

Trabajo fin de grado
Ingeniería de Tecnologías Industriales

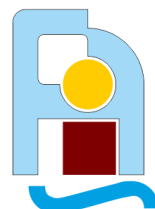
Estudio del movimiento de un imán que se mueve
por encima de una superficie conductora

Autor: Diego Sánchez Flores

Tutor: Antonio González Fernández

Dpto. Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo fin de grado
Ingeniería de Tecnologías Industriales

Estudio del movimiento de un imán que se mueve por encima de una superficie conductora

Autor:
Diego Sánchez Flores

Tutor:
Antonio González Fernández
Profesor titular

Dpto. de Física Aplicada III
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2020

Trabajo fin de grado: Estudio del movimiento de un imán que se mueve por encima de una superficie conductora

Autor: Diego Sánchez Flores

Tutor: Antonio González Fernández

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El secretario del Tribunal

A mi familia

A mis compañeros y amigos

A mis maestros

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría agradecer a mi tutor el Dr. Antonio González por el esfuerzo y la ayuda que me ha prestado en la realización de este trabajo y sobre todo por los conocimientos que he recibido por su parte, los cuales me han parecido bastante interesantes y útiles para mi formación. Por supuesto, también me gustaría agradecer a mi familia y en especial a mis padres, los que me han apoyado en todo momento confiando ciegamente en lo que hacía.

Sevilla 2020

RESUMEN

El siguiente trabajo tiene como objetivo estudiar el movimiento de una esfera imanada que se desplaza por encima de un plano conductor óhmico. Debido a las naturalezas del plano y la esfera, estos interactuarán entre sí mediante inducción, fuerzas y pares magnéticos. Al desplazarse la esfera, variando su vector de imanación según las ecuaciones de rodadura, generará corrientes de Foucault en el plano, que a su vez afectarán al movimiento de dicha esfera. Conocido el campo magnético originado por las corrientes inducidas según el movimiento de la esfera, el objetivo será estudiar el movimiento de dicho sólido. Se analizarán los resultados obtenidos mediante simulación para diferentes ángulos de inclinación del plano y la orientación inicial del vector de imanación de la esfera.

ABSTRACT

This work's purpose is to study the movement of a magnetized sphere on an ohmic conductive plane. Due to the natures of the plane and the sphere, they will interact with each other through induction, forces and magnetic pairs. As the sphere rolls, changing his magnetization vector according to the rolling equations, it will generate eddy currents in the plane that affects to the movement of that sphere. Known the magnetic field originated by the induced currents according to the movement of the sphere, the objective will be to study the movement of that solid. The results of the simulation will be analyzed for different angles of inclination of the plane and the initial orientation of the sphere's magnetization vector.

Índice

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Abstract	v
Índice de Tablas	viii
Índice de Figuras	ix
1 Introducción	1
1.1 <i>Interacciones electromagnéticas de una esfera imanada sobre un plano conductor</i>	1
1.2 <i>Fundamentos teóricos de la cinemática y dinámica del sólido rígido</i>	3
2 Planteamiento del problema	5
2.1 <i>Modelado esfera imanada</i>	5
2.2 <i>Modelado plano conductor</i>	6
2.3 <i>Efectos electromagnéticos</i>	6
2.3.1 <i>Densidad de corriente</i>	6
2.3.2 <i>Campo magnético inducido por la densidad de corriente</i>	7
2.3.3 <i>Fuerzas y momentos en la esfera debido a la inducción electromagnética</i>	7
2.4 <i>Movimiento sobre un plano inclinado</i>	8
2.5 <i>Obtención del sistema de ecuaciones del problema</i>	10
2.6 <i>Escalado</i>	13
3 Simulación y resultados	15
3.1 <i>Métodos de simulación</i>	15
3.2 <i>Ecuaciones utilizadas en la simulación y parámetros</i>	15
3.2.1 <i>Caso particular I. El vector μ se mantiene en la dirección del eje OY</i>	16
3.2.2 <i>Caso particular II. El vector μ se mantiene contenido en el plano OXZ</i>	16
3.2.3 <i>Caso general partiendo del reposo y con velocidades iniciales no nulas</i>	17
3.3 <i>Resultados adimensionales</i>	17
3.3.1 <i>Caso particular I. El vector μ se mantiene en la dirección del eje OY</i>	17
3.3.2 <i>Caso particular II. El vector μ se mantiene contenido en el plano OXZ</i>	20
3.3.3 <i>Caso general partiendo del reposo o con velocidad inicial no nula</i>	26
3.4 <i>Resultados cuantitativos</i>	47
3.4.1 <i>Caso particular I. El vector μ se mantiene en la dirección del eje OY</i>	48
3.4.2 <i>Caso particular II. El vector μ se mantiene contenido en el plano OXZ</i>	48
3.4.3 <i>Caso general partiendo del reposo o con velocidad inicial no nula</i>	48
4 Conclusiones y desarrollos futuros	51
5 Referencias	53

Índice de Tablas

Tabla 1 Caso General próximo a OZ. Valores de vx , xG e yG para $t=15$	29
Tabla 2 Caso General alejado de OZ. Valores de vx , xG e yG para $t=8$	33
Tabla 3 Caso General fuerza fuerte. Valores de yG para $t=4$	36
Tabla 4 Caso General fuerza débil. Valores de yG para $t=3000$	39

Índice de Figuras

Figura 1 Campo magnético de un dipolo magnético modelado como espira o como elemento puntual ^[2]	1
Figura 2 Representación de las fuerzas que actúan sobre una esfera y el sistema de coordenadas elegido	3
Figura 3 Campo magnético en el interior y exterior de una esfera imanada ^[4]	5
Figura 4 Densidades de corriente para ω en el sentido del eje OY y μ con dirección OX y OZ ^[6]	7
Figura 5 Representación de la descomposición del peso y fuerzas que actúan sobre la esfera	9
Figura 6 Caso particular I- ωy para diferentes fuerzas aplicadas	18
Figura 7 Caso particular I- Recta de mejor ajuste para la relación entre ωy y la fuerza aplicada	18
Figura 8 Caso particular I- Trayectoria para diferentes fuerzas aplicadas	19
Figura 9 Caso particular I- Recorrido en X para diferentes fuerzas aplicadas	19
Figura 10 Caso particular II- ωy para diferentes fuerzas aplicadas	20
Figura 11 Caso particular II- Recta de mejor ajuste para valores medios de ωy en régimen permanente	21
Figura 12 Caso particular II- Curva de interpolación para la amplitud de ωy en régimen permanente	21
Figura 13 Caso particular II- Recta de mejor ajuste para la frecuencia en régimen permanente	22
Figura 14 Caso particular II- Trayectoria para diferentes fuerzas aplicadas	22
Figura 15 Caso particular II- Recorrido en X para diferentes fuerzas aplicadas	23
Figura 16 Caso particular II- ωy para fuerzas aplicadas débiles	23
Figura 17 Caso particular II- Valor medio de ωy para fuerzas aplicadas débiles	24
Figura 18 Caso particular II- Amplitud de ωy para fuerzas aplicadas débiles	24
Figura 19 Caso General próximo a OZ. ωy para diferentes fuerzas	26
Figura 20 Caso General próximo a OZ. ωx para diferentes fuerzas	27
Figura 21 Caso General próximo a OZ. Vector μ para $F_{aplic}=30$	27
Figura 22 Caso General próximo a OZ. μy para diferentes fuerzas	28
Figura 23 Caso General próximo a OZ. v para diferentes fuerzas	28
Figura 24 Caso General próximo a OZ. Trayectoria para diferentes fuerzas	29
Figura 25 Caso General alejado de OZ. ωy para diferentes fuerzas	30
Figura 26 Caso General alejado de OZ. ωx para diferentes fuerzas	30
Figura 27 Caso General alejado de OZ. Vector μ para $F=30$	31
Figura 28 Caso general alejado de OZ. μy para diferentes fuerzas	31
Figura 29 Caso general alejado de OZ. v para diferentes fuerzas	32
Figura 30 Caso general alejado de OZ. Trayectoria para diferentes fuerzas	32
Figura 31 Caso General fuerza intensa. ωy para diferentes ángulos ϕ	33
Figura 32 Caso General fuerza intensa. ωx para diferentes ángulos ϕ	34
Figura 33 Caso General fuerza intensa. μ para diferentes ángulos ϕ $\{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$	34
Figura 34 Caso General fuerza intensa. μy para diferentes ángulos ϕ	35
Figura 35 Caso General fuerza intensa. v para diferentes ángulos ϕ	35

Figura 36 Caso General fuerza intensa. Trayectoria para diferentes ángulos ϕ	36
Figura 37 Caso General fuerza débil. ωy para diferentes ángulos ϕ	37
Figura 38 Caso General fuerza débil. ωx para diferentes ángulos ϕ	37
Figura 39 Caso General fuerza débil. μy para diferentes ángulos ϕ	38
Figura 40 Caso General fuerza débil. Trayectoria para diferentes ángulos ϕ	38
Figura 41 Caso general con ωy inicial no nula. ωy	39
Figura 42 Caso general con ωx inicial no nula. ωy	40
Figura 43 Caso general con ωx inicial no nula. ωx	40
Figura 44 Caso general con ωx inicial no nula. μx	41
Figura 45 Caso general con ωx inicial no nula. μy	41
Figura 46 Caso general con ωx inicial no nula. Ampliación de μy	42
Figura 47 Caso general con ωx inicial no nula. μ	42
Figura 48 Caso general con ωx inicial no nula. Trayectoria	43
Figura 49 Caso general con ωz inicial no nula. ωz	43
Figura 50 Caso general con ωz inicial no nula. ωy	44
Figura 51 Caso general con ωz inicial no nula. μx	44
Figura 52 Caso general con ωz inicial no nula. μy	45
Figura 53 Caso general con ωz inicial no nula. Ampliación de μy	45
Figura 54 Caso general con ωz inicial no nula. μ	45
Figura 55 Caso general con ωy y ωx iniciales no nulas. ωx	46
Figura 56 Caso general con ωy y ωx iniciales no nulas. ωy	46
Figura 57 Caso general con ωy y ωx iniciales no nulas. μy	47
Figura 58 Caso general con ωy y ωx iniciales no nulas. Trayectoria	47

1 INTRODUCCIÓN

«Si no conozco una cosa, la investigaré»

- Louis Pasteur -

Para comprender y poder realizar un estudio adecuado del problema aquí propuesto debemos introducir ciertos fenómenos electromagnéticos^[1] y dinámicos que tendrán lugar a lo largo del mismo. Por un lado, veremos algunos principios del electromagnetismo como la ley de Ohm, o de Faraday. Por otro lado, desde el punto de vista cinemático y dinámico, presentaremos brevemente las ecuaciones de movimiento de una esfera sobre un plano cualquiera, actuando sobre ella una fuerza y momento genéricos.

1.1 Interacciones electromagnéticas de una esfera imanada sobre un plano conductor

Un campo magnético puede ser causado por una carga en movimiento, un imán permanente o un flujo de corriente. En nuestro experimento podemos apreciar algunas de estas causas. La esfera imanada se trataría de un imán permanente, su movimiento induce corriente en la placa, y estas corrientes generan otro campo magnético que actúa sobre la esfera.

Primero hablaremos de dicho imán permanente, en el interior de la esfera tenemos un campo uniforme en el mismo sentido que la magnetización, en el exterior podemos considerar la esfera como un dipolo magnético para calcular su campo magnético.

Un dipolo magnético es la mínima partición que puede hacerse de un imán. En el mundo de las cargas eléctricas disponemos de cargas positivas y negativas, sin embargo, para las cargas magnéticas el monopolo magnético no es posible. Dicho dipolo se modela como una espira por la que circula corriente. Para averiguar el campo magnético de la misma debemos atender a la ley de Biot-Savart, que determina el campo magnético debido a una corriente que circula por un alambre, en el caso de la espira, con una trayectoria cerrada. Este elemento posee un momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ y su campo magnético en forma vectorial es el siguiente.

$$\vec{B}_D = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{\mu}}{r^5}$$

Siendo \vec{r} el vector posición situando el eje de coordenadas en el propio dipolo y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío.

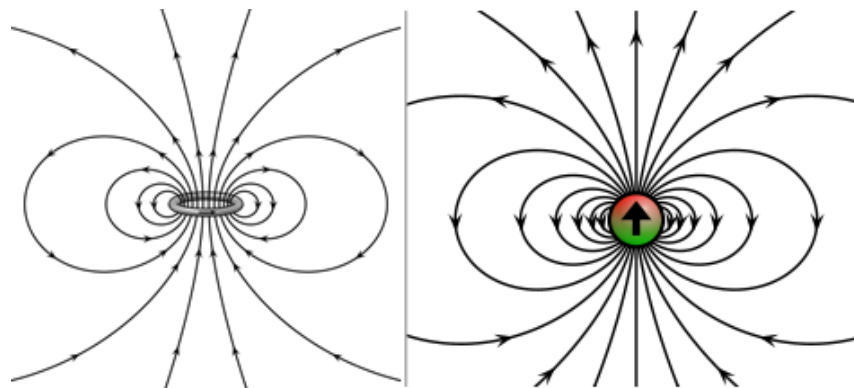


Figura 1 Campo magnético de un dipolo magnético modelado como espira o como elemento puntual^[2]

Las líneas del campo magnético del dipolo siguen trayectorias cerradas salientes de un polo, y entrantes por el otro, desde el punto de vista del modelo de espira, podría decirse que van alrededor del alambre, en la anterior ilustración queda más claro tanto si se estudia como una espira o como un elemento magnético puntual.

Una vez definido el campo de la esfera, explicaremos el efecto que este produce en el plano conductor al moverse, se trata de la inducción. Según la ley de Faraday de la inducción electromagnética, *“la fuerza electromotriz inducida en un circuito cerrado es igual a la relación negativa de incremento del flujo magnético ligado al circuito”*. En su versión vectorial.

$$\nabla \times \vec{E}_{plano} = -\frac{\partial \vec{B}_D}{\partial t}$$

Dicha fuerza electromotriz se opone al cambio de flujo a través de la superficie por lo que induce una corriente tal que se oponga a la variación de flujo, como se explica en la ley de Lenz. Cuando dichas corrientes no se inducen en un conductor bien definido sino a través de un material de volumen no despreciable, se conocen como corrientes de Foucault o corrientes parásitas.

Una vez inducida una corriente superficial en el plano, podemos definirla gracias a la ley de Ohm con una densidad superficial δ y una conductividad σ .

$$\vec{K} = \delta \vec{j} = \delta \sigma \vec{E}$$

Se ha hablado de los efectos que produce el dipolo magnético, pero no de los que sufre él mismo en la presencia de un campo magnético externo. De forma análoga al dipolo eléctrico en el seno de un campo eléctrico, el dipolo magnético sufre una fuerza y un momento. Como el campo externo no tiene porqué ser uniforme (de hecho, en este estudio no lo es ya que es creado por una distribución de corriente no uniforme), la fuerza viene dada por el gradiente del momento dipolar multiplicado escalarmente por el campo aplicado, en el caso de este estudio, aplicado por el plano conductor.

$$\vec{F}^m = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{plano})$$

Si estudiáramos un dipolo magnético como una espira, en ella se apreciarían fuerzas puntuales que hacen que se expanda o contraiga, pero nos interesa el estudio del dipolo como elemento puntual, así que atenderemos a la fuerza resultante definida anteriormente. El par de fuerzas intrínseco se define como sigue.

$$\vec{M}^m = \vec{\mu} \times \vec{B}_{plano}$$

Estos fenómenos pueden apreciarse en el día a día. En el caso en el que existan fuerzas de rozamiento que hagan al dipolo frenarse, el campo de este tiende a alinearse con el campo aplicado de forma que el producto sea nulo y el par también. En este fenómeno se basan las brújulas. La inducción electromagnética es la base de los motores eléctricos y generadores.

1.2 Fundamentos teóricos de la cinemática y dinámica del sólido rígido

Analizaremos un supuesto genérico de una esfera que rueda sin deslizamiento sobre un plano horizontal. Presentaremos las bases para obtener sus ecuaciones del movimiento suponiendo que tenemos un plano de gran extensión en comparación con el tamaño de la esfera, y son aplicadas una fuerza y momento externos, a la vez que consideramos la acción de la gravedad.

El movimiento de un sólido rígido libre viene definido por 6 grados de libertad, tres de traslación (\vec{v}), y tres de rotación ($\vec{\omega}$). Por ello, necesitaríamos plantear 6 ecuaciones obtenidas de los Teoremas de cantidad de movimiento (TCM) y del momento cinético (TMC)^[3]. Pero al rodar sobre un plano solo dispone de 5 GDL ya que la velocidad en el eje normal a este es nula, se trata de un par esfera-plano.

Al estudiar un caso de rodadura sin deslizamiento, deberemos tener en cuenta sus condiciones o restricciones. Para este caso suponemos, como ya hemos comentado, que se mantiene el contacto puntual plano-esfera en todo momento, la tercera componente del vector de velocidad sería nula. Debido a este contacto, aparece la fuerza de rozamiento previamente mencionada. Siendo G , el centro de la esfera, y P el punto de contacto, tendremos que $\vec{v}_P = 0$.

$$\vec{v}_G = \vec{v}_P^0 + \vec{\omega} \times \overline{PG}$$

Como solo van a presentarse, supondremos que el plano se encuentra en posición horizontal, más adelante abordaremos con más detalle el caso del plano inclinado. Sobre la esfera actúan el peso $m\vec{g}$ (masa por gravedad), una fuerza y momento externos \vec{F}^{ext} y \vec{M}^{ext} , y debido al contacto con el plano, una normal a este, \vec{N} . Debido a que la esfera se mueve, aparece también una fuerza de rozamiento \vec{F}_p que se opone al movimiento del punto P . Si el sólido deslizara, el punto P se desplazaría en la misma dirección que el centro de masa, a este movimiento es al que se opone la fuerza de rozamiento, por lo que es opuesta a la fuerza aplicada. En la figura 2 se representan estas fuerzas, a su vez, se muestra el punto de referencia para el sistema de coordenadas XYZ.

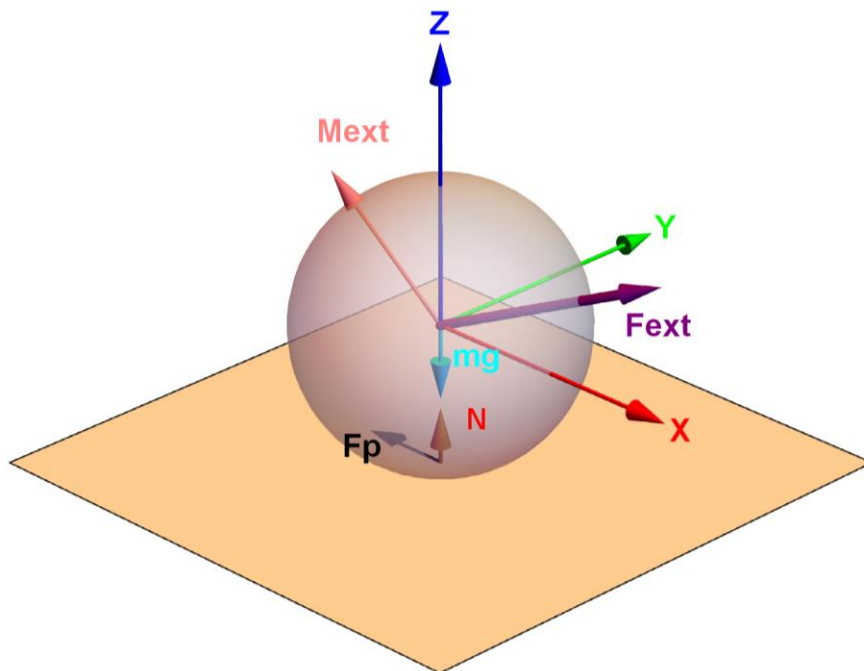


Figura 2 Representación de las fuerzas que actúan sobre una esfera y el sistema de coordenadas elegido

Una vez definidas las fuerzas presentes, se procede a aplicar el TCM, equivalente a la segunda Ley de Newton, donde la derivada de la velocidad por la masa es igual a la suma de todas las fuerzas aplicadas sobre el sólido. De la misma obtendríamos tres ecuaciones que definirían el movimiento de traslación.

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}_G}{dt}$$

Para aplicar el TMC, equivalente a las leyes de Euler, consideraremos que el momento externo se aplica sobre el centro de masas de la esfera, ya que reducimos el sistema de fuerzas a este punto, que también coincide con el origen del sistema de coordenadas en el instante inicial. Con dichas fórmulas definiremos la relación entre el momento y la velocidad angular del sólido, o su rotación, en cada uno de los ejes. Este momento incluye el par magnético aplicado, y el debido a la fuerza de contacto. Al tratarse de una esfera, el tensor de inercia se simplifica ya que es idéntico en todas las direcciones, quedando como sigue.

$$\vec{M}_G = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{I}_{esfera} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{2}{5} mR^2$$

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Una vez introducidos los conceptos necesarios para entender el problema, detallaremos algunas consideraciones referentes a los objetos de estudio y procedemos a plantearlo y resolver ciertas ecuaciones previas a la simulación y obtención de resultados.

Para estudiar los efectos que tiene la presencia de una superficie conductora sobre la que se desliza un imán, vamos a suponer una esfera imanada y un plano suficientemente extenso y conductor. Utilizaremos un modelo basado en características normales para cada elemento, detallados a continuación.

El problema propuesto se trata de estudiar la trayectoria, velocidad y posición angular de una esfera imanada que rueda sobre un plano inclinado.

2.1 Modelado esfera imanada

El sólido de estudio se define como una esfera uniformemente imanada, pero gracias a la Ley de Gauss, esta puede ser estudiada como un dipolo magnético puntual. A este dipolo le serán aplicadas las fuerzas y momentos pertinentes, y analizaremos su movimiento según el vector de magnetización y sus componentes.

Para los resultados cuantitativos consideraremos una esfera de neodimio de 5 mm de diámetro y 0.5 g de masa. Obtenemos su momento dipolar magnético multiplicando su volumen por la imanación de saturación, este será un valor teórico ya que en la práctica la cantidad que puede imanarse un objeto es menor.

$$\mu_{max} = V \cdot M_s = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot 1.27324 \cdot 10^6 \frac{A}{m} = 8.33 \cdot 10^{-2} Am^2$$

El campo magnético que produce en su exterior es idéntico al de un dipolo magnético, sigue líneas cerradas salientes de un polo y entrantes en el otro según el sentido del momento dipolar magnético. En su interior el campo es uniforme en todos sus puntos y rectilíneo, también en el sentido de su momento magnético.

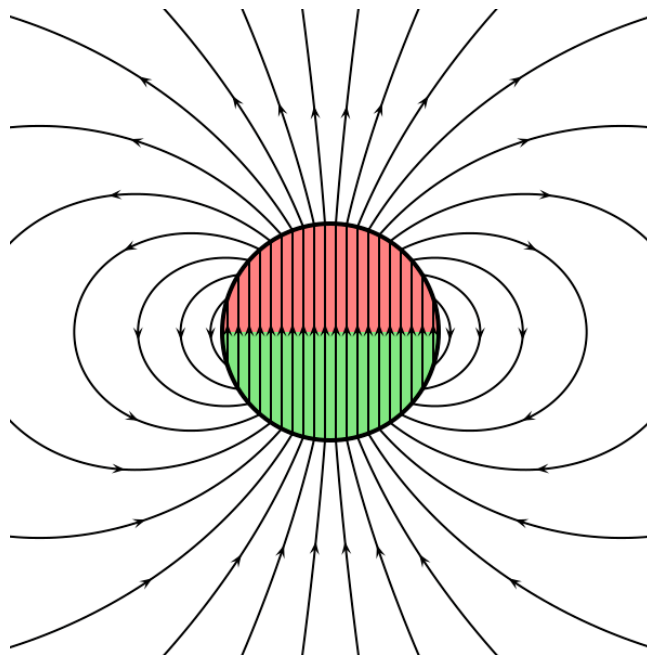


Figura 3 Campo magnético en el interior y exterior de una esfera imanada^[4]

2.2 Modelado plano conductor

El plano conductor óhmico sobre el que rueda la esfera se considera lo suficientemente extenso en comparación con la misma, y de pequeño espesor para que pueda aplicársele una conductividad superficial σ , con un valor de $37.8 \cdot 10^6$ S/m en el supuesto de chapa de aluminio^[5] para los resultados cuantitativos. Para una chapa de cobre tendríamos $59.6 \cdot 10^6$ S/m. Consideraremos un espesor δ de 10^{-3} m. Por lo tanto, el producto $\sigma\delta$ valdrá, para el aluminio, 37800.

El aluminio y el cobre son materiales no ferromagnéticos, esto quiere decir que no se verán atraídos ni repelidos por la presencia de un campo magnético.

2.3 Efectos electromagnéticos

No nos enfrentamos a una simple esfera que rueda sobre un plano inclinado. Esta tiene una componente de imanación que va cambiando según rueda y se desplaza por el mismo. Esto hace que en el plano conductor óhmico se generen corrientes de Foucault, lo que a su vez afecta al movimiento de la esfera ejerciendo una fuerza y momento en ella.

Dicho efecto ya ha sido estudiado^[6] así que nos limitaremos a exponer los resultados del estudio. Se calculó la densidad de corriente de la placa o plano conductor a partir de las leyes de Faraday, Ohm y conservación de la carga, que indica que, si en un sistema cerrado no existe un flujo con el exterior, se debe mantener la suma total de sus cargas constantes.

2.3.1 Densidad de corriente

Estas son las ecuaciones en derivadas parciales de la densidad de corriente en coordenadas polares. La primera ecuación procede de la divergencia de \vec{K} , la que igualada a cero hace referencia al principio de conservación de la carga. La segunda es consecuencia de la ley de Faraday, por la que se inducen corrientes debido al campo \vec{B}_D en la placa conductora.

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho K_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} \right) = 0$$
$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho K_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial K_\rho}{\partial \theta} \right) = -\delta\sigma \frac{\partial B_D}{\partial t}$$

Como se observa en las siguientes figuras, según la orientación del momento dipolar magnético de la esfera, aparecerán diferentes densidades de corriente. Se muestran dos ejemplos que muestran las formas que pueden tener estas. Primero, para $\vec{\omega}$ y $\vec{\mu}$ paralelos al plano del conductor, después, variando $\vec{\mu}$ al eje Z.

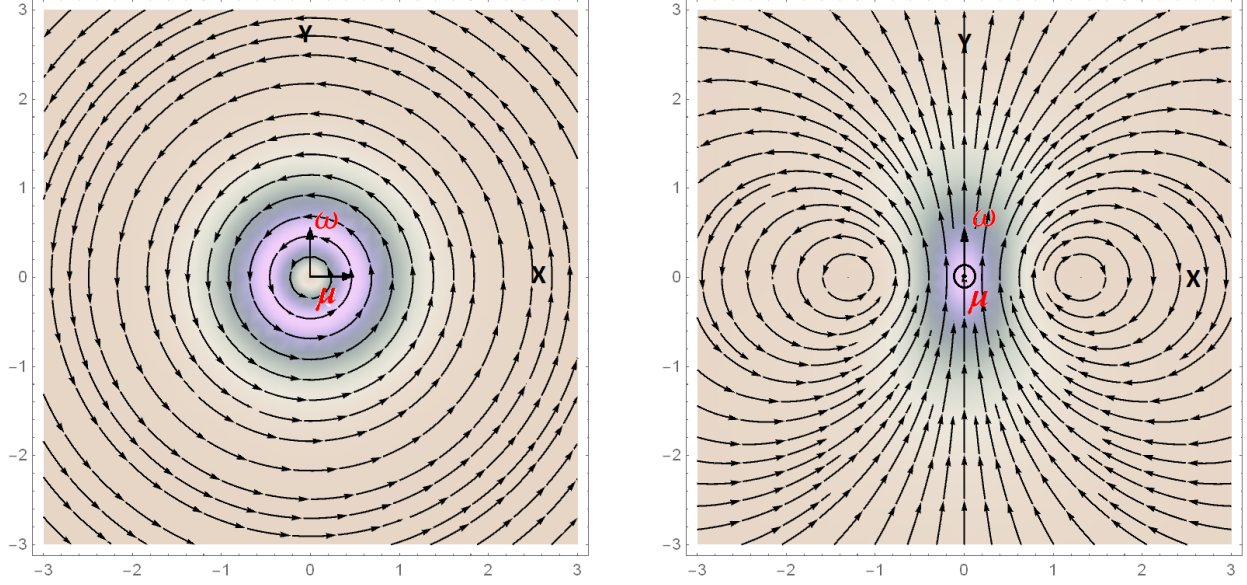


Figura 4 Densidades de corriente para $\vec{\omega}$ en el sentido del eje OY y $\vec{\mu}$ con dirección OX y OZ^[6]

2.3.2 Campo magnético inducido por la densidad de corriente

Una vez conocida la densidad de corriente, en el mismo estudio se obtiene el campo magnético inducido por las mismas, \vec{B}_{plano} , utilizando la ley de Biot-Savart con los cambios necesarios para trabajar en polares y con \vec{K} en vez de \vec{j} . Siendo $\Delta\vec{r}$ la distancia entre un punto genérico del plano y el centro de masa de la esfera, ya que ahí es donde nos interesa conocer el campo.

$$\vec{B}_{plano} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \rho d\rho d\theta$$

2.3.3 Fuerzas y momentos en la esfera debido a la inducción electromagnética

Este campo inducido ahora actúa sobre la esfera imanada. La fuerza que experimenta debida a la presencia de un campo magnético ya se vió en el apartado 1.1, aquí se muestra la ecuación resultante en función de $\vec{\omega}$, \vec{v} y $\vec{\mu}$, estos resultados provienen de un estudio previo^[6] al que se ha hecho referencia con anterioridad. Además de la fuerza, como se comentó en el primer apartado de este documento, la esfera sufre un par de fuerza debido a la acción magnética. Los tensores \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} y \vec{D} dependen todos de la orientación del momento dipolar magnético.

$$\vec{F}^m = \vec{A} \cdot \vec{v} + \vec{B} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{M}^m = \vec{C} \cdot \vec{v} + \vec{D} \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{A} = \frac{3\mu_0^2\sigma\delta}{512\pi R^4} \begin{pmatrix} -3\mu_x^2 - \mu_y^2 - 4\mu_z^2 & -2\mu_x\mu_y & 0 \\ -2\mu_x\mu_y & -\mu_x^2 - 3\mu_y^2 - 4\mu_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & -4(\mu_x^2 + \mu_y^2 + 2\mu_z^2) \end{pmatrix}$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0^2 \sigma \delta}{64\pi R^3} \begin{pmatrix} -\mu_x \mu_y & \mu_x^2 + \mu_z^2 & -\mu_y \mu_z \\ -\mu_y^2 - \mu_z^2 & \mu_x \mu_y & \mu_x \mu_z \\ \mu_y \mu_z & -\mu_x \mu_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \frac{\mu_0^2 \sigma \delta}{64\pi R^3} \begin{pmatrix} -\mu_x \mu_y & -\mu_y^2 - \mu_z^2 & \mu_y \mu_z \\ \mu_x^2 + \mu_z^2 & \mu_x \mu_y & -\mu_x \mu_z \\ -\mu_y \mu_z & \mu_x \mu_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{D} = \frac{\mu_0^2 \delta \sigma}{64\pi R^2} \begin{pmatrix} -2\mu_y^2 - \mu_z^2 & 2\mu_x \mu_y & \mu_x \mu_z \\ 2\mu_x \mu_y & -2\mu_x^2 - \mu_z^2 & \mu_y \mu_z \\ \mu_x \mu_z & \mu_y \mu_z & -\mu_x^2 - \mu_y^2 \end{pmatrix}$$

2.4 Movimiento sobre un plano inclinado

Ahora analizaremos el problema desde un punto de vista cinemático y dinámico. Pero primero debemos aclarar el sistema de referencia utilizado. Para facilitar los cálculos vectoriales se ha elegido un sistema de referencia ligado al momento dipolar magnético de la esfera, en el centro de masas de esta. Al realizar cálculos en un sistema como este debe tenerse en cuenta el movimiento del sistema de referencia mediante las fórmulas de Poisson.

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_1 = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_0 + \vec{\omega}_{01} \times \vec{A}$$

El sistema 0 es el ligado a la esfera, que se traslada y gira, y el 1 se trata de los ejes de referencia fijos.

Atendiendo a la cinemática del sólido rígido^[7], caracterizaremos el movimiento de nuestra esfera. Partiendo del caso de rodadura, obtenemos la relación entre la velocidad lineal del centro de masas y la velocidad de rotación. Considerando que el punto de contacto no desliza, es decir, su velocidad es nula, el movimiento será tal que la única componente de la velocidad de la esfera será en torno al eje instantáneo de rotación que pase por $\vec{\omega}$. La consideración de contacto permanente implica que la velocidad en z sea cero.

$$\vec{v}_G = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PG} = \omega_y R \vec{i} - \omega_x R \vec{j} \quad (1)$$

De nuevo aplicando la fórmula de Poisson obtenemos la ecuación que caracteriza el movimiento del momento dipolar magnético. Teniendo en cuenta que, en el sistema ligado al sólido, $\vec{\mu}$ es constante, solo nos quedaría el término correspondiente a la rotación entre sistemas, la rotación de la esfera.

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mu}$$

Desarrollando componente a componente.

$$\begin{cases} \frac{d\mu_x}{dt} = \omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -\omega_x\mu_z + \omega_z\mu_x \\ \frac{d\mu_z}{dt} = \omega_x\mu_y - \omega_y\mu_x \end{cases} \quad (2)$$

Establecidas las relaciones cinemáticas, pasamos a la dinámica. La esfera rueda sin deslizamiento sobre el plano, actuando sobre ella la fuerza y momento magnéticos anteriormente desarrollados. Debido al contacto con el plano y por la tercera Ley de Newton o *principio de acción y reacción*, aparece una fuerza de contacto normal \vec{N} . También existe una fuerza de rozamiento en el punto de contacto P. En la siguiente figura se apreciará la descomposición de la fuerza peso según el ángulo de inclinación del plano y el sistema de coordenadas elegido para el estudio. Esta descomposición del peso nos permite estudiar el caso inclinado como si fuera un plano horizontal y aplicáramos una fuerza tangente al plano equivalente a la componente tangencial del peso. Para los cálculos computacionales haremos uso de esta equivalencia.

Ya que suponemos que siempre habrá contacto, es decir, el contacto esfera-plano es constante, la componente Z de la velocidad se considera nula.

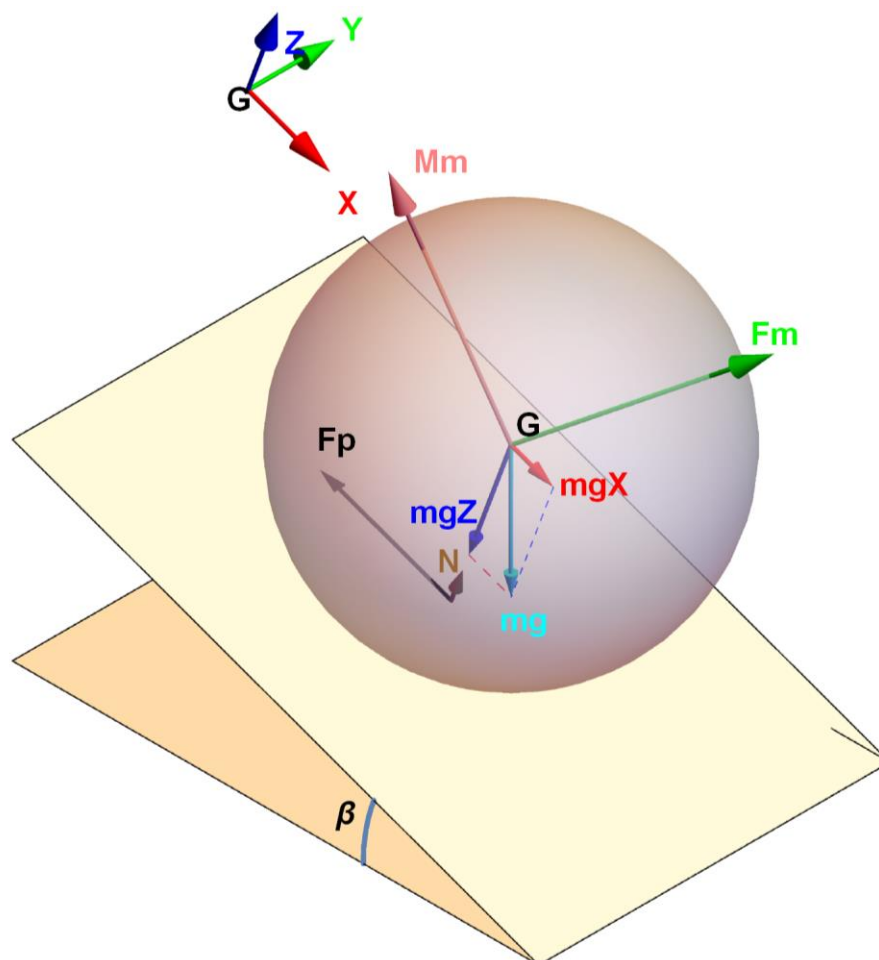


Figura 5 Representación de la descomposición del peso y fuerzas que actúan sobre la esfera

Como puede apreciarse en la figura 5, la fuerza peso se divide en una componente normal al plano y otra paralela al mismo. En la misma dirección, pero sentido opuesto a la primera componente se encuentra la fuerza normal \vec{N} , de la misma magnitud que esta (aunque en el esquema para que sea más claro se ha dibujado de menor tamaño), por lo que se anulan entre sí. La fuerza de rozamiento se aplica en el punto de contacto P y

tiene la dirección opuesta al movimiento de dicho punto, en general opuesto a la fuerza aplicada. Para mayor claridad se han colocado los ejes fuera de la esfera, pero se sitúan en el punto G o centro de masas de esta.

Aplicando el TCM o segunda Ley de Newton al movimiento completo obtenemos un primer conjunto de ecuaciones que describen el movimiento de una esfera que rueda sobre un plano inclinado, incluyendo un último término referente a la acción de la fuerza magnética.

$$\sum_{i=0}^n \vec{F}_i = m \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2}$$

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}^P + \vec{N} + \vec{F}^m \quad (3)$$

Aplicando ahora el TMC al movimiento, aparecen el momento generado por la acción de la fuerza en P (se considera \vec{N} como la componente Z de la fuerza aplicada en P) y el momento magnético. No aparece momento debido al peso ya que este se entiende que actúa sobre el centro de masas.

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = R(-\vec{k}) \times \vec{F}^P + \vec{M}^m = \begin{pmatrix} F_y^P R \\ -F_x^P R \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{M}^m \quad (4)$$

2.5 Obtención del sistema de ecuaciones del problema

Expuestas las ecuaciones que rigen nuestro problema, las desarrollaremos y relacionaremos entre sí, con ayuda del tutor^[8], para obtener un sistema de ecuaciones final con el que podamos estudiar y analizar el movimiento. Para más comodidad en el manejo de estas ecuaciones definiremos las aceleraciones lineal y angular.

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \alpha_y R \vec{i} - \alpha_x R \vec{j} \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (5)$$

Aparte de la fuerza y momento magnéticos \vec{F}^m y \vec{M}^m , consideraremos una fuerza aplicada \vec{F}^{aplic} que englobará la acción del peso en las direcciones X y Z de nuestro sistema de referencia. Como se vió en la figura 5, β es el ángulo de inclinación del plano.

$$F_x^{aplic} = mg \operatorname{sen}(\beta) \quad F_y^{aplic} = 0 \quad F_z^{aplic} = -mg \operatorname{cos}(\beta)$$

Por último, y debido a que resultaría engorroso acarrear la definición completa de la fuerza magnética, trabajaremos con la siguiente notación de los tensores \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} y \bar{D} .

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{pmatrix} \quad \bar{D} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix}$$

Partimos del TCM esta vez desarrollado en forma matricial e incluyendo la definición de la fuerza magnética vista en el apartado 2.3.3. Tenemos, al igual que en la ecuación (3), un primer término para la fuerza aplicada en P, otro para la fuerza peso que aquí introducimos como una fuerza aplicada, y los últimos sumandos corresponden a la fuerza magnética.

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x^P \\ F_y^P \\ F_z^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x^{\text{aplic}} \\ F_y^{\text{aplic}} \\ F_z^{\text{aplic}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Aplicando las relaciones de la aceleración y velocidad lineales con sus versiones angulares (ecuaciones 1 y 5) podemos agrupar los elementos de los tensores para que queden todos en función de $\vec{\omega}$.

$$\begin{aligned} mR \begin{pmatrix} \alpha_y \\ -\alpha_x \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_x^P \\ F_y^P \\ F_z^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x^{\text{aplic}} \\ F_y^{\text{aplic}} \\ F_z^{\text{aplic}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y R \\ -\omega_x R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} F_x^P \\ F_y^P \\ F_z^P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_x^{\text{aplic}} \\ F_y^{\text{aplic}} \\ F_z^{\text{aplic}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{xx} - RA_{xy} & B_{xy} + RA_{xx} & B_{xz} \\ B_{yx} - RA_{yy} & B_{yy} + RA_{yx} & B_{yz} \\ B_{zx} - RA_{zy} & B_{zy} + RA_{zx} & B_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora cambiamos el signo de la segunda fila y la intercambiamos con la primera, a la vez que multiplicamos por R todas ellas, más adelante veremos por qué se hace este último paso.

$$mR^2 \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -F_y^P \\ F_x^P \\ F_z^P \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -F_y^{\text{aplic}} \\ F_x^{\text{aplic}} \\ F_z^{\text{aplic}} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} -B_{yx} + RA_{yy} & -B_{yy} - RA_{yx} & -B_{yz} \\ B_{xx} - RA_{xy} & B_{xy} + RA_{xx} & B_{xz} \\ B_{zx} - RA_{zy} & B_{zy} + RA_{zx} & B_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Por ahora dejaremos esa ecuación y desarrollaremos el TMC de la ecuación (4). En este aparece un primer sumando que representa el momento que genera una fuerza de rozamiento en cualquier esfera que rueda. El segundo y tercero corresponden al momento magnético obtenido en el apartado 2.3.3.

$$I \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_y^P R \\ -F_x^P R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

De nuevo aplicamos la relación entre la velocidad lineal y angular.

$$\begin{aligned}
I \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_y^P R \\ -F_x^P R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y R \\ -\omega_x R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} F_y^P R \\ -F_x^P R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{xx} - C_{xy}R & D_{xy} + C_{xx}R & D_{xz} \\ D_{yx} - C_{yy}R & D_{yy} + C_{yx}R & D_{yz} \\ D_{zx} - C_{zy}R & D_{zy} + C_{zx}R & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ahora sumamos a esta ecuación las dos primeras componentes de la ecuación anterior. La última componente no nos interesa ya que no aporta nada al estar igualada a cero. Gracias a que la multiplicamos previamente por R, los términos de la fuerza aplicada en el punto P se compensan, simplificando la ecuación.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (I + mR^2)\alpha_x \\ (I + mR^2)\alpha_y \\ I\alpha_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -RF_y^{\text{aplic}} \\ RF_x^{\text{aplic}} \\ 0 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} D_{xx} - (C_{xy} + B_{yx})R + A_{yy}R^2 & D_{xy} + (C_{xx} - B_{yy})R - A_{yx}R^2 & D_{xz} - B_{yz}R \\ D_{yx} - (C_{yy} - B_{xx})R - A_{xy}R^2 & D_{yy} + (C_{yx} + B_{xy})R + A_{xx}R^2 & D_{yz} + B_{xz}R \\ D_{zx} - C_{zy}R & D_{zy} + C_{zx}R & D_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esta casi sería nuestra ecuación final, el siguiente paso es sustituir los valores de las componentes de los tensores y el valor del momento de inercia de la esfera, visto en el apartado 1.2. Quedándonos la ecuación como sigue.

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{7}{5}\right) mR^2 \alpha_x \\ \left(\frac{7}{5}\right) mR^2 \alpha_y \\ \left(\frac{2}{5}\right) mR^2 \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -RF_y^{\text{aplic}} \\ RF_x^{\text{aplic}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sigma\delta\mu_0^2}{512\pi R^2} \begin{pmatrix} 3\mu_x^2 + 9\mu_y^2 + 4\mu_z^2 & -6\mu_x\mu_y & 0 \\ -6\mu_x\mu_y & 9\mu_x^2 + 3\mu_y^2 + 4\mu_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 8\mu_x^2 + 8\mu_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Debemos multiplicar las dos primeras filas por 5/7 y la última por 5/2. Este valor es diferente porque en el TCM la componente α_z es nula, entonces solo aparece momento debido al par magnético. Aprovechamos para dividir todo por mR^2 . Finalmente, las ecuaciones que caracterizan el movimiento de nuestra esfera sometida a una fuerza y par magnético son las 6 siguientes en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \frac{d\omega_x}{dt} \\ \frac{d\omega_y}{dt} \\ \frac{d\omega_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{5}{7mR} \begin{pmatrix} -F_y^{\text{aplic}} \\ F_x^{\text{aplic}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{5\sigma\delta\mu_0^2}{3584\pi mR^4} \begin{pmatrix} 3\mu_x^2 + 9\mu_y^2 + 4\mu_z^2 & -6\mu_x\mu_y & 0 \\ -6\mu_x\mu_y & 9\mu_x^2 + 3\mu_y^2 + 4\mu_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 28(\mu_x^2 + \mu_y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\mu_x}{dt} \\ \frac{d\mu_y}{dt} \\ \frac{d\mu_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y\mu_z - \omega_z\mu_y \\ -\omega_x\mu_z + \omega_z\mu_x \\ \omega_x\mu_y - \omega_y\mu_x \end{pmatrix}$$

2.6 Escalado

Utilizaremos ecuaciones adimensionales para la simulación computacional pues esto hace que no sean dependientes de las magnitudes propias del problema particular. Cada variable estará compuesta de una adimensional y otra con las dimensiones. A continuación, se detalla el procedimiento para obtener estas variables y la forma posterior de obtener los resultados cuantitativos. En el apartado siguiente se presentarán las ecuaciones que finalmente se utilizarán en el programa de cálculo.

Escalaremos todas las magnitudes del problema, comenzando por la velocidad angular. Para ello nos fijaremos en la componente X de la derivada del momento dipolar magnético en las ecuaciones (2).

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \omega_y \mu_z - \omega_z \mu_y$$

Como ya se ha comentado, vamos a descomponer cada variable en sus componentes dimensional y adimensional.

$$\frac{\mu_u}{t_0} \frac{d\mu_x^*}{dt^*} = \omega_0 \omega_y^* \mu_u \mu_z^* - \omega_0 \omega_z^* \mu_u \mu_y^*$$

Ahora nos quedamos con las variables dimensionales. Los dos términos a la derecha de la igualdad tienen las mismas dimensiones. Aunque al estar en ambos lados multiplicando se anula, destacamos que el momento dipolar magnético tiene módulo constante, por lo tanto, sus dimensiones serán las de su propio valor normalizado. Obtenemos el escalado de la velocidad angular y el momento dipolar magnético.

$$\frac{\mu_u}{t_0} = \omega_0 \mu_u \quad \frac{1}{t_0} = \omega_0 \quad \mu_u = |\vec{\mu}|$$

Continuamos con las siguientes magnitudes, que escalaremos basándonos en la magnitud t_0 . Mismo procedimiento para la velocidad lineal, descomponemos en magnitudes adimensionales y dimensionales.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad v_0 \cdot \vec{v}^* = \frac{r_0}{t_0} \frac{d\vec{r}^*}{dt^*} \quad \vec{v}^* = \frac{d\vec{r}^*}{dt^*} \quad v_0 = \frac{r_0}{t_0}$$

Para la fuerza atendemos al TCM en su forma vectorial (ecuación 2) donde nos centraremos solo en \vec{F}^m ya que todos los sumandos deben tener las mismas dimensiones.

$$m \frac{v_0 d\vec{v}^*}{t_0 dt^*} = F_0^m \vec{F}^{m*} \quad m \frac{v_0}{t_0} = m \frac{r_0}{t_0^2} = F_0^m = F_0$$

Al definir F_0 de la misma forma que F_0^m , aparece un factor 5/7 en las ecuaciones escaladas, podríamos introducir dicho factor en la definición de F_0 de forma que en las ecuaciones desaparecería, pero se ha decidido escalar las dos fuerzas de forma similar.

Para obtener el escalado de t_0 partimos de la ecuación diferencial de ω_x que hace referencia al efecto electromagnético. Se comprobará después que el primer término de la ecuación tiene las mismas dimensiones,

pero trabajaremos con el segundo para imponer que el coeficiente que multiplica al paréntesis sea unitario.

$$\frac{d\omega_x}{dt} = -\frac{5\mu_0^2\delta\sigma}{3584\pi m R^4} \left((3\mu_x^2 + 9\mu_y^2 + 4\mu_z^2)\omega_x - 6\mu_x\mu_y\omega_y \right)$$

Separamos las variables en sus componentes dimensional y adimensional y nos quedamos con las dimensionales para encontrar la relación de t_0 .

$$\frac{\omega_0}{t_0} \frac{d\omega_x^*}{dt^*} = -\frac{5\mu_0^2\delta\sigma}{3584\pi m r_0^4 R^{*4}} \left((3\mu_u^2\mu_x^{*2} + 9\mu_u^2\mu_y^{*2} + 4\mu_u^2\mu_z^{*2})\omega_0\omega_x^* - 6\mu_u\mu_x^*\mu_u\mu_y^*\omega_0\omega_y^* \right)$$

$$\frac{\omega_0}{t_0} = \frac{5\mu_0^2\delta\sigma}{3584\pi m r_0^4} \mu_u^2 \omega_0 \quad t_0 = \frac{3584\pi m r_0^4}{5\mu_0^2\delta\sigma\mu_u^2}$$

Si definimos la masa como densidad por volumen, obtenemos un resultado en el que el tiempo característico es proporcional al radio de la esfera, siendo D la densidad de masa de la esfera

$$m = D \frac{4}{3} \pi r_0^3 \quad \mu_u = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot M_s \quad t_0 = \frac{2688D}{5\mu_0^2\delta\sigma M_s^2} r_0$$

A la hora de convertir un valor cualitativo o adimensional en uno cuantitativo con las dimensiones particulares de nuestro problema solo tendremos que multiplicar el resultado por la relación correspondiente de la forma que sigue.

$$\vec{v} = v_0 \cdot \vec{v}^*$$

Usaremos una variable para escalar las demás en función de ella, es decir, la variable elegida nos marcará las dimensiones del resto de magnitudes. Como antes, elegimos t_0 , siendo la permeabilidad magnética del vacío igual a $4\pi 10^{-7}$ Tm/A y con los datos conocidos del planteamiento para una esfera de 5 milímetros de diámetro, 0.5 gramos de masa y momento magnético $8.33 \cdot 10^{-2}$ Am² y un plano de conductividad $37.8 \cdot 10^6$ S/m y 10^{-3} m de espesor, obtenemos el siguiente valor, que será el tiempo característico de nuestro problema.

$$t_0 = 0.10618 \text{ s}$$

Este resultado indica que cada unidad de tiempo que utilicemos en las simulaciones equivaldrá a la cantidad que define el tiempo característico.

3 SIMULACIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo trataremos la simulación y el procedimiento de los cálculos en el programa Wolfram Mathematica V12^[9]. Comenzaremos por algunos aspectos sobre los métodos de cálculo utilizados, posibles inexactitudes en los resultados y las ecuaciones que se usarán. Se comentarán las condiciones iniciales y los parámetros que se irán modificando para obtener diferentes resultados.

3.1 Métodos de simulación

Para los cálculos en Mathematica vamos a utilizar la función *NDSolve* que proporciona aproximaciones numéricas de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Los resultados se obtienen en forma de funciones interpoladas que aportan aproximaciones del valor resultante en el rango especificado para el análisis. La función *NDSolve* trabaja de forma iterativa, es decir, comienza en un valor concreto de la variable temporal, y luego calcula el siguiente punto a una distancia o “paso” definido por las opciones internas de la función. Tras obtener los puntos en el rango especificado, se interpola la función para suavizar el resultado, por defecto se utiliza interpolación cúbica. Con este tipo de métodos pueden surgir según qué funciones y valores iniciales problemas de cálculo, puntos incoherentes o desbordamiento de datos.

Aunque todos parten del sistema de ecuaciones original, para cada caso usaremos un sistema diferente obtenido por las condiciones o suposiciones que hagamos. Analizaremos dos casos particulares y luego varios supuestos del caso general, partiendo del reposo, o con velocidades iniciales.

3.2 Ecuaciones utilizadas en la simulación y parámetros

Para la simulación utilizaremos las 6 ecuaciones anteriormente presentadas, pero en su versión adimensional, es decir, escaladas. También deberemos incluir como ecuaciones los valores iniciales de las variables.

En resumen, los parámetros más importantes que iremos variando son las condiciones iniciales de la velocidad de rotación, la orientación del momento dipolar magnético y la fuerza aplicada (en nuestro estudio solo aplicaremos fuerza en la dirección de avance, es decir en X, por lo que $F_y^{aplic} = 0$ y a partir de ahora denotaremos F_x^{aplic} simplemente como F^{aplic}). En algunos casos quizás haya que variar el tiempo de estudio para apreciar bien todo el movimiento.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mu_x}{dt} = \omega_y \mu_z - \omega_z \mu_y \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -\omega_x \mu_z + \omega_z \mu_x \\ \frac{d\mu_z}{dt} = \omega_x \mu_y - \omega_y \mu_x \\ \frac{d\omega_x}{dt} = -\left((3\mu_x^2 + 9\mu_y^2 + 4\mu_z^2)\omega_x - 6\mu_x \mu_y \omega_y \right) \\ \frac{d\omega_y}{dt} = -\left(-6\mu_x \mu_y \omega_x + (9\mu_x^2 + 3\mu_y^2 + 4\mu_z^2)\omega_y \right) + \frac{5}{7} F^{aplic} \\ \frac{d\omega_z}{dt} = -28(\mu_x^2 + \mu_y^2)\omega_z \end{array} \right.$$

Una vez resolvamos estas ecuaciones, obtendremos las referentes a la velocidad lineal y trayectoria de la esfera. Para ello utilizaremos la relación descrita por las ecuaciones de rodadura (1) e integraremos la velocidad obtenida para obtener la ecuación de la trayectoria $\vec{r} = \{x_G, y_G\}$ (como ya se comentó las componentes Z de estas magnitudes son nulas para todo t). Consideraremos que la esfera parte del origen del sistema de referencia.

$$\begin{cases} v_{G_x} = \omega_y R \\ v_{G_y} = -\omega_x R \\ x_G = \int_0^t v_{G_x} dt \\ y_G = \int_0^t v_{G_y} dt \end{cases}$$

3.2.1 Caso particular I. El vector $\vec{\mu}$ se mantiene en la dirección del eje OY

Primero vamos a analizar el caso particular de que el momento dipolar esté orientado siempre en la dirección del eje OY. Para ello anulamos inicialmente $\omega_x, \omega_z, \mu_x$ y μ_z , y aplicamos una fuerza en la dirección del eje OX. Observando las ecuaciones, con estas condiciones se anulan las derivadas de $\vec{\mu}$ y las componentes ω_x y ω_z , por lo que las ecuaciones para el resto del análisis son las siguientes

$$\begin{cases} \dot{\mu}_x = \dot{\mu}_y = \dot{\mu}_z = 0 \\ \dot{\omega}_x = 0 \\ \dot{\omega}_y = -3\mu_y^2 \omega_y + \frac{5}{7} F^{aplic} \\ \dot{\omega}_z = 0 \end{cases}$$

Como suponemos $\vec{\mu}$ siempre en la misma dirección, no iremos variando ningún ángulo, solo la fuerza aplicada.

3.2.2 Caso particular II. El vector $\vec{\mu}$ se mantiene contenido en el plano OXZ

Vamos a estudiar otro caso particular con más detalle. Si consideramos que el momento dipolar magnético se encuentra inicialmente en el plano OXZ, es decir, μ_y nula, las ecuaciones se simplifican, anulándose las componentes X y Z de $\vec{\omega}$ para todo el movimiento. Las ecuaciones del caso general se reducen de la forma que sigue.

$$\begin{cases} \dot{\mu}_x = \omega_y \mu_z \\ \dot{\mu}_y = 0 \\ \dot{\mu}_z = -\omega_y \mu_x \\ \dot{\omega}_y = \frac{5}{7} F^{aplic} - 9\mu_x^2 \omega_y - 4\mu_z^2 \omega_y \\ \dot{\omega}_x = \dot{\omega}_z = 0 \end{cases}$$

Consideraremos varios casos en los que variaremos la fuerza aplicada ya que el ángulo de inclinación inicial de $\vec{\mu}$ solo afecta levemente al primer tramo de los resultados, y la velocidad de rotación inicial, aunque comprobaremos sus efectos, no es de mucho interés. Utilizaremos el mismo método de simulación para obtener dichos resultados, únicamente reducimos el número de ecuaciones y de incógnitas.

3.2.3 Caso general partiendo del reposo y con velocidades iniciales no nulas

Se ha definido el vector $\vec{\mu}$ inicial de forma que podemos modificarlo con dos parámetros correspondientes a los ángulos de coordenadas esféricas, θ y ϕ (medido respecto de OY). Estos los iremos variando para poder abarcar diferentes estados iniciales de interés. También podremos modificar la velocidad inicial y la fuerza aplicada. Una vez calculemos las componentes a lo largo del tiempo de estudio, definido por nosotros también, calcularemos la velocidad lineal del centro de masas, e integraremos esta última para obtener la trayectoria que describe la esfera.

Para este caso se van a estudiar varias condiciones iniciales de interés. Primero estudiaremos el movimiento partiendo del reposo, después comprobaremos que ocurre si, estando el vector $\vec{\mu}$ en la dirección OY tiene velocidades iniciales diferentes de cero. Entre las pruebas en reposo, analizaremos que ocurre cuando el momento dipolar magnético se encuentra inicialmente en una posición casi vertical y en otra más distanciada de este eje.

3.3 Resultados adimensionales

Tras introducir las ecuaciones escaladas en el programa para la simulación, se han realizado varias pruebas. Durante las mismas se han observado varios casos a los que se les ha dedicado una especial atención. Después, en el caso general, se ha ido variando la orientación inicial de dicho vector para diferentes fuerzas aplicadas. Estas fuerzas equivalen a la inclinación del plano, como se ha explicado anteriormente.

3.3.1 Caso particular I. El vector $\vec{\mu}$ se mantiene en la dirección del eje OY

Comenzaremos suponiendo que el momento dipolar magnético se mantiene siempre en la dirección del eje OY. De las ecuaciones puede suponerse que las componentes del vector $\vec{\mu}$ y ω_z se mantendrán constantes. Solo ω_y variará en función de la velocidad angular inicial y la fuerza aplicada. Observando dicha ecuación podemos presuponer que al partir de una ω_y nula, la derivada inicialmente valdrá lo que el término de la fuerza, entonces si esta es positiva, la velocidad aumentará de forma que este aumento cada vez será menor, pues el primer término, negativo, se opone al segundo. Llegado el punto en el que ambos términos se compensen, la derivada será nula y por tanto la velocidad angular constante. Su valor será proporcional a la fuerza aplicada, para ser exactos, 5/21 veces esta. Dicha relación se observa en la figura 7, donde se mantiene constante.

$$\dot{\omega}_y = -3\mu_y^2\omega_y + \frac{5}{7}F^{aplic} = 0$$

$$3\overbrace{\mu_y^2}^1\omega_y = \frac{5}{7}F^{aplic}$$

$$\omega_y = \frac{5}{21}F^{aplic}$$

Si la analizamos a lo largo del tiempo, se trata de una ecuación diferencial de primer orden que podemos resolver analíticamente. Como resultado tenemos una diferencia de un término inversamente exponencial, es decir, comenzamos restando un gran valor que va disminuyendo exponencialmente hasta ser nulo, en ese momento se alcanza el régimen estable. Para las diferentes fuerzas tendremos una curva con la misma forma, pero en diferente proporción, el tiempo de establecimiento es similar en todas ellas e igual a 5 veces la inversa de la constante de tiempo $\tau = 3$, por lo que vale $\frac{5}{3}$. En este punto consideraremos que se ha llegado al valor estable, ya que la diferencia con este es pequeña.

$$\omega_y = (1 - e^{-3t}) \frac{5}{21} F^{aplic}$$

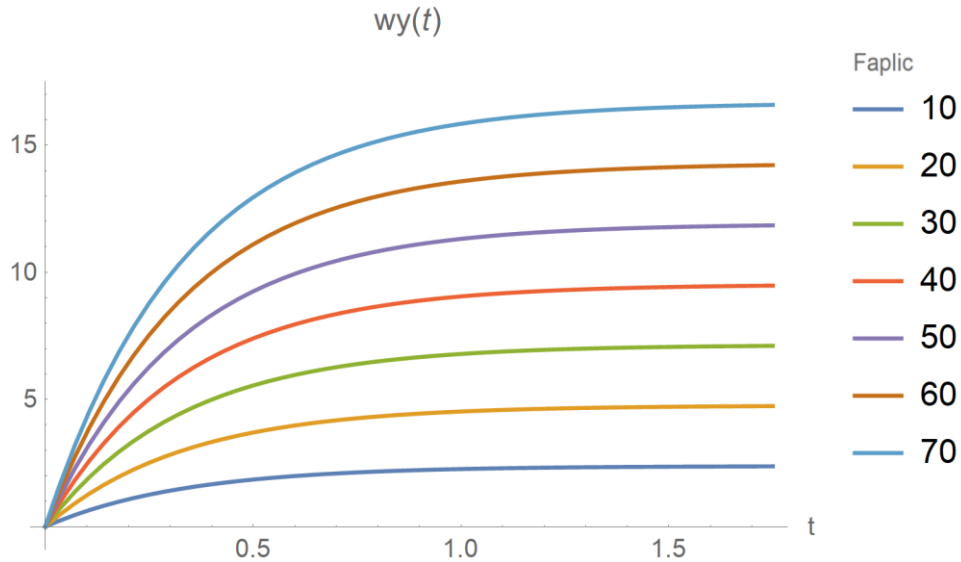


Figura 6 Caso particular I- ω_y para diferentes fuerzas aplicadas

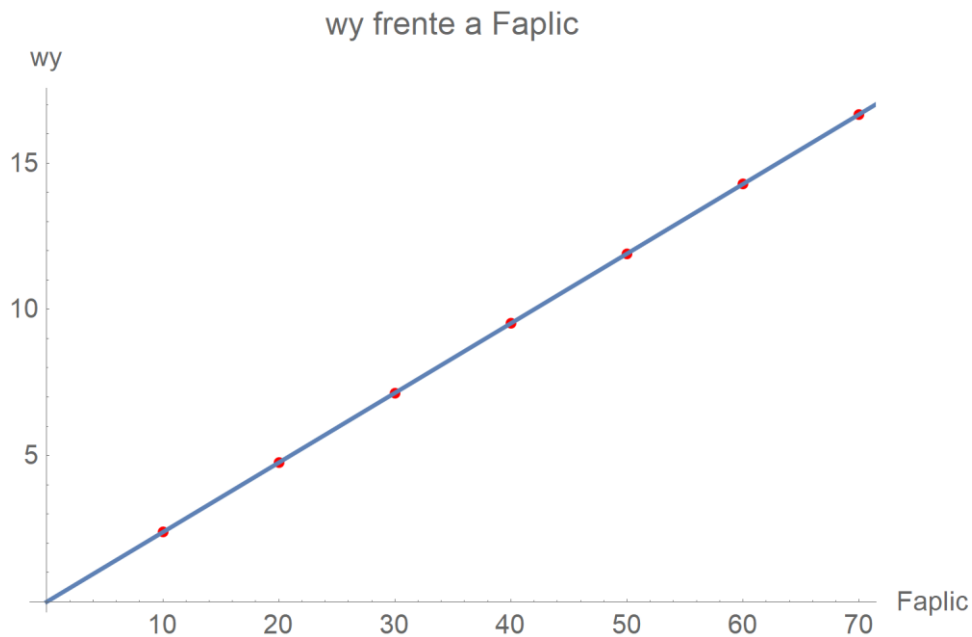


Figura 7 Caso particular I- Recta de mejor ajuste para la relación entre ω_y y la fuerza aplicada

En esta gráfica relacionamos el valor de ω_y en el régimen estable con la fuerza aplicada. Resulta una recta con ecuación $\omega_y = a + bF^{aplic}$, siendo $a = 1.17 \cdot 10^{-3} \pm 1.72 \cdot 10^{-3}$, la $b = 2.37 \cdot 10^{-1} \pm 3.86 \cdot 10^{-5}$ y el coeficiente de correlación $r = 0.99999998$. Comprobamos que la relación es lineal en todo momento, demostrando así la proporcionalidad entre ambas magnitudes en el estado estacionario. Se han probado fuerzas de un orden menor, entre 0.1 y 1, y la relación se mantiene así que nos ahorramos mostrar la gráfica. La velocidad lineal en el eje X es similar a la velocidad angular en Y al considerar la R adimensional igual a 1.

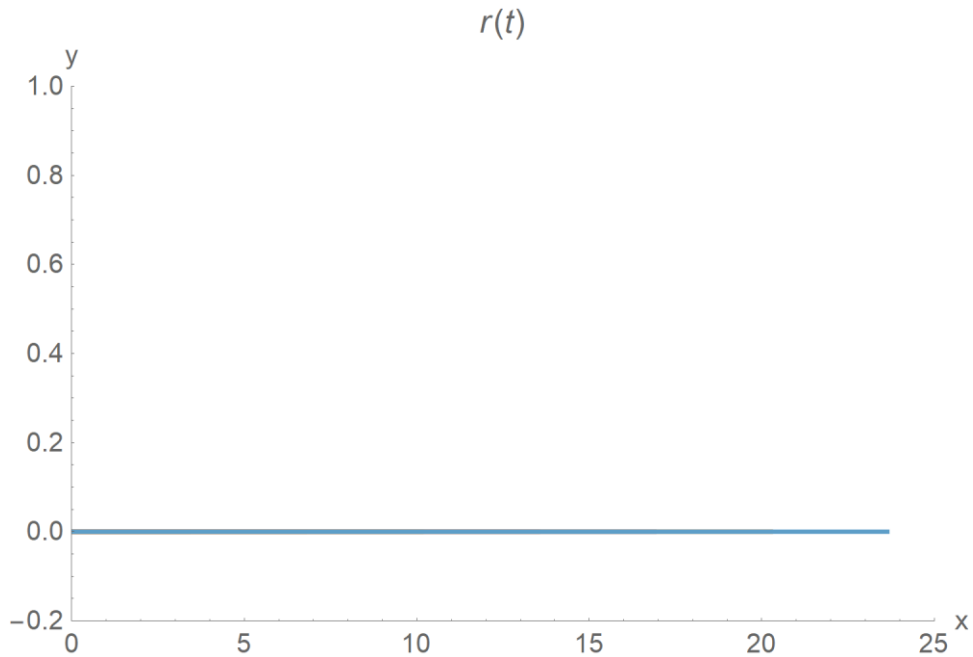


Figura 8 Caso particular I- Trayectoria para diferentes fuerzas aplicadas

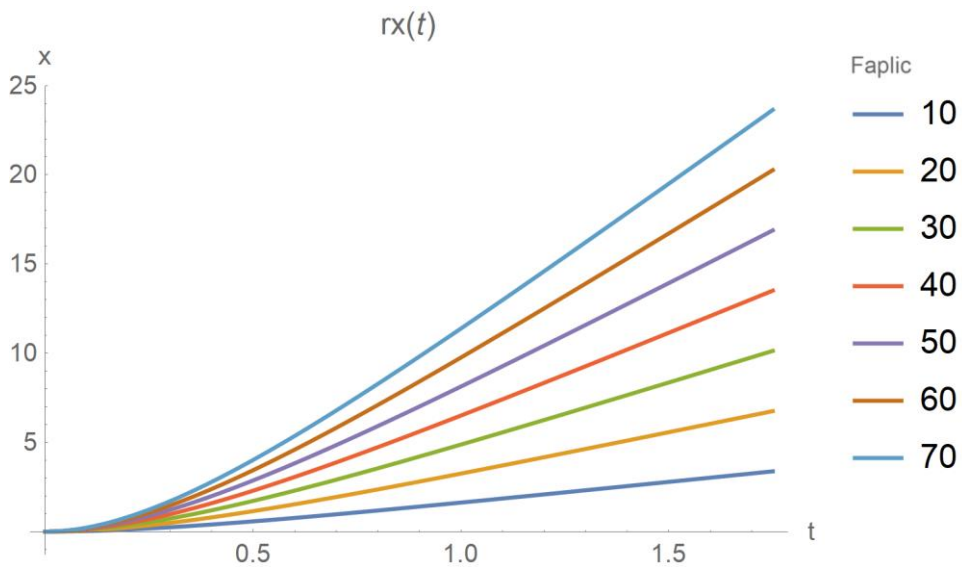


Figura 9 Caso particular I- Recorrido en X para diferentes fuerzas aplicadas

Si prestamos atención a la trayectoria descrita por el centro de la esfera vemos que es rectilínea, ya que la velocidad angular solo tiene valor no nulo en la componente Y por lo que la velocidad lineal solo la tiene en X . En la figura 8 están superpuestas las trayectorias para las diferentes fuerzas. Para el tiempo de estudio la distancia recorrida varía como puede verse en la figura 9, donde se ha representado la distancia alcanzada en la dirección del eje X a lo largo del tiempo para cada fuerza. Destacamos dos partes en esta gráfica, una primera parte que no es lineal ya que la velocidad angular en ese momento está creciendo (periodo transitorio) y una segunda en la que las curvas son rectilíneas ya que se establece la velocidad en un valor estable (régimen estacionario). En función de la fuerza aplicada, estas rectas tendrán mayor o menor pendiente, lo que quiere decir también que las velocidades alcanzadas serán mayores, de ahí que la distancia final varíe.

3.3.2 Caso particular II. El vector $\vec{\mu}$ se mantiene contenido en el plano OXZ

Para este caso, con condiciones iniciales nulas, y la aplicación de una fuerza, se aprecia un pequeño transitorio antes de alcanzar un régimen oscilatorio permanente en la componente Y de la rotación. La esfera solo rota en dicho sentido, por lo tanto, solo se desplaza en la dirección del eje OX en un movimiento rectilíneo con una velocidad en la misma dirección y sentido, cuyo valor oscila al igual que ω_y . Para varios valores de la fuerza aplicada, se ha analizado el movimiento y con más detalle el tramo oscilatorio.

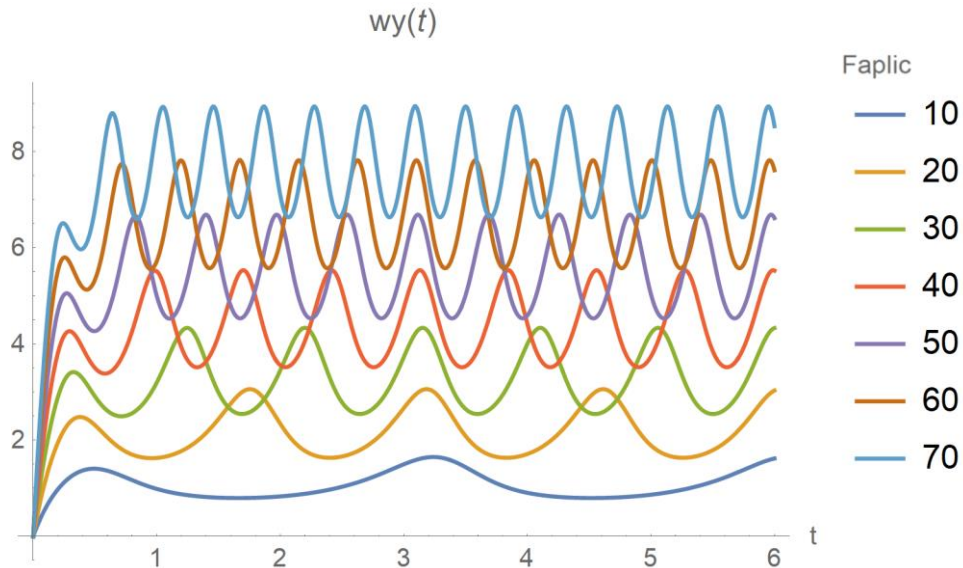


Figura 10 Caso particular II- ω_y para diferentes fuerzas aplicadas

Al comienzo del movimiento, partiendo del reposo, hay un transitorio en el que la esfera comienza a rodar. Aunque no se incluyen gráficas, se ha comprobado que, si se parte con una velocidad distinta de cero, esta aumentará o disminuirá hasta alcanzar los valores correspondientes al régimen oscilatorio, mismo régimen que si partiera del reposo. En el caso de que, partiendo de velocidad nula, el vector $\vec{\mu}$ se encuentre en diferentes posiciones dentro del plano OXZ, el movimiento solo se verá afectado de forma que, durante el transitorio, la velocidad de rotación sufrirá mayor o menor distorsión hasta encontrar de nuevo la zona del régimen oscilatorio. Podemos ver como para diferentes fuerzas cambia el periodo de la curva, así como su valor medio. También se ve modificado ligeramente el tiempo de establecimiento, y el momento en el que se da la primera oscilación va disminuyendo al aumentar la fuerza.

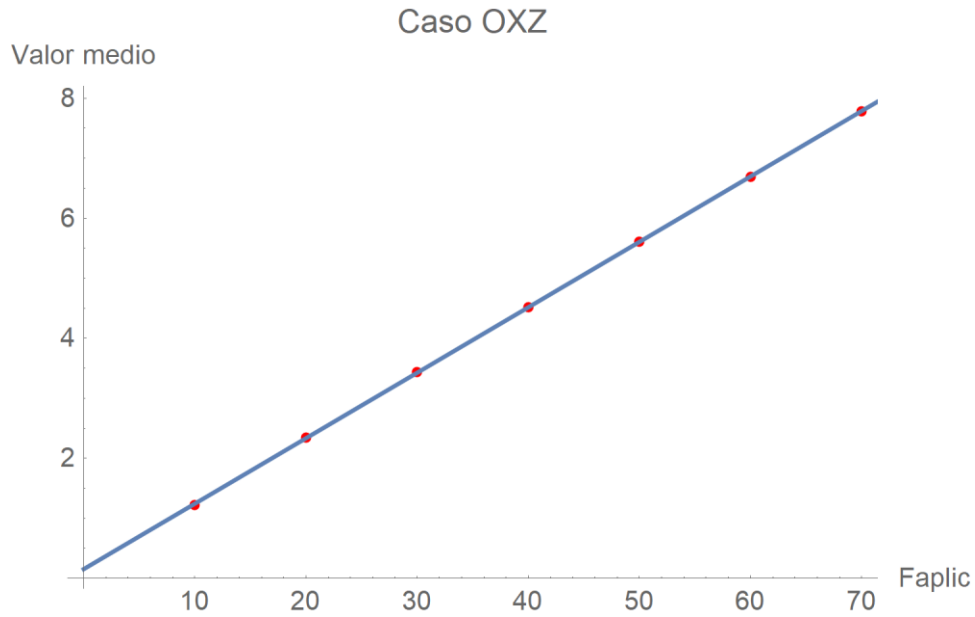


Figura 11 Caso particular II- Recta de mejor ajuste para valores medios de ω_y en régimen permanente

Al igual que en el caso anterior, en el estado estacionario se alcanza una relación lineal entre la velocidad angular en la dirección Y y la fuerza aplicada. Resulta una recta con ecuación $\omega_y = a + bF^{aplic}$, siendo $a = 1.54 \cdot 10^{-1} \pm 2.16 \cdot 10^{-2}$, la $b = 1.09 \cdot 10^{-1} \pm 4.82 \cdot 10^{-4}$ y el coeficiente de correlación $r = 0.9998$.

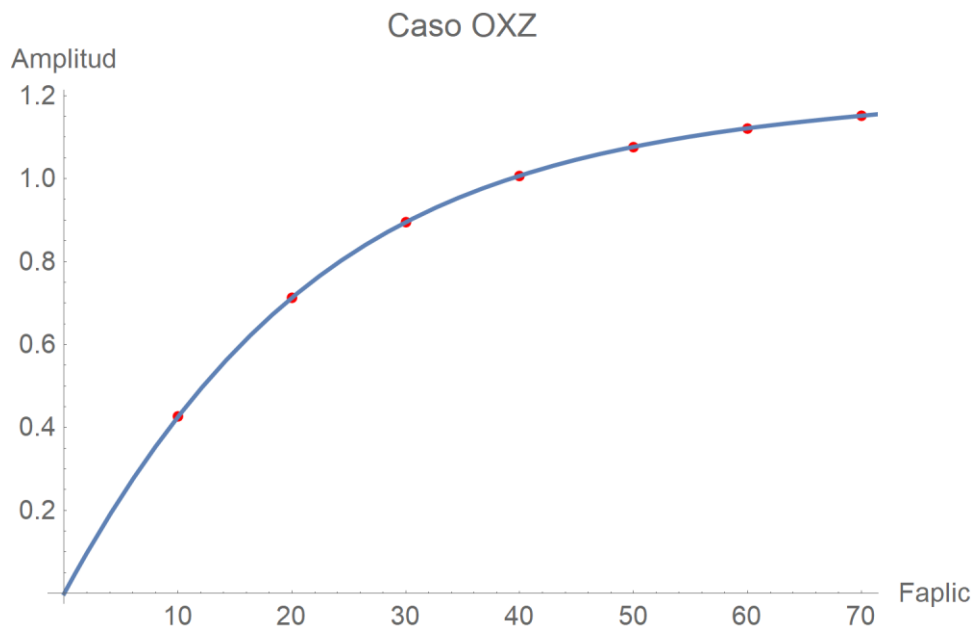


Figura 12 Caso particular II- Curva de interpolación para la amplitud de ω_y en régimen permanente

Prestando atención a otras características de las curvas, como la amplitud, vemos que esta va aumentando de forma que parece establecerse en un valor cercano a 1.2. Si analizáramos más fuerzas podríamos asegurarnos de ello, pero con las pruebas realizadas ya se aprecia dicha tendencia.

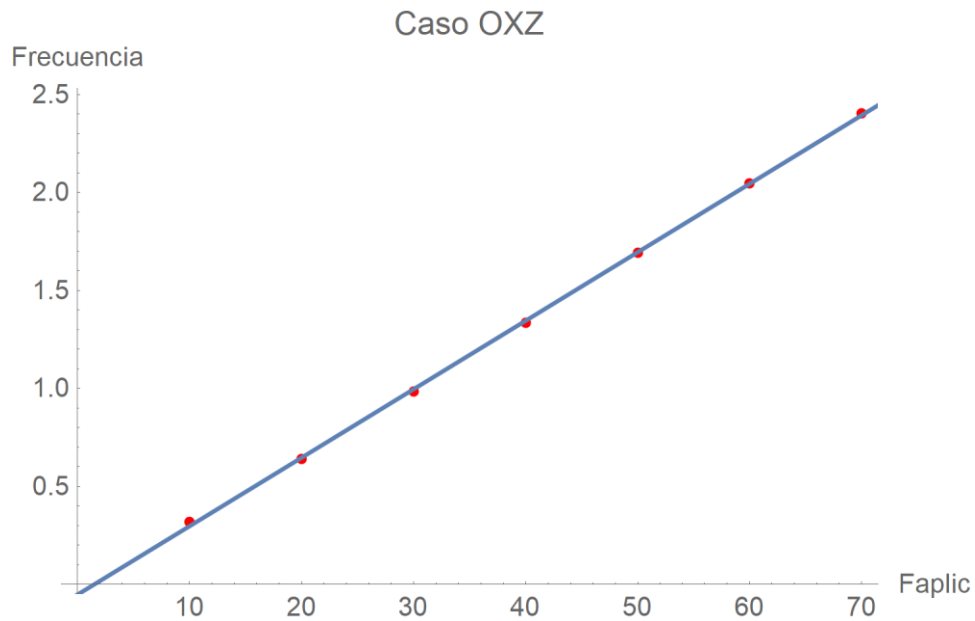


Figura 13 Caso particular II- Recta de mejor ajuste para la frecuencia en régimen permanente

En cuanto a la frecuencia de las oscilaciones vemos que, aunque al principio parecen distanciarse mucho los puntos de la recta (puede deberse a los puntos que se han elegido para el análisis, o que, en el primer caso, el periodo es tal que habría que haberlos elegido más alejados del origen para asegurar la estabilidad), se mantiene una relación lineal con la fuerza aplicada de aproximadamente uno a treinta. Resulta una recta con ecuación $f = a + bF^{aplic}$, siendo $a = -5.27 \cdot 10^{-2} \pm 2.14 \cdot 10^{-2}$, la $b = 3.49 \cdot 10^{-2} \pm 4.79 \cdot 10^{-4}$ y el coeficiente de correlación $r = 0.9998$

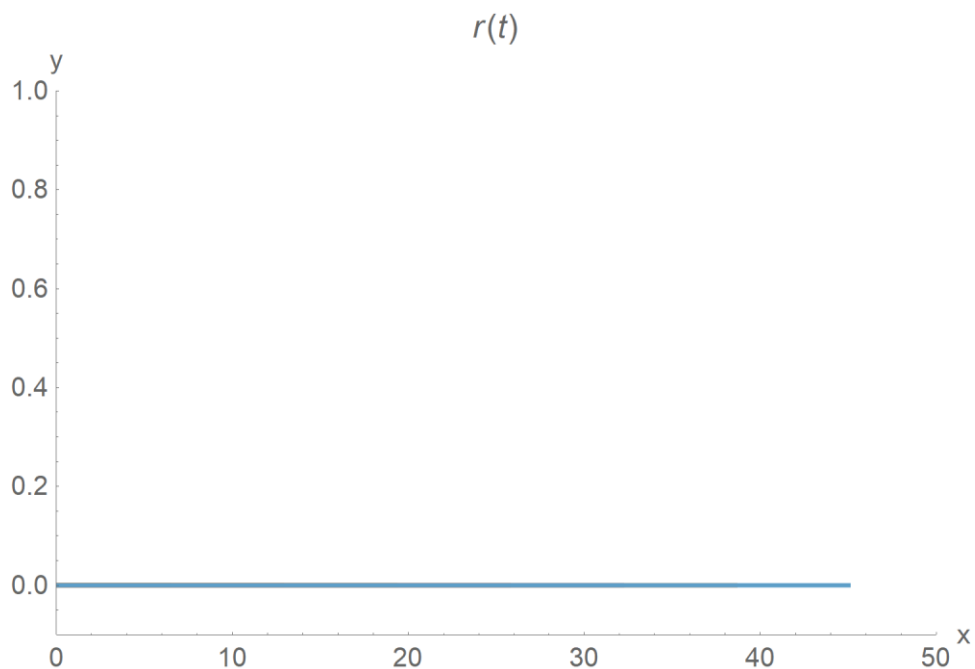


Figura 14 Caso particular II- Trayectoria para diferentes fuerzas aplicadas

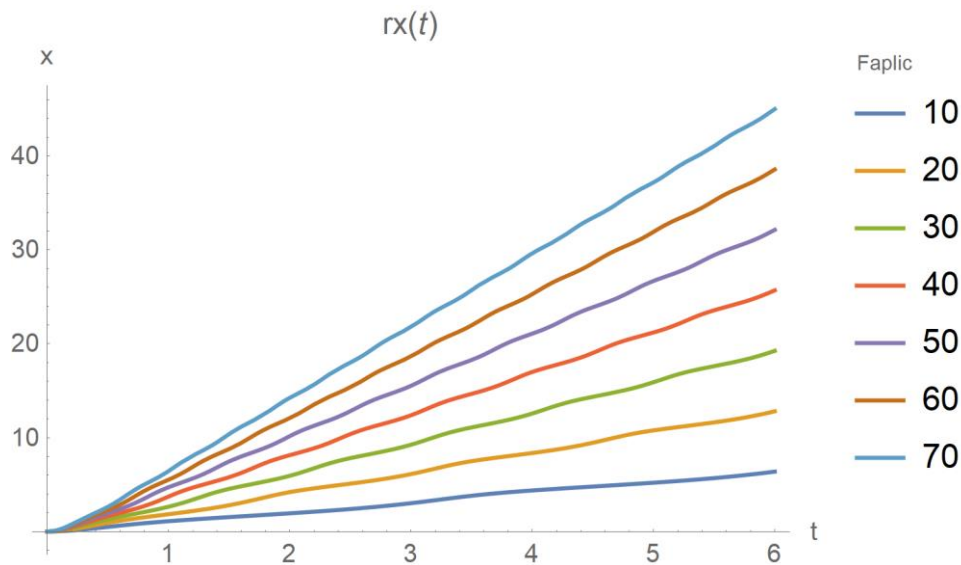


Figura 15 Caso particular II- Recorrido en X para diferentes fuerzas aplicadas

Sabemos que la velocidad lineal en la dirección del eje OX es similar a la velocidad angular en el eje OY. Fijándonos en la trayectoria encontramos un comportamiento similar al caso particular I. Es rectilínea y paralela al eje OX, para cada fuerza se alcanza una distancia cada vez mayor. Primero tenemos un tramo en el que la velocidad aumenta con gran pendiente, por lo que el recorrido no aumenta de forma constante. Más tarde, la velocidad, aunque oscilante, se establece alrededor de un valor medio. Al oscilar, la trayectoria no tiene pendiente constante, por eso se aprecian pequeñas ondulaciones mientras que en promedio crece de forma constante.

Al disminuir la fuerza aplicada, el estado estacionario pierde su forma sinusoidal para adoptar un patrón con crestas y valles. En la siguiente gráfica vemos como al disminuir la fuerza, las curvas cambian, debemos aumentar el tiempo de estudio para poder apreciarlas.

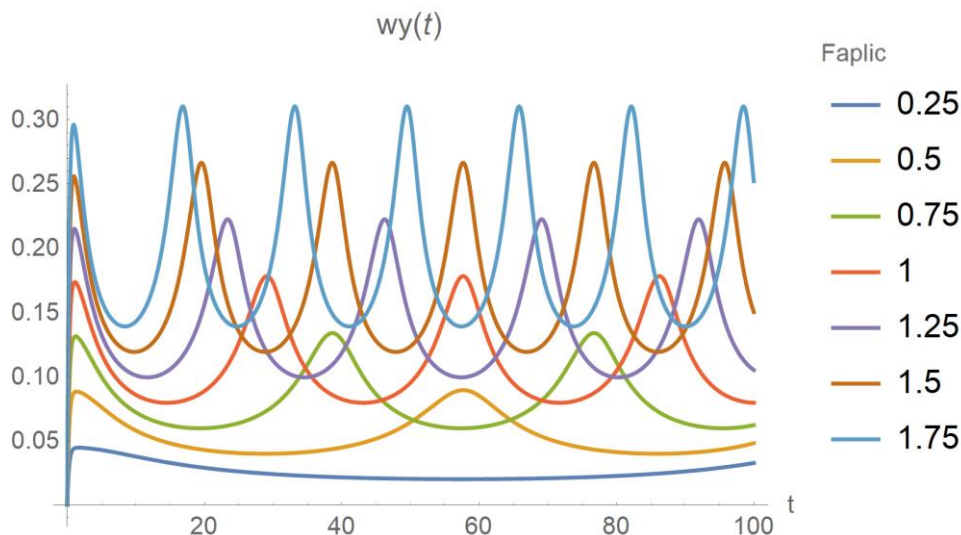


Figura 16 Caso particular II- ω_y para fuerzas aplicadas débiles

También disminuye el valor medio de la velocidad angular en el eje OY, aunque este parece mantener la misma relación lineal que para fuerzas mayores. Sin embargo, la amplitud ahora no tiende a un valor, y crece linealmente, ya que nos encontramos en el primer tramo de la figura 12.

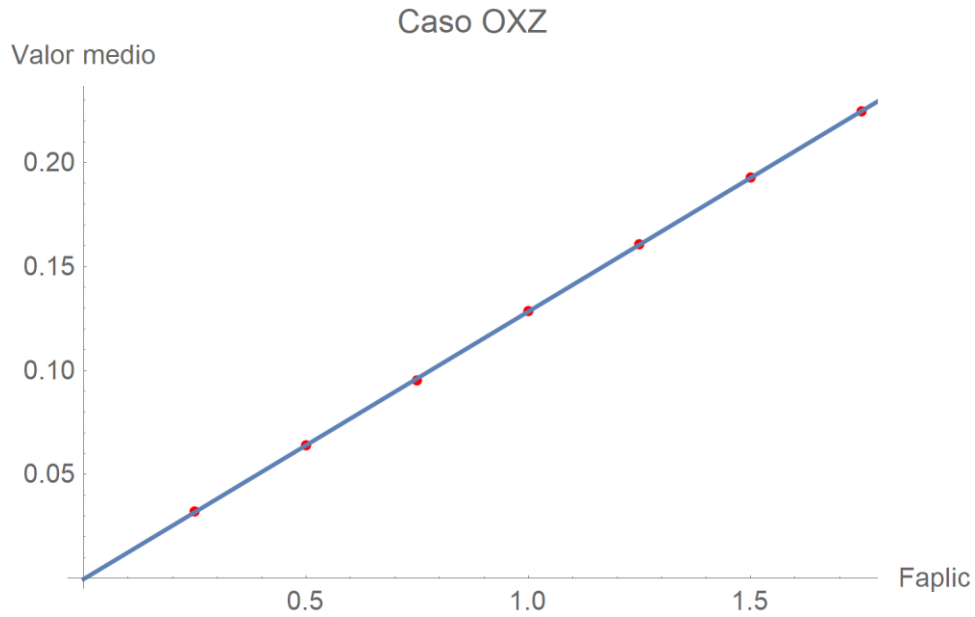


Figura 17 Caso particular II- Valor medio de ω_y para fuerzas aplicadas débiles

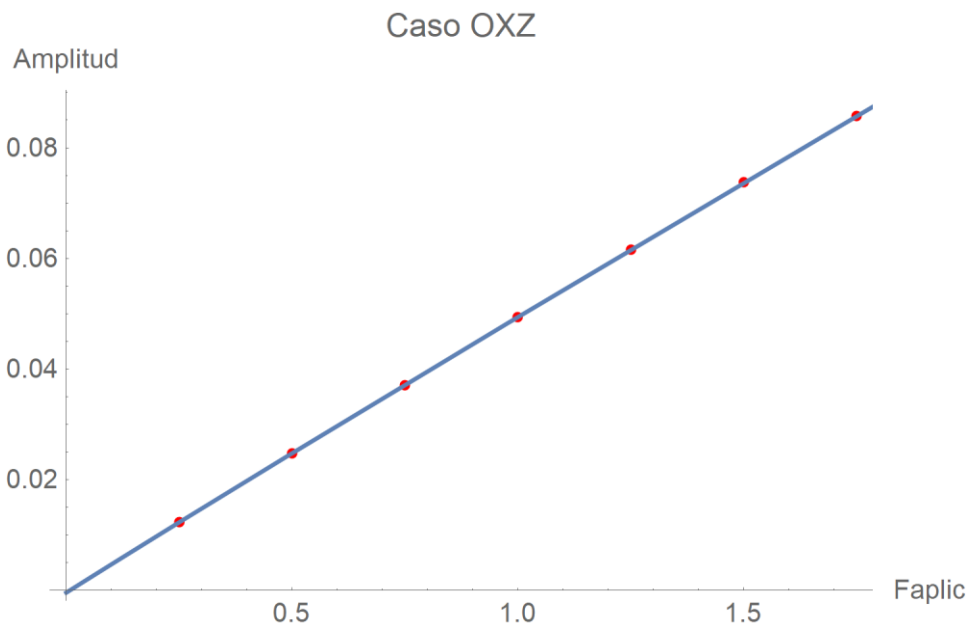


Figura 18 Caso particular II- Amplitud de ω_y para fuerzas aplicadas débiles

La trayectoria que sigue es similar, rectilínea en dirección de OX, y con pequeñas oscilaciones en su aumento, al igual que en la figura 15. Resulta una recta con ecuación $\omega_y = a + bF^{aplic}$, siendo $a = 2.52 \cdot 10^{-4} \pm 5.03 \cdot 10^{-3}$, la $b = 1.29 \cdot 10^{-1} \pm 4.5 \cdot 10^{-3}$ y el coeficiente de correlación $r = 0.9992$

Podemos comprobar estos resultados resolviendo el sistema de forma analítica aproximada. Si suponemos que la posición inicial de $\vec{\mu}$ es puramente vertical.

$$\begin{aligned} \mu_x &= \text{sen}(\theta) \\ \mu_z &= \text{cos}(\theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_y \end{aligned}$$

De esta forma reescribimos la ecuación de la velocidad angular.

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \frac{5}{7} F^{aplic} - (9 \operatorname{sen}^2(\theta) + 4 \operatorname{cos}^2(\theta)) \frac{d\theta}{dt}$$

Podemos integrarla respecto al tiempo, suponiendo que parte del reposo.

$$\omega_y = \frac{5}{7} F^{aplic} t - \left(\frac{13}{2} \theta - \frac{5}{4} \operatorname{sen}(2\theta) \right)$$

Esta ecuación vale para todas las fuerzas aplicadas, pero cuando se trate de una fuerza débil, podemos hacer la aproximación de que ω_y varía muy lentamente por lo que es despreciable en la ecuación anterior. De las ecuaciones resultantes no podemos hallar $\theta(t)$ pero podemos conocer t y ω_y como funciones del ángulo.

$$t = \frac{7 \left(\frac{13}{2} \theta - \frac{5}{4} \operatorname{sen}(2\theta) \right)}{5 F^{aplic}}$$

$$\omega_y = \frac{5 F^{aplic}}{7(9 \operatorname{sen}^2(\theta) + 4 \operatorname{cos}^2(\theta))}$$

Podemos obtener los valores máximos ($\theta = 0^\circ$) y mínimos ($\theta = 90^\circ$) de la velocidad angular en función de la fuerza, así como su valor medio y amplitud.

$$\omega_y^{max} = \frac{5}{28} F^{aplic}$$

$$\omega_y^{min} = \frac{5}{63} F^{aplic}$$

$$\omega_y^{media} = \frac{10}{91} F^{aplic}$$

$$Amplitud = \frac{\omega_y^{max} - \omega_y^{min}}{2} = \frac{25}{504} F^{aplic}$$

Estas definiciones nos confirman los resultados que hemos obtenido en las simulaciones. A menor fuerza apliquemos, menor es la velocidad angular y, por lo tanto, tardará más en dar una vuelta. La amplitud también depende de la fuerza aplicada, pero solo porque estamos en el caso de fuerzas débiles. Las oscilaciones de ω_y tendrán una frecuencia dependiente de la fuerza en la relación que sigue, considerando que la bola da media vuelta en cada una.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{5 F^{aplic}}{7 \left(\frac{13}{2} (\pi) \right)} = \frac{10 F^{aplic}}{91 \pi} = 0.035 F^{aplic}$$

Podemos comprobar que este resultado coincide con el valor de la pendiente de la recta de mejor ajuste obtenida de forma aproximada en la figura 13.

3.3.3 Caso general partiendo del reposo o con velocidad inicial no nula

Habiendo analizado ya los casos particulares I y II, vamos a analizar el movimiento de forma más amplia. Supondremos varios casos en los que variaremos los ángulos iniciales del momento dipolar magnético o el valor de la fuerza aplicada. Primero partiendo del reposo y a continuación aplicando velocidades angulares en alguno de los ejes. Suponer una velocidad angular distinta de cero equivale a aplicar una velocidad lineal en la dirección de los ejes X o Y para ω_x y ω_y , o generar pivotamiento si aplicáramos una ω_z distinta de cero.

Iremos variando dos ángulos, θ (medido respecto el eje OZ) y ϕ (medido respecto del eje OY) de forma que el momento dipolar magnético comience el movimiento desde diferentes orientaciones en el espacio. Las orientaciones correspondientes a los ángulos complementarios solo modifican el signo o sentido de los resultados, es decir, si $\vec{\mu}$ se sitúa de forma simétrica según el eje OZ, la esfera realizará el mismo movimiento, pero de forma simétrica en el otro sentido. Estudiamos el movimiento en un solo cuadrante, para los otros solo hay que realizar simetrías.

3.3.3.1 Caso general partiendo del reposo

Para partir del reposo, las velocidades angulares iniciales serán nulas.

3.3.3.1.1 $\vec{\mu}$ ligeramente desviado del eje OZ aplicando varias fuerzas

Primero analizaremos que ocurre si el momento dipolar magnético se encuentra ligeramente desorientado según la dirección del eje OZ, es decir, un ángulo θ igual a 1° por ejemplo, como variar ϕ no aporta mucho a los resultados lo dejaremos con valor nulo, y probaremos con varios valores de la fuerza aplicada en la dirección del eje OX.

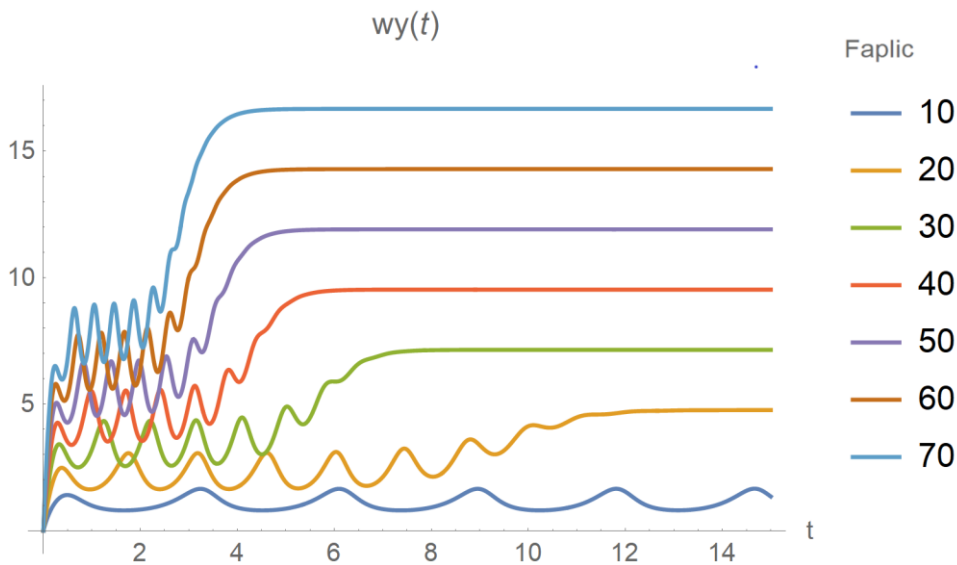


Figura 19 Caso General próximo a OZ. ω_y para diferentes fuerzas

Observando la gráfica para la velocidad angular en el eje Y primero se observa que el tiempo de establecimiento varía según la fuerza, para el caso de $F=10$ ni siquiera se alcanza en esta figura. También podemos ver como al comienzo sufre oscilaciones como en el caso particular II. Esto se debe a iniciar el movimiento en una posición tan próxima a la supuesta en el caso ya mencionado. Pero, a diferencia de lo que ocurría en dicho caso, no se establece en estas oscilaciones, tras un tiempo oscilando la velocidad angular se incrementa rápidamente hasta alcanzar un, ahora sí, valor estable. Este valor alcanzado coincide con los valores obtenidos en el caso particular I, donde dependía de la fuerza aplicada.

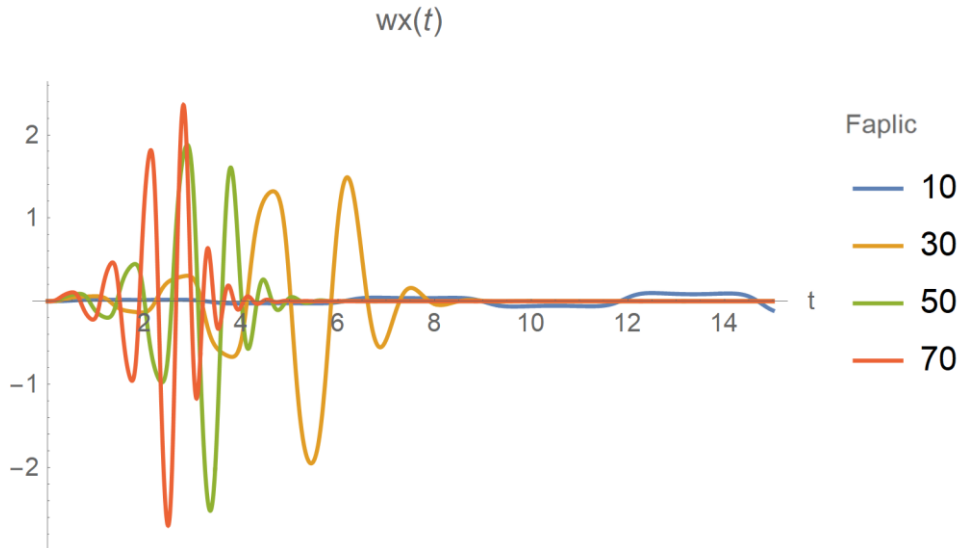


Figura 20 Caso General próximo a OZ. ω_x para diferentes fuerzas

En cuanto a la velocidad angular en la dirección de X, se ha decidido mostrar menos casos de fuerzas para poder apreciar mejor las curvas. A más fuerza, antes se alcanza el valor nulo, siempre pasando por algunas variaciones que comienzan suaves, alcanzan su máximo valor y luego decrecen hasta estabilizarse en el valor nulo.

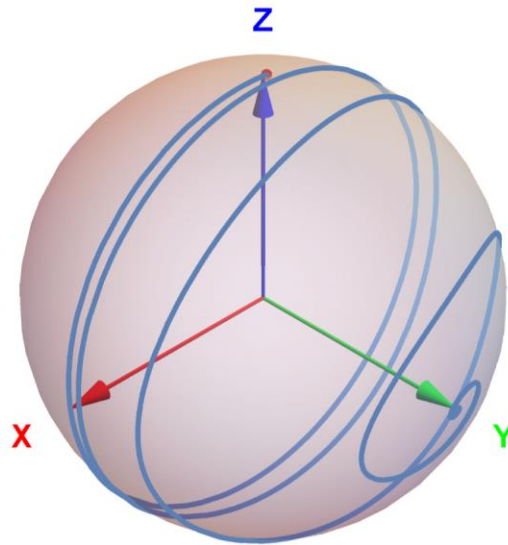


Figura 21 Caso General próximo a OZ. Vector $\vec{\mu}$ para $F_{aplic}=30$

Utilizaremos el caso de $F_{aplic}=30$ para comentar que ocurre con μ_x y μ_z . La dirección inicial del momento dipolar magnético es muy próxima al eje OZ, en la figura 21 se ha representado con un punto rojo. El movimiento se inicia con ω_y positiva por lo que el vector rota hacia el eje X, da un par de vueltas sin separarse mucho del plano OXZ, pero llega un momento en el se desvía acercándose al eje OY. Ya próximo a él, termina por colocarse paralelo al mismo y ya se queda de forma estable en dicha posición. En la siguiente figura podrá apreciarse mejor. Hasta ese momento, las otras dos componentes del vector $\vec{\mu}$ oscilan entre -1 y 1, lo que quiere decir que la esfera va rodando en la dirección del eje X, aunque bambolee alejándose de este.

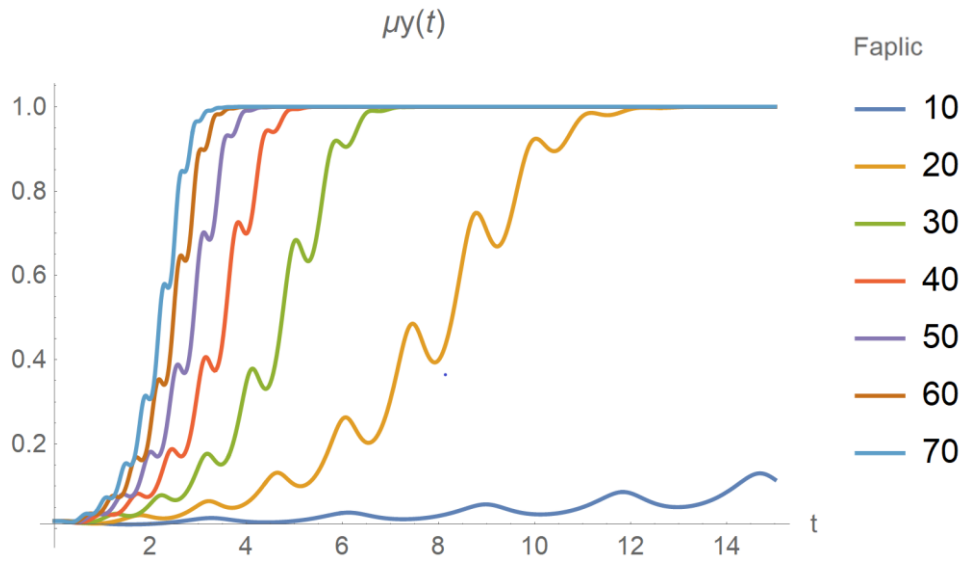


Figura 22 Caso General próximo a OZ. μ_y para diferentes fuerzas

Aquí vemos como la componente μ_y comienza valiendo 0, y así se mantiene un tiempo, hasta que empieza a aumentar. Entonces sufrirá varios momentos de decrecimiento u oscilación, relacionados con la rotación de la esfera. Según la fuerza tardará más en llegar al valor estable, pero al igual que antes, para $F^{aplic}=10$, ni siquiera se aprecia en esta gráfica.

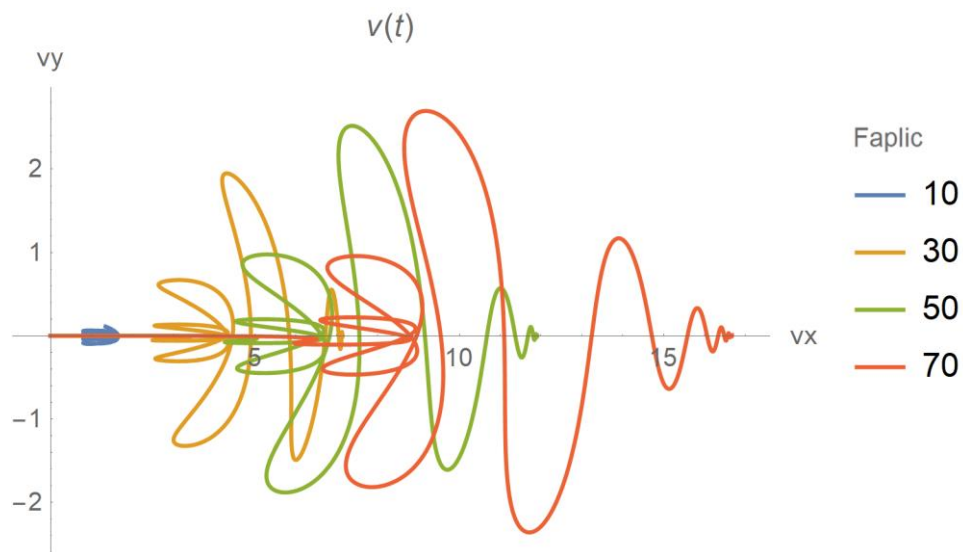


Figura 23 Caso General próximo a OZ. \vec{v} para diferentes fuerzas

Para hablar sobre la velocidad también se ha decidido reducir el número de casos para mejorar la limpieza de los resultados. Lo más destacable es la gran diferencia que hay entre la curva para $F^{aplic}=10$ y el resto. Podemos suponer que esta tiene una forma parecida a las demás, aunque alcanza valores más pequeños, y se distorsiona un poco. Según la fuerza aplicada, la velocidad alcanzará un valor mayor o menor tanto en su componente X como en la Y, aunque esta última se parezca más entre los diferentes casos. Vemos como todas tienen un tramo irregular, luego una gran oscilación y por último una tendencia al valor nulo de la componente Y, lo que confirma que al final la esfera simplemente rueda en la dirección del eje OX.

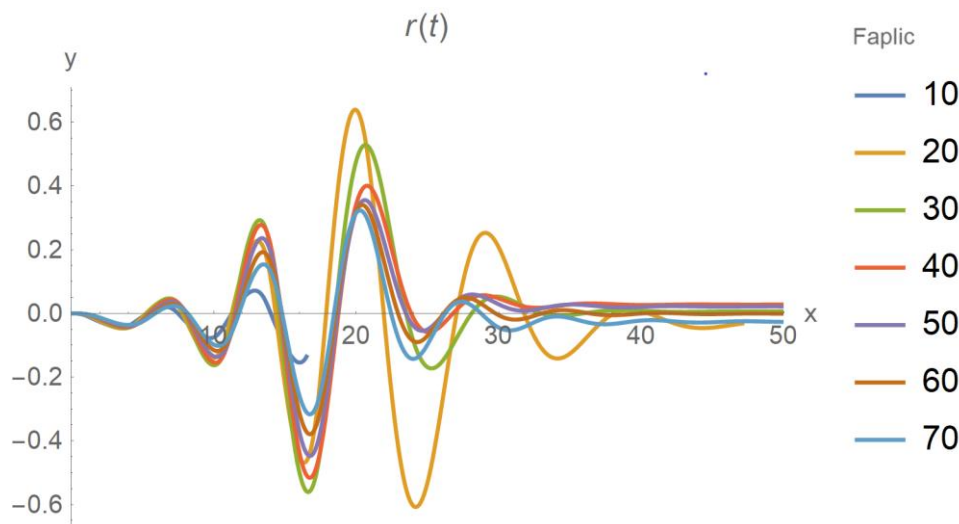


Figura 24 Caso General próximo a OZ. Trayectoria para diferentes fuerzas

Analizando la trayectoria del centro de masas de la esfera para diferentes fuerzas es adecuado comentar los valores finales que se alcanzan, pues aparte de que se ha recortado la gráfica, algunas curvas terminan en puntos superpuestos con las otras y no se aprecian bien. También aprovechamos para incluir la distancia de separación del eje Y cuando la esfera alcanza un estado estable.

Tabla 1 Caso General próximo a OZ. Valores de v_x , x_G e y_G para $t=15$

	F=10	F=20	F=30	F=40	F=50	F=60	F=70
Velocidad en X final	1.34	4.76	7.14	9.52	11.9	14.3	16.7
Distancia máxima en el eje X	16.5	47.1	84.9	120	155	189	223
Separación del eje Y final	-0.136	-0.0316	0.00588	0.0277	0.0213	-0.00114	-0.0263

Como puede verse en la gráfica, las curvas tienen formas similares, la trayectoria oscila de forma parecida hasta alcanzar un valor que se mantiene a distancia constante del eje OY. Sin embargo, no todas se quedan a la misma distancia, ni llegan al mismo valor de X en el tiempo de estudio. Esto último se debe a que los valores finales de v_x varían de la misma forma que varía ω_y con la fuerza en la figura 19. Para $F^{aplic}=10$, no se alcanza una trayectoria rectilínea en el tiempo elegido para el análisis. Para según que fuerza, la esfera alcanza su etapa de desplazamiento paralelo al eje Y a un lado o al otro del mismo, esto podemos deducir que depende de la fuerza aplicada, que a su vez afecta a la cantidad de veces que puede la esfera rotar antes de alcanzar una velocidad estable.

A la vista de los resultados obtenidos al colocar el vector $\vec{\mu}$ ligeramente separado del eje OZ, se puede deducir que el caso particular II no es estable, pues a la menor variación de la orientación del momento dipolar hacia el eje OY, este se desvía y acaba estabilizándose en dicho eje, al igual que en el caso particular I.

3.3.3.1.2 $\vec{\mu}$ separado del eje OZ aplicando varias fuerzas

A continuación, analizaremos el movimiento de la esfera si el momento dipolar magnético estuviera inicialmente más separado del eje OZ que en el caso anterior, en las pruebas realizadas se ha decidido $\theta = 45^\circ$.

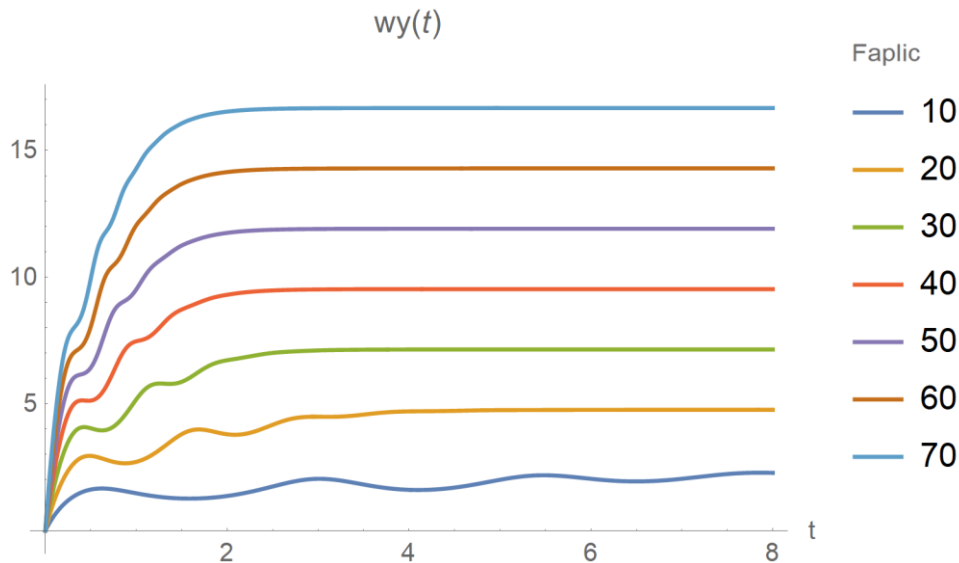


Figura 25 Caso General alejado de OZ. ω_y para diferentes fuerzas

Respecto al caso anterior seguimos teniendo diferentes tiempos de establecimiento según la fuerza aplicada, aunque esta diferencia se aprecia más en valores pequeños de la fuerza. La velocidad angular esta vez aumenta sin pasar por un tramo oscilatorio, presenta algunas ondulaciones, pero tiende a un valor estable relacionado con la fuerza aplicada, al igual que ocurría en el caso particular I. De nuevo, para $F^{aplic}=10$, no es suficiente con el tiempo de estudio elegido para observar el establecimiento en el valor estable.

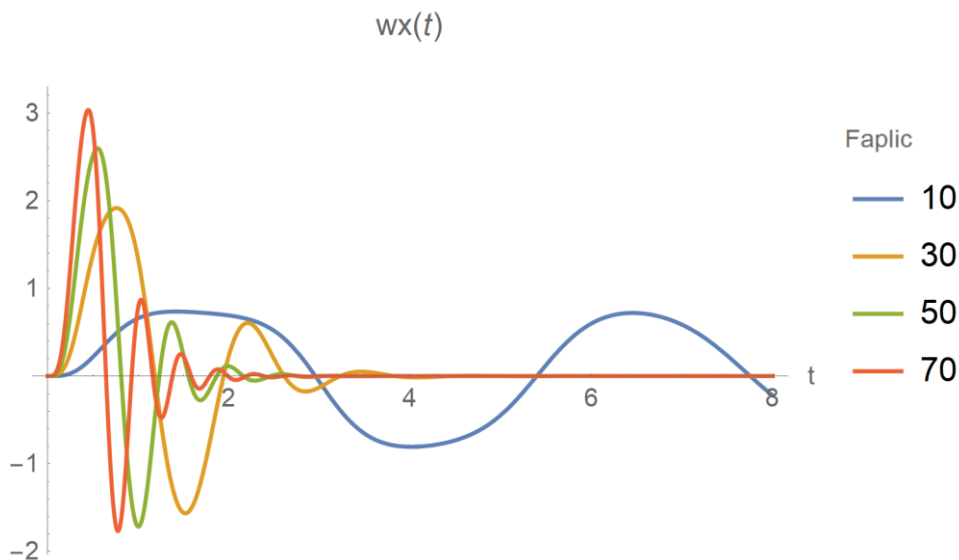


Figura 26 Caso General alejado de OZ. ω_x para diferentes fuerzas

La componente ω_x de la velocidad angular se comporta de forma similar al caso anterior, aunque esta vez no inicia su variación con pequeñas oscilaciones, para aumentar estas y luego anularse. Comienza con grandes oscilaciones que se van reduciendo. Alcanza el valor nulo en un tiempo que depende de la fuerza aplicada, a mayor fuerza, mayores amplitudes y menor tiempo. El caso de menor fuerza no se aprecia siquiera.

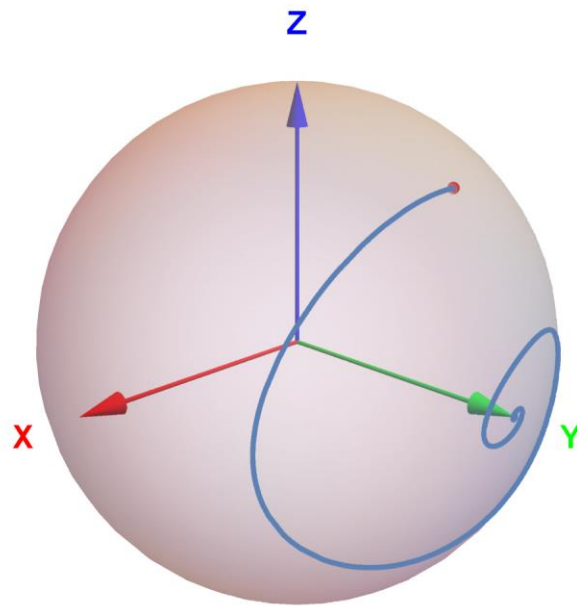


Figura 27 Caso General alejado de OZ. Vector $\vec{\mu}$ para $F=30$

Aquí vemos como el punto rojo que indica la posición inicial del vector $\vec{\mu}$ se encuentra a 45° del eje OZ, en la dirección del eje OY. A diferencia del caso en el que se encontraba casi pegado al eje vertical, la esfera rueda de forma que el momento dipolar tiende directamente a situarse según la dirección del eje OY, sin dar un par de vueltas antes de desviarse. Las componentes μ_x y μ_z oscilan hasta ser nulas.

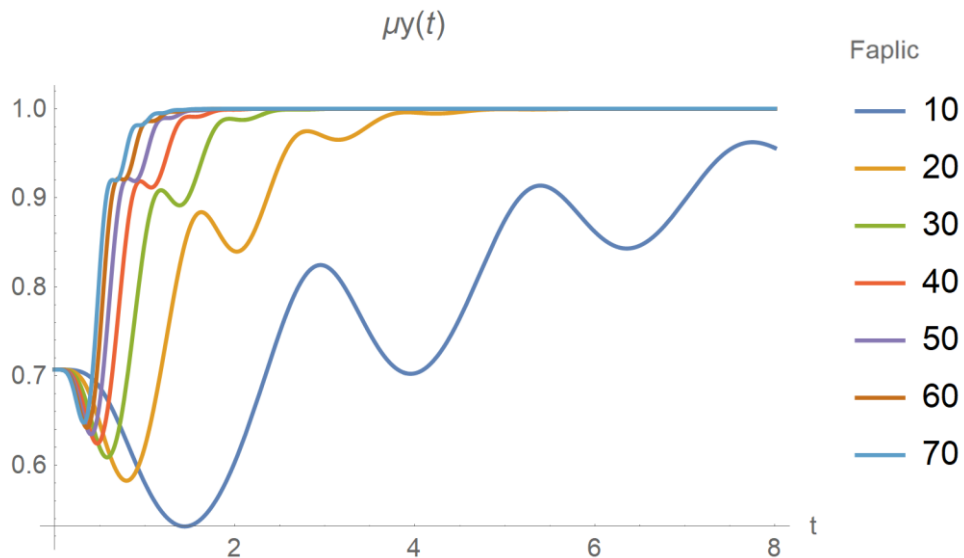


Figura 28 Caso general alejado de OZ. μ_y para diferentes fuerzas

No se aprecia muy bien en la figura 27, pero μ_y disminuye levemente antes de incrementarse hasta valer 1. A lo largo de ese incremento sufre algunas oscilaciones. Estas bajadas son debidas a la geometría de la esfera cuando rueda. Como viene ocurriendo, el valor unitario se alcanza en menos tiempo según la fuerza aumenta.

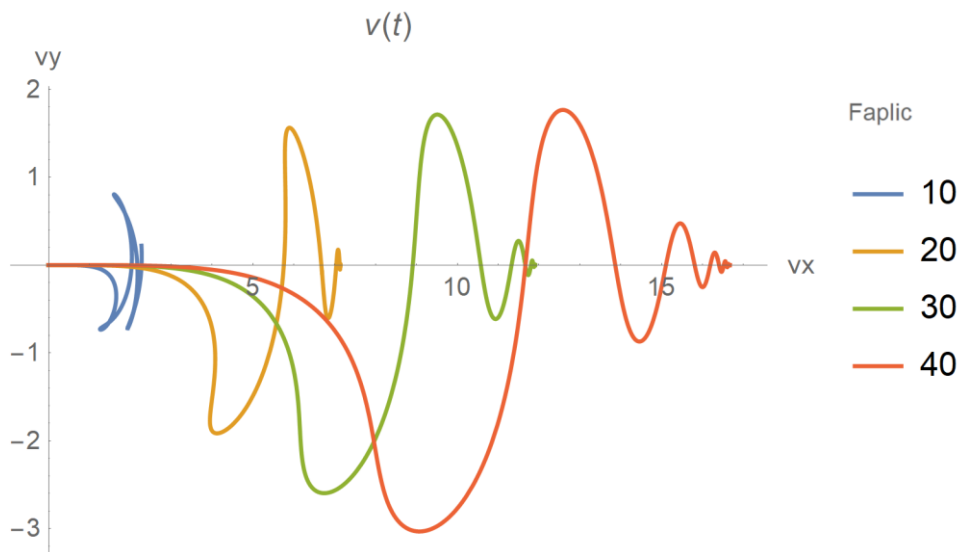


Figura 29 Caso general alejado de OZ. \vec{v} para diferentes fuerzas

Observando algunos valores de la velocidad lineal vemos que ocurre algo parecido al caso anterior, según la fuerza, las oscilaciones en la componente v_y aumentan, así como el valor de v_x alcanzado. Sin embargo, las curvas tienen todas formas similares, aunque para fuerzas pequeñas se distorsiona bastante aún siguiendo el patrón de variación de v_y .

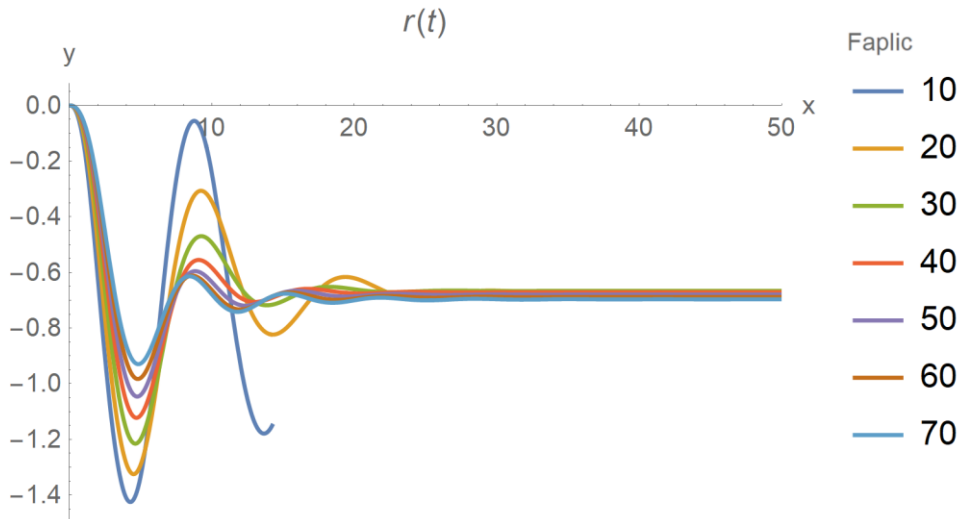


Figura 30 Caso general alejado de OZ. Trayectoria para diferentes fuerzas

Las trayectorias mantienen su forma independientemente de la fuerza que se aplique, simplemente disminuyen las oscilaciones en la dirección del eje Y al aumentar la fuerza. Para poder apreciar mejor algunas diferencias se incluye la tabla 2 en la que se muestran las distancias alcanzadas en el eje X en el tiempo de estudio, la separación final respecto del eje Y, y las velocidades alcanzadas.

Tabla 2 Caso General alejado de OZ. Valores de v_x , x_G e y_G para $t=8$

	F=10	F=20	F=30	F=40	F=50	F=60	F=70
Velocidad en X final	2.28	4.76	7.14	9.52	11.9	14.3	16.7
Distancia máxima en el eje X	14.2	33.7	52.3	70.7	88.9	107	125
Separación del eje Y final	-1.15	-0.676	-0.666	-0.671	-0.679	-0.688	-0.697

Podemos destacar que, a diferencia de $F^{aplic}=10$, para el resto de las fuerzas, la velocidad mantiene los valores del caso anterior, demostrando así la relación entre velocidad angular y fuerza aplicada vista en el caso particular I. Aunque las distancias recorridas en la dirección de X son aparentemente menores, debemos tener en cuenta que el tiempo de estudio se ha reducido casi a la mitad, sabiendo esto podemos considerar que en el mismo tiempo alcanzaría mayores distancias ya que, aunque las velocidades finales son similares, estas se alcanzan antes y de una forma más veloz. En cuanto a la separación del eje Y, se desplaza hasta un punto que no varía mucho con la fuerza aplicada.

Al igual que en el caso anterior, el momento dipolar magnético tiende a orientarse según el eje OY, esta vez lo logra de una forma más directa, es decir, no se mantiene cercano a su inclinación inicial un par de vueltas antes de desviarse hacia su orientación final. Es como si estudiáramos el caso cercano al eje OZ, pero a partir de un instante posterior. También podemos destacar que, en el tramo final, con velocidad y orientación constantes, se alcanza una separación del eje OY apreciable, aunque sigue siendo pequeña en comparación con la distancia alcanzada en el eje OX.

3.3.3.1.3 Fuerza intensa para varios ϕ

Procedemos ahora a analizar como varía el movimiento del imán si aplicamos una fuerza de 40 y suponemos varios ángulos ϕ iniciales. El ángulo θ lo establecemos en 45° al igual que antes. En los resultados siguientes variaremos el ángulo ϕ 15° cada vez, siendo el último caso el caso particular II, lo que nos servirá para comparar los resultados.

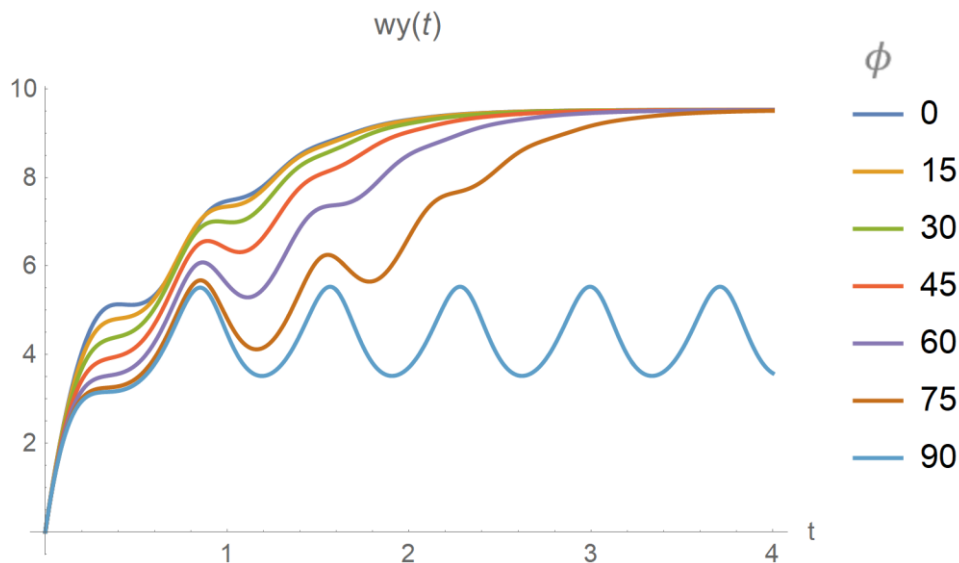


Figura 31 Caso General fuerza intensa. ω_y para diferentes ángulos ϕ

Al ser una fuerza que podríamos considerar intensa, reducimos el tiempo de estudio para analizar mejor los resultados. La velocidad angular en Y, tenderá a un valor estable independiente del ángulo ϕ , menos para los 90° , situación equivalente al caso particular II. Al aumentar el ángulo, $\vec{\mu}$ se encuentra más alejado de OY, por lo que tarda más en establecerse en el valor final, y a más cercano es su valor a 90° , más oscila. Dichas oscilaciones cada vez se asemejan más a las del caso particular II, como puede verse en la figura 31.

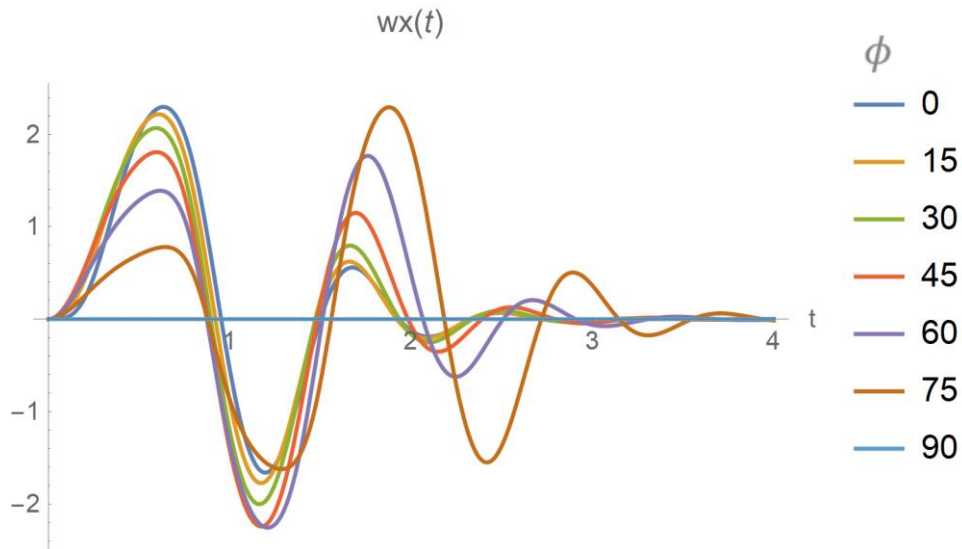


Figura 32 Caso General fuerza intensa. ω_x para diferentes ángulos ϕ

La componente ω_x vuelve a tender a 0 como en casos anteriores, esta vez al variar la posición inicial lo que ocurre es que las oscilaciones tendrán mayor o menor amplitud.

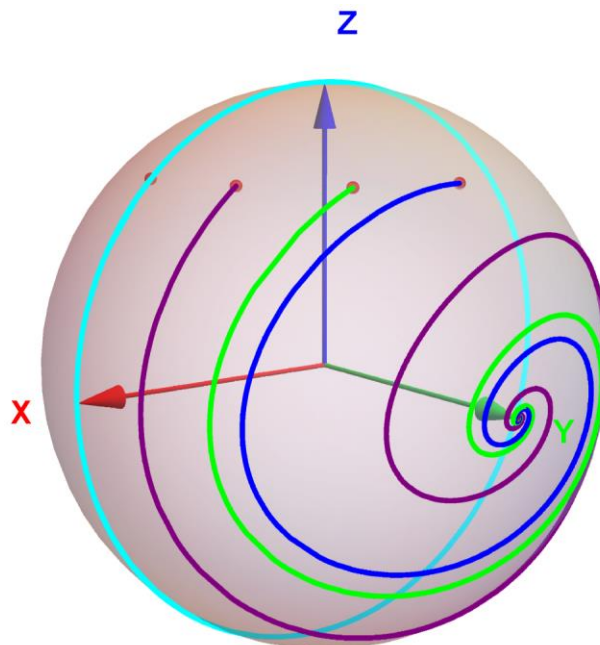


Figura 33 Caso General fuerza intensa. $\vec{\mu}$ para diferentes ángulos ϕ $\{0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$

En la figura 33 se muestran las estelas del momento dipolar magnético para los ángulos iniciales 0° (azul), 30° (verde), 60° (morado) y 90° (cian). A diferencia de la última, que se mantiene en el plano OXZ, todas realizan un movimiento similar, giran hasta converger en OY, variando la amplitud de los giros.

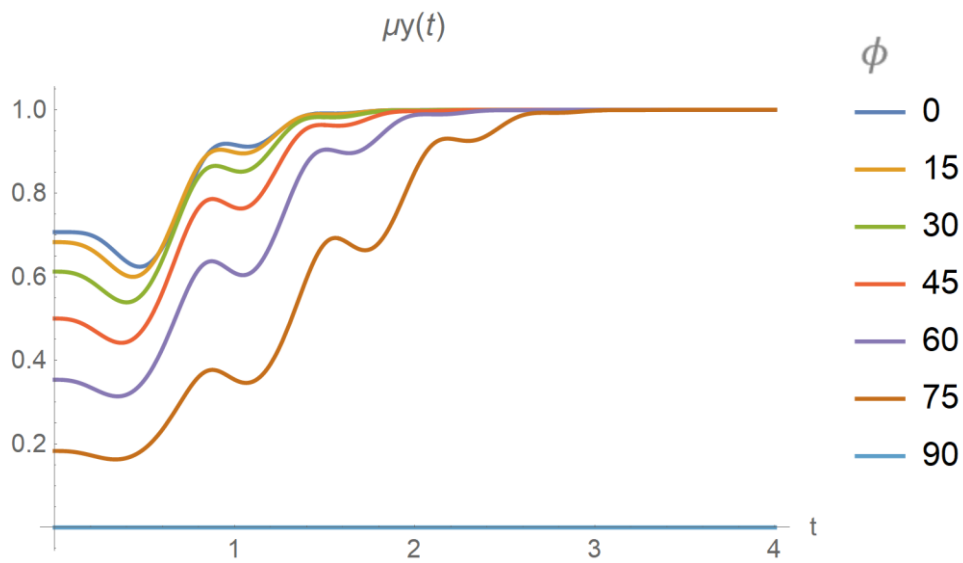


Figura 34 Caso General fuerza intensa. μ_y para diferentes ángulos ϕ

De nuevo, menos para el caso de 90° , todas las curvas tienen formas similares, partiendo de diferentes puntos iniciales y con mayores o menores oscilaciones. Cuanto más separado se encuentre inicialmente del eje OY, más tarda en establecerse en él.

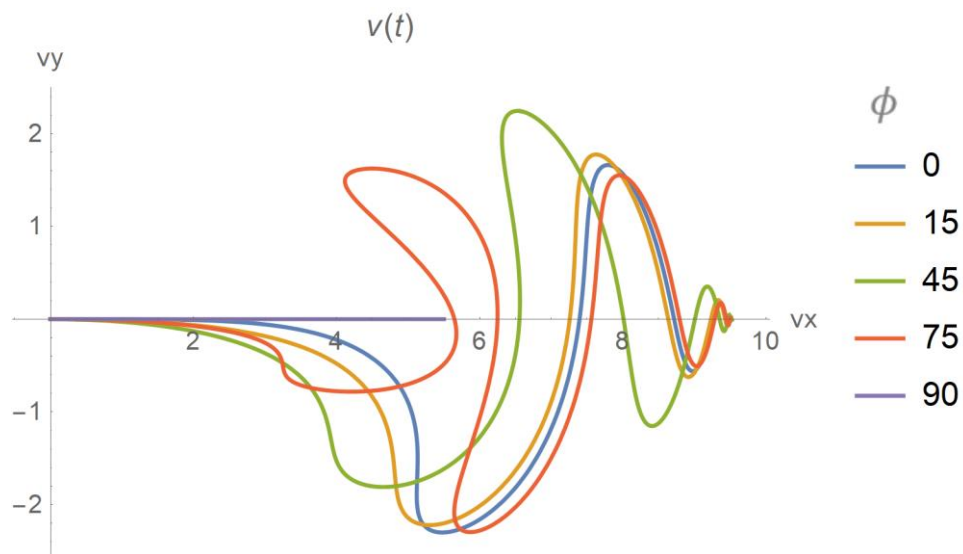


Figura 35 Caso General fuerza intensa. \vec{v} para diferentes ángulos ϕ

No se muestran todos los casos, para que puedan analizarse mejor, pero todos realizan variaciones de velocidad similares. A mayor ángulo, menos amplias son y comienzan a tener disminuciones en la componente X, como se aprecia en la correspondiente a 75° (naranja). A excepción de la última, todas alcanzan una velocidad en X de 9.52 aproximadamente

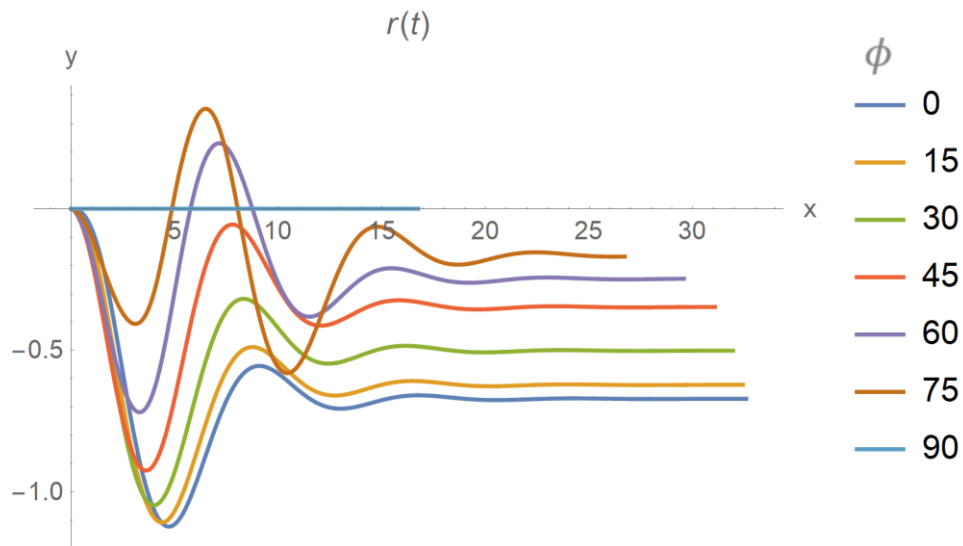


Figura 36 Caso General fuerza intensa. Trayectoria para diferentes ángulos ϕ

Aquí podemos ver como, aunque la esfera siempre tiende a desplazarse de forma rectilínea, bambolea al comienzo del movimiento. Con ángulos menores, el desplazamiento inicial es mayor, pero al aumentar el ángulo, se incrementa la amplitud de las siguientes oscilaciones, como se ve en la curva de 75° . Para los 90° , la trayectoria es rectilínea en todo momento.

Tabla 3 Caso General fuerza fuerte. Valores de y_G para $t=4$

	$\phi=0$	$\phi=15$	$\phi=30$	$\phi=45$	$\phi=60$	$\phi=75$	$\phi=90$
Distancia recorrida en el eje X	32.6	32.4	31.9	31.1	29.6	26.7	16.7
Separación del eje Y final	-0.671	-0.622	-0.501	-0.347	-0.247	-0.169	0

3.3.3.1.4 Fuerza débil para varios ϕ

Al igual que antes, vamos a analizar como varía el movimiento del imán si aplicamos una fuerza, esta vez menor, de valor 1, y suponemos varios ángulos ϕ iniciales. El ángulo θ lo establecemos en 45° . En los resultados siguientes volvemos a variar el ángulo ϕ 15° cada vez, siendo el último el caso particular II. Para este caso debemos utilizar un tiempo de estudio mayor ya que la fuerza al tener un valor mucho menor hace que el movimiento en general sea más lento. Debido a las oscilaciones de alta frecuencia y la evolución lenta del sistema, las gráficas conjuntas para los diferentes ángulos no se ven tan claras, pero podemos comentar el comportamiento.

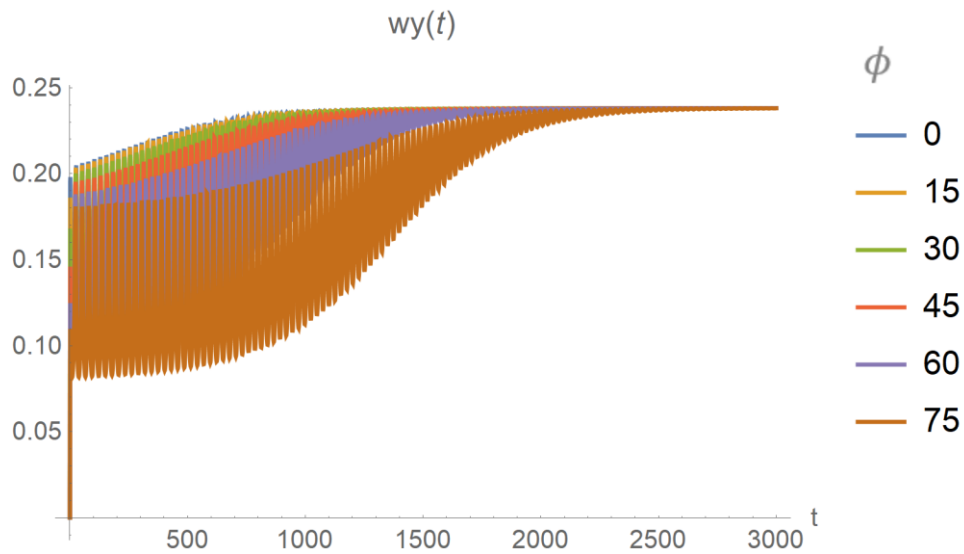


Figura 37 Caso General fuerza débil. ω_y para diferentes ángulos ϕ

La componente ω_y de la velocidad angular tiende a un valor relacionado con la fuerza aplicada, como ocurre en el caso I. Pero esta vez oscila mucho más. Al igual que antes, a mayor fuerza, más tarda en alcanzar dicha velocidad, y con variaciones de mayor amplitud.

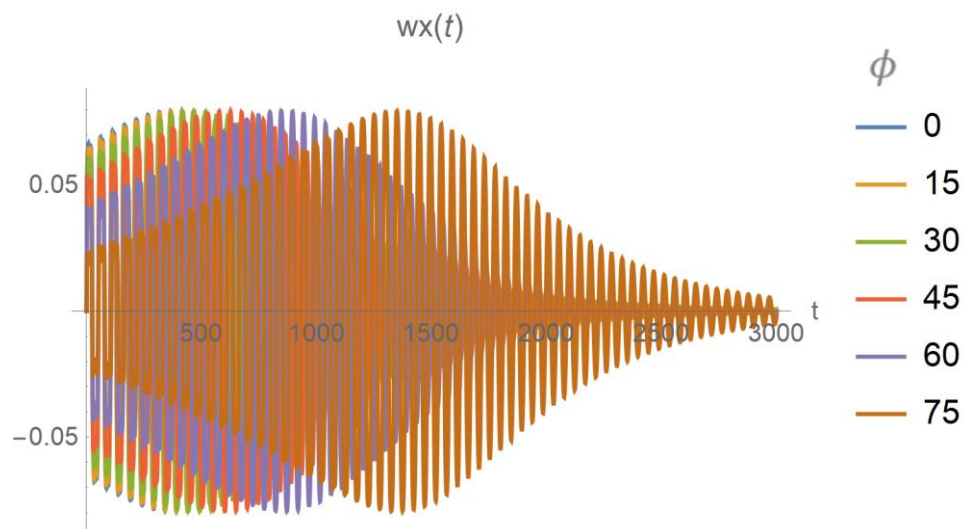


Figura 38 Caso General fuerza débil. ω_x para diferentes ángulos ϕ

Aunque aplicando fuerzas de mayor orden no se apreciaba bien, la velocidad angular según la dirección X aquí se ve que sufre un aumento de amplitud antes de tender al valor nulo. A mayor ángulo, más tarda en alcanzar su amplitud máxima, y su valor nulo, aunque para todos dicha amplitud es similar. Es como si la envolvente de la curva se ensanchara a lo largo del tiempo para cada ángulo.

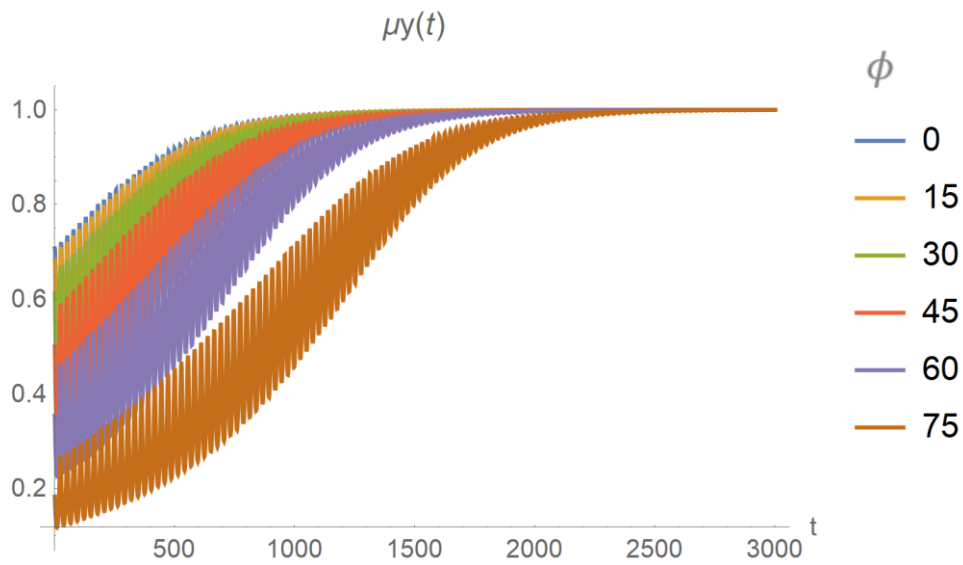


Figura 39 Caso General fuerza débil. μ_y para diferentes ángulos ϕ

El vector del momento dipolar magnético acaba orientándose según el eje OY, como ocurre en casi todos los casos anteriores, solo que ahora oscila mientras alcanza el valor final.

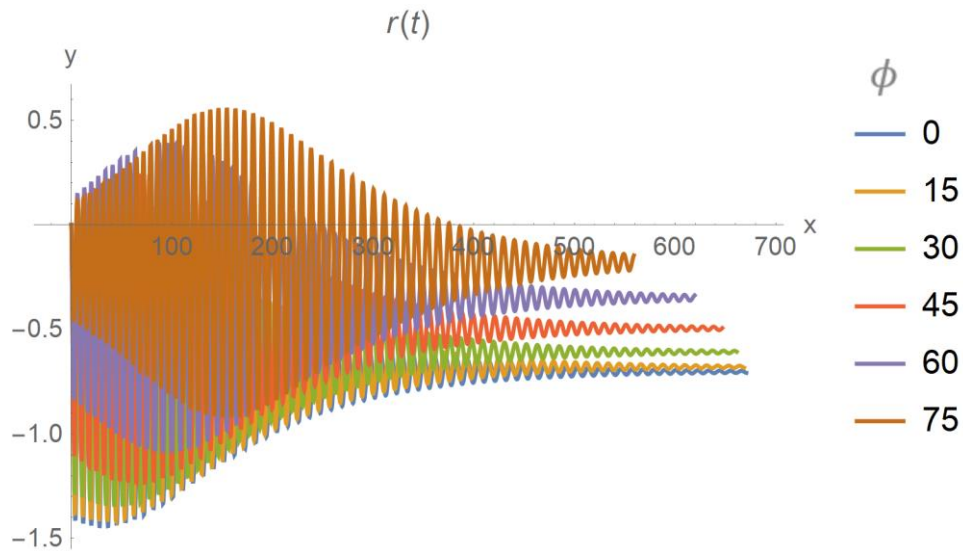


Figura 40 Caso General fuerza débil. Trayectoria para diferentes ángulos ϕ

En cuanto a la trayectoria, vemos que a mayor ángulo de separación inicial con el eje OY, más cerca se queda del cero en la dirección de OY. Como ω_x tarda más en aumentar su valor con cada ángulo, se desplaza menos lateralmente, es decir, el tiempo que está cerca de su valor máximo se reduce, por lo que los desplazamientos laterales son menores. Para el tiempo de estudio utilizado, ω_x aún no es nula, por eso se ven oscilaciones al final. Estas tienen amplitudes de entre 0.005 y 0.05. Alcanza velocidades lineales en el eje X de 0.24.

Tabla 4 Caso General fuerza débil. Valores de y_G para $t=3000$

	$\phi=0$	$\phi=15$	$\phi=30$	$\phi=45$	$\phi=60$	$\phi=75$	$\phi=90$
Distancia recorrida en eje X	670	668	661	646	619	559	329
Separación del eje Y final	-0.708	-0.683	-0.607	-0.494	-0.337	-0.146	0

3.3.3.2 Caso general con velocidades iniciales no nulas

Realizando pruebas con el sistema inicialmente en reposo se ha comprobado que tiende a una situación concreta. Vamos a analizar este estado para conocer mejor sus características.

Independientemente de la posición inicial, la esfera alcanza un estado estacionario en el que el momento dipolar se mantiene orientado en la dirección del eje OY, y rueda con velocidad constante siguiendo una trayectoria rectilínea. Vamos a partir de esta posición y comprobar que converge en ella. Para ello suponemos $\theta(0) = 90^\circ$ y $\phi(0) = 0^\circ$ y una fuerza aplicada de 20..

3.3.3.2.1 Variación de ω_y inicial

Vamos a suponer varias velocidades de rotación en el eje Y iniciales, siendo la fuerza aplicada constante. Como ya hemos visto, el valor final de ω_y depende de la fuerza aplicada, como ahora se aplica siempre la misma fuerza, para todos los casos tiende al mismo valor. Esto demuestra que la velocidad angular tiende a un valor estable relacionado directamente con la fuerza aplicada. Las otras componentes de $\vec{\omega}$ no varían, y el momento dipolar magnético se mantiene en su posición inicial.

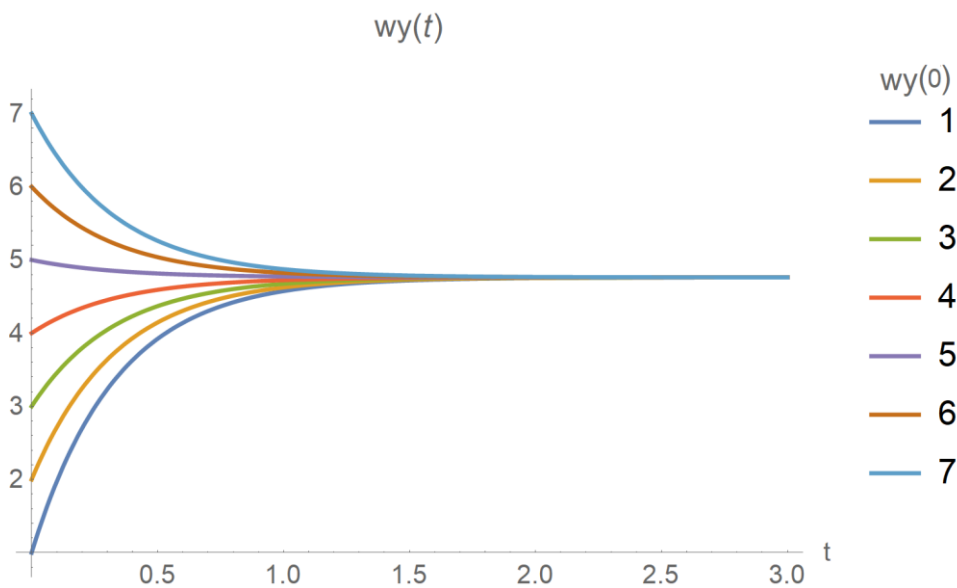


Figura 41 Caso general con ω_y inicial no nula. ω_y

3.3.3.2.2 Variación de ω_x inicial

El siguiente análisis será la variación de ω_x , o lo que es lo mismo, comunicarle una velocidad v_y . Variando

este parámetro prestaremos más atención a las componentes de $\vec{\mu}$. Primero hay que comentar que la velocidad angular en el eje X tiende a cero siempre. Por lo tanto, la velocidad lineal tenderá a tener un valor nulo en su componente Y, es decir, a ser paralela al eje X.

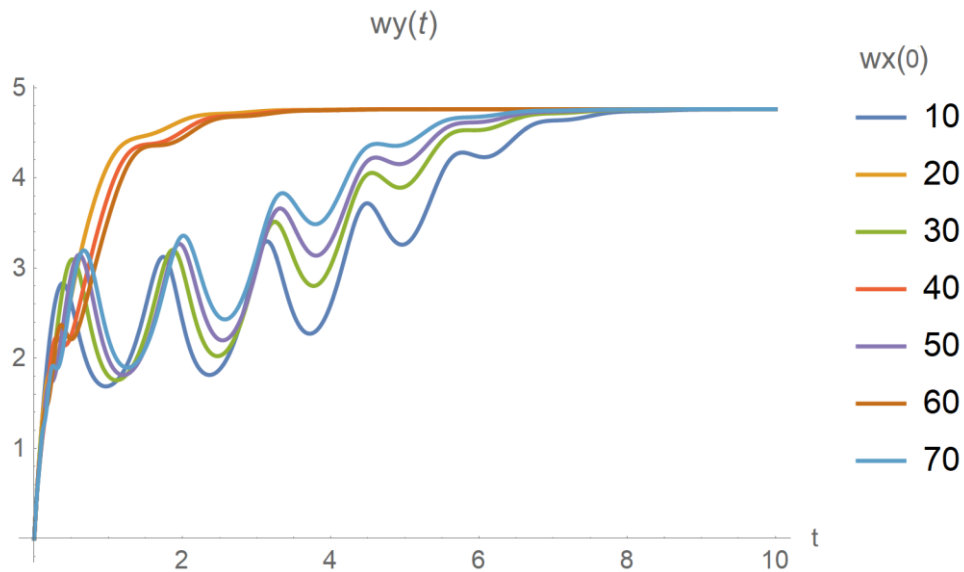


Figura 42 Caso general con ω_x inicial no nula. ω_y

Analizando la velocidad angular en la dirección de OX, vemos que para algunos casos presenta más oscilaciones que para otros, podríamos considerar dos tipos o modos de comportamiento, el primero para los casos aquí definidos como 2, 4 y 6 en los que el valor crece de una forma menos oscilante y un segundo para el resto de los valores de ω_x iniciales en los que, aparte de ampliarse el tiempo de establecimiento, el valor de ω_y crece y decrece varias veces antes de establecerse en su valor final.

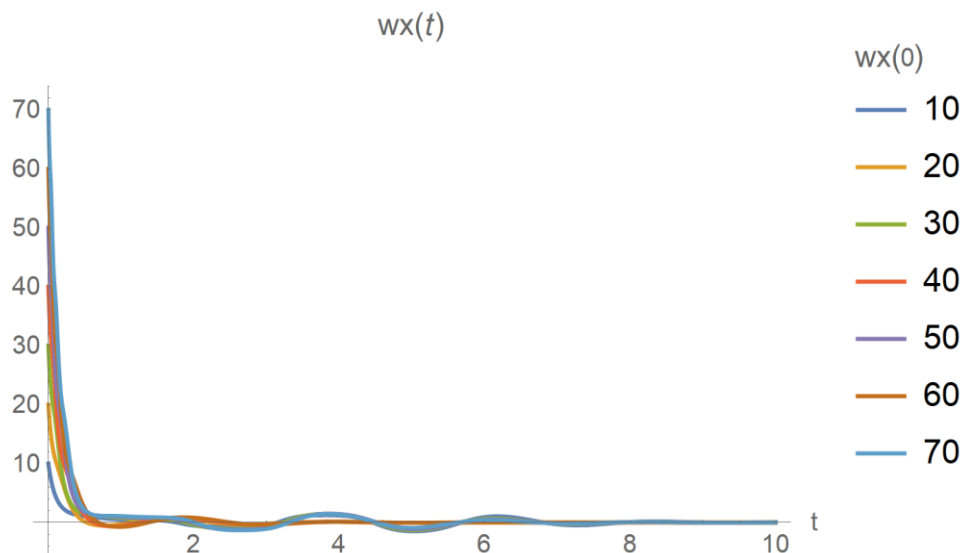


Figura 43 Caso general con ω_x inicial no nula. ω_x

Como dijimos antes, la componente X de la velocidad angular siempre tiende rápidamente a cero.

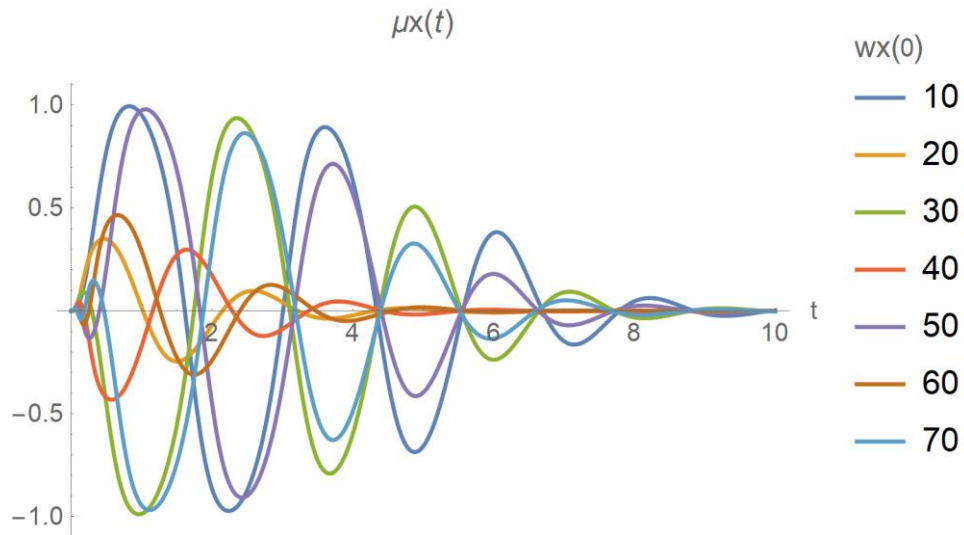


Figura 44 Caso general con ω_x inicial no nula. μ_x

Las componentes μ_x y μ_z tienen gráficas parecidas, ambas oscilan hasta alcanzar el valor nulo y ambas parecen contar con los dos modos o formas mencionados previamente.

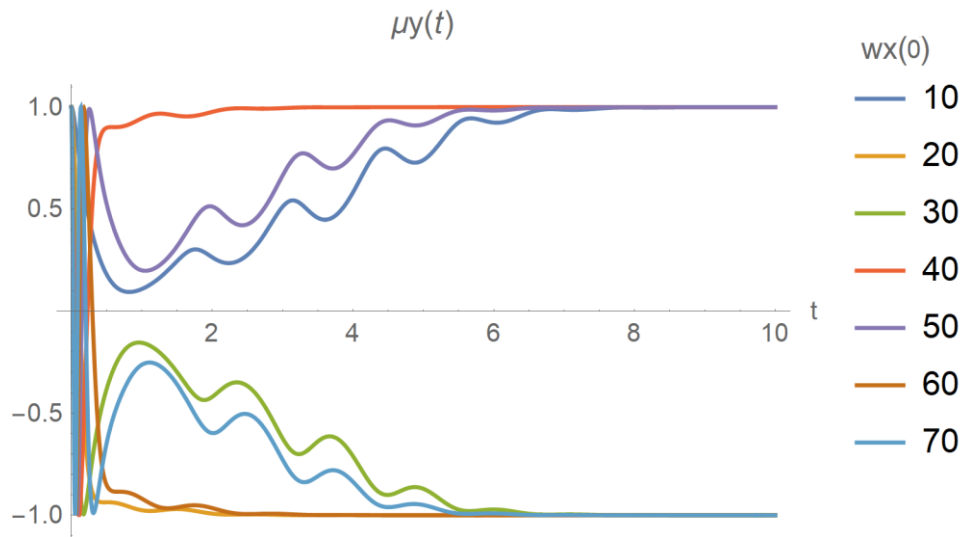


Figura 45 Caso general con ω_x inicial no nula. μ_y

Los dos modos de comportamiento definidos parecen apreciarse también en la orientación del momento magnético. Sin embargo, no coinciden los casos, ya que para 2, 3, 6 y 7, μ_y tiende a -1, mientras que para el resto tiende a 1. En la siguiente figura veremos con más detalle que ocurre al comienzo del movimiento.

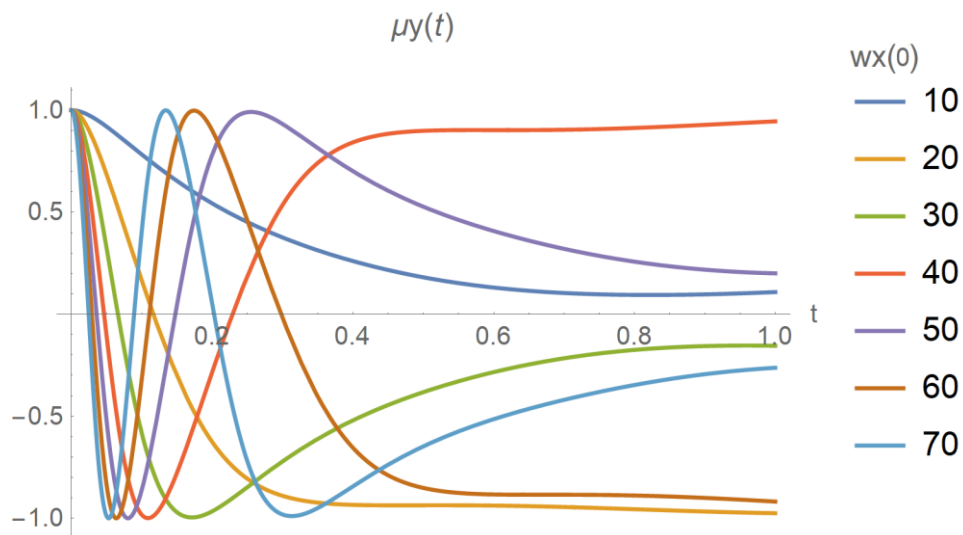


Figura 46 Caso general con ω_x inicial no nula. Aplicación de μ_y

Vemos como todos comienzan en la posición inicial definida para el análisis, y empiezan a oscilar. Dependiendo de la ω_x que se aplique, las oscilaciones serán más rápidas o lentas, para el primer valor, ni siquiera pasa por el valor 0, mientras que, para el último, cruza el eje hasta 3 veces. En cierto momento del movimiento, el vector $\vec{\mu}$ comienza a orientarse según el eje OY, como ocurre en casi todos los casos estudiados hasta ahora. La diferencia de tender hacia 1 o -1 se aprecia mejor en la siguiente figura

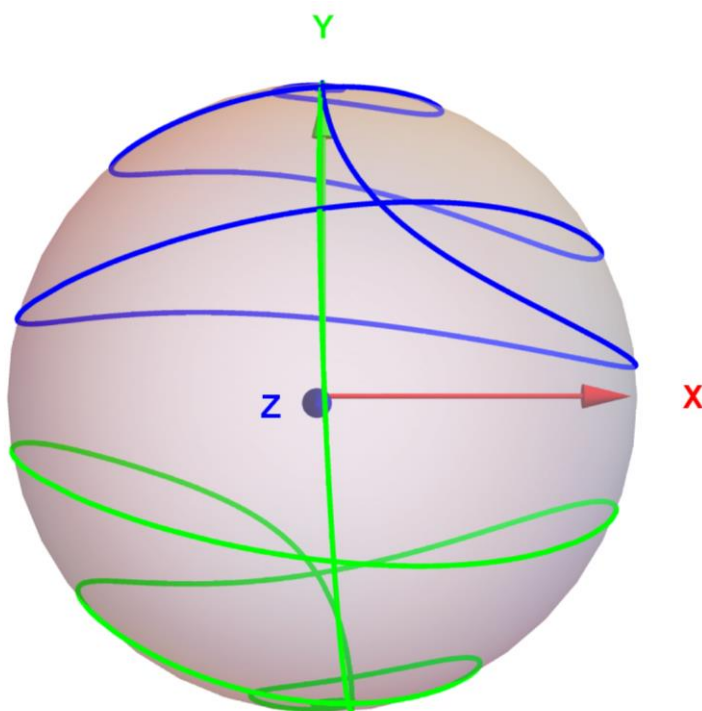


Figura 47 Caso general con ω_x inicial no nula. $\vec{\mu}$

Para comentar lo que ocurre se muestra la estela del vector $\vec{\mu}$ para los casos de ω_x igual a 1 y 3. En el primero (azul), vemos como el vector, que inicia paralelo al eje OY, comienza a dirigirse al eje OZ, pero rápidamente comienza la esfera a rodar ya que ω_y aumenta, entonces el momento dipolar sigue su movimiento hasta converger en la dirección del eje OY. Para el segundo caso (verde), se inicia el movimiento de forma similar,

pero la componente X de la velocidad angular inicial es tal que $\vec{\mu}$ llega a orientarse hacia el otro sentido del eje OY. De nuevo, la velocidad angular en Y comienza a aumentar, haciendo que el momento dipolar tienda de nuevo a orientarse según el eje OY, pero, al encontrarse en el otro sentido, se orienta hacia ese lado. Por lo tanto, las dos posibles orientaciones finales, o puntos de equilibrio, de $\vec{\mu}$ dependen de la ω_x inicial, según la cual la esfera rodará lateralmente hasta que la velocidad angular la haga rodar según OY. Dependiendo de si se encuentra orientado hacia el sentido positivo o negativo del eje OY, convergerá en un punto u otro.

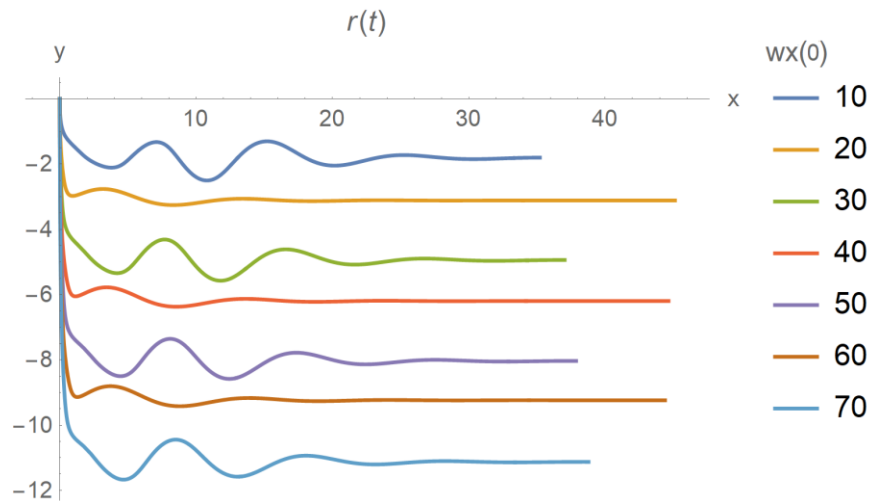


Figura 48 Caso general con ω_x inicial no nula. Trayectoria

Dependiendo de hacia que lado termine orientándose la esfera, las trayectorias también presentan dos formas. En los casos en los que ω_y presenta más oscilaciones, la trayectoria también lo hace, también son los casos donde las curvas de μ_x tienen mayor amplitud. La distancia a la que queda la esfera del eje OY, depende de la ω_x inicial, pues está tiene mayor peso al comienzo del movimiento y, aunque rápidamente se anule, esto sirve para desplazar lateralmente al imán.

En caso de que apliquemos una fuerza débil, los parámetros evolucionarían como si partiesen del reposo (oscilaciones rápidas con evolución lenta), aunque seguiríamos teniendo dos modos de comportamiento según a qué lado de OY converja $\vec{\mu}$. Sin embargo, los efectos de partir con una velocidad inicial distinta de cero se disipan con la misma velocidad que para fuerzas intensas.

3.3.3.2.3 Variación de ω_z inicial

Probamos ahora a variar la velocidad angular en el eje OZ inicial, esto equivale a hacer que la esfera pivote. Algunos comportamientos son similares a lo que ya hemos visto así que comentaremos los más relevantes.

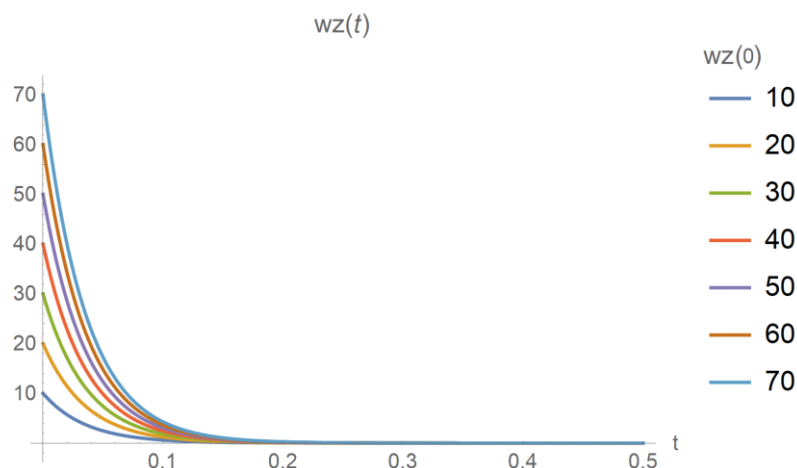


Figura 49 Caso general con ω_z inicial no nula. ω_z

Primero vemos como la ω_z desciende rápidamente al valor nulo, la escala de tiempo se ha modificado para ver mejor dicho descenso. Esta disipación de la velocidad angular en Z es debida al efecto giroscópico. Al iniciar el movimiento, la esfera comienza a verse afectada por la fuerza y momento magnéticos que la hacen girar con velocidad ω_y principalmente, por lo que la velocidad de pivotamiento inicial se disipa en favor de la rotación según el eje OY.

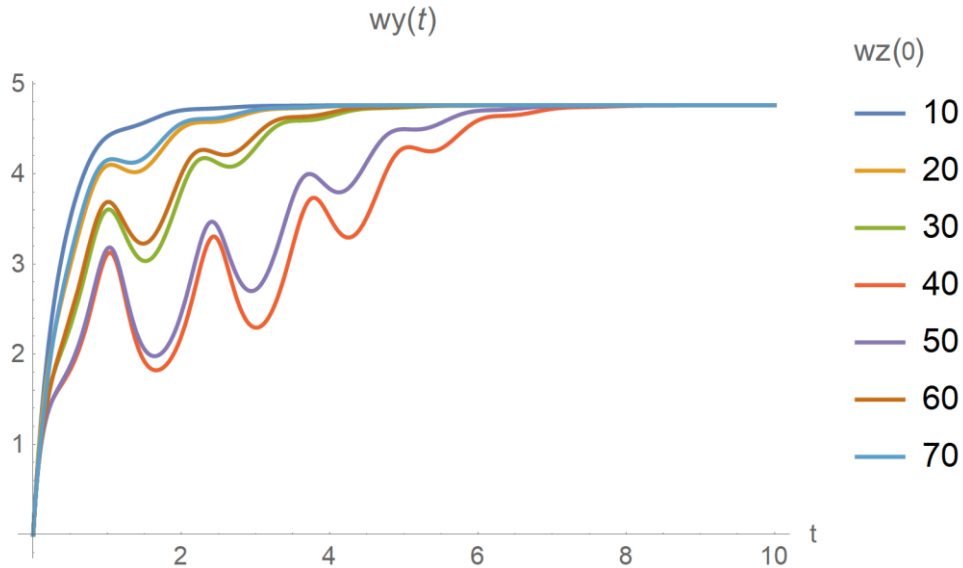


Figura 50 Caso general con ω_z inicial no nula. ω_y

Vemos como ω_y tiende al valor constante de forma similar a cuando estudiamos el caso general en reposo con diferentes ϕ iniciales.

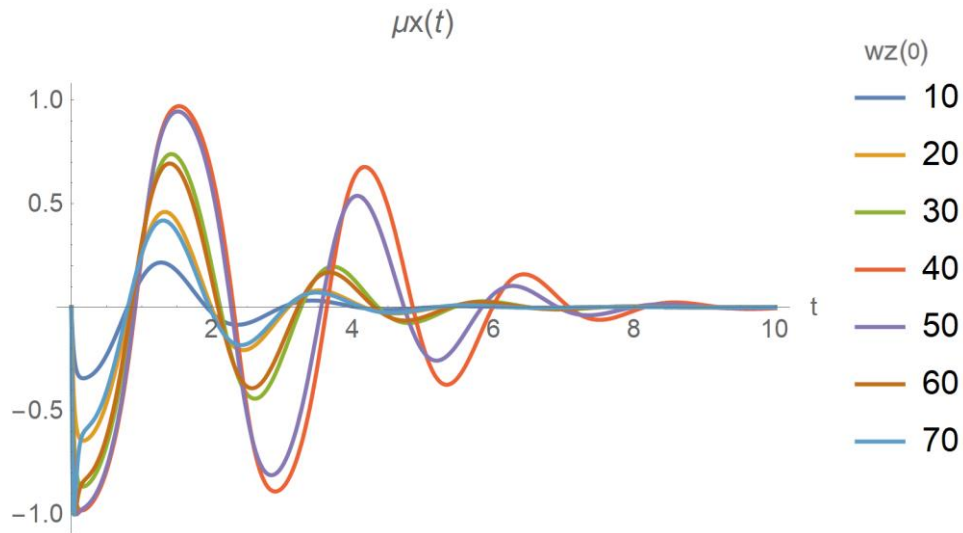


Figura 51 Caso general con ω_z inicial no nula. μ_x

De esta gráfica podemos destacar, aparte de que las curvas son de formas similares, el comienzo de cada una de ellas. La variación de μ_x en los comienzos del movimiento nos da la idea de como se encuentra la esfera, es decir, según la ω_z la esfera pivotará rápidamente al inicio, luego se comportará como si partiera del reposo desde la posición alcanzada. Tiene un muy breve transitorio inicial.

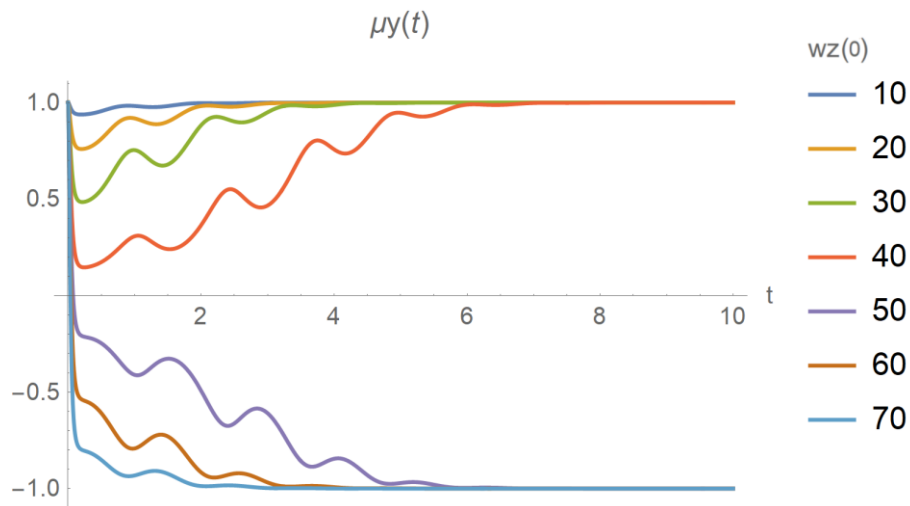


Figura 52 Caso general con ω_z inicial no nula. μ_y

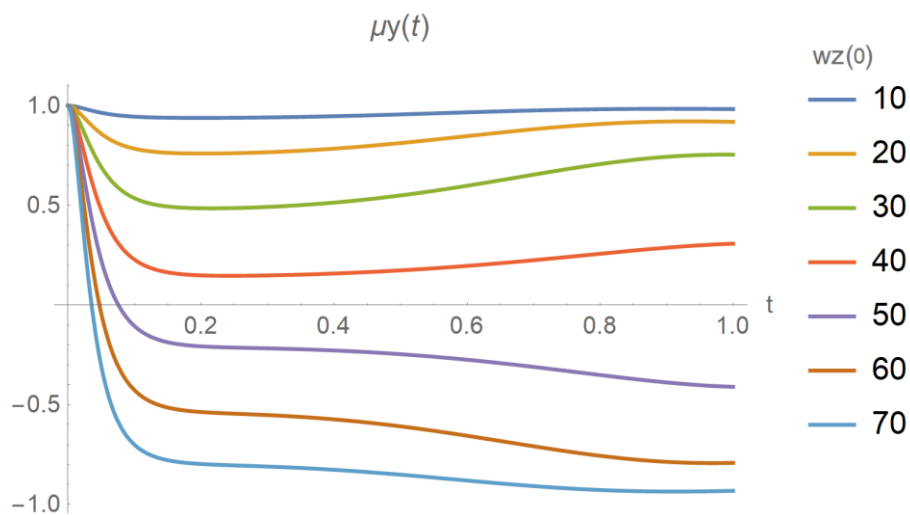


Figura 53 Caso general con ω_z inicial no nula. Ampliación de μ_y

Observando μ_y con detalle vemos que al igual que con la variación inicial de ω_x , el momento dipolar magnético tiende a 1 o -1, según el caso. Sin embargo, aquí, la componente Y de $\vec{\mu}$ no oscila tanto.

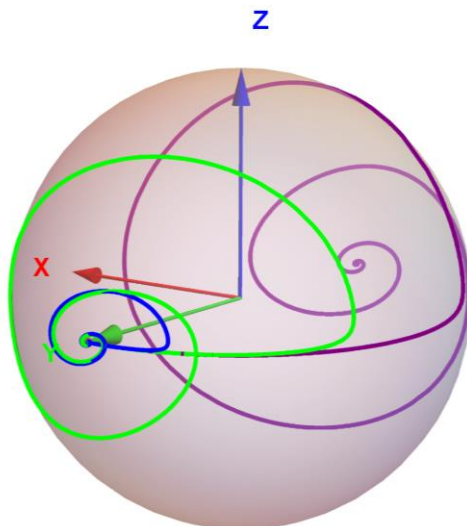


Figura 54 Caso general con ω_z inicial no nula. $\vec{\mu}$

Aquí se aprecia mejor el efecto del pivotamiento inicial. Vemos como el momento dipolar rota según el eje OZ, hasta que comienza a rotar según el eje OY para converger en OY finalmente. Podemos pensar en el movimiento como si la esfera girara rápidamente y una vez ω_z se disipa, se comportara como si partiera del reposo desde la posición alcanzada.

3.3.3.2.4 Variación de ω_y y ω_x iniciales de forma proporcional

Ahora vamos a analizar el efecto combinado de aplicar ω_x y ω_y a la vez, lo que equivale a empujar la esfera de forma diagonal según los ejes de referencia.

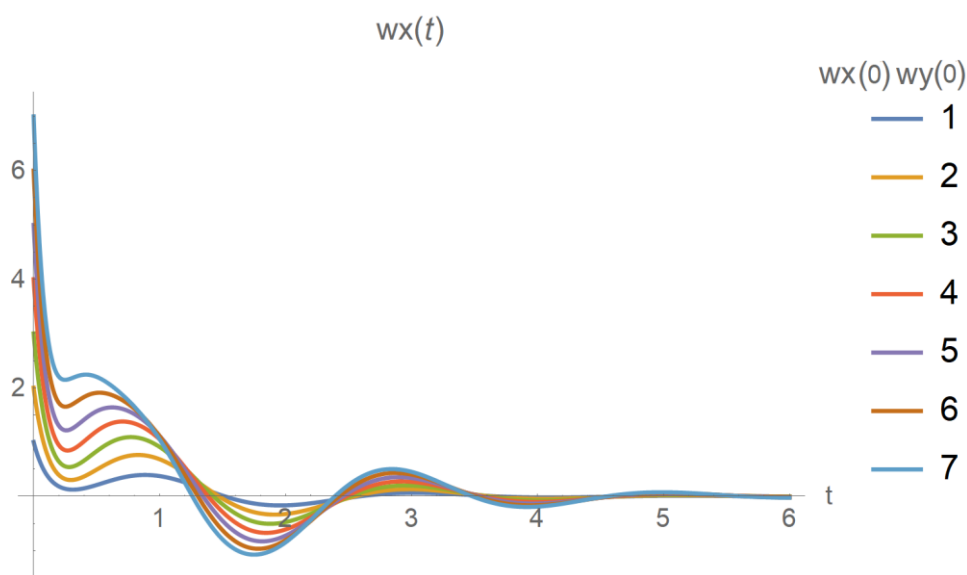


Figura 55 Caso general con ω_y y ω_x iniciales no nulas. ω_x

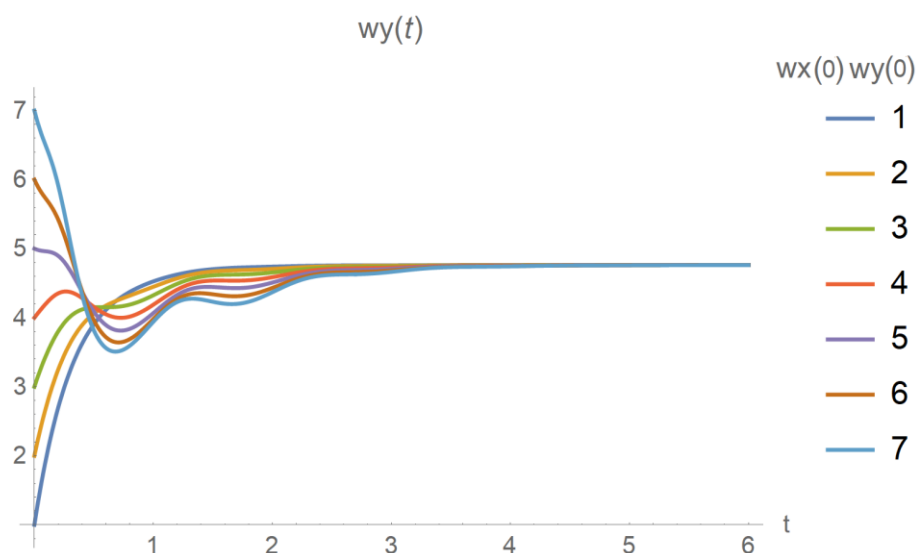


Figura 56 Caso general con ω_y y ω_x iniciales no nulas. ω_y

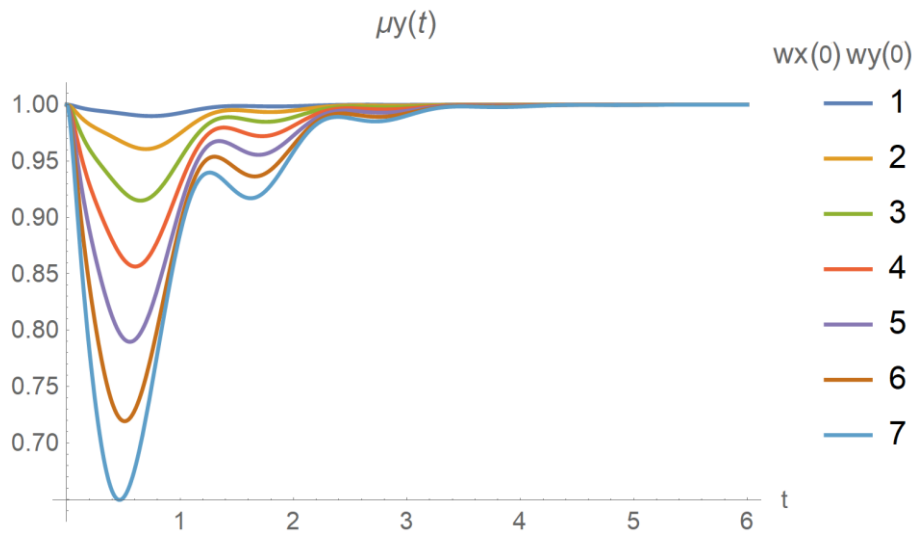


Figura 57 Caso general con ω_y y ω_x iniciales no nulas. μ_y

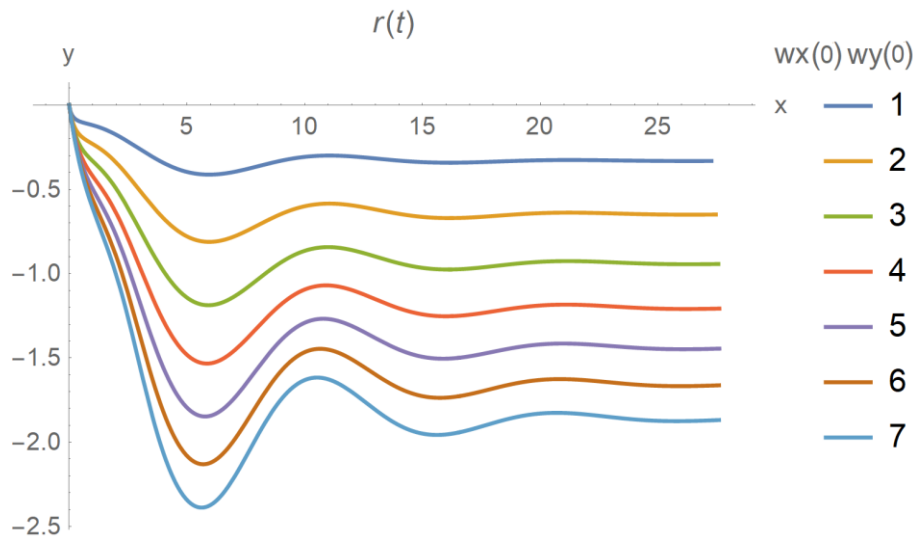


Figura 58 Caso general con ω_y y ω_x iniciales no nulas. Trayectoria

En las gráficas resultantes se aprecian características de los cambios individuales ya estudiados. Como que ω_x tienda a cero y ω_y a un valor marcado por la fuerza aplicada, que sigue siendo 20. Sin embargo, en estas se aprecian ciertas oscilaciones como consecuencia del cambio simultáneo de ambas velocidades angulares. Para la velocidad y trayectoria se aprecian más cambios. La trayectoria, como ocurre en la variación de ω_x es desplazada en Y según el valor inicial de esta. Según de que valor de velocidad partamos, se llegará más lejos o menos. Otro aspecto destacable es la velocidad lineal pues esta, aunque parte de puntos más alejados del punto de referencia converge en un punto marcado por la velocidad ω_y estable. En cuanto a $\vec{\mu}$ podemos ver que μ_y converge a 1. Aunque dependiendo de las condiciones iniciales oscila un poco antes de establecerse. Para velocidades de ω_x mayores posiblemente llegue a establecerse en -1 como ocurría en otros casos.

3.4 Resultados cuantitativos

Una vez analizado el comportamiento adimensional del sistema, asignaremos valores a algunos parámetros para obtener resultados cuantitativos. Se comentarán los parámetros más relevantes para cada caso.

Conociendo el tiempo característico, calculado en el punto 3.2, calculamos las variables dimensionales de cada parámetro.

$$t_0 = 0.10618 \text{ s} \quad r_0 = 0.0025 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 9.42 \text{ rad/s} \quad F_0 = F_0^m = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ N} \quad v_0 = 2.35 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Como se comentó al escalar las magnitudes, para obtener valores dimensionales, multiplicaremos los valores adimensionales obtenidos en la simulación por las cantidades que acabamos de calcular en función del tiempo característico.

Aunque para la simulación en algunos casos se han utilizado fuerzas adimensionales de entre 10 y 70, vamos a realizar un cálculo para obtener un orden razonable de fuerza aplicada $F^{aplic} = mg \text{ sen}(\beta)$. Si inclinamos el plano entre 1 y 15 grados, obtendríamos fuerzas aplicadas dentro del rango de $8.55 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ y $1.2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. Escalando estas fuerzas, para analizarlas en la simulación deberíamos utilizar valores entre 0.78 y 12.

3.4.1 Caso particular I. El vector $\vec{\mu}$ se mantiene en la dirección del eje OY

Usaremos este primer caso particular para comentar los valores finales de ω_y que se relacionan linealmente con la fuerza aplicada. En la simulación, para una fuerza de 2, que equivaldría a $2.3 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ y una inclinación de 3° , obtenemos una velocidad angular final de 0.476 que dimensionalizado son 4.48 rad/s y un avance lineal de $1.2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$. En cuanto al tiempo de establecimiento, que es de $5/3$ en la simulación, dimensionalizado valdría 0.18 s.

3.4.2 Caso particular II. El vector $\vec{\mu}$ se mantiene contenido en el plano OXZ

En este apartado debemos diferenciar dos casos según el orden de las fuerzas aplicadas. Si las fuerzas son mayores de $4.4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, la velocidad angular varía alrededor de su valor medio del orden de 42.6 rad/s siguiendo un patrón senoidal con una frecuencia de oscilación de 12.62 Hz (estos datos son para la fuerza mencionada). Pero para valores de fuerza menores, en la función aparecen valles, es decir, la mitad inferior de la curva senoidal se ensancha, y la superior se estrecha, formando una cresta. La relación entre la fuerza aplicada y la velocidad angular promedio se mantiene. En un tiempo de 0.636 s, la esfera alcanza una distancia de $6.43 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

Los resultados obtenidos pertenecen a una fuerza de $4.4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, que solo podría alcanzarse si a la esfera le aplicamos una fuerza constante superior a su peso.

Para una inclinación de 10° , tendríamos una fuerza aplicada de $8.51 \cdot 10^{-4} \text{ N}$ y una velocidad angular de 0.85 rad/s.

3.4.3 Caso general partiendo del reposo o con velocidad inicial no nula

Si consideramos que el momento dipolar magnético inicia el movimiento próximo al eje OZ, el sistema se estabilizará en torno a 0.6 y 0.75 segundos para fuerzas de $4.4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ y $3.3 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ respectivamente. Para una fuerza de $2.2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ que correspondería a inclinar el plano unos 27° respecto de la horizontal, la esfera alcanza una velocidad final de 45 rad/s separándose unos $7.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ lateralmente. Si estudiamos el movimiento durante 1.6 s, la esfera recorre en total 0.118 m en la dirección de X.

Situando $\vec{\mu}$ inicialmente alejado de OZ, con la misma inclinación del plano, 27° , el sistema se estabilizaría antes, cerca de los 0.424 s. Durante el movimiento, la mayor desviación respecto de OY es de $3.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Cuando aplicamos una fuerza de $4.4 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, el sistema decimos que está afectado por una fuerza intensa. Para este valor alcanza distancias en X del orden de $7.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ en 0.42 s, mientras que se separa de Y entre $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ y $4.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$. La esfera oscilará hasta que en torno a 0.318 s ya se encuentre orientado

paralelo al eje OY. La velocidad angular seguirá variando hasta los 0.37 s o 0.42 s. en función del ángulo inicial.

Sin embargo, si aplicamos una fuerza del orden de $1.1 \cdot 10^{-4}$ N, el sistema tendrá una dinámica mucho más lenta. El tiempo de establecimiento para ω_y se encontrará en el rango de 186 s y 265 s dependiendo del ángulo ϕ inicial. Las distancias alcanzadas en 371 s serán de hasta 1.67 m con velocidades de $5.6 \cdot 10^{-3}$ m/s. La esfera se separará del eje OY una distancia parecida al caso en el que aplicábamos fuerzas fuertes, entre $1.7 \cdot 10^{-3}$ m y $3.6 \cdot 10^{-4}$ m.

En el caso de que apliquemos velocidades iniciales no nulas, el sistema se estabiliza rápidamente. Si aportamos ω_y , en 0.21 s ya se alcanza el valor final de la velocidad angular. Si ω_x inicial es distinto de cero, la esfera rodará lateralmente, pero en $8.48 \cdot 10^{-2}$ s deja de rodar en ese sentido para comenzar a converger hacia el punto de equilibrio más cercano, es decir, a partir de ese momento, el momento dipolar no vuelve a pasar por el plano OXZ. Aplicando una velocidad inicial de 376.8 rad/s, lo cuál sería difícil en la práctica, la esfera recorre $9.23 \cdot 10^{-2}$ m, y se aleja del eje OY aproximadamente $1.5 \cdot 10^{-2}$ m. En el caso de aportar un pivotamiento inicial, es decir, ω_z distinta de cero, en $2.12 \cdot 10^{-2}$ s ya se habrá disipado y se comportará como en el caso general partiendo del reposo.

4 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este trabajo el objetivo ha sido estudiar el movimiento de una esfera imanada que rueda por encima de un plano conductor óhmico. Para ello se han estudiado los fenómenos electromagnéticos del sistema, la inducción de corrientes de Foucault en el plano debido a la rotación de la esfera imanada, y las interacciones magnéticas de esta con la misma, así como la cinemática y dinámica. Conociendo dichos fenómenos de un estudio previo^[6], se han obtenido las ecuaciones que rigen nuestro problema. Para la dinámica se ha supuesto que la esfera rodaba por un plano horizontal mientras que le es aplicada una fuerza equivalente a la ejercida por el peso en el caso del plano inclinado. Previo a esto se han definido modelos tanto para la esfera como para el plano. Se han desarrollado las ecuaciones obtenidas para conformar el sistema de ecuaciones que caracterizan al problema. Para poder realizar simulaciones se ha escalado dicho sistema. Se utiliza un tiempo característico para dimensionalizarlo que depende de las propiedades físicas de los objetos de estudio. Una vez introducidas las ecuaciones escaladas en el programa de cálculo se han realizado diversas pruebas adimensionales, los resultados de estas se han dimensionalizado posteriormente para analizar y comentar el comportamiento real del sistema.

Se ha analizado el sistema en varios casos, dos de ellos particulares. Para esos casos se han supuesto algunas condiciones iniciales que permitían simplificar las ecuaciones de simulación. Para el resto de las pruebas se han utilizado las ecuaciones generales, modificando las condiciones iniciales o fuerzas aplicadas. Entre los resultados se ha prestado atención a las velocidades angulares y lineales alcanzadas, tiempos de establecimiento, periodos de oscilación, distancias recorridas o de separación y relaciones entre parámetros.

Hemos observado que el movimiento tiene dos posibles estados finales, uno es orientarse $\vec{\mu}$ según el eje OY, transversal al descendente por el plano, y girar con una velocidad angular constante cuyo valor está relacionado linealmente con la fuerza aplicada. El otro es mantenerse girando el vector en el plano OXZ con una velocidad angular que oscila en torno a un valor medio que también mantiene una relación lineal con la fuerza aplicada, pero en este caso es inestable, por lo que no se puede alcanzar en la práctica. Depende de como se oriente inicialmente el vector $\vec{\mu}$, la velocidad angular oscilará más o menos antes de establecerse en su valor final. Esta orientación inicial también varía los desplazamientos laterales al inicio del movimiento y la separación final respecto del eje OY, ya que la esfera termina desplazándose en línea recta. En caso de aplicar una fuerza débil lo que ocurre es que la dinámica del sistema se vuelve mucho más lenta y los parámetros evolucionan lentamente, pero con oscilaciones de alta frecuencia.

Si iniciamos el movimiento con velocidades angulares ω_x y ω_z distintas de cero, estas tienden rápidamente a disiparse, en el caso de ω_y tiende al valor establecido por la fuerza aplicada. Pero si al comienzo se gira la esfera lo suficiente en torno a OX o OZ, lo que conseguimos es que la esfera tienda a alinearse con OY en un sentido u otro. También en estos casos sufre desplazamientos laterales.

A la vista de los resultados una conclusión que obtenemos es que la esfera tiende a rodar con una velocidad angular constante que depende linealmente de la fuerza que se le aplique. Hasta alcanzar dicho momento puede bambolear más o menos dependiendo de las condiciones iniciales tanto de velocidad como de orientación del momento dipolar. Pero dichos desplazamientos laterales son muy pequeños en comparación con su desplazamiento en la dirección de OX. Otro aspecto interesante es el caso particular II, si situamos $\vec{\mu}$ contenido en el plano OXZ este permanecerá en el mismo, variando su velocidad angular final levemente, pero a la mínima desviación lateral, que haga que el vector deje de estar contenido en el plano, este rápidamente tiende a orientarse como en el caso particular I, que podríamos considerar como la situación final del sistema para cualquier caso, a excepción claro del caso particular II.

La dinámica de nuestro sistema depende del tiempo característico del mismo, que como vimos en el apartado de escalado puede definirse en función del radio de la esfera, al utilizar una esfera de neodimio pequeña obtenemos dinámicas rápidas, con esferas mayores, los movimientos deberían ser más lentos. En cuanto a las fuerzas utilizadas para el estudio, son más coherentes las fuerzas débiles, corresponden mejor con la fuerza que

realmente percibiría la esfera al inclinar el plano, aunque con las fuerzas fuertes podemos analizar mejor el comportamiento de la esfera.

Hemos considerado una rodadura ideal, y un plano lo suficientemente delgado para poder aplicar las corrientes inducidas obtenidas en el estudio de partida, en el caso de utilizar una lámina más gruesa, dichas corrientes cambiarían. También hemos considerado la esfera y el plano ideales, es decir, una lámina totalmente plana y una esfera totalmente lisa y pulida, cosa que en la realidad es prácticamente imposible, solo aproximable. En cuanto a la magnetización de saturación hemos supuesto que se aplicaba de forma total, cosa que realmente tampoco ocurre.

Todas estas consideraciones o suposiciones podrían plantearse mejor en estudios futuros, así como realizar un análisis empírico ya que nuestro estudio se ha basado simplemente en un análisis numérico. También podrían considerarse otras formas del objeto imanado, o fuerzas aplicadas variantes con el tiempo en vez de constantes, quizás pueda conseguirse un mayor control del movimiento de la esfera con dichas fuerzas que pueden basarse en fuerzas magnéticas externas, por ejemplo, con un electroimán, u otras como las debidas a muelles.

5 REFERENCIAS

- [1] Cheng, David k. “Fundamentos del electromagnetismo para ingeniería”. México etc. : Addison-Wesley Iberoamericana, 1998
- [2] Imagenes obtenidas de Wikipedia.org (Consultado en 2020)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFpt_dipoles_magnetic.svg
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dipole_magnetic-ring.svg
- [3] Toscano Jiménez, Manuel. Mecánica Ingenieros industriales Segundo curso. 2008. Escuela técnica superior de ingeniería. Universidad de Sevilla
- [4] Imagen obtenida de Wikipedia.org (Consultado en 2020) <https://qph.fs.quoracdn.net/main-qimg-886ddce3a37e3fda41ebb4b7dddee12a>
- [5] Datos obtenidos de Wikipedia.org (Consultado en 2020)
https://es.wikipedia.org/wiki/Conductividad_el%C3%A9ctrica
- [6] Martín Espinosa, Miguel. “Estudio del frenado magnético en un imán rodante”. Universidad de Sevilla 2019. <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/92644/>
- [7] Cinemática de un sólido rígido [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Movimiento_relativo_\(G.I.T.I.\)](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Movimiento_relativo_(G.I.T.I.))
- [8] González Fernández, Antonio. Comunicación privada
- [9] Mathematica V12 <https://www.wolfram.com/mathematica/>