es accesible, se emplea un observador para estimarlo. Caso de elegir como observador el filtro de Kalman KBF se denomina al método LQG. En la figura 3 se muestra la estructura de este controlador.

Para un modelo exacto de la planta, la estabilidad del sistema controlado por realimentación de estados (LQR), o también nombrado como LQSF, de lineal cuadrático con realimentación de estados), garantizará también la del sistema empleando el vector de estados estimado (LQSEF, también denominado LQG). El resultado anterior es conocido como el *Principio de Separación*.

Para resolver el subproblema del observador (filtro de Kalman), se necesita encontrar la matriz de ganancia del observador  $K_o$ . Para ello se resuelve la ecuación algebraica de Riccati (AREo) siguiente:

$$AP_o + P_oA^T - P_oC^T R_o^{-1} CP_o + Q_o = 0 \quad (4)$$

con:  $Q_o = \Gamma W \Gamma^T$  ;  $K_o = P_o C^T R_o^{-1}$

El controlador LQG queda:

$$K(s) = K_c(sI - A + BK_c + K_oC)^{-1} K_o \quad (5)$$

y la función de transferencia en lazo abierto (FTLA), definida a la entrada de la planta:

$$L(s) = K(s)G(s)$$

Es conocido que el empleo de observadores de estado puede deteriorar la robustez del sistema [10], así como su comportamiento en lazo cerrado si no se tienen modelos muy precisos de la planta [1]. Existen diferentes métodos para realizar la llamada recuperación de la función de transferencia en lazo abierto [6], a continuación se describe el introducido por Doyle y Stein [10]; consistente en modificar los parámetros libres de diseño del observador de forma que la fñl recupere las características frecuenciales de la FTLAD. Esto se consigue, en el caso de sistemas de fase mínima, si se hace depender la matriz de covarianza ( $Q_o$ ) para el cálculo de la matriz de ganancia del observador, de un parámetro «q», conocido como *ganancia de recuperación*:

$$Q_o = Q_o^0 + qZ, \quad Z = Z^T \geq 0$$

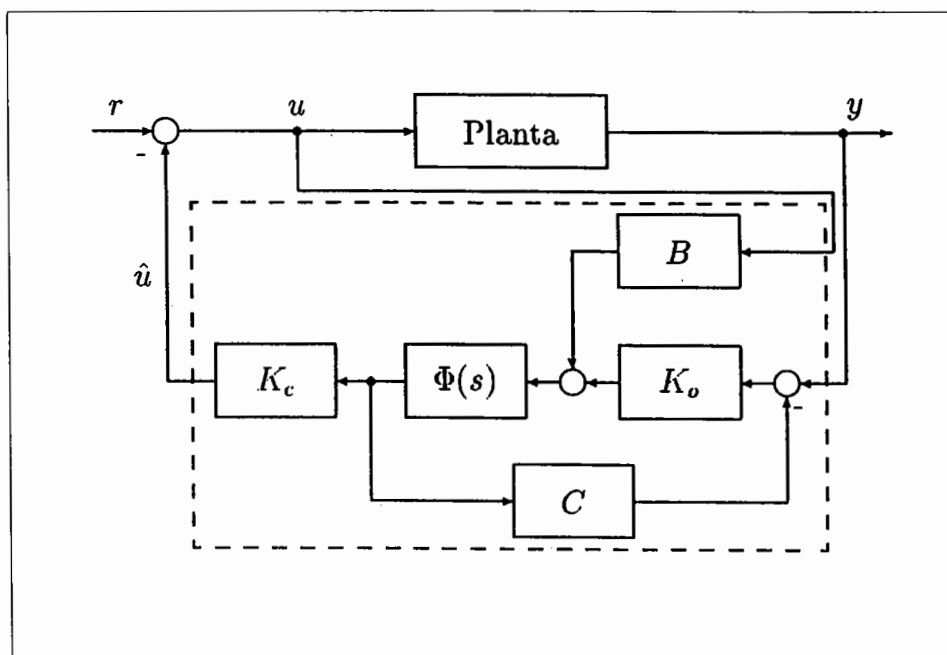


Figura 3. Estructura regulador LQG/LTR-i.

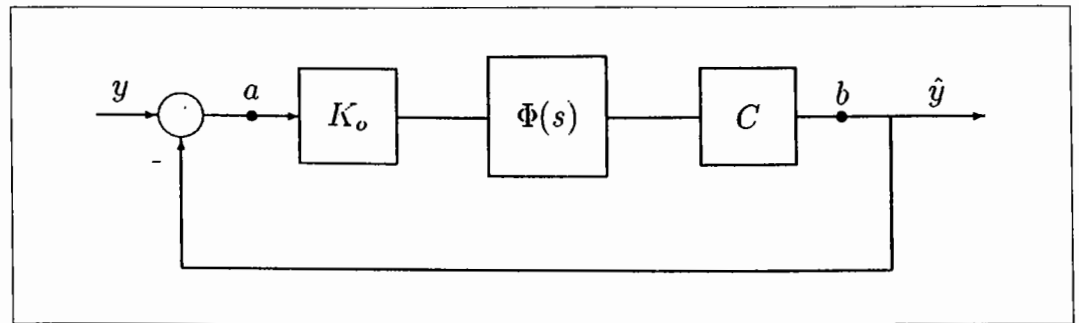


Figura 4. Estructura para la definición de la FTLAD:  $H_o(s)$ .

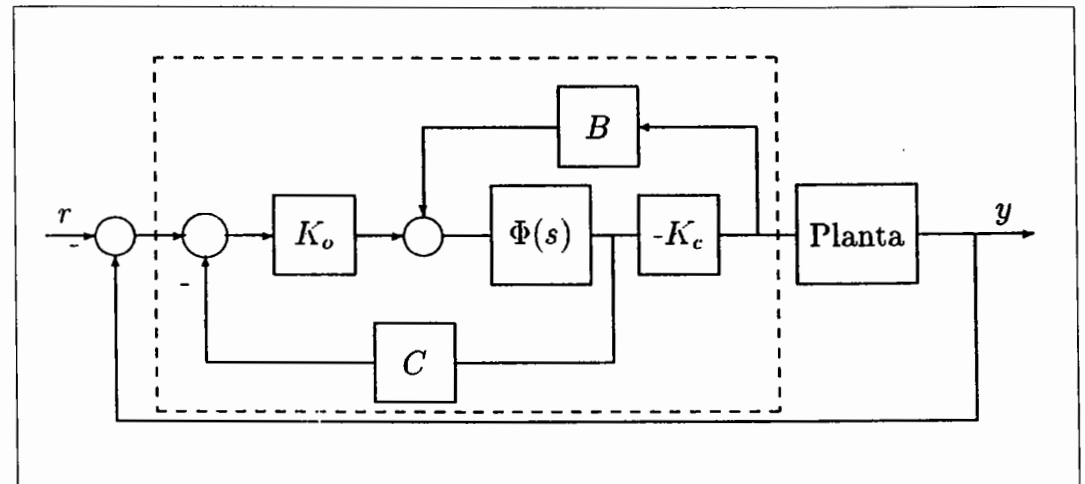


Figura 5. Estructura regulador LQG/LTR-o.

donde  $Q_o^0$  es la matriz de covarianza de partida. Se demuestra [18,16] que:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} K(s)G(s) = K_c(sI - A)^{-1}B = H_c(s)$$

El controlador LQG/LTR sustituye la dinámica de la planta por la dinámica deseada, y definida por  $H(s)$ . Los ceros de  $K(s)$  corresponden a los ceros de  $H(s)$ , y algunos de sus polos se emplean para cancelar los ceros de la planta  $G(s)$  [1]. Es por esto que el método solo garantiza una recuperación asintótica para plantas con modelos inversos estables. La presencia de ceros inestables tiene el efecto de limitar las características del comportamiento obtenible, independientemente de la metodología de diseño que se emplee. Sin embargo, si los ceros inestables de la planta están lo suficientemente alejados del ancho de banda del sistema en lazo cerrado, entonces es posible una recuperación parcial en el rango de frecuencias de interés, y a efectos prácticos la presencia de tales ceros no afecta de manera sensible a la robustez y comportamiento del sistema en las zonas de frecuencia de interés [18,21,14].

**Método LTR-o**

Este método se basa en explotar la dualidad existente entre los problemas LQR y KBF [15,18]. La función (matriz) de trans-

ferencia en lazo abierto del observador (KBF) es ahora la FTLAD (ver figura 4):

$$L_i(s) = H_o(s) = C(sI - A)^{-1}K_o = C\Phi(s)K_o$$

La cual goza de las mismas propiedades analizadas para el controlador LQR. Con la diferencia de que ahora se presentan para una FTLAD definida a la salida de la planta en vez de la entrada, con lo que para el caso de sistema de fase mínima se obtendrá:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} G(s)K(s) = C(sI - A)^{-1}K_o = H_o(s)$$

donde ahora el parámetro  $q$  afecta a la matriz de ponderación  $Q_c$  en la forma:

$$Q_c = Q_c^0 + qZ, \quad Z = Z^T \geq 0$$

En la figura 5 se muestra la estructura del regulador LQG/LTR-o.

**4. CONTROLADOR LTR NO BASADO EN OBSERVADOR**

Si se define el *error de recuperación* como:

$$E(s) = L_i(s) - L(s) \tag{6}$$

para LTR-I se tiene respectivamente:

$$L(s) = K(s)G(s), \quad L_i(s) = H_c(s)$$

y  $E(s)$  puede expresarse como [6]:

$$E(s) = N(s)[I + N(s)]^{-1}[I + H_c(s)] \tag{7}$$

De la ecuación anterior se tiene que el error de recuperación disminuye a medida que lo hace el tamaño de la matriz,

$$N(s) = K_c(sI - A + K_oC)^{-1}B \tag{8}$$

y esto se produce conforme aumenta  $q$ . Se puede comprobar que a medida que el parámetro « $q$ » aumenta, también lo hace el tamaño de  $K_o(q)$ . De forma que para conseguir una recuperación con  $\sigma[N(s)]$  lo suficientemente pequeño, puede darse el caso de que se necesite que los elementos de la matriz de ganancia del filtro  $K_o$  tomen valores relativamente muy grandes, provocando un incremento excesivo del ancho de banda del compensador, lo cual va a ser contraproducente en algunas situaciones prácticas.

Si se considera  $\hat{u}(s)$  como la señal a la salida del compensador, y  $u(s)$  la señal de control de entrada a la planta (ver figura 3), puede obtenerse:

$$\hat{u}(s) = -N(s)u(s) - K_c(sI - A + K_oC)^{-1}y(s)$$

Motivado por la relación anterior, y dado que la condición de recuperación exacta se consigue anulando  $N(s)$ , o equivalentemente haciendo que  $\hat{u}(s)$  no dependa explícitamente de  $u(s)$ , Chen y col. [7] desarrollan una estructura para *controlador no basada en observador* (CNBO), donde la señal que genera el controlador no depende de manera explícita de la señal de control a la planta (ver figura 6).

El controlador LTR (CNBO) viene dado por,

$$K(s) = K_c(sI - A + K_oC)^{-1}K_o \tag{9}$$

Este regulador no cumple el principio de separación; sin embargo, se demuestra [6] que existe un valor de la ganancia de recuperación  $q_o$  tal que  $\forall q \geq q_o$  el sistema nominal en lazo cerrado y el controlador son asintóticamente estables.

El error de recuperación definido en la ecuación (6) obtenido para el CNBO es:

$$E_c(s) = N(s) \tag{10}$$

Si se comparan las expresiones (7) y (8), con la misma matriz  $K_o$  para CNBO y CBO, se obtiene que la recuperación obtenida

para el primero es superior (zona de baja frecuencia). Una consecuencia inmediata, de gran utilidad práctica, es que para un mismo grado de recuperación el CNBO necesita una matriz  $K_o$  con tamaño  $\|K_o\|_F = \sqrt{\text{traza}(K_oK_o^T)}$  que puede llegar a ser sensiblemente menor que la requerida para el CBO. Consecuentemente el regulador conseguiría las prestaciones deseadas para el sistema, pero tendría un ancho de banda menor, protegiendo de esa forma al sistema de unas demandas de control excesivas y en algunas situaciones de la saturación de los actuadores. También se evita la amplificación innecesaria del ruido de medida, y proporciona una mayor robustez frente a la dinámica no modelada de alta frecuencia.

En el desarrollo anterior se ha analizado la síntesis LTR-I con el CNBO. También es posible realizar un diseño LTR-o especificando una FTLAD a la salida de la planta (ver figuras 4,5); en este caso, la estructura del regulador es la representada en la figura 7.

$$K(s) = K_c(sI - A + BK_c)^{-1}K_o$$

Este regulador representa el caso dual del regulador LTR-I (CNBO), por lo que los resultados anteriores obtenidos para éste, son igualmente válidos [7].

## 5. EVALUACION DE LOS CONTROLADORES

Para evaluar los diferentes diseños se proponen los siguientes indicadores de comportamiento y robustez:

- Análisis de la respuesta temporal y señales de control.
- Caracterización del rechazo de las perturbaciones actuantes a la salida ( $d_o$ ) y a la entrada ( $d_i$ ) de la planta, por medio de:

$$I_{d_o} = \sigma[S_o(j\omega)], \quad I_{d_i} = \sigma[S_oG(j\omega)]$$

- Indicador de Comportamiento Nominal (una medida del grado de recuperación a una frecuencia  $\omega = \omega_o$  dada):

$$INP = \min \left\{ \frac{\sigma[L(j\omega_o)]}{\sigma[L_i(j\omega_o)]}, \frac{\sigma[L(j\omega_o)]}{\sigma[L_i(j\omega_o)]} \right\}$$

- Márgenes de Estabilidad (extensión al caso multivariable de los márgenes de fase y ganancia clásicos, se emplean para ello los valores propios,  $\lambda_i$ , de la matriz de transferencia en lazo abierto):

$$MG = \min_i \{MG(\lambda_i)\} \quad ; \quad MF = \min_i \{MF(\lambda_i)\}$$

En el caso de un sistema multivariable, los márgenes de fase y ganancia así obtenidos no proporcionan la utilidad que tienen en el caso de los sistemas escalares para caracterizar la robustez del



Figura 6. Estructura del CNBO LTR-i.

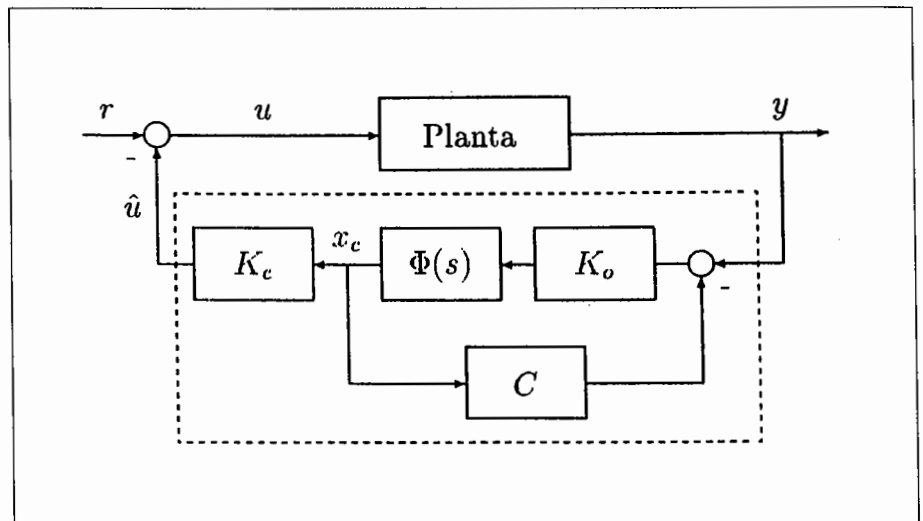
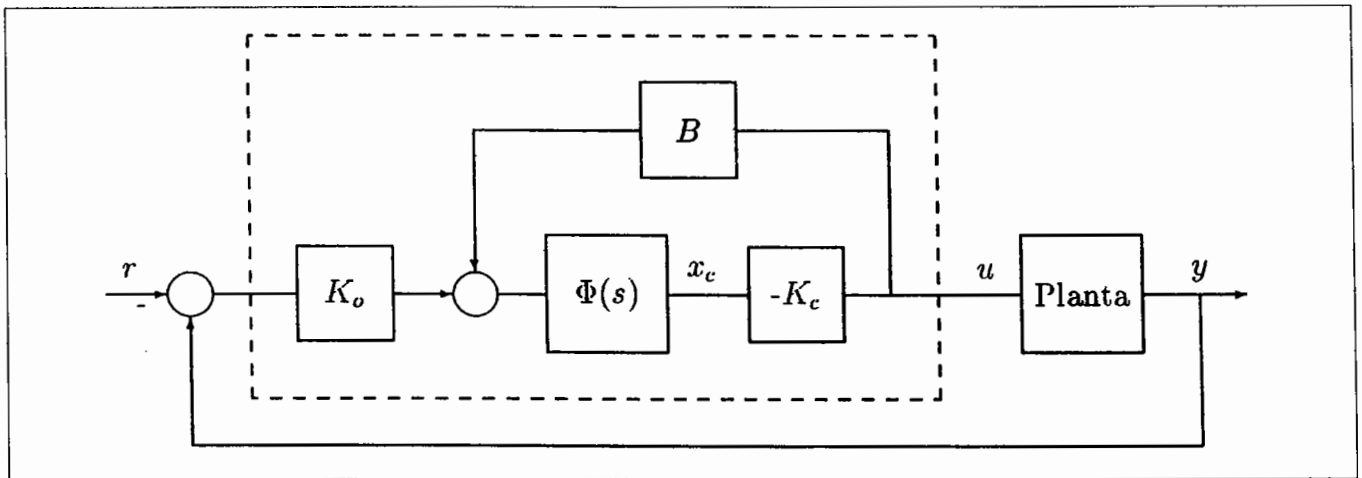


Figura 7. Estructura del controlador LTR-o (CNBO).



sistema. Pero sí pueden utilizarse como indicadores de robustez cualitativos [14,11] en el sentido de que si se obtienen valores poco satisfactorios de MG y MF, ello será indicativo de la falta de robustez.

- Indicadores de Estabilidad Robusta (estimación del tanto por ciento de incertidumbre tolerable para la que el sistema mantiene su estabilidad).<sup>1</sup>

— *Incertidumbre multiplicativa no estructurada*.<sup>2</sup>

$$I_{11i} : M = T_i, \quad I_{11o} : M = T_o$$

$$\min\{1/\bar{\sigma}[M(j\omega)]\}$$

<sup>1</sup> El subíndice "i" indica que se trata de un indicador con respecto a incertidumbre de tipo multiplicativo que se considera reflejada a la entrada de la planta, mientras que con el subíndice "o" se indica que se considera a la salida.

<sup>2</sup>  $\underline{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}$  representan los valores singulares extremos, y  $\sigma$  el valor singular estructurado. M representa el sistema de interconexión correspondiente a cada caso [16].

— *Incertidumbre multiplicativa con estructura diagonal*:

$$I_{12i} : M = T_i, \quad I_{12o} : M = T_o$$

$$\min\{1/\mu[M(j\omega)]\}$$

— *Incertidumbres multiplicativas simultáneas con estructuras diagonales*:

$$I_{1s} : \min\{1/\mu[M(j\omega)]\}$$

$$M = \begin{bmatrix} -T_i & -S_i K \\ S_o G & -T_o \end{bmatrix}$$

- Indicadores de comportamiento robusto (estima el tanto por ciento de incertidumbre de tipo multiplicativo con estructura diagonal tolerable para la que el sistema cumple una especificación de comportamiento dada de la forma  $\bar{\sigma}(S_o W_s) \leq 1$ ):

$$I_{3i} : M = \begin{bmatrix} -T_i & -KS_oW_s \\ S_oG & S_oW_s \end{bmatrix}$$

$$I_{3o} : M = \begin{bmatrix} -T_o & -T_oW_s \\ S_o & -T_oW_s \end{bmatrix}$$

$$\min_{\omega} \{1/\mu[M(j\omega)]\}$$

### 6. DISEÑO DEL CONTROLADOR MULTIVARIABLE

En este apartado se emplea el modelo lineal multivariable de un buque [12] para unas condiciones nominales de funcionamiento. Las ecuaciones descriptivas de la planta vienen dadas por:

$$\begin{bmatrix} \phi(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(s) \\ \delta(s) \end{bmatrix}$$

$$G_{11}(s) = \frac{19.92(1.54s^2 + 0.976s + 0.0077)}{(19.84s^4 + 24.34s^3 + 7.69s^2 + 5.34s + 0.234)(s^2 + 3.645s + 13.28)}$$

$$G_{12}(s) = \frac{13.916(0.965s^2 + 0.61s - 0.176)}{(15.66s^4 + 21.32s^3 + 6.87s^2 + 3.81s + 0.193)(s^2 + 9.402s + 7.952)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{0.1}{(s^2 + 3.645s + 13.28)(21.5s^2 + s)}$$

$$G_{22}(s) = \frac{0.4266}{(s^2 + 9.402s + 7.952)(18.1s^2 + s)} \quad (11)$$

Donde la variable a controlar  $y_1$  corresponde al ángulo de balance  $\phi$ , la variable a controlar  $y_2$  es el ángulo de rumbo  $\psi$ , la variable de control  $u_1$  corresponde al ángulo de aletas estabilizadoras  $\alpha$ , y la variable de control  $u_2$  corresponde al ángulo de timón  $\delta$ .

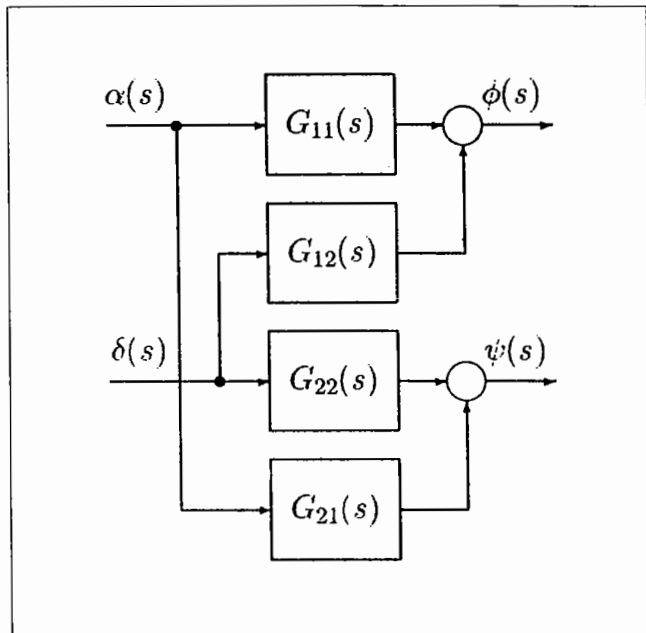


Figura 8. Diagrama de bloques del sistema multivariable.

Dado que una realización mínima en el espacio de estados de este modelo es de dimensión elevada (diecinueve), se va a emplear un modelo de orden reducido de la planta, a fin de obtener un controlador de menor dimensión y para el posterior análisis de la robustez del sistema de control frente a la dinámica inmodelada de alta frecuencia. Si se calculan los valores singulares de Hankel del modelo completo de la planta,

$$\sigma_{Hi} \text{ para: } i = 1, 2, \dots, 19$$

se obtiene que:

$$\sigma_{H7} < 0.1\sigma_{H6}$$

y dado que  $\sigma_{H_{i+1}} \leq \sigma_{Hi}$ , se elige un modelo reducido de sexto orden. En la figura 9 se muestran las ganancias principales del modelo completo y del modelo reducido, como puede verse se consigue una buena aproximación hasta una frecuencia de 3 radianes/segundo. Dado que esta frecuencia va a ser muy superior al ancho de banda del sistema en lazo cerrado, puede considerarse una aproximación aceptable en el rango de frecuencias de interés.

Las matrices de estado obtenidas para el modelo reducido de la planta son:

$$A = \begin{pmatrix} 0.049 & -0.015 & -0.255 & -0.442 & 0.986 & 0.094 \\ 0.012 & 0.279 & 0.211 & 0.632 & -0.112 & 0.357 \\ -0.010 & 0.151 & 0.228 & 0.443 & -0.182 & -0.555 \\ -0.092 & -0.482 & -0.213 & -0.118 & -0.896 & -0.017 \\ -0.053 & -0.179 & -0.080 & 0.067 & -0.569 & -0.117 \\ -0.001 & -0.203 & 0.307 & 0.010 & -0.034 & -0.178 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} -0.001 & 0.001 & 0.013 & 0.004 & -0.039 & 0.017 \\ 0.025 & 0.035 & 0.031 & 0.102 & -0.106 & 0.033 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.011 & -0.796 & 0.478 & -1.149 & 0.113 & -0.480 \\ 0.023 & -0.001 & -0.001 & 0.001 & -0.000 & -0.000 \end{pmatrix}$$

Para la síntesis del regulador se emplea el modelo reducido, sin embargo la evaluación de la respuesta temporal se realiza con el modelo de orden completo.

### Diseño LTR-O

Para el diseño de este regulador se sigue el procedimiento descrito anteriormente. El parámetro «q» se incrementa solo lo necesario para realizar una recuperación aceptable en el rango de frecuencias de interés del sistema (zonas de baja y media frecuencia). Así se evita incrementar la sensibilidad del sistema a la dinámica no modelada de alta frecuencia (RS), y se aproximan las especificaciones de diseño (NP). Se desea que el sistema consiga un buen rechazo de las perturbaciones y unos errores de seguimiento lo suficientemente pequeños (aproximación de la acción integral). Para ello, se toman los siguientes parámetros de diseño:

$$R_c = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_o = \Gamma_u W \Gamma_u^T, \quad W = \begin{bmatrix} 0.9817 & -0.1342 \\ -0.1342 & 0.0184 \end{bmatrix}$$

$$R_c = I_2, \quad Q_c = C_u^T C_u, \quad C_u = [C \ O_2], \quad B_u^T = [B \ O_2]$$

$$A_u = \begin{bmatrix} A & B \\ O_{2 \times n} & -\epsilon I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_u = \begin{bmatrix} O_{n \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad q = q_1 = 10^3$$

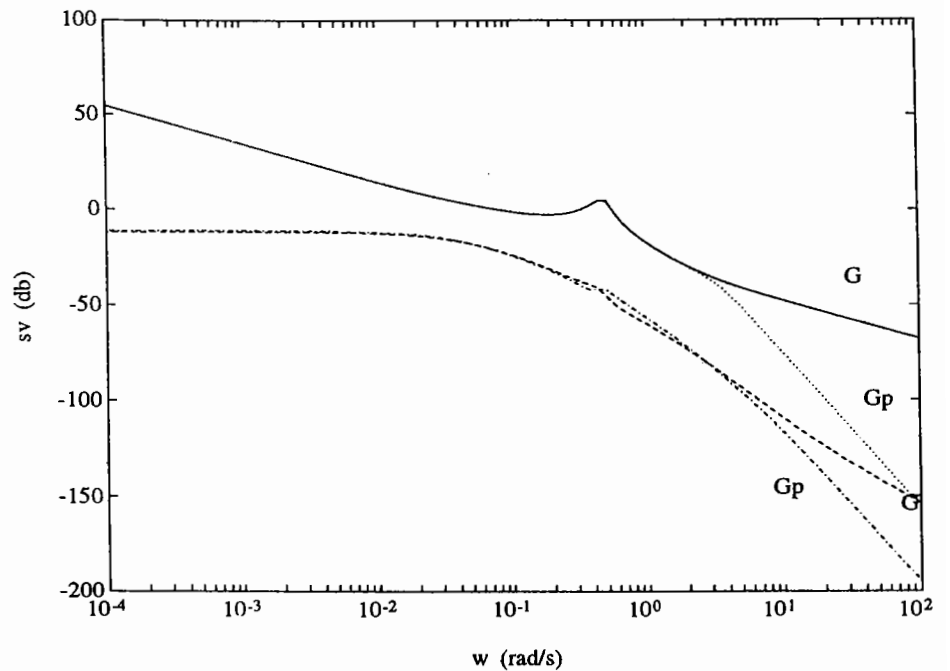


Figura 9. Respuestas en frecuencia del modelo completo ( $G$ ) y reducido ( $G_p$ ).

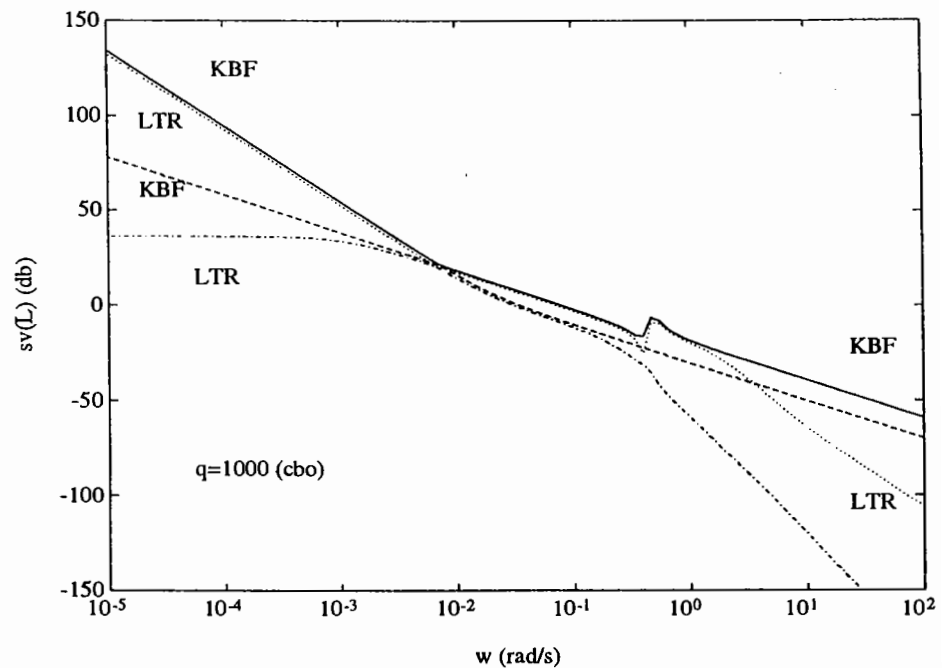


Figura 10. Valores singulares de  $H_o(s)$  y  $L(s)$ , para  $q = q_1 = 10^3$ , CBO.

En la figura 10 se muestran las ganancias principales de  $L(s)$  para el controlador LQG/LTR-o (CBO); como puede verse, el controlador no consigue una recuperación adecuada. Si se incrementa  $q$  hasta  $1000 q_1$ , se obtiene el nivel de recuperación deseado a baja frecuencia, pero a costa de un incremento en el ancho de banda del regulador. Esto produce como consecuencia que las órdenes generadas por el controlador sean de magnitudes mayores, con lo que se puede provocar la saturación de los actuadores de una forma más frecuente, un incremento del consumo de combustible, una mayor sensibilidad a las incertidumbres y a las

perturbaciones ambientales, así como la posible generación de órdenes de control irrealizables físicamente por el sistema.

Si se emplea un controlador LTR-O (CNBO) con los mismos parámetros de diseño dados anteriormente, se observa la mejora en el grado de recuperación conseguida a baja frecuencia con respecto al CBO (figura 11); puede comprobarse que es el mismo al obtenido con la estructura estándar (CBO) para  $q=1000 q_1$ . El efecto de incrementar el valor de  $q$  puede verse al comparar las figuras 12 y 13, donde se muestran las respuestas temporales y demandas de control para ambos controladores: CBO,  $q = 1000 q_1$

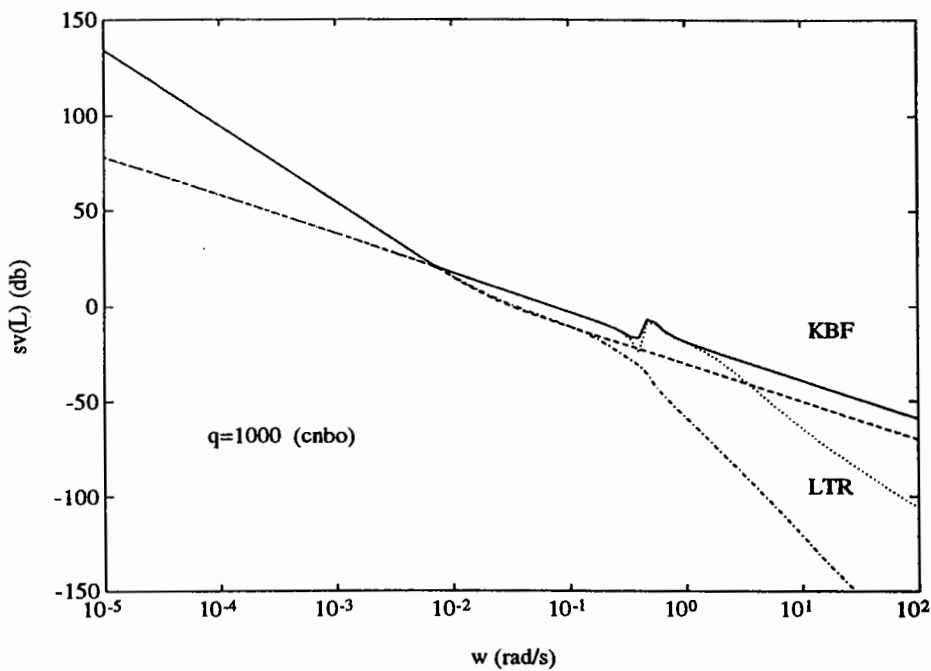


Figura 11. Valores singulares de  $H_o(s)$  y  $L(s)$ , para  $q = q_1 = 10^3$ , CBO.

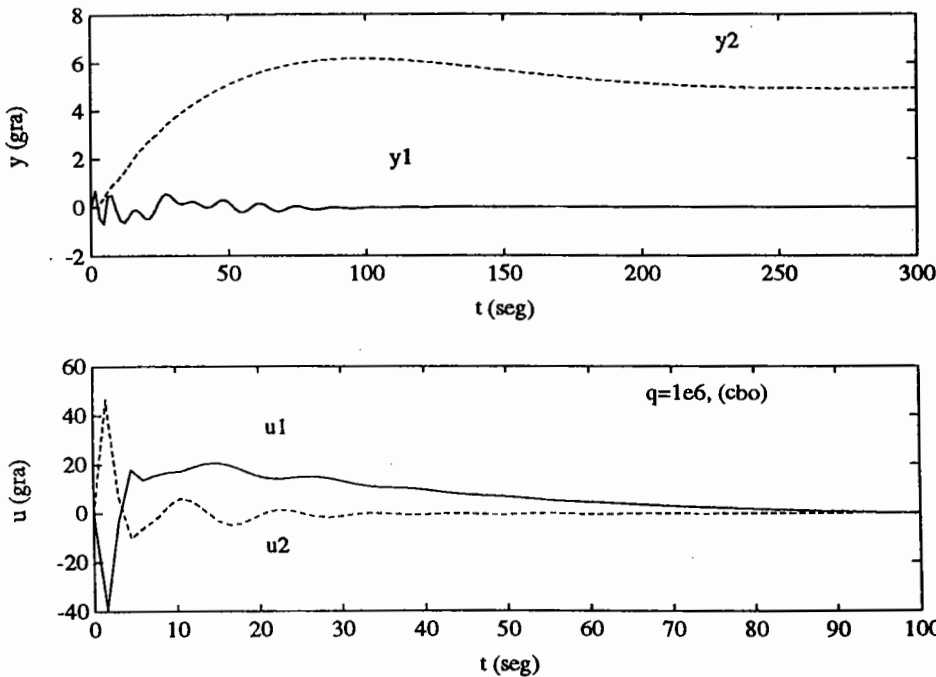


Figura 12. Respuesta temporal para CBO,  $q = 10^3 q_1$ .

y CNBO,  $q = q_1$ . Puede observarse como las señales de control generadas son más suaves y alcanzan valores extremos menores, lo cual es beneficioso para: a) evitar las saturaciones de los actuadores, b) disminuir el esfuerzo de control y contribuir al ahorro de combustible, c) aumentar la robustez del sistema (ver tabla 1).

En la figura 14 se puede observar cómo el regulador diseñado cumple las especificaciones deseadas, para el rechazo de las

perturbaciones actuantes, tanto a la salida ( $oi(S)$ ), como a la entrada ( $oi(S)G$ ) de la planta. En la misma figura se representan también unas estimaciones de las tolerancias del sistema de control a incertidumbres de tipo multiplicativo, que se den a la entrada ( $iMi$ ) o a la salida de la planta ( $iMo$ ) respectivamente. Para incertidumbre no estructurada se representa:

$$1/\bar{\sigma}[M(j\omega)]$$

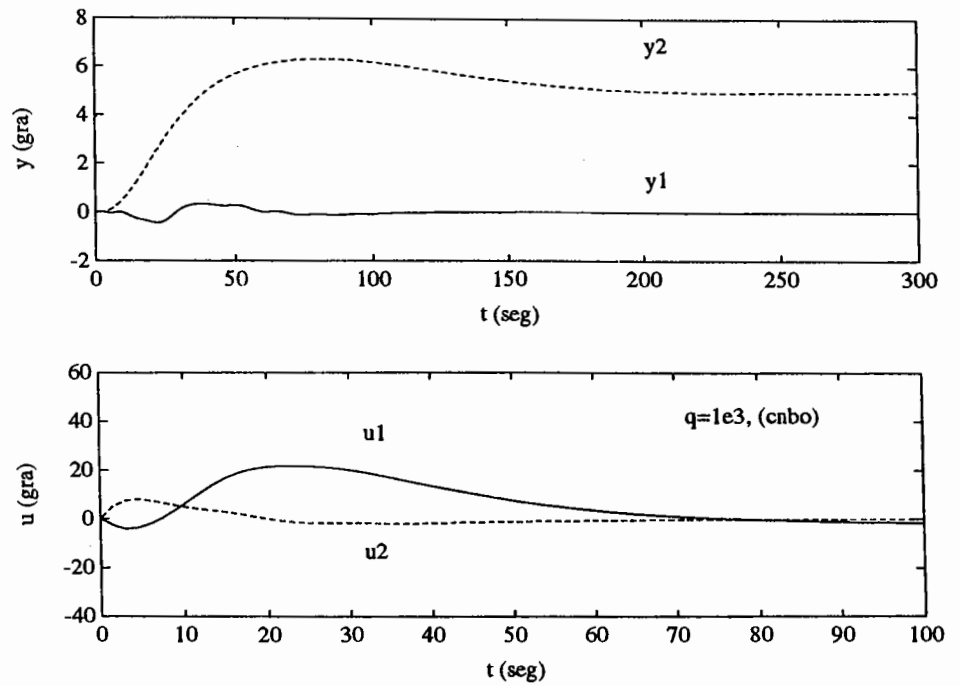


Figura 13. Respuesta temporal para CNBO,  $q = q_1$ .

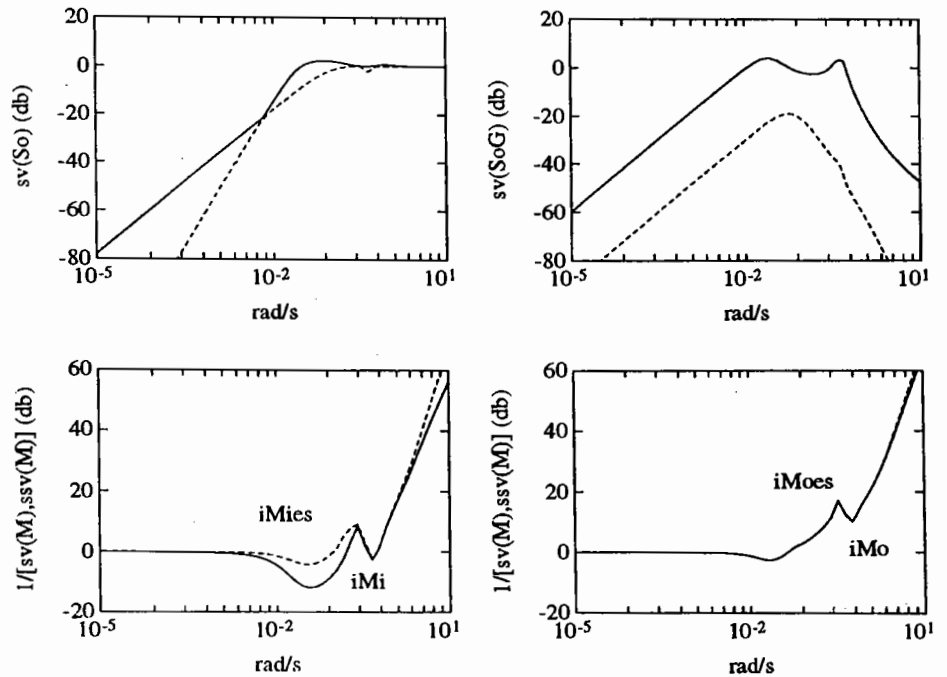


Figura 14. Característica rechazo perturbaciones y niveles de incertidumbre tolerables.

y para el caso de incertidumbres con estructura diagonal (a la entrada de la planta puede corresponder a la dinámica no modelada de los actuadores: iMies, y si se considera a la salida de la planta se podría representar la dinámica de los sensores: iMoes) se representa:

$$1/\mu[M(j\omega)]$$

donde  $M(j\omega)$  es el sistema de interconexión. Con  $1/\mu[M(j\omega)]$  se obtienen unas estimaciones de las tolerancias a las incertidumbres mayores que con  $1/\sigma[M(j\omega)]$ , o lo que es lo mismo: se obtiene una estimación de la robustez de la estabilidad superior. Esto es lógico, al suponer la primera una condición menos conservativa que la última. Puede comprobarse también, que el

Tabla 1.  
Indicadores de robustez de los controladores

Controlador	$I_{11i}$	$I_{12i}$	$I_{11o}$	$I_{12o}$	$I_{1s}$	MG	MF	$I_{3o}$	$I_{3i}$
	%	%	%	%	%	db	gra	%	%
CBO: $q = 1000q_1$	23.0	27.5	76.1	76.1	22.0	26.9	59.8	38.3	24.5
CNBO: $q = q_1$	25.3	62.1	74.9	74.9	34.3	18.9	51.8	53.5	40.9

sistema es más robusto frente a incertidumbres situadas a la salida de la planta que frente a incertidumbres situadas a la entrada; ello es consecuencia de que el diseño realizado es LTR-O. En la tabla 1 se resumen los valores de los indicadores de robustez tomados por ambos controladores LTR-O para el mismo grado de recuperación (INP).<sup>3</sup>

## 7. CONCLUSIONES

Se ha descrito un planteamiento en el dominio de la frecuencia para establecer las especificaciones de diseño, referentes al comportamiento y robustez de la estabilidad, empleando para ello la relación existente entre las funciones de sensibilidad, sensibilidad complementaria y la función de transferencia en lazo abierto. El procedimiento planteado se basa en el ajuste de las ganancias principales extremas (valores singulares) de la función de transferencia en lazo abierto (caso de sistema multivariable).

Se ha descrito la motivación y filosofía de trabajo de un conjunto de técnicas de diseño conocidas como LTR. Se describen las metodologías LTR-i y LTR-o, con estructura convencional

(CBO) y con estructura no basada en observador (CNBO). Se propone un conjunto de indicadores de comportamiento y robustez para evaluar los controladores diseñados.

Se aplica la metodología LTR-o en el diseño de un controlador para el modelo de un sistema multivariable, comparando los resultados obtenidos entre los reguladores CBO y CNBO. Se evalúa el comportamiento y robustez de los diseños frente a la dinámica inmodelada de alta frecuencia. Se propone una metodología de diseño de control robusto basada en un regulador LTR con recuperación parcial (zona de frecuencias de interés) y controlador no basado en observador (CNBO). Lo cual va a mejorar la aplicabilidad del método LTR convencional desde el punto de vista de la aplicación industrial. Dado que de esa forma se consigue reducir la sensibilidad del sistema a las perturbaciones externas así como a las incertidumbres, siendo por tanto el sistema más robusto.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a la CICYT por la financiación de este trabajo, contrato número TAP95-0370.

<sup>3</sup> Los valores de la tabla 1 están expresados: MF en grados, MG en decibelios y el resto de indicadores en tanto por ciento de incertidumbre tolerable

## REFERENCIAS

- [1] M. Athans (1986), *A Tutorial on the LQG/LTR Method*, ACC, pp 1289-1296.
- [2] G.J. Balas, J.C. Doyle, K. Glover, A. Packard and R. Smith (1991), *Analysis and Synthesis Toolbox*, Musyn Inc. and The MathWorks Inc.
- [3] B.R. Barmish and H.I. Kang (1993), *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp 13-35. *A Survey of Extreme Point Results for Robustness of Control Systems*
- [4] R.Y. Chiang and M.G. Safonov (1992), *Robust Control Toolbox*, The MathWorks Inc.
- [5] D.W. Clarke, C. Mothadi and P.S. Tuffs (1987) *Generalized Predictive Control. Parts I and II*, *Automatica*, Vol. 23, No. 2 pp 137-160
- [6] B.M. Chen, A. Saberi and P. Sannuti (1991) *A New Stable Compensator Design from Exact and Approximate Loop Transfer Recovery Automatica*, Vol. 27, No. 2, pp 257-280.
- [7] B.M. Chen, A. Saberi and P. Sannuti (1992) *Necessary and Sufficient Conditions for a Nonminimum Phase Plant to have a Recoverable Target Loop - A Stable Compensator Design from LTR*, *Automatica*, Vol.28, No.3, pp 493-507.
- [8] P. Dorato, R. Tempo and G. Muscato (1993) *Bibliography on Robust Control*, *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp 201-213.
- [9] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar, and B.A. Francis (1989), *State-Space Solutions to Standard H<sub>2</sub> and H<sub>∞</sub> Control Problems*, *Transactions on Automatic Control*, Vol. 34, No. 8, pp 831-846.
- [10] J.C. Doyle, and G. Stein (1979) *Robustness with Observers* *IEEE Transactions on Automatic Control* Vol. AC-24, No. 4, pp 607-611.
- [11] J. C. Doyle, and G. Stein (1981), *Multivariable Feedback*



- Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis*. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-26, No. 1, pp 4-16.
- [12] D.J. Freeman, R. Whalley and M.G. Waugh (1982), *Ship Motion and Computer Control* Fourth International Symposium on Ship Operation Automation, Genova (Italy).
- [13] I. Horowitz (1982). *Quantitative Feedback Theory*, Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Part D, 129, pp 215-226.
- [14] J. Lunze (1989), *Robust Multivariable Feedback Control*. Prentice Hall.
- [15] J.M. Maciejowski, (1989) *Multivariable Feedback Design*. Adison Wesley.
- [16] M. Morari and E. Zafiriou (1989), *Robust Process Control*, Prentice Hall.
- [17] M.G. Safonov, and M. Athans (1977), *Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators*, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 2, pp 415-422.
- [18] G. Stein and M. Athans (1987) *The LQR/LTR Procedure for Multivariable Feedback Control Design*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, No.2, pp 105-113.
- [19] P.M. Thompson (1988), *Program CC, Tutorial and User's Guide*, Systems Technology Inc.
- [20] G. Zames and B.A. Francis (1983), *Feedback Minimax Sensitivity and Optimal Robustness*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-28, No. 5, pp 585-601.
- [21] Z. Zhang and J.S. Freudenberg (1990), Loop Transfer Recovery for Nonminimum Phase Plants IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 35, No. 5, pp 547-553.
- [22] Z. Zhang and J.S. Freudenberg (1993), Discrete-time Loop Transfer Recovery for Systems with Nonminimum Phase Zeros and Time Delays, Automatica, Vol. 35, No. 2, pp 351-363.

### Panel ADIE para el SIMO 95

## **LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS PARA LA EDUCACIÓN A DISTANCIA: ESTADO ACTUAL Y PERSPECTIVAS EN ESPAÑA**

#### **Coordinadora:**

Dña. M. Felisa Verdejo

*Catedrática. U.N.E.D., Miembro del WG 3.6 (Distance Learning) de la I.F.I.P.*

#### **Participantes:**

D. Santiago Lorente

*Sociólogo, colaborador del C.I.T.A.M., Universidad Politécnica de Madrid.*

Dña. Encarna Pastor

*Coordinadora Científica de Proyectos Europeos. C.I.C.Y.T.*

D. Carlos San José

*Consejero Técnico Programa Nuevas Tecnologías. Ministerio de Educación y Ciencias.*

D. Ricardo Valle

*Director, G.A.T.E., Universidad Politécnica de Madrid.*

D. Antolín Velasco

*Director de Formación y Desarrollo de Recursos Humanos. Telefónica.*