

2.19.92 69 LBS 1003547

043
106

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

Universidad de Sevilla
Dto. de Análisis Matemático

DIFERENCIACIÓN RESPECTO DE DOMINIOS, REGULARIDAD L^r PARA LOS PROBLEMAS DE STOKES Y NAVIER-STOKES Y APLICACIONES EN CONTROL GEOMÉTRICO

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA DE ESTUDIOS

Queda registrado en la Biblioteca
al folio 22 número 67 de la lista
correspondiente.
Sevilla, 14 SEP 1992

Director del Registro de Tesis,

Vº.Bº.: EL DIRECTOR DEL TRABAJO:

Fdo.: Enrique Fernández Cara.
Catedrático de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla.

Memoria presentada por
Juan Antonio Bello Jiménez, para optar
al grado de Doctor en Matemáticas.
Sevilla, Agosto de 1992.

Fdo.: Juan Antonio Bello Jiménez.

A Salud
y a nuestras hijas

Mi agradecimiento

Al Profesor Dr. D. Enrique Fernández Cara por su valiosa y acertada dirección.

A todos los miembros del Grupo de Investigación ECUADIF de la Universidad de Sevilla por su ayuda y colaboración en la realización de este trabajo y en especial:

Al Profesor Dr. D. José Real Anguas por haberme impulsado, hace ya varios años, a reiniciar mis estudios de Doctorado.

Al Profesor Dr. D. José D. Martín Gómez por sus indicaciones bibliográficas.

Al Profesor Dr. D. Francisco Ortegón Gallego por haber resuelto cuántos problemas de tipo informático le he planteado.

Y a mis compañeros M. González Burgos, F. Guillén González y B. Climent Ezquerra por haber atendido con gran interés a mis exposiciones sobre este trabajo.

Sevilla, Agosto de 1992.

INDICE DE MATERIAS

NOTACION	1
CAPITULO 1 INTRODUCCION	3
1.1 Planteamiento del problema, objetivos y antecedentes	3
1.2 Contenidos de la Memoria	6
CAPITULO 2 PLANTEAMIENTO DE UN PROBLEMA GENERAL DE DISEÑO OPTIMO	9
2.1 Planteamiento del problema	9
2.2 Existencia de solución	11
2.3 Familias de dominios. Compacidad	12
2.4 Continuidad del funcional	17
2.5 Derivabilidad del funcional. Aplicaciones	18
2.6 Aproximación numérica	21
CAPITULO 3 ALGUNOS RESULTADOS TECNICOS SOBRE DIFERENCIACION	23
3.1 Derivación de aplicaciones compuestas definidas en todo el espacio	24
3.2 La derivada local de una función definida en un conjunto variable	26
3.3 Diferenciación de un problema de contorno de tipo Dirichlet	29
3.4 Diferenciación de una integral de volumen	33
3.5 Diferenciación de una integral de superficie	34
3.6 Construcción de una prolongación diferenciable del vector normal	38
3.7 Diferenciación de condiciones de contorno naturales	41
CAPITULO 4 PROLONGACION DERIVABLE DEL VECTOR NORMAL: UNA GENERALIZACION	43
4.1 Algunos resultados previos	43
4.2 Prolongación del vector normal: Caso fuerte	49
4.3 Prolongación del vector normal: Caso débil	52
CAPITULO 5 APLICACION I: EL PROBLEMA DEL CONDENSADOR	55
5.1 Planteamiento del problema	55
5.2 Derivada total del potencial eléctrico	56
5.3 Derivada de la capacidad eléctrica	60

CAPITULO 6 REGULARIDAD L^r DE LOS PROBLEMAS DE STOKES Y DE NAVIER-STOKES	63
6.1 Algunos conceptos y resultados de Análisis Funcional	63
6.2 El problema de Stokes: Existencia de solución	79
6.3 Operadores de Stokes generalizados	88
6.4 Regularidad L^2 de la solución del problema de Stokes	92
6.5 Fórmulas de representación asociadas al sistema de Stokes	106
6.6 Potenciales hidrodinámicos	113
6.7 Estimaciones L^r en el interior del dominio	133
6.8 Estimaciones L^r en el dominio (hasta la frontera)	138
6.9 Existencia de solución fuerte	143
6.10 El problema de Navier-Stokes: Existencia y regularidad de solución	148
6.11 Comentarios finales	150
CAPITULO 7 APLICACION II: OBSTACULO DE ARRASTRE MINIMO EN REGIMEN DE NAVIER-STOKES	153
7.1 Planteamiento del problema	153
7.2 Existencia de derivada del par velocidad-presión	158
7.3 Derivada de la energía	164
7.4 Derivada del arrastre	167
7.5 Algunos comentarios finales	170
REFERENCIAS	171

NOTACION

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMATICAS
BIBLIOTECA

\mathbb{R}^N : espacio Euclídeo N -dimensional.

\cdot : producto escalar Euclídeo.

$|\cdot|$: norma Euclídea.

\circ : composición de funciones.

$\subset\subset$: inclusión estricta de conjuntos; $\omega \subset\subset \Omega$ equivale a $\bar{\omega} \subset \Omega$.

$*$: convolución de funciones.

Ω : abierto de \mathbb{R}^N .

$\partial\Omega$: frontera del abierto Ω .

$\bar{\Omega}$: adherencia de Ω .

\mathbf{n} : vector normal (a $\partial\Omega$) unitario exterior a Ω .

f : función definida en un abierto Ω con valores en \mathbb{R} .

\mathbf{f} : función definida en un abierto Ω con valores en \mathbb{R}^N .

$D_{i_1, i_2, \dots, i_m} f$: $\frac{\partial^{|\mathbf{i}|} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_m}}$ (en el sentido de las distribuciones);
 $|\mathbf{i}| = i_1 + i_2 + \dots + i_m$.

Df : $(D_1 f, D_2 f, \dots, D_N f)$.

$D^\alpha f$: $(D_{i_1, i_2, \dots, i_m} f)_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_m \leq N, |\mathbf{i}| \leq \alpha}$.

grad : operador gradiente, (D_1, D_2, \dots, D_N) .

div : operador divergencia, $\text{div } \mathbf{f} = \sum_{i=1}^N D_i f_i$.

Δ : operador de Laplace, $\Delta = \sum_{i=1}^N D_{ii}$.

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$: derivada en la dirección del vector normal \mathbf{n} .

dx : elemento diferencial de volumen; se omite cuando no hay lugar a confusión.

dS : elemento diferencial de superficie.

$C^m(\Omega)$: espacio de funciones reales tales que, cuando $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha f$ es continua en Ω .

$C^{m,h}(\bar{\Omega})$: espacio de funciones reales que son restricciones a $\bar{\Omega}$ de funciones de $C^m(\mathbb{R}^N)$ y son tales que, cuando $|\alpha| = m$, $D^\alpha f$ verifica la condición de Hölder con exponente h en $\bar{\Omega}$.

$C_c^\infty(\Omega)$ ó $\mathcal{D}(\Omega)$: espacio de funciones de $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto contenido en Ω .

$\mathcal{D}'(\Omega)$: espacio de las distribuciones, dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$ (cuando este espacio vectorial se supone dotado de la topología límite inductivo habitual).

$L^r(\Omega)$: espacio de funciones reales f tales que $|f|^r$ es integrable Lebesgue en Ω .

$L_{loc}^r(\Omega)$: espacio de funciones reales f que pertenecen a $L^r(K)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

$W^{m,r}(\Omega)$: espacio de funciones f tales que $D^\alpha f \in L^r(\Omega)$ cuando $|\alpha| \leq m$.

$W_{loc}^{m,r}(\Omega)$: espacio de funciones f tales que $D^\alpha f \in L_{loc}^r(\Omega)$ cuando $|\alpha| \leq m$.

$H^m(\Omega)$: $W^{m,2}(\Omega)$.

$W_0^{m,r}(\Omega)$: espacio de funciones de $W^{m,r}(\Omega)$ con traza nula sobre $\partial\Omega$.

$W^{-m,r'}(\Omega)$: dual de $W_0^{m,r}(\Omega)$ con $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

$\|\cdot\|_E$: norma en un espacio de Banach E .

$|\cdot|_{m,r;\Omega}$: seminorma habitual de orden m en el espacio $W^{m,r}(\Omega)$.

$\|\cdot\|_{m,r,\Omega}$: norma habitual en el espacio $W^{m,r}(\Omega)$.

$\|\cdot\|_{m,\Omega}$: norma habitual en el espacio $H^m(\Omega)$.

$\|\cdot\|_k$: norma habitual en el espacio $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ (se utiliza sólo para las variaciones u).

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: dualidad entre un espacio de Banach E y su dual E' .

$E(\Omega)$ ó $E(\Omega; \mathbb{R}^N)$: $E(\Omega)^N$, para cada espacio de funciones reales $E(\Omega)$.

CAPITULO 1

Introducción

En esta Memoria, estudiaremos ciertas cuestiones relacionadas con problemas generales de diseño óptimo, también llamados problemas de control geométrico y, en particular, con la determinación de carenas de arrastre mínimo (perfiles aerodinámicos óptimos) en régimen de Navier-Stokes.

1.1 Planteamiento del problema, objetivos y antecedentes

Los datos de un problema de diseño óptimo son el control, que es un abierto Ω perteneciente a una familia de dominios admisibles Ω_{ad} , el estado del sistema $z(\Omega)$, que nosotros supondremos solución de un problema en derivadas parciales planteado en Ω , y una función de coste $\Omega \rightarrow J(\Omega)$, cuyos valores vienen dados por una integral extendida a Ω , $\partial\Omega$ ó un dominio fijo D con integrando de la forma $\mathcal{C}(\Omega, z(\Omega))$, pudiendo depender \mathcal{C} de algunas derivadas parciales de z . El objetivo del problema de diseño óptimo es la determinación de un dominio $\Omega^* \in \Omega_{ad}$ que minimice el coste J ; recibe el nombre de problema de diseño óptimo, ó de control geométrico, debido a que la variable que controla es un dominio.

El nuestro no es más que un problema de control óptimo muy particular. En consecuencia, interesa obtener resultados ligados a la

- i) Existencia de dominio óptimo,
- ii) Caracterización del ó de los dominios óptimos,
- iii) Construcción de algoritmos que calculen dominios óptimos.

Es bien sabido que ii) y iii) reposan sobre el conocimiento de una "derivada" de la función $\Omega \rightarrow J(\Omega)$ y es en este aspecto del problema en el que se centra este trabajo. En los problemas de optimización usuales, la variable control pertenece generalmente a una parte de un espacio vectorial, por lo que es posible hablar de (al menos) la derivada-Gâteaux de J ; este hecho no se da en los problemas de control geométrico (no se dispone de una estructura de espacio vectorial adecuada sobre las familias de abiertos admisibles usuales y ésta es realmente la mayor dificultad que se presenta a la hora de abordar el problema).

Los objetivos perseguidos en esta Memoria fueron, en principio, tres:

a) Definir una “derivada” de la función

$$\Omega \in \Omega_{ad} \longrightarrow J(\Omega) \in \mathbb{R}.$$

b) Estudiar la existencia de esta derivada y calcularla, dando una expresión lo más sencilla posible, con vistas a que de ella se puedan deducir fácilmente condiciones que caractericen al ó a los dominios óptimos, así como información útil para el diseño de algoritmos iterados.

c) Aplicar los resultados anteriores a dos casos de interés:

- Optimización de la forma de un condensador eléctrico,
- Diseño óptimo de un cuerpo aerodinámico (carena) que se mueve en un flujo en régimen de Navier-Stokes.

A la hora de aplicar los resultados anteriores en la segunda de estas situaciones, nos encontraremos además con la necesidad de generalizar los resultados existentes sobre regularidad de solución del problema de Stokes y del problema de Navier-Stokes, planteándonos un cuarto objetivo:

d) Estudiar la regularidad L^r de las soluciones de los problemas de Stokes y de Navier-Stokes.

Para definir un concepto de derivada, será necesario elegir un cuadro adecuado para expresar la idea de “variación” del coste respecto del dominio; más concretamente, habrá que dar un sentido a la frase

$$“ \Omega \longrightarrow J(\Omega, z(\Omega)) \text{ es diferenciable en } \Omega_0 ”$$

y, para ello, habrá que definir sin ambigüedad el concepto de “proximidad” entre dominios. Esto suele hacerse recurriendo a alguno de los tres métodos siguientes:

i) **Método de los incrementos sobre la normal:** Introducido por Hadamard en [27], ha sido utilizado por diversos autores entre los que destacamos a O. Pironneau, A. Marrocco y E. Fernández-Cara (cf. [18, 19, 33, 39, 40, 41]).

ii) **Método de las variaciones de la función característica:** Introducido por Cea, Gioan y Michel en [9], ha sido utilizado también por Chenais (cf. [12]).

iii) **Método de las variaciones distribuidas (representaciones por difeomorfismos próximos a la identidad):** Introducido por Garabedian y Schiffer en [23], ha sido utilizado por F. Murat y J. Simon. Este método será utilizado en este trabajo.

En relación con el método de las variaciones distribuidas, se considera un dominio inicial denotado Ω y se supone que la familia de dominios admisibles viene dada por

$$\Omega_{ad} = \{ \Omega + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{W} \},$$

siendo W una parte de un espacio normado de funciones $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ convenientemente elegido (cf. [36, 35]); el método consiste, esencialmente, en convertir la dependencia de J respecto de cualquier dominio próximo a Ω , en una dependencia respecto de una función u de norma pequeña. Así, para cada $u \in W$, se consideran el dominio $\Omega + u$, el estado $z(u) \equiv z(\Omega + u)$ y el coste $J(\Omega + u)$ y se estudia la derivabilidad-Fréchet de la función

$$u \rightarrow J(\Omega + u)$$

en un entorno de 0 en W . Para ello, se sigue la siguiente estrategia:

- i) Se prueba, en cada caso concreto, la existencia de derivada de la aplicación

$$u \rightarrow z(u) \circ (I + u)$$

en un entorno de 0 en W . A ésta se le llama derivada total de $u \rightarrow z(u)$ y su valor en la dirección u se denota $\dot{z}(u)$.

ii) Se define el concepto de derivada local de la aplicación $u \rightarrow z(u)$ y se prueba su existencia bajo hipótesis de existencia de la derivada total. La derivada local en 0 en la dirección u se denota $z'(u)$ y se demuestra que es solución de un problema de contorno deducido del verificado por el estado $z(u)$.

iii) Se prueba la derivabilidad de $u \rightarrow J(\Omega + u)$ en un entorno de 0 en W .

iv) Para aquellos casos en los que es necesario derivar condiciones de contorno de tipo flujo ó de tipo Neumann, se define una prolongación del vector normal unitario exterior a $\Omega + u$, $n(u) \equiv n(\Omega + u)$, a todo el espacio y se prueba que la prolongación es derivable respecto de u .

También en [35, 36, 43], se prueba la existencia de derivada total del estado en algunos casos particulares, uno de los cuales, el problema del condensador de capacidad mínima, recordamos en el Capítulo 5.

Todas las etapas anteriores, así como el ejemplo del condensador, están desarrolladas con detalle en un curso (cf. [47]) impartido por J. Simon en la Universidad de Sevilla. También, junto con algunas generalizaciones y más ejemplos, en el libro [6], actualmente en preparación.

Los resultados de diferenciación respecto de dominios anteriormente referenciados se prueban bajo hipótesis de regularidad del estado $z(u)$; más precisamente, se supone la pertenencia de $z(u)$ a $W^{m,r}(\Omega + u)$ para algún $m \geq 1$ y algún $r \in [1, \infty)$; por otro lado, la hipótesis de regularidad que se suele hacer sobre los dominios $\Omega + u$ es que sean de clase $W^{k,\infty}$ (cf. Definición 2.2) para algún $k \geq 1$; interesará tener, en los ejemplos concretos, m lo mayor posible (regularidad máxima del estado) y k lo más pequeño posible (regularidad mínima de los dominios y, por tanto, familia de dominios admisibles más amplia).

Al aplicar los resultados de diferenciación al problema de diseño óptimo de una carena, se observa que el espacio apropiado en el que debe estar el estado, que es la solución $(y(\mathbf{u}), p(\mathbf{u}))$ del problema de Navier-Stokes, es $H^2(\Omega + \mathbf{u}) \times H^1(\Omega + \mathbf{u})$ y la regularidad apropiada para los dominios $\Omega + \mathbf{u}$ es la regularidad $W^{2,\infty}$. Sin embargo, los resultados de regularidad para los problemas de Stokes y de Navier-Stokes de que se disponía con anterioridad a esta Memoria (cf. Capítulo 6) sólo aseguraban la pertenencia de la solución al espacio $W^{m+2,r}(\Omega + \mathbf{u}) \times W^{m+1,r}(\Omega + \mathbf{u})$ con $m \geq -1$ y $r \in (1, \infty)$, siempre que, además de otras hipótesis de regularidad sobre los datos del problema, se tenga que $\Omega + \mathbf{u}$ es de clase C^μ con $\mu = \max\{m+2, 2\}$ (cf. aptdo. 6.2.3 y Sección 6.10). Por ejemplo, en el marco de una ecuación elíptica lineal, se tienen resultados del mismo tipo cuando $\Omega + \mathbf{u}$ es sólo de clase $W^{2,\infty}$ (cf. [26]); resulta por tanto conveniente generalizar los resultados de regularidad del problema de Stokes a esta clase de dominios, marcándonos esta generalización como un objetivo más de este trabajo.

1.2 Contenidos de la Memoria

Los principales resultados originales que contiene esta Memoria están desarrollados en los Capítulos 4, 6 y 7. En primer lugar (Capítulo 4), definimos prolongaciones derivables del vector normal para dominios de clase $W^{2,\infty}$ y también para dominios de clase $W^{1,\infty}$, con aplicación particular al caso en que el dominio es poliédrico. En el Capítulo 6, probamos la regularidad L^r de la solución del problema de Stokes y del problema de Navier-Stokes para dominios de clase $W^{2,\infty}$. En el Capítulo 7, aplicamos los resultados anteriores a la demostración de la existencia y al cálculo de la derivada respecto del dominio de la resistencia al arrastre que opone un cuerpo que se mueve en un flujo de Navier-Stokes; también se demuestra que existe y se calcula la derivada de la aplicación que define la energía disipada en el fluido, que es una buena aproximación del arrastre.

En el Capítulo 2, planteamos el problema general de diseño óptimo y hacemos un breve análisis de los diversos aspectos del problema: existencia de solución, familias de dominios admisibles y su compacidad, continuidad y derivabilidad del funcional de coste y aproximación numérica.

En el Capítulo 3, presentamos algunos resultados técnicos, ya conocidos, sobre diferenciación respecto de dominios. En primer lugar, probamos la derivabilidad de aplicaciones compuestas definidas en todo el espacio y, después, la derivabilidad local de una función definida en un conjunto variable. Luego, damos resultados de diferenciabilidad de problemas de contorno de tipo Dirichlet, así como de integrales de volumen y de integrales de superficie. Por último, recordamos la construcción de una prolongación diferenciable del vector normal (válida en condiciones de regularidad para el dominio) y su aplicación a la diferenciación de condiciones de contorno naturales.

En el Capítulo 4, construimos una prolongación diferenciable del vector normal bajo hipótesis de regularidad más débiles sobre el dominio inicial Ω y probamos su diferenciabilidad; previamente hemos probado generalizaciones necesarias de los resultados de derivabilidad de la aplicación compuesta definida en todo el espacio.

En el Capítulo 5, aplicamos los resultados de los Capítulos 2 y 3 al problema de diseño óptimo de un condensador eléctrico de capacidad mínima. Comenzamos por plantear el problema, dando después un resultado de existencia del estado del sistema (potencial eléctrico) y haciendo alusión a resultados de existencia de condensador óptimo. Después, bajo hipótesis de regularidad para los dominios $\Omega + \mathbf{u}$, probamos la existencia de derivada total del potencial eléctrico y deducimos la existencia de derivada de la capacidad, obteniendo una expresión sencilla para la misma.

El Capítulo 6 está dedicado, como se ha dicho, a la regularidad L^r de la solución del problema de Stokes y del problema de Navier-Stokes. El punto de vista adoptado y la estrategia elegida constituyen el análogo de lo que se hace en [26] en el caso de una ecuación elíptica, utilizando los potenciales apropiados, que fueron introducidos por F.K.G. Odqvist en [38]. Después de recordar algunos resultados previos de Análisis Funcional, planteamos el problema de Stokes y recordamos algunos resultados de existencia, unicidad y regularidad de la solución. A continuación, introducimos los operadores que llamaremos generalizados de Stokes. Haciendo uso de cocientes de diferencias y de la formulación mixta del problema de Stokes probamos, en primer lugar, bajo ciertas hipótesis de regularidad para los datos, la regularidad L^2 de la solución débil. Con vistas a probar la regularidad L^r , $r \neq 2$, de la solución débil, comenzamos demostrando fórmulas de representación, previo cálculo de las soluciones fundamentales singulares del problema. Luego, definimos los potenciales hidrodinámicos y probamos resultados de existencia y regularidad de los mismos. A continuación, probamos estimaciones L^r "a posteriori" en el interior del dominio y hasta la frontera, para finalmente probar la existencia y unicidad de solución fuerte. Después, planteamos el problema de Navier-Stokes, recordamos un resultado de existencia de solución y probamos un Teorema de regularidad L^r de la misma.

En el Capítulo 7, aplicamos los resultados anteriores al diseño de carenas óptimas. Comenzamos planteando el problema y recordando resultados de existencia, unicidad y regularidad del estado del sistema; luego, justificamos la aproximación del arrastre por la energía disipada en el fluido y hacemos referencia a algunos resultados de existencia de carena óptima. A continuación, bajo hipótesis de regularidad sobre los dominios $\Omega + \mathbf{u}$, probamos la existencia de derivada total del estado y deducimos de ello la existencia de derivada local y el problema de contorno del que ésta es solución. Después, probamos la existencia de derivadas de la energía y del arrastre y deducimos expresiones "sencillas" de las mismas.

CAPITULO 2

Planteamiento de un problema general de diseño óptimo

En este Capítulo planteamos un problema general de diseño óptimo. Comenzamos con el planteamiento del problema y damos en la Sección siguiente un resultado de existencia de solución. En la Sección 2.3, describimos varias familias de abiertos adaptados al tratamiento del problema, así como resultados de compacidad de estas familias para topologías convenientes. En las Secciones 2.4 y 2.5 describimos algunos métodos que pueden ser utilizados para obtener las propiedades de continuidad y diferenciabilidad del funcional coste J . Por último, en la Sección 2.6, citamos algunas referencias en las que se trata la aproximación numérica del problema.

2.1 Planteamiento del problema

Dado un abierto acotado Ω de \mathbf{R}^N ($N = 2$ ó 3), se considera el estado del sistema, $z(\Omega)$, solución de un problema de contorno en Ω :

$$(2.1) \quad \begin{cases} Az(\Omega) = 0 & \text{en } \Omega, \\ Bz(\Omega) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

y se define un coste real por alguna de las funciones

$$(2.2) \quad J_1(\Omega) = \int_{\Omega} C_1(z(\Omega)) dx$$

ó

$$(2.3) \quad J_2(\Omega) = \int_D C_2(z(\Omega)) dx$$

ó

$$(2.4) \quad J_3(\Omega) = \int_{\partial\Omega} C_3(z(\Omega)) dS$$

donde \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 y \mathcal{C}_3 son operadores y funciones (lineales ó no) definidos en todo \mathbb{R}^N . \mathcal{A} es un operador en derivadas parciales; en esta Memoria, sólo consideraremos casos particulares en los que \mathcal{A} es de segundo orden. \mathcal{B} es un operador de contorno "compatible" con \mathcal{A} . Por otra parte, las \mathcal{C}_i actúan sobre las soluciones $z(\Omega)$ de los problemas (2.1) y/ó sobre algunas de sus derivadas parciales. Se supone además que $\partial\Omega$ es la frontera de Ω y que D es un abierto fijo de \mathbb{R}^N tal que $\bar{D} \subset \Omega$.

Se supone que, bajo ciertas hipótesis de regularidad sobre Ω , el problema (2.1) tiene solución única suficientemente regular para que tengan sentido (2.2)–(2.4).

El problema de diseño óptimo consiste en determinar un abierto Ω^* en una familia Ω_{ad} de abiertos "admisibles" tal que

$$(2.5) \quad J(\Omega^*) \leq J(\Omega) \quad \forall \Omega \in \Omega_{ad},$$

denotando J de manera genérica una de las tres funciones (2.2)–(2.4).

El problema (2.5), no es más que un problema de control, en el cuál la variable control es la forma geométrica de un dominio. En consecuencia, al tratarse de un caso particular de problema de optimización, interesa obtener, en el marco de (2.5), resultados de

- i) Existencia de un dominio óptimo.
- ii) Caracterización del ó de los dominios óptimos.
- iii) Construcción de algoritmos que calculen dominios óptimos.

Es bien sabido que los problemas ii) y iii) están íntimamente ligados al conocimiento de una derivada de la aplicación

$$\Omega \in \Omega_{ad} \rightarrow J(\Omega) \in \mathbb{R}.$$

Esta Memoria está centrada en el estudio de la existencia y del cálculo de esta derivada. No obstante, damos en este Capítulo unas breves ideas sobre los demás aspectos de los problemas de diseño óptimo.

En los problemas de control usuales, el control pertenece en general a una parte de un espacio normado, y se utilizan las propiedades de continuidad de J sobre este espacio para analizar i) y las de derivabilidad para ii) y iii). En los problemas de diseño óptimo, también llamados de control geométrico, la dificultad radica en que, en general, no se dispone de una estructura de espacio vectorial adecuada sobre las familias de dominios admisibles, para así poder aplicar la teoría general. Esto nos obliga a restringir las familias consideradas en cada caso y a dotarlas de topologías convenientes. La obtención de resultados va a depender evidentemente de la clase de dominios con los que operemos. La elección de esta clase debe responder a dos imperativos contradictorios: por un lado, es necesario que sea bastante reducida para que admita un óptimo y más reducida aún para que exista la derivada del funcional J ; por otro lado, debe ser suficientemente

amplia como para que contenga a los dominios que se presentan en la práctica. Las consideraciones anteriores hacen que los resultados que se obtienen sean sólo parciales y, en particular, la unicidad de solución difícil de probar.

2.2 Existencia de solución

Sea Ω_{ad} una familia de abiertos "admisibles" de \mathbb{R}^N ; supongamos que para cada $\Omega \in \Omega_{ad}$ el problema de contorno (2.1) posee solución única $z(\Omega)$ en un espacio de Hilbert $V(\Omega)$, asociado al dominio Ω , de forma que está bien definido alguno de los funcionales (2.2)–(2.4) y consideremos el problema (2.5).

Con el fin de analizar la existencia de solución de (2.5), necesitamos tener dotado Ω_{ad} de una topología; denotamos

$$\Omega_k \rightarrow \Omega \quad \text{en } \Omega_{ad}$$

la convergencia de la sucesión de dominios (Ω_k) hacia Ω en esta topología. Asimismo, precisamos de una noción de convergencia de una sucesión (z_k) de funciones definidas, para cada $k \geq 1$, en Ω_k a una función z definida en Ω ; denotamos

$$z_k \rightarrow z$$

esta convergencia.

Consideremos el conjunto

$$G = \{(\Omega, z(\Omega)) \mid \Omega \in \Omega_{ad}\},$$

y supongamos que tenemos dada una función

$$(\Omega, z) \in \Omega_{ad} \times V(\Omega) \rightarrow I(\Omega, z) \in \mathbb{R},$$

de forma que para todo $\Omega \in \Omega_{ad}$ se verifica $J(\Omega) = I(\Omega, z(\Omega))$. Hacemos las siguientes hipótesis:

Hipótesis (H1): G es compacto en el sentido siguiente: Si $(\Omega_k) \subset \Omega_{ad}$ es una sucesión arbitraria, existe una subsucesión, también denotada $((\Omega_k, z(\Omega_k)))$ y un elemento $(\Omega, z(\Omega)) \in G$, tal que

$$\begin{aligned} \Omega_k &\rightarrow \Omega, \\ z(\Omega_k) &\rightarrow z(\Omega), \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow \infty$. ■

Hipótesis (H2): I es semicontinuo inferiormente (s.c.i.): Sea, por un lado, (Ω_k) una sucesión contenida en Ω_{ad} y sea Ω un dominio de Ω_{ad} de forma que $\Omega_k \rightarrow \Omega$; por

otro lado, sea (z_k) una sucesión tal que para cada $k \geq 1$ se tiene $z_k \in V(\Omega_k)$; si $z \in V(\Omega)$ y $z_k \rightarrow z$, entonces

$$\liminf I(\Omega_k, z_k) \geq I(\Omega, z). \blacksquare$$

En [28] se prueba el siguiente

Teorema 2.1 *Si se verifican las hipótesis (H1) y (H2), entonces existe al menos una solución $\Omega^* \in \Omega_{ad}$ de (2.5).* ■

2.3 Familias de dominios. Compacidad

Hemos visto en la Sección precedente que la Demostración de existencia de solución precisa fijar una topología en Ω_{ad} (de hecho, fijar una noción de convergencia) y la compacidad de Ω_{ad} para esta topología. En esta Sección, realizamos el estudio particularizado correspondiente para algunas familias de dominios.

2.3.1 Abiertos de frontera Lipschitziana

La siguiente Definición es debida a Nečas [37]:

Definición 2.2 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N . Se dice que la frontera de Ω , $\partial\Omega$, es continua, si existen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{unos números } \gamma > 0, \beta > 0, \\ \text{unos sistemas ortonormales de coordenadas } (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_N}) \\ \text{(en breve } (x'_j, x_{j_N})), j = 1, 2, \dots, M, \text{ y} \\ \text{funciones } \varphi_j, \text{ definidas y continuas en las clausuras de los cubos} \\ \Delta_j = \{ x'_j \in \mathbb{R}^{N-1}, |x_{j_i}| < \gamma \text{ para } i = 1, 2, \dots, N-1 \}, \end{array} \right.$$

de forma que cada punto $x \in \partial\Omega$ puede ser representado en alguno de estos sistemas bajo la forma $x = (x'_j, \varphi_j(x'_j))$ y se verifica

$$\{(x'_j, x_{j_N}) \mid x'_j \in \bar{\Delta}_j, \varphi_j(x'_j) < x_{j_N} < \varphi_j(x'_j) + \beta\} \subset \Omega,$$

$$\{(x'_j, x_{j_N}) \mid x'_j \in \bar{\Delta}_j, \varphi_j(x'_j) - \beta < x_{j_N} < \varphi_j(x'_j)\} \subset \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega},$$

para todo $j = 1, 2, \dots, M$.

Se dice que Ω es de clase $C^{m,h}$, $h \in (0, 1]$, si las funciones φ_j pertenecen a $C^{m,h}(\bar{\Delta}_j)$, para cada $j = 1, 2, \dots, M$.

Se dice que Ω es de clase $W^{m,\infty}$, si las funciones φ_j pertenecen a $W^{m,\infty}(\bar{\Delta}_j)$, para cada $j = 1, 2, \dots, M$. Cuando $m = 1$, diremos que Ω es Lipschitziano (también llamado grafo-Lipschitziano, globalmente Lipschitziano o Lipschitz-continuo). ■

Representamos cada punto x de \mathbb{R}^N en la forma $x = (x', x_N)$; se denota

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_+^N &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}, \\ \overline{\mathbb{R}_+^N} &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N \geq 0\}. \end{aligned}$$

Dado un dominio G de \mathbb{R}^N cuya intersección con $\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N = 0\}$ es no vacía, denotamos

$$(2.7) \quad \begin{aligned} G^+ &= G \cap \mathbb{R}_+^N, \\ (\partial G)^+ &= (\partial G) \cap \mathbb{R}_+^N, \\ \Gamma_0(G) &= G \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid x_N = 0\}. \end{aligned}$$

Con la notación anterior, se tiene que la Definición de dominios de clase $W^{m,\infty}$, $m \geq 2$, es equivalente a la que sigue (cf. [36], [26]):

Definición 2.3 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N . Se dice que Ω es de clase $W^{m,\infty}$ si, para cada punto $x \in \partial\Omega$, existen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{un entorno } \mathcal{U} \text{ de } x, \\ \text{un entorno } \mathcal{V} \text{ de } 0, \text{ en } \mathbb{R}^N, \\ \text{un difeomorfismo } \Psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U} \text{ de clase } W^{m,\infty} \\ \text{(i.e., } \Psi \text{ biyectiva, } \Psi \in W^{m,\infty}(\mathcal{V}), \Psi^{-1} \in W^{m,\infty}(\mathcal{U}) \text{),} \end{array} \right.$$

tales que

$$\Psi(0) = x, \quad \Psi(\Gamma_0(\mathcal{V})) = \partial\Omega \cap \mathcal{U}, \quad \Psi(\mathcal{V}^+) = \Omega \cap \mathcal{U}. \blacksquare$$

Para $m = 1$, existe un ejemplo (cf. [36]), debido a Zerner, de un dominio que verifica la condición anterior y que no es Lipschitziano.

Dado que Ω es acotado, se tiene que $\partial\Omega$ es compacto. Por tanto, cuando Ω es de clase $W^{m,\infty}$, existen

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{abiertos } \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_M \text{ que recubren a } \partial\Omega, \\ \text{bolas } B_{R_j} = B(0, R_j), \quad j = 1, 2, \dots, M, \text{ en } \mathbb{R}^N, \\ \text{difeomorfismos } \Psi^j : B_{R_j} \rightarrow \mathcal{U}_j \text{ de clase } W^{m,\infty}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ \text{(i.e., para cada } j = 1, 2, \dots, M, \Psi^j \text{ es biyectivo,} \\ \Psi^j \in W^{m,\infty}(B_{R_j}) \text{ y } (\Psi^j)^{-1} \in W^{m,\infty}(\mathcal{U}_j) \text{),} \end{array} \right.$$

tales que, para $j = 1, 2, \dots, M$, se tiene

$$\Psi^j(\Gamma_0(B_{R_j})) = \partial\Omega \cap \mathcal{U}_j \quad \text{y} \quad \Psi^j(B_{R_j}^+) = \Omega \cap \mathcal{U}_j.$$

Ahora, dado un abierto \mathcal{U}_{M+1} tal que $\overline{\mathcal{U}_{M+1}} \subset \Omega$ y $\bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^{M+1} \mathcal{U}_j$, tendremos un recubrimiento abierto finito de $\bar{\Omega}$. Por tanto, existe una partición de la unidad en $\bar{\Omega}$ asociada a este recubrimiento, es decir, existen $M + 1$ funciones $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{M+1}$, que verifican

$$\eta_j \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_j), \quad 0 \leq \eta_j \leq 1, \quad \text{en } \mathcal{U}_j, \quad 1 \leq j \leq M + 1,$$

y

$$\sum_{j=1}^{M+1} \eta_j(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

2.3.2 Abiertos con la propiedad interior del cono restringido

La familia de abiertos que describimos a continuación fué introducida por Chenais en [12]:

Definición 2.4 Sean $h > 0$ y $\theta \in (0, \pi/2)$ dos números dados, y ξ un elemento de \mathbb{R}^N tal que $|\xi| = 1$. Llamaremos cono de ángulo θ , altura h y eje ξ al conjunto

$$C(\xi, \theta, h) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x \cdot \xi > |x| \cos \theta, \quad |x| < h\}. \blacksquare$$

Definición 2.5 Sean $\theta \in (0, \pi/2)$, $h > 0$, $r > 0$ ($2r \leq h$) tres números dados. Un subconjunto Ω de \mathbb{R}^N se dice que satisface la propiedad interior del cono cuando

$$\forall x \in \partial\Omega, \quad \exists C_x = C(\xi_x, \theta, h),$$

cono de ángulo θ y altura h tal que

$$\forall y \in B(x, r) \cap \Omega, \quad y + C_x \subset \Omega$$

($B(x, r)$ denota la bola de centro x y radio r). \blacksquare

Definición 2.6 Sea \mathcal{O} un abierto acotado de \mathbb{R}^N . $\Pi(\theta, h, r)$ es la familia de todos los abiertos contenidos en \mathcal{O} que satisfacen la propiedad interior del cono descrita en la Definición anterior. \blacksquare

Definición 2.7 Sean (Ω_k) y Ω dominios de $\Pi(\theta, h, r)$, y denotemos por $\chi(\Omega_k)$, $k \geq 1$, y $\chi(\Omega)$, respectivamente, sus funciones características. Diremos que Ω_k converge a Ω en $\Pi(\theta, h, r)$ si

$$\chi(\Omega_k) \rightarrow \chi(\Omega) \quad \text{en } L^2(\mathcal{O}). \blacksquare$$

Es inmediato que ésta es la convergencia en $\Pi(\theta, h, r)$ asociada a una topología métrica. Para ello, basta introducir la siguiente distancia en $\Pi(\theta, h, r)$:

$$d_2(\Omega_1, \Omega_2) = \|\chi(\Omega_1) - \chi(\Omega_2)\|_{0,2;\mathcal{O}} \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \Pi(\theta, h, r).$$

En lo sucesivo, $\Pi(\theta, h, r)$ designará al mismo tiempo el conjunto de los abiertos de \mathcal{O} que satisfacen la Definición 2.5 y también el espacio métrico obtenido cuando éste se dota de la distancia $d_2(\cdot, \cdot)$. En [12] se prueba el siguiente

Teorema 2.8 $\Pi(\theta, h, r)$ es compacto. ■

Sean γ y k dos números positivos dados; denotamos $Lip(\gamma, k)$ el conjunto de todos los abiertos Ω de clase $W^{1,\infty}$ para los que se pueden tomar todos los sistemas de referencia considerados en la Definición 2.2 con las mismas constantes $\gamma > 0$ y $\beta = k\gamma(N-1)^{1/2}$ y todas las funciones φ_j^Ω con norma en $W^{1,\infty}(\Delta_j^\Omega)$ acotada por k . Se prueba en [12] el siguiente resultado:

Teorema 2.9 i) Para todo θ, h, r , existen γ, k , de forma que

$$\Pi(\theta, h, r) \subset Lip(\gamma, k).$$

ii) Para todo γ, k , existen θ, h, r , de forma que

$$Lip(\gamma, k) \subset \Pi(\theta, h, r). \quad \blacksquare$$

Se deduce el siguiente

Corolario 2.10 $Lip(\gamma, k)$, dotado de la distancia $d_2(\cdot, \cdot)$, es un espacio métrico compacto. ■

2.3.3 Abiertos homeomorfos entre sí

Describimos en este apartado ciertas familias de abiertos homeomorfos entre sí introducidas por Murat-Simon en [36]. Se denota $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N)$, donde $m \geq 0$, el espacio usual de Sobolev y $W^{m,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ el espacio vectorial

$$W^{m,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) = \{u \mid D^\alpha u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \bar{C}(\mathbb{R}^N), \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Aquí, $\bar{C}(\mathbb{R}^N)$ es el espacio de las funciones uniformemente continuas de \mathbb{R}^N en sí mismo. En lo que sigue σ será un índice que puede tomar los valores ∞ ó \bar{c} ; se denota de manera genérica $W^{m,\sigma}(\mathbb{R}^N)$ uno de los espacios $W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N)$ ó $W^{m,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$.

Se prueba en el Cap. II de [36] el siguiente

Lema 2.11 *Fijados $m \geq 1$ y σ , existe $\epsilon_m > 0$ tal que, si $\mathbf{u} \in W^{m,\sigma}(\mathbb{R}^N)$ y $\|\mathbf{u}\|_{m,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \epsilon_m$, entonces*

- i) $I + \mathbf{u}$ es una biyección de \mathbb{R}^N en sí mismo;
- ii) $(I + \mathbf{u})^{-1} - I \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^N)$;
- iii) Existe una constante c_m tal que

$$\|(I + \mathbf{u})^{-1} - I\|_{m,\infty;\mathbb{R}^N} \leq c_m \|\mathbf{u}\|_{m,\infty;\mathbb{R}^N}. \blacksquare$$

Para cada $m \geq 1$ y $\sigma = \infty$ ó \bar{c} , denotemos $\mathcal{V}^{m,\sigma}$ el entorno de 0 de radio ϵ_m en $W^{m,r}(\mathbb{R}^N)$, i.e. el conjunto

$$\mathcal{V}^{m,\sigma} = \{\mathbf{u} \in W^{m,\sigma}(\mathbb{R}^N) \mid \|\mathbf{u}\|_{m,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \epsilon_m\},$$

donde $\epsilon_m > 0$ está dado por el Lema precedente. Fijado $Q \subset \mathbb{R}^N$, se considera la familia de conjuntos

$$\mathcal{D}_Q^{m,\sigma} = \{Q + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{V}^{m,\sigma}\},$$

donde, por definición,

$$Q + \mathbf{u} = \{x + \mathbf{u}(x) \mid x \in \mathbb{R}^N\}.$$

En [36], se prueban numerosas propiedades de esta familia de dominios. Se define allí una pseudo-distancia, dada por

$$d_{m,\sigma}(Q_1, Q_2) = \inf\{\|\mathbf{u}\|_{m,\infty;\mathbb{R}^N} + \|(I + \mathbf{u})^{-1} - I\|_{m,\infty;\mathbb{R}^N} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{V}^{m,\sigma}, Q_1 + \mathbf{u} = Q_2\},$$

para $Q_1, Q_2 \in \mathcal{D}_Q^{m,\sigma}$. También, se recurre a la distancia de Hausdorff entre subconjuntos de \mathbb{R}^N (recuérdese que

$$dist_H(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |y - x| + \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |y - x|$$

para $A, B \subset \mathbb{R}^N$ acotados) y se prueba que $dist_H$ es una distancia sobre $\mathcal{D}_Q^{m,\sigma}$ cuando Q es cerrado y también cuando $Q = \text{int}(\bar{Q})$ (el interior de la adherencia de Q). Además, se verifica el siguiente

Teorema 2.12 *Se supone que Q es un abierto ó un cerrado de \mathbb{R}^N y que es acotado. Sean $Q_0 \in \mathcal{D}_Q^{m,\sigma}$ y $r \geq 0$.*

i) *Sea $m \geq 2$; de toda sucesión $(Q_k) \subset \mathcal{D}_Q^{m,\sigma}$ tal que $d_{m,\sigma}(Q_k, Q_0) \leq r$, se puede extraer una subsucesión convergente en $\mathcal{D}_Q^{m-1,\bar{c}}$ hacia un $Q^* \in \mathcal{D}_Q^{m,\infty}$ tal que $d_{m,\infty}(Q^*, Q_0) \leq r$.*

ii) De toda sucesión $(Q_k) \subset \mathcal{D}_Q^{1,\sigma}$ tal que $d_{1,\sigma}(Q_k, Q_0) \leq r$, se puede extraer una subsucesión $(Q_{k'})$ convergente hacia un $Q^* \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ tal que $d_{1,\infty}(Q^*, Q_0) \leq r$ en el sentido siguiente:

$$\sup \{ \text{dist}_H(Q_{k'}, Q^*), \text{dist}_H(\partial Q_{k'}, \partial Q^*); \text{dist}_H(\mathbb{R}^N \setminus Q_{k'}, \mathbb{R}^N \setminus Q^*) \} \rightarrow 0,$$

cuando $k' \rightarrow \infty$. ■

Este Teorema muestra que las $d_{m,\infty}$ bolas provistas de la pseudo-distancia $d_{m-1,\varepsilon}$ si $m \geq 2$ ó de la distancia de Hausdorff si $m \geq 1$ son compactas.

2.4 Continuidad del funcional

Para probar la continuidad (o semicontinuidad inferior) del funcional coste J , se traslada el problema a un dominio fijo utilizando una de las dos estrategias siguientes:

i) **Método del cambio de variables:** Se aplica cuando la familia de abiertos admisibles con la que operamos está formada por abiertos homeomorfos a uno dado Ω , es decir,

$$\Omega_{ad} = \{T(\Omega) \mid T \in \mathcal{T}_{ad}\},$$

donde \mathcal{T}_{ad} es una familia de difeomorfismos admisibles. Por ejemplo, el problema de diseño óptimo (2.1)–(2.2), es reescrito como un nuevo problema de control donde la variable es T , la ecuación de estado coincide con un problema de contorno en Ω

$$\begin{cases} \mathcal{A}_T z_T(\Omega) = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathcal{B}_T z_T(\Omega) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

y el coste es

$$J_\Omega(T) = \int_\Omega \mathcal{C}_T(z_T(\Omega)) dx.$$

De las propiedades de continuidad de \mathcal{A}_T , \mathcal{B}_T y \mathcal{C}_T , se deduce la continuidad de J . Para algunos casos particulares donde se aplica este método, véase [35] y [36].

ii) **Método de la prolongación:** Se introduce una prolongación $\tilde{z}(\Omega)$ de $z(\Omega)$ a todo un abierto \mathcal{O} que contenga a todos los dominios admisibles, y una “prolongación” asociada $\tilde{\mathcal{C}}$ del operador \mathcal{C} de forma que se tenga

$$J(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\Omega) \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{z}(\Omega)) dx,$$

donde $\chi(\Omega)$ es la función característica de Ω . Si $\tilde{z}(\Omega)$ y $\chi(\Omega)$ dependen continuamente de Ω para topologías convenientes, se tiene la continuidad de J .

Para algunos ejemplos de aplicación, véanse los trabajos de D. Chenais, E. Fernández-Cara, J. Haslinger, P. Neittaanmäki y O. Pironneau ([10, 12, 18, 19, 28, 39, 40, 41]) y las referencias que se dan en ellos. Este método requiere, en general, menor regularidad sobre los dominios considerados, pero no siempre se dispone de una prolongación adecuada.

Más adelante, cf. las Secciones 5.1 y 7.5, analizaremos casos particulares interesantes cuya función coste es semicontinua inferiormente.

2.5 Derivabilidad del funcional. Aplicaciones

Una vez probada la existencia de dominio óptimo, nos interesa su caracterización. Si se desea tratar este problema paralelamente a como se hace en teoría de control óptimo, será necesario elegir un cuadro conveniente para expresar la idea de “variación” del coste respecto del dominio. En otras palabras, hará falta dar un sentido a la frase

$$“\Omega \longrightarrow J(\Omega) \text{ es diferenciable en } \Omega_0”$$

y, para ello, definir sin ambigüedad el concepto de “proximidad” entre dominios. Esto suele conseguirse recurriendo a alguno de los tres métodos siguientes:

i) **Método de los incrementos sobre la normal:** Introducido por Hadamard en [27], ha sido utilizado por diversos autores, entre los que destacamos a E. Fernández-Cara, A. Marroco y O. Pironneau (cf. [18, 19, 33, 39, 40, 41]). Dado un dominio admisible Ω_0 , el método consiste, esencialmente, en convertir la dependencia de J respecto de Ω cerca de Ω_0 en una dependencia respecto de una función escalar $\alpha : \partial\Omega_0 \longrightarrow \mathbf{R}$. Así, para cada α (suficientemente regular y “pequeño”), se considera el correspondiente dominio Ω_α , cuya frontera es

$$\partial\Omega_\alpha = \{x + \alpha \mathbf{n}_0(x) \mid x \in \partial\Omega_0\}$$

($\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}_0(x)$ es el vector normal unitario en x orientado hacia el exterior de Ω_0); se parte de la base de que Ω_α y Ω_β son “próximos” si y sólo si $|\alpha - \beta|$ es “pequeño” y se estudia el comportamiento de la función

$$\alpha \longrightarrow J(\Omega_\alpha)$$

en un entorno de 0.

ii) **Método de las variaciones de la función característica:** Introducido por J. Céa, A. Gioan y J. Michel en [9], ha sido utilizado también por D. Chenais (cf. [10, 12]). Ahora, con ayuda de las funciones características $\chi(\Omega)$ asociadas a los diferentes dominios admisibles (que se suponen incluidos en un mismo abierto \mathcal{O}), es

posible reescribir el problema de diseño óptimo como un problema de control en los coeficientes. La proximidad de dos dominios equivale en este caso a la proximidad de sus funciones características (en el sentido de la norma en $L^1(\mathcal{O})$). Para

$$X_{ad} = \{\chi(\Omega) \mid \Omega \in \Omega_{ad}\},$$

todo se reduce a estudiar el comportamiento (local ó global, hasta donde se pueda) de una función definida en X_{ad} .

iii) Método de las variaciones distribuidas (representaciones por difeomorfismos próximos a la identidad): Introducido por P. R. Garabedjian y M. M. Schiffer en [23], ha sido utilizado por F. Murat y J. Simon. Este método será el utilizado en este trabajo.

En relación con el método de las variaciones distribuidas, se considera un dominio inicial denotado Ω y se supone que la familia de dominios admisibles viene dada por

$$\Omega_{ad} = \{\Omega + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{W}\},$$

con

$$\mathbf{W} = \mathcal{V}^{k,\sigma} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N) \mid \|\mathbf{u}\|_{k,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \epsilon_k\}$$

para k , σ y ϵ_k convenientemente elegidos. Esta elección dependerá de la regularidad que deban tener los dominios considerados; en general, los resultados conocidos de existencia de solución de problemas de contorno exigen que los dominios sean de clase $W^{k,\infty}$ con $k \geq 1$, por lo que habrá que pedirles al menos esta regularidad. Por tanto, \mathbf{u} deberá ser tal que para todo Ω de clase $W^{k,\infty}$, $\Omega + \mathbf{u}$ siga siendo de clase $W^{k,\infty}$. Señalemos que, cuando $k \geq 2$, esto se consigue tomando \mathbf{u} en $\mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Sin embargo, si Ω es de clase $W^{1,\infty}$ y $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, no siempre se verifica que $\Omega + \mathbf{u}$ es de clase $W^{1,\infty}$; hace falta imponer $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,\tilde{c}}(\mathbb{R}^N)$.

Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, se considera el problema de contorno

$$\begin{cases} \mathcal{A}z(\Omega + \mathbf{u}) = 0 & \text{en } \Omega + \mathbf{u}, \\ \mathcal{B}z(\Omega + \mathbf{u}) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u} \end{cases}$$

y, para fijar ideas, la función de coste

$$J(\Omega + \mathbf{u}) = \int_{\Omega + \mathbf{u}} \mathcal{C}(z(\Omega + \mathbf{u})) dx.$$

Estaremos interesados en las variaciones de la función

$$\mathbf{u} \rightarrow J(\Omega + \mathbf{u})$$

en un entorno de $\mathbf{u} = 0$; más concretamente, nos interesa calcular los términos de un desarrollo del tipo

$$J(\Omega + \mathbf{u}) = J(\Omega) + J'(\Omega; \mathbf{u}) + \theta(\mathbf{u})$$

que sea válido cuando $\|\mathbf{u}\|_{k, \infty; \mathbb{R}^N}$ sea pequeña de forma que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow J'(\Omega; \mathbf{u}) \text{ es lineal y continua,} \\ \frac{\theta(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_{k, \infty; \mathbb{R}^N}} \rightarrow 0 \text{ cuando } \|\mathbf{u}\|_{k, \infty; \mathbb{R}^N} \rightarrow 0. \end{cases}$$

En otras palabras, lo que pretendemos es probar que existe la derivada-Fréchet $J'(\Omega; \cdot)$ de la función

$$\mathbf{u} \rightarrow J(\Omega + \mathbf{u})$$

en el punto $\mathbf{u} = 0$, así como calcularla. Si $J'(\Omega; \cdot)$ existe, tendremos que

$$J'(\Omega; \cdot) = \frac{d}{d\mathbf{v}} J(\Omega + \mathbf{v})|_{\mathbf{v}=0}$$

está en el dual del espacio de Banach $\mathbf{W}^{k, \infty}(\mathbb{R}^N)$ y, para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k, \infty}(\mathbb{R}^N)$,

$$J'(\Omega; \mathbf{u}) = \left\langle \frac{d}{d\mathbf{v}} J(\Omega + \mathbf{v})|_{\mathbf{v}=0}, \mathbf{u} \right\rangle = \frac{d}{dt} J(\Omega + t\mathbf{u})|_{t=0} \in \mathbb{R}.$$

Indiquemos brevemente la estrategia elegida en esta Memoria a tal fin (por simplicidad, volvemos a suponer que J viene dado por (2.2) y escribimos \mathcal{C} en vez de \mathcal{C}_1):

i) Se realiza en la integral un cambio de variables que transforma $\Omega + \mathbf{u}$ en Ω :

$$J(\Omega + \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\mathcal{C}(z(\Omega + \mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) \right) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) dx.$$

Previamente se habrá probado la diferenciabilidad de la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow \text{Jac}(I + \mathbf{u})$.

ii) Se prueba la diferenciabilidad de la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow z(\Omega + \mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})$ y, a partir de ella, se deduce la de $\mathbf{u} \rightarrow \mathcal{C}(z(\Omega + \mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u})$. Con ello, se tiene probada la diferenciabilidad de $\mathbf{u} \rightarrow J(\Omega + \mathbf{u})$.

Una vez calculada $J'(\Omega; \cdot)$, es posible utilizarla para obtener condiciones de optimalidad. En efecto, supongamos que un dominio Ω^* minimiza J , es decir

$$J(\Omega^*) \leq J(\Omega) \quad \forall \Omega \in \Omega_{ad}$$

y que Ω_{ad} contiene todos los dominios $\Omega^* + \mathbf{u}$ con $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m, \infty}(\mathbb{R}^N)$ de norma $\|\mathbf{u}\|_{m, \infty; \mathbb{R}^N}$ suficientemente pequeña. En particular, para cada $t > 0$ pequeño y para cada \mathbf{u} en $\mathbf{W}^{m, \infty}(\mathbb{R}^N)$, debe tenerse

$$J(\Omega^*) \leq J(\Omega^* + t\mathbf{u})$$

Entonces, para todo $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ se obtienen las desigualdades

$$tJ'(\Omega^*; \mathbf{u}) + \theta(t\mathbf{u}) \geq 0,$$

que deben ser válidas si $t > 0$ es suficientemente pequeño. Dividiendo por t y pasando al límite cuando $t \rightarrow 0$, se llega fácilmente a las desigualdades

$$J'(\Omega^*; \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Dado que $J'(\Omega^*; \cdot)$ es lineal, se concluye que

$$J'(\Omega^*; \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

que es la condición necesaria de optimalidad para Ω^* . Por tanto:

a) Conocidos Ω^* y $J'(\Omega^*; \cdot)$, tenemos una manera de averiguar si Ω^* no es un dominio óptimo, es decir un dominio que minimiza J .

b) Si pudiéramos determinar todos los Ω^* "admisibles" para los que se cumple la condición de optimalidad, encontraríamos los posibles dominios óptimos.

c) Toda consecuencia de la condición de optimalidad es una condición necesaria de optimalidad, es decir, es algo que debe verificar un Ω^* que haga mínimo a J en Ω_{ad} .

También nos interesaremos por el cálculo de una expresión sencilla para $J'(\Omega; \cdot)$; más concretamente, nos interesará obtener una expresión tal como

$$\int_{\partial\Omega} \mathcal{F}(z(\Omega), w) \mathbf{u}_n dS,$$

donde w es la solución de un problema de contorno que no depende de \mathbf{u} (el problema adjunto) y \mathbf{u}_n es la componente normal de \mathbf{u} ; con una expresión de este tipo, podrán ser determinadas las direcciones de descenso cuando se aplique un algoritmo de tipo gradiente para el cálculo del dominio óptimo.

2.6 Aproximación numérica

Para terminar este Capítulo, indiquemos que el cálculo del dominio óptimo sólo podrá hacerse, en general, de manera aproximada mediante un procedimiento numérico. Nosotros, en esta Memoria, no trataremos este aspecto; sólo señalamos que existe una gran cantidad de trabajos relacionados con este tema, entre los que destacamos los de E. Fernández-Cara, A. Marroco, O. Pironneau, J. Haslinger y P. Neittaanmäki (cf. [18, 19, 28, 33, 40, 41]) y las referencias en ellos dadas.

CAPITULO 3

Algunos resultados técnicos sobre diferenciación

En la Sección 2.5, hemos dicho que, con vistas a obtener las propiedades de diferenciabilidad del funcional J , consideraremos una familia de dominios admisibles

$$\Omega_{ad} = \{\Omega + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{W}\},$$

con

$$\mathbf{W} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N) \mid \|\mathbf{u}\|_{k,\infty;\mathbb{R}^N} \leq \epsilon_k\}$$

para k , σ y ϵ_k convenientemente elegidos, teniendo así definidos los dominios $\Omega + \mathbf{u}$, los estados $z(\mathbf{u}) \equiv z(\Omega + \mathbf{u})$ y los valores reales $J(\mathbf{u}) \equiv J(\Omega + \mathbf{u})$.

En este Capítulo, estudiaremos la diferenciabilidad de la aplicación

$$\mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})$$

y de la función

$$\mathbf{u} \rightarrow J(\mathbf{u}).$$

Omitimos todas las Demostraciones, que pueden ser consultadas en las referencias [36, 43, 44, 45, 46]; para un estudio detallado y acorde con la notación aquí utilizada, véase [47] y [6].

En la Sección 3.1, presentamos algunos resultados de diferenciabilidad de funciones compuestas definidas en todo \mathbb{R}^N . En la Sección siguiente, se introduce el concepto de derivada local de funciones definidas en conjuntos variables y se da una condición suficiente de existencia de esta derivada. En la Sección 3.3, se deduce un problema de contorno verificado por la derivada del estado, a partir del problema verificado por éste. Haciendo uso de los resultados de la Sección 3.2, se prueban los resultados sobre diferenciación de integrales de volumen e integrales de superficie en las Secciones 3.4 y 3.5. Por último, presentamos resultados sobre la existencia de una prolongación diferenciable del vector normal exterior, a partir de los cuáles es posible deducir resultados relativos a problemas con condiciones de contorno naturales sobre la frontera.

3.1 Derivación de aplicaciones compuestas definidas en todo el espacio

Con carácter general, cuando se hable de la derivabilidad en 0 de una aplicación $\mathbf{u} \rightarrow H(\mathbf{u})$ definida de un espacio normado E en otro espacio normado F , en la fórmula

$$H(\mathbf{u}) = H(0) + H'(\mathbf{u}) + \theta(\mathbf{u})$$

se entenderá que $\theta(\mathbf{u})$ es un término que verifica

$$\frac{\theta(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_E} \rightarrow 0 \text{ en } F \text{ cuando } \|\mathbf{u}\|_E \rightarrow 0.$$

Por otra parte, en las fórmulas que siguen, los símbolos $C, C_1, \text{etc.}$ designan sucesivas constantes positivas. En lo que sigue, $[a_{ij}]$ denota la matriz cuadrada de orden N cuyas componentes son las a_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$. En particular, $Id = [\delta_{ij}]$ denota la matriz identidad de orden N . Denotamos, por simplicidad, $\|\cdot\|_k$ la norma en el espacio $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

3.1.1 Algunos resultados previos

Cuando se realicen cambios de variables en integrales, se hará uso de la función $\mathbf{u} \rightarrow \text{Jac}(I + \mathbf{u})$. Respecto de la misma, tenemos el siguiente

Lema 3.1 *Sea $k \geq 1$. La aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow \text{Jac}(I + \mathbf{u}) = \det [D_j(I + \mathbf{u})_i], \text{ definida de} \\ W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} es $\text{div } \mathbf{u}$. ■

También compondremos con $(I + \mathbf{u})$ funciones que aparecen bajo el signo de derivación. En relación con estas composiciones, tenemos el resultado siguiente:

Lema 3.2 *Para $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$, $\|\mathbf{u}\|_k < 1/2$ y $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, se tiene*

$$(\text{grad } f) \circ (I + \mathbf{u}) = {}^t [D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-1} \text{grad } (f \circ (I + \mathbf{u})). \blacksquare$$

Otro resultado de carácter técnico que necesitaremos con posterioridad es el que sigue:

Lema 3.3 *Sea $k \geq 1$. La aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow {}^t [D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-1}, \text{ definida de un entorno de } 0 \\ \text{en } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{k-1,\infty}(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} es $-{}^t[D_j \mathbf{u}_i]$. ■

De hecho, se demuestra en [36], pág. IV.8, que la aplicación del Lema anterior es continuamente diferenciable en todo un entorno de 0.

Del Lema 3.3 precedente se deduce el siguiente

Corolario 3.4 *Existe una constante $C > 0$ tal que, para cada $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_1 < 1/2$, se verifica la desigualdad*

$$\|Jac(I + \mathbf{u})^{-1}\|_0 \leq C + \theta(\mathbf{u}). \blacksquare$$

3.1.2 Continuidad y diferenciabilidad de funciones compuestas

Se tienen los siguientes resultados relativos a la aplicación

$$\mathbf{u} \longrightarrow f \circ (I + \mathbf{u}).$$

Lema 3.5 *Para $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r < \infty$, la aplicación*

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow f \circ (I + \mathbf{u}) \text{ definida de} \\ W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } L^r(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

es continua en 0. ■

Nota: En la Demostración del Lema precedente, se obtiene, entre otras cosas, la desigualdad

$$(3.1) \quad \|f \circ (I + \mathbf{u}) - f\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \leq C \|\mathbf{u}\|_0 \|\text{grad } f\|_{0,r;\mathbb{R}^N},$$

para cada $f \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ y para cada $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, con norma $\|\mathbf{u}\|_{1,\infty;\Omega}$ suficientemente pequeña. ■

En [36], pag. IV.9, se prueba una generalización del Lema anterior al caso en que $f \in W^{m,r}(\mathbb{R}^d)$, $m \geq 1$ y $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $k \geq \sup\{1, m\}$. Además, la aplicación $\mathbf{u} \longrightarrow f \circ (I + \mathbf{u})$ no sólo es continua en 0, sino que de hecho lo es en todo punto de $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

En lo que sigue, cuando utilicemos la expresión “derivable en 0”, nos estamos refiriendo, a menos que se advierta lo contrario, a la derivabilidad-Fréchet.

Proposición 3.6 Sean $f \in W^{m,r}(\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$ un entero, $1 \leq r < \infty$ y k un entero no inferior a $\sup\{1, m-1\}$. La aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow f \circ (I + \mathbf{u}) \text{ definida de} \\ W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{m-1,r}(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} es $\mathbf{u} \cdot \text{grad } f$. ■

Cuando $r = \infty$, la Proposición 3.6 continúa siendo cierta bajo la hipótesis adicional $f \in C^m(\mathbb{R}^N)$. Esta condición de regularidad es necesaria para poder utilizar un argumento de densidad sobre el que reposa la Demostración.

Cuando f depende de \mathbf{u} , se tiene

Proposición 3.7 Sean $f : W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow W^{m,r}(\mathbb{R}^N)$, $k \geq m \geq 1$, $1 \leq r < \infty$, tales que la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow f(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en } W^{m,r}(\mathbb{R}^d), \text{ es derivable en 0,} \\ \text{con derivada en la dirección } \mathbf{u} \text{ denotada } \dot{f}(\mathbf{u}). \end{array} \right.$$

Entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow f(\mathbf{u}), \text{ definida de } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{m-1,r}(\mathbb{R}^N), \\ \text{es derivable en 0, con derivada en la dirección } \mathbf{u} \\ f'(\mathbf{u}) = \dot{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0). \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Este resultado generaliza en cierto modo la Proposición 3.6. Además, el resultado es cierto con $r = +\infty$ si se hace la hipótesis adicional

$$f(0) \in C^m(\mathbb{R}^d).$$

3.2 La derivada local de una función definida en un conjunto variable

Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, estamos interesados en la “diferenciabilidad” en el origen de la aplicación $\mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})$, con $z(\mathbf{u})$ definida en el abierto $\Omega + \mathbf{u}$, para cada $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ ($k \geq 1$). Una función de este tipo no puede ser derivada respecto de \mathbf{u} en la forma habitual, debido a que su dominio de definición varía con \mathbf{u} . Por ello, estudiaremos la diferenciabilidad de sus restricciones a determinados abiertos ω en los que esté definida $z(\mathbf{u})$ para todo \mathbf{u} de norma $\|\mathbf{u}\|_k$ suficientemente pequeña. A partir de estas restricciones, será posible definir la “derivada local en el origen” (en todo Ω).

3.2.1 Definición de la derivada local

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N . Para todo $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $k \geq 1$ de norma suficientemente pequeña, $\Omega + \mathbf{u}$ es un abierto de \mathbb{R}^N . Sea $\mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})$ verificando lo que sigue:

$$(H_1) \quad \begin{cases} \text{Para cada } \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ tal que } \|\mathbf{u}\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ z(\mathbf{u}) \in W^{m,r}(\Omega + \mathbf{u}), \text{ con } k \geq m \geq 1 \text{ y } 1 \leq r < \infty \end{cases}$$

Se denota por $\omega \subset\subset \Omega$ la inclusión completa de ω en Ω , es decir $\bar{\omega} \subset \Omega$.

Dado $\omega \subset\subset \Omega$, se toma $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ de norma suficientemente pequeña para que sea $\omega \subset\subset \Omega + \mathbf{u}$. Entonces $z(\mathbf{u})$ estará definida en ω y tendrá sentido hablar de la diferenciabilidad en el origen de la función $\mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})|_{\omega}$.

Definición 3.8 *Se dice que la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})$ tiene una derivada local (ó bien, que es localmente derivable) en el origen si, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la correspondiente aplicación $\mathbf{u} \rightarrow z_{\omega}(\mathbf{u}) \equiv z(\mathbf{u})|_{\omega}$, que está definida en un entorno de 0 en $\mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y toma valores en $W^{m,r}(\omega)$, es diferenciable-Fréchet en el origen. En tal caso, la derivada local en 0 en la dirección \mathbf{u} , que denotaremos $z'(\mathbf{u})$, está definida en todo el dominio Ω para cualquier $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$:*

$$z'(\mathbf{u}) = Dz_{\omega}(0)\mathbf{u} = \frac{d}{dt}z_{\omega}(t\mathbf{u})|_{t=0} \text{ en } \omega, \text{ para cada } \omega \subset\subset \Omega,$$

donde $Dz_{\omega}(0)$ es la derivada-Fréchet en el origen de $\mathbf{u} \rightarrow z_{\omega}(\mathbf{u})$ (naturalmente, una aplicación lineal continua de $\mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ en $W^{m,r}(\omega)$). ■

3.2.2 Una condición suficiente de derivabilidad local

Con $\mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})$ verificando (H_1) , hacemos la siguiente hipótesis:

$$(H_2) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de un entorno de 0 en } \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en } W^{m,r}(\Omega), \text{ es derivable en 0,} \\ \text{con derivada en la dirección } \mathbf{u} \text{ denotada } \dot{z}(\mathbf{u}). \end{cases}$$

A $\dot{z}(\mathbf{u})$ le llamaremos derivada total de la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})$ (en el origen) en la dirección \mathbf{u} .

Se tiene el siguiente resultado relativo a la existencia de derivada local:

Teorema 3.9 *Supongamos que se tiene (H_1) y (H_2) . Entonces, para cada $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación*

$$(3.2) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow z(\mathbf{u})|_{\omega}, \text{ considerada como aplicación definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{m-1,r}(\omega), \\ \text{es derivable en 0.} \end{cases}$$

Su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por:

$$z'(\mathbf{u}) = \dot{z}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0). \blacksquare$$

El resultado precedente es similar a la Proposición 3.7, que analiza el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^N$. Mientras que allí $z(\mathbf{u})$ era diferenciable en todo \mathbb{R}^N , aquí $z(\mathbf{u})$ es sólo localmente diferenciable en Ω , ya que $z(\mathbf{u})$ no está en principio definida en todo Ω .

El Teorema 3.9 proporciona una condición suficiente de existencia de la derivada local z' . Generalmente, $z(\mathbf{u})$ es la solución de un problema de contorno en $\Omega + \mathbf{u}$. Se probará que, cuando existe, $z'(\mathbf{u})$ está obligada a ser solución de un segundo problema de contorno deducido del anterior. Por otra parte, la existencia de $\dot{z}(\mathbf{u})$ debe ser probada para cada caso concreto.

3.2.3 El caso de las distribuciones

Dadas $f \in W^{m,r}(\Omega + \mathbf{u})$ y $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $\|\mathbf{u}\|_k < \epsilon_k$, donde $-k + 1 \leq m \leq 0$ y $1 < r < \infty$, se define la distribución transportada $f \circ (I + \mathbf{u})$ mediante la fórmula

$$\begin{cases} \langle f \circ (I + \mathbf{u}), \Psi \rangle_{\Omega} = \langle f, \Psi \circ (I + \mathbf{u})^{-1} \text{Jac}((I + \mathbf{u})^{-1}) \rangle_{\Omega + \mathbf{u}} \\ \forall \Psi \in W_0^{-m,r'}(\Omega) \end{cases}$$

donde $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la dualidad entre $W^{m,r}$ y $W_0^{-m,r'}$.

Esta definición tiene sentido, ya que, por el Lema 2.11, $(I + \mathbf{u})^{-1}$ está en $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y, por tanto, $\Psi \circ (I + \mathbf{u})^{-1} \text{Jac}((I + \mathbf{u})^{-1}) \in W_0^{-m,r'}(\Omega + \mathbf{u})$. También necesitaremos más adelante utilizar $f \circ (I + \mathbf{u})$ para $f \in L^1(\Omega + \mathbf{u})$. Obsérvese que, en este caso, la definición de $f \circ (I + \mathbf{u})$ es "standard" y, además,

$$\begin{cases} \langle f \circ (I + \mathbf{u}), \Psi \rangle_{\Omega} = \langle f, \Psi \circ (I + \mathbf{u})^{-1} \text{Jac}((I + \mathbf{u})^{-1}) \rangle_{\Omega + \mathbf{u}} \\ \forall \Psi \in L^{\infty}(\Omega). \end{cases}$$

Análogamente a como se ha hecho anteriormente en el caso $k \geq m \geq 1$, $1 \leq r < \infty$, se puede probar el siguiente

Teorema 3.10 *El Teorema 3.9 es cierto cuando $m \leq 0$, $1 < r < \infty$ y $k \geq |m| + 2$.*

■

En el caso límite $m = 0$, $r = 1$ y $k \geq 2$, el Teorema 3.9 es cierto si se sustituye en (3.2) $W_{loc}^{-1,1}(\Omega)$ por $(C_0^1(\Omega))'$, el espacio dual de

$$C_0^1(\Omega) = \{ \Psi \in C^1(\Omega) \mid \text{sop } \Psi \subset \Omega \text{ es compacto} \},$$

que se supone dotado de su topología habitual. En otras palabras, en este caso, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, se tiene que la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})|_{\omega}, \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en } (C^1(\bar{\omega}))', \text{ es derivable en } 0. \end{cases}$$

3.3 Diferenciación de un problema de contorno de tipo Dirichlet

Hemos dicho antes que, habitualmente, $z(\mathbf{u})$ es la solución de un problema de contorno definido en $\Omega + \mathbf{u}$. Partiendo de la existencia de derivada local en el origen, deducimos en esta Sección el problema de contorno del cual es solución $z'(\mathbf{u})$ para cada \mathbf{u} cuando las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet. En la Sección 3.7 analizaremos otras posibles condiciones de contorno.

3.3.1 Diferenciación de la ecuación

Se tiene el siguiente

Teorema 3.11 *Se supone que se tiene (H_1) y (H_2) . Sean $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y \mathcal{A} un operador que aplica de forma lineal y continua $W^{m-1,r}(\omega)$ en $\mathcal{D}'(\omega)$ para cada abierto $\omega \subset \mathbb{R}^N$ y verifica la condición siguiente:*

$$(3.3) \quad \begin{cases} \text{Para cada } \mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N), \\ \text{tal que } \|\mathbf{u}\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ \mathcal{A}z(\mathbf{u}) = f \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega + \mathbf{u}). \end{cases}$$

Entonces, la derivada local en el origen de $\mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})$ en la dirección \mathbf{u} , denotada $z'(\mathbf{u})$, verifica:

$$\mathcal{A}z'(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega. \quad \blacksquare$$

Más generalmente, en las condiciones de este Teorema, si \mathcal{A} , definido de $W^{m-1,r}(\omega)$ en $\mathcal{D}'(\omega)$ para cada $\omega \subset\subset \mathbb{R}^N$, es un operador derivable-Fréchet en todo punto y se verifica (3.3), entonces se tiene

$$D\mathcal{A}(z(0); z'(\mathbf{u})) = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

3.3.2 Diferenciación de la condición de contorno

Se supondrá ahora que se cumplen las hipótesis (H_1) y (H_2) con $m = r = 1$, es decir:

$$(H_3) \quad \begin{cases} \text{Para cada } \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N), k \geq 1, \text{ tal que } \|\mathbf{u}\|_k \\ \text{es suficientemente pequeña, } z(\mathbf{u}) \in W^{1,1}(\Omega + \mathbf{u}), \end{cases}$$

$$(H_4) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{1,1}(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0, \text{ con derivada en la dirección } \mathbf{u} \text{ denotada } \dot{z}(\mathbf{u}). \end{cases}$$

Se tiene el

Teorema 3.12 *Supongamos que Ω es un dominio de clase $W^{1,\infty}$, que se verifican (H_3) y (H_4) y que, además,*

$$z(0) \in W^{2,1}(\Omega),$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} \text{Para cada } \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{(resp. } \mathbf{W}^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)) \text{ si } k > 1 \text{ (resp. si } k = 1) \\ \text{tal que } \|\mathbf{u}\|_k \text{ es suficientemente pequeña,} \\ z(\mathbf{u}) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega + \mathbf{u}. \end{cases}$$

Entonces, para cada $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$(3.5) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow z_\omega(\mathbf{u}) = z(\mathbf{u})|_\omega, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{cases}$$

En consecuencia, $\mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0 y su derivada local en 0 en la dirección \mathbf{u} , denotada $z'(\mathbf{u})$, verifica:

$$z'(\mathbf{u}) \in W^{1,1}(\Omega),$$

$$z'(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}_n \frac{\partial z(0)}{\partial \mathbf{n}} \text{ sobre } \partial\Omega \text{ (en } L^1(\partial\Omega))$$

donde $\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ y \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a Ω . ■

La hipótesis (3.4) tiene perfecto sentido; en efecto, para $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\mathbf{u}\|_k$ es suficientemente pequeña, $z(\mathbf{u}) \in W^{1,1}(\Omega + \mathbf{u})$, es lícito hablar de la traza de $z(\mathbf{u})$ y ésta es una función de $L^1(\partial\Omega + \mathbf{u})$.

Para el caso en que Ω no sea de clase $W^{1,\infty}(\Omega)$ y $z(0)$ no pertenezca a $W^{2,1}(\Omega)$, se tiene el siguiente

Teorema 3.13 i) Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto, que se cumplen (H_3) y (H_4) y que, además,

$$z(\mathbf{u}) \in W_0^{1,1}(\Omega + \mathbf{u}) \text{ para cada } \mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en un entorno de } 0.$$

Entonces se tiene (3.5) y

$$z'(\mathbf{u}) \in L^1(\Omega),$$

$$z'(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0) \in W_0^{1,1}(\Omega),$$

para cada $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

ii) Si, además, Ω es de clase $W^{1,\infty}$, también puede afirmarse que

$$(3.6) \quad z'(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \text{ (en } L^1(\partial\Omega)\text{)}. \blacksquare$$

La conclusión (3.6) nos dice que la traza de $z'(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0)$ es 0; sin embargo, no está permitido, en principio, hablar de la traza de $z'(\mathbf{u})$ ni de la traza de $\mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0)$.

Con objeto de estudiar el caso más general en que las condiciones de contorno usan derivadas parciales de $z(\mathbf{u})$ sobre $\partial\Omega + \mathbf{u}$, resulta útil el siguiente

Teorema 3.14 Supongamos que se cumplen (H_1) y (H_2) . Entonces, la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow (D_i z(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{m-1,r}(\Omega) \end{array} \right.$$

es derivable en 0. \blacksquare

El cálculo de $(D_i z)'$ se puede hacer teniendo en cuenta que

$$(D_i z)'(\mathbf{u}) = (D_i z)'(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } (D_i z(0)),$$

$$D_i(z'(\mathbf{u})) = D_i(\dot{z}(\mathbf{u})) - D_i(\mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0))$$

y

$$(D_i z)' = D_i z',$$

obteniéndose que

$$(D_i z)' - D_i \dot{z} = -D_i \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0).$$

Consideremos ahora el operador en derivadas parciales

$$(3.7) \quad \mathcal{B} = \sum_{|\alpha| \leq b} a_\alpha D^\alpha, \text{ con los } a_\alpha \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

definido en todo \mathbb{R}^N . Se supone:

$$(3.8) \quad \text{Se cumple } (H_1) \text{ con } m = b + 1, r = 1.$$

$$(3.9) \quad \text{Se cumple } (H_2) \text{ con } m = b + 1, r = 1.$$

Se tiene el siguiente

Corolario 3.15 *Supongamos que Ω es un dominio de clase $W^{1,\infty}$, que se tiene (3.7)-(3.9) y que, además,*

$$(3.10) \quad \mathcal{B}z(\mathbf{u}) = g \quad \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u},$$

para cada $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ en un entorno de 0 y

$$(3.11) \quad \mathcal{B}z(0) \in W^{2,1}(\Omega),$$

donde

$$(3.12) \quad g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d).$$

Entonces

$$\mathcal{B}z'(u) = -\mathbf{u}\mathbf{n} \frac{\partial(\mathcal{B}z(0) - g)}{\partial\mathbf{n}} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \blacksquare$$

Una versión "débil" de este Corolario es como sigue:

Corolario 3.16 i) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, supongamos que se tiene (3.7)-(3.9) y que, además, para cada $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ en un entorno de 0,*

$$\mathcal{B}z(\mathbf{u}) - g \in W_0^{1,1}(\Omega + \mathbf{u}),$$

donde $g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$. Entonces

$$\mathcal{B}z'(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } (\mathcal{B}z(0) - g) \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

ii) *Si, además, Ω es de clase $W^{1,\infty}(\Omega)$, también se cumple que*

$$\mathcal{B}z'(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } (\mathcal{B}z(0) - g) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \blacksquare$$

Naturalmente, esta última igualdad tiene sentido en $L^1(\partial\Omega)$. En un marco más general, el Corolario 3.15 continúa siendo cierto bajo las hipótesis (H_1) , (H_2) y (3.10)–(3.12) cuando \mathcal{B} aplica $W^{m,r}(\mathbb{R}^N)$ en $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ y cumple la condición siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow (\mathcal{B}z(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en } W^{1,1}(\Omega), \text{ es derivable en } 0. \end{cases}$$

3.4 Diferenciación de una integral de volumen

El siguiente paso consiste en estudiar la diferenciabilidad de funciones

$$\mathbf{u} \longrightarrow J(\mathbf{u}, z(\mathbf{u}))$$

con

$$J(\mathbf{u}, z) \equiv \int_{\Omega + \mathbf{u}} C(\mathbf{u}, z) dx.$$

Aquí, se supone que para ciertos k , m y r , cuando $\mathbf{u} \in \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y $\|\mathbf{u}\|_k$ es suficientemente pequeño, $z(\mathbf{u}) \in W^{m,r}(\Omega + \mathbf{u})$ y, además, $C(\mathbf{u}, z)$ está bien definido y pertenece a $L^1(\Omega + \mathbf{u})$ para cada $z \in W^{m,r}(\Omega + \mathbf{u})$. Por simplicidad, en esta Sección sólo contemplaremos el caso particular en que $C(\mathbf{u}, z) \equiv z$.

Teorema 3.17 *Supongamos que Ω es un dominio de clase $W^{1,\infty}$ y que se tiene:*

$$(3.13) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u}), \text{ está definida de un entorno de } 0 \text{ en} \\ \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N), \text{ } k \geq 1, \text{ con valores en } L^1(\Omega + \mathbf{u}), \end{cases}$$

$$(3.14) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0, \\ \text{con derivada en la dirección } \mathbf{u} \text{ denotada } \dot{z}(\mathbf{u}), \end{cases}$$

$$z(0) \in W^{1,1}(\Omega).$$

Entonces, si $k' \geq \max\{2, k\}$, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$,

$$(3.15) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})|_{\omega}, \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W}^{k',\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en } (C^1(\bar{\omega}))', \text{ es derivable en } 0; \end{cases}$$

(en consecuencia, $\mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0). La correspondiente derivada local en 0 en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$(3.16) \quad z'(\mathbf{u}) = \dot{z}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0).$$

Además,

$$z'(\mathbf{u}) \in L^1(\Omega) \quad \forall \mathbf{u} \in W^{k',\infty}(\mathbb{R}^N)$$

y la función

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \int_{\Omega+\mathbf{u}} z(\mathbf{u}) dx, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{R}, \\ \text{es derivable en } 0. \end{cases}$$

Su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por:

$$\int_{\Omega} z'(\mathbf{u}) dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} n z(0) dS. \blacksquare$$

En el caso en que Ω no es de clase $W^{1,\infty}$ ó $z(0)$ no está en $W^{1,1}(\Omega)$, se tiene la siguiente variante del Teorema anterior:

Teorema 3.18 *Supongamos que se tiene (3.13) y (3.14). Entonces se cumplen (3.15) y (3.16). Además, para cada $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$, se tiene:*

$$z'(\mathbf{u}) \in (C_0^1(\Omega))'$$

y

$$z'(\mathbf{u}) + \operatorname{div} (\mathbf{u} z(0)) \in L^1(\Omega).$$

Por último, la función

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \int_{\Omega+\mathbf{u}} z(\mathbf{u}) dx, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{R}, \\ \text{es derivable en } 0. \end{cases}$$

Su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$\int_{\Omega} (z'(\mathbf{u}) + \operatorname{div} (\mathbf{u} z(0))) dx. \blacksquare$$

Obsérvese que $z'(\mathbf{u}) + \operatorname{div} (\mathbf{u} z(0)) \in L^1(\Omega)$ y, por tanto, es integrable en Ω ; pero, de nuevo, esto no tiene por qué ser cierto para cada uno de los sumandos.

3.5 Diferenciación de una integral de superficie

Debido al interés que presentan ciertas aplicaciones, también es conveniente analizar la diferenciabilidad de funciones

$$\mathbf{u} \longrightarrow J(\mathbf{u}, z(\mathbf{u})),$$

donde

$$J(\mathbf{u}, z) \equiv \int_{\partial\Omega + \mathbf{u}} \mathcal{C}(\mathbf{u}, z) dx.$$

Ahora, se supone, como en la Sección 3.4, que cada $z(\mathbf{u}) \in W^{m,r}(\Omega + \mathbf{u})$ y, por otra parte, que $\mathcal{C}(\mathbf{u}, z)$ está bien definido y pertenece a $W^{1,1}(\Omega + \mathbf{u})$ (de forma que tiene sentido en $L^1(\partial\Omega + \mathbf{u})$ su traza) para cada $z \in W^{m,r}(\Omega + \mathbf{u})$. De nuevo, por comodidad, restringiremos nuestras consideraciones al caso en que $\mathcal{C}(\mathbf{u}, z) \equiv z$.

3.5.1 Algunos resultados técnicos adicionales

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado de clase $W^{1,\infty}$. Recordemos que, dada \mathbf{u} en $W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_1$ suficientemente pequeña, se tiene que $\Omega + \mathbf{u}$ es un nuevo abierto acotado de clase $W^{1,\infty}$. Se tiene

Definición 3.19 *Dados Ω y \mathbf{u} en estas condiciones, se llama Jacobiano tangencial de $I + \mathbf{u}$ a la función $Jac_{\partial\Omega}(I + \mathbf{u})$, definida por:*

$$Jac_{\partial\Omega}(I + \mathbf{u}) = |{}^t[D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-1} \cdot \mathbf{n}| Jac(I + \mathbf{u}) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Se verifica:

$$Jac_{\partial\Omega}(I + \mathbf{u}) \in L^\infty(\partial\Omega). \blacksquare$$

En [36], pag. IV.27, se prueba el resultado siguiente:

Lema 3.20 *Si Ω es un abierto de clase $W^{1,\infty}$ y acotado, $\mathbf{u} \in W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ y f es una función de $L^1(\partial\Omega + \mathbf{u})$, entonces*

$$f \circ (I + \mathbf{u}) \in L^1(\partial\Omega)$$

y además

$$\int_{\partial\Omega + \mathbf{u}} f dS = \int_{\partial\Omega} f \circ (I + \mathbf{u}) Jac_{\partial\Omega}(I + \mathbf{u}) dS. \blacksquare$$

Definición 3.21 *Sea Ω un abierto acotado de clase $W^{1,\infty}$ y sea $\mathbf{v} \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$. Sea $\tilde{\mathbf{v}} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ una prolongación de \mathbf{v} a todo \mathbb{R}^N . Se llama divergencia tangencial de \mathbf{v} a la función $div_{\partial\Omega} \mathbf{v}$, dada por:*

$$div_{\partial\Omega} \mathbf{v} = div \tilde{\mathbf{v}} - ({}^t[D_j \tilde{\mathbf{v}}_i] \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

$div_{\partial\Omega} \mathbf{v}$ está bien definida (i.e. no depende de la prolongación $\tilde{\mathbf{v}}$ elegida) y, además,

$$div_{\partial\Omega} \mathbf{v} \in L^\infty(\partial\Omega). \blacksquare$$

Se tiene el siguiente

Lema 3.22 *Sea Ω un abierto acotado de clase $W^{k,\infty}$ ($k \geq 1$). La aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \text{Jac}_{\partial\Omega}(I + \mathbf{u}) \text{ está definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{k-1,\infty}(\partial\Omega), \\ \text{y es derivable en } 0. \end{array} \right.$$

Su derivada en la dirección \mathbf{u} es $\text{div}_{\partial\Omega} \mathbf{u}$. ■

De hecho, para $\mathbf{u} \in W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ de norma $\|\mathbf{u}\|_1$ suficientemente pequeña, la función $\mathbf{u} \longrightarrow \text{Jac}_{\partial\Omega}(I + \mathbf{u})$ tiene derivadas de orden $k - 1$ continuas sobre $\partial\Omega$.

En [36], pag. IV.34, se prueba el siguiente

Teorema 3.23 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $W^{2,\infty}$, $f \in W^{2,1}(\Omega)$ y $\mathbf{u} \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$. Se tiene la fórmula:*

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } f + f \text{ div}_{\partial\Omega} \mathbf{u}) dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + Hf \right) dS.$$

Aquí, H es la curvatura media de $\partial\Omega$. ■

Obsérvese que, cuando Ω es de clase $W^{2,\infty}(\Omega)$, su frontera $\partial\Omega$ se puede representar localmente en un cubo Δ de dimensión $N - 1$ para un sistema de ejes adecuado mediante la igualdad $x_N = \phi(x')$, donde $\phi \in W^{2,\infty}(\Delta)$; por definición, la curvatura media en $(x', \phi(x'))$ viene dada por la cantidad

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x', \phi(x')) = (1 + \sum_{i=1}^{N-1} (\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x'))^2)^{-3/2} \times \\ \times \sum_{i,j=1}^{N-1} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}(x') (1 + (\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x'))^2) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(x') \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x') \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x') \right\}. \end{array} \right.$$

Se tiene, por tanto, que $H \in L^\infty(\partial\Omega)$.

3.5.2 El resultado de diferenciación de una integral de superficie

Se tiene el siguiente

Teorema 3.24 *Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase $W^{1,\infty}$, que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u}) \text{ está definida para } \mathbf{u} \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \\ \text{con } \|\mathbf{u}\|_1 \text{ suficientemente pequeña} \\ \text{y toma valores en } W^{1,1}(\Omega + \mathbf{u}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{1,1}(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0, \\ \text{con derivada en la dirección } \mathbf{u} \text{ denotada } \dot{z}(\mathbf{u}) \end{array} \right.$$

y que

$$z(0) \in W^{2,1}(\Omega).$$

Entonces, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow z_\omega(\mathbf{u}) = z(\mathbf{u})|_\omega, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{array} \right.$$

En consecuencia, $\mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0. Para cada $\mathbf{u} \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$, la derivada local $z'(\mathbf{u})$ en la dirección \mathbf{u} verifica

$$z'(\mathbf{u}) = \dot{z}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0)$$

y

$$z'(\mathbf{u}) \in L^1(\partial\Omega).$$

Además,

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \int_{\partial\Omega+\mathbf{u}} z(\mathbf{u}) \, dS, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{R}, \\ \text{es derivable en } 0 \end{array} \right.$$

y su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$\int_{\partial\Omega} z'(\mathbf{u}) \, dS + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0) + z(0) \text{div}_{\partial\Omega} \mathbf{u}) \, dS. \blacksquare$$

Como consecuencia, obtenemos fácilmente el

Corolario 3.25 *Bajo las hipótesis del Teorema precedente, si además Ω es de clase $W^{2,\infty}(\Omega)$, se tiene que la derivada de la función (3.17) en la dirección \mathbf{u} está dada por*

$$\int_{\partial\Omega} z'(\mathbf{u}) \, dS + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n (Hz(0) + \frac{\partial z(0)}{\partial \mathbf{n}}) \, dS. \blacksquare$$

3.6 Construcción de una prolongación diferenciable del vector normal

Si consideramos una condición de contorno natural

$$z(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u}) - g = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u}$$

ó

$$\frac{\partial z(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})} = g \quad \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u},$$

donde $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$ y $\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$ es el vector normal unitario exterior a $\Omega + \mathbf{u}$, la principal dificultad para su diferenciación respecto de \mathbf{u} radica en que un desarrollo del tipo

$$\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u}) = \mathbf{n}(\Omega) + \mathbf{n}'(\Omega; \mathbf{u}) + \theta(\mathbf{u})$$

no tiene sentido, puesto que $\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$ y $\mathbf{n}(\Omega)$ están definidos en conjuntos diferentes, a saber $\partial\Omega + \mathbf{u}$ y $\partial\Omega$, respectivamente.

Esta dificultad será superada construyendo una prolongación a todo \mathbb{R}^N de cada vector normal, que sea derivable respecto de \mathbf{u} .

Definición 3.26 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^2 y sea $v \in C^1(\partial\Omega)$. Sea $\tilde{v} \in C^1(\mathbb{R}^N)$ una prolongación de v a todo \mathbb{R}^N . Se define el gradiente tangencial de v como sigue:

$$\text{grad}_{\partial\Omega} v = \text{grad } \tilde{v} - (\text{grad } \tilde{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Aquí, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\Omega)$. Esta Definición se extiende por continuidad a todo $v \in W^{1,1}(\partial\Omega)$. Más precisamente, tiene un sentido hablar de $\text{grad}_{\partial\Omega} v$ en $L^1(\partial\Omega)$ para cada $v \in W^{1,1}(\partial\Omega)$ y, además, la aplicación $v \rightarrow \text{grad}_{\partial\Omega} v$, definida de $W^{1,1}(\partial\Omega)$ en $L^1(\partial\Omega)$, es lineal y continua. ■

Consideramos ahora un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de clase C^k donde $k \geq 2$; entonces existe el vector normal exterior

$$\mathbf{n}(\Omega) \in C^{k-1}(\partial\Omega).$$

Para cada $\mathbf{u} \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 2$, tal que $\|\mathbf{u}\|_k$ es suficientemente pequeña, el abierto $\Omega + \mathbf{u}$ es de clase $W^{k,\infty}$ y existe el vector normal

$$\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u}) \in W^{k-1,\infty}(\partial\Omega).$$

Se tiene entonces el resultado siguiente:

Teorema 3.27 *Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^2 .*

i) *Para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_2$ suficientemente pequeña, existe*

$$\nu(\mathbf{u}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$$

tal que

$$(3.18) \quad \nu(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u}) \quad \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u},$$

$$(3.19) \quad \nu(0) \in C^1(\mathbb{R}^N)$$

y

$$(3.20) \quad \frac{\partial \nu(0)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

ii) *La aplicación*

$$(3.21) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}) \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } L^\infty(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} , denotada $\nu'(\mathbf{u})$, verifica

$$\nu'(\mathbf{u}) = -\text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

(una igualdad en $L^\infty(\partial\Omega)$).

iii) *La aplicación*

$$(3.22) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} se denota $\nu'(\mathbf{u})$.

iv) *Si, para cada \mathbf{u} en un entorno de 0 en $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $N(\mathbf{u}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ es una prolongación de $\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$ que verifica (3.18), (3.19) y (3.22), entonces $\mathbf{u} \longrightarrow N(\mathbf{u})$ también verifica (3.21) y*

$$(3.23) \quad N'(\mathbf{u}) + \mathbf{u}_n \frac{\partial N(0)}{\partial \mathbf{n}} = -\text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, la fórmula (3.23) es independiente de la prolongación elegida. ■

Notas: (a) La hipótesis " Ω es un abierto de clase $W^{2,\infty}$ " sería suficiente para probar la existencia de las funciones $\nu(\mathbf{u}) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, así como (3.18) y (3.22).

(b) La Demostración de los apartados ii) y iv) se hace a partir de los resultados de la Sección 3.2, por lo que, de acuerdo con las observaciones que siguen a la Proposición 3.7, es necesario tener $\nu(0) \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Así pues, sería suficiente exigir a Ω que sea de clase $W^{2,\infty}(\Omega)$ y alguna otra cosa que implique $\nu(0) \in C^1(\mathbb{R}^N)$. En particular, si Ω es de clase C^2 , se verifica lo anterior.

(c) Con el fin de exigir la mínima regularidad al abierto Ω , sería conveniente analizar en la Demostración de la Proposición 3.7 cuál es la hipótesis más débil de regularidad que debe verificar $z(0)$ en el caso $r = \infty$.

(d) Obsérvese que, en virtud de (3.20), la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow \nu(\mathbf{u})$ verifica (3.23) para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

(e) Para una generalización del resultado anterior, cf. el Capítulo siguiente. ■

La función $\nu(\mathbf{u})$ cuya existencia afirma el Teorema precedente, se define como sigue. Consideremos la función $\delta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \notin \Omega, \\ -\text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega. \end{cases}$$

Existe un entorno \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tal que

$$\delta \in C^2(\mathcal{V}), \quad |\text{grad } \delta| \equiv 1 \text{ en } \mathcal{V}.$$

Consideremos tres abiertos $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$, verificando

$$\partial\Omega \subset\subset \mathcal{V}_3 \subset\subset \mathcal{V}_2 \subset\subset \mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}$$

y sea $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\alpha \equiv 1 \text{ en } \mathcal{V}_3 \text{ y } \alpha \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}_2.$$

Definición 3.28 Para $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, con $\|\mathbf{u}\|_1$ lo suficientemente pequeña como para que se tenga $\partial\Omega + \mathbf{u} \subset \mathcal{V}_3$ y $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V} + \mathbf{u}$, se define $\nu(\mathbf{u})$ como sigue:

$$\nu(\mathbf{u}) = \begin{cases} \alpha \frac{\text{grad } (\delta \circ (I + \mathbf{u})^{-1})}{|\text{grad } (\delta \circ (I + \mathbf{u})^{-1})|} & \text{en } \mathcal{V}_1, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}_1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

3.7 Diferenciación de condiciones de contorno naturales

Para la derivación de una condición de contorno de tipo flujo, se tiene el siguiente

Teorema 3.29 *Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^2 . Supongamos:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{u}) \text{ está definida de un entorno de } 0 \text{ en} \\ \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{W}^{1,1}(\Omega + \mathbf{u}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{W}^{1,1}(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0 \end{array} \right.$$

(la derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} de esta aplicación se denotará $\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{u})$),

$$\mathbf{z}(0) \in \mathbb{W}^{2,1}(\Omega),$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u}) - g = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u},$$

donde $g \in \mathbb{W}^{2,1}(\mathbb{R}^N)$. Entonces, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{u})|_{\omega} \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } L^1(\omega) \end{array} \right.$$

es derivable en 0. En consecuencia, $\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0. Su derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} , denotada $\mathbf{z}'(\mathbf{u})$, verifica:

$$\mathbf{z}'(\mathbf{u}) = \dot{\mathbf{z}}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{z}(0),$$

$$\mathbf{z}'(\mathbf{u}) \in \mathbb{W}^{1,1}(\Omega),$$

y, además,

$$\mathbf{z}'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{z}(0)}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \right) + \mathbf{z}(0) \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u}_{\mathbf{n}} \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

(una igualdad en $L^1(\partial\Omega)$). ■

En el caso de una condición de contorno de tipo Neumann, tenemos

Teorema 3.30 *Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^2 . Supongamos:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{u}) \text{ está definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{W}^{2,1}(\Omega + \mathbf{u}), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{z}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbb{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } \mathbb{W}^{2,1}(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{array} \right.$$

(su derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} será denotada $\dot{z}(\mathbf{u})$),

$$z(0) \in W^{3,1}(\Omega),$$

$$\frac{\partial z(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})} = g \quad \text{sobre } \partial\Omega + \mathbf{u}$$

para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ en un entorno de 0, donde $g \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$. Entonces se tiene que, para cada abierto $\omega \subset \subset \Omega$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})|_{\omega} \text{ definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ en } W^{1,1}(\omega) \end{array} \right.$$

es derivable en 0. En consecuencia, $\mathbf{u} \longrightarrow z(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0. Su derivada local en 0 en la dirección \mathbf{u} verifica:

$$z'(\mathbf{u}) = \dot{z}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } z(0),$$

$$z'(\mathbf{u}) \in W^{2,1}(\Omega),$$

$$\frac{\partial z'(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}_{\mathbf{n}} \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial^2 z(0)}{\partial \mathbf{n}^2} \right) + \text{grad } z(0) \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u}_{\mathbf{n}} \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

(una igualdad en $L^1(\partial\Omega)$). Aquí, hemos utilizado la notación

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}^2} = \sum_{i,j=1}^d n_i n_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad \blacksquare$$

CAPITULO 4

Prolongación derivable del vector normal: Una generalización

En el Capítulo anterior, se ha introducido una prolongación derivable del vector normal, $\nu(\mathbf{u})$, cuando el dominio inicial Ω es de clase C^2 y se han expuesto las dificultades que se presentan cuando se supone menos regularidad para Ω . En este Capítulo, vamos a generalizar el resultado de prolongación, en primer lugar para dominios de clase $W^{2,\infty}$ y, después, para Ω de clase $W^{1,\infty}$; a cambio, las propiedades de derivabilidad se obtienen para $\mathbf{u} \rightarrow \nu(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})$ considerada con valores en $W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ y $L^r(\mathbb{R}^N)$, respectivamente, con $r \in (1, \infty)$; en consecuencia, $\mathbf{u} \rightarrow \nu(\mathbf{u})$ es diferenciable cuando es considerada con valores en $L^r(\mathbb{R}^N)$ y $W^{-1,r}(\mathbb{R}^N)$. Si bien se rebaja el exponente de sumabilidad en los espacios imágenes, estos resultados son de aplicación en los casos en que $\nu(\mathbf{u})$ ó sus derivadas están multiplicadas por funciones con regularidad adecuada, lo cuál es frecuente en la práctica. Antes de probar nuestros resultados, demostramos dos Proposiciones y un Lema técnico que necesitamos.

4.1 Algunos resultados previos

Una generalización de la Proposición 3.6 es cómo sigue:

Proposición 4.1 *Sea $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$, con $1 < r < \infty$. La aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow f \circ (I + \mathbf{u})^{-1}, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{con valores en } W^{-1,r}(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} es

$$-\mathbf{u} \cdot \text{grad } f.$$

Demostración: Hemos de probar que

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|_1} \|f \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - f + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f\|_{-1,r;\mathbb{R}^N} \rightarrow 0$$

cuando $\|\mathbf{u}\|_1 \rightarrow 0$.

Sea $\alpha(\mathbf{u}) = f \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - f + \mathbf{u}$; se tiene que

$$\|\alpha(\mathbf{u})\|_{-1,r;\mathbb{R}^N} = \sup \{ \langle \alpha(\mathbf{u}), \phi \rangle : \phi \in W^{1,r'}(\mathbb{R}^N), \|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} = 1 \},$$

con $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$; aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el corchete de dualidad entre los espacios $W^{-1,r}(\mathbb{R}^N)$ y $W^{1,r'}(\mathbb{R}^N)$. Teniendo en cuenta la definición de transportada de una distribución, se tiene que, cuando $\phi \in W^{1,r'}(\mathbb{R}^N)$ y $\|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} = 1$,

$$\langle \alpha(\mathbf{u}), \phi \rangle = \langle f, (\phi \circ (I + \mathbf{u})) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) - \phi - \text{div}(\mathbf{u}\phi) \rangle.$$

Escribimos

$$\begin{aligned} & (\phi \circ (I + \mathbf{u})) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) - \phi - \text{div}(\mathbf{u}\phi) \\ &= (\phi \circ (I + \mathbf{u}) - \phi - \mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) \\ & \quad + \phi (\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div} \mathbf{u}) \\ & \quad + (\mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi) (\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div} \mathbf{u}) \\ & \quad + (\mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi) \text{div} \mathbf{u}; \end{aligned}$$

se tiene, en primer lugar, que

$$\begin{aligned} & \langle f, (\phi \circ (I + \mathbf{u}) - \phi - \mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) \rangle \\ & \leq \|f\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \|\text{Jac}(I + \mathbf{u})\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\phi \circ (I + \mathbf{u}) - \phi - \mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi\|_{0,r';\mathbb{R}^N} \\ & \leq C \theta(\|\mathbf{u}\|_1), \end{aligned}$$

en virtud de la Proposición 3.6 aplicada a $\phi \in W^{1,r'}(\mathbb{R}^N)$; en segundo lugar,

$$\begin{aligned} & \langle f, \phi (\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div} \mathbf{u}) \rangle \\ & \leq \|f\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \|\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\phi\|_{0,r';\mathbb{R}^N} \\ & \leq C \theta(\|\mathbf{u}\|_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \langle f, (\mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi) (\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div} \mathbf{u}) \rangle \\ & \leq \|f\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \|\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} \\ & \leq C \theta(\|\mathbf{u}\|_1), \end{aligned}$$

en virtud del Lema 3.1; por último,

$$\begin{aligned} & \langle f, (\mathbf{u} \cdot \text{grad} \phi) \text{div} \mathbf{u} \rangle \\ & \leq \|f\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \|\text{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} \\ & \leq C \theta(\|\mathbf{u}\|_1). \end{aligned}$$

En resumen, para $\phi \in W^{1,r'}(\mathbb{R}^N)$, tal que $\|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} = 1$, se tiene

$$| \langle \alpha(\mathbf{u}), \phi \rangle | \leq C \theta(\|\mathbf{u}\|_1);$$

de aquí se deduce que

$$\|\alpha(\mathbf{u})\|_{-1,r;\mathbb{R}^N} \leq C \theta(\|\mathbf{u}\|_1),$$

con lo que se tiene la Demostración. ■

Ahora, presentamos una generalización de la Proposición 3.7:

Proposición 4.2 Sea $f : W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ con $1 < r < \infty$, tal que

$$(4.1) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow f(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } L^r(\mathbb{R}^N), \\ \text{es derivable en } 0, \text{ con derivada denotada } \dot{f}(\mathbf{u}). \end{cases}$$

Entonces, la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow f(\mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{-1,r}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada, denotada $f'(\mathbf{u})$, verifica

$$f'(\mathbf{u}) = \dot{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0).$$

Demostración: Hemos de probar que

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|_1} \|f(\mathbf{u}) - f(0) - \dot{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0)\|_{-1,r;\mathbb{R}^N} \rightarrow 0$$

cuando $\frac{1}{\|\mathbf{u}\|_1} \rightarrow 0$.

Sea $\chi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) - f(0) - \dot{f}(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0)$; se tiene

$$\|\chi(\mathbf{u})\|_{-1,r;\mathbb{R}^N} = \sup \{ \langle \chi(\mathbf{u}), \phi \rangle : \phi \in W^{1,r'}(\mathbb{R}^N), \|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} \}.$$

Escribimos

$$(4.2) \quad \langle \chi(\mathbf{u}), \phi \rangle = \langle \eta(\mathbf{u}), \phi \rangle + \langle \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0), \phi \rangle,$$

con $\eta(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) - f(0) - \dot{f}(\mathbf{u})$; se tiene

$$\begin{aligned} \langle \eta(\mathbf{u}), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \eta(\mathbf{u}) \phi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\eta(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) (\phi \circ (I + \mathbf{u})) \text{Jac } (I + \mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) - f(0) - \dot{f}(\mathbf{u})) (\phi \circ (I + \mathbf{u})) \text{Jac } (I + \mathbf{u}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left((f(0) \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - f(0)) + (\dot{f}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - \dot{f}(\mathbf{u})) \right) \phi; \end{aligned}$$

sustituyendo esta expresión en (4.2), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \chi(\mathbf{u}), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) - f(0) - \dot{f}(\mathbf{u})) (\phi \circ (I + \mathbf{u})) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) \\ &\quad + \langle f(0) \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - f(0) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0), \phi \rangle \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (\dot{f}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - \dot{f}(\mathbf{u})) \phi. \end{aligned}$$

Ahora, estimamos cada uno de los sumandos del segundo miembro de la expresión anterior. Sin más que aplicar la desigualdad de Hölder, se tiene que el primer sumando está acotado por

$$\|\text{Jac}(I + \mathbf{u})\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \|\phi \circ (I + \mathbf{u})\|_{0,r';\mathbb{R}^N} \|f(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) - f(0) - \dot{f}(\mathbf{u})\|_{0,r;\mathbb{R}^N}$$

que, por la hipótesis (4.1) y por ser $\|\phi\|_{1,r';\mathbb{R}^N} = 1$, es menor o igual que

$$C \theta(\|\mathbf{u}\|_1).$$

El segundo sumando es menor ó igual que

$$\|f(0) \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - f(0) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } f(0)\|_{-1,r;\mathbb{R}^N}$$

que, por el Lema anterior, es de la forma

$$\theta(\|\mathbf{u}\|_1).$$

Por último, con respecto al tercer sumando, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (\dot{f}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})^{-1} - \dot{f}(\mathbf{u})) \phi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \dot{f}(\mathbf{u}) \left((\phi \circ (I + \mathbf{u})) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) - \phi \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \dot{f}(\mathbf{u}) (\phi \circ (I + \mathbf{u}) - \phi) \text{Jac}(I + \mathbf{u}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \phi (\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div } \mathbf{u}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \phi \text{div } \mathbf{u} \\ &\leq \|\dot{f}(\mathbf{u})\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \times \left(\|\phi \circ (I + \mathbf{u}) - \phi\|_{0,r';\mathbb{R}^N} \|\text{Jac}(I + \mathbf{u})\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \right. \\ &\quad + \|\phi\|_{0,r';\mathbb{R}^N} \|\text{Jac}(I + \mathbf{u}) - 1 - \text{div } \mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \\ &\quad \left. + \|\phi\|_{0,r';\mathbb{R}^N} \|\text{div } \mathbf{u}\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} \right); \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la desigualdad (3.1) y el Lema 3.1, se tiene que la última expresión es menor ó igual que

$$\|f\|_{\mathcal{L}_c(W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N);L^r(\mathbb{R}^N))} \|u\|_1 \times (C \|u\|_{0,\infty;\mathbb{R}^N} + \theta(\|u\|_1) + \|u\|_1).$$

Por tanto, para cada $\phi \in W^{1,r'}(\mathbb{R}^N)$ de norma $\|\phi\|_{1,r',\mathbb{R}^N}$ se tiene

$$\langle \chi(u), \phi \rangle = \theta(\|u\|_1);$$

esto prueba la Proposición. ■

Ahora, si \mathcal{O} es un dominio acotado de \mathbb{R}^N , se considera, para cada $m = 0$ ó 1 , el conjunto

$$S_m = \{f \in W^{m,\infty}(\mathcal{O}) \mid \exists \alpha > 0, |f(x)| \geq \alpha \text{ c.p.d. en } \mathcal{O}\}.$$

Para todo $f \in S_m$, se tiene $\frac{1}{|f|} \in W^{m,\infty}(\mathcal{O})$ y como \mathcal{O} es acotado, $\frac{1}{|f|} \in L^r(\mathcal{O})$ para todo $r \in (1, \infty]$. Se tiene el siguiente

Lema 4.3 Dado $r \in [1, \infty]$, la aplicación

$$\begin{cases} f \longrightarrow T(f) = \frac{1}{|f|}, \text{ definida de} \\ S_m \text{ con valores en } W^{m,r}(\mathcal{O}), \end{cases}$$

es diferenciable-Fréchet en todo punto de S_m y su derivada en el punto f en la dirección g es

$$T'(f; g) = -\frac{1}{|f|^3} f \cdot g.$$

Demostración: En primer lugar, supongamos $m = 0$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longrightarrow \beta(z) = \frac{1}{|z|}, \end{aligned}$$

que está en $C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ y verifica:

$$\beta'(z)y = -\frac{1}{|z|^3} z \cdot y \quad \forall z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Fijado $f \in S_0$, existe $\alpha = \alpha(f) > 0$, tal que $|f(x)| \geq \alpha > 0$ c.p.d. en \mathcal{O} ; por tanto, se tiene $T(f)(x) = \beta(f(x))$ c.p.d. en \mathcal{O} . Además, si $g \in L^\infty(\mathcal{O})$ y $\|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} < \alpha/2$, se verifica

$$|f(x) + g(x)| \geq \alpha/2 > 0,$$

c.p.d. en \mathcal{O} , por lo que también se tiene $T(f+g)(x) = \beta(f(x) + g(x))$.

Para probar el Lema, hemos de demostrar que dado $r \in [1, \infty]$,

$$\frac{1}{\|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}}} \|T(f+g) - T(f) - \beta'(f)g\|_{0,r;\mathcal{O}} \rightarrow 0$$

cuando $\|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} \rightarrow 0$. Dado que \mathcal{O} es acotado, bastará comprobar lo anterior cuando $r = \infty$. Pero esto es fácil; en efecto, consideremos la función h , definida por

$$h(x) = |T(f+g)(x) - T(f)(x) - \beta'(f(x))g(x)| \quad \text{c.p.d. en } \mathcal{O}.$$

Se tiene que

$$h(x) = |\beta(f(x) + g(x)) - \beta(f(x)) + \frac{1}{|f(x)|^3} f(x) \cdot g(x)|$$

c.p.d. en \mathcal{O} ; por ser $\beta \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, existe $\lambda \in [0, 1]$, tal que

$$\begin{aligned} h(x) &= |\beta'(f(x) + \lambda g(x))g(x) + \frac{1}{|f(x)|^3} f(x) \cdot g(x)| \\ &\leq \left| \frac{1}{|f(x)|^3} f(x) - \frac{1}{|f(x) + \lambda g(x)|^3} (f(x) + \lambda g(x)) \right| \|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} \\ &\leq \frac{1}{|f(x)|^3 |f_1(x)|^3} (|f_1 - f| |f_1|^3 + f_1 |f - f_1| (|f|^2 + |f_1| |f| + |f_1|^2)) \|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} \end{aligned}$$

c.p.d. en \mathcal{O} , siendo $f_1(x) = f(x) + \lambda g(x)$. Ya que

$$|f_1(x)| \leq |f(x)| + \lambda |g(x)| \leq \|f\|_{0,\infty;\mathcal{O}} + \alpha/2 \leq C$$

y

$$|f_1(x)| \geq |f(x)| - \lambda |g(x)| \geq \alpha - \lambda \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2},$$

se tiene que

$$h(x) \leq C |f_1 - f| \|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} = C \lambda |g(x)| \|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} \leq C \|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}}^2$$

y, finalmente,

$$\frac{1}{\|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}}} \|h\|_{0,\infty;\mathcal{O}} \leq C \|g\|_{0,\infty;\mathcal{O}} (\text{med}(\mathcal{O}))^{1/r}.$$

Se tiene así probado el Lema cuando $m = 0$.

Supongamos ahora $m = 1$. Para $f \in S_1$, se tiene que

$$\text{grad } \frac{1}{|f|} = -\frac{1}{|f|^3} f \cdot \text{grad } f$$

pertenece a $L^r(\mathcal{O})$, cualquiera que sea $r \in [1, \infty]$. Consideremos la aplicación

$$\begin{cases} f \longrightarrow T_1(f) = \text{grad } \frac{1}{|f|} \text{ definida de} \\ S_1 \text{ con valores en } L^r(\mathcal{O}). \end{cases}$$

La aplicación T_1 está construida realizando operaciones fundamentales con aplicaciones derivables y ella misma es derivable; su derivada en \mathbf{f} en la dirección \mathbf{g} es

$$T'_1(\mathbf{f}; \mathbf{g}) = \frac{3}{|\mathbf{f}|^5}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{f} \cdot \text{grad } \mathbf{f}) - \frac{1}{|\mathbf{f}|^3}(\mathbf{g} \cdot \text{grad } \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \text{grad } \mathbf{g});$$

además, obsérvese que

$$T'_1(\mathbf{f}; \mathbf{g}) = \text{grad } (T'(\mathbf{f}; \mathbf{g})).$$

Como consecuencia, se tiene que la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} \longrightarrow \left(\frac{1}{|\mathbf{f}|}, \text{grad } \frac{1}{|\mathbf{f}|} \right) \text{ definida de} \\ S_1 \text{ con valores en } L^r(\mathcal{O}; \mathbb{R}^{N+1}), \end{array} \right.$$

es derivable en S_1 y su derivada en \mathbf{f} en la dirección \mathbf{g} está dada por

$$\left(T'(\mathbf{f}; \mathbf{g}), \text{grad } (T'(\mathbf{f}; \mathbf{g})) \right).$$

Deducimos que

$$\frac{1}{\|\mathbf{g}\|_{1,\infty;\mathcal{O}}} \left\| \left(T(\mathbf{f} + \mathbf{g}) - T(\mathbf{f}) - T'(\mathbf{f}; \mathbf{g}), \text{grad } (T(\mathbf{f} + \mathbf{g}) - T(\mathbf{f}) - T'(\mathbf{f}; \mathbf{g})) \right) \right\|_{L^r(\mathcal{O}; \mathbb{R}^{N+1})}$$

tiende a 0 cuando $\|\mathbf{g}\|_{1,\infty;\mathcal{O}} \rightarrow 0$ ó, equivalentemente,

$$\frac{1}{\|\mathbf{g}\|_{1,\infty;\mathcal{O}}} \|T(\mathbf{f} + \mathbf{g}) - T(\mathbf{f}) - T'(\mathbf{f}; \mathbf{g})\|_{1,r,\mathcal{O}} \rightarrow 0$$

cuando $\|\mathbf{g}\|_{1,\infty;\mathcal{O}} \rightarrow 0$. Se tiene así probado el Lema. ■

4.2 Prolongación del vector normal: Caso fuerte

En esta Sección y en la siguiente, Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ó 3 . Aquí supondremos además que Ω es de clase $W^{2,\infty}$; para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_2$ suficientemente pequeña, se tiene que $\Omega + \mathbf{u}$ es de clase $W^{2,\infty}$ y está bien definido el vector normal exterior y unitario a $\partial\Omega + \mathbf{u}$, denotado $\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$, que pertenece a $W^{1,\infty}(\partial\Omega + \mathbf{u})$; como en el Capítulo 3, $\mathbf{n}(\Omega)$ se denota simplemente por \mathbf{n} .

Se considera la función

$$\delta(x) = \begin{cases} \text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \notin \Omega, \\ -\text{dist}(x, \partial\Omega) & \text{si } x \in \Omega. \end{cases}$$

Sabemos que existe un entorno acotado \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tal que

$$\delta \in W^{2,\infty}(\mathcal{V}), \quad |\text{grad } \delta| \equiv 1 \text{ en } \mathcal{V}.$$

Ya que \mathcal{V} es acotado, se tiene

$$\delta \in W^{2,r}(\mathcal{V}), \quad \forall r \in [1, \infty].$$

Consideremos tres abiertos $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$, verificando lo siguiente

$$\partial\Omega \subset\subset \mathcal{V}_3 \subset\subset \mathcal{V}_2 \subset\subset \mathcal{V}_1 \subset\subset \mathcal{V}$$

y sea $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\alpha \equiv 1 \text{ en } \mathcal{V}_3 \text{ y } \alpha \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}_2.$$

Para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, con $\|\mathbf{u}\|_2$ suficientemente pequeña como para que se tenga $\partial\Omega + \mathbf{u} \subset \mathcal{V}_3$ y $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V} + \mathbf{u}$, se define $\nu(\mathbf{u})$ como sigue:

$$\nu(\mathbf{u}) = \begin{cases} \alpha \frac{\text{grad}(\delta \circ (I + \mathbf{u})^{-1})}{|\text{grad}(\delta \circ (I + \mathbf{u})^{-1})|} & \text{en } \mathcal{V}_1, \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}_1. \end{cases}$$

Se tiene el resultado siguiente

Lema 4.4 *Para cada $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_2$ suficientemente pequeña, se verifica:*

- i) $\nu(\mathbf{u}) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \in [1, \infty]$.
- ii) $\nu(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$ sobre $\partial\Omega + \mathbf{u}$.

Demostración: La Demostración para $r = \infty$ se hace igual a la del aptdo. i) del Teorema 3.27. Teniendo en cuenta que $\nu(0) = 0$ fuera de \mathcal{V}_1 , se deduce que $\nu(\mathbf{u}) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ para cada r finito. ■

Teorema 4.5 *Para cada $r \in (1, \infty)$, la aplicación*

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{1,r}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} se denota $\dot{\nu}(\mathbf{u})$.

Demostración: Para $\mathbf{u} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$, consideramos la función

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) &= \frac{\text{grad}(\delta \circ (I + \mathbf{u})^{-1})}{|\text{grad}(\delta \circ (I + \mathbf{u})^{-1})|} \circ (I + \mathbf{u})|_{\mathcal{V}} \\ &= \frac{{}^t[D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-1} \cdot \text{grad } \delta}{|{}^t[D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-1} \cdot \text{grad } \delta|}, \end{aligned}$$

donde para la última igualdad se ha utilizado el Lema 3.2.

Se tiene, por un lado, que ${}^t[D_j(I + u)_i]^{-1} \cdot \text{grad } \delta|_{\mathcal{V}}$ pertenece a $W^{1,\infty}(\mathcal{V})$ y, por tanto, a $W^{1,r}(\mathcal{V})$ para cada r ; por otra parte, del Lema 3.3, obtenemos que

$${}^t[D_j(I + u)_i]^{-1} = Id - {}^t[D_j u_i] + \theta(\|u\|_2)$$

en $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$; se deduce que

$${}^t[D_j(I + u)_i]^{-1} \cdot \text{grad } \delta = \text{grad } \delta - {}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta + \theta(\|u\|_2)$$

en $W^{1,r}(\mathcal{V})$, para todo $r \in [1, \infty]$. Es decir, la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow {}^t[D_j(I + u)_i]^{-1} \cdot \text{grad } \delta|_{\mathcal{V}} \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{1,r}(\mathcal{V}) \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Además, para $\|u\|_2$ suficientemente pequeña, se tiene

$$\begin{aligned} |{}^t[D_j(I + u)_i]^{-1} \cdot \text{grad } \delta| &= |\text{grad } \delta - {}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta + \theta(\|u\|_2)| \\ &\geq |\text{grad } \delta| - |{}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta| - |\theta(\|u\|_2)| \\ &\geq 1 - \|u\|_1 - \theta(\|u\|_2) \geq 1/2. \end{aligned}$$

En virtud del Lema 4.3, se tiene que, para todo $r \in [1, \infty]$, la aplicación

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow \chi(u) \circ (I + u), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{1,r}(\mathbb{R}^N), \\ \text{es derivable en } 0, \end{array} \right.$$

y su derivada en la dirección u es

$$(4.4) \quad -\frac{{}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta}{|\text{grad } \delta|} + \frac{\text{grad } \delta}{|\text{grad } \delta|^3} \text{grad } \delta \cdot ({}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta).$$

Por otro lado, como

$$\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \alpha \equiv 0 \text{ en } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{V}_2,$$

también tenemos que

$$\alpha \in W^{k,r}(\mathbb{R}^N) \quad \forall k \text{ entero } \geq 0 \text{ y } \forall r \geq 1.$$

De la Proposición 3.6, obtenemos que, para todo $r \in [1, \infty]$, la aplicación

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow \alpha \circ (I + u), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{1,r}(\mathbb{R}^N), \\ \text{es derivable en } 0. \end{array} \right.$$

y, por tanto, su restricción a \mathcal{V} también lo es.

Se deduce de (4.3) y (4.5) que, dado $r \in [1, \infty]$,

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})|_{\mathcal{V}} \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,r}(\mathcal{V}), \\ \text{es derivable en } 0, \end{cases}$$

y, como $\nu(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})$ se anula idénticamente fuera de $(I + \mathbf{u})^{-1}(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}$ (porque $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V} + \mathbf{u}$), se tiene probado el Teorema. ■

Ahora, podemos ya enunciar y probar el resultado de derivabilidad “fuerte” de $\mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u})$:

Teorema 4.6 *Para cada $r \in (1, \infty)$, la aplicación*

$$(4.6) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \text{y considerada como función que toma valores en } L^r(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} , denotada $\nu'(\mathbf{u})$, pertenece a $L^\infty(\partial\Omega)$ y verifica

$$\nu'(\mathbf{u}) = -\text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Demostración: Por la Proposición 3.7, se tiene (4.6) y

$$\nu'(\mathbf{u}) = \dot{\nu}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } \nu(0).$$

De esta expresión y de (4.4), se deduce que

$$\nu'(\mathbf{u}) = -\text{grad} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \delta) + \text{grad } \delta \cdot (\text{grad } \delta \cdot \text{grad} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \delta))$$

en \mathcal{V}_3 .

Por otro lado, $\mathbf{u} \cdot \text{grad } \delta$ pertenece a $W^{1,\infty}(\mathcal{V})$ y es una prolongación de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, que es una función de $W^{1,\infty}(\partial\Omega)$; por tanto, sobre $\partial\Omega$ se puede escribir

$$\nu'(\mathbf{u}) = -\text{grad} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \delta) + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \text{grad} (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \delta)),$$

que está en $L^\infty(\partial\Omega)$ y es, por definición, igual a $-\text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$. ■

4.3 Prolongación del vector normal: Caso débil

Antes de nada, recordemos que $W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ denota el espacio $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \cap \bar{C}^1(\mathbb{R}^N)$; si consideramos este espacio dotado de la norma de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, entonces todos los resultados del Capítulo 3 y de la Sección 4.1 continúan siendo ciertos cuando las funciones están definidas en $W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ en lugar de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Supondremos en esta Sección que Ω es de clase $W^{1,\infty}$. Recordemos que, para cada $\mathbf{u} \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_1$ suficientemente pequeña, se tiene que $\Omega + \mathbf{u}$ es de clase $W^{1,\infty}$, está bien definido el vector normal exterior y unitario a $\partial\Omega + \mathbf{u}$, denotado $\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$ y $\mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u}) \in L^\infty(\partial\Omega + \mathbf{u})$; de nuevo $\mathbf{n}(\Omega)$ se denota simplemente \mathbf{n} .

Procediendo como en la Sección anterior, se llega a que $\delta \in W^{1,\infty}(\mathcal{V})$ y, por tanto, $\delta \in W^{1,r}(\mathcal{V})$ para todo $r \in [1, \infty]$. Análogamente se define $\nu(\mathbf{u})$ y se tiene el

Lema 4.7 *Para cada $\mathbf{u} \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N)$ con $\|\mathbf{u}\|_1$ suficientemente pequeña, se verifica:*

- i) $\nu(\mathbf{u}) \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para cada $r \in [1, \infty]$.
- ii) $\nu(\mathbf{u}) = \mathbf{n}(\Omega + \mathbf{u})$ sobre $\partial\Omega + \mathbf{u}$. ■

También obtenemos el resultado siguiente, cuya Demostración es análoga a la del Teorema 4.5 (resultado de derivabilidad débil):

Teorema 4.8 *Para cada $r \in [1, \infty]$, la aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida en} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \text{ y con valores en } L^r(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} se denota $\dot{\nu}(\mathbf{u})$. ■

Nota. Análogamente a cómo se obtuvo (4.4), en este caso se llega a que

$$\dot{\nu}(\mathbf{u}) = -{}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta + \text{grad } \delta \cdot (\text{grad } \delta \cdot ({}^t[D_j u_i] \cdot \text{grad } \delta)),$$

que pertenece a $L^\infty(\mathcal{V}_3)$. De aquí, teniendo en cuenta las propiedades de \mathbf{u} y δ , se deduce que

$$\dot{\nu}(\mathbf{u}) = -\mathbf{n} \cdot \text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u} \quad \text{en } L^\infty(\partial\Omega).$$

En particular, cuando Ω es poliédrico, como \mathbf{n} es constante sobre cada cara del poliedro, se tiene

$$\dot{\nu}(\mathbf{u}) = -\text{grad}_{\partial\Omega} \mathbf{u} \mathbf{n} \quad \text{en } L^\infty(\partial\Omega). \quad \blacksquare$$

Ahora, en virtud de la Proposición 4.2, se deduce el siguiente resultado de derivabilidad "débil":

Teorema 4.9 *Para cada $r \in (1, \infty)$, la aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \longrightarrow \nu(\mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N) \\ \text{y considerada como función que toma valores en } W^{-1,r}(\mathbb{R}^N), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} , denotada $\nu'(\mathbf{u})$, verifica

$$\nu'(\mathbf{u}) = \dot{\nu}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } \nu(0). \quad \blacksquare$$

Nota. Cuando Ω es poliédrico, se tiene que $\text{grad } \nu(0) = 0$ c.p.d. sobre $\partial\Omega$, de lo que se deduce la igualdad

$$\nu'(u) = -\text{grad}_{\partial\Omega} u_n \quad \text{en } L^\infty(\partial\Omega). \blacksquare$$

CAPITULO 5

Aplicación I: El problema del condensador

En este Capítulo, aplicamos los resultados anteriores en relación con la determinación de condensadores eléctricos de capacidad mínima. En primer lugar, planteamos el problema, recordamos resultados de existencia, unicidad y regularidad del estado del sistema y referenciamos resultados de existencia de condensador óptimo. En la Sección siguiente, probamos, bajo ciertas hipótesis de regularidad para los dominios Ω admisibles, la existencia de derivada total del estado. Luego, se deduce la existencia de derivada local, el problema de contorno satisfecho por ésta y una expresión sencilla para la derivada de la capacidad. Los resultados de este Capítulo se deben, esencialmente, a J. Simon (cf. [43]).

5.1 Planteamiento del problema

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 2$ ó 3) acotado y $\Delta \subset\subset D$; se supone que las fronteras ∂D y $\partial \Delta$ son de clase $W^{2,\infty}$ y se considera el dominio $\Omega = D \setminus \bar{\Delta}$.

Sea

$$W = \{u \mid u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N), \|u\|_2 \leq \epsilon_2\},$$

con $\epsilon_2 > 0$; se considera la familia de abiertos

$$\Omega_{ad} = \{\Omega + u \mid u \in W\};$$

si ϵ_2 se ha elegido suficientemente pequeño (lo cuál supondremos en adelante), se verifica que $\Omega + u = (D + u) \setminus \overline{\Delta + u}$ es un abierto acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{2,\infty}$ y, además, existen abiertos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 , tales que

$$\Delta + u \subset\subset \mathcal{O}_1 \subset\subset \mathcal{O}_2 \subset\subset D + u \quad \forall u \in W.$$

Se considera una función g verificando

$$(5.1) \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad g \equiv 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}_2 \quad \text{y} \quad g \equiv 1 \quad \text{en } \mathcal{O}_1,$$

y planteamos el problema de contorno

$$(5.2) \quad \begin{cases} \Delta y(\mathbf{u}) = 0 & \text{en } \Omega + \mathbf{u}, \\ y(\mathbf{u}) - g \in H_0^1(\Omega + \mathbf{u}). \end{cases}$$

La función $y(\mathbf{u})$ solución de este problema, cuando existe, proporciona el potencial eléctrico asociado a un condensador que ocupa $\Omega + \mathbf{u}$. La capacidad eléctrica del condensador está dada por

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega + \mathbf{u}} |\text{grad } y(\mathbf{u})|^2.$$

Denotamos $y(0)$ simplemente y . Para cada $\mathbf{u} \in W$, se tiene el siguiente

Teorema 5.1 *Bajo las hipótesis anteriores de regularidad para $\Omega + \mathbf{u}$ y g , el problema (5.2) posee una única solución $y(\mathbf{u})$, que pertenece al espacio $C^\infty(\Omega + \mathbf{u}) \cap W^{2,q}(\Omega + \mathbf{u})$, cualquiera que sea $q \in [1, \infty)$. ■*

Para la Demostración, cf. [26]. Como consecuencia, $\text{grad } y(\mathbf{u}) \in L^2(\Omega + \mathbf{u})$ y la capacidad eléctrica del condensador $\Omega + \mathbf{u}$ está bien definida.

El problema de diseño óptimo que se plantea es la existencia y caracterización de un condensador óptimo; en nuestro marco, nos interesa la existencia y caracterización de $\mathbf{u}^* \in W$, tal que

$$J(\mathbf{u}^*) \leq J(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in W.$$

Como hemos dicho en múltiples ocasiones, en este trabajo nos centraremos en el estudio de la existencia y cálculo de la derivada-Fréchet de la función

$$\mathbf{u} \longrightarrow J(\mathbf{u}),$$

de la que se podrán obtener consecuencias que caractericen a \mathbf{u}^* y que podrán ser utilizadas para la puesta en práctica de algún algoritmo iterado de cálculo.

Para resultados de existencia de condensador óptimo (incluso con hipótesis de regularidad más débiles sobre los dominios que forman Ω_{ad}), cf. [35] y [36]; para resultados del mismo tipo con otras familias admisibles de abiertos y bajo ciertas hipótesis de compacidad de las mismas, cf. [12] y [41].

5.2 Derivada total del potencial eléctrico

Con la notación precedente, se tiene

Teorema 5.2 ([43]) *Para cada $q \in (1, \infty)$, la aplicación*

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}), & \text{definida de un entorno} \\ \text{de } 0 \text{ en } W \text{ y con valores en } W^{2,q}(\Omega), \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} , que se denota por $\dot{y}(\mathbf{u})$, verifica

$$\Delta \dot{y}(\mathbf{u}) = \Delta(\mathbf{u} \cdot \text{grad } y) \text{ en } \Omega,$$

$$\dot{y}(\mathbf{u}) \in W^{2,q}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Demostración: Consideremos el conjunto

$$W_*^{2,q} = \{v \in W^{2,q}(\Omega) \mid v \equiv 0 \text{ sobre } \partial D, v \equiv 1 \text{ sobre } \partial \Delta\},$$

que constituye una variedad lineal de $W^{2,q}(\Omega)$, de espacio soporte

$$V_*^{2,q} \equiv W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega).$$

Así, si g es una función que verifica (5.1), llamando también g a su restricción a $\bar{\Omega}$, tenemos:

$$W_*^{2,q} = g + V_*^{2,q}.$$

Consideremos la función

$$F : \mathbb{W} \times V_*^{2,q} \longrightarrow L^q(\Omega),$$

definida por

$$F(\mathbf{u}, v) = \sum_{i,j,k=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j (M_{ik}(\mathbf{u}) (D_k v + D_k g)),$$

donde

$$[M_{ij}(\mathbf{u})] = {}^t [D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-1}.$$

Nuestra intención es aplicar el Teorema de la Función Implícita a la ecuación $F(\mathbf{u}, v) = 0$ en un entorno de $(0, y - g)$.

i) Ecuación satisfecha por $y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})$:

Para cada $\mathbf{u} \in \mathbb{W}$, el potencial eléctrico asociado a $\Omega + \mathbf{u}$ es

$$y(\mathbf{u}) \in C^\infty(\Omega + \mathbf{u}) \cap W^{2,q}(\Omega + \mathbf{u}),$$

solución de (5.2). Luego

$$(5.3) \quad \begin{cases} (\Delta y(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) = 0 & \text{en } \Omega, \\ y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = 0 & \text{sobre } \partial D, \\ y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = 1 & \text{sobre } \partial \Delta. \end{cases}$$

La primera consecuencia de (5.3) es que $y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) \in W_*^{2,q}$, de donde podemos escribir

$$(5.4) \quad y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = g + z(\mathbf{u}), \text{ con } z(\mathbf{u}) \in V_*^{2,q}.$$

Gracias al Lema 3.2, tenemos:

$$(D_i y(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})),$$

de donde

$$D_i y(\mathbf{u}) = \left(\sum_{k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \right) \circ (I + \mathbf{u})^{-1}.$$

Aplicando de nuevo el Lema 3.2 a la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} (D_{ii} y(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j (D_i y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \\ &= \sum_{j=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j \left(\sum_{k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j \left(M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j \left(M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (z(\mathbf{u}) + g) \right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(\Delta y(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) = F(\mathbf{u}, z(\mathbf{u})),$$

de donde

$$(5.5) \quad F(\mathbf{u}, z(\mathbf{u})) = 0,$$

y esto para cada \mathbf{u} en un entorno de 0 en \mathbf{W} .

Recíprocamente, si $(\mathbf{u}, v) \in \mathbf{W} \times V_*^{2,q}$, $\|\mathbf{u}\|_2$ es suficientemente pequeña y se verifica que $F(\mathbf{u}, v) = 0$, entonces es evidente que $(v + g) \circ (I + \mathbf{u})^{-1}$ es solución de (5.2) en $\Omega + \mathbf{u}$.

ii) Diferenciabilidad de F :

Por el Lema 3.3, la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow [M_{ij}(\mathbf{u})], \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en} \\ \mathbf{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N) \text{ con valores en } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N \times N}), \end{cases}$$

es continuamente diferenciable. Su derivada en la dirección \mathbf{u} es $-{}^t[D_j \mathbf{u}_i]$. Además, la función F es afín respecto de v . Por tanto,

$$(5.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ es continuamente diferenciable en un} \\ \text{entorno de } (0, z(0)) \text{ en } W \times V_*^{2,q}. \end{array} \right.$$

iii) $\frac{\partial F}{\partial v}(0, z(0))$ es un isomorfismo de $V_*^{2,q}$ en $L^q(\Omega)$:

Se tiene que

$$(5.7) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(0, z(0)) = \sum_{i,j,k=1}^N M_{ij}(0) D_j (M_{ik}(0) D_k) = \Delta.$$

Es bien conocido que, cuando $q \in (1, \infty)$ y Ω es de clase $W^{2,\infty}$, el operador Δ es un isomorfismo de $V_*^{2,q}$ en $L^q(\Omega)$ (cf., por ejemplo, [26]); esto significa que

$$(5.8) \quad \frac{\partial F}{\partial v}(0, z(0)) \in \text{Isom}(V_*^{2,q}, L^q(\Omega)).$$

iv) Aplicación del Teorema de la Función Implícita:

Los resultados (5.5), (5.6) y (5.8) nos permiten aplicar el Teorema de la Función Implícita en un entorno de $(0, z(0))$. Existe, por tanto, un entorno O_1 de 0 en W , un entorno O_2 de $z(0) \equiv y - g$ en $V_*^{2,q}$, y una aplicación continuamente diferenciable

$$H : O_1 \longrightarrow V_*^{2,q}$$

tal que

$$\{(\mathbf{u}, v) \in O_1 \times O_2 \mid F(\mathbf{u}, v) = 0\} = \{(\mathbf{u}, v) \in O_1 \times V_*^{2,q} \mid v = H(\mathbf{u})\}.$$

Es decir, para cada $\mathbf{u} \in O_1$, existe $v = H(\mathbf{u}) \in V_*^{2,q}$ tal que $F(\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) = 0$; además, la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow H(\mathbf{u})$ es continuamente diferenciable en O_1 .

Como $F(\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) = 0$, se deduce que $(H(\mathbf{u}) + g) \circ (I + \mathbf{u})^{-1}$ es solución de (5.2) en $\Omega + \mathbf{u}$, es decir,

$$y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) \equiv H(\mathbf{u}) + g,$$

con lo que finalmente se tiene que la aplicación

$$\mathbf{u} \rightarrow y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}),$$

definida de O_1 en $W^{2,q}(\Omega)$, es continuamente diferenciable en 0.

v) Ecuaciones satisfechas por $\dot{y}(\mathbf{u})$:

El Teorema de la Función Implícita también afirma en este caso que

$$\dot{y}(\mathbf{u}) = H'(0; \mathbf{u}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial v}(0; z(0)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(0; z(0))(\mathbf{u}).$$

Aplicando el Lema 3.3, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(0; z(0))(\mathbf{u}) = - \sum_{j,k}^N (D_{jj} u_k D_k y + 2 D_j u_k D_{jk} y) = -\Delta(\mathbf{u} \cdot \text{grad } y).$$

De aquí y de (5.7), obtenemos:

$$\Delta \dot{y}(\mathbf{u}) = \Delta(\mathbf{u} \cdot \text{grad } y) \text{ en } \Omega.$$

Por otro lado, al ser $y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})$ constante sobre ∂D y sobre $\partial \Delta$, se tiene $\dot{y}(\mathbf{u}) \in H_0^1(\Omega)$. ■

5.3 Derivada de la capacidad eléctrica

Del Teorema anterior, utilizando los resultados de las Secciones 3.2 y 3.3, se deduce que $\mathbf{u} \rightarrow y(\mathbf{u})$ posee una derivada local en 0, que puede ser caracterizada en términos de un problema de contorno. Además, la derivada local en la dirección \mathbf{u} , denotada $y'(\mathbf{u})$, verifica por un lado,

$$y'(\mathbf{u}) = \dot{y}(\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \text{grad } y,$$

por lo que pertenece a $W^{1,q}(\Omega)$ y, por otro,

$$\Delta y'(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega,$$

por lo que, en virtud de las propiedades del operador Δ , también está en $C^\infty(\Omega)$. Más precisamente, se tiene el siguiente

Teorema 5.3 *Dados q con $1 < q < \infty$ y un abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow y(\mathbf{u})|_\omega, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de 0 en } \mathbf{W} \text{ en } C^\infty(\omega) \cap W^{2,q}(\omega), \\ \text{considerada como función que toma valores en } W^{1,q}(\omega), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. En consecuencia, $\mathbf{u} \rightarrow y(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0. La derivada local $y'(\mathbf{u})$ en la dirección \mathbf{u} verifica:

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} y'(\mathbf{u}) \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,q}(\Omega), \\ \Delta y'(\mathbf{u}) = 0 \text{ en } \Omega, \\ y'(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}_n \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \text{ sobre } \partial \Omega. \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

Por otro lado, se tiene el siguiente

Lema 5.4 *La aplicación*

$$(5.10) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow |\text{grad } y(\mathbf{u})|^2 \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \text{ con valores en } W^{1,1}(\Omega), \end{cases}$$

es derivable en 0.

Demostración: Por el Teorema 3.14, sabemos que la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow (\text{grad } y(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \text{ en } H^1(\Omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{cases}$$

Por otro lado, la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{v} \longrightarrow K(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2, \text{ definida de } H^1(\Omega) \\ \text{en } W^{1,1}(\Omega), \text{ es derivable en todo punto} \end{cases}$$

y su derivada en \mathbf{a} en la dirección \mathbf{v} verifica

$$K'(\mathbf{a}; \mathbf{v}) = 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}.$$

Por tanto, dado que

$$K(\text{grad } y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) = |\text{grad } y(\mathbf{u})|^2 \circ (I + \mathbf{u}),$$

está probado el Lema. ■

Nota: Gracias al Teorema 3.9, para cada abierto $\omega \subset \subset \Omega$, resulta que

$$\begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow \text{grad } y(\mathbf{u})|_{\omega}, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \text{ con valores en } L^2(\omega), \end{cases}$$

es derivable en 0, i.e. $\mathbf{u} \longrightarrow \text{grad } y(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0; su derivada local en la dirección \mathbf{u} está dada por $\text{grad } y'(\mathbf{u})$. En consecuencia, $\mathbf{u} \longrightarrow Z(\mathbf{u}) = |\text{grad } y(\mathbf{u})|^2$ también es localmente derivable en 0. Un sencillo cálculo lleva a la igualdad

$$(5.11) \quad Z'(\mathbf{u}) = 2 \text{grad } y \cdot \text{grad } y'(\mathbf{u})$$

($Z'(\mathbf{u})$ es la derivada local en 0 en la dirección \mathbf{u}), válida para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. Por tanto, la derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} de la aplicación (5.10) es dada por

$$(5.12) \quad \dot{Z}(\mathbf{u}) = 2 \text{grad } y \cdot \text{grad } y'(\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \text{grad } |\text{grad } y|^2 \in L^1(\Omega). \blacksquare$$

Teorema 5.5 ([43]) *La función*

$$(5.13) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow J(\mathbf{u}) \equiv \int_{\Omega + \mathbf{u}} |\text{grad } y(\mathbf{u})|^2, \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \text{ con valores en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$J'(\mathbf{u}) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \left| \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 dS.$$

Demostración: En virtud del Lema anterior y de los resultados de la Sección 3.4, se tiene que la función (5.13) es derivable en 0. Además, de (5.11), se deduce que

$$J'(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} 2 \operatorname{grad} y \cdot \operatorname{grad} y'(\mathbf{u}) + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n |\operatorname{grad} y|^2 dS,$$

cualquiera que sea $\mathbf{u} \in W$.

Por otro lado, teniendo en cuenta (5.2) y (5.9) y también que $\operatorname{grad} y$ es proporcional al vector normal, resulta:

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} y \cdot \operatorname{grad} y'(\mathbf{u}) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \left| \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 dS.$$

Dado que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n |\operatorname{grad} y|^2 dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \left| \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 dS,$$

obtenemos finalmente:

$$J'(\mathbf{u}) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_n \left| \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 dS. \blacksquare$$

Observación: La expresión anterior muestra que $J'(\mathbf{u})$ depende de \mathbf{u} sólo a través de su componente en la dirección del vector normal exterior a Ω . Una expresión como ésta, que no siempre se consigue, facilita la deducción de condiciones de optimalidad, así como la determinación de direcciones de descenso cuando se aplica un algoritmo iterado para el cálculo de dominios óptimos. ■

Nota: En [36], se prueba la derivabilidad de la capacidad eléctrica en el caso en que no se hace ninguna hipótesis de regularidad sobre el dominio inicial Ω y se considera $W = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \|\mathbf{u}\|_1 \leq \epsilon_1\}$, con $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeño. La mayor dificultad de la Demostración está en que, ahora, sólo tenemos asegurada la pertenencia de $y(\mathbf{u})$ al espacio $H^1(\Omega + \mathbf{u})$ por lo que, en principio, no es posible aplicar dos veces el Lema 3.2, como se hizo en el aptdo. i) de la Demostración del Teorema 5.2. Para salvar esta dificultad, en [36] se plantea la formulación variacional del problema (5.2), se aplica el Lema 3.2 a los integrandos y se obtiene así la formulación débil del problema que verifica $y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})$; luego, se escribe el problema de contorno equivalente y se procede como en la Demostración del caso fuerte, definiendo F en espacios adecuados. Obviamente, la derivada toral $\dot{y}(\mathbf{u})$ es menos regular que en el caso fuerte. La expresión que se obtiene para la derivada de la capacidad eléctrica es

$$J'(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \operatorname{div} (2 y'(\mathbf{u}) \operatorname{grad} y + \mathbf{u} |\operatorname{grad} y|^2),$$

algo más complicada que la obtenida en el caso fuerte. ■

CAPITULO 6

Regularidad L^r de los problemas de Stokes y de Navier-Stokes

En este Capítulo estudiamos la regularidad L^r de la solución débil de los problemas de Stokes y de Navier-Stokes. Comenzamos el Capítulo con una Sección previa de resultados técnicos que necesitaremos después. En la Sección 6.2 planteamos las ecuaciones de Stokes y damos resultados de existencia y regularidad de solución. Introducimos a continuación los operadores de Stokes generalizados con coeficientes variables y con coeficientes constantes. En la Sección 6.4 probamos un Teorema de regularidad L^2 de la solución débil del problema de Stokes. Luego, deducimos las fórmulas de representación asociadas al sistema de Stokes y definimos los potenciales hidrodinámicos, probando resultados de existencia y regularidad de los mismos (Secciones 6.5–6.6). Continuamos con resultados relativos a estimaciones “a posteriori” de la solución fuerte del problema de Stokes, para deducir de ellos la existencia de este tipo de soluciones (Secciones 6.7–6.9). En la Sección 6.10, planteamos las ecuaciones de Navier-Stokes, enunciamos resultados de existencia y de unicidad de solución y probamos un resultado de regularidad de la solución débil. Por último en la Sección 6.11, comentamos el origen de las técnicas utilizadas para las demostraciones de los resultados expuestos en el Capítulo.

6.1 Algunos conceptos y resultados de Análisis Funcional

En esta Sección damos algunos conceptos y resultados de carácter técnico de Análisis Funcional que necesitaremos a lo largo del Capítulo.

6.1.1 Convolución de funciones y distribuciones

En primer lugar, vamos a recordar el concepto de convolución de funciones y de distribuciones, así como algunas de sus propiedades (cf. [17], [53], [1], [7]).

Definición 6.1 Sean f y g dos funciones localmente integrables en \mathbb{R}^N , tales que la función

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(\xi)g(x - \xi)|d\xi$$

está bien definida y es localmente integrable. Se define la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)g(x - \xi)d\xi. \quad \blacksquare$$

Cuando existe la convolución de las funciones f y g , también existe la de g y f y se verifica $f * g = g * f$.

Dado que la convolución de dos funciones es una función localmente integrable en \mathbb{R}^N , define una distribución, que actúa sobre las funciones "test" de la siguiente forma:

$$\langle f * g, \eta \rangle = \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(\xi)g(x - \xi)\eta(x)d\xi dx, \quad \forall \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Por tanto, tiene sentido hablar de las derivadas, en el sentido de las distribuciones, de una convolución.

Una sencilla aplicación de los conocidos Teoremas de Fubini y de Tonelli nos muestra que la convolución de dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ está bien definida; además, si una de ellas, por ejemplo g , pertenece a $L^r(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r \leq \infty$, se tiene (cf. [7]) la desigualdad

$$\|f * g\|_{0,r;\mathbb{R}^N} \leq \|f\|_{0,1;\mathbb{R}^N} \|g\|_{0,r;\mathbb{R}^N},$$

conocida como desigualdad de Young.

Asimismo, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y g tiene soporte compacto y pertenece a $L^r(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq r \leq \infty$, de la misma forma, se prueba que la convolución de $f * g$ está bien definida y pertenece a $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$; se tiene, para cualquier dominio acotado Ω ,

$$\|f * g\|_{0,r;\Omega} \leq C \|g\|_{0,r;\mathbb{R}^N},$$

donde $C = \|f\|_{0,1;\Omega_1}$, siendo Ω_1 un dominio acotado que depende de Ω y del soporte de g .

El concepto de convolución de funciones puede ser extendido a las distribuciones (cf. [17], [53]). Nosotros sólo utilizaremos la convolución de distribuciones en dos casos:

El primero, cuando una de las distribuciones es la delta de Dirac, δ ; en este caso, se tiene

$$\delta * f = f * \delta = f, \quad \forall f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

El otro corresponde a derivadas de convoluciones que están bien definidas como funciones; en este caso, haremos uso del siguiente

Teorema 6.2 Sean $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$; si existe la convolución $f * g$, entonces, para todo multiíndice α , existen $D^\alpha f * g$ y $f * D^\alpha g$, y se verifica

$$D^\alpha f * g = f * D^\alpha g = D^\alpha(f * g). \blacksquare$$

Para la Demostración, cf. [53]. Como consecuencia del Teorema anterior, se tiene (cf. [53]) que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

6.1.2 Cocientes de diferencias en espacios de Sobolev

La diferenciabilidad de las soluciones débiles ó clásicas de las ecuaciones en derivadas parciales se deduce frecuentemente mediante la consideración de sus cocientes de diferencias (ó cocientes incrementales).

Definición 6.3 Sea φ una función definida en un dominio Ω de \mathbb{R}^N y denotemos por e_i el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^N . Dados $h > 0$ y $x \in \Omega$ tales que $x + he_i \in \Omega$, se define el cociente de diferencias $\delta_i^h \varphi$ como sigue:

$$\delta_i^h \varphi = \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h}. \blacksquare$$

Se tienen los siguientes resultados (cf. [26]):

Lema 6.4 Sea $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$, $1 \leq r \leq \infty$ y sea $\Omega' \subset \Omega$ tal que existe $h_0 > 0$ verificando $\Omega' + h_0 e_i \subset \Omega$. Entonces para todo $h < h_0$ se tiene

$$\delta_i^h \varphi \in L^r(\Omega'), \quad \|\delta_i^h \varphi\|_{0,r;\Omega'} \leq \|D_i \varphi\|_{0,r;\Omega}. \blacksquare$$

Lema 6.5 Sea $\varphi \in L^r(\Omega)$, $1 < r < \infty$ y supongamos que existe una constante $C > 0$ verificando la siguiente propiedad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cualquiera que sea } \Omega' \subset \Omega \\ \text{para el que exista } h_0 > 0 \text{ tal que } \Omega' + h_0 e_i \subset \Omega, \\ \text{se tiene } \delta_i^h \varphi \in L^r(\Omega') \text{ y } \|\delta_i^h \varphi\|_{0,r;\Omega'} \leq C, \\ \text{para todo } h \text{ suficientemente pequeño.} \end{array} \right.$$

Entonces,

$$D_i \varphi \in L^r(\Omega) \quad \text{y} \quad \|D_i \varphi\|_{0,r;\Omega} \leq C. \blacksquare$$

Las siguientes propiedades de los cocientes de diferencias, se prueban sin ninguna dificultad:

i) Si denotamos por

$$\tau_i^h \varphi(x) = \varphi(x + he_i),$$

se verifica

$$\delta_i^h(\eta\varphi) = (\tau_i^h \eta)\delta_i^h \varphi + \varphi\delta_i^h \eta.$$

ii) Sean $\eta, \varphi \in L^2(\Omega)$; supongamos que alguna de las dos tiene soporte compacto $K \subset \Omega$ y que existe $h_0 > 0$ tal que $K + h_0 e_i \in \bar{\Omega}$. Entonces, para todo $h < h_0$, se verifica que

$$\int_{\Omega} \eta \delta_i^h \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \varphi \delta_i^{-h} \eta \, dx.$$

6.1.3 Algunos resultados de interpolación en espacios de Sobolev

En este apartado, damos algunos resultados de interpolación en espacios de Sobolev. Comenzamos con el siguiente

Lema 6.6 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado de frontera lipschitziana y sea ϵ_0 un número positivo. Existe una constante $C = C(\epsilon_0, m, r, \Omega)$ tal que, para cualquier $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, cualquier multiíndice α con $0 \leq |\alpha| \leq m - 1$ y cualquier $g \in W^{m,r}(\Omega)$, donde $1 \leq r < \infty$, se tiene

$$\|D^\alpha g\|_{0,r;\Omega} \leq C \left(\epsilon \|D^m g\|_{0,r;\Omega} + \epsilon^{\frac{-|\alpha|}{m-|\alpha|}} \|g\|_{0,r;\Omega} \right). \blacksquare$$

Para la Demostración, cf. [1].

Se deduce el siguiente

Corolario 6.7 Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado de frontera lipschitziana y $g \in L^r(\Omega)$, $1 < r < \infty$, tal que $D^2 g \in L^r(\Omega)$. Entonces, $g \in W^{2,r}(\Omega)$ y se verifica además que

$$(6.1) \quad \|g\|_{2,r;\Omega} \leq C (\|g\|_{0,r;\Omega} + \|D^2 g\|_{0,r;\Omega}).$$

Demostración: Sea $(g_n) \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ una sucesión convergente a g en $L^r(\Omega)$ obtenida mediante truncamiento y regularización en la forma habitual; se deduce fácilmente que (g_n) y $(D^2 g_n)$ están acotadas en $L^r(\Omega)$ y que $D^2 g_n \rightarrow D^2 g$ en $L^r(\Omega)$. En virtud del Lema anterior, la sucesión (Dg_n) está acotada en $L^r(\Omega)$, por lo que posee una subsucesión débilmente convergente ($L^r(\Omega)$, para $1 < r < \infty$, es reflexivo) hacia una cierta $g' \in L^r(\Omega)$. Es fácil comprobar que $g' = Dg$. La desigualdad (6.1) se obtiene inmediatamente del Lema 6.6. ■

Sea de nuevo Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N y sea $\Omega' \subset\subset \Omega$ un abierto. Fijado un punto $x_0 \in \Omega'$ y un número real positivo $R < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, se consideran las bolas $B_R = B(x_0; R)$ y $B_{\sigma R} = B(x_0; \sigma R)$, con $\sigma \in (0, 1)$; si $1 < r < \infty$, para cada $g \in W_{loc}^{2,r}(\Omega)$ y para cada $k = 0, 1$ ó 2 , se denota

$$\Phi_{k,B_R}(g) = \sup_{0 < \sigma < 1} (1 - \sigma)^k R^k \|D^k g\|_{0,r;B_{\sigma R}}.$$

Se tiene el siguiente

Lema 6.8 *Fijado $\epsilon_0 > 0$ arbitrario, existe $C = C(r, \Omega, \epsilon_0)$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ y para todo $g \in W_{loc}^{2,r}(\Omega)$, se verifica*

$$\Phi_{1,B_R}(g) \leq C\epsilon \Phi_{2,B_R}(g) + \frac{C}{\epsilon} \Phi_{0,B_R}(g).$$

Demostración: Haciendo el cambio de variables $x = \Psi(\xi) = R\xi$, se llega a que

$$\Phi_{k,B_R}(g) = R^{N/r} \Phi_{k,\tilde{B}_1}(\tilde{g})$$

siendo \tilde{B}_1 y \tilde{g} los transformados, por el cambio de variables, de B_R y g , respectivamente. Como consecuencia, se tiene que la desigualdad es invariante por cambios de variables que sean homotecias, por lo que es suficiente probarla en el caso $R = 1$.

Por definición,

$$\Phi_{1,B_1}(g) = \sup_{0 < \sigma < 1} (1 - \sigma) \|Dg\|_{0,r;B_\sigma},$$

por lo que, para cada $\rho > 0$, existe $\sigma_\rho \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} \Phi_{1,B_1}(g) &\leq (1 - \sigma_\rho) \|Dg\|_{0,r;B_{\sigma_\rho}} + \rho \\ &\leq C\epsilon(1 - \sigma_\rho)^2 \|D^2 g\|_{0,r;B_{\sigma_\rho}} + \frac{C}{\epsilon} \|g\|_{0,r;B_{\sigma_\rho}} + \rho, \end{aligned}$$

donde hemos aplicado el Lema anterior con ϵ sustituido por $\epsilon(1 - \sigma_\rho)$. Por tanto, para todo $\rho > 0$,

$$\Phi_{1,B_1}(g) \leq C\epsilon \sup_{0 < \sigma < 1} (1 - \sigma)^2 \|D^2 g\|_{0,r;B_\sigma} + \frac{C}{\epsilon} \sup_{0 < \sigma < 1} \|g\|_{0,r;B_\sigma} + \rho.$$

Haciendo $\rho \rightarrow 0$, obtenemos la desigualdad deseada. ■

Observación: Si se considera

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\},$$

se sustituyen Ω , B_R y $B_{\sigma R}$ por $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^N$, $B_R^+ = B_R \cap \mathbb{R}_+^N$ y $B_{\sigma R}^+ = B_{\sigma R} \cap \mathbb{R}_+^N$, respectivamente, se elige x_0 en $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \Omega' \mid x_N = 0\}$ y se consideran funciones $g \in W^{2,r}(\Omega^+)$, el Lema anterior continúa siendo cierto. ■

6.1.4 Composición de funciones en espacios de Sobolev

Consideraremos en \mathbb{R}^N dos sistemas de referencia; cuando nos refiramos al primero, pondremos \mathbb{R}_ξ^N , denotando por $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ las coordenadas de un punto cualquiera de \mathbb{R}^N respecto de este sistema de referencia; cuando nos refiramos al segundo, pondremos \mathbb{R}_x^N , denotando, como antes, $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Sean $\tilde{\Omega}$ y Ω dominios en \mathbb{R}_ξ^N y \mathbb{R}_x^N , respectivamente, y Ψ un difeomorfismo de $\tilde{\Omega}$ en Ω de clase $W^{m,\infty}$, m entero ≥ 0 , es decir una aplicación $\Psi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ biyectiva, tal que $\Psi \in W^{m,\infty}(\tilde{\Omega})$ y $\Psi^{-1} \in W^{m,\infty}(\Omega)$. Denotamos por Ψ_i y Ψ_i^{-1} las componentes i -ésimas de Ψ y Ψ^{-1} , respectivamente.

Si T es una superficie $(N-1)$ -dimensional de clase $W^{\mu,\infty}$, $\mu \in [0, m]$, contenida en $\tilde{\Omega}$, entonces la imagen de T por Ψ^{-1} , \tilde{T} , es una superficie $(N-1)$ -dimensional contenida en $\tilde{\Omega}$ y de la misma clase que T .

Dada una función g definida en Ω , se denota \tilde{g} la composición de g con Ψ^{-1} . Es evidente que, para todo $\mu \in [0, m]$ y para todo $r \in [1, \infty]$, se verifica

$$g \in W^{\mu,r}(\Omega) \text{ si y sólo si } \tilde{g} \in W^{\mu,r}(\tilde{\Omega}).$$

Además, si denotamos por $g|_T$ la traza sobre T de la función g , se tiene que $g|_T$ existe si y sólo si existe $\tilde{g}|_{\tilde{T}}$, y, cuando esto ocurre, se verifica

$$\tilde{g}|_{\tilde{T}} = g|_T \circ \Psi.$$

En particular, si $m \geq 2$ y $g \in W^{2,r}(\Omega)$ se tienen las siguientes relaciones:

$$(D_k g) \circ \Psi = \sum_{i=1}^N ((D_k \Psi_i^{-1}) \circ \Psi) D_i \tilde{g}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$(D_{k_1 k_2} g) \circ \Psi = \sum_{i,j=1}^N ((D_{k_1} \Psi_i^{-1}) \circ \Psi) ((D_{k_2} \Psi_j^{-1}) \circ \Psi) D_{ij} \tilde{g}$$

$$+ \sum_{i=1}^N ((D_{k_1 k_2} \Psi_1^{-1}) \circ \Psi) D_i \tilde{g}, \quad 1 \leq k_1, k_2 \leq N,$$

que utilizaremos más adelante.

6.1.5 El Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz

Estudiamos ahora un resultado que permite extender, bajo ciertas condiciones, un operador definido en $L^s(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$ a cualquier $L^r(\Omega)$, con $s < r < \sigma$ (cf. [26]).

Sea φ una función medible, definida en un dominio Ω (acotado ó no) de \mathbf{R}^N . La función de distribución μ_φ de φ se define por

$$\mu_\varphi(t) = \text{med}\{x \in \Omega \mid \varphi(x) > t\}$$

para $t > 0$, y mide la talla relativa de φ . Obsérvese que μ_φ es una función decreciente en $(0, \infty)$.

En [26] se prueba el siguiente:

Lema 6.9 *Para cualquier $r > 0$ y cualquier φ tal que $|\varphi|^r \in L^1(\Omega)$, se verifica*

$$\mu_\varphi(t) \leq t^{-r} \int_{\Omega} |\varphi|^r dx,$$

$$\int_{\Omega} |\varphi|^r dx = r \int_0^\infty t^{r-1} \mu_\varphi(t) dt. \quad \blacksquare$$

También se tiene el siguiente resultado, que es un caso particular del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz:

Teorema 6.10 *Sea $T : L^s(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega) \rightarrow L^s(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$ lineal, $1 \leq s < \sigma < \infty$, y supongamos que existen constantes T_1 y T_2 tales que*

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_1 \|f\|_{0,s;\Omega}}{t} \right)^s, \quad \mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{T_2 \|f\|_{0,\sigma;\Omega}}{t} \right)^\sigma$$

para todo $f \in L^s(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$ y todo $t > 0$. Entonces, T se extiende como una aplicación lineal acotada de $L^r(\Omega)$ en $L^r(\Omega)$ para cada r tal que $s < r < \sigma$, y se verifica

$$\|Tf\|_{0,r;\Omega} \leq CT_1^\theta T_2^{1-\theta} \|f\|_{0,r;\Omega}$$

para todo $f \in L^s(\Omega) \cap L^\sigma(\Omega)$. Aquí,

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{\sigma}$$

y la constante $C = 2\{r(\sigma - s)/[(r - s)(\sigma - r)]\}^{\frac{1}{r}}$. ■

En [26] se da una demostración de este Teorema en el caso escalar, la cual se adapta al caso vectorial sin más que sustituir valores absolutos por normas Euclídeas.

6.1.6 Algunas propiedades de ciertos espacios relacionados con el operador divergencia en L^2

El estudio de la existencia de solución del problema de Stokes hace uso de propiedades del operador divergencia. Presentamos aquí algunos resultados que utilizaremos en nuestro estudio de la regularidad de esta solución (cf. [25]).

En este apartado, Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^N con frontera lipschitziana. Se considera el operador divergencia, definido para $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ por

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = \sum_{i=1}^N D_i z_i$$

y se introducen los siguientes espacios de funciones con divergencia nula

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \quad V = \{\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{z} = 0\}.$$

Dotamos a $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ de la seminorma $|\cdot|_{1;\Omega}$, equivalente a la norma $\|\cdot\|_{1;\Omega}$, en virtud de la desigualdad de Poincaré. El espacio V , dotado de esta seminorma es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, por lo que se tiene la descomposición

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) = V \oplus V^\perp,$$

donde V^\perp denota el complemento ortogonal de V en $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ respecto del producto escalar (Dy, Dz) , asociado con la seminorma $|\cdot|_{1;\Omega}$.

El siguiente resultado, que es una versión muy simplificada del Teorema de De Rham, se demuestra en [25]:

Lema 6.11 Si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ y

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

entonces existe $p \in L^2(\Omega)$, única salvo una constante aditiva, tal que

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} p. \quad \blacksquare$$

Ahora, observamos que de la fórmula de Green se obtiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{z} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Por tanto, el rango del operador div está contenido en un subespacio propio y cerrado de $L^2(\Omega)$, que denotamos por $L_0^2(\Omega)$:

$$L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p = 0\}.$$

Obsérvese que

$$\|q\|_{0;\Omega} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{0;\Omega} = \|\dot{q}\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega),$$

por lo que $L_0^2(\Omega)$ puede ser identificado isométricamente con $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. El siguiente resultado (cf. [25]) establece además que el rango de div es exactamente $L_0^2(\Omega)$.

Corolario 6.12 *Se verifica*

i) *El operador grad es un isomorfismo de $L_0^2(\Omega)$ en*

$$V^0 = \{\mathbf{h} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \mid \langle \mathbf{h}, \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V\};$$

ii) *El operador div es un isomorfismo de V^\perp en $L_0^2(\Omega)$. ■*

Se deduce del resultado anterior el siguiente

Corolario 6.13 *Existe una constante $b_0 > 0$ tal que*

$$\sup_{\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{z})}{|\mathbf{z}|_{1;\Omega}} \geq b_0 \|q\|_{0;\Omega} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Demostración: Dado $q \in L_0^2(\Omega)$, por el Corolario 6.12, existe un único $\mathbf{v} \in V^\perp$ tal que

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = q, \quad |\mathbf{z}|_{1;\Omega} \leq C \|q\|_{0;\Omega}.$$

Entonces,

$$\frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{z})}{|\mathbf{z}|_{1;\Omega}} = \frac{\|q\|_{0;\Omega}^2}{|\mathbf{z}|_{1;\Omega}} \geq \frac{1}{C} \|q\|_{0;\Omega}.$$

Por tanto, se tiene el Corolario con $b_0 = 1/C$. ■

El siguiente resultado de levantamiento de trazas, útil asimismo para la resolución del problema de Stokes, es también una consecuencia del Corolario 6.12:

Lema 6.14 Para cada par de funciones $y_\Gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ que verifiquen

$$\int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} g \, dx,$$

existe una función $y \in H^1(\Omega)$, única salvo una función aditiva de V , tal que

$$(6.2) \quad \operatorname{div} y = g \quad \text{en } \Omega, \quad y = y_\Gamma \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Además, existe una constante C , independiente de y e y_Γ , tal que

$$(6.3) \quad \inf_{z \in V} \|y + z\|_{1;\Omega} \leq C \|y_\Gamma\|_{1/2;\partial\Omega} + \|g\|_{0;\Omega}.$$

Demostración: Una Demostración de este Lema en el caso $g = 0$, que nosotros adaptamos aquí a nuestro caso, puede encontrarse en [25].

De los resultados relativos a levantamientos de trazas (cf. [37]), se tiene la existencia de una función $y_0 \in H^1(\Omega)$ tal que $y_0 = y_\Gamma$ sobre $\partial\Omega$. Esta función, en virtud de la fórmula de Green, verifica

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} y_0 \, dx = \int_{\partial\Omega} y_0 \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} g \, dx,$$

por lo que $\operatorname{div} y_0 - g \in L_0^2(\Omega)$. Entonces, por el Corolario 6.12, existe un vector $y_1 \in V^\perp$ que verifica

$$\operatorname{div} y_1 = \operatorname{div} y_0 - g, \quad \|y_1\|_{1;\Omega} \leq C_1 (\|y_0\|_{1;\Omega} + \|g\|_{0;\Omega}),$$

donde la constante C_1 es independiente de y_0 , y_1 y g . La función $y = y_0 - y_1$ pertenece a $H^1(\Omega)$ y verifica (6.2); además, si $y^* \in H^1(\Omega)$ verifica también (6.2), es obvio que $y - y^* \in V$. Por otro lado se tiene que

$$\|y\|_{1;\Omega} \leq C_2 (\|y_0\|_{1;\Omega} + \|g\|_{0;\Omega}),$$

donde C_2 es independiente de y_0 y g ; de aquí se deduce la desigualdad

$$\inf_{z \in V} \|y + z\|_{1;\Omega} \leq C_2 (\|y_0\|_{1;\Omega} + \|g\|_{0;\Omega})$$

para cualquier $y_0 \in H_1(\Omega)$ cuya traza sobre $\partial\Omega$ sea y_Γ ; tomando en esta desigualdad ínfimos en y_0 , se obtiene (6.3). ■

También haremos uso de la siguiente versión, de nuevo simplificada, pero suficiente en nuestro caso, del Teorema de De Rham:

Teorema 6.15 Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ satisface

$$\langle f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

entonces existe $p \in L^2(\Omega)$, única salvo una constante aditiva, tal que

$$f = \text{grad } p.$$

Además, existe una constante $C > 0$, que sólo depende de Ω , tal que

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|f\|_{-1;\Omega}. \quad \blacksquare$$

Para la Demostración, por ejemplo véase [25, Teorema 2.3 y Corolario 2.1].

Como consecuencia, también se prueba en [25] el siguiente

Corolario 6.16 El espacio \mathcal{V} es denso en V para la norma de $H_0^1(\Omega)$. \blacksquare

Para finalizar este apartado, introducimos un espacio, mayor que el espacio V , que también guarda relación con el operador divergencia y con la resolución del problema de Stokes. Definimos el espacio $H(\text{div}; \Omega)$ como sigue:

$$H(\text{div}; \Omega) = \{z \in L^2(\Omega) \mid \text{div } z \in L^2(\Omega)\}.$$

Es inmediato que este espacio es un espacio de Hilbert cuando se le dota de la norma

$$\|z\|_{H(\text{div}; \Omega)} = \{\|z\|_{0;\Omega}^2 + \|\text{div } z\|_{0;\Omega}^2\}^{1/2}.$$

Las propiedades del espacio $H(\text{div}; \Omega)$ dadas en el siguiente Teorema se demuestran en [25]:

Teorema 6.17 i) $\mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ es denso en $H(\text{div}; \Omega)$.

ii) La aplicación traza normal $\gamma_n : z \rightarrow z \cdot n|_{\partial\Omega}$ definida en $\mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ puede ser extendida por continuidad a una aplicación lineal continua, aún denotada por γ_n y llamada traza normal, de $H(\text{div}; \Omega)$ en $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

iii) Se verifica

$$\|z \cdot n\|_{-1/2;\partial\Omega} \leq \|z\|_{H(\text{div}; \Omega)} \quad \forall z \in H(\text{div}; \Omega).$$

iv) Se tiene la siguiente fórmula de Green:

$$(z, D\varphi) + (\text{div } z, \varphi) = \langle z \cdot n, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

cualesquiera que sean $\mathbf{z} \in H(\operatorname{div}; \Omega)$, $\varphi \in H^1(\Omega)$. ■

Para una generalización del espacio $H(\operatorname{div}; \Omega)$, véase el apartado siguiente.

6.1.7 Algunas propiedades de ciertos espacios relacionados con el operador divergencia en L^r

En nuestro estudio de la regularidad de la solución del problema de Stokes, necesitaremos propiedades de funciones de L^r , en general $r \neq 2$, cuya divergencia está en L^r . Por ello, introducimos en este apartado la siguiente generalización del espacio $H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{1,\infty}$ y sea $r \in (1, \infty)$; consideremos el espacio vectorial

$$W^r(\operatorname{div}; \Omega) = \{\mathbf{z} \in L^r(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{z} \in L^r(\Omega)\}.$$

Se tiene:

Teorema 6.18 *El espacio vectorial $W^r(\operatorname{div}; \Omega)$, dotado de la norma*

$$\|\mathbf{z}\|_{W^r(\operatorname{div}; \Omega)} = \|\mathbf{z}\|_{0,r;\Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{z}\|_{0,r;\Omega},$$

es un espacio de Banach.

Demostración: Sea (\mathbf{z}_n) una sucesión de Cauchy en $W^r(\operatorname{div}; \Omega)$; entonces, (\mathbf{z}_n) y $(\operatorname{div} \mathbf{z}_n)$ son sucesiones de Cauchy en $L^r(\Omega)$ y $L^r(\Omega)$, respectivamente, por lo que existen \mathbf{z} y z' tales que

$$\mathbf{z}_n \rightarrow \mathbf{z} \quad \text{en } L^r(\Omega)$$

y

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_n \rightarrow z' \quad \text{en } L^r(\Omega).$$

Obviamente, $z' = \operatorname{div} \mathbf{z}$, con lo que se tiene que $\mathbf{z} \in W^r(\operatorname{div}; \Omega)$ y $\mathbf{z}_n \rightarrow \mathbf{z}$ en $W^r(\operatorname{div}; \Omega)$. Esto demuestra el Teorema. ■

Teorema 6.19 *$W^r(\operatorname{div}; \Omega)$ es reflexivo.*

Demostración: Consideremos el espacio $L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ y la aplicación

$$S : W^r(\operatorname{div}; \Omega) \longrightarrow L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}),$$

definida por $S\mathbf{z} = (\mathbf{z}, \operatorname{div} \mathbf{z})$ que, evidentemente, es una isometría. Podemos identificar $W^r(\operatorname{div}; \Omega)$ con $S(W^r(\operatorname{div}; \Omega))$, que es un subespacio cerrado de $L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$. Como $L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ es reflexivo y todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo también lo

es, se concluye que $S(W^r(\text{div}; \Omega))$ — y por tanto también $W^r(\text{div}; \Omega)$ — es reflexivo. ■

Teorema 6.20 i) *Todo elemento $\tilde{l} = (1, \bar{l}) \in L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ define un elemento $T\tilde{l} \in (W^r(\text{div}; \Omega))'$ de la siguiente forma*

$$\langle T\tilde{l}, z \rangle = \int_{\Omega} 1 \cdot z \, dx + \int_{\Omega} \bar{l} \, \text{div} \, z \, dx \quad \forall z \in W^r(\text{div}; \Omega).$$

ii) *Para todo $\hat{l} \in (W^r(\text{div}; \Omega))'$, existe $\tilde{l} \in L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$ tal que $T\tilde{l} = \hat{l}$.*

Demostración: Consideremos la aplicación

$$T : L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}) \longrightarrow (W^r(\text{div}; \Omega))'$$

definida, para cada $\tilde{l} = (1, \bar{l}) \in L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$, por

$$\langle T\tilde{l}, z \rangle = \int_{\Omega} 1 \cdot z \, dx + \int_{\Omega} \bar{l} \, \text{div} \, z \, dx \quad \forall z \in W^r(\text{div}; \Omega).$$

Es evidente que T está bien definida, i.e. se tiene probado el apartado i) del Teorema. Para probar el apartado ii), hay que demostrar que T es sobreyectiva; para ello, utilizaremos el siguiente resultado (cf., por ejemplo, [7], pág. 30):

Sean E y F dos espacios de Banach y sea

$$\left\{ \begin{array}{l} A : D(A) \subset E \longrightarrow F \text{ un operador no acotado, cerrado, con } \overline{D(A)} = E; \\ \text{sea } A^* \text{ el operador adjunto de } A. \text{ Son equivalentes:} \\ \quad \text{(a) } N(A) = \{0\} \text{ y } R(A) \text{ es cerrado.} \\ \quad \text{(b) } A^* \text{ es sobreyectivo.} \end{array} \right.$$

Consideremos el operador lineal

$$S : W^r(\text{div}; \Omega) \longrightarrow L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1}),$$

definido por

$$S(z) = (z, \text{div} \, z) \quad \forall z \in W^r(\text{div}; \Omega),$$

cuyo dominio $D(S)$ es todo el espacio $W^r(\text{div}; \Omega)$. Veíamos en la Demostración del Teorema anterior que el rango de S es cerrado y, de manera análoga a como se demostró que $W^r(\text{div}; \Omega)$ es completo, se comprueba que S es un operador cerrado. También es evidente que el núcleo de S se reduce a 0. Por tanto, el operador adjunto de S , S^* , es sobreyectivo. Se comprueba sin dificultad que S^* y T coinciden, con lo que se tiene probado que T es sobreyectivo y, con ello, el Teorema. ■

Teorema 6.21 $D(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ es denso en $W^r(\text{div}; \Omega)$.

Demostración: La Demostración se basa en el siguiente resultado conocido de Análisis Funcional (cf., por ejemplo, [7], pág. 7):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Un subespacio } \mathcal{M} \text{ de un espacio de Banach } M \\ \text{es denso en } M \text{ si y sólo si todo elemento de } M' \\ \text{que se anule idénticamente sobre } \mathcal{M}, \\ \text{también se anula sobre } M. \end{array} \right.$$

Sea $\hat{l} \in (W^r(\text{div}; \Omega))'$ tal que

$$\langle \hat{l}, \Psi \rangle = 0 \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N).$$

Por el Teorema anterior, $\hat{l} = T\tilde{l}$ con $\tilde{l} = (1, \bar{l}) \in L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$; prolonguemos \tilde{l} por 0 fuera de Ω (continuamos denotando \tilde{l} la prolongación); entonces, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} (1 \cdot \Psi + \bar{l} \text{div } \Psi) dx = 0 \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N),$$

lo que equivale a

$$\text{grad } \bar{l} = 1 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Ya que $1 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, se deduce que $\bar{l} \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ y, por tanto, su restricción a Ω , también denotada \bar{l} pertenece a $W_0^{1,r}(\Omega)$.

Ahora, puesto que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $W_0^{1,r}(\Omega)$, se considera una sucesión (ϕ_n) en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\phi_n \rightarrow \bar{l} \quad \text{en } W_0^{1,r}(\Omega);$$

se verifica que

$$\text{grad } \phi_n \rightarrow 1 \quad \text{en } L^r(\Omega).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \langle \hat{l}, z \rangle &= \int_{\Omega} 1 \cdot z \, dx + \int_{\Omega} \bar{l} \text{div } z \, dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\text{grad } \phi_n \cdot z + \phi_n \text{div } z) \, dx = 0 \quad \forall z \in W^r(\text{div}; \Omega). \end{aligned}$$

Se tiene así probado el Teorema. ■

Teorema 6.22 La aplicación $\gamma_n : z \rightarrow z \cdot n|_{\partial\Omega}$, definida en $\mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, puede ser prolongada a una única aplicación lineal continua, también denotada γ_n , de $W^r(\text{div}; \Omega)$ en $W^{-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega)$ (espacio dual de $W^{1-\frac{1}{r}, r'}(\partial\Omega)$).

Demostración: Sean $z \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ y $\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Se verifica la siguiente fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} z \cdot \text{grad } \phi \, dx + \int_{\Omega} (\text{div } z) \phi \, dx = \int_{\partial\Omega} (z \cdot n) \phi \, dS.$$

Como $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $W^{1,r'}(\Omega)$, la igualdad anterior es válida para $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$ y $\mathbf{z} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Por tanto,

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \phi \, dS \right| \leq \|\mathbf{z}\|_{W^r(\text{div}; \Omega)} \|\phi\|_{1,r'; \Omega} \quad \forall \phi \in W^{1,r'}(\Omega), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N).$$

Ahora, sea $\mu \in W^{1-\frac{1}{r}, r'}(\partial\Omega)$. Entonces, existe $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$ tal que $\phi = \mu$ sobre $\partial\Omega$. Por tanto, la desigualdad anterior implica:

$$\left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \mu \, dS \right| \leq \|\mathbf{z}\|_{W^r(\text{div}; \Omega)} \|\mu\|_{1-\frac{1}{r}, r'; \partial\Omega} \quad \forall \mu \in W^{1-\frac{1}{r}, r'}(\partial\Omega), \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N).$$

Se tiene entonces que

$$\|\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{r}, r; \partial\Omega} \leq \|\mathbf{z}\|_{W^r(\text{div}; \Omega)},$$

con lo que $\gamma_{\mathbf{n}} : \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$, definida en $\mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$, es continua para la norma de $W^r(\text{div}; \Omega)$. Ya que $\mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ es denso en $W^r(\text{div}; \Omega)$, $\gamma_{\mathbf{n}}$ puede ser prolongada de forma única a una aplicación también denotada $\gamma_{\mathbf{n}} \in \mathcal{L}(W^r(\text{div}; \Omega); W^{-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega))$ tal que

$$\|\gamma_{\mathbf{n}}\|_{\mathcal{L}(W^r(\text{div}; \Omega); W^{-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega))} \leq 1. \quad \blacksquare$$

Por extensión, $\gamma_{\mathbf{n}}$ se llama también traza normal y $\gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{z}$ suele escribirse simplemente $\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}$. Se tiene:

$$\|\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}\|_{-1/r, r; \partial\Omega} \leq \|\mathbf{z}\|_{W^r(\text{div}; \Omega)}.$$

En particular, cuando $\mathbf{z} \in W^{1,r}(\Omega)$, se tiene que $\mathbf{z} \cdot \mathbf{n} \in W^{-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega)$ y

$$\langle \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}, \phi \rangle_{W^{-\frac{1}{r}, r}(\partial\Omega), W^{1-\frac{1}{r}, r'}(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \phi \, dS \quad \forall \phi \in W^{1-\frac{1}{r}, r'}(\partial\Omega).$$

Se deduce de aquí, que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}) \phi \, dS \right| &\leq \|\mathbf{z} \cdot \mathbf{n}\|_{-1/r, r; \partial\Omega} \|\phi\|_{1-\frac{1}{r}, r'; \partial\Omega} \\ &\leq \|\mathbf{z}\|_{W^r(\text{div}; \Omega)} \|\phi\|_{1, r'; \Omega}, \end{aligned}$$

para todo par de funciones $\mathbf{z} \in W^{1,r}(\Omega)$, $\phi \in W^{1,r'}(\Omega)$.

6.1.8 El marco de la formulación débil de los problemas elípticos

En este apartado, damos una descripción breve de una herramienta fundamental utilizada en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico.

Sea V un espacio de Hilbert real, cuya norma denotamos por $\|\cdot\|$; sea V' el dual de V y denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualidad entre V' y V . Sean $(y, z) \rightarrow a(y, z)$ una forma bilineal real sobre $V \times V$, ℓ un elemento de V' y consideremos el siguiente problema variacional, llamado *Problema (P)*:

$$(P) \begin{cases} \text{Hallar } y \in V \text{ tal que} \\ a(y, z) = \langle \ell, z \rangle \quad \forall z \in V. \end{cases}$$

Se tiene el siguiente resultado básico, conocido como el Teorema de Lax & Milgran (cf. [30]):

Teorema 6.23 *Supongamos que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y elíptica en V , es decir, existen dos constantes L y $a_0 > 0$ tales que*

$$|a(y, z)| \leq L \|y\| \|z\| \quad \forall y, z \in V$$

y

$$a(z, z) \geq a_0 \|z\|^2 \quad \forall z \in V.$$

Entonces, el problema (P) tiene una única solución u en V . Además, la aplicación $\ell \rightarrow y$ es un isomorfismo de V' sobre V . ■

6.1.9 El marco de la formulación variacional mixta de problemas elípticos

En este apartado, analizamos un marco funcional abstracto que se adapta bien a la resolución de problemas de contorno con una restricción lineal, como es el caso del problema de Stokes (cf. [25]).

Sean X y M dos espacios de Hilbert reales, cuyas normas denotamos por $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_M$, respectivamente. Sean X' y M' sus correspondientes duales y denotemos por $\|\cdot\|_{X'}$ y $\|\cdot\|_{M'}$ sus normas duales. Como es usual, denotaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ los productos de dualidad entre los espacios X y X' ó M y M' .

Introducimos dos formas bilineales continuas:

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(\cdot, \cdot) : X \times M \rightarrow \mathbb{R},$$

con normas

$$\|a\| = \sup_{y, z \in X \setminus \{0\}} \frac{a(y, z)}{\|y\|_X \|z\|_X}, \quad \|b\| = \sup_{z \in X \setminus \{0\}, \mu \in M \setminus \{0\}} \frac{b(z, \mu)}{\|z\|_X \|\mu\|_M}$$

Consideremos el siguiente problema variacional (mixto), llamado *Problema (Q)*:

$$(Q) \begin{cases} \text{Dado } \ell \in X' \text{ y } \chi \in M', \\ \text{encontrar un par } (y, \lambda) \in X \times M \text{ tal que} \\ a(y, z) + b(z, \lambda) = \langle \ell, z \rangle \quad \forall z \in X, \\ b(y, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{cases}$$

Asociamos al problema anterior el espacio

$$V = \{z \in X \mid b(z, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in M\}.$$

Definición 6.24 Se dice que la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ verifica la condición "inf-sup" si existe una constante $b_0 > 0$ tal que

$$\inf_{\mu \in M \setminus \{0\}} \sup_{z \in X \setminus \{0\}} \frac{b(z, \mu)}{\|z\|_X \|\mu\|_M} \geq b_0. \quad \blacksquare$$

Se tiene el siguiente resultado, para cuya demostración puede consultarse, por ejemplo, [25].

Teorema 6.25 Supongamos que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica, es decir, existe una constante $a_0 > 0$ tal que

$$a(z, z) \geq a_0 \|z\|_X^2 \quad \forall z \in V.$$

Entonces, el problema (Q) tiene una única solución si y sólo si la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ satisface la condición inf-sup. Además, cuando esto ocurre, la aplicación $(\ell, \chi) \rightarrow (y, \lambda)$ es un isomorfismo de $X \times M$ sobre $X' \times M'$. ■

6.2 El problema de Stokes: Existencia de solución

Planteamos en esta Sección el problema de Stokes a partir de las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido viscoso incompresible en un dominio Ω de \mathbf{R}^N .

Una forma usual de estudiar la existencia de solución de un problema de ecuaciones en derivadas parciales es formularlo como problema funcional equivalente en un espacio de distribuciones, probar la existencia de solución en este espacio (solución débil) y, por último, estudiar la regularidad de la ó las soluciones, lo que dependerá de la regularidad de los datos. Este método permite, por un lado, probar la existencia de solución clásica cuando los datos son suficientemente regulares y, por otro, obtener soluciones cuando se tienen datos menos regulares.

En el aptdo. 6.2.2, recordamos un resultado de existencia de solución débil del problema de Stokes; aunque su demostración es bien conocida (cf., por ejemplo, [25], [29], [52]), hemos creído conveniente su inclusión aquí, de dos formas diferentes, ya que ciertas variantes de la misma nos servirán para probar la regularidad de la solución del problema de Stokes y la existencia de solución de otros problemas similares; también, describimos brevemente cómo se probó la existencia de solución clásica originariamente, usando la teoría de potenciales.

Por último, en el aptdo. 6.2.3, enunciamos los resultados sobre regularidad de soluciones más generales que conocíamos con anterioridad a este trabajo. En las Secciones siguientes, se continúa con el estudio de la regularidad de las soluciones de los problemas de Stokes y Navier-Stokes.

6.2.1 Las ecuaciones de Navier-Stokes

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ó 3 . El movimiento de un fluido viscoso incompresible en Ω está regido por las ecuaciones de Navier-Stokes (cf. [25], [29]):

$$\rho \left(\frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N u_j D_j y_i \right) - \sum_{j=1}^N D_j \sigma_{ij} = \rho f_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0 \quad (\text{condicion de incompresibilidad}),$$

donde σ es el tensor de componentes

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(D_j y_i + D_i y_j), \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

En estas ecuaciones $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ es la velocidad del fluido, ρ , su densidad (que suponemos constante), $\mu > 0$, su viscosidad (que también suponemos constante) y P su presión; (σ_{ij}) es el tensor de esfuerzos y $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ representa una densidad de fuerza por unidad de masa (por ejemplo, debidas a la presencia de un campo gravitatorio).

Usualmente, se pone

$$p = P/\rho, \quad \nu = \mu/\rho.$$

A p se le llama presión cinemática y a ν , viscosidad cinemática pero, en lo que sigue y por simplicidad, las llamaremos simplemente presión y viscosidad. Con esta notación, las ecuaciones de Navier-Stokes se escriben en la forma

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^N y_j D_j y_i - \nu \sum_{j=1}^N D_j (D_j y_i + D_i y_j) + D_i p = f_i, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0.$$

Obsérvese que, por ser $\operatorname{div} \mathbf{y} = 0$, se verifica la identidad

$$\sum_{j=1}^N D_j(D_j y_i + D_i y_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (D_{jj} y_i + D_{ij} y_j) = \frac{1}{2} \Delta y_i,$$

de manera que podemos escribir las ecuaciones de Navier-Stokes como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N y_j D_j \mathbf{y} - \nu \Delta \mathbf{y} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0.$$

Nosotros, aquí, sólo estudiaremos problemas estacionarios (no dependientes del tiempo), con lo que $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = 0$ y, por tanto, las ecuaciones de Navier-Stokes consideradas son las siguientes:

$$-\nu \Delta \mathbf{y} + \sum_{j=1}^N y_j D_j \mathbf{y} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0;$$

además, para empezar, supondremos que el orden de magnitud del campo de velocidades y es lo suficientemente pequeño como para que los términos de convección no lineales $y_j(D_j y_i)$ puedan ser ignorados. Esto da lugar a las ecuaciones llamadas de Stokes:

$$-\nu \Delta \mathbf{y} + \operatorname{grad} p = \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = 0.$$

6.2.2 Existencia de solución del problema de Stokes

Como ocurre con todas las ecuaciones y sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, es necesario añadir condiciones de contorno para que el problema de existencia de solución esté bien planteado; aquí añadiremos una condición de contorno de tipo Dirichlet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_\Gamma \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Por otro lado, nuestro análisis de la regularidad de las soluciones hace uso de la existencia de solución de sistemas de Stokes en los que la velocidad no tiene divergencia nula; por ello, sustituiremos la última ecuación del sistema por la siguiente:

$$\operatorname{div} \mathbf{y} = g,$$

donde g , en general, no es nula. Observemos que la elección de las funciones \mathbf{y}_Γ y g no es arbitraria, ya que si, por ejemplo, la velocidad \mathbf{y} pertenece a $\mathbf{H}^1(\Omega)$, se ha de verificar

$$\int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} \mathbf{y}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

en virtud de la fórmula de Green.

Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ó 3 , que suponemos acotado y lipschitziano. Dadas f y g , distribuciones en Ω , e y_Γ , una función definida sobre $\partial\Omega$, planteamos el siguiente problema de Stokes:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (y, p) \text{ tales que} \\ -\nu \Delta y + \text{grad } p = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^N), \\ \text{div } y = g \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ y = y_\Gamma \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En (S), la última ecuación se entenderá, salvo que se indique otra cosa, en el sentido de las trazas. En adelante, cuando se ponga "en Ω ", se sobreentenderá "en $\mathcal{D}'(\Omega)$ ". Llamaremos solución débil de (S) a todo par $(y, p) \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}'(\Omega)$ que verifique sus ecuaciones.

Se tiene el siguiente

Teorema 6.26 Dadas $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$ e $y_\Gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, tales que

$$\int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot n \, dS,$$

existe un único par $(y, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ solución débil de (S). Además, existe una constante C que sólo depende de Ω , tal que

$$(6.4) \quad \|y\|_{1;\Omega} + \|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|f\|_{-1;\Omega} + \|g\|_{0;\Omega} + \|y_\Gamma\|_{-1/2;\partial\Omega}).$$

Primera Demostración: i) Suponemos, en primer lugar, que se tiene $g = 0$ e $y_\Gamma = 0$ (problema homogéneo). Formulamos el problema en términos del correspondiente *Problema (P)* (cf. aptdo. 6.1.8):

Consideramos el espacio

$$V = \{z \in H_0^1(\Omega) \mid \text{div } z = 0\},$$

dotado de la norma $|\cdot|_{1;\Omega}$ (cf. aptdo. 6.1.6) y definimos en él la forma bilineal

$$a(y, z) = \nu(Dy, Dz) = \nu \int_{\Omega} Dy \cdot Dz \, dx,$$

que es continua y elíptica; por otro lado, es claro que f determina una única forma lineal continua sobre V . Por tanto, en virtud del Teorema de Lax-Milgram, existe un único $y \in V$ solución de

$$(P) \quad a(y, z) = \langle f, z \rangle \quad \forall z \in V;$$

además, existe una constante $C > 0$, independiente de f e y , tal que

$$\|y\|_{1;\Omega} \leq C \|f\|_{-1;\Omega}.$$

Tenemos que $-\nu\Delta y - f \in H^{-1}(\Omega)$ y se anula sobre V ; del Teorema de De Rham (cf. aptdo. 6.1.6), se deduce que existe una función $p \in L^2(\Omega)$ tal que

$$-\nu\Delta y - f = \text{grad } p \quad \text{en } H^{-1}(\Omega)$$

y

$$\|p\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \|-\nu\Delta y - f\|_{-1;\Omega} \leq C \|f\|_{-1;\Omega}.$$

Sólo nos queda probar la equivalencia de los problemas (S) y (P). Si (y, p) es solución de (S), se deduce fácilmente que

$$a(y, z) = \langle f, z \rangle \quad \forall z \in \mathcal{V};$$

por continuidad, teniendo en cuenta que \mathcal{V} es denso en V , se obtiene esta última igualdad para todo elemento de V , con lo que y es solución de (P). El recíproco es inmediato.

ii) Ahora, si g e y_Γ no se anulan simultáneamente, consideramos (cf. el Lema 6.14) una función $z \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\text{div } z = g, \quad z|_{\partial\Omega} = y_\Gamma,$$

$$\|z\|_{1;\Omega} \leq C \left(\|g\|_{0;\Omega} + \|y_\Gamma\|_{-1/2;\Omega} \right),$$

siendo C una constante que sólo depende de Ω . Entonces, una solución de (S) es el par $(y, p) = (w + z, p)$, donde (w, p) es la solución única del problema

$$\begin{aligned} -\nu\Delta w + \text{grad } p &= f + \nu\Delta z && \text{en } \Omega, \\ \text{div } w &= 0 && \text{en } \Omega, \\ z &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La existencia de solución de este problema acaba de ser probada en el apartado i); además, (y, p) , que en principio depende de z , es la única solución de (S), porque su diferencia con otra que pudiera existir sería solución del problema homogéneo con $f = 0$ y, por tanto, sería nula; por último, (6.4) se obtiene de forma inmediata de las estimaciones verificadas por (w, p) y por z . ■

Segunda Demostración: i) Suponemos, en primer lugar, que $y_\Gamma = 0$; ahora g puede ser no nulo y se tendrá la hipótesis

$$\int_{\Omega} g = 0.$$

Formulamos el problema en términos del *Problema (Q)* (cf. aptdo. 6.1.9):

Consideremos los espacios $X = H_0^1(\Omega)$ y $M = L_0^2(\Omega)$, respectivamente dotados de las normas $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ y $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ y las formas bilineales

$$a(y, z) = \nu(Dy, Dz) = \nu \int_{\Omega} Dy \cdot Dz \, dx$$

y

$$b(z, q) = -(q, \operatorname{div} z) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} z \, dx ;$$

consideremos también f , que está en X' , y el elemento $\chi \in M'$ definido por

$$\langle \chi, q \rangle = -(g, q) = - \int_{\Omega} g q \, dx \quad \forall q \in L_0^2(\Omega);$$

introduzcamos, por último, un subespacio de X ,

$$V_0 = \{z \in H_0^1(\Omega) \mid b(z, q) = 0 \quad \forall q \in M\},$$

que, por estar $\operatorname{div} z$ en $L_0^2(\Omega)$ para todo $z \in H_0^1(\Omega)$, coincide con

$$V = \{z \in H_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} z = 0\}.$$

Se tiene que las formas bilineales son continuas, $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica y $b(\cdot, \cdot)$ verifica la condición inf-sup (Corolario 6.13). Por tanto, existe un único par (y, p) en el espacio $H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ que verifica

$$(Q) \quad \begin{cases} a(y, z) + b(z, p) = \langle f, z \rangle & \forall z \in H_0^1(\Omega) \\ b(y, q) = -(g, q) & \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases}$$

y

$$\|y\|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq C \left(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{0,\Omega} \right),$$

donde C es una constante que depende sólomente de Ω .

Veamos a continuación que los problemas (S) y (Q) son equivalentes. Si (y, p) es solución de (S) , se prueba por continuidad que también es solución de (Q) , sin más que tener en cuenta que $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$ son densos en $H_0^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$, respectivamente. Recíprocamente, si (y, p) es solución de (Q) , de la segunda ecuación se deduce que

$$\operatorname{div} y = g,$$

teniendo en cuenta que $\operatorname{div} y - g \in L_0^2(\Omega)$; de nuevo, es evidente que (y, p) verifica la primera ecuación de (S) .

Por último, (6.4) se obtiene de la propiedad

$$\|p\|_{0;\Omega} = \|\dot{p}\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

ii) Suponemos ahora que $y_\Gamma \neq 0$ y consideramos una función

$$(6.5) \quad z \in H^1(\Omega), \quad z|_{\partial\Omega} = y_\Gamma$$

(no necesariamente aquella dada por el Lema 6.14). Entonces, una solución de (S) es el par $(y, p) = (w + z, p)$, donde (w, p) es la solución única del problema

$$\begin{aligned} -\nu\Delta w + \operatorname{grad} p &= f + \nu\Delta z && \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} w &= g - \operatorname{div} z && \text{en } \Omega, \\ z &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\int_{\Omega} (g - \operatorname{div} z) dx = \int_{\Omega} g dx - \int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Además, (y, p) , que en principio depende de z , es la única solución de (S), porque su diferencia con cualquier otra que pudiera existir sería solución del problema homogéneo con $f = 0$, y , por tanto, sería nula. Por último, se tiene, de la estimación verificada por (w, p) , que

$$\begin{aligned} &\|y\|_{1;\Omega} + \|\dot{p}\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \\ &\leq \|w\|_{1;\Omega} + \|\dot{p}\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} + \|z\|_{1;\Omega} \\ &\leq C \left(\|f + \nu\Delta z\|_{-1;\Omega} + \|g - \operatorname{div} z\|_{0;\Omega} + \|z\|_{1;\Omega} \right) \\ &\leq C \left(\|f\|_{-1;\Omega} + \|g\|_{0;\Omega} + \|z\|_{1;\Omega} \right), \end{aligned}$$

cualquiera que sea z verificando (6.5), con la constante C dependiendo sólo de Ω ; tomando ínfimos en z se obtiene (6.4). ■

Para terminar este apartado, indiquemos que existen otras formas de probar la existencia de solución del problema de Stokes. Originariamente el problema fue resuelto por F.K.G. Odqvist [38] y L. Lichtenstein [31], simultánea e independientemente, mediante la teoría de los potenciales asociados al sistema de Stokes (potenciales hidrodinámicos).

Este método transforma el problema de ecuaciones en derivadas parciales en un problema de ecuaciones integrales, cuya solución proporciona la del problema original (para más detalles, cf. [29]; véase también la Sección 6.6 para la definición y propiedades de los potenciales hidrodinámicos).

Así, siendo Ω un dominio acotado, de clase $C^{1,h}$ y siendo $y_\Gamma \in C(\partial\Omega)$, tal que

$$\int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

se prueba que el problema (S) con $\mathbf{f} = 0$ y $g = 0$ tiene una única solución analítica en Ω y continua hasta la frontera de Ω ; ésta viene dada como un potencial de capa doble cuya función de densidad es la solución del problema de ecuaciones integrales y sus propiedades de diferenciabilidad se prueban de manera análoga a como se hace para los potenciales asociados al operador de Laplace (potenciales Newtonianos). Después, se resuelve el problema no homogéneo con $\mathbf{f} \neq 0$ y $g = 0$, mediante la construcción de la función de Green correspondiente.

El método es de una complejidad mucho mayor que el anteriormente estudiado y precisa de mayor regularidad para los datos; no obstante, permite un estudio directo, aunque no sencillo, de las propiedades de diferenciabilidad de la solución.

6.2.3 Regularidad de la solución débil del problema de Stokes

La regularidad de las soluciones de las ecuaciones y sistemas elípticos en general ha sido estudiada por S. Agmon, A. Douglis y L. Nirenberg [2] y por V. A. Solonnikov [49]–[50], para dominios Ω de clase al menos C^2 . También, J. M. Ghidaglia [24] prueba resultados de regularidad L^2 de las soluciones de ciertos problemas elípticos ligados a las ecuaciones de Euler, bajo las mismas hipótesis de regularidad sobre Ω .

Para el problema de Stokes, el resultado más general que conocemos es el siguiente:

Teorema 6.27 Sean m un entero ≥ -1 , r un número real, $1 < r < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2$ ó 3 , un dominio acotado de clase C^μ , donde $\mu = \max\{m+2, 2\}$. Supongamos que $\mathbf{f} \in W^{m,r}(\Omega)$, $g \in W^{m+1,r}(\Omega)$ e $y_\Gamma \in W^{m+2-\frac{1}{r},r}(\Omega)$ y que se verifica

$$\int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Entonces, existe un único par

$$(\mathbf{y}, p) \in W^{m+2,r}(\Omega) \times W^{m+1,r}(\Omega)/\mathbb{R}$$

solución débil de (S). Además, existe una constante C , que sólo depende de m , r y Ω , tal que

$$(6.6) \quad \begin{aligned} & \|\mathbf{y}\|_{m+2,r;\Omega} + \|p\|_{W^{m+1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} \\ & \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{m,r;\Omega} + \|g\|_{m+1,r;\Omega} + \|y_\Gamma\|_{m+2-\frac{1}{r},r;\partial\Omega} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

La Demostración de este resultado en el caso $N = 2$ puede encontrarse, por ejemplo, en [52]. Allí se prueba primero la existencia de solución y, luego, utilizando las estimaciones "a posteriori" de [2], se obtiene una variante de (6.6).

Para el caso $N = 3$, la Demostración se debe a L. Cattabriga, quien la desarrolla en [8]. En esta referencia, siempre bajo la hipótesis de que Ω es de clase C^μ , suponiendo la existencia de solución en el espacio

$$W^{m+2,r}(\Omega) \times W^{m+1,r}(\Omega)/\mathbb{R},$$

se obtiene una representación integral de la misma; luego, utilizando resultados de [2] y otros debidos a Calderon y Zigmund, se deducen estimaciones "a posteriori" de la solución; por último, utilizando resultados de [38], otros debidos a Schauder y a Schröder y las estimaciones anteriores, se prueba la existencia de solución.

Otra Demostración del resultado anterior en el caso $m = 0$, $g = 0$ e $y_\Gamma = 0$ puede consultarse en [29]. Allí, también bajo la hipótesis de que Ω es de clase C^2 , se estiman las soluciones del problema de ecuaciones integrales asociado al problema de Stokes (cf. el aptdo. anterior), utilizando resultados de [49] -[50]; con estas acotaciones se obtiene el Teorema. En [29], se indica también la posibilidad de generalizarlo para $y_\Gamma \neq 0$ y $m > 0$, haciendo uso de los mismos ó análogos resultados. Señalemos que, en esta referencia, se deduce del Teorema 6.27 el siguiente

Corolario 6.28 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ó 3 , de clase C^2 . Si $f \in L^r(\Omega) \cap C^{0,h}(\Omega)$, $r > 3/2$, entonces la solución débil de (S) con $g = 0$ e $y_\Gamma = 0$ es una solución clásica; más precisamente, se tiene*

$$y \in W^{2,r}(\Omega) \cap C^{0,2-\frac{3}{r}}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,h}(\Omega), \quad \text{grad } p \in L^r(\Omega) \cap C^{0,h}(\Omega),$$

las dos primeras igualdades de (S) son satisfechas puntualmente, en todo $x \in \Omega$ y, por último, la condición de contorno se cumple en todo $x \in \partial\Omega$. ■

Finalmente, digamos que en [29] se prueba un resultado de regularidad L^2 en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ mediante regularización de la solución débil, tomando en la formulación (P) del problema funciones "test" particulares.

En lo que concierne a la Hölder-continuidad de las soluciones de (S), se tiene el siguiente resultado (cf. [51] y, también, [29]):

Teorema 6.29 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ó 3 , de clase $C^{m+2,h}$, con $m \geq 0$. Si $f \in C^{m,h}(\bar{\Omega})$, $y_\Gamma \in C^{m+2,h}(\partial\Omega)$ y se verifica*

$$\int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS = 0,$$

entonces el problema (S) con $g = 0$ tiene solución única

$$(y, p) \in C^{m+2, h}(\bar{\Omega}) \times C^{m+1, h}(\Omega) / \mathbb{R}. \blacksquare$$

Para terminar este aptdo., digamos que probaremos en el aptdo. 6.6 que no hay "estimaciones L^1 ".

6.3 Operadores de Stokes generalizados

Cuando hablemos de la regularidad de la solución del problema de Stokes en un entorno \mathcal{U} de un punto de la frontera de Ω , será necesario llevar el problema a una semibola B_R^+ . Para ello utilizaremos los difeomorfismos que definen la frontera (cf. la Sección 2.3.1) y los resultados sobre composición de funciones en espacios de Sobolev (cf. aptdo. 6.1.4). Estos cambios de sistema de referencia y otros similares que necesitaremos dan lugar a ecuaciones generalizadas de Stokes, cuya introducción es el objetivo de esta Sección.

En lo que sigue, llamaremos operador de Stokes ordinario al operador que a cada par de distribuciones (y, p) definidas en Ω le hace corresponder la distribución $(-\nu\Delta y + \text{grad } p, \text{div } y)$.

6.3.1 Operador de Stokes generalizado con coeficientes variables

Sean, como en el aptdo. 6.1.4, $\tilde{\Omega}$ y Ω dominios en \mathbb{R}_x^N y \mathbb{R}_x^N , respectivamente, y Ψ un difeomorfismo de $\tilde{\Omega}$ en Ω de clase $W^{m+2, \infty}$, donde m es un entero ≥ 0 .

Sean

$$(y, p) \in (W^{\mu+2, r}(\Omega) \cap W_0^{1, r}(\Omega)) \times W^{\mu+1, r}(\Omega),$$

$$f \in L^\mu(\Omega), \quad g \in W^{\mu+1, r}(\Omega),$$

con $0 \leq \mu \leq m$ y $1 \leq r \leq \infty$, funciones que verifican

$$-\nu\Delta y + \text{grad } p = f,$$

$$\text{div } y = g,$$

c.p.d. en Ω . Si consideramos la composición de las funciones anteriores con Ψ , entonces, con la misma notación del aptdo. 6.1.4, se tiene

$$(\tilde{y}, \tilde{p}) \in (W^{\mu+2, r}(\tilde{\Omega}) \cap W_0^{1, r}(\tilde{\Omega})) \times W^{\mu+1, r}(\tilde{\Omega}),$$

$$\tilde{f} \in L^\mu(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{g} \in W^{\mu+1,r}(\tilde{\Omega})$$

y, además,

$$-\nu \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} \tilde{y}_l + \sum_{i=1}^N b_i D_i \tilde{y}_l + \sum_{i=1}^N e_{li} D_i \tilde{p} = \tilde{f}_l, \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$\sum_{i,l=1}^N e_{li} D_i \tilde{y}_l = \tilde{g},$$

c.p.d. en $\tilde{\Omega}$. Aquí los coeficientes vienen dados por las fórmulas

$$a_{ij}(\xi) = \sum_{k=1}^N e_{ki}(\xi) e_{kj}(\xi), \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

$$e_{ij}(\xi) = ((D_i \Psi_j^{-1}) \circ \Psi)(\xi), \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

$$b_i(\xi) = -\nu \sum_{k=1}^N ((D_{kk} \Psi_i^{-1}) \circ \Psi)(\xi), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Veamos a continuación algunas propiedades de los coeficientes anteriores, que utilizaremos más adelante. Para ello, consideremos las matrices $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, $E = (e_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ y $E' = (e'_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, esta última de componentes

$$e'_{ij}(\xi) = (D_i \Psi_j)(\xi),$$

y el vector $\mathbf{b} = (b_i)_{1 \leq i \leq N}$. Consideremos también las funciones $\text{Jac } \Psi(\xi)$ y $\text{Jac } \Psi^{-1}(x)$. Se verifica:

i) $A = E^T E$ y $EE' = Id$.

ii) Las componentes de A , E , E' y la función $\text{Jac } \Psi$ están en $W^{m+1,\infty}(\tilde{\Omega})$, las componentes de \mathbf{b} están en $W^{m,r}(\tilde{\Omega})$ y $\text{Jac } \Psi^{-1}$ está en $W^{m+1,\infty}(\Omega)$. Denotaremos por K el máximo de las normas de todas las funciones anteriores en el espacio al que pertenecen. De lo anterior se deduce que $\text{Jac } \Psi$ y $\text{Jac } \Psi^{-1}$ están acotadas inferiormente por $1/K$ en $\tilde{\Omega}$ y Ω , respectivamente.

iii) La matriz A es simétrica y uniformemente definida positiva; existen dos números $\lambda, \Lambda > 0$ tales que el espectro de la matriz $A(\xi)$ está contenido en $[\lambda, \Lambda]$, cualquiera que sea $\xi \in \tilde{\Omega}$. Esto implica, por un lado, el carácter uniformemente elíptico de la parte principal del sistema de ecuaciones y, por otro, la desigualdad

$$a_{NN}(\xi) \geq \lambda \quad \forall \xi \in \tilde{\Omega},$$

que usaremos en el aptdo. 6.4.2.

Llamaremos operador de Stokes generalizado (con coeficientes variables) en un dominio Ω , a un operador en derivadas parciales, denotado $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_N, L_{N+1})$, que a cada par de funciones

$$(y, p) \in W^{\mu+2, r}(\Omega) \times W^{\mu+1, r}(\Omega)$$

le hace corresponder la función de componentes

$$L_l(y, p) = -\nu \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} y_l + \sum_{i=1}^N b_i D_i y_l + \sum_{i=1}^N e_{li} D_i p \quad , 1 \leq l \leq N,$$

$$L_{N+1}(y, p) = \sum_{i,l=1}^N e_{li} D_i y_l.$$

Aquí, se supone que los coeficientes a_{ij} , b_i y e_{ij} tienen las propiedades i)–iii) precedentes.

6.3.2 Operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes

Si en el operador de Stokes generalizado con coeficientes variables, suponemos que $b_i \equiv 0$ para $1 \leq i \leq N$ y particularizamos los coeficientes $a_{ij}(x)$ y $e_{ij}(x)$ en un punto x_0 , obtenemos un operador en derivadas parciales con coeficientes constantes.

Llamaremos operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes en un dominio Ω , a un operador en derivadas parciales, denotado $\mathcal{L}^0 = (L_1^0, \dots, L_N^0, L_{N+1}^0)$, que a cada par de funciones

$$(y, p) \in W^{\mu+2, r}(\Omega) \times W^{\mu+1, r}(\Omega)$$

le hace corresponder la función de componentes

$$L_l^0(y, p) = -\nu \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^0 D_{ij} y_l + \sum_{i=1}^N e_{li}^0 D_i p \quad , 1 \leq l \leq N,$$

$$L_{N+1}^0(y, p) = \sum_{i,l=1}^N e_{li}^0 D_i y_l.$$

Aquí, denotando A^0 la matriz cuyos elementos son los coeficientes a_{ij}^0 y E^0 la matriz cuyos elementos son los coeficientes e_{ij}^0 , se supone que E^0 es no singular y que $A = (E^0)^T E^0$; en consecuencia, A^0 es una matriz simétrica definida positiva. Denotaremos λ_0 y Λ_0 el menor y el mayor autovalor de A^0 , respectivamente.

Nos interesará realizar un cambio de sistema de referencia que transforme un operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes en un operador ordinario de Stokes; éste es el problema que abordamos a continuación.

Sean

$$(\mathbf{y}, p) \in (W^{\mu+2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)) \times W^{\mu+1,r}(\Omega),$$

$$\mathbf{f} \in L^\mu(\Omega), \quad g \in W^{\mu+1,r}(\Omega),$$

verificando

$$L_l^0(\mathbf{y}, p) = f_l, \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$L_{N+1}^0(\mathbf{y}, p) = g,$$

c.p.d. en $\Omega \subset \mathbb{R}_x^N$.

Consideremos la matriz E asociada al operador \mathcal{L}^0 , la aplicación $\Psi : \mathbb{R}_\xi^N \rightarrow \mathbb{R}_x^N$, definida por $\Psi(\xi) = \xi \cdot E$ y el dominio $\tilde{\Omega} = \Psi^{-1}(\Omega)$; entonces, Ψ es un difeomorfismo de clase C^∞ de $\tilde{\Omega}$ en Ω . Por tanto, con la notación del aptdo. 6.1.4, se tiene

$$(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{p}) \in (W^{\mu+2,r}(\tilde{\Omega}) \cap W_0^{1,r}(\tilde{\Omega})) \times W^{\mu+1,r}(\tilde{\Omega}),$$

$$\tilde{\mathbf{f}} \in L^\mu(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{g} \in W^{\mu+1,r}(\tilde{\Omega})$$

y, además,

$$-\nu \Delta \tilde{\mathbf{y}} + \text{grad } \tilde{p} = \tilde{\mathbf{f}},$$

$$\text{div } \mathbf{y} = g,$$

c.p.d. en $\tilde{\Omega}$.

Cuando se realiza este cambio de sistema de referencia, se verifica, cualquiera que sea la función $\varphi \in W^{m,r}(\Omega)$ con $m \geq 0$ y $1 \leq r \leq \infty$ y cualquiera que sea el multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ con $|\alpha| \leq m$, lo siguiente:

$$(D^\alpha \varphi) \circ \Psi = \sum_{|\beta|=|\alpha|} C(\alpha, \beta, (E')^0) D^\beta \tilde{\varphi},$$

$$(D^\alpha \tilde{\varphi}) \circ \Psi^{-1} = \sum_{|\beta|=|\alpha|} C(\alpha, \beta, E^0) D^\beta \varphi,$$

$$|\varphi|_{|\alpha|,r;\Omega} \leq C(N) |\det E|^{1/r} \lambda_0^{-|\alpha|/2} |\tilde{\varphi}|_{|\alpha|,r;\tilde{\Omega}},$$

$$|\tilde{\varphi}|_{|\alpha|,r;\tilde{\Omega}} \leq C(N) |\det E|^{-1/r} \Lambda_0^{|\alpha|/2} |\varphi|_{|\alpha|,r;\Omega}.$$

Cuando el operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes se obtiene a partir de otro de coeficientes variables como acabamos de indicar, entonces se verifica $\lambda \leq \lambda_0 \leq \Lambda_0 \leq \Lambda$, y se podrán sustituir en las desigualdades anteriores λ_0 y Λ_0 por λ y Λ , respectivamente.

6.4 Regularidad L^2 de la solución del problema de Stokes

En esta Sección vamos a probar que, cuando el dominio Ω es de clase $W^{m+2,\infty}$ y los datos del problema de Stokes verifican $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$, $g \in H^{m+1}(\Omega)$, $y_\Gamma \in \mathbf{H}^{m+\frac{3}{2}}(\Omega)$ y (6.12), existe una única solución (\mathbf{y}, \dot{p}) del problema que, además, pertenece al espacio producto $\mathbf{H}^{m+2}(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega)/\mathbb{R}$.

En primer lugar, se prueba la regularidad de la solución débil en el interior del dominio (aptdo. 6.4.1); luego, probamos que cualquier punto de la frontera posee un entorno en cuyo interior es regular la solución débil (aptdo. 6.4.2); finalmente, (ap. 6.4.3) probamos la regularidad en todo el dominio.

6.4.1 Regularidad en el interior del dominio

En este apartado, partiendo de la existencia de solución débil en un dominio Ω , probamos que, cuando se aumenta la regularidad de los datos, también aumenta la regularidad de la solución en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$. Comenzamos con el siguiente

Teorema 6.30 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N y sea*

$$(\mathbf{y}, \dot{p}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \text{grad } p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{y} &= g \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$, entonces

$$(\mathbf{y}, \dot{p}) \in (\mathbf{H}_{loc}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega)) \times (H_{loc}^1(\Omega)/\mathbb{R} \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$$

Además, cualquiera que sea el dominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ (i.e. $\overline{\Omega'} \subset \Omega$), existe una constante C , que sólo depende de Ω y Ω' , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{2;\Omega'} + \|\dot{p}\|_{H^1(\Omega')/\mathbb{R}} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega}).$$

Demostración: Hacemos la demostración en varias etapas:

i) Fijado $\Omega' \subset\subset \Omega$, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ en Ω y $\varphi \equiv 1$ en Ω' . Consideramos las funciones $\mathbf{z} = \varphi \mathbf{y}$ y $q = \varphi \dot{p}$; tomamos una representante de \dot{p} , denominada p , tal que

$$\int_{\Omega} \varphi p = 0.$$

Se verifica

$$\begin{aligned} (z, q) &\in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega), \\ \text{sop } z, \text{ sop } q &\subset \Omega, \\ -\nu \Delta z + \text{grad } q &= \mathbf{f}^* \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } z &= g^* \quad \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

con $\mathbf{f}^* = \varphi \mathbf{f} - 2\nu D\varphi \cdot Dy + pD\varphi - \nu y \Delta \varphi \in L^2(\Omega)$ y $g^* = \varphi g + D\varphi \cdot y \in H^1(\Omega)$.

ii) La primera de las ecuaciones anteriores es equivalente a

$$\nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i z \cdot D_i v - \int_{\Omega} q \text{div } v = \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot v \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Sea Ω_2 tal que $\Omega' \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ y $\text{sop } z, \text{ sop } q \subset \Omega_2$; sean $d = \text{dist}(\Omega_2, \partial\Omega)$, $\Omega_3 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > d/2\}$ y $\Omega_4 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > d/4\}$. Consideramos todas las funciones prolongadas por cero fuera de su dominio de definición.

Cualquiera que sea $v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_3)$, si $|h| < d/4$, se tiene cuando $1 \leq k \leq N$ que $\delta_k^{-h} v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_4)$ y

$$\nu \int_{\Omega} D_i z \cdot D_i (\delta_k^{-h} v) - \int_{\Omega} q \text{div} (\delta_k^{-h} v) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot (\delta_k^{-h} v).$$

Aplicando las propiedades de los cocientes de diferencias que fueron enunciadas en el aptdo. 6.1.2, se obtiene

$$\nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} D_i (\delta_k^h z) \cdot D_i v - \int_{\Omega} (\delta_k^h q) \text{div } v = \int_{\Omega} (\delta_k^h \mathbf{f}^*) \cdot v \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_3);$$

además, $(\delta_k^h z, \delta_k^h q) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_3) \times L_0^2(\Omega_3)$ y todas las integrales están realmente extendidas a Ω_3 , pues fuera de Ω_3 se anulan los integrandos. Por otro lado, también se tiene que

$$\int_{\Omega_3} \text{div} (\delta_k^h z) \mu = \int_{\Omega_3} (\delta_k^h g^*) \mu \quad \forall \mu \in L_0^2(\Omega_3).$$

iii) Encuadramos el problema en el marco de la formulación mixta (aptdo. 6.1.9). Para ello, consideramos la forma bilineal

$$a : \mathbf{H}_0^1(\Omega_3) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega_3) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_3} D_i \mathbf{w} \cdot D_i \mathbf{v},$$

de la que sabemos que es continua y $H_0^1(\Omega_3)$ -elíptica, y la forma bilineal

$$b : H_0^1(\Omega_3) \times L_0^2(\Omega_3) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$b(\mathbf{v}, \mu) = - \int_{\Omega_3} \mu \operatorname{div} \mathbf{v},$$

de la que sabemos que también es continua y que verifica la condición inf-sup .

Por otro lado, de las propiedades de los cocientes de diferencias, se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\delta_k^h \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{v} \right| &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot (\delta_k^{-h} \mathbf{v}) \right| \\ &\leq \| \mathbf{f}^* \|_{0;\Omega} \| \delta_k^{-h} \mathbf{v} \|_{0;\Omega_4} \leq \| \mathbf{f}^* \|_{0;\Omega} | \mathbf{v} |_{1;\Omega_3}, \end{aligned}$$

por lo que podemos escribir

$$\int_{\Omega_3} (\delta_k^h \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle$$

donde $\mathbf{h} \in H^{-1}(\Omega_3)$ y $\| \mathbf{h} \|_{-1;\Omega_3} \leq \| \mathbf{f}^* \|_{0;\Omega}$. También se tiene:

$$\left| \int_{\Omega} (\delta_k^h g^*) \mu \right| \leq \| Dg^* \|_{0;\Omega} \| \mu \|_{0;\Omega_3},$$

lo que nos permite poner

$$\int_{\Omega} (\delta_k^h g^*) \mu = \langle \chi, \mu \rangle$$

con $\chi \in (L_0^2(\Omega_3))'$ y

$$\| \chi \|_{(L_0^2(\Omega_3))'} \leq \| Dg^* \|_{0;\Omega}.$$

Entonces, tenemos que $(\delta_k^h \mathbf{z}, \delta_k^h q) \in H_0^1(\Omega_3) \times L_0^2(\Omega_3)$ y que se trata de la solución única del problema

$$\begin{aligned} a(\delta_k^h \mathbf{z}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \delta_k^h q) &= \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega_3), \\ b(\delta_k^h \mathbf{z}, \mu) &= \langle \chi, \mu \rangle & \forall \mu \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Sabemos, por los resultados del aptdo. 6.1.9, que esta solución verifica

$$\| \delta_k^h \mathbf{z} \|_{1;\Omega_3} + \| \delta_k^h q \|_{0;\Omega_3} \leq C (\| \mathbf{f}^* \|_{0;\Omega} + \| Dg^* \|_{0;\Omega}),$$

donde la constante C sólo depende de Ω_3 , es decir de Ω_2 y Ω .

iv) Ahora, si llamamos $\delta = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ y elegimos

$$\Omega_2 = \{ x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq \delta/2 \},$$

es también posible elegir φ verificando las condiciones del apartado i) y, además, de forma que

$$\varphi(x) = 0 \text{ fuera de } \Omega_2, \quad |D\varphi| \leq \frac{C}{\delta}, \quad |D^2\varphi| \leq \frac{C}{\delta^2},$$

con C constante. De las expresiones de f^* y g^* , teniendo en cuenta (6.4), se deduce que

$$\|f^*\|_{0;\Omega} + \|Dg^*\|_{0;\Omega} \leq \frac{C}{\delta^2} (\|f\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega});$$

por tanto, cualquiera que sea $\Omega'' \subset\subset \Omega'$, se tiene

$$\|\delta_k^h y\|_{1;\Omega''} + \|\delta_k^h p\|_{0;\Omega''} \leq C(\Omega, \Omega') (\|f\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega}).$$

Aplicando los resultados del aptdo. 6.1.2, se obtiene

$$(y, p) \in H^2(\Omega') \times H^1(\Omega')$$

y

$$\|y\|_{2;\Omega'} + \|p\|_{1;\Omega'} \leq C(\Omega, \Omega') (\|f\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega}).$$

v) Se ha probado el Teorema para el par (y, p) , con una elección especial de p realizada en el apartado i) y se ha obtenido una estimación para este representante de \dot{p} . Cualquier otro representante de \dot{p} es de la forma $p + c$, $c \in \mathbf{R}$, y, obviamente, también pertenece a $H^1(\Omega')$. Por último, de la desigualdad

$$\|\dot{p}\|_{H^1(\Omega')} = \inf_{c \in \mathbf{R}} \|p + c\|_{1;\Omega'} \leq \|p\|_{1;\Omega'}, \quad \forall p \in \dot{p},$$

se obtiene la acotación deseada. ■

Observación: La dependencia de la constante C de Ω y Ω' y la necesidad de que h esté acotado superiormente por $\text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, impide obtener estimaciones de $\delta_k^h y$ y $\delta_k^h p$ uniformes respecto de h en cualquier $\Omega'' \subset \Omega$. Por ello, sólo se ha podido obtener, por este procedimiento, regularidad local. ■

Supongamos ahora que tenemos

$$f \in H^1(\Omega), \quad g \in H^2(\Omega),$$

de lo que, por el Teorema precedente, se deduce que

$$(y, p) \in H_{loc}^2(\Omega) \times H_{loc}^1(\Omega).$$

Procediendo como en la Demostración anterior y con la notación allí utilizada, se tiene que

$$(z, q) \in H_0^2(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$$

y verifica las mismas ecuaciones; además, ahora, $\mathbf{f}^* \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y $g^* \in H^2(\Omega)$.

Por otro lado, la formulación variacional del apartado ii) se sigue verificando si sustituimos en ella la función \mathbf{v} por $D_k \mathbf{v}$, $1 \leq k \leq N$, con $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Haciendo una integración por partes y aplicando un argumento de continuidad, se obtiene:

$$\nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (D_i(D_k \mathbf{z})) \cdot D_i \mathbf{v} - \int_{\Omega} (D_k q) \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\Omega} (D_k \mathbf{f}^*) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

Repetiendo el resto de la Demostración con \mathbf{z} , q y \mathbf{f} sustituidos por $D_k \mathbf{z}$, $D_k q$ y $D_k \mathbf{f}^*$, llegamos a que

$$(D_k \mathbf{y}, D_k p) \in \mathbf{H}_{loc}^2(\Omega) \times H_{loc}^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

y que, para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe una constante C que sólo depende de Ω y Ω' , tal que

$$\|D_k \mathbf{y}\|_{2;\Omega'} + \|D_k p\|_{H^1(\Omega')/\mathbb{R}} \leq C(\Omega, \Omega') (\|\mathbf{f}\|_{1;\Omega} + \|g\|_{2;\Omega}).$$

Mediante un procedimiento de inducción "standard" y teniendo en cuenta lo que precede, se deduce fácilmente el siguiente

Teorema 6.31 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N y sea*

$$(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \operatorname{grad} p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{y} &= g \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ y $g \in H^{m+1}(\Omega)$ con $m \geq 0$, entonces

$$(\mathbf{y}, p) \in (\mathbf{H}_{loc}^{m+2}(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega)) \times (H_{loc}^{m+1}(\Omega)/\mathbb{R} \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R})$$

y, cualquiera que sea el dominio $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe una constante C , que sólo depende de Ω , Ω' y m , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{m+2;\Omega'} + \|p\|_{H^{m+1}(\Omega')/\mathbb{R}} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{m;\Omega} + \|g\|_{m+1;\Omega}). \quad \blacksquare$$

Observaciones: 1) Las estimaciones obtenidas son interiores; por ello, se verifican independientemente de la regularidad de Ω y del comportamiento de la solución sobre $\partial\Omega$.

2) Se observa en la Demostración que, si f y g verifican las hipótesis de regularidad sólo en un subdominio $\omega \subset \Omega$, se tiene el mismo resultado con Ω sustituido por ω y Ω' sustituido por cualquier $\omega' \subset \subset \omega$. ■

Para finalizar este apartado, observemos que del Teorema anterior y de las Inyecciones de Sobolev habituales, se deduce el siguiente

Corolario 6.32 *En las condiciones del Teorema 6.31, si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $g \in C^\infty(\Omega)$, entonces*

$$(y, p) \in (C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)) \times (C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)/\mathbb{R}). \blacksquare$$

6.4.2 Regularidad en un entorno de la frontera

En el resultado que sigue, probamos que la regularidad de la solución débil del problema de Stokes en el interior de un entorno de un punto de la frontera, aumenta con la regularidad de f , g y Ω :

Teorema 6.33 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{2,\infty}$ y sea*

$$(y, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta y + \text{grad } p &= f \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } y &= g \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$, entonces para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno \mathcal{U} de x_0 de forma que

$$(y, p) \in H_{loc}^2(\mathcal{U} \cap \Omega) \times H_{loc}^1(\mathcal{U} \cap \Omega)/\mathbb{R}$$

Además, cualquiera que sea el abierto $\mathcal{U}^ \subset \subset \mathcal{U}$, existe una constante C , que sólo depende de Ω , \mathcal{U} y \mathcal{U}^* , tal que*

$$\|y\|_{2;\mathcal{U}^* \cap \Omega} + \|p\|_{H^1(\mathcal{U} \cap \Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|f\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega}).$$

Demostración: Nótese que la existencia de solución (y, p) , que ha sido admitida aquí, implica la igualdad

$$\int_{\Omega} g = 0.$$

Fijado x_0 , consideramos el entorno \mathcal{U} de x_0 dado por la Definición de dominios de clase $W^{2,\infty}$ (cf. Sección 2.3.1); esta Definición también asocia al punto x_0 una bola

$B_R = B(0; R)$ en \mathbb{R}_ξ^N y un difeomorfismo Ψ de B_R en \mathcal{U} de clase $W^{2,\infty}$. Dividimos la demostración en varias etapas:

i) Fijado $\mathcal{U}^* \subset\subset \mathcal{U}$, sea $R' < R$ tal que $\Psi^{-1}(\mathcal{U}^*) \subset B_{R'}$ y sea $\mathcal{U}' = \Psi(B_{R'})$. Consideramos, como en el Teorema 6.30 una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, $0 \leq \varphi \leq 1$ en \mathcal{U} y $\varphi \equiv 1$ en \mathcal{U}' . Sean las funciones $\mathbf{z} = \varphi \mathbf{y}$ y $q = \varphi p$; tomamos como representante de \dot{p} una función p tal que $\int_{\Omega} \varphi p \, dx = 0$.

Se verifica lo siguiente:

$$(\mathbf{z}, q) \in \mathbf{H}_0^1(\mathcal{U} \cap \Omega) \times L_0^2(\mathcal{U} \cap \Omega),$$

$$\text{sop } \mathbf{z}, \text{ sop } q \subset \mathcal{U} \cap \overline{\Omega},$$

$$-\nu \Delta \mathbf{z} + \text{grad } q = \mathbf{f}^* \quad \text{en } \mathcal{U} \cap \Omega,$$

$$\text{div } \mathbf{z} = g^* \quad \text{en } \mathcal{U} \cap \Omega.$$

Aquí, \mathbf{f}^* y g^* son como en el Teorema 6.30.

ii) Las ecuaciones anteriores son equivalentes a

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{U} \cap \Omega} D_i \mathbf{z} \cdot D_i \mathbf{v} - \int_{\mathcal{U} \cap \Omega} q \text{div } \mathbf{v} &= \int_{\mathcal{U} \cap \Omega} \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\mathcal{U} \cap \Omega) \\ \text{div } \mathbf{z} &= g^* \quad \text{c.p.d. en } \mathcal{U} \cap \Omega. \end{aligned}$$

Si en las ecuaciones anteriores hacemos el cambio de variables $x = \Psi(\xi)$, se obtiene con la notación de los aptdos. 6.1.4 y 6.3.1, que

$$(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{q}) \in \mathbf{H}_0^1(B_R^+) \times L^2(B_R^+), \quad \int_{B_R^+} \tilde{q} \text{Jac } \Psi \, dx = 0,$$

$$\text{sop } \tilde{\mathbf{z}}, \text{ sop } \tilde{q} \subset B_R \cap \overline{\mathbb{R}_+^N},$$

$$\begin{aligned} \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{z}} \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} \text{Jac } \Psi \, d\xi \\ - \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \tilde{q} e_{ij} D_j \tilde{v}_i \text{Jac } \Psi \, d\xi &= \int_{B_R^+} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \text{Jac } \Psi \, d\xi \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_0^1(B_R^+), \\ \sum_{i,j=1}^N e_{ij} D_j \tilde{\mathbf{z}}_i &= \tilde{g}^* \quad \text{c.p.d. en } B_R^+. \end{aligned}$$

iii) Sea R_2 tal que $R' < R_2 < R$ y $\text{sop } \tilde{\mathbf{z}}, \text{ sop } \tilde{q} \subset B_{R_2} \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$; sean $d = R - R_2$, $R_3 = (R + R_2)/2$ y $R_4 = (R + R_3)/2$. Consideramos todas las funciones prolongadas por cero fuera de su dominio de definición.

Cualquiera que sea $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_0^1(B_{R_3}^+)$, si $|h| < d/4$, se tiene, cuando $1 \leq k \leq N-1$, que $\delta_k^{-h}\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}_0^1(B_{R_4}^+)$ y

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} a_{ij} D_i \tilde{\mathbf{z}} \cdot D_j (\delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}}) \text{Jac } \Psi \, d\xi \\ & - \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \tilde{q} e_{ij} D_j (\delta_k^{-h} \tilde{v}_i) \text{Jac } \Psi \, d\xi = \int_{B_R^+} \tilde{\mathbf{f}}^* \cdot (\delta_k^{-h} \tilde{\mathbf{v}}) \text{Jac } \Psi \, d\xi. \end{aligned}$$

Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurría en la Demostración del Teorema anterior, ahora se excluye el caso $k = N$; esto se debe a que no se da la inclusión estricta de dominios en la dirección N .

Aplicando las propiedades de los cocientes de diferencias vistas en el aptdo. 6.1.2 a cada una de las integrales anteriores, éstas se transforman de la manera siguiente:

La primera es

$$-\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \delta_k^h (a_{ij} \text{Jac } \Psi D_i \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} \, d\xi$$

y es igual a

$$-\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} a_{ij} D_i (\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} \text{Jac } \Psi \, d\xi - T_1(\tilde{\mathbf{v}}),$$

siendo

$$T_1(\tilde{\mathbf{v}}) = \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \delta_k^h (a_{ij} \text{Jac } \Psi) \tau_k^h (D_i \tilde{\mathbf{z}}) \cdot D_j \tilde{\mathbf{v}} \, d\xi.$$

Análogamente, la segunda se puede escribir como

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \delta_k^h (\tilde{q} \text{Jac } \Psi) e_{ij} D_j \tilde{v}_i \, d\xi + T_2(\tilde{\mathbf{v}}),$$

siendo

$$T_2(\tilde{\mathbf{v}}) = \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \tau_k^h (\tilde{q} \text{Jac } \Psi) \delta_k^h e_{ij} D_j \tilde{v}_i \, d\xi.$$

La última se escribe en la forma

$$T_3(\tilde{\mathbf{v}}) = - \int_{B_R^+} \delta_k^h (\tilde{\mathbf{f}}^* \text{Jac } \Psi) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \, d\xi.$$

Se tiene de todo lo anterior que

$$(\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}, \delta_k^h (\tilde{q} \text{Jac } \Psi)) \in \mathbf{H}_0^1(B_{R_3}^+) \times L_0^2(B_{R_3}^+)$$

y verifica

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} a_{ij} D_i(\delta_k^h \tilde{z}) \cdot D_j \tilde{v} \text{Jac } \Psi \, d\xi - \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R^+} \delta_k^h(\tilde{q} \text{Jac } \Psi) e_{ij} D_j \tilde{v}_i \, d\xi \\ & = -T_1(\tilde{v}) + T_2(\tilde{v}) + T_3(\tilde{v}), \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(B_{R_3}^+) \end{aligned}$$

(todas las integrales, incluso aquéllas que definen a los operadores T_i , están realmente extendidas a $B_{R_3}^+$, pues fuera de ahí los integrandos son nulos).

Por otro lado, también se tiene para todo $\tilde{\mu} \in L_0^2(B_{R_3}^+)$ que

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j(\delta_k^h \tilde{z}_i) \, d\xi & = - \sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} (\delta_k^h(e_{ij} D_j \tilde{z}_i) - \delta_k^h e_{ij} \tau_k^h(D_j \tilde{z}_i)) \, d\xi \\ & = - \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} \delta_k^h \tilde{g}^* \, d\xi + \sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} \delta_k^h e_{ij} \tau_k^h(D_j \tilde{z}_i) \, d\xi \\ & \equiv T_4(\tilde{\mu}). \end{aligned}$$

iv) De las propiedades de los coeficientes a_{ij} (cf. aptdo. 6.3.1), las expresiones que relacionan a \tilde{z} con z (cf. aptdo. 6.1.4) y la estimación (6.4), se obtiene:

$$\begin{aligned} |T_1(\tilde{v})| & \leq \sum_{i,j=1}^N \|\delta_k^h(a_{ij} \text{Jac } \Psi)\|_{0,\infty;B_{R_3}^+} \|\tau_k^h(D_i \tilde{z})\|_{0;B_{R_3}^+} \|D_j \tilde{v}\|_{0;B_{R_3}^+} \\ & \leq C(N, K) |z|_{1;U\cap\Omega} |\tilde{v}|_{1;B_{R_3}^+} \\ & \leq C(N, K) (\|f^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{0;U\cap\Omega}) |\tilde{v}|_{1;B_{R_3}^+}; \end{aligned}$$

análogamente,

$$|T_2(\tilde{v})| \leq C(N, K) (\|f^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{0;U\cap\Omega}) |\tilde{v}|_{1;B_{R_3}^+}$$

y

$$|T_3(\tilde{v})| \leq \|f^*\|_{0;U\cap\Omega} |\tilde{v}|_{1;B_{R_3}^+}.$$

Por tanto, se puede escribir que

$$-T_1(\tilde{v}) + T_2(\tilde{v}) + T_3(\tilde{v}) = \langle T, \tilde{v} \rangle \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(B_{R_3}^+)$$

donde $T \in H^{-1}(B_{R_3}^+)$ y

$$\|T\|_{H^{-1}(B_{R_3}^+)} \leq C(N, K) (\|f^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{0;U\cap\Omega}).$$

Por otro lado, también se tiene que

$$|T_4(\tilde{\mu})| \leq C(N, K) (\|f^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{1;U\cap\Omega}) \|\tilde{\mu}\|_{0;B_{R_3}^+},$$

por lo que se puede poner

$$T_4(\tilde{\mu}) = \langle \chi, \tilde{\mu} \rangle \quad \forall \tilde{\mu} \in L_0^2(B_{R_3}^+)$$

con $\chi \in (L_0^2(B_{R_3}^+))'$ y

$$\|\chi\|_{(L_0^2(B_{R_3}^+))'} \leq C(N, K)(\|f^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{1;U\cap\Omega}).$$

v) Con el fin de llevar el problema a un cuadro de formulación mixta, consideramos las formas bilineales

$$a : H_0^1(B_{R_3}^+) \times H_0^1(B_{R_3}^+) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$a(\tilde{w}, \tilde{v}) = \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} a_{ij} D_i \tilde{w} \cdot D_j \tilde{v} \text{Jac } \Psi \, d\xi,$$

y

$$b : H_0^1(B_{R_3}^+) \times L_0^2(B_{R_3}^+) \rightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$b(\tilde{w}, \tilde{\mu}) = - \sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j \tilde{w}_i \, d\xi.$$

Admitamos por el momento el siguiente Lema, que será demostrado más adelante:

Lema 6.34 *Se verifica lo siguiente:*

- i) *La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua y elíptica en $H_0^1(B_{R_3}^+)$.*
- ii) *La forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ es continua y verifica la condición inf-sup . ■*

Entonces,

$$(\delta_k^h \tilde{z}, \delta_k^h(\tilde{q} \text{Jac } \Psi)) \in H_0^1(B_{R_3}^+) \times L_0^2(B_{R_3}^+)$$

es la solución única del problema

$$\begin{aligned} a(\delta_k^h \tilde{z}, \tilde{v}) + b(\tilde{v}, \delta_k^h(\tilde{q} \text{Jac } \Psi)) &= \langle T, \tilde{v} \rangle & \forall \tilde{v} \in H_0^1(B_{R_3}^+), \\ b(\delta_k^h \tilde{z}, \tilde{\mu}) &= \langle \chi, \tilde{\mu} \rangle & \forall \tilde{\mu} \in L_0^2(B_{R_3}^+). \end{aligned}$$

Sabemos por el aptdo. 6.1.9 que esta solución verifica

$$\|\delta_k^h \tilde{z}\|_{1;B_{R_3}^+} + \|\delta_k^h(\tilde{q} \text{Jac } \Psi)\|_{0;B_{R_3}^+} \leq C(N, K, R, R_2)(\|f^*\|_{0;U\cap\Omega} + \|g^*\|_{1;U\cap\Omega}).$$

vi) Ahora, llamando $\delta = \text{dist}(U', \partial U)$, es posible elegir φ de forma que, además de reunir las condiciones del apartado i), se anule fuera de un dominio

$$U_2 = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) \geq \delta/2\}$$

y verifique

$$|D\varphi| \leq \frac{C}{\delta}, \quad |D^2\varphi| \leq \frac{C}{\delta^2},$$

con C constante. Procediendo como en el apartado iv) de la Demostración del Teorema 6.30, se llega a que cualquiera que sea $r < R'$, se tiene

$$\|\delta_k^h \tilde{\mathbf{z}}\|_{1;B_r^+} + \|\delta_k^h(\tilde{q} \text{Jac } \Psi)\|_{0;B_r^+} \leq C(N, K, \mathcal{U}, \mathcal{U}')(\|\mathbf{f}\|_{0;\mathcal{U} \cap \Omega} + \|g\|_{1;\mathcal{U} \cap \Omega}).$$

Aplicando los resultados del aptdo. 6.1.2, se obtiene

$$(D_k \tilde{\mathbf{z}}, D_k(\tilde{q} \text{Jac } \Psi)) \in H^1(B_{R'}^+) \times L^2(B_{R'}^+)$$

y

$$\|D_k \tilde{\mathbf{z}}\|_{1;B_{R'}^+} + \|D_k(\tilde{q} \text{Jac } \Psi)\|_{0;B_{R'}^+} \leq C(N, K, \mathcal{U}, \mathcal{U}')(\|\mathbf{f}\|_{0;\mathcal{U} \cap \Omega} + \|g\|_{1;\mathcal{U} \cap \Omega}).$$

Sin más que tener en cuenta que $\text{Jac } \Psi$ está acotado inferiormente por $1/K$, se deduce de lo anterior que, cualquiera que sea $R' < R$, se verifica

$$\begin{aligned} D_{ij} \tilde{\mathbf{z}} &\in L^2(B_{R'}^+) & \forall (i, j) \neq (N, N), \\ D_i \tilde{q} &\in L^2(B_{R'}^+) & \forall i \neq N; \end{aligned}$$

además, también se tiene la última estimación con $\tilde{q} \text{Jac } \Psi$ sustituido por \tilde{q} .

vii) Del apartado ii), se tiene que $(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{q})$ es solución, en el sentido de las distribuciones en $B_{R'}^+$, de las ecuaciones

$$(6.7) \quad -\nu \sum_{i,j=1}^N D_j (a_{ij} \text{Jac } \Psi D_i \tilde{z}_l) + \sum_{j=1}^N D_j (e_{lj} \text{Jac } \Psi \tilde{q}) = \tilde{f}_l^* \text{Jac } \Psi, \quad 1 \leq l \leq N$$

y solución c.p.d. en $B_{R'}^+$ de la ecuación

$$\sum_{i,j=1}^N e_{ij} D_j \tilde{z}_i = \tilde{g}^*.$$

Diferenciando la última ecuación respecto de ξ_N , se obtiene

$$(6.8) \quad \sum_{i=1}^N e_{iN} D_{NN} \tilde{z}_i = D_N \tilde{g}^* - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N e_{ij} D_{jN} \tilde{z}_i - \sum_{i,j=1}^N D_N e_{ij} D_j \tilde{z}_i$$

que pertenece a $L^2(B_{R'}^+)$, con norma acotada por

$$(6.9) \quad C(N, K, \mathcal{U}, \mathcal{U}')(\|\mathbf{f}\|_{0;\Omega} + \|g\|_{1;\Omega}).$$

Por otro lado, de (6.7), se tiene, cuando $1 \leq l \leq N$, que

$$(6.10) \quad -\nu a_{NN} \text{Jac } \Psi D_{NN} \tilde{z}_l + e_{lN} \text{Jac } \Psi D_N \tilde{q}$$

también pertenece a $L^2(B_{R'}^+)$ y tiene norma acotada por (6.9).

Multiplicando las ecuaciones anteriores por e_{lN} y sumando en l , se obtiene que

$$-\nu a_{NN} \text{Jac } \Psi \sum_{l=1}^N e_{lN} D_{NN} \tilde{z}_l + a_{NN} \text{Jac } \Psi D_N \tilde{q}$$

está en $L^2(B_{R'}^+)$. De (6.8), teniendo en cuenta que a_{NN} y $\text{Jac } \Psi$ están acotados inferiormente, se obtiene que

$$D_N \tilde{q} \in L^2(B_{R'}^+)$$

y tiene norma acotada por (6.9). Además, de (6.10), se deduce que

$$D_{NN} \tilde{z} \in L^2(B_{R'}^+),$$

y su norma está también acotada por (6.9).

viii) Tenemos, por tanto, probado que

$$(\tilde{z}, \tilde{q}) \in (\mathbf{H}^2(B_{R'}^+) \cap \mathbf{H}_0^1(B_{R'}^+)) \times H^1(B_{R'}^+).$$

Basta ahora deshacer el cambio de variables y proceder como en el apartado v) de la Demostración del Teorema 6.30 para llegar al resultado deseado. ■

Demostración del Lema: i) Es claro que $a(\cdot, \cdot)$ es continua. La elipticidad se deduce de la acotación inferior de $\text{Jac } \Psi$ y de que $sp A(\xi) \subset [\lambda, \Lambda]$ para cada $\xi \in B_R$.

ii) La continuidad de $b(\cdot, \cdot)$ también es evidente. Para llegar a la condición inf-sup, hemos de probar que existe $\tilde{\beta} > 0$ tal que, para todo $\tilde{\mu} \in L_0^2(B_{R_3}^+)$, se verifica:

$$(6.11) \quad \sup_{\tilde{v} \in \mathbf{H}_0^1(B_{R_3}^+) \setminus \{0\}} \left(\sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j \tilde{v}_i d\xi \right) / |\tilde{v}|_{1; B_{R_3}^+} \geq \tilde{\beta} \|\tilde{\mu}\|_{0; B_{R_3}^+}.$$

Para ello, llamemos \mathcal{U}_3^+ a la imagen de $B_{R_3}^+$ mediante el difeomorfismo Ψ ; haciendo uso de las propiedades vistas en los aptdos. 6.1.4 y 6.3.1, se tiene que

$$|\tilde{v}|_{1; B_{R_3}^+} \leq C(N, K) |v|_{1; \mathcal{U}_3^+},$$

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{B_{R_3}^+} \tilde{\mu} e_{ij} D_j \tilde{v}_i d\xi = \int_{\mathcal{U}_3^+} \mu \text{div } v \text{Jac } \Psi^{-1} dx,$$

$$\mu \text{Jac } \Psi^{-1} \in L_0^2(\mathcal{U}_3^+)$$

y

$$\|\mu \text{Jac } \Psi^{-1}\|_{0; \mathcal{U}_3^+} \geq \|\tilde{\mu}\|_{0; B_{R_3}^+}.$$

De aquí y del Corolario 6.13, se deduce (6.11) con $\tilde{\beta} = C(N, K)b_0$. ■

Como en el apartado anterior, también se tiene

Teorema 6.35 Sean m un entero ≥ 0 , Ω un dominio acotado de \mathbf{R}^N de clase $W^{m+2, \infty}$ y supongamos que

$$(y, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbf{R}$$

es solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta y + \text{grad } p &= f \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } y &= g \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Si $f \in H^m(\Omega)$ y $g \in H^{m+1}(\Omega)$, entonces para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno \mathcal{U} de x_0 de forma que

$$(y, p) \in H_{loc}^{m+2}(\mathcal{U} \cap \Omega) \times H_{loc}^{m+1}(\mathcal{U} \cap \Omega)/\mathbf{R}$$

y, para cualquier $\mathcal{U}^* \subset\subset \mathcal{U}$, existe una constante C , que sólo depende de Ω , m , \mathcal{U} y \mathcal{U}^* , tal que

$$\|y\|_{m+2; \mathcal{U}^* \cap \Omega} + \|p\|_{H^{m+1}(\mathcal{U} \cap \Omega)/\mathbf{R}} \leq C(\|f\|_{m; \Omega} + \|g\|_{m+1; \Omega}). \quad \blacksquare$$

Observación: Si sólo es regular un trozo Γ_0 de frontera la Γ , se obtiene el mismo resultado para los puntos de Γ_0 . ■

6.4.3 Regularidad L^2 en el dominio (hasta la frontera)

Concluimos esta Sección con los siguientes resultados sobre regularidad en todo el dominio:

Teorema 6.36 Sean m un entero ≥ -1 , Ω un dominio acotado de \mathbf{R}^N de clase $W^{m+2, \infty}$, $f \in H^m(\Omega)$, $g \in H^{m+1}(\Omega)$ e $y_\Gamma \in H^{m+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$, verificando

$$(6.12) \quad \int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot n \, dS.$$

Existe un único par

$$(y, p) \in H^{m+2}(\Omega) \times H^{m+1}(\Omega)/\mathbf{R}$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \text{grad } p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{y} &= g \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_\Gamma \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Además existe una constante C que sólo depende de Ω y m , tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{m+2;\Omega} + \|\dot{p}\|_{H^{m+1}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{m;\Omega} + \|g\|_{m+1;\Omega} + \|\mathbf{y}_\Gamma\|_{m+\frac{3}{2};\Omega}).$$

Demostración: Cuando $m = -1$ este resultado se reduce al Teorema 6.26. Por tanto, supondremos que $m \geq 0$.

i) Supongamos en primer lugar que $\mathbf{y}_\Gamma \equiv 0$. Dado que $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$, existe un único par

$$(\mathbf{y}, \dot{p}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R},$$

solución del problema.

Para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$, consideramos el entorno dado por el Teorema 6.35, con lo que tendremos un recubrimiento de $\partial\Omega$. Sea $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_M\}$ un recubrimiento finito extraído del anterior y sea $\mathcal{U}_{M+1} \subset\subset \Omega$ de forma que $\bar{\Omega} \subset \cup_{j=1}^{M+1} \mathcal{U}_j$.

Por los Teoremas 6.31 y 6.35, se tiene que

$$(\mathbf{y}, \dot{p}) \in \mathbf{H}^{m+2}(\mathcal{U}_j^* \cap \Omega) \times H^{m+1}(\mathcal{U}_j^* \cap \Omega)/\mathbb{R}$$

para todo $\mathcal{U}_j^* \subset\subset \mathcal{U}_j$, $1 \leq j \leq M+1$; además, existe una constante C que sólo depende de Ω y m (obsérvese que \mathcal{U}_j , \mathcal{U}_j^* y K dependen en definitiva del dominio Ω), tal que

$$\|\mathbf{y}\|_{m+2;\mathcal{U}_j^* \cap \Omega} + \|\dot{p}\|_{H^{m+1}(\mathcal{U}_j^* \cap \Omega)/\mathbb{R}} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{m;\Omega} + \|g\|_{m+1;\Omega}).$$

Considerando una partición de la unidad en $\bar{\Omega}$ asociada a este recubrimiento, se obtiene fácilmente la Demostración del Teorema en este caso.

ii) Si $\mathbf{y}_\Gamma \neq 0$, introducimos $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^{m+2}(\Omega)$ tal que $\mathbf{z} = \mathbf{y}_\Gamma$ sobre $\partial\Omega$. Aplicándole a $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ el apartado anterior, se obtiene la demostración del Teorema. ■

Del Teorema anterior y de los resultados de Inyección de Sobolev, se deduce el siguiente

Corolario 6.37 Con la notación del Teorema anterior, si Ω es de clase C^∞ , $\mathbf{f} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $g \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\mathbf{y}_\Gamma \in C^\infty(\partial\Omega)$ y se verifica (6.12), la única solución (\mathbf{y}, p) del problema de Stokes pertenece a $C^\infty(\bar{\Omega}) \times C^\infty(\bar{\Omega})$. ■

6.5 Fórmulas de representación asociadas al sistema de Stokes

Obtenemos en esta Sección unas fórmulas de representación de funciones por medio de integrales (cf. [29]). Para ello, en primer lugar (aptdo. 6.5.1), construimos las soluciones fundamentales singulares del sistema de Stokes y recordamos algunas de sus propiedades; luego (aptdo. 6.5.2), utilizando las soluciones fundamentales y la integración por partes, deducimos las fórmulas de representación.

6.5.1 Soluciones fundamentales singulares del sistema de Stokes

Consideramos \mathbb{R}^N , $N = 2$ ó 3 , espacio Euclídeo N -dimensional y, para cada k , $1 \leq k \leq N$, denotamos por $e^k = (\delta_{1k}, \dots, \delta_{Nk})$ el k -ésimo vector de su base canónica.

Fijado k , la k -ésima solución fundamental del sistema de Stokes es, por definición, el par

$$(z^k, q^k) = (z_1^k, \dots, z_N^k, q^k) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

solución de

$$\begin{aligned} -\nu \Delta z^k + \text{grad } q^k &= \delta e^k, & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \text{div } z^k &= 0, & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

donde δ es la distribución delta de Dirac en el origen. Se tiene

Lema 6.38 *Para cada k , $1 \leq k \leq N$, las soluciones fundamentales singulares del sistema de Stokes vienen dadas por las expresiones siguientes:*

i) Si $N = 2$,

$$\begin{aligned} z_j^k(x) &= \frac{1}{8\pi\nu} \left(-4\delta_{jk} \ln|x| + D_{jk}(|x|^2(\ln|x| - 1)) \right), \quad j = 1 \text{ ó } 2, \\ q^k(x) &= \frac{1}{2\pi} D_k \ln|x|. \end{aligned}$$

ii) Si $N = 3$,

$$\begin{aligned} z_j^k(x) &= \frac{1}{8\pi\nu} \left(2\delta_{jk}|x|^{-1} - D_{jk}|x| \right), \quad j = 1, 2 \text{ ó } 3, \\ q^k(x) &= -\frac{1}{4\pi} D_k |x|^{-1}. \end{aligned}$$

Demostración: Es inmediata. Basta tener en cuenta que, cuando $N = 2$, se verifica

$$\Delta(|x|^2(\ln|x| - 1)) = 4 \ln|x|, \quad \Delta \ln|x| = 2\pi\delta,$$

y que cuando $N = 3$,

$$\Delta|x| = 2|x|^{-1}, \quad \Delta|x|^{-1} = -4\pi\delta. \blacksquare$$

Las soluciones fundamentales singulares tienen las siguientes propiedades:

i) Calculando las derivadas en sus expresiones, resulta que

$$z_j^k(x) = -\frac{1}{8\pi\nu} \left(\delta_{jk}(2\ln|x| + 1) - 2x_j x_k |x|^{-2} \right), \quad j = 1 \text{ ó } 2,$$

$$q^k(x) = \frac{1}{2\pi} x_k |x|^{-2},$$

si $N = 2$ y

$$z_j^k(x) = \frac{1}{8\pi\nu} \left(\delta_{jk}|x|^{-1} + x_j x_k |x|^{-3} \right), \quad j = 1, 2 \text{ ó } 3,$$

$$q^k(x) = \frac{1}{4\pi} x_k |x|^{-3},$$

si $N = 3$.

ii) Las soluciones fundamentales son funciones localmente integrables en \mathbb{R}^N . También son funciones analíticas en cualquier región de \mathbb{R}^N que no contenga al origen.

iii) Para todo punto $x \neq 0$ y para todo multiíndice α , $|\alpha| \geq 1$, se verifica

$$(6.13) \quad \begin{aligned} |D^\alpha z^k(x)| &\leq C(N, |\alpha|) |x|^{2-N-|\alpha|}, \\ |D^\alpha q^k(x)| &\leq C(N, |\alpha|) |x|^{1-N-|\alpha|}. \end{aligned}$$

iv) En todo punto $x \neq 0$ se verifica

$$(6.14) \quad \begin{aligned} -\nu \Delta z^k(x) + \text{grad } q^k(x) &= 0 \\ \text{div } z^k(x) &= 0. \end{aligned}$$

v) Sea $x \in \mathbb{R}^N$ y consideremos las funciones $\xi \rightarrow z^k(x - \xi)$ y $\xi \rightarrow q^k(x - \xi)$. Para todo $\xi \neq x$, se verifica

$$(6.15) \quad \begin{aligned} -\nu \Delta_\xi z^k(x - \xi) - \text{grad}_\xi q^k(x - \xi) &= 0 \\ \text{div}_\xi z^k(x - \xi) &= 0, \end{aligned}$$

donde los subíndices ξ indican que las derivadas se hacen respecto de esta variable.

6.5.2 Fórmulas de representación

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{1,\infty}$ y sean r y r' números reales tales que $1 \leq r, r' \leq \infty$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Se tienen las siguientes fórmulas de Green asociadas al sistema de Stokes:

Dados $(y, p) \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)$ y $(z, q) \in W^{2,r'}(\Omega) \times W^{1,r'}(\Omega)$, se verifica

$$\begin{aligned}
 (6.16) \quad & \int_{\Omega} (-\nu \Delta y + \text{grad } p) \cdot z - \int_{\Omega} (-\nu \Delta z - \text{grad } q) \cdot y \\
 &= - \int_{\Omega} p \text{div } z - \int_{\Omega} q \text{div } y \\
 &\quad - \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} (-p \delta_{ij} + \nu D_j y_i) z_i n_j dS \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} (q \delta_{ij} + \nu D_j z_i) y_i n_j dS,
 \end{aligned}$$

donde n_j es la componente j -ésima del vector \mathbf{n} y además

$$\begin{aligned}
 (6.17) \quad & \int_{\Omega} (-\nu \Delta y + \text{grad } p) q - \int_{\Omega} (-\nu \Delta z - \text{grad } q) p \\
 &= -\nu \int_{\Omega} q \Delta y + \nu \int_{\Omega} p \Delta z + \int_{\partial\Omega} p q \mathbf{n} dS.
 \end{aligned}$$

Ahora, para (y, p) como antes, denotamos

$$\begin{aligned}
 (6.18) \quad & \mathbf{f}(\xi) = -\nu \Delta y(\xi) + \text{grad } p(\xi), \\
 & g(\xi) = \text{div } y(\xi), \\
 & \tau_{ij} = -p(\xi) \delta_{ij} + \nu D_j y_i(\xi), \\
 & \mathbf{T}(y) = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}.
 \end{aligned}$$

Se tiene el siguiente

Teorema 6.39 *Con la notación anterior,*

$$\begin{aligned}
 y_k(x) &= \int_{\Omega} z^k(x - \xi) \cdot \mathbf{f}(\xi) d\xi \\
 &\quad + \int_{\Omega} q^k(x - \xi) g(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}(\xi) \cdot \mathbf{n}) \cdot z^k(x - \xi) dS \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} (q^k(x - \xi) \delta_{ij} + \nu D_j z_i^k(x - \xi)) y_i(\xi) n_j dS, \quad 1 \leq k \leq N, \\
 p(x) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} q^i(x - \xi) f_i(\xi) d\xi + \nu g(x) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} \tau_{ij}(\xi) q^i(x - \xi) n_j dS - \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} D_j q^i(x - \xi) y_i(\xi) n_j dS,
 \end{aligned}$$

c.p.d. en Ω . Aquí, todas las derivadas se calculan respecto de la variable ξ .

Demostración: Fijemos un punto x en Ω y un número real $\rho > 0$ tal que $B_\rho = B(x; \rho)$ esté contenido en Ω . Admitiremos que el punto x es un punto de Lebesgue para las funciones $y_k, p, \tau_{ij}, D_l y_k, D p, D_l \tau_{ij}, \xi_m D_l y_k, \xi_m D_m p, \xi_m D_l \tau_{ij}$ y $\xi_n \xi_m D_l \tau_{ij}$ (cf. por ejemplo [22]); es bien conocido que casi todo punto de Ω satisface esta propiedad). Sea $\Omega_\rho = \Omega \setminus B_\rho$; para cada k con $1 \leq k \leq N$, las funciones $\xi \rightarrow z^k(x - \xi)$ y $\xi \rightarrow q^k(x - \xi)$ son analíticas en Ω_ρ :

i) Probamos primero la fórmula de representación correspondiente a y_k . Escribiendo la fórmula de Green (6.16) en el dominio Ω_ρ con el par (y, p) y las funciones anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\rho} f(\xi) \cdot z^k(x - \xi) d\xi - \int_{\Omega_\rho} (-\nu \Delta z^k(x - \xi) - \text{grad } q^k(x - \xi)) \cdot y(\xi) d\xi \\ = - \int_{\Omega_\rho} p(\xi) \text{div } v^k(x - \xi) d\xi - \int_{\Omega_\rho} q^k(x - \xi) g(\xi) d\xi \\ - \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega_\rho} \tau_{ij}(\xi) z_i^k(x - \xi) n_j dS \\ + \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega_\rho} (q^k(x - \xi) \delta_{ij} + \nu D_j z_i^k(x - \xi)) y_i(\xi) n_j dS. \end{aligned}$$

Escribamos la identidad anterior en la forma

$$I_1(\rho) + I_2(\rho) = I_3(\rho) + I_4(\rho) + I_5(\rho) + I_6(\rho),$$

y veamos que cada una de sus integrales es convergente cuando $\rho \rightarrow 0$; entonces, por paso al límite, se obtiene la fórmula de representación de y_k .

En primer lugar, observemos que, en virtud de (6.15), tanto $I_2(\rho)$ como $I_3(\rho)$ se anulan para todo valor de ρ ; por tanto, existen, y son nulos, sus límites cuando $\rho \rightarrow 0$. En segundo lugar, si consideramos la función f prolongada por cero fuera de Ω , entonces está bien definida la convolución (cf. aptdo. 6.1.1)

$$\begin{aligned} (f * z^k)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) z^k(x - \xi) d\xi \\ &= \int_{\Omega} f(\xi) z^k(x - \xi) d\xi; \end{aligned}$$

en virtud del Teorema de Lebesgue, esta última integral es el límite de $I_1(\rho)$ cuando $\rho \rightarrow 0$. Análogamente, se prueba que existe

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_4(\rho) = - \int_{\Omega} q^k(x - \xi) g(\xi) d\xi.$$

La integral $I_5(\rho)$ la descomponemos en suma de dos integrales: una extendida a $\partial\Omega$, que da lugar a

$$-\sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} \tau_{ij}(\xi) z_i^k(x-\xi) n_j dS$$

y otra, extendida a ∂B_ρ :

$$I_7(\rho) = -\sum_{i,j=1}^N \int_{\partial B_\rho} \tau_{ij}(\xi) z_i^k(x-\xi) n_j dS$$

(obsérvese que en esta última integral el vector \mathbf{n} es interior a B_ρ , lo que habrá de ser tenido en cuenta cuando se realicen integraciones por partes); si se sustituye \mathbf{z}^k por su valor en la expresión de $I_7(\rho)$, teniendo en cuenta que $|x-\xi| = \rho$ sobre ∂B_ρ y realizando una integración por partes, se obtiene, por ejemplo para $N = 2$, que

$$\begin{aligned} I_7(\rho) = & \frac{1}{4\nu \text{med}(B_\rho)} \rho^2 \left(\ln \rho + \frac{1}{2} \right) \int_{B_\rho} f_k(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{4\nu \text{med}(B_\rho)} \sum_{i,j=1}^N \int_{B_\rho} \left((x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k) D_j \tau_{ij}(\xi) - \delta_{ij}(x_k - \xi_k) \tau_{ij}(\xi) \right. \\ & \left. - \delta_{ik}(x_j - \xi_j) \tau_{ij}(\xi) \right) d\xi, \end{aligned}$$

que, en virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue (cf. [22]), converge a 0 cuando $\rho \rightarrow 0$; análogamente, se obtiene el mismo resultado cuando $N = 3$.

Por último, descomponemos $I_6(\rho)$ en suma de dos integrales: una sobre $\partial\Omega$, que da lugar a

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} (q^k(x-\xi) \delta_{ij} + \nu D_j z_i^k(x-\xi)) y_i(\xi) n_j dS$$

y otra, extendida a ∂B_ρ :

$$I_8(\rho) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial B_\rho} (q^k(x-\xi) \delta_{ij} + \nu D_j z_i^k(x-\xi)) y_i(\xi) n_j dS;$$

teniendo en cuenta que sobre ∂B_ρ se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} q^k(x-\xi) &= \frac{1}{2^{N-1}\pi} \rho^{-N} (x_k - \xi_k), \\ D_j z_i^k(x-\xi) &= -\frac{1}{2^N \pi \nu} \rho^{-N} \left(\delta_{ij}(x_k - \xi_k) + \delta_{jk}(x_i - \xi_i) - \delta_{ik}(x_j - \xi_j) \right. \\ & \left. - N \rho^{-2} (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k) \right) \end{aligned}$$

y

$$n_j = \rho^{-1}(x_j - \xi_j),$$

tras sustituir q^k por su valor en la expresión de $I_8(\rho)$ se llega, después de realizar una integración por partes, a que ésta coincide con

$$\frac{1}{2N \operatorname{med}(B_\rho)} \int_{B_\rho} \left(2y_k(\xi) - \sum_{j=1}^N (x_j - \xi_j) D_j y_k(\xi) - N(x_k - \xi_k) \operatorname{div} y_k(\xi) \right) d\xi.$$

En virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue, deducimos que $I_8(\rho)$ converge a $y_k(x)$ cuando $\rho \rightarrow 0$. Con esto queda terminado este apartado de la Demostración.

ii) Ahora, probamos la fórmula de representación correspondiente a p . Para ello, escribimos la i -ésima componente de (6.17) en Ω_ρ con $(z(\xi), q(\xi)) \equiv (v^i(x-\xi), q^i(x-\xi))$; después de sumar en i , se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\rho} f_i(\xi) q^i(x-\xi) d\xi - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\rho} (-\nu \Delta v_i^i(x-\xi) - D_i q^i(x-\xi)) p(\xi) d\xi \\ &= -\nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\rho} \Delta y_i(\xi) q^i(x-\xi) d\xi + \nu \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_\rho} \Delta v_i^i(x-\xi) p(\xi) d\xi \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_\rho} p(\xi) q^i(x-\xi) n_i dS. \end{aligned}$$

Análogamente a como hicimos en el apartado anterior, escribamos esta expresión en la forma

$$I_1(\rho) + I_2(\rho) = I_3(\rho) + I_4(\rho) + I_5(\rho),$$

y comprobemos que cada una de sus integrales es convergente cuando $\rho \rightarrow 0$; de nuevo, por paso al límite, se obtiene la representación de p .

En primer lugar, observamos que, en virtud de (6.15), $I_2(\rho)$ se anula para todo valor de ρ ; por otro lado, obsérvese que

$$\sum_{i=1}^N \Delta z_i^i(x-\xi) = 0 \quad \forall \xi \neq x,$$

de donde se deduce que $I_4(\rho)$ también se anula para todo ρ . También como en el apartado i), se prueba que $I_1(\rho)$ converge a

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i(\xi) q^i(x-\xi) d\xi$$

cuando $\rho \rightarrow 0$. Teniendo en cuenta que, para $\xi \neq x$, se tiene que $\Delta q^i(x-\xi) = 0$, se obtiene, después de integrar dos veces por partes, la descomposición

$$\begin{aligned} I_3(\rho) &= -\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega_\rho} D_j y_i(\xi) q^i(x-\xi) n_j dS + \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega_\rho} y_i(\xi) D_j q^i(x-\xi) n_j dS \\ &= I_6(\rho) + I_7(\rho). \end{aligned}$$

La integral $I_6(\rho)$ se descompone en dos. La primera de ellas no depende de ρ :

$$-\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} D_j y_i(\xi) q^i(x - \xi) n_j dS;$$

la segunda se puede escribir en la forma

$$-\frac{\nu}{N \text{med}(B_\rho)} \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial B_\rho} (x_j - \xi_j) D_j y_i(\xi) n_i dS$$

y, mediante integración por partes, se transforma en

$$\frac{\nu}{N \text{med}(B_\rho)} \int_{B_\rho} (-g(\xi) + \sum_{i,j=1}^N (x_j - \xi_j) D_{ij} y_i(\xi)) d\xi.$$

Esta última integral, de nuevo en virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue, converge a

$$-\frac{\nu}{N} g(x)$$

cuando $\rho \rightarrow 0$. La integral $I_7(\rho)$ también se descompone en dos; la primera, que no depende de ρ , se escribe

$$\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} y_i(\xi) D_j q^i(x - \xi) n_j dS$$

y la segunda, teniendo en cuenta la igualdad

$$\sum_{j=1}^N D_j q^i(x - \xi) n_j = \frac{N-1}{N \text{med}(B_\rho)} n_i \quad \text{sobre } \partial B_\rho,$$

puede ser escrita, después de una integración por partes, como sigue:

$$-\frac{\nu(N-1)}{N \text{med}(B_\rho)} \int_{B_\rho} g(\xi) d\xi;$$

ésta converge a

$$-\frac{\nu(N-1)}{N} g(x),$$

cuando $\rho \rightarrow 0$. Por último, $I_5(\rho)$ se descompone, asimismo, en una integral que no depende de ρ ,

$$\sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} p(\xi) q^i(x - \xi) n_i dS,$$

y la siguiente:

$$\frac{1}{2^{N-1} \pi \rho^N} \sum_{i=1}^N \int_{\partial B_\rho} (x_i - \xi_i) p(\xi) n_i dS.$$

Una nueva integración por partes, lleva a que esta integral coincide con

$$\frac{1}{N \text{med}(B_\rho)} \int_{B_\rho} \left(N p(\xi) - \sum_{i=1}^N (x_i - \xi_i) D_i p(\xi) \right) d\xi,$$

que converge a $p(x)$ cuando $\rho \rightarrow 0$. Esto termina la Demostración del Teorema. ■

6.6 Potenciales hidrodinámicos

En esta Sección introducimos los potenciales asociados al sistema de Stokes (potenciales hidrodinámicos) y damos resultados de existencia y regularidad de los mismos. En toda la Sección, Ω será un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{1,\infty}$.

6.6.1 Definiciones

A la vista de las fórmulas de representación obtenidas en la Sección 6.5, definimos los potenciales de volumen, de capa simple y de capa doble asociados al sistema de Stokes. Consideremos para ello las soluciones fundamentales (z^k, q^k) , $1 \leq k \leq N$, del sistema de Stokes.

Definición 6.40 Sea $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función medible en Ω . Se define el potencial hidrodinámico de volumen de densidad f , cuando existe, como la función

$$\mathcal{H}f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

de componentes $(Z, Q) = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N, Q)$, definidas por

$$Z_k(x) = \int_{\Omega} z^k(x - \xi) \cdot f(\xi) d\xi, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$Q(x) = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} q^k(x - \xi) f_k(\xi) d\xi. \quad \blacksquare$$

Definición 6.41 Sea $T: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ una función medible sobre $\partial\Omega$, de componentes τ_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$; denotemos por t_i , $1 \leq i \leq N$, el vector de componentes

$(\tau_{ij})_{1 \leq j \leq N}$. Se define el potencial hidrodinámico de capa simple de densidad \mathbf{T} , cuando existe, como la función

$$\mathcal{K}\mathbf{T} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

de componentes $(\mathbf{V}, \Pi) = (V_1, V_2, \dots, V_N, \Pi)$, definidas por

$$V_k(x) = \int_{\partial\Omega} z^k(x - \xi) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})(\xi) d\xi, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$\Pi(x) = \sum_{k=1}^N \int_{\partial\Omega} q^k(x - \xi) (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(\xi) dS. \blacksquare$$

Definición 6.42 Sea $y : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función medible sobre $\partial\Omega$. Se define el potencial hidrodinámico de capa doble de densidad y , cuando existe, como la función

$$\mathcal{N}y : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

de componentes $(\mathbf{W}, R) = (W_1, W_2, \dots, W_N, R)$, definidas por

$$W_k(x) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} (q^k(x - \xi)\delta_{kj} + \nu D_j z_i^k(x - \xi)) y_i(\xi) n_j dS, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$R(x) = -\nu \sum_{k,j=1}^N \int_{\partial\Omega} D_j q^k(x - \xi) y_k(\xi) n_j dS. \blacksquare$$

También introducimos, por facilidad de notación, el operador dado por la siguiente

Definición 6.43 Sea $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible en Ω . Se define la función $\mathcal{J}g$, cuando existe, como sigue:

$$\mathcal{J}g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

posee componentes $(\mathbf{G}, \Upsilon) = (G_1, G_2, \dots, G_N, \Upsilon)$, dadas por

$$G_k(x) = \int_{\Omega} q^k(x - \xi) g(\xi) d\xi, \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$\Upsilon(x) = \nu g(x). \blacksquare$$

Nota: Como veremos más adelante, los potenciales no son más que sumas de convoluciones de las soluciones fundamentales con las funciones de densidad. Por tanto, sus definiciones pueden ser generalizadas, de manera inmediata, para densidades que sean distribuciones. Nosotros, aquí, tendremos suficiente con las Definiciones precedentes.

Observaciones: i) De las Definiciones anteriores y las fórmulas de representación, se deduce que todo par

$$(y, p) \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega), \quad 1 \leq r \leq \infty,$$

puede escribirse, con la notación (6.18), en la forma

$$(y, p) = \mathcal{H}f + \mathcal{K}T + \mathcal{N}y + \mathcal{J}g$$

c.p.d. en Ω , siempre que todos los sumandos estén bien definidos. Haciendo uso de esta fórmula, obtendremos estimaciones de (y, p) a partir de las propiedades de existencia y regularidad de los potenciales que probaremos a continuación.

ii) No existen estimaciones L^1 . Para probarlo, consideremos la sucesión regularizante habitual (ρ_n) (cf., por ejemplo, [7], pág. 70); para cada $n \geq 1$,

$$\rho_n \in \mathcal{D}(B(0, \frac{1}{n})), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1.$$

Es bien conocido que

$$\rho_n \rightarrow \delta \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

donde δ es la distribución de Dirac. Por tanto, para cada $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$,

$$\phi * \rho_n \rightarrow \phi * \delta = \phi \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

Supongamos que $N = 2$ y, para cada $n \geq 1$, consideremos el problema

$$\begin{cases} -\nu \Delta y_n + \text{grad } p_n = f_n & \text{en } B(0, 1), \\ \text{div } y_n = 0 & \text{en } B(0, 1), \\ y_n = 0 & \text{sobre } \partial B(0, 1), \end{cases}$$

con $f_n = (\rho_n, 0)$; este problema posee una única solución $(y_n, p_n) \in C_c^\infty(B(0, \frac{1}{n}); \mathbb{R}^3)$. Entonces, por la fórmula de representación escrita en la Observación i), se tiene que

$$(y_n, p_n) = \mathcal{H}f_n$$

c.p.d. en $B(0, 1)$; de la Definición del potencial \mathcal{H} , se deduce también la igualdad

$$(y_n, p_n) = (z_1^1 * \rho_n, z_1^2 * \rho_n, q^1 * \rho_n),$$

que converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})^3$ a (z_1^1, z_1^2, q^1) .

Si supusiéramos la existencia de una constante C sólo dependiente de $B(0, 1)$ tal que

$$\|y_n\|_{2,1;B(0,1)} + \|p_n\|_{1,1;B(0,1)} \leq C \|f_n\|_{0,1;B(0,1)},$$

entonces, como $\|f_n\|_{0,1;B(0,1)} = 1$ para cada n , se tendría que, por ejemplo, (p_n) está uniformemente acotada en $W^{1,1}(B(0,1))$. En virtud de los Teoremas de Inyección de Sobolev, (p_n) también estaría acotada en $L^2(B(0,1))$, por lo que poseería una subsección débilmente convergente en este espacio. Pero, según hemos visto antes,

$$p_n \rightarrow q^1 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$$

y q^1 no pertenece a $L^2(B(0,1))$. Hemos llegado a una contradicción. ■

6.6.2 Operador \mathcal{J} : Existencia y estimaciones

En este apartado, probamos resultados de existencia y regularidad del operador \mathcal{J} .

Lema 6.44 *El operador \mathcal{J} está bien definido de $L^r(\Omega)$ en $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N+1})$ para $1 \leq r \leq \infty$. Además, existe una constante C que sólo depende de N , Ω y r , tal que, para todo $g \in L^r(\Omega)$, se verifica la desigualdad*

$$(6.19) \quad \|\mathcal{J}g\|_{0,r;\Omega} \leq C\|g\|_{0,r;\Omega}.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{J} : L^r(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$$

es un operador lineal continuo.

Demostración: Sea $g \in L^r(\Omega)$; prolongamos g por cero fuera de Ω . Entonces, las N primeras componentes de $\mathcal{J}g$ se pueden escribir como convoluciones de funciones localmente integrables con funciones integrables de soporte compacto:

$$G_k(x) = (q^k * g)(x), \quad 1 \leq k \leq N.$$

Estas convoluciones están bien definidas y son funciones localmente integrables en \mathbb{R}^N . Además, en virtud de la desigualdad de Young, se tiene que $G_k \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|G_k\|_{0,r;\Omega} \leq C\|g\|_{0,r;\Omega},$$

donde C es una constante que sólo depende de N y Ω . De esto, junto con la igualdad $\Upsilon = \nu g$, se obtiene el Lema. ■

De las propiedades de la derivación de convoluciones, teniendo en cuenta que

$$\Delta q^k = D_k \delta, \quad 1 \leq k \leq N,$$

se deduce que

$$(6.20) \quad \Delta G_k = D_k g, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Además, cuando $g \in \mathcal{D}(\Omega)$, se tiene $(\mathbf{G}, \Upsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N+1})$. Probamos a continuación el siguiente

Teorema 6.45 *Si $g \in L^r(\Omega)$, $1 < r < \infty$, entonces $\mathcal{J}g = (\mathbf{G}, \Upsilon)$ verifica*

$$(\mathbf{G}, \Upsilon) \in W^{1,r}(\Omega) \times L^r(\Omega).$$

Además, existe una constante C que sólo depende de N , Ω y r , tal que

$$\|\mathbf{G}\|_{1,r;\Omega} + \|\Upsilon\|_{0,r;\Omega} \leq C \|g\|_{0,r;\Omega}.$$

Demostración: Sólo es necesario probar el Teorema en lo que afecta a las N primeras componentes de $\mathcal{J}g$. Fijemos k , con $1 \leq k \leq N$. Hacemos la Demostración en varias etapas.

i) Supongamos en primer lugar que $g \in \mathcal{D}(\Omega)$. En este caso $G_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y, por tanto, la ecuación (6.20) se verifica puntualmente. Sea $R > 0$ suficientemente grande, de forma que $\Omega \subset\subset B_R$, donde $B_R = B(0; R)$, y $\text{dist}(\partial B_R, \Omega) > R/2$. Se verifican las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \|DG_k\|_{0;B_R}^2 &= - \int_{B_R} G_k \Delta G_k + \int_{\partial B_R} \frac{\partial G_k}{\partial \mathbf{n}} G_k dS \\ &= - \int_{B_R} G_k D_k g + \int_{\partial B_R} \frac{\partial G_k}{\partial \mathbf{n}} G_k dS \\ &= \int_{\Omega} g D_k G_k + \int_{\partial B_R} \frac{\partial G_k}{\partial \mathbf{n}} G_k dS. \end{aligned}$$

Supongamos por un instante que

$$(6.21) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \frac{\partial G_k}{\partial \mathbf{n}} G_k dS = 0;$$

entonces, tomando en la última igualdad límites cuando $R \rightarrow \infty$, se deduce que

$$(6.22) \quad DG_k \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

y

$$\|DG_k\|_{0;\mathbb{R}^N}^2 = \int_{\Omega} g D_k G_k dx;$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al segundo miembro de la desigualdad anterior, se llega a

$$\|DG_k\|_{0;R^N} \leq \|g\|_{0;\Omega},$$

de donde

$$(6.23) \quad \|DG_k\|_{0;\Omega} \leq \|g\|_{0;\Omega}.$$

Para probar (6.21), téngase en cuenta que, cuando $x \in \partial B_R$ y $\xi \in \Omega$, se tiene que $|x - \xi| > R/2$, por lo que

$$D^\alpha G_k(x) = \int_{\Omega} D^\alpha q^k(x - \xi) g(\xi) d\xi;$$

haciendo uso de las estimaciones (6.13), se obtiene

$$|D^\alpha G_k(x)| \leq C(N, |\alpha|) R^{1-N-|\alpha|} \|g\|_{0,1;\Omega}.$$

De aquí, se obtiene

$$\left| \int_{\partial B_R} \frac{\partial G_k}{\partial \mathbf{n}} G_k dS \right| \leq C(N) R^{1-2N} \|g\|_{0,1;\Omega} \text{med}(\partial B_R),$$

que tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$.

ii) A continuación, supongamos que $g \in L^2(\Omega)$. Sea (g_n) una sucesión de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente a g en $L^2(\Omega)$ y, para cada $n \geq 1$, denotemos $G_{n,k}$ la k -ésima componente de $\mathcal{J}g_n$; por la continuidad del operador \mathcal{J} , se tiene que $G_{n,k}$ converge a G_k en $L^2(\Omega)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Además, haciendo uso de lo probado en i), se tiene

$$\|DG_{n,k}\|_{0;R^N} \leq \|g_n\|_{0;\Omega} \leq 2\|g\|_{0;\Omega}$$

para todo n superior ó igual a un cierto n_0 . Por tanto, la sucesión $(DG_{n,k})$ está uniformemente acotada en $L^2(\Omega)$, por lo que posee una subsucesión, de nuevo denotada $(DG_{n,k})$, que converge débilmente en $L^2(\Omega)$ hacia G'_k . Es fácil comprobar que $G'_k = DG_k$, con lo que se tiene $DG_k \in L^2(\Omega)$; por otro lado,

$$\|DG_k\|_{0;\Omega} \leq \liminf \|DG_{n,k}\|_{0;\Omega} \leq \liminf \|g_n\|_{0;\Omega} = \|g\|_{0;\Omega}$$

obteniéndose así (6.23).

iii) Sea ahora $g \in L^r(\Omega)$ donde $1 < r < 2$. Fijado i , consideramos el operador lineal $T : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, definido para cada $g \in L^2(\Omega)$ por $Tg = D_i G_k$; por el apartado anterior, T está bien definido y verifica

$$(6.24) \quad \|Tg\|_{0,;\Omega} \leq \|g\|_{0,;\Omega}.$$

Supongamos por el momento que existen dos constantes T_1 y T_2 tales que

$$(6.25) \quad \mu_{Tg}(t) \leq \frac{T_1 \|g\|_{0,1;\Omega}}{t},$$

$$(6.26) \quad \mu_{Tg}(t) \leq \frac{T_2^2 \|g\|_{0;\Omega}^2}{t^2},$$

para cada $g \in L^2(\Omega)$ y para cada $t > 0$. Entonces, en virtud del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz (cf. el Teorema 6.9), el operador T se extiende como una aplicación lineal acotada de $L^r(\Omega)$ en sí mismo para cada $r \in (1, 2)$ y se verifica además que

$$\|Tg\|_{0r;\Omega} \leq 4 \left(\frac{r}{(r-1)(2-r)} \right)^{\frac{1}{r}} T_1^{\frac{2-r}{r}} T_2^{\frac{2r-2}{r}} \|g\|_{0r;\Omega}$$

para todo $g \in L^r(\Omega)$. Es fácil comprobar que la extensión de T sigue estando definida por $Tg = D_i G_k$ para $g \in L^r(\Omega)$. Tendremos así probado el Teorema en este caso.

1) Demostración de (6.26). Se obtiene de manera inmediata de (6.24) y el Lema 6.9, con $T_2 = 1$.

2) Demostración de (6.25). Sean $t > 0$ y K_0 un cubo que contiene a Ω tal que, si se prolonga g por cero fuera de Ω , entonces

$$\int_{K_0} |g(x)| \leq t \operatorname{med}(K_0).$$

Se descompone el cubo K_0 en 2^N subcubos congruentes con interiores disjuntos; aquellos subcubos K que satisfacen la desigualdad

$$\int_K |g(x)| \leq t \operatorname{med}(K),$$

se vuelven a subdividir de forma similar, repitiendo el proceso indefinidamente.

Sea $\mathcal{S} = \{K_l | l \geq 1\}$ la familia constituída por los subcubos así obtenidos que satisfacen

$$\int_{K_l} |g(x)| > t \operatorname{med}(K_l).$$

Para cada $K_l \in \mathcal{S}$, se denota por \widetilde{K}_l el subcubo cuya subdivisión da lugar a K_l ; ya que $\operatorname{med}(\widetilde{K}_l)/\operatorname{med}(K_l) = 2^N$, se tienen las desigualdades

$$(6.27) \quad t < \frac{1}{\operatorname{med}(K_l)} \int_{K_l} |g(x)| \leq \frac{1}{\operatorname{med}(K_l)} \int_{\widetilde{K}_l} |g(x)| \leq t \frac{\operatorname{med}(\widetilde{K}_l)}{\operatorname{med}(K_l)} = 2^N t.$$

Por otro lado, poniendo $F = \cup_{l \geq 1} K_l$ y $G = K_0 \setminus F$, es claro que, para cada punto $x \in G$, existe una sucesión de cubos anidados (K_λ^x) tales que $x \in K_\lambda^x$ y $\operatorname{med}(K_\lambda^x)/\operatorname{med}(K_{\lambda+1}^x) =$

2^N para cada λ ; además, si x es un punto de Lebesgue para g , en virtud del Teorema de Diferenciación de Lebesgue, tenemos:

$$(6.28) \quad |g(x)| = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{med}(K_\lambda^x)} \int_{K_\lambda^x} |g(y)| \leq t.$$

Escribamos a continuación $g = h + b$, donde

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in G, \\ \frac{1}{\text{med}(K_l)} \int_{K_l} g(y) dy & \text{si } x \in K_l, l \geq 1. \end{cases}$$

Dado que $Tg = Th + Tb$, se deduce que

$$\mu_{Tg}(t) \leq \mu_{Th}(t/2) + \mu_{Tb}(t/2).$$

Acotemos por separado cada uno de los sumandos del segundo miembro de la desigualdad anterior.

a) Estimación de $\mu_{Th}(t/2)$: Por un lado, de (6.28) se obtiene que

$$\int_G |h(x)|^2 = \int_G |g(x)|^2 \leq t \int_G |g(x)|;$$

por otro, usando (6.27), obtenemos

$$\int_{K_l} |h(x)|^2 \leq \left(\frac{1}{\text{med}(K_l)} \int_{K_l} g(y) dy \right) \int_{K_l} |g(y)| dy \leq 2^N t \int_{K_l} |g(y)| dy$$

para todo $l \geq 1$; se deduce de ello que $h \in L^2(\Omega)$ y, además,

$$\|h(x)\|_{0,\Omega}^2 \leq 2^N t \int_\Omega |g(x)|.$$

Por el apartado ii), también tenemos que $Th \in L^2(\Omega)$ y

$$\|Th\|_{0,\Omega} \leq \|h\|_{0,\Omega}$$

y, aplicando el Lema 6.9, se obtiene que

$$\mu_{Th}(t/2) \leq \frac{2^{N+2}}{t} \|g\|_{0,1;\Omega}.$$

b) Estimación de $\mu_{Tb}(t/2)$: En primer lugar, obsérvese que de la definición de b se deduce que

$$(6.29) \quad b(x) = 0 \text{ en } G, \quad \int_{K_l} b(x) dx = 0 \quad \forall l \geq 1.$$

Para cada l , $l \geq 1$, sea $b_l = b \chi_l$, donde χ_l es la función característica de K_l ; se tiene que $Tb = \sum_{l \geq 1} T b_l$.

Fijado l , se considera una sucesión $(b_{l\lambda})$ de funciones de $\mathcal{D}(K_l)$ convergente a b_l en $L^2(\Omega)$ y verificando las igualdades

$$\int_{K_l} b_{l\lambda}(x) = \int_{K_l} b_l(x) = 0.$$

Ya que $q^k(x-\xi)$ es analítica cuando $x \neq \xi$, se deduce de las propiedades de la convolución que, para cada $x \in K_0 \setminus K_l$,

$$T b_{l\lambda}(x) = \int_{K_l} D_i q^k(x-\xi) b_{l\lambda}(\xi) d\xi.$$

Sea $\bar{\xi}$ el centro del cubo K_l , δ su diámetro y, para cada $\xi \in K_l$, sea $\hat{\xi}$ un punto del segmento que une ξ con $\bar{\xi}$. Haciendo uso de (6.29), del Teorema del Valor Medio y de las estimaciones (6.13), obtenemos:

$$\begin{aligned} |T b_{l\lambda}(x)| &\leq \int_{K_l} |D D_i q^k(x-\hat{\xi})| |\xi - \bar{\xi}| |b_{l\lambda}(\xi)| d\xi \\ (6.20) \quad &\leq C(N) \int_{K_l} |x - \hat{\xi}|^{-N-1} |\xi - \bar{\xi}| |b_{l\lambda}(\xi)| d\xi \\ &\leq C(N) \delta (\text{dist}(x, K_l))^{-N-1} \|b_{l\lambda}\|_{0,1;K_l}. \end{aligned}$$

Sea ahora $B_l = B(\bar{\xi}, \delta)$; entonces

$$\begin{aligned} \int_{K_0 \setminus B_l} |T b_{l\lambda}(x)| dx &\leq C(N) \delta \|b_{l\lambda}\|_{0,1;K_l} \left(\int_{K_0 \setminus B_l} (\text{dist}(x, K_l))^{-N-1} \right) \\ &\leq C(N, \Omega) \|b_{l\lambda}\|_{0,1;K_l}. \end{aligned}$$

Ahora, si se pone $F^* = \cup_{l \geq 1} B_l$, $G^* = K_0 \setminus F^*$, se calcula la suma en l en la expresión anterior y se pasa al límite cuando $\lambda \rightarrow \infty$, se llega fácilmente a que $Tb \in L^1(G^*)$ y a las desigualdades

$$\begin{aligned} \int_{G^*} |Tb(x)| &\leq C(N, \Omega) \sum_{l \geq 1} \|b_l\|_{0,1;K_l} \\ &\leq C(N, \Omega) \sum_{l \geq 1} (\|h\|_{0,1;K_l} + \|g\|_{0,1;K_l}) \\ &\leq C(N, \Omega) \|g\|_{0,1;\Omega}. \end{aligned}$$

Por el Lema 6.9,

$$\text{med}\left(\{x \in G^* \mid |Tb(x)| > t/2\}\right) \leq \frac{C(N, \Omega) \|Tb\|_{0,1;G^*}}{t} \leq \frac{C(N, \Omega) \|g\|_{0,1;\Omega}}{t}.$$

Por otro lado,

$$\text{med}(F^*) \leq \sum_{l \geq 1} \text{med}(B_l) \leq C(N) \sum_{l \geq 1} \text{med}(K_l);$$

de esta desigualdad y de (6.27), se obtiene

$$\text{med}(F^*) \leq \frac{C(N)}{t} \sum_{l \geq 1} \int_{K_l} |g(x)| dx \leq \frac{C(N) \|g\|_{0,1;\Omega}}{t}.$$

Se tiene así probado que

$$\mu_{Tb}(t/2) \leq \frac{C(N, \Omega) \|g\|_{0,1;\Omega}}{t},$$

cualquiera que sea $t > 0$ y con ello el Teorema cuando $1 < r \leq 2$.

iv) Finalmente, supongamos que $g \in L^r(\Omega)$, donde $2 < r < \infty$. Si (g_n) es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ que converge a g en $L^r(\Omega)$ y $h \in \mathcal{D}(\Omega)$, llamando G_{nk} (resp. H_k) a la k -ésima componente de \mathcal{J}_n (resp. $\mathcal{J}h$), tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_i G_{nk}(x) h(x) &= - \int_{\Omega} G_{nk}(x) D_i h(x) \\ &= - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} q^k(x - \xi) g_n(\xi) d\xi \right) D_i h(x) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} q^k(x - \xi) D_i h(x) dx \right) g_n(\xi) d\xi \\ &= - \int_{\Omega} (q^k * D_i h)(\xi) g_n(\xi) d\xi \\ &= - \int_{\Omega} D_i (q^k * h)(\xi) g_n(\xi) d\xi \\ &= - \int_{\Omega} D_i H_k(\xi) g_n(\xi) d\xi \\ &\leq \|D_i H_k\|_{0,r';\Omega} \|g_n\|_{0,r;\Omega} \\ &\leq C(N, \Omega, r') \|h\|_{0,r';\Omega} \|g_n\|_{0,r;\Omega} \end{aligned}$$

Obsérvese que para la última desigualdad, se ha hecho uso del apartado iii). Se deduce de lo anterior que

$$\|D_i G_{nk}\|_{0,r;\Omega} \leq C(N, \Omega, r') \|g_n\|_{0,r;\Omega}.$$

Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$, se llega a que las $D_i G_k \in L^r(\Omega)$ y verifican desigualdades análogas a la precedente:

$$\|D_i G_k\|_{0,r;\Omega} \leq C(N, \Omega, r') \|g\|_{0,r;\Omega}.$$

Con esto, queda demostrado el Teorema. ■

Supongamos ahora que $g \in W^{m,r}(\Omega)$ para algún $m \geq 0$ y algún $r \in (1, \infty)$. Entonces, cualquiera que sea el multiíndice α tal que $|\alpha| \leq m$, se tiene, por un lado, que $D^\alpha g \in L^r(\Omega)$ y, por otro, que

$$D^\alpha G_k = \int_{\Omega} q^k(x - \xi) D^\alpha g(\xi) d\xi, \quad 1 \leq k \leq N;$$

aplicando el Teorema anterior, con g sustituido por $D^\alpha g$, se deduce el siguiente

Corolario 6.46 Si $g \in W^{m,r}(\Omega)$, $m \geq 0$, $1 < r < \infty$, entonces $\mathcal{J}g = (\mathbf{G}, \Upsilon)$ verifica

$$(\mathbf{G}, \Upsilon) \in W^{m+1,r}(\Omega) \times W^{m,r}(\Omega).$$

Además, existe una constante C que sólo depende de N , Ω , m y r , tal que

$$\|\mathbf{G}\|_{m+1,r;\Omega} + \|\Upsilon\|_{m,r;\Omega} \leq C\|g\|_{m,r;\Omega}. \quad \blacksquare$$

6.6.3 Potencial de volumen: Existencia y estimaciones

Probamos ahora resultados de existencia y regularidad del potencial de volumen.

Lema 6.47 El operador \mathcal{H} está bien definido de $L^r(\Omega)$ en $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N+1})$ para $1 \leq r \leq \infty$. Además existe una constante C que sólo depende de N y Ω tal que, para todo $f \in L^r(\Omega)$, se verifica la desigualdad

$$(6.31) \quad \|\mathcal{H}f\|_{0,r;\Omega} \leq C\|f\|_{0,r;\Omega}.$$

En consecuencia,

$$\mathcal{H} : L^r(\Omega) \rightarrow L^r(\Omega; \mathbb{R}^{N+1})$$

es un operador lineal continuo.

Demostración: Sea $f \in L^r(\Omega)$; prolongamos f por cero fuera de Ω . Entonces, las componentes de $\mathcal{H}f$ se pueden escribir como suma de convoluciones de funciones localmente integrables con funciones integrables de soporte compacto:

$$Z_k(x) = (z^k * f)(x), \quad 1 \leq k \leq N, \quad Q(x) = \sum_{k=1}^N (q^k * f_k)(x);$$

estas convoluciones existen y son funciones localmente integrables en \mathbb{R}^N . Además, en virtud de la desigualdad de Young, se tiene que $\mathcal{H}f \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N+1})$ y se verifica (6.31). \blacksquare

De las propiedades de la derivación de convoluciones y de (6.14), se deduce que, cualquiera que sea $f \in L^r(\Omega)$, el potencial de volumen (Z, Q) verifica el sistema (de Stokes)

$$(6.32) \quad \begin{aligned} -\nu \Delta Z + \text{grad } Q &= f && \text{en } \mathbb{R}^N, \\ \text{div } Z &= 0 && \text{en } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Además, cuando $f \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, se tiene que $(Z, Q) \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N+1})$. A continuación, probemos el siguiente

Teorema 6.48 *Si $f \in L^r(\Omega)$ con $1 < r < \infty$, entonces el potencial de volumen verifica*

$$(Z, Q) \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)$$

y (6.32) c.p.d. en Ω . Además, existe una constante C que sólo depende de N , Ω y r , tal que

$$\|Z\|_{2,r;\Omega} + \|Q\|_{1,r;\Omega} \leq C \|f\|_{0,r;\Omega}.$$

Demostración: Es similar a la del Teorema 6.45. Indicamos sólo las diferencias más notables:

i) $f \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. En este caso, $(Z, Q) \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N+1})$ y, por tanto, las ecuaciones (6.32) se verifican puntualmente. Siendo $R > 0$ suficientemente grande de forma que $\Omega \subset\subset B_R$ y $\text{dist}(\partial B_r, \Omega) > R/2$, se tiene la identidad

$$(6.33) \quad \begin{aligned} \|f\|_{0,B_R}^2 &= \nu^2 \|D^2 Z\|_{0,B_R}^2 + \|DQ\|_{0;\Omega}^2 - \nu^2 \int_{\partial B_R} DZ \cdot \frac{\partial(DZ)}{\partial \mathbf{n}} dS \\ &\quad - \nu \int_{\partial B_R} DQ \cdot \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{n}} dS + 2\nu \sum_{j=1}^N \int_{\partial B_R} (DZ_j \cdot DQ) n_j dS. \end{aligned}$$

Análogamente a como se hizo en el Teorema 6.45, se prueba que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} DZ \cdot \frac{\partial(DZ)}{\partial \mathbf{n}} dS = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} DQ \cdot \frac{\partial(Z)}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \int_{\partial B_R} (DZ_j \cdot DQ) n_j dS = 0.$$

Tomando límites cuando $R \rightarrow \infty$ en (6.33), se obtiene

$$\nu^2 \|D^2 Z\|_{0;\mathbb{R}^N}^2 + \|DQ\|_{0;\mathbb{R}^N}^2 = \|f\|_{0;\Omega}^2;$$

de lo anterior y del Corolario 6.7, se deduce el Teorema en este caso.

ii) $f \in L^2(\Omega)$. Se prueba por densidad, haciendo uso de lo probado en el apartado anterior.

iii) $f \in L^r(\Omega)$, $1 < r < 2$. Se aplica el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz a los operadores lineales definidos de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ por $T_{ijk}f = D_{ij}Z_k$, donde $1 \leq i, j, k \leq N$ y $T_i f = D_i Q$, donde $1 \leq i \leq N$.

Las únicas diferencias respecto al apartado iii) de la Demostración del Teorema 6.45 son las siguientes:

a) Para las funciones vectoriales, se sustituye el valor absoluto por la norma Euclídea.

b) La descomposición $f = h + g$ se hace componente a componente, en la forma siguiente:

$$h_j(x) = \begin{cases} f_j(x), & \text{si } x \in G, \\ \frac{1}{\text{med}(K_l)} \int_{K_l} f_j(y) dy & \text{si } x \in K_l, l \geq 1, \end{cases}$$

para $1 \leq j \leq N$.

c) La estimación de μ_{Th} se obtiene igual, pero deduciendo previamente estimaciones para cada componente de h .

d) La estimación de μ_{Tb} se obtiene igual, llegándose también a las estimaciones (6.20) para todos los operadores T involucrados.

iv) El resto de la Demostración es igual a la del Teorema 6.45. Será necesario hacer uso en cada caso del Corolario 6.7. Que (6.19) se verifica c.p.d. en Ω se obtiene de la regularidad probada para (Z, Q) . ■

De la misma forma que en el apartado anterior, se deduce el siguiente

Corolario 6.49 Si $f \in W^{m,r}(\Omega)$, con $m \geq 0$ y $1 < r < \infty$, entonces el potencial de volumen verifica

$$(Z, Q) \in W^{m+2,r}(\Omega) \times W^{m+1,r}(\Omega).$$

Además, existe una constante C que sólo depende de N , Ω , m y r tal que

$$\|Z\|_{m+2,r;\Omega} + \|Q\|_{m+1,r;\Omega} \leq C \|f\|_{m,r;\Omega}. \quad \blacksquare$$

6.6.4 Potencial de capa simple: Existencia y estimaciones

En este apartado, probamos resultados de existencia y regularidad del potencial de capa simple. Utilizamos la notación (2.6) y (2.7).

Fijado k , $1 \leq k \leq N$, sea (z^k, q^k) la k -ésimsa solución fundamental del sistema de Stokes, y denotemos, de manera genérica, por φ una cualquiera de sus componentes. Se tiene el siguiente

Lema 6.50 *Sea g una función integrable y con soporte compacto en \mathbb{R}^{N+1} . Fijado un multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ cualquiera, la función*

$$\psi(x', x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^\alpha \varphi(x' - \xi', x_N) g(\xi') d\xi'$$

está bien definida y es indefinidamente diferenciable en \mathbb{R}_+^N . Además, para todo multiíndice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$, se tiene que

$$(6.34) \quad D^\beta \psi(x', x_N) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} D^{\alpha+\beta} \varphi(x' - \xi', x_N) g(\xi') d\xi'.$$

Demostración: La existencia de ψ se deduce de manera inmediata de la existencia de la convolución en \mathbb{R}^{N-1} de una función integrable y de soporte compacto,

$$x' \rightarrow g(x'),$$

con la función

$$x' \rightarrow D^\alpha \varphi(x', x_N),$$

que, para cada $x_N > 0$ fijo, es localmente integrable en \mathbb{R}^{N-1} .

Por otro lado, cualquiera que sea α , la función

$$x \rightarrow D^\alpha \varphi(x' - \xi', x_N) g(\xi')$$

es indefinidamente diferenciable en \mathbb{R}_+^N , y cualquiera que sea β , la función

$$x \rightarrow D^{\alpha+\beta} \varphi(x' - \xi', x_N) g(\xi')$$

es integrable respecto de ξ' y está uniformemente acotada por una función integrable respecto de ξ en cada abierto $\mathcal{O} \subset \subset \mathbb{R}_+^N$; por tanto, ψ es indefinidamente diferenciable en \mathbb{R}_+^N y se verifica (6.34). ■

Se deduce el siguiente

Corolario 6.51 *Sea $\mathbf{T} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ una función de $W^{1,r}(B_R^+; \mathbb{R}^{N \times N})$, donde $1 < r < \infty$, de soporte compacto contenido en $B_R \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$ y denotemos también por \mathbf{T} la traza de este tensor sobre ∂B_R^+ ; sea \mathbf{t}_k el vector de componentes $(\tau_{kj})_{1 \leq j \leq N}$. Entonces, el potencial*

$$\mathcal{K}\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \mathbf{\Pi})$$

está bien definido y es indefinidamente diferenciable en \mathbb{R}_+^N ; cualquiera que sea el multiíndice α , se tiene que

$$D^\alpha V_i(x) = \int_{\partial B_R^+} D^\alpha z^i(x - \xi) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})(\xi) dS, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$D^\alpha \Pi(x) = \sum_{k=1}^N \int_{\partial B_R^+} D^\alpha q^k(x - \xi) (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(\xi) dS,$$

en \mathbb{R}_+^N .

Demostración: Para mayor claridad en la Demostración, pongamos

$$D^\alpha V_i(x) = \sum_{k=1}^N \int_{\partial B_R^+} D^\alpha z_k^i(x - \xi) (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(\xi) dS, \quad 1 \leq i \leq N.$$

La traza de \mathbf{T} sobre ∂B_R^+ es una función de $W^{1-\frac{1}{r}, r}(\partial B_R^+; \mathbb{R}^{N \times N})$ con soporte compacto contenido en

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(B_R) \equiv B_R \cap \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N = 0\}.$$

Ya que Γ_0 es un abierto de \mathbb{R}^{N-1} , restringiendo \mathbf{T} a Γ_0 y prolongándolo por cero a todo \mathbb{R}^{N-1} , obtenemos un nuevo tensor, denotado también \mathbf{T} , que pertenece a $W^{1-\frac{1}{r}, r}(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R}^{N \times N})$. Así, la función

$$x' \rightarrow (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(x')$$

es integrable y con soporte compacto en \mathbb{R}^{N-1} . Del Lema 6.50 con $g(x')$ sustituida por $(\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(x')$, teniendo en cuenta que con esta función en el integrando todas las integrales están realmente extendidas a Γ_0 , se tiene la Demostración del Corolario. ■

Teorema 6.52 Con la notación del Corolario 6.51, se considera el potencial $\mathcal{KT} = (\mathbf{V}, \Pi)$. Cualquiera que sea el multiíndice α , se tiene

$$D^\alpha \mathbf{V} \in L^r(B_R^+), \quad D^\alpha \Pi \in L^r(B_R^+),$$

y

$$\|D^\alpha \mathbf{V}\|_{0, r; B_R^+} \leq C \left(\|\mathbf{T}\|_{0, r; B_R^+} + \|\operatorname{div} \mathbf{T}\|_{0, r; B_R^+} \right),$$

$$\|D^\alpha \Pi\|_{0, r; B_R^+} \leq C \left(\|\mathbf{T}\|_{0, r; B_R^+} + \|\operatorname{div} \mathbf{T}\|_{0, r; B_R^+} \right),$$

donde las constantes C dependen sólo de N , r y α . En particular, se tiene que

$$\mathcal{KT} \in W^{2, r}(B_R^+) \times W^{1, r}(B_R^+)$$

y

$$\|\mathcal{K}\mathbf{T}\|_{W^{2,r}(B_R^+; \mathbb{R}^N) \times W^{1,r}(B_R^+)} \leq C(N, r, R) \left(\|\mathbf{T}\|_{0,r; B_R^+} + \|\operatorname{div} \mathbf{T}\|_{0,r; B_R^+} \right).$$

Demostración: Con la notación del Lema 6.50, tomando $g(x') = (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(x')$ con $1 \leq k \leq N$, es suficiente probar que cualquiera que sea el multiíndice α y cualquiera que sea la componente de la k -ésima solución fundamental, que representaremos por φ , se verifica

$$\psi \in L^r(B_R^+),$$

$$\|\psi\|_{0,r; B_R^+} \leq C \left(\|\mathbf{T}\|_{0,r; B_R^+} + \|\operatorname{div} \mathbf{T}\|_{0,r; B_R^+} \right).$$

Hacemos la Demostración en varias etapas:

i) Como hemos visto en la demostración del Corolario 6.51, la función ψ puede ser escrita en la forma

$$\psi(x', x_N) = \int_{\partial B_R^+} D^\alpha \varphi(x - \xi) (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(\xi) dS_\xi.$$

Tenemos por una parte, debido a que $\mathbf{T} \in W^{1,r}(B_R^+; \mathbb{R}^{N \times N})$, que $\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n}$ puede ser identificado con un elemento de $W^{-\frac{1}{r},r}(\partial B_R^+)$ (cf. aptdo. 6.1.7); este elemento, por pertenecer también a $W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial B_R^+)$, actúa sobre cada $\eta \in W^{1-\frac{1}{r},r'}(\partial B_R^+)$ mediante la fórmula

$$\langle \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n}, \eta \rangle_{W^{-\frac{1}{r},r}(\partial B_R^+), W^{1-\frac{1}{r},r'}(\partial B_R^+)} = \int_{\partial B_R^+} (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n}) \eta dS.$$

Por otro lado, fijado $x = (x', x_N)$ en B_R^+ , sean

$$h(x) \leq \frac{1}{2} d(x, \partial B_R^+) = \frac{1}{2} \min\{R - |x|, x_N\}$$

y

$$\mathcal{O}_{h(x)} = \{\xi = (\xi', \xi_N) \in B_R^+ \mid d(\xi, \partial B_R^+) < h(x)\}.$$

La función $\xi \rightarrow D^\alpha \varphi(x - \xi)$ está en $W^{1,s}(\mathcal{O}_{h(x)})$ para cada $s \in (1, \infty)$; en consecuencia, tiene sentido su traza sobre ∂B_R^+ que, en particular, pertenece a $W^{1-\frac{1}{r},r'}(\partial B_R^+)$. Por tanto,

$$\psi(x', x_N) = \langle \mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n}, D^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle_{W^{-\frac{1}{r},r}(\partial B_R^+), W^{1-\frac{1}{r},r'}(\partial B_R^+)}.$$

De aquí, se deduce que

$$\begin{aligned} |\psi(x', x_N)| &\leq \|\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{r},r; \partial B_R^+} \|D^\alpha \varphi(x - \cdot)\|_{1-\frac{1}{r},r'; \partial B_R^+} \\ &\leq \|D^\alpha \varphi(x - \cdot)\|_{1,r'; \mathcal{O}_{h(x)}} \left(\|\mathbf{T}\|_{0,r; B_R^+} + \|\operatorname{div} \mathbf{T}\|_{0,r; B_R^+} \right), \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de los resultados relativos a normas de trazas y a normas de trazas normales.

ii) Buscamos a continuación una cota de $\|D^\alpha \varphi(x - \cdot)\|_{1,r'; \mathcal{O}_{h(x)}}$ en B_R^+ . Sea x fijo en B_R^+ . Distinguiamos dos casos:

En primer lugar, tratamos todos los casos excepto aquél en el que $|\alpha| = 0$, $\varphi = z_i^k$ y $N = 2$. Cuando $\xi \in \mathcal{O}_{h(x)}$ se tiene $x - \xi \neq 0$, por lo que se deduce de (6.13) que

$$|D^\alpha \varphi(x - \xi)| \leq C(N) |x - \xi|^{\rho - N - |\alpha|},$$

con $\rho = 1$ si φ es una presión y $\rho = 2$ si φ es una velocidad. Teniendo en cuenta que

$$|x - \xi| \geq \min \left\{ \frac{1}{2}(R - |x|), \frac{1}{2}x_N \right\},$$

se obtiene

$$\begin{aligned} & |D^\alpha \varphi(x - \xi)|^{r'} + |DD^\alpha \varphi(x - \xi)|^{r'} \\ & \leq C(N, r, R) \max \left\{ (R - |x|)^{(\rho - N - |\alpha| - 1)r'}, x_N^{(\rho - N - |\alpha| - 1)r'} \right\}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} & \|D^\alpha \varphi(x - \cdot)\|_{1,r'; \mathcal{O}_{h(x)}} \\ & \leq C(N, r, R) \max \left\{ (R - |x|)^{\rho - N - |\alpha| - 1}, x_N^{\rho - N - |\alpha| - 1} \right\} \left(\text{med}(\mathcal{O}_{h(x)}) \right)^{\frac{1}{r'}}. \end{aligned}$$

Eligiendo

$$h(x) \leq \frac{1}{2} \min \left\{ R - |x|, x_N, (R - |x|)^\gamma, x_N^\gamma \right\},$$

con γ un número positivo que fijaremos después y teniendo en cuenta que

$$\text{med}(\mathcal{O}_{h(x)}) \leq C(N, R) h(x),$$

se llega a

$$\|D^\alpha \varphi(x - \cdot)\|_{1,r'; \mathcal{O}_{h(x)}} \leq C(N, r, R) \max \left\{ (R - |x|)^{\rho - N - |\alpha| - 1 + \frac{\gamma}{r'}}, x_N^{\rho - N - |\alpha| - 1 + \frac{\gamma}{r'}} \right\}.$$

En segundo lugar, consideramos el caso que queda, es decir, aquél para el cual $N = 2$ y $\varphi = z_i^k$. Para $\xi \in \mathcal{O}_{h(x)}$ se tiene que $x - \xi \neq 0$ y

$$z_i^k(x - \xi) = \delta_{ik} \left(\ln |x - \xi| + \frac{1}{2} \right) - \frac{(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)}{|x - \xi|^2}.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} |\ln |x - \xi|| & \leq \max \left\{ |x - \xi|, \ln \frac{1}{|x - \xi|} \right\} \\ & \leq \max \left\{ R, \ln \frac{2}{R - |x|}, \ln \frac{2}{x_N} \right\}, \end{aligned}$$

se obtiene

$$|z_i^k(x - \xi)|^{r'} + |Dz_i^k(x - \xi)|^{r'} \\ \leq C(N, r, R) \max \left\{ \left(\ln \frac{2}{R - |x|} \right)^{r'}, \left(\ln \frac{2}{x_N} \right)^{r'}, \left(\frac{2}{R - |x|} \right)^{r'}, \left(\frac{2}{x_N} \right)^{r'} \right\},$$

de donde, procediendo como antes, se llega a la desigualdad

$$\|z_i^k(x - \cdot)\|_{1, r'; \mathcal{O}_h(x)} \leq C(N, r, R) \times \\ \times \max \left\{ \left(\ln \frac{2}{R - |x|} \right) (R - |x|)^{\frac{\gamma}{r'}}, \left(\ln \frac{2}{x_N} \right) x_N^{\frac{\gamma}{r'}}, (R - |x|)^{-1 + \frac{\gamma}{r'}}, (x_N)^{-1 + \frac{\gamma}{r'}} \right\}.$$

iii) Finalmente, acotemos la norma de ψ en $L^r(B_R^+)$. Del apartado ii) se deduce que, eligiendo $\gamma > 0$ suficientemente grande, la función

$$x \rightarrow \|D^\alpha \varphi(x - \cdot)\|_{1, r'; \mathcal{O}_h(x)}^r$$

es integrable en B_R^+ , y su integral está acotada por una constante que depende de N , r , R y α . De esto y de la estimación obtenida para $|\psi(x', x_N)|$ en el apartado i), se deduce que $\psi \in L^r(B_R^+)$ y

$$\|\psi\|_{0, r; \Omega} \leq C(N, r, R, \alpha) \left(\|\mathbf{T}\|_{0, r; B_R^+} + \|\operatorname{div} \mathbf{T}\|_{0, r; B_R^+} \right).$$

Con esto termina la Demostración del Teorema. ■

Obsérvese que la constante $C(N, r, R, \alpha)$ es creciente respecto de R .

Los resultados estudiados hasta aquí prueban la existencia y proporcionan estimaciones L^r del potencial de capa simple en una semibola B_R^+ centrada en el origen cuya densidad es la traza de un tensor de $W^{1, r}(B_R^+; \mathbb{R}^{N \times N})$ con soporte en $B_R \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$. Demostrar directamente los mismos resultados en un dominio $\Omega^+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^N$ presenta como complicación que aparece la función $d(x, \partial\Omega^+)$. No obstante, gracias a un argumento de "localización", para probar las estimaciones L^r de la solución del problema de Stokes, será suficiente, como veremos, el resultado precedente, junto con alguna generalización del mismo que damos a continuación.

Sea $a = (a', a_N)$ un punto de \mathbb{R}^N y sea $\sum_{i=1}^N \sigma_i (x_i - a_i) = 0$, con los $\sigma_i \in \mathbb{R}$, la ecuación de un hiperplano de \mathbb{R}^N que pasa por a ; sea también Ω un dominio acotado

de \mathbb{R}^N . Pongamos

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_*^N &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) > 0\}, \\ \overline{\mathbb{R}_*^N} &= \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) \geq 0\}, \\ B_R &= B(a, R), \\ B_R^* &= B_R \cap \mathbb{R}_*^N, \\ \Gamma_* &= B_R \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) = 0\}, \\ \Omega^* &= \Omega \cap \mathbb{R}_*^N, \\ S^* &= \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) = 0\}, \\ \delta &= \text{diam}(\Omega^*).\end{aligned}$$

Siempre es posible realizar un cambio de sistema de referencia en \mathbb{R}^N de forma que \mathbb{R}_*^N y B_R^* se transformen en \mathbb{R}_+^N y B_R^+ , respectivamente; éste vendría dado por

$$x = h(t) = a + tQ$$

siendo Q una matriz ortogonal. Con este cambio, se transforman el punto a , el hiperplano $\sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) = 0$, el semiespacio \mathbb{R}_*^N , la semibola B_R^* , Γ_* y el vector normal \mathbf{n}_{Γ_*} en 0 , $t_N = 0$, \mathbb{R}_+^N , B_R^+ , Γ_0 y \mathbf{n}_{Γ_0} , respectivamente. Además, para cualquier función $\eta \in L^1(\partial B_R^*)$, se tiene (cf. [36], pag. IV.27) que $\eta \circ h \in L^1(\partial B_R^+)$ y

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_R^*} \eta dS_x &= \int_{\partial B_R^+} (\eta \circ h) |\det [Dh]| |[Dh]^{-T} \cdot \mathbf{n}| dS_t \\ &= \int_{\partial B_R^+} (\eta \circ h) dS_t,\end{aligned}$$

ya que $\det [Dh] = \det Q = 1$ y $|[Dh]^{-T} \cdot \mathbf{n}| = |\mathbf{n}| = 1$.

Se tiene

Teorema 6.53 *Sea $\mathbf{T} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ una función de $W^{1,r}(B_R^*; \mathbb{R}^{N \times N})$, donde $1 < r < \infty$, de soporte compacto contenido en $B_R \cap \overline{\mathbb{R}_*^N}$ y denotemos también por \mathbf{T} la traza de este tensor sobre ∂B_R^* ; sea \mathbf{t}_k el vector de componentes $(\tau_{kj})_{1 \leq j \leq N}$. Entonces, el potencial*

$$\mathcal{K}\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \Pi)$$

está bien definido y es indefinidamente diferenciable en \mathbf{R}_*^N . Además, se tienen las mismas conclusiones del Corolario y del Teorema anterior con \mathbf{R}_*^N , B_R^* y Γ_* en lugar de \mathbf{R}_+^N , B_R^+ y Γ_0 , respectivamente.

Demostración: Si consideramos el cambio de sistema de referencia anterior, el tensor $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T}(a+tQ)$ verifica todas las hipótesis del Corolario anterior, por lo que existe el potencial

$$\mathcal{K}\tilde{\mathbf{T}} = (\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\Pi})$$

en \mathbf{R}_+^N , y sus componentes vienen dadas por

$$\begin{aligned}\tilde{V}_i(t) &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial B_R^+} z_i^k(t-\rho) (\tilde{\mathbf{t}}_k \cdot \mathbf{n})(\rho) dS_\rho, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \tilde{\Pi}(t) &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial B_R^+} q^k(t-\rho) (\tilde{\mathbf{t}}_k \cdot \mathbf{n})(\rho) dS_\rho.\end{aligned}$$

Haciendo cambios de variables, de ∂B_R^+ a ∂B_R^* en la integral, y de \mathbf{R}_+^N a \mathbf{R}_*^N en la variable del potencial, se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{V}_i((x-a)Q^{-1}) &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial B_R^*} z_i^k(x-\xi) (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(\xi) dS_\xi, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \tilde{\Pi}((x-a)Q^{-1}) &= \sum_{k=1}^N \int_{\partial B_R^*} q^k(x-\xi) (\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{n})(\xi) dS_\xi;\end{aligned}$$

aquí, se ha tenido en cuenta que $z_i^k((x-\xi)Q^{-1}) = z_i^k(x-\xi)$ y $q^k((x-\xi)Q^{-1}) = q^k(x-\xi)$, debido a que $|(x-\xi)Q^{-1}| = |x-\xi|$. Se deduce de lo anterior que existe el potencial $\mathcal{K}\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \Pi)$ en \mathbf{R}_*^N y verifica

$$(\mathcal{K}\mathbf{T})(x) = (\mathcal{K}\tilde{\mathbf{T}})((x-a)Q^{-1}).$$

De esta igualdad se deducen las demás propiedades. ■

Por último, se tiene:

Teorema 6.54 Sea $\mathbf{T} = (\tau_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ una función de $W^{1,r}(\Omega^*; \mathbf{R}^{N \times N})$, con $1 < r < \infty$, de soporte compacto contenido en $\Omega \cap \overline{\mathbf{R}_*^N}$ y denotemos también por \mathbf{T} la traza de este tensor sobre $\partial\Omega^*$; sea \mathbf{t}_k el vector de componentes $(\tau_{kj})_{1 \leq j \leq N}$. Entonces, el potencial

$$\mathcal{K}\mathbf{T} = (\mathbf{V}, \Pi)$$

está bien definido y es indefinidamente diferenciable en \mathbf{R}_*^N . Además, se tienen las mismas conclusiones del Teorema precedente, con B_R^* sustituido por Ω^* y R (en las constantes de las estimaciones) sustituido por δ .

Demostración: Sea R suficientemente grande de forma que $\Omega^* \subset B_R^*$. Prolongando \mathbf{T} por cero fuera de Ω^* , se obtiene una nueva función, denotada $\hat{\mathbf{T}}$, que verifica en B_R^* las hipótesis del Teorema 6.53; por tanto, $\mathcal{K}\hat{\mathbf{T}}$ existe en \mathbb{R}_*^N .

Debido a que los soportes de las trazas de \mathbf{T} y $\hat{\mathbf{T}}$ sobre $\partial\Omega^*$ y ∂B_R^* , respectivamente, están contenidos en $S_* \cap \Gamma_*$ y a que coinciden en este último conjunto, se tiene la existencia del potencial $\mathcal{K}\mathbf{T}$, igual a $\mathcal{K}\hat{\mathbf{T}}$, en \mathbb{R}_*^N . Esto demuestra el Teorema. ■

6.7 Estimaciones L^r en el interior del dominio

Probamos a continuación estimaciones de pares de funciones de $W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)$ en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$; haremos uso de estas estimaciones, junto con las de la Sección siguiente, para probar la regularidad L^r de la solución débil del problema de Stokes. En toda la Sección, Ω será un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{1,\infty}$.

6.7.1 Estimaciones de funciones de $W_0^{2,r}(\Omega) \times W_0^{1,r}(\Omega)$

Comenzamos por probar estimaciones de pares de funciones que se anulan sobre $\partial\Omega$.

Teorema 6.55 *Sea $(y, p) \in W_0^{2,r}(\Omega) \times W_0^{1,r}(\Omega)$, donde $1 < r < \infty$. Se denota*

$$\mathbf{f} = -\nu\Delta\mathbf{y} + \text{grad } p, \quad g = \text{div } \mathbf{y}.$$

Existe una constante C que sólo depende de N , Ω y r , tal que

$$\|D^2\mathbf{y}\|_{0,r;\Omega} + \|Dp\|_{0,r;\Omega} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{0,r;\Omega} + \|Dg\|_{0,r;\Omega} \right).$$

Demostración: Teniendo en cuenta la Observación i) a las Definiciones de los potenciales, que $\mathcal{N}y = 0$ y que $\mathcal{K}\mathbf{T} = 0$, con \mathbf{T} definido por (6.18), se puede escribir

$$(y, p) = \mathcal{H}\mathbf{f} + \mathcal{J}g = (\mathbf{Z}, Q) + (\mathbf{G}, \Upsilon).$$

Utilizamos a continuación los resultados sobre existencia y estimaciones de los potenciales. Por un lado, como $\mathbf{f} \in L^r(\Omega)$, se tiene que

$$(\mathbf{Z}, Q) \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)$$

y

$$\|D^2\mathbf{Z}\|_{0,r;\Omega} + \|DQ\|_{0,r;\Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,r;\Omega}.$$

Por otra parte, como $g \in W^{1,r}(\Omega)$, se tiene que

$$(G, \Upsilon) \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)$$

y

$$\|D^2 G\|_{0,r;\Omega} + \|D\Upsilon\|_{0,r;\Omega} \leq C \|Dg\|_{0,r;\Omega}.$$

Con ello, se tiene la Demostración del Teorema. ■

Ahora, utilizando la notación del aptdo. 6.3.2, obtenemos:

Teorema 6.56 Sea $(y, p) \in W_0^{2,r}(\Omega) \times W_0^{1,r}(\Omega)$, $1 < r < \infty$. Se considera un operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes $\mathcal{L}^0 = (L_1^0, \dots, L_N^0, L_{N+1}^0)$ y se denota

$$f_l = L_l^0(y, p), \quad 1 \leq l \leq N, \quad g = L_{N+1}^0(y, p).$$

Existe una constante C que sólo depende de N , Ω , r y Λ_0 tal que

$$\|D^2 y\|_{0,r;\Omega} + \|Dp\|_{0,r;\Omega} \leq \frac{C}{\lambda_0} \left(\|f\|_{0,r;\Omega} + \|Dg\|_{0,r;\Omega} \right).$$

Demostración: Con la notación del aptdo. 6.3.2, hacemos el cambio de sistema de referencia $x = \Psi(\xi) = \xi \cdot E$. Entonces, las funciones (\tilde{y}, \tilde{p}) pertenecen a $W_0^{2,r}(\tilde{\Omega}) \times W_0^{1,r}(\tilde{\Omega})$ y verifican

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \tilde{y} + \text{grad } \tilde{p} &= \tilde{f}, \\ \text{div } \tilde{y} &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

c.p.d. en $\tilde{\Omega}$.

En virtud del Teorema anterior, se tiene

$$\|D^2 \tilde{y}\|_{0,r;\tilde{\Omega}} + \|D\tilde{p}\|_{0,r;\tilde{\Omega}} \leq C \left(\|\tilde{f}\|_{0,r;\tilde{\Omega}} + \|D\tilde{g}\|_{0,r;\tilde{\Omega}} \right).$$

Deshaciendo el cambio de variables (cf. aptdo. 6.3.2), se tiene demostrado el Teorema. ■

Nótese que, aquí, la constante C es creciente respecto de Λ_0 .

6.7.2 Estimaciones L^r en el interior del dominio

Probamos ahora estimaciones en el interior de Ω para pares de funciones que no se anulan necesariamente sobre $\partial\Omega$. Utilizamos la notación de la Sección 6.3.

Teorema 6.57 Sea $(y, p) \in (W_{loc}^{2,r}(\Omega) \cap L^r(\Omega)) \times (W_{loc}^{1,r}(\Omega) \cap L^r(\Omega))$, con $1 < r < \infty$. Se considera un operador de Stokes generalizado con coeficientes variables $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_N, L_{N+1})$ con $m = 0$ y se denota

$$f_l = L_l(y, p), \quad 1 \leq l \leq N, \quad g = L_{N+1}(y, p).$$

Para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe una constante C que sólo depende de $N, \Omega, \Omega', r, \Lambda, \lambda$ y K tal que

$$\|y\|_{2,r;\Omega'} + \|p\|_{1,r;\Omega'} \leq C \left(\|f\|_{0,r;\Omega} + \|g\|_{1,r;\Omega} + \|y\|_{0,r;\Omega} + \|p\|_{0,r;\Omega} \right).$$

Demostración: Sea Ω' un dominio estrictamente contenido en Ω y denotemos por $d = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Hacemos la Demostración en tres etapas.

i) Sea $x_0 \in \Omega'$ y consideremos el operador de Stokes generalizado \mathcal{L}^0 con coeficientes constantes obtenidos cuando se toma $a_{ij}^0 = a_{ij}(x_0)$, $e_{ij}^0 = e_{ij}(x_0)$ para $1 \leq i, j \leq N$.

Sean $R > 0$ y $B_R = B(x_0, R)$; si $(z, q) \in W_0^{2,r}(B_R) \times W_0^{1,r}(B_R)$, en virtud del Teorema 6.56, se tiene

$$\begin{aligned} \|D^2 z\|_{0,r;B_R} + \|Dq\|_{0,r;B_R} &\leq \frac{C(N, \Omega, r, \Lambda_0)}{\lambda_0} \left(\|L^0(z, q)\|_{0,r;B_R} + \|D(L_{N+1}^0(z, q))\|_{0,r;B_R} \right) \\ &\leq \frac{C(N, \Omega, r, \Lambda)}{\lambda} \left(\|L^0(z, q)\|_{0,r;B_R} + \|D(L_{N+1}^0(z, q))\|_{0,r;B_R} \right), \end{aligned}$$

donde $L^0(\cdot, \cdot)$ es el operador vectorial en derivadas parciales de componentes $L_l^0(\cdot, \cdot)$, $1 \leq l \leq N$ (aquí, se ha puesto la constante dependiendo de Ω en lugar de B_R , lo cual es evidentemente posible). Entonces, para $x \in B_R$ se tiene

$$\begin{aligned} L_l^0(z, q) &= -\nu \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)) D_{ij} z_l + \sum_{i=1}^N (e_{li}(x_0) - e_{li}(x)) D_i q \\ &\quad - \nu \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} z_l + \sum_{i=1}^N e_{li} D_i q, \quad 1 \leq l \leq N, \\ L_{N+1}^0(z, q) &= \sum_{i,l=1}^N (e_{li}(x_0) - e_{li}(x)) D_i z_l + \sum_{i,l=1}^N e_{li}(x) D_i z_l, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \|D^2 \mathbf{z}\|_{0,r;B_R} + \|Dq\|_{0,r;B_R} &\leq \frac{C(N, \Omega, r, \Lambda)}{\lambda} \times \\ &\times \left(\|A(x_0) - A(x)\|_{1,\infty;B_R} \|D^2 \mathbf{z}\|_{0,r;B_R} + \|E(x_0) - E(x)\|_{1,\infty;B_R} \|Dq\|_{0,r;B_R} \right. \\ &+ \left\| -\nu \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{ij} z_l + \sum_{i=1}^N e_{li}(x) D_i q \right\|_{0,r;B_R} \\ &+ \left\| E(x_0) - E(x) \right\|_{1,\infty;B_R} \|D^2 \mathbf{z}\|_{0,r;B_R} + \left\| \sum_{i,l=1}^N (D e_{li}) D_i z_l \right\|_{0,r;B_R} \\ &\left. + \left\| D \left(\sum_{i,l=1}^N e_{li} D_i z_l \right) \right\|_{0,r;B_R} \right). \end{aligned}$$

Tomando $R < \min \left\{ \frac{d}{2}, \delta \right\}$, con $\delta = \frac{\lambda}{4KC(N, \Omega, r, \Lambda)}$, se obtiene

$$\begin{aligned} (6.35) \quad &\|D^2 \mathbf{z}\|_{0,r;B_R} + \|Dq\|_{0,r;B_R} \leq C(N, \Omega, r, \Lambda, \lambda, K) \times \\ &\times \left(\left\| -\nu \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{ij} z_l + \sum_{i=1}^N e_{li}(x) D_i q \right\|_{0,r;B_R} \right. \\ &\left. + \|D\mathbf{z}\|_{0,r;B_R} + \left\| D \left(\sum_{i,l=1}^N e_{li} D_i z_l \right) \right\|_{0,r;B_R} \right). \end{aligned}$$

ii) Sean $\sigma \in (0, 1)$ fijo, $R < \min \left\{ \frac{d}{2}, \delta \right\}$ y η una función de $\mathcal{D}(B_R)$ que verifique

$$0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta = 1 \quad \text{en } B_{\sigma R}, \quad \eta = 0 \quad \text{para } |x| \geq \sigma' R, \quad \sigma' = \frac{1+\sigma}{2},$$

$$|D\eta| \leq \frac{C}{(1-\sigma)R}, \quad |D^2\eta| \leq \frac{C}{(1-\sigma)^2 R^2},$$

donde C es una constante. Entonces, si $\mathbf{z} = \eta \mathbf{y}$ y $q = \eta p$, se tiene que $(\mathbf{z}, q) \in W_0^{2,r}(B_R) \times W_0^{1,r}(B_R)$, por lo que satisfacen (6.35). Se deduce que

$$\begin{aligned} \|D^2 \mathbf{y}\|_{0,r;B_{\sigma R}} + \|Dp\|_{0,r;B_{\sigma R}} &\leq C(N, \Omega, r, \Lambda, \lambda, K) \times \\ &\times \left(\|f\|_{0,r;B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \|D\mathbf{y}\|_{0,r;B_{\sigma' R}} \right. \\ &+ \frac{1}{(1-\sigma)^2 R^2} \|\mathbf{y}\|_{0,r;B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \|p\|_{0,r;B_R} \\ &\left. + \|Dg\|_{0,r;B_R} + \frac{1}{(1-\sigma)R} \|g\|_{0,r;B_R} \right). \end{aligned}$$

En consecuencia, para $\sigma \in (0, 1)$, obtenemos

$$\begin{aligned} & (1 - \sigma)^2 R^2 \|D^2 \mathbf{y}\|_{0,r;B_{\sigma R}} + (1 - \sigma)^2 R^2 \|Dp\|_{0,r;B_{\sigma R}} \leq C \times \\ & \times \left((1 - \sigma)^2 R^2 \|f\|_{0,r;B_R} + 2(1 - \sigma') R \|D\mathbf{y}\|_{0,r;B_{\sigma' R}} \right. \\ & \quad + \|\mathbf{y}\|_{0,r;B_R} + (1 - \sigma) R \|p\|_{0,r;B_R} \\ & \quad \left. + (1 - \sigma)^2 R^2 \|Dg\|_{0,r;B_R} + (1 - \sigma) R \|g\|_{0,r;B_R} \right). \end{aligned}$$

Tomando supremos en σ y usando el Lema 6.8, llegamos a que

$$\begin{aligned} & \Phi_{2,B_R}(\mathbf{y}) + \sup_{0 < \sigma < 1} (1 - \sigma)^2 R^2 \|Dp\|_{0,R;B_R} \\ & \leq C \left(R^2 \|f\|_{0,r;B_R} + \|\mathbf{y}\|_{0,r;B_R} + R \|p\|_{0,r;B_R} \right. \\ & \quad \left. + R^2 \|Dg\|_{0,r;B_R} + R \|g\|_{0,r;B_R} \right), \end{aligned}$$

de donde se deduce también que

$$\begin{aligned} & \|D^2 \mathbf{y}\|_{0,r;B_{\sigma R}} + \|Dp\|_{0,r;B_{\sigma R}} \\ & \leq \frac{C}{(1 - \sigma)^2 R^2} \left(R^2 \|f\|_{0,r;B_R} + \|\mathbf{y}\|_{0,r;B_R} + R \|p\|_{0,r;B_R} \right. \\ & \quad \left. + R^2 \|Dg\|_{0,r;B_R} + R \|g\|_{0,r;B_R} \right) \end{aligned}$$

y esto cualquiera que sea $\sigma \in (0, 1)$ y cualquiera que sea $R < \min\{\delta, \frac{d}{2}, 1\}$.

iii) Ahora, consideramos un recubrimiento finito de $\overline{\Omega'}$ formado por bolas con centros en Ω' y radio $R/2$, siendo $R < \min\{\delta, d/2, 1\}$:

$$\overline{\Omega'} \subset \cup_{j=1}^M B(x_j; R/2) = \cup_{j=1}^M B_j.$$

Se tiene que

$$\|D^2 \mathbf{y}\|_{0,r;\Omega'} + \|Dp\|_{0,r;\Omega'} \leq \sum_{j=1}^M \left(\|D^2 \mathbf{y}\|_{0,r;B_j} + \|Dp\|_{0,r;B_j} \right).$$

Aplicando el resultado del apartado ii) a cada sumando de la desigualdad precedente, se obtiene, después de hacer uso del Lema 6.6, la Demostración del Teorema. ■

6.8 Estimaciones L^r en el dominio (hasta la frontera)

En esta Sección, probamos estimaciones para pares de funciones de $W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)$ en todo Ω .

6.8.1 Estimaciones L^r de funciones con soporte en semidominios

Comenzamos por probar estimaciones de pares de funciones que se anulan sobre una semiesfera. Utilizamos la notación del aptdo. 6.6.4:

Sea $a = (a', a_N)$ un punto fijo de \mathbb{R}^N y sea $\sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) = 0$, donde los $\sigma_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq N$, un hiperplano de \mathbb{R}^N que pasa por a ; se supone que Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{1,\infty}$. Pongamos

$$\mathbb{R}_*^N = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}_*^N} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N \sigma_i(x_i - a_i) \geq 0\},$$

$$\Omega^* = \Omega \cap \mathbb{R}_*^N.$$

Teorema 6.58 *Sea $(y, p) \in (W^{2,r}(\Omega^*) \cap W_0^{1,r}(\Omega^*)) \times W^{1,r}(\Omega^*)$ con $1 < r < \infty$, tal que $\text{sop } y$ y $\text{sop } p$ están contenidos en $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}_*^N}$. Se denota*

$$f = -\nu \Delta y + \text{grad } p, \quad g = \text{div } y.$$

Existe una constante C que sólo depende de N , Ω^ y r tal que*

$$\|D^2 y\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dp\|_{0,r;\Omega^*} \leq C \left(\|f\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dg\|_{0,r;\Omega^*} + \|p\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dy\|_{0,r;\Omega^*} \right).$$

Demostración: De la Observación i) que sigue a las Definiciones de los potenciales, teniendo en cuenta que $\mathcal{N}y = 0$, se obtiene que

$$(y, p) = \mathcal{H}f + \mathcal{K}T + \mathcal{J}g = (Z, Q) + (V, \Pi) + (G, \Upsilon),$$

donde T está definido por (6.18). Utilizando los resultados sobre existencia y estimaciones de los potenciales, junto con las desigualdades

$$\|T\|_{0,r;\Omega^*} \leq C(N, r) \left(\|p\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dy\|_{0,r;\Omega^*} \right),$$

$$\|\text{div } T\|_{0,r;\Omega^*} = \|f\|_{0,r;\Omega^*},$$

se llega a la demostración del Teorema. ■

Ahora, de manera análoga a como se probó el Teorema 6.56, se demuestra el siguiente

Teorema 6.59 Sea $(y, p) \in (W^{2,r}(\Omega^*) \cap W_0^{1,r}(\Omega^*)) \times W^{1,r}(\Omega^*)$ con $1 < r < \infty$, tal que $\text{sop } y$ y $\text{sop } p$ están contenidos en $\Omega \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$. Se considera un operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes \mathcal{L}^0 y se denota

$$f_l = L_l^0(y, p), \quad 1 \leq l \leq N, \quad g = L_{N+1}^0(y, p).$$

Existe una constante C que sólo depende de N , Ω^* , r y Λ_0 tal que

$$\|D^2 y\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dp\|_{0,r;\Omega^*} \leq \frac{C}{\lambda_0} \left(\|f\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dg\|_{0,r;\Omega^*} + \|p\|_{0,r;\Omega^*} + \|Dy\|_{0,r;\Omega^*} \right). \blacksquare$$

6.8.2 Estimaciones L^r en el interior de semidominios

De forma análoga a como se demostró el Teorema 6.57, se prueba también el

Teorema 6.60 Sea $(y, p) \in (W^{2,r}(\Omega^*) \cap W_0^{1,r}(\Omega^*)) \times W^{1,r}(\Omega^*)$ con $r \in (1, \infty)$. Se considera un operador de Stokes generalizado con coeficientes variables \mathcal{L} de componentes $(L_1, \dots, L_N, L_{N+1})$, con $m = 0$, y se denota

$$f_l = L_l(y, p), \quad 1 \leq l \leq N, \quad g = L_{N+1}(y, p).$$

Para cada $\omega \subset\subset \Omega$, existe una constante C que sólo depende de N , Ω , ω , r , Λ , λ y K , tal que

$$\|y\|_{2,r;\omega^*} + \|p\|_{1,r;\omega^*} \leq C \left(\|f\|_{0,r;\Omega^*} + \|g\|_{1,r;\Omega^*} + \|y\|_{0,r;\Omega^*} + \|p\|_{0,r;\Omega^*} \right). \blacksquare$$

6.8.3 Estimaciones L^r en el dominio

Probamos ahora estimaciones en todo el dominio (hasta la frontera).

Teorema 6.61 Sean Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{2,\infty}$ y sea el par $(y, p) \in (W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)) \times W^{1,r}(\Omega)$ con $1 < r < \infty$. Pongamos

$$f = -\nu \Delta y + \text{grad } p, \quad g = \text{div } y.$$

Existe una constante C que sólo depende de N , Ω y r , tal que

$$(6.36) \quad \|y\|_{2,r;\Omega} + \|p\|_{1,r;\Omega} \leq C \left(\|f\|_{0,r;\Omega} + \|g\|_{1,r;\Omega} + \|y\|_{0,r;\Omega} + \|p\|_{0,r;\Omega} \right).$$

Demostración: Dado que Ω es de clase $W^{2,\infty}$, existen U_j , B_{R_j} y Ψ_j como en el aptdo. 2.3.1 y existe un abierto $U_{M+1} \subset\subset \Omega$, de manera que los U_j forman un recubrimiento de $\bar{\Omega}$; se considera una partición de la unidad en $\bar{\Omega}$ asociada a este recubrimiento, i.e., funciones η_j que, para cada j , cumplen lo siguiente:

$$\eta_j \in \mathcal{D}(U_j), \quad 0 \leq \eta_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^{M+1} \eta_j(x) = 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Entonces, se tiene para cada $x \in \Omega$ que

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{j=1}^{M+1} \eta_j(x) y(x) = \sum_{j=1}^{M+1} z_j(x), \\ p(x) &= \sum_{j=1}^{M+1} \eta_j(x) p(x) = \sum_{j=1}^{M+1} q_j(x). \end{aligned}$$

En primer lugar, consideramos el par (z_{M+1}, q_{M+1}) , que verifica las hipótesis del Teorema 6.55 en U_{M+1} . Debido a ello se tiene, después de aplicar el Lema 6.6, que

$$\|z_{M+1}\|_{2,r;U_{M+1}} + \|q_{M+1}\|_{1,r;U_{M+1}} \leq C \left(\|f\|_{0,r;\Omega} + \|g\|_{1,r;\Omega} + \|y\|_{0,r;\Omega} + \|p\|_{0,r;\Omega} \right).$$

En segundo lugar, consideramos los pares (z_j, q_j) , con $1 \leq j \leq M$. Para cada j , introducimos el cambio de sistema de referencia $x = \Psi_j(\xi)$, con lo que el par de funciones $(\tilde{z}_j, \tilde{q}_j)$ verifica las hipótesis del Teorema 6.60. En consecuencia, después de deshacer el cambio de variables, obtenemos

$$\|z_j\|_{2,r;U_j \cap \Omega} + \|q_j\|_{1,r;U_j \cap \Omega} \leq C \left(\|f\|_{0,r;\Omega} + \|g\|_{1,r;\Omega} + \|y\|_{0,r;\Omega} + \|p\|_{0,r;\Omega} \right).$$

Se tiene probado así el Teorema. ■

A continuación, comprobamos que cuando aumenta el exponente de sumabilidad de los datos, también aumenta el de la solución. Esto queda establecido en el siguiente

Teorema 6.62 *Si, en las hipótesis del Teorema 6.61, se tiene que*

$$f \in L^s(\Omega), \quad g \in W^{1,s}(\Omega),$$

para algún $s \in (r, \infty)$, entonces

$$(y, p) \in \left(W^{2,s}(\Omega) \cap W_0^{1,s}(\Omega) \right) \times W^{1,s}(\Omega)$$

y se verifica (6.36) con r sustituido por s .

Demostración: Con la misma notación que la utilizada en la Demostración del Teorema 6.61, bastará probar que para cada j se tiene que

$$(z_j, q_j) \in W^{2,s}(U_j \cap \Omega) \times W^{1,s}(U_j \cap \Omega).$$

Hacemos la Demostración en tres etapas:

i) $j = M + 1$; en adelante, no ponemos el subíndice por facilidad de notación. El par de funciones (z, q) pertenece a $W_0^{2,r}(U) \times W_0^{1,r}(U)$; por tanto, de la fórmula de representación (cf. la Observación i) del aptdo. 6.6.1), se tiene que

$$\begin{aligned} (z, q) &= \mathcal{H}[-\nu \Delta z + \text{grad } q] + \mathcal{J}[\text{div } z] \\ &= \mathcal{H}[\mathbf{F}] + \mathcal{J}[G], \end{aligned}$$

siendo

$$\mathbf{F} = \eta \mathbf{f} - \nu \Delta \mathbf{y} - 2\nu D\eta \cdot D\mathbf{y} + p D\eta,$$

$$G = D\eta \cdot \mathbf{y} + \eta g.$$

En virtud de los Teoremas de Inyección de Sobolev, \mathbf{F} y G están en $L^\sigma(U)$ y $W^{1,\sigma}(U)$, respectivamente, con $\frac{1}{\sigma} = \max \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{N}, \frac{1}{s} \right\}$. De las propiedades de los potenciales, se tiene además que

$$(z, q) \in W^{2,\sigma}(U) \times W^{1,\sigma}(U).$$

ii) $1 \leq j \leq M$; continuamos sin poner el subíndice. Haciendo el cambio de variables $x = \Psi(\xi)$, obtenemos el par (\tilde{z}, \tilde{q}) , que pertenece a $(W^{2,r}(B_R^+) \cap W_0^{1,r}(B_R^+)) \times W^{1,r}(B_R^+)$, tiene soporte contenido en $B_R \cap \overline{\mathbb{R}_+^N}$ y verifica

$$\mathcal{L}(\tilde{z}, \tilde{q}) = (\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{G})$$

c.p.d. en B_R^+ , siendo \mathcal{L} el operador de Stokes generalizado con coeficientes variables que resulta del cambio de variables. De nuevo gracias a la Inyección de Sobolev, se tiene que $\tilde{\mathbf{F}}$ y \tilde{G} pertenecen a $L^\sigma(B_R^+)$ y $W^{1,\sigma}(B_R^+)$, respectivamente.

Siendo \mathcal{L}^0 el operador de Stokes generalizado con coeficientes constantes asociado a \mathcal{L} y al punto $\xi_0 = 0$ (cf. ap. 6.3.2) y denotando

$$d_l = L_l(\tilde{z}, \tilde{q}) - \sum_{i=1}^N b_i(\xi) D_i \tilde{z}_l, \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$d_l^0 = L_l^0(\tilde{z}, \tilde{q}), \quad 1 \leq l \leq N,$$

$$\chi = L_{N+1}(\tilde{z}, \tilde{q}),$$

$$\chi^0 = L_{N+1}^0(\tilde{z}, \tilde{q}),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} L_l^0(\tilde{z}, \tilde{q}) &= (d_l^0 - d_l) + d_l, \quad 1 \leq l \leq N, \\ L_{N+1}^0(\tilde{z}, \tilde{q}) &= (\chi^0 - \chi) + \chi. \end{aligned}$$

Es inmediato que $d^0 - d \in L^r(B_R^+)$ y $\chi^0 - \chi \in W^{1,r}(B_R^+)$; además, otra vez debido a la Inyección de Sobolev, se tiene que $d \in L^\sigma(B_R^+)$.

Ahora, siendo $E = (e_{ij}(0))_{1 \leq i, j \leq N}$, se introduce el cambio de variables $t = \xi \cdot E = \Phi(\xi)$; obtenemos el par de funciones (z^*, q^*) , que pertenece a $(W^{2,r}(\Omega^*) \cap W_0^{1,r}(\Omega^*)) \times W^{1,r}(\Omega^*)$ (Ω^* es aquí el transformado de B_R^+ mediante Φ), tiene soporte compacto en $\Omega^* \cup S_*$ (S_* transformado de $B_R \cap \{(\xi', \xi_N) \in \mathbb{R}^N \mid \xi_N = 0\}$ por Φ) y verifica

$$\begin{aligned} -\nu \Delta z^* + \text{grad } q^* &= (d^0 - d) \circ \Phi + d \circ \Phi, \\ \text{div } z^* &= (\chi^0 - \chi) \circ \Phi + \chi \circ \Phi, \end{aligned}$$

c.p.d. en Ω^* . De las fórmulas de representación, se obtiene que

$$\begin{aligned} (z^*, q^*) &= \mathcal{H}[(d^0 - d) \circ \Phi] + \mathcal{J}[(\chi^0 - \chi) \circ \Phi] \\ &\quad + \mathcal{H}[d \circ \Phi] + \mathcal{J}[\chi \circ \Phi] + \mathcal{K}T^*, \end{aligned}$$

c.p.d. en Ω^* , donde T^* es la traza sobre $\partial\Omega^*$ del tensor de componentes $\tau_{ij} = -q^* \delta_{ij} + \nu D_i z_j^*$. Haciendo uso de las propiedades de los potenciales y de los Teoremas de inyección de Sobolev, y deshaciendo el último cambio de variables, se llega a que

$$(\tilde{z}, \tilde{q}) = T(\tilde{z}, \tilde{q}) + h,$$

con

$$T(\tilde{z}, \tilde{q}) = \mathcal{H}[(d^0 - d) \circ \Phi] \circ \Phi^{-1} + \mathcal{J}[(\chi^0 - \chi) \circ \Phi] \circ \Phi^{-1}$$

y

$$h \in W^{2,\sigma}(B_R^+) \times W^{1,\sigma}(B_R^+).$$

De los resultados sobre estimaciones de los potenciales, se deduce que el operador T es lineal y acotado de $W^{2,\rho}(B_R^+) \times W^{1,\rho}(B_R^+)$ en sí mismo; además, existe $R_0 > 0$ tal que si $R < R_0$, entonces T es contractivo. Se deduce de ello que la ecuación

$$(w, \pi) = T(w, \pi) + h$$

posee, para cada $\rho \in (1, \sigma]$, un único punto fijo en $W^{2,\rho}(B_R^+) \times W^{1,\rho}(B_R^+)$, siempre que los entornos \mathcal{U} se tomen de forma que los correspondientes B_R^+ verifiquen $R \leq R_0$; además, este punto fijo es independiente de ρ , pues en caso contrario dejaría de ser único para algún valor de ρ .

Dado que el par (\tilde{z}, \tilde{q}) es punto fijo de la ecuación anterior en $W^{2,r}(B_R^+) \times W^{1,r}(B_R^+)$, lo es también en $W^{2,\rho}(B_R^+) \times W^{1,\rho}(B_R^+)$, cualquiera que sea $\rho \in (1, \sigma]$. Se deduce de ello que

$$(\tilde{z}, \tilde{q}) \in W^{2,\sigma}(B_R^+) \times W^{1,\sigma}(B_R^+)$$

y, por tanto,

$$(z, q) \in W^{2,\sigma}(\mathcal{U} \cap \Omega) \times W^{1,\sigma}(\mathcal{U} \cap \Omega).$$

iii) Se tiene de i) y ii) que

$$(y, p) \in \left(W^{2,\sigma}(\Omega) \cap W_0^{1,\sigma}(\Omega) \right) \times W^{1,\sigma}(\Omega),$$

con $\frac{1}{\sigma} = \max \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{N}, \frac{1}{s} \right\}$.

Ahora, si $\sigma = s$, se tiene el Teorema. Si, por el contrario, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{r} - \frac{1}{N}$, repitiendo el proceso se obtiene

$$(y, p) \in \left(W^{2,\sigma_1}(\Omega) \cap W_0^{1,\sigma_1}(\Omega) \right) \times W^{1,\sigma_1}(\Omega),$$

con $\frac{1}{\sigma_1} = \max \left\{ \frac{1}{r} - \frac{2}{N}, \frac{1}{s} \right\}$. Después de repetir el proceso k veces, siendo k el menor entero ≥ 1 tal que $\max \left\{ \frac{1}{r} - \frac{k}{N}, \frac{1}{s} \right\} = \frac{1}{s}$, queda demostrado el Teorema. ■

6.9 Existencia de solución fuerte

En esta Sección, utilizando las estimaciones "a posteriori" probadas anteriormente, demostramos la existencia de solución fuerte del problema de Stokes.

6.9.1 Unicidad de solución

En primer lugar, probamos la unicidad de solución fuerte. Consideremos de nuevo el problema de Stokes

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (y, p) \text{ tales que} \\ -\nu \Delta y + \text{grad } p = f \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } y = g \quad \text{en } \Omega, \\ y = y_\Gamma \text{ sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Se tiene el siguiente

Teorema 6.63 *Supongamos que Ω es de clase $W^{2,\infty}$ y que*

$$f \in L^r(\Omega), \quad g \in W^{1,r}(\Omega), \quad y_\Gamma \in W^{2-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega),$$

donde $1 < r < \infty$. Supongamos que

$$\int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} \mathbf{y}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Caso de existir un par

$$(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{W}^{2,q}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega)/\mathbb{R}$$

para algún $q \in (1, \infty)$ que sea solución de (S), éste es único.

Demostración: Supongamos que existe otro par

$$(\mathbf{z}, q) \in \mathbf{W}^{2,s}(\Omega) \times W^{1,s}(\Omega)/\mathbb{R},$$

con $1 < s < \infty$, que es solución de (S). Por supuesto, tanto (\mathbf{y}, p) como (\mathbf{z}, q) satisfacen las e.d.p. de (S) c.p.d. en Ω . La diferencia $(\mathbf{w}, \pi) = (\mathbf{y}, p) - (\mathbf{z}, q)$ pertenece a $(\mathbf{W}^{2,\rho}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,\rho}(\Omega)) \times W^{1,\rho}(\Omega)/\mathbb{R}$ con $\rho = \min\{q, s\}$, y verifica

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{w} + \text{grad } \pi &= 0, \\ \text{div } \mathbf{y} &= 0, \end{aligned}$$

c.p.d. en Ω . Por el Teorema 6.62, debe tenerse que

$$(\mathbf{w}, \pi) \in (\mathbf{W}^{2,\rho}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,\rho}(\Omega)) \times W^{1,\rho}(\Omega)/\mathbb{R},$$

para cada $\rho \in (1, \infty)$. En particular, (\mathbf{w}, π) está en $(\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$; además, se trata de la única solución débil del problema de Stokes homogéneo, de donde $(\mathbf{w}, \pi) = (0, 0)$, es decir, $(\mathbf{y}, p) = (\mathbf{z}, q)$. ■

6.9.2 Existencia de solución fuerte del problema de Stokes

Tenemos ya las herramientas necesarias para probar la existencia de solución fuerte. Primero probamos el siguiente

Lema 6.64 Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{2,\infty}$ y sea $r \in (1, +\infty)$. Existe una constante C que sólo depende de N , r y Ω tal que, para todo par

$$(\mathbf{y}, p) \in (\mathbf{W}^{2,r}(\Omega) \cap \mathbf{W}_0^{1,r}(\Omega)) \times W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R},$$

se tiene

$$\|\mathbf{y}\|_{2,r;\Omega} + \|p\|_{W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|\mathbf{f}\|_{0,r;\Omega} + \|g\|_{1,r;\Omega} \right),$$

donde

$$\mathbf{f} = -\nu\Delta\mathbf{y} + \text{grad } p, \quad g = \text{div } \mathbf{y}.$$

Demostración: Supongamos que no es cierta la desigualdad. Entonces, para todo entero positivo m existe un par

$$(y_m, p_m) \in \left(W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \right) \times W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}$$

que verifica

$$\|y_m\|_{2,r;\Omega} + \|p_m\|_{W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} > m \left(\|f_m\|_{0,r;\Omega} + \|g_m\|_{1,r;\Omega} \right),$$

donde

$$f_m = -\nu \Delta y_m + \text{grad } p_m, \quad g_m = \text{div } y_m.$$

De la desigualdad anterior, junto con (6.36) aplicado a (y_m, p_m) , se tiene que, para m suficientemente grande,

$$\|f_m\|_{0,r;\Omega} + \|g_m\|_{1,r;\Omega} \leq \frac{C}{m-C} \left(\|y_m\|_{0,r;\Omega} + \|p_m\|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}} \right).$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad anterior por

$$\tau_m = \|y_m\|_{0,r;\Omega} + \|p_m\|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}},$$

y poniendo

$$z_m = \frac{y_m}{\tau_m}, \quad q_m = \frac{p_m}{\tau_m},$$

se tiene que

$$\|z_m\|_{0,r;\Omega} + \|q_m\|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}} = 1,$$

para todo m y, además,

$$(6.37) \quad -\nu \Delta z_m + \text{grad } q_m \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \text{div } z_m \rightarrow 0,$$

en $L^r(\Omega)$ y $W^{1,r}(\Omega)$, respectivamente, cuando $m \rightarrow \infty$.

Aplicando de nuevo (6.36) a (z_m, q_m) , se obtiene ahora que

$$\|z_m\|_{2,r;\Omega} + \|q_m\|_{W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C \left(\|-\nu \Delta z_m + \text{grad } q_m\|_{0,r;\Omega} + \|\text{div } z_m\|_{1,r;\Omega} + 1 \right);$$

dado que el segundo miembro de la desigualdad anterior converge a 1 cuando $m \rightarrow \infty$, se tiene que las sucesiones $(z_m)_{m \geq 1}$ y $(q_m)_{m \geq 1}$ están uniformemente acotadas en $W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ y $W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}$, respectivamente; por tanto, existen subsucesiones, también denotadas por z_m y q_m , que verifican:

$$\begin{aligned} z_m &\rightharpoonup z \text{ en } W^{2,r}(\Omega) \quad \text{y} \quad z_m \rightarrow z \text{ en } W_0^{1,r}(\Omega), \\ q_m &\rightharpoonup q \text{ en } W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R} \quad \text{y} \quad q_m \rightarrow q \text{ en } L^r(\Omega)/\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se deduce que

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{z}_m + \text{grad } q_m &\rightarrow -\nu \Delta \mathbf{z} + \text{grad } q, \\ \text{div } \mathbf{z}_m &\rightarrow \text{div } \mathbf{z}, \end{aligned}$$

en $L^r(\Omega)$ y $W^{1,r}(\Omega)$, respectivamente, cuando $m \rightarrow \infty$ y que

$$(6.38) \quad \|\mathbf{z}\|_{0,r;\Omega} + \|q\|_{L^r(\Omega)/\mathbb{R}} = 1.$$

Por otra parte, de (6.37) se obtiene que

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{z} + \text{grad } q &= 0, \\ \text{div } \mathbf{z} &= 0, \end{aligned}$$

de lo cual, junto con $\mathbf{z} \in W_0^{1,r}(\Omega)$ y la unicidad de solución, se deduce $(\mathbf{z}, q) = (0, 0)$; obviamente, algo que está en contradicción con (6.38). ■

Ahora probamos el resultado de existencia siguiente:

Teorema 6.65 *Supongamos que Ω es de clase $W^{2,\infty}$ y que*

$$\mathbf{f} \in L^r(\Omega), \quad g \in W^{1,r}(\Omega), \quad \mathbf{y}_\Gamma \in W^{2-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega),$$

donde $1 < r < \infty$. Supongamos que

$$\int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} \mathbf{y}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Entonces, existe una única solución de (S),

$$(\mathbf{y}, p) \in W^{2,r}(\Omega) \times W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R},$$

que verifica

$$\|\mathbf{y}\|_{2,r;\Omega} + \|p\|_{W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C(N, \Omega, r) \left(\|\mathbf{f}\|_{0,r;\Omega} + \|g\|_{1,r;\Omega} + \|\mathbf{y}_\Gamma\|_{2-\frac{1}{r},r;\Omega} \right).$$

Demostración: i) Supongamos en primer lugar que $\mathbf{y}_\Gamma = 0$. Si $r > 2$, entonces $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ y $g \in H^1(\Omega)$, por lo que, en virtud de los resultados de regularidad de la Sección 6.4, existe un único par

$$(\mathbf{y}, p) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

solución de (S). Del Teorema 6.62, se obtiene además que

$$(\mathbf{y}, p) \in \left(W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \right) \times W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}.$$

Si $1 < r < 2$, se considera una sucesión (f_m) de funciones de $L^2(\Omega)$ que converge a f en $L^r(\Omega)$ y una sucesión (g_m) en $H^1(\Omega)$ que converge a g en $W^{1,r}(\Omega)$. Para cada $m \geq 1$, sea $(y_m, p_m) \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \right) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ la correspondiente solución de (S) cuando se ponen f_m y g_m en los segundos miembros. Se verifica que

$$(y_m, p_m) \in \left(W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \right) \times W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R};$$

además, utilizando el Lema 6.64, se deduce fácilmente que (y_m, p_m) posee una sub-sucesión débilmente convergente hacia un par

$$(y, p) \in \left(W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \right) \times W^{1,r}(\Omega)/\mathbb{R}$$

que es solución de (S) .

ii) Cuando $y_\Gamma \neq 0$, se introduce una función $\Phi \in W^{2,r}(\Omega)$ tal que $\Phi = y_\Gamma$ sobre $\partial\Omega$, y el problema auxiliar

$$\begin{aligned} -\nu \Delta z + \operatorname{grad} p &= f + \nu \Delta \Phi \text{ en } \Omega, \\ \operatorname{div} z &= g - \operatorname{div} \Phi \text{ en } \Omega, \\ z &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

al cual se aplica el apartado i). El par (y, p) , con $y = z + \Phi$, verifica las condiciones del Teorema. ■

Con un razonamiento análogo al utilizado para la Demostración del Teorema 6.62, se demuestra el siguiente

Teorema 6.66 *Supongamos que Ω es de clase $W^{m+2,\infty}$ y que*

$$f \in W^{m,r}(\Omega), \quad g \in W^{m+1,r}(\Omega), \quad y_\Gamma \in W^{m+2-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega),$$

donde $1 < r < \infty$. Supongamos que

$$\int_{\Omega} g = \int_{\partial\Omega} y_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Entonces, existe una única solución de (S) ,

$$(y, p) \in W^{m+2,r}(\Omega) \times W^{m+1,r}(\Omega)/\mathbb{R},$$

que verifica

$$\begin{aligned} &\|y\|_{m+2,r;\Omega} + \|p\|_{W^{m+1,r}(\Omega)/\mathbb{R}} \\ &\leq C(N, \Omega, m, r) \left(\|f\|_{m,r;\Omega} + \|g\|_{m+1,r;\Omega} + \|y_\Gamma\|_{m+2-\frac{1}{r},r;\Omega} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.10 El problema de Navier-Stokes: Existencia y regularidad de la solución

En esta Sección, consideramos las ecuaciones de Navier-Stokes,

$$(N-S) \quad \begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \sum_{j=1}^N y_j D_j \mathbf{y} + \text{grad } p &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{y} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y}_\Gamma \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

(cf. Sección 6.2), recordamos un resultado de existencia y unicidad de solución débil y probamos un resultado de regularidad de la solución débil en función de la regularidad de los datos.

6.10.1 Existencia de solución

Comenzamos por estudiar la existencia de solución de (N-S). Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N (recordemos que $N = 2$ ó 3) de clase $W^{1,\infty}$ y consideremos el espacio

$$W = \{\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{z} = 0\}$$

y el espacio

$$V = \{\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{z} = 0\},$$

definido en el apartado 6.1.6 y que sabemos que tiene estructura de espacio de Hilbert cuando se le dota del producto escalar

$$a(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (D\mathbf{y}, D\mathbf{z}) = \int_{\Omega} D\mathbf{y} \cdot D\mathbf{z} \, dx;$$

consideremos también la siguiente forma trilineal

$$b(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} y_i D_i z_j w_j \, dx.$$

En [32], se prueba el siguiente

Lema 6.67 i) *Existe una constante C que sólo depende de Ω tal que para todo $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, se verifica*

$$|b(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})| \leq C \|\mathbf{y}\|_{1;\Omega} \|\mathbf{z}\|_{1;\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1;\Omega}.$$

ii) Dados $y, z, w \in W$ de los que al menos uno de ellos pertenece a V , se verifica

$$b(y, z, w) = -b(y, w, z).$$

iii) Dados $y, z \in W$ tales que $y \in V$ ó $z \in V$, se verifica

$$b(y, z, z) = 0. \blacksquare$$

Con la notación anterior, se prueba en [32] (cf. también [25],[29]) que una formulación débil, en cierto sentido equivalente, para (N-S) viene dada por lo que sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (y, p) \in W \times L^2(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tal que} \\ \nu a(y, z) + b(y, y, z) - \int_{\Omega} p \operatorname{div} z \, dx = \langle f, z \rangle \quad \forall z \in V, \\ y = y_{\Gamma} \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Necesitaremos el siguiente resultado de levantamiento de trazas (cf. [32], [25],[29])

Lema 6.68 Dada una función $y_{\Gamma} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} y_{\Gamma} \cdot n \, dS = 0,$$

y un número $\epsilon > 0$ cualquiera, existe una función $w \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\operatorname{div} w = 0, \quad w = y_{\Gamma} \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

$$|b(z, w, z)| \leq \epsilon |z|_{1;\Omega}^2 \quad \forall z \in V. \blacksquare$$

Con el Lema anterior se prueba el siguiente

Teorema 6.69 Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N con $N = 2$ ó 3 de clase $W^{1,\infty}$. Dadas $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $y_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Omega)$, verificando

$$\int_{\partial\Omega} y_{\Gamma} \cdot n \, dS = 0,$$

existe al menos un par $(y, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ solución de (N-S). Además, existe una constante ν_0 que sólo depende de Ω, f e y_{Γ} tal que, si $\nu > \nu_0$, entonces la solución es única. \blacksquare

6.10.2 Regularidad de la solución

Utilizando el resultado de existencia de solución anterior y los resultados de regularidad de la solución débil del problema de Stokes, se prueba el siguiente

Teorema 6.70 Sean m un entero ≥ 0 , $r \in (1, \infty)$, Ω de clase $W^{m+2, \infty}$, $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{m, r}(\Omega) \cap \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ e $\mathbf{y}_\Gamma \in \mathbf{W}^{m+\frac{3}{2}, r}(\Omega)$, tales que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{y}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

Entonces, cualquier solución (\mathbf{y}, p) de (N-S) pertenece a $\mathbf{W}^{m+2, r}(\Omega) \times W^{m+1, r}(\Omega)$.

Demostración: Es suficiente probarlo en el caso en que $\mathbf{y}_\Gamma = 0$, pues en otro caso basta aplicar un razonamiento análogo al del Teorema 6.36. Además, sólo hacemos la Demostración en el caso $m = 0$, $r = 3$ y $N = 3$, siendo análoga en cualquier otro caso. Para ello, escribimos el problema de Navier-Stokes en la forma

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{y} + \text{grad } p &= \mathbf{F} && \text{en } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{y} &= 0 && \text{en } \Omega, \\ \mathbf{y} &= 0 && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

con $\mathbf{F} = \mathbf{f} - \sum_{j=1}^N y_j D_j \mathbf{y}$. Dado que la solución (\mathbf{y}, p) verifica $\mathbf{y} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, se tiene, por los Teoremas de Inyección de Sobolev, que $\mathbf{y} \in \mathbf{L}^6(\Omega)$; aplicando la desigualdad de Hölder, se prueba que $\sum_{j=1}^N y_j D_j \mathbf{y} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$, con lo que $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^{3/2}(\Omega)$. Entonces, en virtud del Teorema 6.65, se tiene que $(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{W}^{2, 3/2}(\Omega) \times W^{1, 3/2}(\Omega)$. Repitiendo el razonamiento se obtiene $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^3(\Omega)$, con lo que $(\mathbf{y}, p) \in \mathbf{W}^{2, 3}(\Omega) \times W^{1, 3}(\Omega)$, y se tiene así probado el Teorema en este caso. ■

6.11 Comentarios finales

En esta Sección comentamos brevemente el origen de las técnicas utilizadas en las Demostraciones de los resultados probados en el Capítulo.

Las Demostraciones de la Sección 6.1 son clásicas. Sólo destacamos la introducción del espacio $W^r(\text{div}; \Omega)$ y las propiedades por él verificadas; la demostración de estas propiedades se ha hecho análogamente a como se hacen en [25] para el espacio $H(\text{div}; \Omega)$.

Las Demostraciones del resultado de existencia de solución débil del problema de Stokes (Sección 6.2) son diferentes adaptaciones de otras clásicas, que pueden verse, por ejemplo, en [25], [29], [52].

Los operadores de Stokes generalizados han sido introducidos por similitud con los operadores elípticos que generalizan al operador de Laplace.

La Demostración de la regularidad de la solución débil de una ecuación elíptica haciendo uso de los cocientes de diferencias y la formulación débil es bien conocida. En [16], se demuestra un resultado de regularidad L^2 de la solución débil del problema de Navier-Stokes con hipótesis de regularidad sobre Ω más fuertes que las aquí utilizadas, basándose en resultados previos de [24]. Nosotros, en un primer intento, pretendimos adaptar dicha Demostración a nuestro caso; entonces, observamos que se podía llegar al mismo resultado mediante la formulación de un problema mixto para los cocientes de diferencias, lo cual clarifica el argumento.

Las soluciones fundamentales del sistema de Stokes y las fórmulas de representación para funciones con divergencia nula han sido introducidas en [29]; aquí, hemos generalizado estas fórmulas, escribiéndolas en el caso de funciones cuya divergencia no es necesariamente nula, que es el que necesitamos contemplar en nuestro estudio posterior.

Asimismo, las Definiciones de los potenciales hidrodinámicos han sido esencialmente tomadas de [29]. En cuanto a los resultados de existencia y regularidad del potencial de volumen y del operador \mathcal{J} , hemos utilizado técnicas similares a las de [26] para el potencial Newtoniano; en lo que se refiere al potencial de capa simple, las Demostraciones de los resultados expuestos son totalmente originales.

Las Demostraciones de los resultados relativos a estimaciones en el interior, hasta la frontera y en el dominio, así como el de existencia de solución fuerte del problema de Stokes, son similares a las utilizadas en [26] para el operador de Laplace. No obstante, las diferencias entre este operador y el operador de Stokes llevan a ciertas dificultades que hacen necesarios cambios importantes en el argumento.

Para finalizar, indiquemos que la técnica utilizada para la Demostración de regularidad de solución del problema de Navier-Stokes a partir de resultados que conciernen al problema de Stokes es bien conocida.

CAPITULO 7

Aplicación II: Obstáculo de arrastre mínimo en régimen de Navier-Stokes

En este Capítulo, aplicamos los resultados de los Capítulos anteriores en el marco de la determinación de cuerpos aerodinámicos (obstáculos, carenas) que opongan resistencia mínima al arrastre cuando se desplazan a velocidad constante h en un fluido viscoso incompresible. Esta cuestión ha sido tratada, entre otros, por O. Pironneau, quien calcula la diferencial-Gâteaux de una aproximación de la resistencia por un método de desarrollo limitado respecto de las “variaciones normales” del dominio (cf. [40], [39]), por F. Murat y J. Simon ([35]), que calculan formalmente la derivada-Gâteaux de dicha aproximación y por E. Fernández Cara ([18], [19], [20]), que estudia la existencia de carena óptima y aspectos numéricos del problema. Más recientemente, el problema ha sido considerado desde un punto de vista riguroso por J. Simon en el caso de un flujo en régimen de Stokes (cf. [48]) y por E. Fernández-Cara, J. Simon y el autor en el caso de flujos de Navier-Stokes (cf. [3], [4], [5]).

En primer lugar, planteamos el problema y analizamos la existencia, unicidad y regularidad del estado, indicando de qué dos maneras (las más interesantes) puede ser optimizado el obstáculo. En la Sección 7.2, probamos, bajo hipótesis de regularidad para los dominios admisibles, la existencia de derivada total del estado; luego, se deduce la existencia de derivada local y el problema de contorno satisfecho por ésta. En la Sección 7.3, probamos la existencia de derivada de la energía disipada en el fluido, que es una buena aproximación de la resistencia que el cuerpo opone al arrastre. En la Sección 7.4, probamos la existencia de derivada del arrastre propiamente dicho. Por último, indicamos algunas de las dificultades que se plantean cuando no se impone regularidad para los dominios admisibles.

7.1 Planteamiento del problema

Sean D un abierto acotado de \mathbb{R}^N ($N = 2$ ó 3) y Δ un abierto que verifica $\Delta \subset\subset D$; se supone que las fronteras ∂D y $\partial \Delta$ son de clase $W^{2,\infty}$ y se considera el abierto $\Omega = D \setminus \bar{\Delta}$.

Sea

$$W = \{u \mid u \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N), u|_{\partial D} \equiv 0, \|u\|_2 \leq \epsilon_2\}$$

y consideremos la familia de abiertos

$$\Omega_{ad} = \{\Omega + u \mid u \in W\}.$$

Si ϵ_2 ha sido elegido suficientemente pequeño (lo cual será admitido en adelante) entonces $\Omega + u = D \setminus \overline{\Delta + u}$ es un abierto acotado de \mathbb{R}^N de clase $W^{2,\infty}$. Además, existe un abierto \mathcal{O} tal que

$$\Delta + u \subset\subset \mathcal{O} \subset\subset D.$$

Aquí, se supone que D es la región ocupada por el fluido y, para cada $u \in W$ fijo, $\Delta + u$ es la zona que ocupa un obstáculo; también se supone que $med(\Delta)$ es muy pequeña frente a $med(D)$.

Para cada $u \in W$, se considera el problema de Navier-Stokes

$$(7.1) \quad \begin{cases} -\nu \Delta y(u) + (y(u) \cdot \nabla) y(u) + \text{grad } p = 0 & \text{en } D \setminus \overline{\Delta + u}, \\ \text{div } y(u) = 0 & \text{en } D \setminus \overline{\Delta + u}, \\ y(u) = 0 & \text{sobre } \partial \Delta + u, \\ y(u) = g & \text{sobre } \partial D. \end{cases}$$

Fijado u , i.e. para un obstáculo dado, la solución $(y(u), p(u))$ de este problema, cuando existe, proporciona el campo de velocidades y la distribución de presiones del fluido, con sistema de referencia fijo respecto de $\overline{\Delta + u}$; aquí, ν es la viscosidad del fluido (una constante positiva) y $g = -h$, siendo h la velocidad del obstáculo, que se supone constante. El par $(y(0), p(0))$ se denota simplemente (y, p) .

En estas condiciones, la resistencia al arrastre que genera $\overline{\Delta + u}$ viene dada por

$$J(u) = -g \cdot \left(\int_{\partial \Delta + u} (-p(u) Id + \sigma(y(u))) \cdot n(u) dS \right),$$

cuando esta integral tiene sentido. Aquí, Id denota la matriz identidad de orden N , $\sigma(y(u))$ es la matriz de componentes

$$\sigma_{ij}(y(u)) = \nu(D_j y_i(u) + D_i y_j(u)), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

y $n(u)$ es el vector normal unitario sobre $\partial \Delta + u$ exterior a $D \setminus \overline{\Delta + u}$.

El problema de diseño óptimo que planteamos corresponde a la búsqueda de carenas óptimas; más precisamente, nos interesará la existencia y caracterización de $u^* \in W$, tal que

$$J(u^*) \leq J(u) \quad \forall u \in W.$$

En particular, en esta Memoria nos centraremos en el estudio de la existencia y cálculo de la derivada-Fréchet de la función

$$u \longrightarrow J(u).$$

De la expresión de dicha derivada, podrán obtenerse consecuencias que caractericen los u^* óptimos y que podrán ser utilizadas para la puesta en práctica de algoritmos iterados de cálculo de carenas óptimas.

Antes de probar la existencia de derivada del arrastre, veamos bajo qué condiciones el problema está bien planteado.

7.1.1 Existencia, unicidad y regularidad del estado del sistema

En este apartado, adoptamos la notación de la Sección 6.10. Recordemos que, para cada dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se denota

$$V = \{z \in H_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} z = 0\},$$

$$a(y, z) = \int_{\Omega} Dy \cdot Dz \, dx$$

y

$$b(y, z, w) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} y_i D_i z_j w_j \, dx.$$

Tomemos $\Omega = D \setminus \overline{\Delta}$. En [35] se prueba el siguiente

Lema 7.1 *Dados $y, z, w \in H^1(\Omega)$ con divergencia nula, trazas también nulas sobre $\partial\Delta$ y trazas constantes sobre ∂D , se cumple la desigualdad*

$$(7.2) \quad |b(y, z, w)| \leq \gamma (|y|_{1;\Omega} + \|y\|_{0;\partial D}) |z|_{1;\Omega} (|w|_{1;\Omega} + \|w\|_{0;\partial D}),$$

donde γ es una constante que sólo depende de D . ■

También se prueba el siguiente resultado de levantamiento de trazas:

Existe una función G que verifica:

$$(7.3) \quad \begin{cases} G \in H^2(D), & G \equiv 0 \text{ en } \mathcal{O}, \operatorname{div} G = 0 \text{ en } D, G = g \text{ sobre } \partial D \text{ y} \\ \|G\| \leq \beta |g|, & \text{donde la constante } \beta \text{ sólo depende de } D \text{ y de } \mathcal{O}. \end{cases}$$

Con este resultado de levantamiento de trazas, haciendo uso de los resultados de la Sección 6.10, se tiene que, para cada $u \in W$, existe un par

$$(y(u), p(u)) \in H^2(D \setminus \overline{\Delta + u}) \times H^1(D \setminus \overline{\Delta + u})/\mathbb{R}$$

que es solución fuerte de (7.1). De aquí, se implica que, para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, $J(\mathbf{u})$ está bien definido.

Además, F.Murat y J.Simon prueban en [35] que, si

$$(7.4) \quad |\mathbf{g}| < \nu\alpha,$$

entonces la solución de (7.1) es única y verifica

$$(7.5) \quad \|\mathbf{y}(\mathbf{u})\| < \frac{\nu}{\gamma}.$$

Aquí, se supone $\alpha = \min \{ \eta^*/\gamma, 1/(\beta\gamma) \}$ y η^* es la menor solución positiva de la ecuación

$$1 - 2\eta - \beta(1 + \beta)\eta^2 - \beta^2\eta^3 = 0$$

(obsérvese que las constantes γ y α sólo dependen de D y \mathcal{O}).

7.1.2 Aproximación del arrastre

Las ecuaciones de Navier-Stokes proporcionan el campo de velocidades y la distribución de presión de un fluido viscoso incompresible que ocupa la región D de \mathbf{R}^N , en presencia de un obstáculo ó carena $\bar{\Delta}$. La velocidad "lejos de Δ " se supone igual a \mathbf{g} y, por definición (cf. [39] y las referencias allí dadas), la resultante de las fuerzas ejercidas por el fluido sobre $\partial\Delta$ es

$$\mathbf{F}_\Delta = - \int_{\partial\Delta} (-p \text{Id} + \sigma(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Se llama fuerza de sustentación de Δ en la dirección $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^N$ a la cantidad

$$P_{\Delta, \mathbf{J}} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{F}_\Delta \cdot \mathbf{J}$$

y, cuando \mathbf{g} es un vector constante de \mathbf{R}^N , lo que es nuestro caso, el arrastre de Δ es la fuerza de sustentación de Δ en la dirección \mathbf{g} :

$$T_\Delta = \frac{1}{|\mathbf{g}|} \mathbf{F}_\Delta \cdot \mathbf{g}.$$

Sea $\xi = \xi(\Delta)$ la energía instantánea disipada en el fluido. Se tiene que, salvo un factor multiplicativo,

$$\xi(\Delta) = \frac{1}{2\nu} \int_{D \setminus \Delta} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(\mathbf{y})^2.$$

Por otro lado, admitida la existencia de una superficie S que encierre a Δ y sobre la cual $y \simeq g$, lo que es físicamente aceptable cuando las dimensiones de D son grandes respecto de las de Δ , se tiene que

$$\xi(\Delta) = F_{\Delta} \cdot g + \theta(d) + \text{términos independientes de } \Delta,$$

donde

$$d = \text{med}(\Delta)/\text{med}(D).$$

En consecuencia, si en nuestro problema de diseño óptimo sustituyéramos la función $u \rightarrow J(u)$ por

$$u \rightarrow \frac{1}{2} \int_{D \setminus (\Delta + u)} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(y(u))^2,$$

obtendríamos un nuevo problema cuya solución parece razonable que constituya una buena aproximación de la del problema inicial.

7.1.3 Existencia de carena óptima

En [35], se prueba que, cambiando la anterior familia de dominios admisibles por

$$\Omega_{ad} = \{ \Omega + u \mid u \in W, \text{vol}(\Omega + u) = a \},$$

donde $a > 0$ es una constante dada (Ω y W están dados al principio de esta Sección) y considerando la función de coste

$$E(u) = \frac{1}{2\nu} \int_{D \setminus (\Delta + u)} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(y(u))^2$$

(la energía disipada en el fluido), existe al menos una solución $\Omega^* \in \Omega_{ad}$ del correspondiente problema de diseño óptimo.

Más generalmente, en [18] se supone dada una familia Ω_{ad} de dominios admisibles y se considera la familia de cerrados

$$\mathcal{S} = \{ \bar{\Delta} \mid \Omega \setminus \bar{\Delta} \in \Omega_{ad} \},$$

y se hace la hipótesis siguiente:

(H) $\left\{ \begin{array}{l} \text{De toda sucesión } (S_k) \text{ de cerrados de } \mathcal{S} \\ \text{se puede extraer una subsucesión } (S_{k'}) \\ \text{convergente en el sentido de la distancia de Hausdorff hacia un} \\ S \in \mathcal{S}, \text{ tal que las funciones características} \\ \chi_{k'} \text{ de los correspondientes } D \setminus S_{k'} \\ \text{convergen en } L^\infty(D) \text{ - débil } * \\ \text{hacia una función } \chi \text{ nula c.p.d. en } S. \end{array} \right.$

Para la misma función de coste considerada anteriormente, se prueba en [18] el resultado siguiente:

Teorema 7.2 *Si S satisface la hipótesis (H), entonces existe al menos una solución del correspondiente problema de diseño óptimo. ■*

Obsérvese que, si $N = 2$, la hipótesis (H) es satisfecha, por ejemplo, en el caso siguiente (aquí $k > 0$ es una constante dada):

$$\Omega_{ad} = \{ \Omega + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbf{W}, \int_{\partial\Delta + \mathbf{u}} dS = k \}$$

(para detalles, cf. [40], [18]).

7.2 Existencia de derivada del par velocidad-presión

En lo que queda de Capítulo, suponemos que se verifica (7.4). Con la notación de la Sección precedente, se tiene en primer lugar el siguiente resultado sobre existencia de derivada total de la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u}))$:

Teorema 7.3 *La aplicación*

$$\begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}), \text{ definida en un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \\ \text{con valores en } \mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times (H^1(D \setminus \Delta)/\mathbf{R}), \end{cases}$$

es derivable-Fréchet en 0. Su derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} será denotada $(\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{u}), \dot{p}(\mathbf{u}))$.

■

Nota: Este resultado, análogo al de existencia de derivada total del potencial eléctrico (cf. Cap. 5), se prueba también haciendo uso del Teorema de la Función Implícita. Sin embargo, aquí existe una dificultad añadida, relacionada con el hecho de que $\operatorname{div} \mathbf{y}(\mathbf{u})$ pertenece al espacio $L_0^2(\Omega + \mathbf{u})$ que, si bien es el adecuado, posee dependencia no local de \mathbf{u} . Esta dificultad se va a salvar introduciendo para cada \mathbf{u} el espacio

$$Y_{\mathbf{u}} = \{ \phi \in H^1(D \setminus \bar{\Delta}) \mid \int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det [D_j(I + \mathbf{u})_i]| \phi dx = 0 \}$$

y un isomorfismo apropiado de $Y_{\mathbf{u}}$ sobre Y_0 . ■

Demostración del Teorema 7.3: Se aplica el Teorema de la Función Implícita en un entorno de $(0; \mathbf{y}(0), p(0))$. La función considerada, $F(\mathbf{u}; \mathbf{v}, r)$, toma en ese punto el valor cero.

i) Ecuaciones satisfechas por $(\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u})$.

De (7.1), se tiene que

$$(7.6) \quad (-\nu \Delta \mathbf{y}(\mathbf{u}) + (\mathbf{y}(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{y}(\mathbf{u}) + \text{grad } p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } D \setminus \bar{\Delta},$$

$$(7.7) \quad (\nabla \cdot \mathbf{y}(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } D \setminus \bar{\Delta},$$

$$(7.8) \quad \mathbf{y}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = 0 \quad \text{sobre } \partial \Delta,$$

$$(7.9) \quad \mathbf{y}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = \mathbf{g} \quad \text{sobre } \partial D.$$

Usando el Lema 3.2, las ecuaciones (7.6) y (7.7), se escriben como sigue:

$$(7.10) \quad -\nu \sum_{i,j,k=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j \left(M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (\mathbf{y}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \right) \\ + \sum_{i=1}^N (y_i(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \sum_{k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (\mathbf{y}(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) \\ + \sum_{k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (p(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) = 0 \quad \text{en } D \setminus \bar{\Delta},$$

$$(7.11) \quad \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (y_i(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})) = 0 \quad \text{en } D \setminus \bar{\Delta}.$$

Aquí, $M_{ij}(\mathbf{u})$ es la componente (i, j) de la matriz

$$[D_j(I + \mathbf{u})_i]^{-t}.$$

ii) Determinación de la función implícita.

De (7.8) y (7.9), obtenemos que $(\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u})$ está siempre en

$$E = \{ \eta = (\mathbf{v}, r) \mid \mathbf{y} \in \mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}), \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial \Delta, \mathbf{v} = \mathbf{g} \text{ sobre } \partial D; r \in H^1(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbf{R} \},$$

que es una variedad afín de $\mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times (H^1(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbf{R})$ asociada al espacio

$$E_0 = (\mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}) \cap \mathbf{H}_0^1(D \setminus \bar{\Delta})) \times (H^1(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbf{R}).$$

Por tanto, si \mathbf{G} es una función que verifica (7.3) y escribimos $\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{G}, 0)$, entonces $E = \tilde{\mathbf{G}} + E_0$. Por consiguiente, se utilizará F definida en un abierto de $W \times E_0$.

Para cada $\eta = (\mathbf{v}, r) \in E_0$, la función

$$\sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k (\tilde{\mathbf{G}}_i + v_i) \in Y_{\mathbf{u}}$$

con

$$Y_{\mathbf{u}} = \{ \phi \in H^1(D \setminus \bar{\Delta}) \mid \int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det[D_j(I + \mathbf{u})_i]| \phi = 0 \}.$$

Afortunadamente, podemos construir un útil isomorfismo de $Y_{\mathbf{u}}$ sobre Y_0 . Más precisamente, tenemos el resultado siguiente, que demostraremos más adelante:

Lema 7.4 *Para cada $\mathbf{u} \in W$, la aplicación*

$$\Lambda_{\mathbf{u}} : Y_{\mathbf{u}} \longrightarrow Y_0,$$

definida por

$$\Lambda_{\mathbf{u}}\phi = \phi - \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} \phi \, dx \right) \phi_0,$$

donde ϕ_0 esta dada por

$$\phi_0 \equiv \frac{1}{c_0} = \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} dx \right)^{-1},$$

es un isomorfismo. ■

Se utiliza el espacio de Hilbert $X = L^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times Y_0$. Se considera la aplicación

$$F : W \times E_0 \rightarrow X,$$

definida para \mathbf{u} en un entorno de 0 en W y $\eta = (\mathbf{v}, r) \in E_0$ como sigue:

$$\begin{aligned} F_l(\mathbf{u}, \eta) &= -\nu \sum_{i,j,k=1}^N M_{ij}(\mathbf{u}) D_j(M_{ik}(\mathbf{u}) D_k(\tilde{G}_l + v_l)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (\tilde{G}_i + v_i) \sum_{k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k(\tilde{G}_l + v_l) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N M_{lk}(\mathbf{u}) D_k r \qquad \text{para } 1 \leq l \leq d, \\ F_{d+1}(\mathbf{u}, \eta) &= \Lambda_{\mathbf{u}} \left(\sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k(\tilde{G}_i + v_i) \right) \\ &\equiv \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k(\tilde{G}_i + v_i) \\ &\quad - \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} \sum_{i,k=1}^N M_{ik}(\mathbf{u}) D_k(\tilde{G}_i + v_i) \right) \phi_0. \end{aligned}$$

iii) Verificación de las hipótesis del Teorema de la Función Implícita.

a) Ecuaciones verificadas por $(\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u})$.

Se verifica que $(\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) \in E$, por lo que se puede escribir

$$(\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) = \tilde{G} + \chi(\mathbf{u}) \quad \text{con } \chi(\mathbf{u}) = (\mathbf{z}(\mathbf{u}), q(\mathbf{u})) \in E_0.$$

Con esta notación, se tiene de (7.10) y (7.11) que

$$(7.12) \quad F(\mathbf{u}, \chi(\mathbf{u})) \equiv F(\mathbf{u}, (\mathbf{y}(\mathbf{u}), q(\mathbf{u}))) = 0$$

para \mathbf{u} en un entorno de 0 en \mathbf{W} .

Recíprocamente, si $(\mathbf{u}, \eta) \in \mathbf{W} \times E_0$, $\|\mathbf{u}\|_2$ es suficientemente pequeña y se tiene que $F(\mathbf{u}, \eta) = 0$, entonces $(\eta + \tilde{G}) \circ (I + \mathbf{u})^{-1}$ es solución de las ecuaciones de Navier-Stokes en $D \setminus \overline{\Delta + \mathbf{u}}$.

b) Diferenciabilidad de F .

Gracias al Lema 3.3 y al hecho de que la aplicación F es cuadrática con respecto a η , se tiene:

$$(7.13) \quad \begin{cases} F \text{ es continuamente diferenciable en un} \\ \text{entorno de } (0, \chi(0)) \text{ en } \mathbf{W} \times E_0. \end{cases}$$

c) $\frac{\partial F}{\partial \eta}(0, \chi(0))$ es un isomorfismo de E_0 en X .

La derivada

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(0, \chi(0))$$

es un operador $A \in \mathcal{L}_c(E_0, X)$ que está definido para $\eta = (\mathbf{v}, r) \in E_0$ mediante la fórmula

$$A(\mathbf{v}, r) = (-\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \text{grad } r, \text{div } \mathbf{v}).$$

Admitamos el siguiente Lema, que probaremos más adelante:

Lema 7.5 *Para cada par $(\mathbf{f}, \phi) \in X$, existe un único par $(\mathbf{v}, r) \in E_0$, solución de la ecuación $A(\mathbf{v}, r) = (\mathbf{f}, \phi)$. ■*

Se deduce del Lema que

$$(7.14) \quad \frac{\partial F}{\partial \eta}(0, \chi(0)) \in \text{Isom}(E_0, X).$$

iv) Aplicación del Teorema de la Función Implícita.

Los resultados (7.12), (7.13) y (7.14) permiten aplicar el Teorema de la Función Implícita en un entorno de $(0, \chi(0))$. Por tanto, existe un entorno O_1 de 0 en \mathbf{W} , un entorno O_2 de $\chi(0) \equiv (\mathbf{y}, p) - \tilde{G}$ en E_0 y una aplicación

$$H : O_1 \longrightarrow E_0$$

de clase C^1 , tales que

$$\{(\mathbf{u}, \eta) \in O_1 \times O_2 \mid F(\mathbf{u}, \eta) = 0\} = \{(\mathbf{u}, \tilde{\eta}) \in O_1 \times E_0 \mid \tilde{\eta} = H(\mathbf{u})\}.$$

Es decir, para cada $\mathbf{u} \in O_1$, existe $\eta = H(\mathbf{u}) \in E_0$ que verifica $F(\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) = 0$; además, la aplicación $\mathbf{u} \rightarrow H(\mathbf{u})$ es C^1 . Como $F(\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) = 0$, se deduce que el par de funciones dado por $(H(\mathbf{u}) + \tilde{G}) \circ (I + \mathbf{u})^{-1}$ es solución del problema de Navier-Stokes en $D \setminus \overline{\Delta + \mathbf{u}}$, i.e.

$$(\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}) \equiv H(\mathbf{u}) + \tilde{G}.$$

Por tanto, se tiene finalmente que

$$\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u})) \circ (I + \mathbf{u}),$$

definida de O_1 en $\mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times (H^1(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbb{R})$, es derivable-Fréchet en 0.

v) Demostración del Lema 7.4.

Para $\psi \in Y_0$ dado, se estudia la existencia de $\phi \in Y_{\mathbf{u}}$ tal que $\Lambda_{\mathbf{u}}\phi = \psi$, i.e. tal que

$$(7.15) \quad \phi - \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} \phi \right) \phi_0 = \psi.$$

Cuando se multiplica por $|\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1}$ y se integra en $D \setminus \bar{\Delta}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus \bar{\Delta}} \phi |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} - \phi_0 \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} \phi \right) \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} \right) \\ = \int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} \psi. \end{aligned}$$

Gracias a que $\phi \in Y_{\mathbf{u}}$ y $|\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} = |\det[D_j(I + \mathbf{u})_i]|$, se deduce:

$$(7.16) \quad \int_{D \setminus \bar{\Delta}} \phi = -\frac{1}{\phi_0} \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} \right)^{-1} \int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} \psi.$$

Por tanto, de (7.15) y (7.16), se tiene

$$\phi = \psi - \left(\int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} \right)^{-1} \int_{D \setminus \bar{\Delta}} |\det M_{ij}(\mathbf{u})|^{-1} \psi \equiv \Lambda_{\mathbf{u}}^{-1} \psi.$$

Se deduce evidentemente que $\Lambda_{\mathbf{u}}$ es un isomorfismo.

vi) Demostración del Lema 7.5.

Teniendo en cuenta que

$$Y_0 = \{ \phi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} \phi dx = 0 \} \equiv H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$$

el problema que tenemos planteado es el siguiente:

Dado $(\mathbf{f}, \phi) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$,

$$(7.17) \quad \begin{cases} \text{Hallar } (\mathbf{v}, r) \in (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{y} + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \text{grad } r = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{v} = \phi & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Con la notación de la Sección 6.10 (cf. también el aptdo. 7.1.3), se tiene que la formulación variacional mixta de (7.17) es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\mathbf{v}, r) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + \tilde{b}(\mathbf{z}, r) = \langle \mathbf{l}, \mathbf{z} \rangle \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \tilde{b}(\mathbf{v}, q) = \langle \chi, q \rangle \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \end{array} \right.$$

siendo $\tilde{a} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\tilde{a}(\mathbf{v}, \mathbf{z}) = \nu a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{v}, \mathbf{z}),$$

$\tilde{b} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\tilde{b}(\mathbf{z}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{z} \, dx,$$

$\mathbf{l} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, definido por

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{z} \, dx \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$$

y $\chi \in L_0^2(\Omega)'$, definido por

$$\langle \chi, q \rangle = - \int_{\Omega} \phi q \, dx, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

El espacio V asociado a la formulación variacional mixta coincide con

$$V = \{\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{z} = 0\}.$$

Obviamente, estas formas bilineales son continuas y \tilde{b} verifica la condición inf-sup. Por otro lado, para todo $\mathbf{z} \in V$, en virtud de las propiedades de b vistas en la Sección 6.10 y (7.2),

$$|b(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq \gamma |\mathbf{z}|_{1;\Omega}^2 |\mathbf{y}|_{1;\Omega},$$

con lo que

$$|\tilde{a}(\mathbf{z}, \mathbf{z})| \geq (\nu - \gamma |\mathbf{y}|_{1;\Omega}) |\mathbf{z}|_{1;\Omega}^2;$$

ya que por (7.5) se tiene

$$\nu - \gamma |\mathbf{y}|_{1;\Omega} > 0,$$

se deduce que $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica.

Por tanto, el problema (7.17) tiene solución única $(\mathbf{v}, r) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. De forma análoga a como se hizo en la Sección 6.10 para el problema de Navier-Stokes, se prueba ahora que

$$(\mathbf{v}, r) \in (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R},$$

con lo que se tiene la Demostración del Lema. ■

Del Teorema 7.3, utilizando los resultados de las Secciones 3.2 y 3.3, se deduce que $\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u}))$ posee una derivada local en 0, que puede ser caracterizada en términos de un problema de contorno. Más precisamente, se tiene el siguiente

Teorema 7.6 Para cada abierto ω tal que $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y}(\mathbf{u})|_{\omega}, p(\mathbf{u})|_{\omega}), \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \\ \text{con valores en } \mathbf{H}^2(\omega) \times H^1(\omega)/\mathbb{R}, \\ \text{considerada como función que toma valores en } \mathbf{H}^1(\omega) \times (L^2(\omega)/\mathbb{R}), \end{array} \right.$$

es derivable en 0. En consecuencia, $\mathbf{u} \rightarrow (\mathbf{y}(\mathbf{u}), p(\mathbf{u}))$ es localmente derivable en 0. Su derivada local en 0 en la dirección \mathbf{u} , se denota $(\mathbf{y}'(\mathbf{u}), p'(\mathbf{u}))$ y verifica:

$$(7.18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{y}'(\mathbf{u}) + (\mathbf{y}'(\mathbf{u}) \cdot \nabla) \mathbf{y} + \\ \quad + (\mathbf{y} \cdot \nabla) \mathbf{y}'(\mathbf{u}) + \text{grad } p'(\mathbf{u}) = 0 & \text{en } D \setminus \bar{\Delta}, \\ \text{div } \mathbf{y}'(\mathbf{u}) = 0 & \text{en } D \setminus \bar{\Delta}, \\ \mathbf{y}'(\mathbf{u}) = -\mathbf{u} \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{n}} & \text{sobre } \partial \Delta, \\ \mathbf{y}'(\mathbf{u}) = 0 & \text{sobre } \partial D. \blacksquare \end{array} \right.$$

De nuevo, la formulación variacional mixta puede ser usada para probar que el problema (7.16) posee solución única.

7.3 Derivada de la energía

En esta Sección, vamos a probar la existencia de derivada de la energía disipada en el fluido. Como hemos visto en el aptdo. 7.1.2, al menos cuando la razón $\text{med}(\Delta)/\text{med}(D)$ es pequeña, minimizar la energía y minimizar el arrastre son aproximadamente lo mismo. Para cada $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, la energía asociada a $\Delta + \mathbf{u}$ está dada por

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\nu} \int_{D \setminus (\Delta + \mathbf{u})} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(\mathbf{y}(\mathbf{u}))^2.$$

Se tiene el siguiente

Teorema 7.7 La función

$$(7.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow E(\mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \text{ con valores en } \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$(7.20) \quad E'(\mathbf{u}) = \nu \int_{\partial\Delta} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u}_n dS,$$

donde $\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ y \mathbf{w} , junto con q , verifica

$$(\mathbf{w}, q) \in (\mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}) \cap \mathbf{H}_0^1(D \setminus \bar{\Delta})) \times (L^2(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbb{R})$$

y es la única solución del problema

$$(7.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta w_i + \sum_{j=1}^N D_i y_j w_j - \sum_{j=1}^N y_j D_j w_i + D_i q = -2\nu \Delta y_i \quad \text{en } D \setminus \bar{\Delta}, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{en } D \setminus \bar{\Delta}, \\ \mathbf{w} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Delta \cup \partial D. \blacksquare \end{array} \right.$$

Notas: a) La existencia y unicidad de solución del problema (7.21) en el espacio $\mathbf{H}_0^1(D \setminus \bar{\Delta}) \times L^2(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbb{R}$ se prueba, escribiendo su formulación mixta equivalente, de manera análoga a como se ha hecho en el Lema 7.5 para un problema similar. La pertenencia de la solución a $\mathbf{H}^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times H^1(D \setminus \bar{\Delta})$ se deduce igual que se hizo en la Sección 6.10 para el problema de Navier-Stokes.

b) Se obtiene una expresión para $E'(\mathbf{u})$ que depende de \mathbf{u} sólo a través de su componente en la dirección del vector normal unitario exterior a $\partial\Delta$. Una expresión de este tipo permite deducir más fácilmente condiciones de optimalidad que caractericen al dominio óptimo, así como determinar direcciones de descenso cuando se utiliza un algoritmo de tipo gradiente para su cálculo. ■

Demostración del Teorema 7.7: De los Teoremas 7.3 y 3.14, se deduce de manera inmediata que la aplicación

$$(7.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow Z(\mathbf{u}) = \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(\mathbf{y}(\mathbf{u})) \sigma_{ij}(\mathbf{y}(\mathbf{u})) \right\} \circ (I + \mathbf{u}), \\ \text{definida de un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \text{ con valores en} \\ W^{1,1}(D \setminus \bar{\Delta}), \text{ es derivable en } 0. \end{array} \right.$$

De (7.22) y el Teorema 3.9, se deduce que, para cada abierto ω tal que $\bar{\omega} \subset \Omega$, la aplicación

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \rightarrow Z(\mathbf{u})|_{\omega}, \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } \mathbf{W} \\ \text{y considerada como aplicación que toma valores en } L^1(\omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{array} \right.$$

En consecuencia, $\mathbf{u} \rightarrow Z(\mathbf{u})$ es localmente derivable en 0. Un sencillo cálculo lleva a que su derivada en 0 en la dirección \mathbf{u} es

$$Z'(\mathbf{u}) = 2 \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(\mathbf{y}(\mathbf{u})) \sigma_{ij}(\mathbf{y}'(\mathbf{u})).$$

De lo anterior y de los resultados de la Sección 3.4, se tiene (7.19) y

$$(7.23) \quad E'(u) = \int_{D \setminus \Delta} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(y(\mathbf{u})) \sigma(y'(\mathbf{u})) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial \Delta} \left\{ \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij}(y) \sigma_{ij}(y) \right\} \mathbf{u}_n dS.$$

Teniendo en cuenta (7.1) y (7.18), la expresión (7.23) se transforma mediante integración por partes en

$$(7.24) \quad E'(u) = -2 \int_{D \setminus \Delta} \Delta y \cdot y'(\mathbf{u}) dx - \int_{\partial \Delta} \left| \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \right|^2 \mathbf{u}_n dS.$$

Usando también (7.21), se observa que el primer sumando del miembro derecho de (7.24) está dado por

$$\begin{aligned} I = & \int_{D \setminus \Delta} \left\{ -\nu \sum_{i=1}^N \Delta w_i y'_i(\mathbf{u}) + \sum_{i,j=1}^N D_i y_j w_j y'_i(\mathbf{u}) \right. \\ & \left. - \sum_{i,j=1}^N y_j D_j w_i y'_i(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^N D_i q y'_i(\mathbf{u}) \right\} - 2 \int_{\partial \Delta} \sum_{i=1}^N p y'_i(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos, usando (7.18), se obtiene:

$$I = \nu \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} dS - \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n (q - 2p) \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Ya que $y = 0$ sobre $\partial \Delta$ y $\operatorname{div} y = 0$ en $D \setminus \bar{\Delta}$, resulta que

$$\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = \sum_{j=1}^N n_j \frac{\partial y_j}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{j=1}^N D_j y_j = 0 \quad \text{sobre } \partial \Delta.$$

Por tanto,

$$I = \nu \int_{\partial \Delta} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u}_n dS,$$

lo que prueba (7.20). ■

7.4 Derivada del arrastre

En esta Sección, vamos a probar la existencia de derivada del arrastre. Recordemos que éste, para cada $\mathbf{u} \in W$, está dado por

$$J(\mathbf{u}) = -g \cdot \left(\int_{\partial\Delta+\mathbf{u}} \left(-p(\mathbf{u}) Id + \sigma(\mathbf{y}(\mathbf{u})) \right) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{u}) dS \right).$$

Se tiene el siguiente

Teorema 7.8 *La aplicación*

$$(7.25) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \longrightarrow J(\mathbf{u}), \text{ definida de} \\ \text{un entorno de } 0 \text{ en } W \text{ con valores en } \mathbb{R}, \end{cases}$$

es derivable en 0. Su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$(7.26) \quad J'(\mathbf{u}) = -\nu \int_{\partial\Delta} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u}_{\mathbf{n}} dS,$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ y \mathbf{q} , junto con Q , verifica

$$(\mathbf{q}, Q) \in H^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times (H^1(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbb{R})$$

y es la solución única del problema

$$(7.27) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta q_i + \sum_{j=1}^N D_i y_j q_j - \sum_{j=1}^N y_j D_j q_i + D_i Q = 0 & \text{en } D \setminus \bar{\Delta}, 1 \leq i \leq N, \\ \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 & \text{en } D \setminus \bar{\Delta}, \\ \mathbf{q} = -g & \text{sobre } \partial\Delta, \\ \mathbf{q} = 0 & \text{sobre } \partial D. \blacksquare \end{array} \right.$$

Notas: a) De nuevo, la existencia y unicidad de solución del problema (7.27) en el espacio $H^1(D \setminus \bar{\Delta}) \times L^2(D \setminus \bar{\Delta})/\mathbb{R}$ se prueba a partir de su formulación mixta equivalente, de manera análoga a como se hizo en el Lema 7.5. La pertenencia de la solución a $H^2(D \setminus \bar{\Delta}) \times H^1(D \setminus \bar{\Delta})$ se deduce como se hizo en la Sección 6.10 para el problema de Navier-Stokes.

b) También en este caso se tiene una expresión para $J'(\mathbf{u})$ que depende de \mathbf{u} sólo a través de su componente en la dirección del vector normal unitario exterior a $\partial\Delta$; recuérdense las ventajas que ello lleva consigo. ■

Demostración del Teorema 7.8: Una sencilla integración por partes lleva a las igualdades

$$J(\mathbf{u}) = g \cdot \int_{\partial D} \left(-p(\mathbf{u}) Id + \sigma(\mathbf{y}(\mathbf{u})) \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\begin{aligned} & -g \cdot \int_{D \setminus (\Delta + \mathbf{u})} \operatorname{div} (-p(\mathbf{u})\operatorname{Id} + \sigma(\mathbf{y}(\mathbf{u}))) \\ & = J_1(\mathbf{u}) + J_2(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

De los Teoremas 7.3 y 3.14, se tiene que la aplicación

$$(7.28) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow Z(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = (-p(\mathbf{u})\operatorname{Id} + \sigma(\bar{\mathbf{y}}(\mathbf{u}))) \circ (I + \mathbf{u}), \\ \text{definida de un entorno de } 0 \text{ en } W \text{ con valores en} \\ H^1(D \setminus \bar{\Delta}), \text{ es derivable en } 0; \end{cases}$$

teniendo en cuenta que

$$(7.29) \quad \mathbf{u} \equiv 0 \quad \text{sobre } \partial D,$$

un sencillo cálculo nos lleva a que su derivada en la dirección \mathbf{u} verifica

$$\dot{Z}(\mathbf{u}) = \left(-p'(\mathbf{u})\operatorname{Id} + \sigma(\mathbf{y}'(\mathbf{u})) \right) \cdot \mathbf{n} \quad \text{sobre } \partial D;$$

también, gracias a (7.29), se puede escribir

$$J_1(\mathbf{u}) = g \cdot \int_{\partial D} [Z(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u})] \cdot \mathbf{n} \, dS;$$

por tanto, en virtud de (7.28), la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow J_1(\mathbf{u}) \text{ definida de un entorno de } 0 \\ \text{en } W \text{ y con valores en } \mathbb{R}, \\ \text{es derivable en } 0 \end{cases}$$

y su derivada en la dirección \mathbf{u} está dada por

$$J_1'(\mathbf{u}) = g \cdot \int_{\partial D} (-p'(\mathbf{u})\operatorname{Id} + \sigma(\mathbf{y}'(\mathbf{u}))) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Por otro lado, de (7.1), se tiene que

$$\operatorname{div} (-p(\mathbf{u})\operatorname{Id} + \sigma(\mathbf{y}(\mathbf{u}))) = (\mathbf{y}(\mathbf{u}) \cdot \nabla)\mathbf{y}(\mathbf{u}).$$

De nuevo, como consecuencia inmediata del Teorema 3.14, tenemos que la aplicación

$$(7.30) \quad \begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow Y(\mathbf{u}) \circ (I + \mathbf{u}) = [(\mathbf{y}(\mathbf{u}) \cdot \nabla)\mathbf{y}(\mathbf{u})] \circ (I + \mathbf{u}), \\ \text{definida de un entorno de } 0 \text{ en } W \text{ con valores en} \\ W^{1,1}(D \setminus \bar{\Delta}), \text{ es derivable en } 0. \end{cases}$$

De (7.30) y del Teorema 3.9 se deduce que, para cada abierto $\omega \subset\subset \Omega$, la aplicación

$$\begin{cases} \mathbf{u} \rightarrow Y(\mathbf{u})|_{\omega}, \text{ definida de un entorno de } 0 \text{ en } W, \\ \text{considerada como aplicación que toma valores en } L^1(\omega), \\ \text{es derivable en } 0. \end{cases}$$

En consecuencia, $u \rightarrow Y(u)$ es localmente derivable en 0. Además, su derivada en 0 en la dirección u está dada por

$$\begin{aligned} Y'(u) &= (y'(u) \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)y'(u) \\ &= \operatorname{div} (-p'(u)Id + \sigma(y'(u))). \end{aligned}$$

Por aplicación de los resultados de la Sección 3.4 a

$$J_2(u) = -g \cdot \int_{D \setminus (\Delta + u)} Y(u)$$

y teniendo en cuenta que u e $Y(0)$ se anulan idénticamente sobre ∂D , se obtiene que la función

$$\begin{cases} u \rightarrow J_2(u) \text{ definida de un entorno de } 0 \\ \text{en } W \text{ y con valores en } \mathbb{R}, \\ \text{es derivable en } 0 \end{cases}$$

y su derivada en 0 en la dirección u está dada por

$$J'_2(u) = -g \cdot \int_{D \setminus \Delta} \operatorname{div} (-p'(u)Id + \sigma(y'(u))).$$

De todo lo anterior, se tiene (7.25); sumando las expresiones de $J'_1(u)$ y $J'_2(u)$ e integrando de nuevo por partes, se obtiene:

$$(7.31) \quad J'(u) = -g \cdot \int_{\partial \Delta} (-p'(u)Id + \sigma(y'(u))) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Ahora, obsérvese que, siendo (q, Q) la solución única de (7.27), la identidad (7.31) puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned} J'(u) &= \int_{\partial(D \setminus \Delta)} \left((-p'(u)Id + \sigma(y'(u))) \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{q} dS \\ &= \nu \int_{D \setminus \Delta} \Delta y'(u) \cdot \mathbf{q} + \sum_{i,j=1}^N \int_{D \setminus \Delta} \sigma_{ij}(y'(u)) D_i q_j - \int_{\partial(D \setminus \Delta)} p'(u) \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

En primer lugar, se tiene que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D \setminus \Delta} \left((y'(u) \cdot \nabla)y + (y \cdot \nabla)y'(u) + \operatorname{grad} p'(u) \right) \cdot \mathbf{q} \\ &= - \int_{D \setminus \Delta} (y \cdot \nabla) \mathbf{q} \cdot y'(u) + \sum_{i,j=1}^N \int_{D \setminus \Delta} D_j y_i q_i y'_j(u) + I_3. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$I_2 = -\nu \sum_{i,j=1}^N \int_{D \setminus \Delta} D_{ii} q_j y'_j(\mathbf{u}) \\ - \nu \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{n}} n_i \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{n}} n_j \right) dS - \nu \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n \frac{\partial y_j}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial q_j}{\partial \mathbf{n}} n_i^2 dS.$$

Por tanto,

$$J'(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^N \int_{D \setminus \Delta} \left(-\nu D_{ii} q_j + D_j y_i q_i - y_i D_{ii} q_j \right) y'_j(\mathbf{u}) \\ - \nu \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

La primera integral de la expresión anterior se anula, ya que coincide con

$$- \int_{D \setminus \Delta} \text{grad } Q \cdot \mathbf{y}'(\mathbf{u}) = \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n Q \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial y_j}{\partial \mathbf{n}} n_j \right) dS = \int_{\partial \Delta} \mathbf{u}_n Q (\text{div } \mathbf{y}) dS.$$

En consecuencia, (7.26) está demostrado. ■

7.5 Algunos comentarios finales

De manera análoga a como se hace en el caso del condensador, con las adaptaciones necesarias debidas a la ecuación de la divergencia, se podrá probar la existencia de derivada total del par velocidad-presión con hipótesis de regularidad más débiles sobre Ω . Asimismo, se podrá probar la existencia de derivada de la energía, obteniéndose, obviamente, una expresión menos sencilla que (7.20). En cuanto al arrastre, primero será necesario precisar el sentido de $(-p(\mathbf{u})Id + \sigma(\mathbf{y}(\mathbf{u}))) \cdot \mathbf{n}$ sobre $\partial \Delta + \mathbf{u}$, ya que, en principio, esta expresión no está en $L^1(\partial \Delta + \mathbf{u})$; el sentido que habrá que darle estará en la línea de lo estudiado en los aptdos. 6.1.6 y 6.1.7 sobre trazas normales de funciones con divergencia en L^r y será también necesario extender los resultados técnicos de los Capítulos 3 y 4 a estos espacios. Para algunos detalles cf. [5].

REFERENCIAS

- [1] Adams, R.A.: *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York 1975.
- [2] Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions, I and II*. Comm. on Pure and Applied Mathematics, Vol. 12, 623–727 (1959); Vol. 17, 35–92 (1964).
- [3] Bello, J.A., Fernández-Cara, E., Simon, J.: *Variation par rapport au domaine de l'énergie visqueuse dissipée dans un fluide de Navier-Stokes*. Note C.R.A.S. Paris, t. 313, Série I, p. 447–450 (1991).
- [4] Bello, J.A., Fernández-Cara, E., Simon, J.: *Optimal shape design for Navier-Stokes flow*. Proceedings of I.F.I.P. Conference in Zürich, 1991. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 107, 287–296, Basel, 1992.
- [5] Bello, J.A., Fernández-Cara, E., Simon, J.: *Aparecerá*.
- [6] Bello, J. A., Simon, J.: *Aparecerá*.
- [7] Brézis, H.: *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*. Masson, Paris 1983.
- [8] Cattabriga, L.: *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*. Rend. Mat. Sem. Univ. Padova, 31, 308–340 (1961).
- [9] Cea, J., Gioan, A., Michel, J.: *Quelques résultats sur l'identification de domaine*. Calcolo 10, 3–4, 208–232 (1973).
- [10] Chenais, D.: *Un résultat d'existence dans un problème d'identification de domaine*. Note C.R.A.S. Paris, t. 276, Série A, 547–550 (1973).
- [11] Chenais, D.: *Un ensemble de variétés à bord lipschitziennes: compacité, théorème de prolongement dans certains espaces de Sobolev*. Note C.R.A.S. Paris, t. 280, Série A, 1145–1147 (1975).
- [12] Chenais, D.: *On the existence of a Solution in a Domain Identification Problem*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 52, 189–219 (1975).
- [13] Chenais, D.: *Homéomorphismes entre ouverts voisins uniformément lipschitziens*. Note C.R.A.S. Paris, t. 283, Série A, 461–464 (1976).
- [14] Chenais, D.: *Sur une famille de variétés à bord lipschitziennes. Application à un problème d'identification de domaines*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 27, 4, 201–231 (1977).
- [15] Chenais, D.: *Homéomorphisme entre ouverts lipschitziens*. Annali di Matematica Pura e Applicata (IV), Vol. CXVIII (1978).
- [16] Constantin, P., Foias, C.: *Navier-Stokes Equations*. The University of Chicago Press. Chicago, 1988.

- [17] Dautray, R., Lions, J.L.: *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. Masson, Paris 1985.
- [18] Fernández-Cara, E.: *Thèse*. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1981.
- [19] Fernández-Cara, E.: *Sobre la aproximación numérica de un problema de control geométrico*. *Collectánea Matemática*, Vol. 3, XXXIII, 225-247 (1982).
- [20] Fernández-Cara, E.: *Optimal design in fluid mechanics the finite element approach*. En "Control of Partial Differential Equations", A. Bermúdez Ed., p. 120-131, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 114, Springer-Verlag, Berlín 1989.
- [21] Finn, R.: *On the Steady-State Solutions of the Navier-Stokes Equat., III*. *Acta Math.* 105, 197-244 (1961)
- [22] Folland, G.B.: *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons, New York 1984.
- [23] Garabedian, P.R., Schiffer, M.M.: *Convexity of domain functionals*. *J. d'Anal. Math.* 2, 181-268 (1952-53).
- [24] Ghidaglia, J.M.: *Regularité des Solutions de Certains Problèmes aux Limites Linéaires liés aux Equations d'Euler*. *Comm. in P.D.E.*, 9(13), 1265-1298 (1984).
- [25] Girault, V., Raviart, P.A.: *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, Berlin 1986.
- [26] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Segunda Edición*. Springer-Verlag, Berlin 1983.
- [27] Hadamard, J.: *Mémoire sur le problème d'analyse relatif des plaques élastiques encastrées*. *Oeuvres de J. Hadamard*, Vol. 2 (1907), Ed. du C.N.R.S., Paris 1968.
- [28] Haslinger, J., Neittaanmäki, P.: *Finite Element Approximation for Optimal Shape Design. Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York 1988.
- [29] Ladyzhenskaya, O.A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd Edition*. Gordon and Breach, New York 1969.
- [30] Lax, P., Milgram, N.: *Parabolic Equations. Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*. Princeton 1954.
- [31] Lichtenstein, L.: *Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik*. *Math. Z.*, 28, 387-415, 725 (1928).
- [32] Lions, J.L.: *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*. Dunod, Paris 1969.

- [33] Marroco, A., Pironneau, O.: *Optimum design with Lagrangian finite elements: Design of an electromagnet*. Comp. Math. Appl. Mech. Eng., 15, 277–308 (1978).
- [34] Murat, F.: *Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients*. Annali di Matematica Pura e Applicata (IV), Vol. CXII (1977).
- [35] Murat F., Simon J.: *Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique*. Rapport du L.A. 189 no. 74003. Univ. Paris VI (1974).
- [36] Murat F., Simon J.: *Sur le contrôle par un domaine géométrique*. Rapport du L.A. 189 no. 76015. Univ. Paris VI (1976).
- [37] Nečas, J.: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Mason, Paris 1967.
- [38] Odqvist, F.K.G.: *Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten*. Stockholm 1928, P.A. Norstedt & Söner. Ver también: Math. Z., 32 (1930), 329–375.
- [39] Pironneau, O.: *On optimum design in fluid mechanics*. J. Fluid. Mech. (1974), Vol. 64, part. I, pp. 97–110.
- [40] Pironneau, O.: *Thèse*. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1976.
- [41] Pironneau, O.: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer-Verlag, New York 1984.
- [42] Serre, D.: *Equations de Navier-Stokes stationnaires avec données peu régulières*. Comunicación personal.
- [43] Simon, J.: *Differentiation with respect to the Domain in Boundary Value Problems*. Numer. Funct. and Optimiz., 2 (7–8), 649–687 (1.980).
- [44] Simon, J.: *Optimal design for Neumann condition and for related boundary value conditions*. In “Boundary control and boundary variations”, Ed. J.P. Zolesio. Lectures Notes in Control and Information Sciences 100, Springer-Verlag, Berlin 1.988.
- [45] Simon, J.: *Differentiation on a Lipschitz manifold*. In “Optimal control of systems governed by pde”, Ed. A. Bermúdez. Lectures Notes in Control and Information Sciences 114, pag. 277–283, Springer-Verlag, Berlin 1.989.
- [46] Simon, J.: *Second Variations for Domain Optimization Problems*. In Proceedings of the “4th International Conference on Control of Distributed Parameter Systems”, Ed. F. Kappel, K. Kunish, W. Schappacher. International Series, Birkhauser 1.989.
- [47] Simon, J.: *Diferenciación de Problemas de Contorno respecto del Dominio*. Curso en la Universidad de Sevilla, 1989.

- [48] Simon, J.: *Domain variation for drag in Stokes flow*. In "Control theory of distributed parameter systems and applications", X. Li and J. Yong Ed. Lecture Notes in Control and Information Sciences 159, 28-42, Springer-Verlag, Berlin 1991
- [49] Solonnikov, V.A.: *General boundary problems for systems which are elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg, I*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 28 (1964), 665-706 (en ruso); traducción en inglés: Amer. Math. Soc. Transl. (2) 56 (1966), 193-232.
- [50] Solonnikov, V.A.: *On general boundary problems for Douglas-Nirenberg elliptic systems, II*. Trudy Mat. Inst. Steklov, 92, 233-297 (1966)
- [51] Solonnikov, V.A.: *On estimates of the tensor Green's function for some boundary-value problems*. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 130, 988-991 (1969).
- [52] Témam, R.: *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*. North-Holland, Amsterdam 1977.
- [53] Vladimirov, V.S.: *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, Inc., New York 1971.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Recibida el 25 de Septiembre de 1992 por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar el Tesis Doctoral de

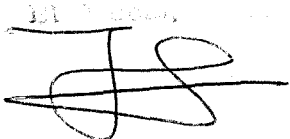
JUAN ANTONIO BELLO SIMÓN

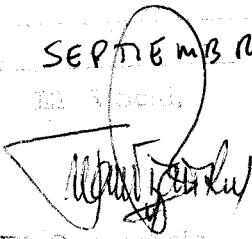
titulada DIFERENCIACION RESPECTO DE DOMINIOS, REGULARIDAD L^2 PARA LOS PROBLEMAS DE STOKES Y NAVIER-STOKES Y APLICACIONES EN CONTROL GEOMÉTRICO.

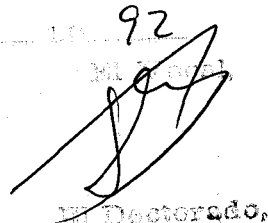
APT'D CUM LAUDE

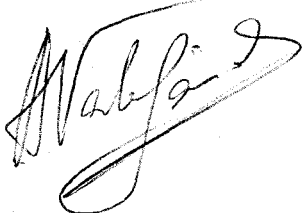
25 SEPTIEMBRE

92

El Vicedecano,


El Vocal,


El Doctorado,




J. Duany
