

Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

**Estudio numérico de problemas de convección de
Rayleigh-Bénard en presencia de radiación**

Autor: Krishna Laxman Jamnani Jamnani

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de
Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla. 2020



Trabajo de Fin de Grado
Ingeniería Aeroespacial

Estudio numérico de problemas de convección de Rayleigh-Bénard en presencia de radiación

Autor:

Krishna Laxman Jamnani Jamnani

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor titular

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo de Fin de Grado: Estudio numérico de problemas de convección de Rayleigh-Bénard en presencia de radiación

Autor: Krishna Laxman Jamnani Jamnani

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

*A mi familia, amigos y
compañeros*

A mis maestros

Agradecimientos

En primer lugar, querría agradecer a mis padres y a mi hermana que me han apoyado estos años en los que he estado en la ETSI. En los momentos más difíciles me animaron para que siguiera dando el máximo esfuerzo y conseguí avanzar gracias a ellos.

También me gustaría darles las gracias a mis amigos y compañeros con los que he compartido esta gran experiencia en la vida universitaria porque han estado a mi lado siempre que he necesitado ayuda y porque hemos compartido muchos momentos inolvidables que me llevaré para siempre.

Me gustaría también dar mi más sincero agradecimiento a mi profesor y tutor de este trabajo Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor por haberme aceptado para este proyecto y por haberme ayudado en estos últimos meses bastante difíciles ya que sin él esto no habría sido posible. Es una grandísima persona que me ha apoyado, no solo en este trabajo, sino en otros años con asignaturas en las que les ha dedicado mucho tiempo y esfuerzo y sobretodo con esa humildad que le caracteriza y le aprecio por ello.

Os lo agradezco de corazón a tod@s

Krishna Laxman Jamnani Jamnani

Ingeniería Aeroespacial

Sevilla, 2020

Resumen

En este trabajo se va a tratar el estudio numérico del fenómeno de convección natural de Rayleigh-Bénard al incluir la radiación en un recinto rectangular bidimensional.

Se empezará con la introducción de conceptos básicos para una mejor comprensión del problema físico que se va a analizar posteriormente. También se incluye la evolución histórica de este estudio con la que se aprenden muchas cosas acerca de este fenómeno.

Se partirán de las ecuaciones de Navier-Stokes junto con una serie de hipótesis que se asumen para llegar a la aproximación de Boussinesq. Al desarrollarlas se llegarán a unas ecuaciones finales que gobiernan el movimiento del fluido en la convección natural con presencia de radiación. Se adaptará el sistema de tal forma que se pueda implementar en un código sencillo de MATLAB y se puedan realizar simulaciones.

Se mostrarán los resultados que se obtienen tras seguir esta metodología y se interpretarán las gráficas y valores que se alcanzan. Se realizarán comparativas con algunos resultados provenientes de la literatura.

Abstract

This project will reflect the numerical study of the phenomenon known as Rayleigh-Bénard convection in the presence of radiation inside a bidimensional rectangular enclosure.

Firstly, there is a brief introduction to treat basic concepts related to this physical problem that will help for the forward analysis. It includes an historical evolution of this problem in order to learn and to be familiarized with its properties.

The governing equations of Navier-Stokes that describe the fluid motion inside the enclosure, will be accompanied with some hypothesis which will be assumed to simplify the problem. After proper developments, it will result in the final system of equations considering the presence of radiation. Consequently, these equations are written in an appropriate form that will allow their resolution through a numerical method based on a finite difference discretization of the non linear differential equations.

Finally the results are shown after executing a simple MATLAB code that is made by following the previous steps, which are detailed in other chapters. They will help to draw conclusions of the phenomenon. Furthermore, there will be comparisons between the graphics and values obtained through this code and the values from the literature.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xiv
Índice de figuras	xvi
1 Introducción	1
1.1 <i>Objetivo</i>	1
1.2 <i>Convección de Rayleigh-Bénard</i>	2
1.3 <i>La radiación</i>	6
1.4 <i>Estructura del proyecto</i>	9
2 Formulación del problema	11
2.1 <i>Hipotesis aplicadas en el problema de convección natural con radiación</i>	11
2.2 <i>Flujo de radiación en aproximación optically thick</i>	14
2.3 <i>Temperatura de equilibrio en presencia de radiación</i>	17
2.4 <i>Ecuaciones de convección de Rayleigh-Bénard con radiación para casos bidimensionales</i>	22
3 Método numérico de resolución	27
3.1 <i>Preparación de las ecuaciones de Saltzman con radiación para el método de colocación</i>	27
3.2 <i>Códigos de MATLAB empleados</i>	32
4 Resultados numéricos	41
4.1 <i>Convección de Rayleigh-Bénard sin radiación</i>	41
4.1.1 <i>Número de Rayleigh crítico</i>	41
4.1.2 <i>Relaciones de aspecto y Ra_c</i>	48
4.1.3 <i>Número de células convectivas</i>	48
4.1.4 <i>Número de Nusselt</i>	50
4.1.5 <i>Tiempo estacionario</i>	53
4.1 <i>Convección de Rayleigh-Bénard con radiación</i>	54
4.1.1 <i>Número de Rayleigh crítico según N_{rc}</i>	54
4.1.2 <i>Relaciones de aspecto y Ra_c</i>	59

4.1.3 Número de Nusselt	61
4.1.4 Tiempo estacionario	64
5 Conclusiones y líneas futuras	66
Apéndice	68
<i>A Método de colocación para problemas con una variable</i>	<i>68</i>
<i>B Método de colocación para problemas bidimensionales</i>	<i>70</i>
Bibliografía	73

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Células de convección natural a gran escala en la atmósfera junto con las corrientes de chorro subtropical y polar	2
Figura 1.2 Celdas formadas en la superficie del fluido al calentar el recipiente desde abajo.	3
Figura 1.3 Fuerzas actuando sobre una partícula fluida en el fenómeno de convección natural	4
Figura 1.4 Celdas formadas en el terreno del salar de Uyuni, Bolivia	5
Figura 1.5 Intercambio de energía térmica entre superficie terrestre, atmósfera, nubes y el espacio exterior	6
Figura 1.6 Distribución de temperaturas del planeta	7
Figura 1.7 Flujos de radiación en el interior de un elemento diferencial	8
Figura 1.8 Estructura del interior del Sol	9
Figura 2.1 Cavidad prismática rectangular con fluido en su interior con las condiciones de contorno del problema	11
Figura 2.2 Definiciones geométricas para RTE: (a) placa unidimensional, (b) caso tridimensional	15
Figura 2.3 Línea de corriente en plano xz	18
Figura 2.4 Componente hidrostática de T^* en función de Nrc	22
Figura 2.5 Cavidad rectangular de dimensiones $L \times H$	23
Figura 3.1 Representación del subcontorno en el recinto	31
Figura 4.1 Función de corriente para $Ra=1000$, $t^*=13$	41
Figura 4.2 Distribución de temperaturas para $Ra=1000$, $t^*=13$	42
Figura 4.3 Campo de velocidades para $Ra=1000$, $t^*=13$	42
Figura 4.4 Función de corriente para $Ra=1000$, $t^*=80$	42
Figura 4.5 Distribución de temperaturas para $Ra=1000$, $t^*=80$	43
Figura 4.6 Función de corriente para $Ra=4000$, $t^*=40$	43
Figura 4.7 Distribución de temperaturas para $Ra=4000$, $t^*=40$	44
Figura 4.8 Función de corriente para $Ra=4000$, $t^*=100$	44
Figura 4.9 Distribución de temperaturas para $Ra=4000$, $t^*=100$	44
Figuras 4.10 Estado estacionario del sistema para $Ra=2013$	47
Figura 4.11 Relación entre A y Rac	48
Figura 4.12 Función de corriente para $A=1$, $Rac=2586$	49
Figura 4.13 Función de corriente para $A=6$, $Rac=1775$	49
Figura 4.14 Campo de velocidades para $A=6$, $Rac=1775$	49
Figura 4.15 Función de corriente para $A=10$, $Rac=1734$	50
Figura 4.16 Campo de velocidades para $A=10$, $Rac=1734$	50
Figura 4.17 N^o Nusselt medio para el caso de $A=2$, con $Rac=2013$	52
Figura 4.18 N^o Nusselt medio de las pruebas experimentales de Koschmieder y Pallas de 1974 con aceites de silicona demostrando la existencia de un Rac a partir del cual la función de Nu empieza a crecer, siendo antes $Nu=1$	52
Figura 4.19 N^o Nusselt medio en función del tiempo para el caso de $A=2$, con $Rac=3000$	53
Figura 4.20 Tiempo de alcance estacionario en función de Ra con $A=2$	53
Figura 4.21 Evolución de Ψ y temperaturas con Nrc para $Rac=4.5 \cdot 10^4$	55
Figuras 4.22 Distribución de Ψ , T^* en estado estacionario para $Nrc = 1$	56
Figura 4.23 Ra crítico en función de Nrc en escala logarítmica	57

Figura 4.24 N° Ra crítico para varios λ , χ según los resultados computacionales de R. M. Goody realizados en 1956	59
Figura 4.25 Estado estacionario para el caso de A=3 con radiación	60
Figura 4.26 Función de Rac frente a A para Nrc=1. Tiene asíntota horizontal en torno a Rac = $4.5 \cdot 10^4$	60
Figura 4.27 Función de Rac frente a A para Nrc=10. Tiene asíntota horizontal en torno a Rac = $4.5 \cdot 10^5$	61
Figura 4.28 Función de Nu frente a Ra para varios Nrc con T2/T1 = 0.5	62
Figura 4.29 Función de Nu frente a Ra para varios T2/T1 con Nrc = 1	63
Figura 4.30 Función del tiempo estacionario frente a Ra para varios Nrc con T2/T1 = 0.5	64
Figura 4.31 Función del tiempo estacionario frente a Ra para varios T2/T1 con Nrc = 1	64
Figura A.1 Polinomios con diferentes elecciones de nodos	69
Figura B.1 Mallado de la cavidad rectangular	71
Figura B.2 Ejemplo de enumeración de nodos para Nx=4 , Ny=3	71

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Objetivo

En las ciencias de la Mecánica de Fluidos y de la Transferencia de Calor se tratan muchos problemas cuya resolución es bastante compleja debido a la presencia de ecuaciones diferenciales. En algunos casos se conoce una solución predefinida con parámetros que se deben determinar según las ecuaciones con las que se trabajan. Sin embargo, en la mayoría, desconocemos esa solución analítica que nos permitiría avanzar. En las facultades de ingeniería, recientemente, se han impartido clases en las que el tutor daba contenidos teóricos sobre la formulación de los problemas a analizar, para más tarde aplicar una metodología con la que se obtenían soluciones aproximadas y no tan exactas (es un buen método para los estudiantes viendo la gran complejidad de los problemas). Hace muchos años, tanto los profesores como los alumnos no solían disponer de los medios adecuados para realizar este proceso descrito debido a la tecnología poco desarrollada de aquella época, por lo que se dedicaba muchas horas y esfuerzo a la deducción de estos problemas tan complejos. Esto podía causar que algunos alumnos no pudieran seguir el problema con facilidad y provocaba mucha confusión, hasta el punto de que el profesor entregaba los resultados y gráficas directamente a los estudiantes (había que tener fe en que la solución del tutor fuera la correcta).

Se puede decir a día de hoy que la situación ha cambiado notablemente (y para bien de todos) ya que en estos tiempos es posible proceder a la resolución de estos problemas gracias al gran desarrollo de los ordenadores y su accesibilidad al alumnado y al profesorado. De hecho, existen programas numéricos, como MATLAB, que permiten obtener soluciones a estos problemas que son aceptables para el entendimiento del alumno sobre los conceptos teóricos de dichos problemas. Además, esto da la posibilidad de ejecutar simulaciones para ver con mayor claridad el comportamiento de algunos fenómenos físicos. Esta habilidad es bastante útil en el campo de la Mecánica de Fluidos ya que permite conocer mejor algunos problemas esenciales como la convección natural, casos de la capa límite, movimientos de gases en conductos, flujos potenciales alrededor de un ala, etc.

En las clases prácticas, con conocimientos básicos de programación y de métodos numéricos, es posible la resolución de estos problemas de manera más sencilla, eficiente y empleando menos tiempo. Los estudiantes pueden además elaborar sus propios códigos e ir corrigiendo los errores que vayan encontrando, favoreciendo de esta forma la mejor comprensión sobre los conceptos teóricos y los métodos numéricos empleados.

Habiendo explicado la evolución de la enseñanza en cuanto a resolución de problemas relacionados con la Mecánica de Fluidos y la Transmisión de Calor, se puede afirmar que se ha mejorado considerablemente la calidad de las docencias. Se va a concretar esta idea

centrando el estudio sobre el fenómeno de la convección natural de Rayleigh-Bénard añadiendo la presencia de radiación en este problema y analizando sus efectos.

1.2 Convección de Rayleigh-Bénard

Se trata de un tipo de convección natural (mecanismo de transferencia de calor sin la intervención de medios externos como bombas, ventiladores, etc.) en el que el movimiento del fluido es generado por la presencia del campo gravitatorio y los gradientes de densidad, que a su vez puede ser generado por los gradientes de temperatura. Hay situaciones en las que también puede ser provocado por los gradientes de concentración. Pero para este proyecto se centrará en los movimientos generados por los gradientes de temperatura que provocan gradientes de densidad, originando de esta forma la convección natural de Rayleigh-Bénard.

En la naturaleza se observan varios ejemplos de este fenómeno como es el caso de la convección libre a gran escala en la atmósfera terrestre formándose células de convección de Hadley (latitudes ecuatoriales y tropicales), de Ferrel (de latitudes medias) y Polar. Los gradientes de temperatura entre los polos y el Ecuador generan este movimiento.

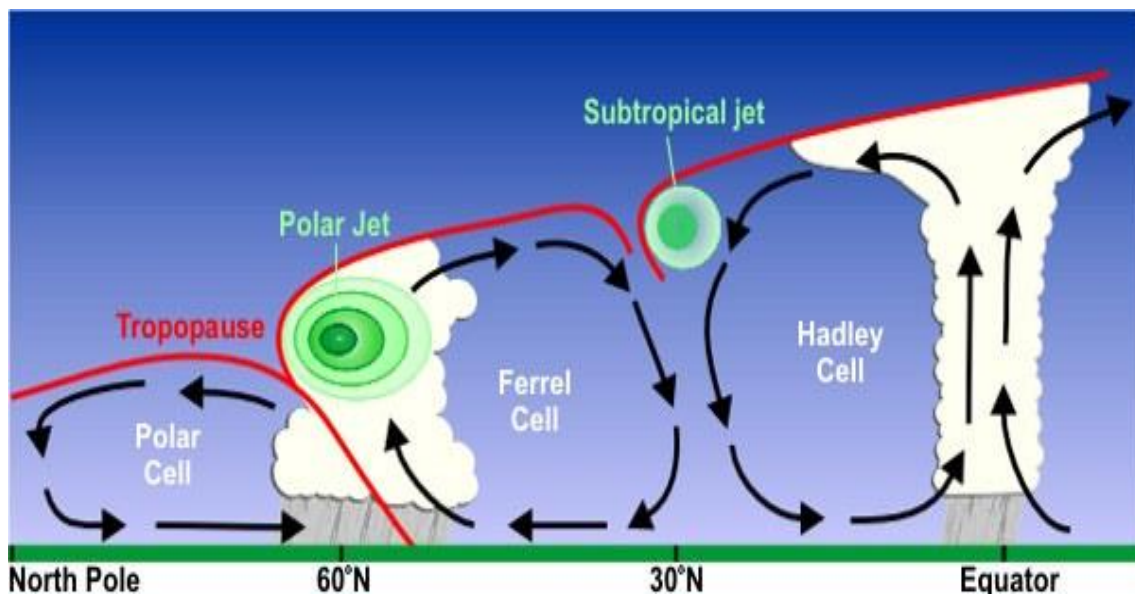


Figura 1.1 Células de convección natural a gran escala en la atmósfera junto con las corrientes de chorro subtropical y polar

En la ingeniería este concepto tiene varias aplicaciones: los equipos electrónicos o en los motores eléctricos industriales, es un factor determinante el aprovechamiento de la convección natural para la disipación de calor. También es importante su aportación en la ventilación de salas de calderas o de producción, o en el aislamiento y calefacción de edificios.

Históricamente el estudio de la convección natural comenzó alrededor de 1900, cuando Henri Bénard realizó experimentos cuantitativos en los que trataba una fina capa de fluido (grasa de ballena) expuesta a aire ambiente y sometida a un gradiente de temperatura

vertical (calentada desde abajo). Bénard estudiaba la estabilidad de esta capa como las formas geométricas adquiridas en estas condiciones. El científico observó como en el fluido se originaba un flujo convectivo que, tras un régimen transitorio inicial, creaba patrones semiregulares y semiestables en forma de celdillas hexagonales (parecido a una colmena).

El ascenso del fluido se producía en el centro de las celdillas y su descenso se originaba en el perímetro de las mismas. Además, visualizó pequeñas depresiones de la capa superficial libre del fluido en el centro de cada patrón, lo que le llevó a especular acerca del papel que jugaba la tensión superficial.

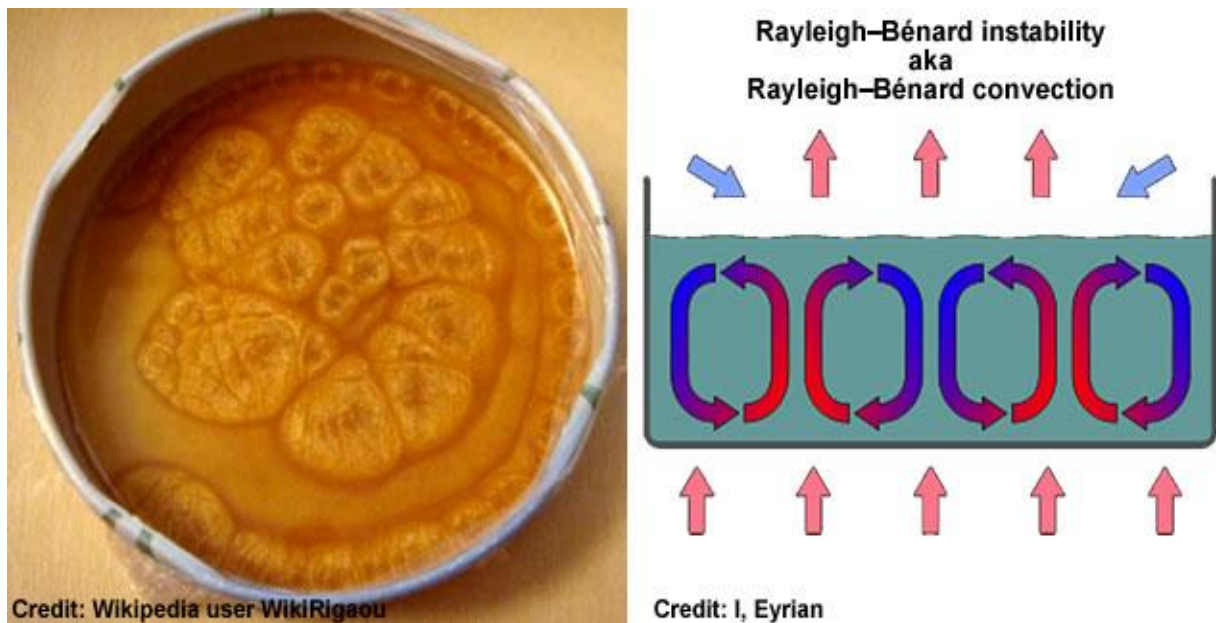


Figura 1.2 Celdas formadas en la superficie del fluido al calentar el recipiente desde abajo.

En 1916, Lord Rayleigh publicó su artículo “*On Convection Currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is under side*”, donde continuaba con el estudio de la convección natural y los mecanismos físicos que tomaban lugar en ella, consiguiendo reunir todos por primera vez en un mismo corolario. En este documento describió el movimiento del flujo convectivo causado por la presencia de fuerzas de flotabilidad o empuje de Arquímedes (el fluido con densidad menor tiende a ascender por encima del que es más denso). No obstante, esta fuerza va acompañada de otras que actúan como fuerzas atenuadoras: la fuerza de fricción y la fuerza de conducción de calor. La primera es la fuerza que hay que vencer en primera instancia para poner en movimiento el flujo, mientras que la segunda tiende a homogeneizar la temperatura y, por tanto, la densidad del fluido.

Se supone un fluido en reposo con una distribución descendente de densidades en la dirección ascendente y en un instante se introduce una perturbación. En función de la importancia de los mecanismos anteriormente mencionados (flotabilidad, fricción y conducción de calor), se alcanza un equilibrio estable si el fluido vuelve a su estado de reposo, o inestable en el que el fluido permanece en movimiento originando un flujo convectivo, es decir, la convección natural.

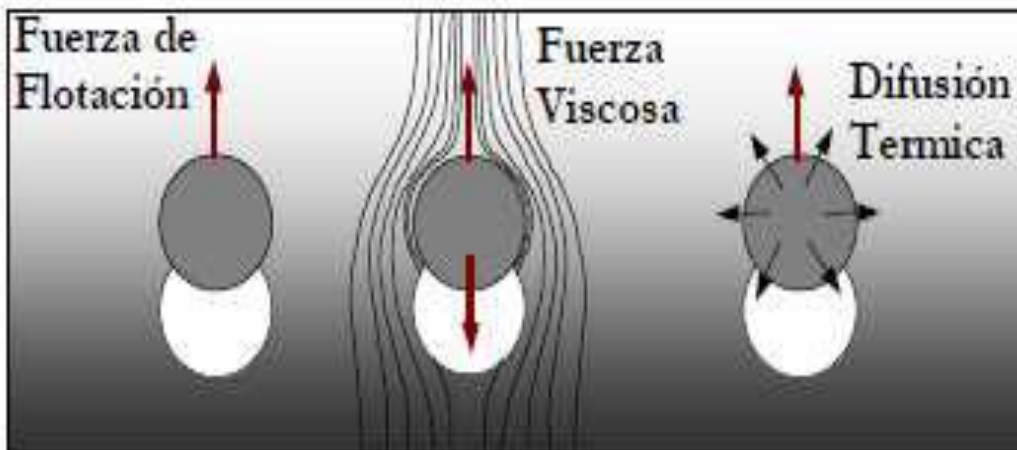


Figura 1.3 Fuerzas actuando sobre una partícula fluida en el fenómeno de convección natural

Los experimentos de Bénard resultaban contradictorios a la teoría que propuso Rayleigh. Pero gracias a posteriores investigaciones se pudo deducir que la teoría era válida mientras se despreciara los efectos de la tensión superficial presentes en los experimentos de Bénard, es decir que, para un fluido convectivo confinado entre dos placas con distintas temperaturas y situados perpendicularmente a la dirección de la gravedad, no debe haber tensiones ni velocidad del fluido alrededor de las paredes. En este caso sí serían aplicables los descubrimientos de Rayleigh, obteniendo así la convección natural de Rayleigh-Bénard.

Rayleigh linealizó en torno a la situación de equilibrio las ecuaciones de Navier-Stokes para poder estudiar la estabilidad de las pequeñas perturbaciones presentes en el caso. De las ecuaciones dedujo un parámetro adimensional al que otorgó su nombre, el *número de Rayleigh*:

$$Ra = \frac{gH^3\beta\Delta T}{\nu\alpha}$$

g: aceleración de la gravedad

H: espesor de la capa fluida

β : coeficiente de dilatación térmica

ΔT : diferencia de temperatura entre placas

ν : viscosidad cinemática

α : difusividad térmica

Este número mide la importancia relativa entre los efectos de la flotabilidad, viscosidad y la conducción térmica. Existe un valor crítico de este parámetro (Ra_c) a partir del cual el sistema se vuelve inestable y por consiguiente se forman las celdas de convección natural.

Después del gran trabajo realizado por Rayleigh y Bénard, se llevaron a cabo numerosas investigaciones sobre la convección de fluidos confinados. Muchos autores se dedicaron a buscar el Ra_c de sistemas con distintas configuraciones (geometría, conductividades de paredes laterales, etc). Si se tratan números de Rayleigh elevados muy por encima de Ra_c , se puede ver cómo el fluido entra en un régimen turbulento de convección natural que ha suscitado un gran interés recientemente como lo demuestran las investigaciones de D. Lohse publicadas en la revista *Annual Review of Fluid Mechanisc*, en 2010 mediante el artículo ”*Small-Scale Properties of Turbulent Rayleigh-Bénard Convection*”.

Por último, se recuerda que, aunque en este proyecto la convección natural es originada por los gradientes de densidad, existen más causas como pueden ser los gradientes de concentración en fluidos heterogéneos.

Este fenómeno se puede ver en grandes salinas donde, por evaporación, el agua se seca dejando en el terreno capas delgadas de sal que forman perímetros de celdas hexagonales. Esto es consecuencia del arrastre que el líquido efectúa sobre la sal, y al evaporarse el agua, esta sal se cristaliza.



Figura 1.4 Celdas formadas en el terreno del salar de Uyuni, Bolivia

1.3 La radiación

La radiación térmica es uno de los mecanismos fundamentales de transferencia de calor. Todos los cuerpos, al poseer una temperatura determinada, emiten radiación electromagnética debido al movimiento de las partículas que están cargadas que se encuentran en la materia. La intensidad de esta radiación es dependiente de la temperatura y longitud de onda considerada.

Las características de la radiación térmica dependen de las propiedades de la superficie del objeto de donde emana, como su temperatura, y su capacidad para absorber y emitir radiación. Cuando el objeto irradiador se encuentra en equilibrio termodinámico y la superficie presenta una absorptividad máxima a todas las longitudes de onda, se denomina un cuerpo negro. Un cuerpo negro también es un emisor perfecto. La radiación térmica emitida por un cuerpo negro se llama radiación de cuerpo negro. La proporción de la emisión de un cuerpo, en relación con la de un cuerpo negro se conoce como la emisividad.

El intercambio de radiación térmica viene dado por la siguiente expresión:

$$\tau + \alpha + \rho = 1$$

donde α representa la componente de absorción, ρ la reflexión y τ la transmisión. Una superficie perfectamente opaca no transmite la radiación incidente ($\tau=0$ y $\alpha+\rho=1$). Por otro lado, un reflector perfecto refleja toda la radiación incidente, es decir, $\rho=1$ y $\tau=\alpha=0$. Para objetos reales, α , ρ y τ varían con la longitud de onda.

En cuanto al intercambio de energía de la Tierra, casi el 30% de la radiación de onda corta que incide sobre la superficie del planeta y su atmósfera es devuelta al espacio (albedo) en forma de radiación infrarroja. Por otra parte, la presencia de los gases de efecto invernadero (como el vapor de agua y el dióxido de carbono) provocan que el grueso de esta radiación infrarroja se emita al espacio desde unos 5 km de altitud. Esta es una de las causas principales del efecto invernadero que consigue el calentamiento de la parte baja de la atmósfera.

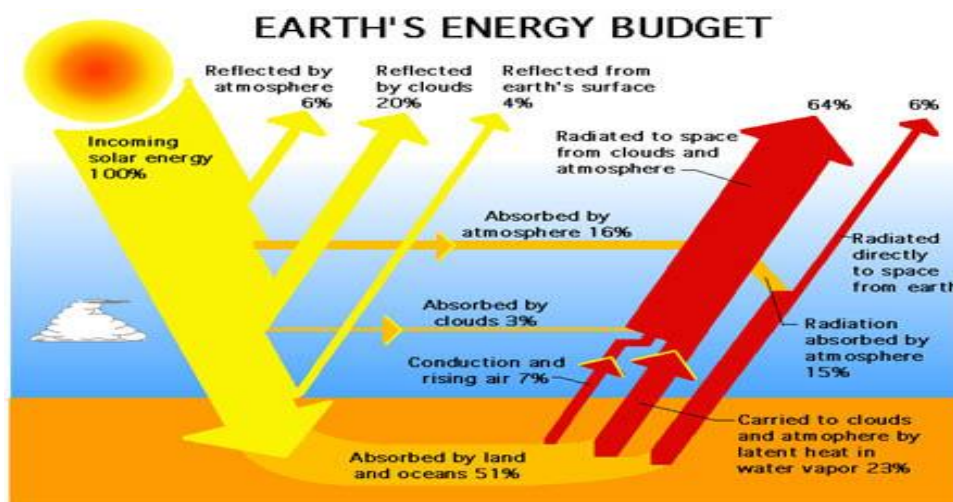


Figura 1.5 Intercambio de energía térmica entre superficie terrestre, atmósfera, nubes y el espacio exterior

La energía solar no calienta la superficie de manera uniforme, sino que lo hace en mayor medida hacia el ecuador que hacia los polos. Este gradiente térmico en latitud trata de compensarse mediante el acoplamiento entre la atmósfera y las corrientes oceánicas. Los procesos que los acompañan son los vientos, precipitaciones, convección, evaporación. Juntando estos procesos, se consigue mantener en funcionamiento el motor térmico terrestre.

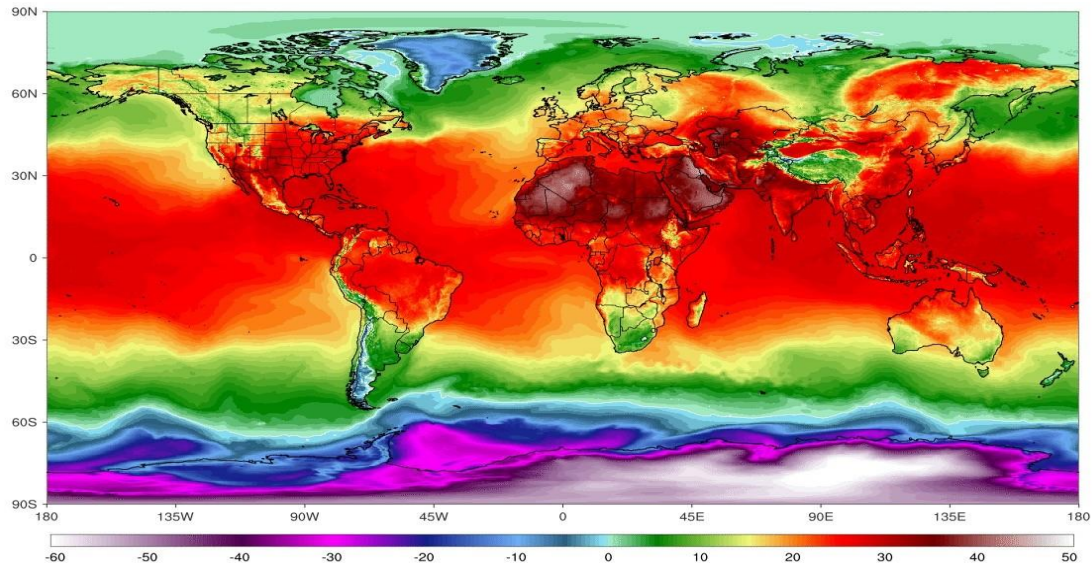


Figura 1.6 Distribución de temperaturas del planeta

Todos los cuerpos con una temperatura T emiten radiación electromagnética de forma continua con diferentes longitudes de onda. A temperaturas lo suficientemente grandes, el análisis de los flujos de calor puede resultar bastante complejo. El mecanismo de transferencia de calor por radiación viene definido por una ecuación diferencial basada en un balance de energía de radiación que pasa a través de un elemento diferencial de volumen llegando a un equilibrio termodinámico local.

La radiación incidente se divide en varias partes al penetrar en el medio. Una parte de la intensidad es absorbida por el medio. Otra fracción es la radiación dispersada. Además, el volumen de control también es capaz de emitir radiación en todas las direcciones como un cuerpo negro. Suponemos que la radiación incidente sigue una dirección Ω .

$$\frac{\partial I}{\partial \Omega} = \vec{\Omega} \cdot \nabla I = \kappa I_b - (\kappa + \sigma_s) I + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} I \phi \, d\omega \quad (1.1)$$

Esta ecuación es conocida como RTE (*Radiative Transfer Equation*).

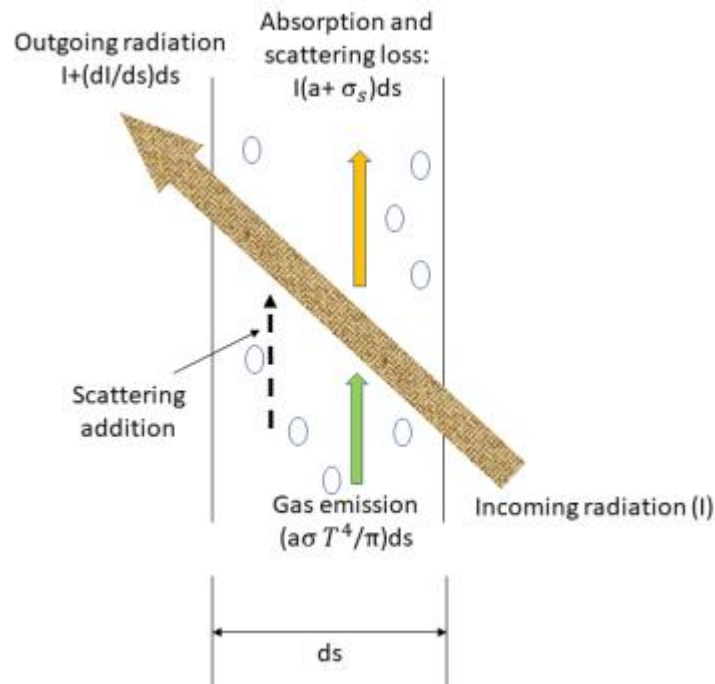


Figura 1.7 Flujos de radiación en el interior de un elemento diferencial

Resolver esta ecuación RTE es muy complicado y es por ello que existen aproximaciones mediante las cuales se puede continuar con el problema con una suficiente fiabilidad en los resultados. Antes se introduce otro concepto denominado *optical thickness* o *optical depth* :

$$\tau = \int_0^s \kappa ds \quad (1.2)$$

Este parámetro describe cuánta absorción tiene lugar cuando la luz atraviesa un medio absorbente, por ejemplo, la atmósfera solar. Si $\tau \ll 1$, la intensidad I permanece prácticamente constante, y se puede decir que el medio es ópticamente fino o transparente (*optically thin*), mientras que si $\tau \gg 1$, la intensidad I cae rápidamente, absorbiéndose los fotones por el medio de forma inmediata y se considera que este medio es ópticamente grueso u opaco (*optically thick*).

En este proyecto se ha decidido aplicar la condición *optically thick* con la que se ha logrado expresar el flujo de calor por radiación como una ecuación análoga a la de conducción de calor en la Ley de Fourier. Se trata de un modelo de difusión que simplifica los cálculos. Se requiere de una intensidad isotrópica en el medio participativo. Para ello se puede suponer un medio ópticamente grueso con pequeños gradientes térmicos.

$$C = \frac{16\sigma}{3\beta} = cte ; \vec{q}_r = -\frac{C}{4}\nabla T^4 \rightarrow \nabla \cdot \vec{q}_r = -\frac{C}{4}\nabla^2 T^4 \quad (1.3)$$

Esta es la *ecuación difusiva de Rosseland*, cuyo desarrollo se demostrará en capítulos posteriores.

Una de las motivaciones de este proyecto es formular y tratar el problema de convección natural con radiación, que es bastante estudiado al analizar la participación de la radiación térmica en la estructura interna de las estrellas, como por ejemplo el Sol.

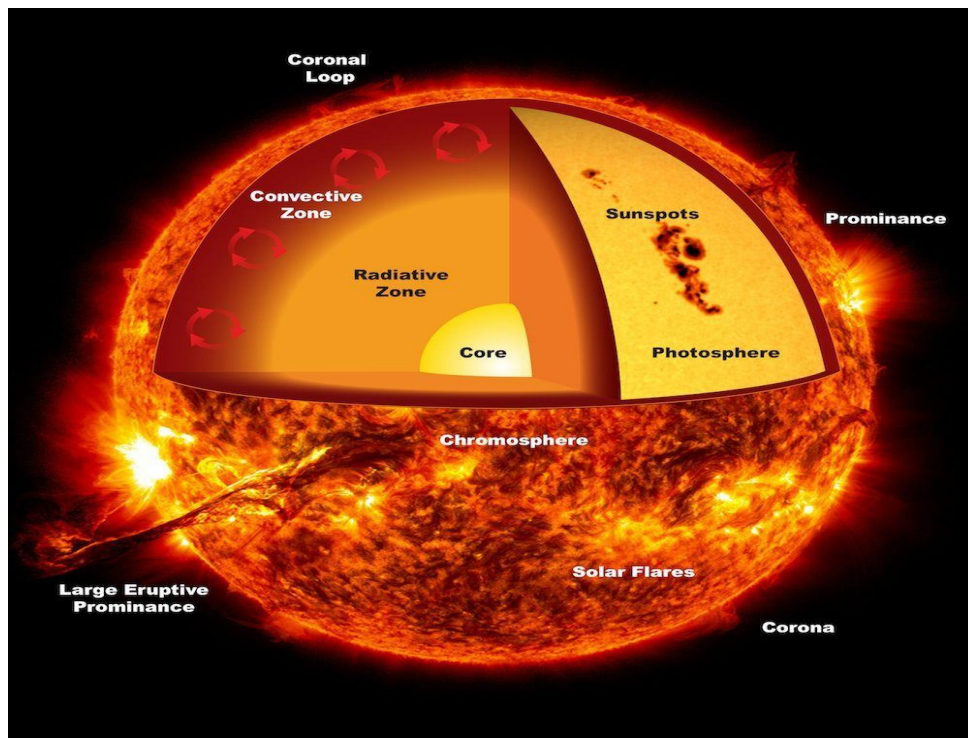


Figura 1.8 Estructura del interior del Sol

La energía procedente del núcleo solar es arrastrada hacia la zona de convección mediante radiación, y allí el transporte energético se realiza mediante radiación y convección turbulenta. En las estrellas es habitual aplicar la aproximación opaca (*optically thick*). Es por ello que el análisis que se va a detallar en este trabajo puede ser de ayuda para futuros proyectos dedicados al comportamiento en el interior de las estrellas.

1.4 Estructura del proyecto

En este trabajo se va a tratar el estudio teórico y numérico del fenómeno de la convección natural de Rayleigh-Bénard que tiene lugar en un recinto rectangular con un fluido participativo en presencia de radiación y en el que se imponen unas temperaturas en la superficie inferior (caliente) y superior (fría). Las paredes verticales se supondrán adiabáticas.

En el capítulo 2 se va a tratar la formulación del problema bidimensional de convección natural de Rayleigh-Bénard considerando la radiación que actúa sobre el fluido en un recinto. Se asumirá una serie de hipótesis con las que se llega a la aproximación de Boussinesq que será bastante útil para simplificar las ecuaciones. A continuación, se procederá a obtener un modelo de radiación para un caso *optically thick*. También se explicará una forma de conseguir una distribución de temperaturas de equilibrio dependiendo de la intensidad de radiación que vendrá definida por un parámetro de radiación-convección fácilmente manejable. Tras realizar los pasos anteriores, se incorporarán estos términos a las ecuaciones del movimiento fluido para desarrollarlas y llegar a las ecuaciones diferenciales que se usarán para capítulos posteriores. Además, se incluirán las condiciones de contorno necesarias para poder proceder a la resolución numérica del problema.

En el capítulo 3 se van a discretizar las ecuaciones diferenciales, ya que de esa forma se puede implementar fácilmente en los códigos que se emplearán en MATLAB. Para ello se empleará el método de colocación, que consiste en el uso de funciones interpolantes para facilitar la integración del sistema de ecuaciones diferenciales del capítulo anterior en un espacio mallado pertinente de un recinto rectangular. Este método aplicado se incluye en el apéndice de la memoria. Se llegará a un sistema matricial que evolucionará en el tiempo de simulación y se calcularán las variables del problema en cada instante de tiempo.

En el capítulo 4, se mostrarán los resultados numéricos obtenidos en la resolución del sistema de ecuaciones desde MATLAB y se interpretarán las gráficas con el fin de obtener varias incógnitas interesantes como son el número de Rayleigh crítico (es la clave para determinar un criterio que defina si la situación del fluido en el recinto será estable o inestable con celdas convectivas), número de rollos de convección que se forman según las dimensiones del recinto, número de Nusselt, etc.

En el capítulo 5 se expondrán las principales conclusiones de los resultados obtenidos y se sacarán algunas ideas para posibles proyectos en el futuro.

2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Hipótesis aplicadas en el problema de convección natural con radiación

Se supone un fluido contenido en una cavidad de un prisma rectangular como viene en la siguiente figura con dimensiones L , B , H según los ejes x , y , z respectivamente. La pared inferior se encuentra a una temperatura T_1 y la pared superior posee una temperatura T_2 , siendo $T_2 < T_1$. Se añade que este fluido está afectado por el campo gravitatorio terrestre.

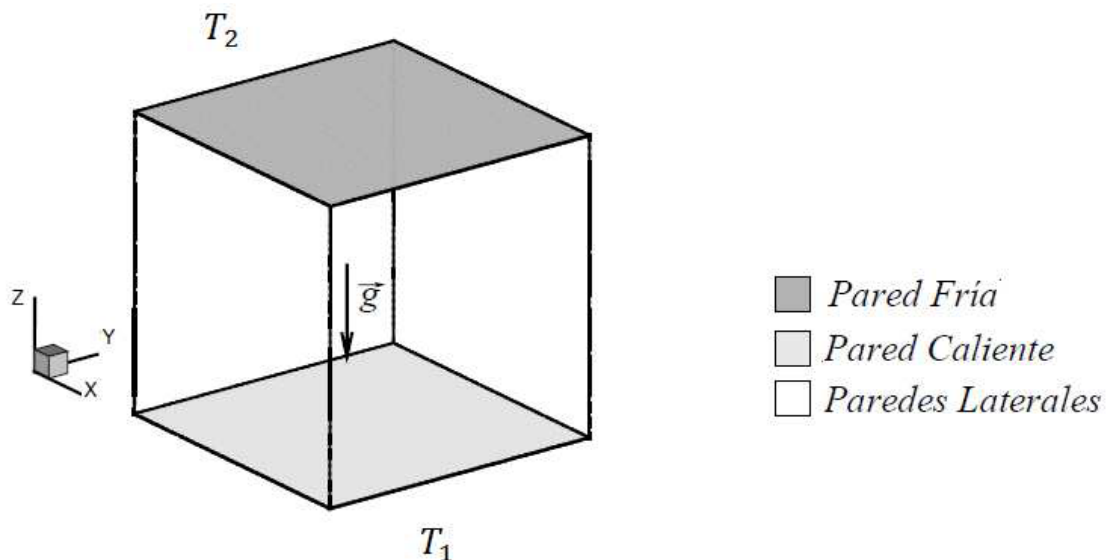


Figura 2.1 Cavidad prismática rectangular con fluido en su interior con las condiciones de contorno del problema

Para tratar este problema se van a emplear las ecuaciones de Navier-Stokes de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía. Estas ecuaciones diferenciales y no lineales de la Mecánica de Fluidos son bastante complejas y su resolución conllevaría un alto coste computacional. Es por ello que en los estudios de la convección natural de Rayleigh-Bénard es frecuente hacer algunas hipótesis que permitan simplificar el problema.

Se puede empezar aplicando la aproximación de Boussinesq, para la que es necesario suponer que los incrementos de densidad son despreciables en la ecuación de conservación de masa, pero no en la de cantidad de movimiento. Como ya se sabe, la densidad ρ tiene como variables dependientes T y p . Hay que demostrar que las variaciones de densidad causados por estas variables son pequeñas comparadas con el valor de referencia con características T_0 y p_0 .

A partir de la ecuación de estado y con el desarrollo en serie de Taylor de esta función se obtiene lo siguiente:

$$\rho = \rho(p_0, T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_0, T_0} (T - T_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{p_0, T_0} (p - p_0) \quad (2.1)$$

Al analizar la diferencia relativa de densidades respecto de una de referencia con p_0 y T_0 , se saca que:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\beta(T - T_0) + \kappa(p - p_0) \quad -\beta = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_0; \quad \kappa = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_0 \quad (2.2)$$

Donde β y κ son los coeficientes de dilatación térmica y compresibilidad respectivamente.

Se va a calcular el orden de magnitud de los efectos de la presión para comprobar que, al haber variaciones importantes de temperatura (caso de convección de Rayleigh-Bénard), la influencia de las variaciones de presión es despreciable. Para ello se va a imponer que el término convectivo y el de las fuerzas másicas en la ecuación de cantidad de movimiento sean del mismo orden.

$$v_c \sim \sqrt{gH\beta(T_1 - T_2)}; \quad \Delta p_c \sim \rho v_c^2 = \rho g H \beta (T_1 - T_2) \quad (2.3)$$

Se muestra la velocidad característica y la variación de presiones, que se puede estimar usando la ecuación de Bernoulli. Los órdenes de magnitud para el agua y el aire son:

Aire:

$$\left. \begin{array}{l} H \sim 2 \text{ m} \\ (T_1 - T_2) \sim 20 \text{ K} \\ \beta \sim 1/300 \text{ K}^{-1} \\ \rho \sim 1,2 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right\} \rightarrow \Delta p \sim 1 \text{ N/m}^2 \ll 10^5 \text{ N/m}^2$$

Agua:

$$\left. \begin{array}{l} H \sim 2 \text{ m} \\ (T_1 - T_2) \sim 20 \text{ K} \\ \beta \sim 10^{-4} \text{ K}^{-1} \\ \rho \sim 1000 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right\} \rightarrow \Delta p \sim 50 \text{ N/m}^2 \ll 10^5 \text{ N/m}^2$$

Viendo estos valores, se deduce que las variaciones de presiones son pequeñas. Además, se puede demostrar también que este término es despreciable frente al de la variación de temperaturas si L tiene cierto orden de magnitud:

$$\frac{\kappa(p - p_0)}{-\beta(T - T_0)} \sim \kappa\rho_0 gL = \begin{cases} \text{Agua} \rightarrow 10^{-9} \cdot 1000 \cdot 10 \cdot L \ll 1 \text{ si } L \ll 100 \text{ km} \\ \text{Aire} \rightarrow 10^{-5} \cdot 1 \cdot 10 \cdot L \ll 1 \text{ si } L \ll 10 \text{ km} \end{cases}$$

De esta forma se puede aproximar la expresión de la variación de densidades así:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx -\beta(T - T_0) \quad (2.4)$$

Para conseguir que las variaciones de densidades relativas sean pequeñas basta con hacer que el término de diferencia de temperatura sea pequeño también.

En el caso del agua, donde $\beta \sim 10^{-4}$, se asegura la hipótesis para incrementos de temperatura de hasta 10000 K (no se alcanza porque dejaría de ser líquido).

En el caso del aire, $\beta \sim 1/300$. Este dato es más restrictivo, permitiendo sólo asumir la hipótesis de pequeñas variaciones de temperatura de hasta 30 K.

Cumpliendo estas características, se asegura que las variaciones de densidad son despreciables en la convección natural de Rayleigh-Bénard.

Por otro lado, comparando en la ecuación de la energía los términos de disipación viscosa y de convección térmica:

$$\frac{\tau' : \nabla \vec{v}}{\rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T} \sim \frac{\nu}{c_p} \sqrt{\frac{g\beta}{L(T - T_0)}} \quad (2.5)$$

Introduciendo los valores correspondientes de longitud y variación de T que se dan en los problemas de convección, se puede ver que este cociente es despreciable tanto para gases como para líquidos.

Se van a citar las hipótesis que conlleva la aproximación de Boussinesq, de frecuente uso en los problemas de convección de Rayleigh-Bénard:

- La densidad empleada se considera constante, debido a su pequeña variación, en las ecuaciones de Navier-Stokes, con excepción de la de cantidad de movimiento para la que se puede aproximar de la siguiente forma:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.6)$$

Así se tiene en cuenta la fuerza de flotabilidad como causa del movimiento del fluido.

- Las siguientes propiedades del fluido (μ , K , β , c_p) se consideran constantes y se corresponden con la p y T de referencia. Esta hipótesis es válida cuando la diferencia de T entre la pared horizontal superior e inferior provoca un cambio relativo menor del 10% de estas propiedades.
- La disipación viscosa es despreciable (función de disipación de Rayleigh).

2.2 Flujo de radiación en aproximación *optically thick*

A continuación, se procede a hacer uso de una de las aproximaciones que se mencionó anteriormente para tratar el flujo de radiación. Se trata de la aproximación *optically thick*, en la que una radiación que pasa a través de un medio recorre una distancia corta hasta que es absorbida o dispersada. En este caso es posible encontrar una fórmula que defina la radiación como una expresión análoga a la de conducción de calor en la Ley de Fourier. Se trata de una aproximación de difusión que simplifica los cálculos. Se requiere de una intensidad isotrópica en el medio participativo. Para ello se puede suponer un medio ópticamente grueso con pequeños gradientes térmicos.

La ecuación RTE es la que viene a continuación y consiste en un balance de la radiación que entra y sale de un elemento diferencial (como se explicó en el primer capítulo)

$$\frac{\partial I}{\partial S} = -\beta I + \kappa I_b + \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_0^{4\pi} I \phi \, d\Omega \quad (2.7)$$

De la ecuación se aprecia la presencia de unos parámetros entre los que se encuentran κ que es el coeficiente de absorción, σ_s es el coeficiente de dispersión, I_b es la intensidad emitida de un cuerpo negro, ϕ es una función de dispersión de fase en la que se determina la probabilidad que tiene el flujo de radiación de desviarse de una dirección a otra.

Se empieza definiendo el coeficiente de extinción β , junto con otros coeficientes que representan la importancia relativa de la absorción y la dispersión:

$$\beta = \sigma_s + \kappa ; w = \frac{\sigma_s}{\beta} ; 1 - w = \frac{\kappa}{\beta} \quad (2.8)$$

La profundidad óptica se puede definir para este caso como la expresión de abajo y sustituyendo en la RTE se obtiene que

$$d\tau = \beta \, dS \rightarrow \frac{\partial I}{\partial \tau} = -I + (1 - w)I_b + \frac{w}{4\pi} \int_0^{4\pi} I \phi \, d\Omega \quad (2.9)$$

$$\hat{I} = (1 - w)I_b + \frac{w}{4\pi} \int_0^{4\pi} I\phi \, d\Omega \quad (2.10)$$

Donde \hat{I} es denominada como la función de fuente

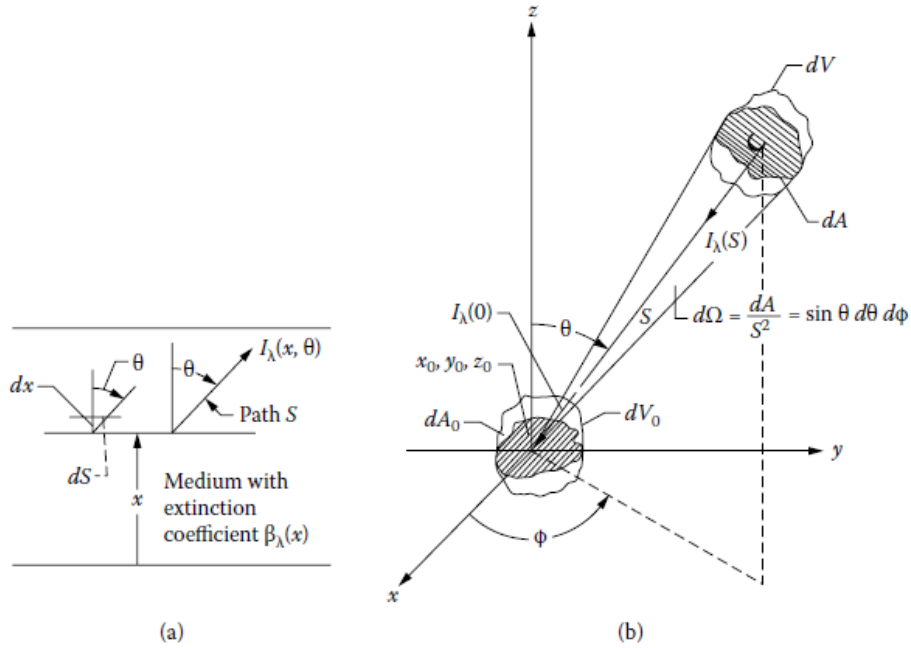


Figura 2.2 Definiciones geométricas para RTE: (a) placa unidimensional, (b) caso tridimensional

De la figura anterior, se saca que $dS=dx/\cos\theta$, usándose en la expresión de las intensidades:

$$-\frac{\cos\theta}{\beta} \frac{\partial I(x, \theta)}{\partial x} = I(x, \theta) - \hat{I}(x) \quad -\frac{\cos\theta}{\beta H} \frac{\partial I(x, \theta)}{\partial (x/H)} = I(x, \theta) - \hat{I}(x) \quad (2.11)$$

Para resolver la ecuación diferencial, se plantea I como la suma de varias funciones I_n ($n=0, 1, 2, \dots$) multiplicadas por potencias de $1/\beta H \ll 1$:

$$I = I_0 + \frac{1}{\beta H} I_1 + \left(\frac{1}{\beta H}\right)^2 I_2 \dots \quad (2.12)$$

Insertando esta expresión en la ecuación diferencial, queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\mu}{\beta H} \left[\frac{\partial I_0}{\partial(x/H)} + \frac{1}{\beta H} \frac{\partial I_1}{\partial(x/H)} + \dots \right] = \\
 & = I_0 + \frac{1}{\beta H} I_1 + \dots - (1-w)I_b - \frac{w}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left[I_0 + \frac{1}{\beta H} I_1 + \dots \right] d\Omega
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

donde $\mu = \cos\theta$ y la función de dispersión de fase $\phi = 1$ por ser un caso isotrópico.

Si de la ecuación anterior se juntan los términos de orden 0 en cuanto a $1/\beta H$ se puede deducir que

$$I_0 = (1-w)I_b + \frac{w}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_0 d\Omega \tag{2.14}$$

Los términos de la derecha son independientes del ángulo Ω , por lo tanto, I_0 también lo es, así que se puede sacar de la integral. Al resolverlo queda que $I_0 = I_b$

Si se repite con los términos de primer orden de $1/\beta H$:

$$-\mu \frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} = I_1 - \frac{w}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega \tag{2.15}$$

Multiplicando por $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = -2\pi d\mu$ e integrando para toda la ecuación:

$$-\frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} \int_0^\pi 2\pi \cos\theta \sin\theta d\theta = -\frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} \int_{-1}^1 2\pi \mu d\mu = \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega - \frac{w}{4\pi} \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega \int_0^{4\pi} d\Omega \tag{2.16}$$

La integral de la izquierda con μ es igual a 0

$$0 = \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega - w \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega \tag{2.17}$$

$$w \neq 1 \rightarrow \int_0^{4\pi} I_1 d\Omega = 0 \rightarrow I_1 = -\mu \frac{\partial I_b}{\partial(x/H)} \tag{2.18}$$

$$I = I_b - \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial I_b}{\partial x} \tag{2.19}$$

Con esta expresión se deduce para este caso difusivo que la intensidad de radiación depende de la magnitud y el gradiente de la intensidad de cuerpo negro. Si se añade el hecho de que los gradientes térmicos son pequeños y que β es enorme, se ve que el término de la derecha es pequeño, por lo que I es más o menos isotrópico como I_b .

Para el cálculo del flujo de calor se multiplica I por $\cos\theta d\lambda$ y se integra para todos los ángulos sólidos. Se tiene en cuenta que I_b no depende de μ y se puede sacar de la integral.

$$q d\lambda = 2\pi d\lambda \int_0^\pi I(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta = 2\pi d\lambda \int_{-1}^1 I(\mu) \mu d\mu \quad (2.20)$$

$$q(x) d\lambda = 2\pi I_b(x) d\lambda \int_{-1}^1 \mu d\mu - \frac{2\pi d\lambda}{\beta(x)} \frac{\partial I_b(x)}{\partial x} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = -\frac{4\pi}{3\beta(x)} \frac{\partial I_b}{\partial x} d\lambda \quad (2.21)$$

Si se integra $\pi I_b d\lambda$ para todo λ , se obtiene σT^4 . Se llega finalmente a la **ecuación difusiva de Rosseland**, para la que se tiene un modelo de flujo de radiación total

$$\vec{q}_r = -\frac{4\sigma}{3\beta} \nabla I_b = -\frac{16\sigma T^3}{3\beta} \nabla T = -CT^3 \nabla T \quad (2.22)$$

$$C = \frac{16\sigma}{3\beta} = cte ; \vec{q}_r = -\frac{C}{4} \nabla T^4 \rightarrow \nabla \cdot \vec{q}_r = -\frac{C}{4} \nabla^2 T^4 \quad (2.23)$$

2.3 Temperatura de equilibrio en presencia de radiación

Para el cálculo de la temperatura de equilibrio, se va a realizar un proceso de resolución numérica de la ecuación térmica hasta alcanzar un límite estacionario, para el cual se obtiene la distribución de temperaturas hidrostática que se busca. Se introduce en la ecuación térmica la expresión del flujo de calor por radiación, quedando de la siguiente forma

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \nabla^2 T - \nabla \cdot \vec{q}_r \quad (2.24)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \nabla^2 T + \frac{C}{4} \nabla^2 T^4 \quad (2.25)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(KT + \frac{C}{4} T^4 \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(KT + \frac{C}{4} T^4 \right) \quad (2.26)$$

Se introduce el concepto de función de corriente Ψ ya que las líneas de corriente están relacionadas con la trayectoria de las partículas fluidas y las componentes del vector de velocidades.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_x ; \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_z \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial v_x} \rightarrow v_x dz - v_z dx = \frac{\partial \Psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = d\Psi = 0 \quad (2.28)$$

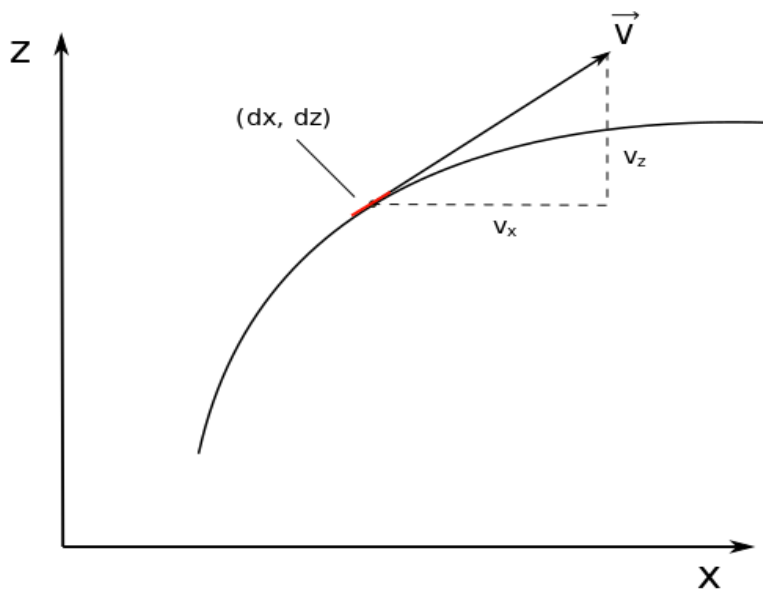


Figura 2.3 Línea de corriente en plano xz

La adimensionalización de las variables que se empleará será la siguiente:

$$x = Hx^* ; \quad z = Hz^* ; \quad t = \frac{H}{v_c} t^* ; \quad \Psi = \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H^3} \Psi^* = v_c H \Psi^* ;$$

$$T = T_1 + (T_1 - T_2)T^* ; \quad T^*(x^*, z^*, t^*) = T_h^*(z^*) + \theta^*(x^*, z^*, t^*)$$

$$T = T_1 + (T_1 - T_2)T^* = (T_1 - T_2) \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} + T^* \right) = (T_1 - T_2)(s + T^*)$$

La distribución de temperaturas está repartida de tal manera que hay una componente correspondiente a la situación de equilibrio hidrostático T_h^* y la otra asociada a las perturbaciones o movimientos del fluido, θ^* . Tras aplicar los cambios anteriores a la ecuación de la energía:

$$N_{rc} = \frac{C(T_1 - T_2)^3}{4K} \quad \frac{\partial T^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\sqrt{Pr^* Ra}} \nabla^2 (s + T^* + N_{rc}(s + T^*)^4) = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2.29)$$

Se observa que para $N_{rc}=0$ la ecuación de energía tendría la forma de un caso en el que no se considera la radiación (caso más sencillo de convección natural). Este es el parámetro de radiación-convección y tendrá mucha relevancia en próximos análisis.

Fíjese en que han aparecido otros parámetros adimensionales que son:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{Es el número de Prandtl, que relaciona la viscosidad cinemática y la difusividad térmica.}$$

$$Ra = \frac{g\beta H^3(T - T_0)}{\nu\alpha} \quad \text{Es el número de Rayleigh, que compara los efectos de la fuerza de flotabilidad del fluido con los de la viscosidad y conducción térmica}$$

Para el cálculo de la temperatura hidrostática se supondrá que no hay velocidades ni temperatura debido al movimiento (condiciones estáticas) y se simplifica de la siguiente forma con sus condiciones de contorno en z^* .

$$\frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} (s + T_h^* + N_{rc}(s + T_h^*)^4) = 0 \quad (2.30)$$

$$T_h^*(z^* = 0, t^*) = 0 ; T_h^*(z^* = 1, t^*) = -1$$

Resulta conveniente considerar esta distribución hidrostática como la solución límite al llegar a un tiempo infinito (solución estacionaria) del siguiente problema no estacionario con $\theta(z^*, t^*)$ ($\theta=T_h^*$):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} = \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} (s + \theta + N_{rc}(s + \theta)^4) \quad (2.31)$$

$$\theta(z^* = 0, t^*) = 0 ; \theta(z^* = 1, t^*) = -1$$

Primero se discretiza numéricamente esta ecuación temporalmente y particularizando para el instante t_n^* , donde $\theta_n(z^*) = \theta(z^*, t_n^*)$, se tiene que

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t} = \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} (s + \theta_n + N_{rc}(s + \theta_n)^4) \quad (2.32)$$

La mayor dificultad radica principalmente en el tratamiento del término no lineal que aparece en el miembro de la derecha. Se van a emplear los siguientes pasos empleando una serie de Taylor

$$(s + \theta_n)^4 = (s + \theta_{n-1} + \theta_n - \theta_{n-1})^4 \simeq (s + \theta_{n-1})^4 + 4(s + \theta_{n-1})^3(\theta_n - \theta_{n-1}) \quad (2.33)$$

Se han despreciado los términos mayores de 2º orden. Si se elige un tiempo de paso o de separación de instantes consecutivos pequeño, se puede considerar que $\theta_n - \theta_{n-1} \ll s + \theta_{n-1}$.

Si en lugar de aplicar la serie de Taylor se desarrolla analíticamente la potencia y se desprecian los términos de orden igual o superior a $(\theta_n - \theta_{n-1})^2$ se llega a la misma expresión.

Reemplazando esta expresión en la ecuación numérica

$$\frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta t} = \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} [s + \theta_n + Nrc((s + \theta_{n-1})^4 + 4(s + \theta_{n-1})^3(\theta_n - \theta_{n-1}))] \quad (2.34)$$

Al reordenar los términos conocidos con subíndice n-1 en el miembro derecho y las incógnitas con subíndice n en el izquierdo (instante actual t_n^*) queda lo siguiente

$$\begin{aligned} \theta_n - \Delta t^* \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial z^{*2}} - 4Nrc \Delta t^* \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} [(s + \theta_{n-1})^3 \theta_n] = \\ = \theta_{n-1} + Nrc \Delta t^* \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} [(s + \theta_{n-1})^4 - 4(s + \theta_{n-1})^3 \theta_{n-1}] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Se ha usado el método de colocación para la resolución de esta ecuación y que se puede consultar en el apéndice de la memoria con más detalle.

Aquí se definen los vectores correspondientes a las variables de la ecuación.

$$\vec{\theta}_n = \begin{bmatrix} \theta_n(1) \\ \dots \\ \theta_n(i) \\ \dots \\ \theta_n(N_z) \end{bmatrix} ; \vec{\theta}_{n-1} = \begin{bmatrix} \theta_{n-1}(1) \\ \dots \\ \theta_{n-1}(i) \\ \dots \\ \theta_{n-1}(N_z) \end{bmatrix} ; \vec{s + \theta_{n-1}} = \begin{bmatrix} s + \theta_{n-1}(1) \\ \dots \\ s + \theta_{n-1}(i) \\ \dots \\ s + \theta_{n-1}(N_z) \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{(s + \theta_{n-1})^3} * \overrightarrow{\theta_n} = \begin{bmatrix} (s + \theta_{n-1}(1))^3 \theta_n(1) \\ \dots \\ (s + \theta_{n-1}(i))^3 \theta_n(i) \\ \dots \\ (s + \theta_{n-1}(N_z))^3 \theta_n(N_z) \end{bmatrix} = M_{n-1} * \overrightarrow{\theta_n}$$

$$M_{n-1} = \text{spdiags}(\overrightarrow{(s + \theta_{n-1})^3}, 0, N_z, N_z) \quad D_{zz} = D_z * D_z$$

Con esto se consigue expresar el producto de 2 vectores en un producto de una matriz por un vector. Este cambio se realiza para poder despejar el vector con las variables incógnitas en el sistema matricial. El producto entre dos elementos con “.*” implica que el producto sea componente a componente, compartiendo el significado de este símbolo característico en los códigos MATLAB.

Al sustituir los vectores y matrices que se han mencionado, usando la notación del método de colocación, el sistema queda de la siguiente forma

$$A = I - \Delta t^* D_{zz} - 4N_{rc} \Delta t^* D_{zz} * M_{n-1} \quad (2.36)$$

$$b = \overrightarrow{\theta_{n-1}} + \Delta t^* N_{rc} D_{zz} * [\overrightarrow{(s + \theta_{n-1})^4} - 4\overrightarrow{(s + \theta_{n-1})^3} * \overrightarrow{\theta_{n-1}}] \quad (2.37)$$

$$A * \overrightarrow{\theta_n} = \overrightarrow{b} \quad (2.38)$$

Para las condiciones de contorno se impone en la matriz principal:

$$\theta_n(1) = 0 \rightarrow A(1, :) = 0; \quad A(1, 1) = 1; \quad b(1) = 0$$

$$\theta_n(N_z) = -1 \rightarrow A(N_z, :) = 0; \quad A(N_z, N_z) = 1; \quad b(N_z) = -1$$

Este proceso se repetirá en bucle en MATLAB hasta que se cumpla la siguiente condición implicando que la solución converge a lo largo del tiempo. Se ha elegido una tolerancia lo suficientemente pequeña para ello:

$$\max \left| \overrightarrow{\theta_n} - \overrightarrow{\theta_{n-1}} \right| < 10^{-12}$$

Al cumplir esta condición se consigue salir del bucle y se obtiene la distribución de temperaturas hidrostática

$$\vec{T}_h^* = \begin{bmatrix} T_h^*(1) \\ \dots \\ T_h^*(i) \\ \dots \\ T_h^*(N_z) \end{bmatrix} = \vec{\theta}_n = \begin{bmatrix} \theta_n(1) \\ \dots \\ \theta_n(i) \\ \dots \\ \theta_n(N_z) \end{bmatrix}$$

Se ha elaborado un código MATLAB para tratar de representar gráficamente la distribución de temperaturas hidrostáticas como función del parámetro N_{rc} . Se llega a este resultado

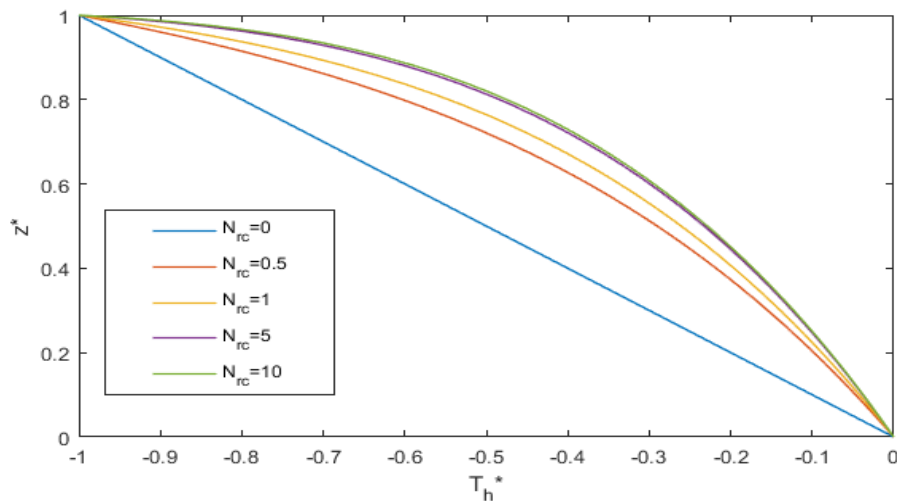


Figura 2.4 Componente hidrostática de T^* en función de N_{rc}

Como se puede apreciar, al ser N_{rc} nula, la función es lineal con la altura mientras que cuando va elevando su valor, esta función cobra una no linealidad importante hasta que llega un límite cuando alcanza valores superiores a 5.

Como se mencionó anteriormente, esta solución estacionaria de T_h^* es la que se va a usar en el problema de θ^* para el caso con radiación ya que solo es dependiente de la variable adimensional z^* y no del tiempo.

2.4 Ecuaciones de convección de Rayleigh-Bénard con radiación para casos bidimensionales

El análisis del problema de convección se realizará en un recinto rectangular con dimensiones $L \times H$. Se va a eliminar la influencia del eje y , para que desaparezca de esta forma la componente de velocidad v_y .

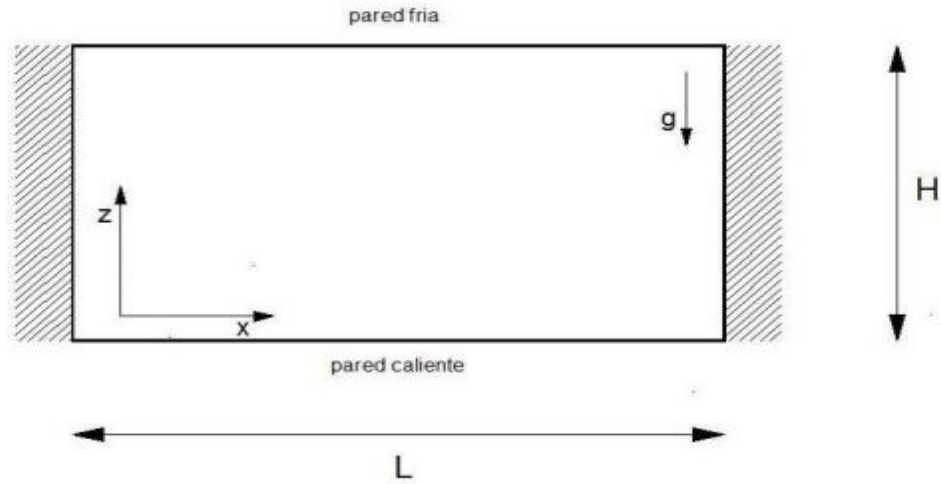


Figura 2.5 Cavidad rectangular de dimensiones $L \times H$

A continuación, se procede a introducir las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y conservación de la energía suponiendo que se cumplen las hipótesis anteriormente descritas. Se incluye el término del flujo de radiación en la ecuación de energía como viene a continuación

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.39)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (2.40)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g (1 - \beta(T - T_0)) + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (2.41)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \nabla^2 T + \frac{C}{4} \nabla^2 T^4 \quad (2.42)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad, K es la conductividad térmica, (v_x, v_z) son las componentes del campo de velocidades del fluido, T es el campo de temperaturas, ρ_0 es la densidad, p es el campo de presiones.

Para resolver las ecuaciones diferenciales es necesario imponer unas condiciones de contorno e iniciales. Se decide que las paredes de la cavidad sean rígidas e inmóviles,

donde la pared superior horizontal tiene una temperatura T_2 y la inferior T_1 , el fluido parte de un estado en reposo a una temperatura T_0 .

- Para $t=0$ $v_x = v_z = 0, \quad T = T_0$ (2.43)

- Para $x=0$ $v_x = v_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ (2.44)

- Para $x=L$ $v_x = v_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ (2.45)

- Para $z=0$ $v_x = v_z = 0, \quad T=T_1$ (2.46)

- Para $z=H$ $v_x = v_z = 0, \quad T=T_2$ (2.47)

Hay un sistema de 4 ecuaciones diferenciales con 4 incógnitas que son $v_x(x, z, t)$, $v_z(x, z, t)$, $T(x, z, t)$, $p(x, z, t)$. Existe una forma de reducir la complejidad de este sistema y se puede lograr con un método expuesto por Barry Saltzman, que consiguió transformar este sistema en otro con 2 ecuaciones de 2 incógnitas.

Para ello, se procede a sustituir las velocidades por las derivadas de la función de corriente como se vio en apartados anteriores.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.48)$$

La ecuación de continuidad se anula al aplicar estas igualdades en las componentes del vector de velocidades.

$$\rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (1) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \left(-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g + \rho_0 g \beta (T - T_0) - \mu \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2) \quad (2.50)$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \nabla^2 T + \frac{C}{4} \nabla^2 T^4 \quad (2.51)$$

A continuación, se va a combinar las 2 ecuaciones de cantidad de movimiento. Así se obtiene una ecuación de ψ interesante ya que se elimina el término de presiones y queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial z}(1) - \frac{\partial}{\partial x}(2) \right) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\Psi) - \nu\nabla^4\Psi + g\beta\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla^2\Psi) - \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\Psi) \quad (2.52)$$

Al aplicar la adimensionalización de variables que se introdujo en el apartado previo se consigue llegar a las ecuaciones que vienen a continuación

$$x = Hx^* ; z = Hz^* ; t = \frac{H}{v_c}t^* ; \Psi = \sqrt{g\beta(T_1 - T_2)H^3} \Psi^* = v_c H \Psi^* ;$$

$$T = T_1 + (T_1 - T_2)T^* ; T^*(x^*, z^*, t^*) = T_h^*(z^*) + \theta^*(x^*, z^*, t^*)$$

$$T = (T_1 - T_2) \left(\frac{T_1}{T_1 - T_2} + T^* \right) = (T_1 - T_2)(s + (T_h^* + \theta^*)) = (T_1 - T_2)T_T^*$$



$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\nabla^2\Psi^*) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}}\nabla^4\Psi^* + \frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} = \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^*}\frac{\partial}{\partial z^*}(\nabla^2\Psi^*) - \frac{\partial\Psi^*}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial x^*}(\nabla^2\Psi^*) \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial\theta^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\sqrt{Pr^* Ra}}\nabla^2(T_T^* + N_{rc}T_T^{*4}) = \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial T_h^*}{\partial z^*} + \frac{\partial\theta^*}{\partial z^*} \right) - \frac{\partial\Psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} \quad (2.54)$$

Los términos no lineales se pueden escribir como:

$$NLP = \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^*}\frac{\partial}{\partial z^*}(\nabla^2\Psi^*) - \frac{\partial\Psi^*}{\partial z^*}\frac{\partial}{\partial x^*}(\nabla^2\Psi^*) \quad (2.55)$$

$$NLT = \frac{\partial\Psi^*}{\partial x^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial z^*} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial z^*}\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} \quad (2.56)$$

Este conjunto es conocido como las ecuaciones de Saltzman que gobiernan el movimiento de un fluido en la convección natural con radiación, cuyas incógnitas son Ψ^* y T^* . También es necesario adaptar las condiciones de contorno al nuevo cambio de variables.

- Para $t^*=0$ $\Psi^* = \Psi_0^*(x^*, z^*)$, $\theta^* = \theta_0^*(x^*, z^*)$ (2.57)

- Para $x^*=0$ $\Psi^* = 0$, $\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0$, $\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} = 0$ (2.58)

- Para $x^*=L/H$ $\Psi^* = 0$, $\frac{\partial \Psi^*}{\partial x^*} = 0$, $\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} = 0$ (2.59)

- Para $z^*=0$ $\Psi^* = 0$, $\frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0$, $\theta^*=0$ (2.60)

- Para $z^*=1$ $\Psi^* = 0$, $\frac{\partial \Psi^*}{\partial z^*} = 0$, $\theta^*=0$ (2.61)

Estas ecuaciones, junto con sus condiciones de contorno, se resolverán numéricamente en próximos capítulos.

3 MÉTODO NUMÉRICO DE RESOLUCIÓN

3.1 Preparación de las ecuaciones de Saltzman con radiación para el método de colocación

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido en el caso de convección natural de Rayleigh-Bénard en presencia de radiación, pueden adaptarse de forma que se pueda aplicar el método de colocación (se explica en el apéndice). Para ello se va a sustituir algunos términos convenientemente para facilitar la resolución del problema. Se parte del sistema que se desarrolló en el capítulo anterior.

Como se trata de un caso bidimensional, se emplean unas coordenadas x, z . Por lo tanto, los nodos de Chebyshev serán de esta forma:

$$x_i = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \frac{x_{min} - x_{max}}{2} \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{N_x - 1} \right] \quad i=1 \dots N_x \quad (3.1)$$

$$z_j = \frac{z_{max} + z_{min}}{2} + \frac{z_{min} - z_{max}}{2} \cos \left[\frac{(j-1)\pi}{N_z - 1} \right] \quad j=1 \dots N_z \quad (3.2)$$

Donde x_{min} y z_{min} serán nulos debido a que se corresponden con el origen de coordenadas, mientras que $x_{max}=L/H=A$ y $z_{max}=H/H=1$.

El uso de un parámetro I para enumerar los nodos de la cavidad resulta ser ventajoso debido a que en vez de usar una matriz espacial se puede emplear un vector de dimensión N_T . Para referirse a un nodo (x_i, z_j) , se le asigna un índice I que sigue la siguiente propiedad:

$$I = (i-1) \cdot N_z + j \quad (3.3)$$

A continuación, se procederá de forma análoga con la distribución de las variables incógnitas del problema en los nodos del recinto rectangular, que ha sido discretizado espacialmente.

$$\Psi^*(x_i^*, z_j^*, t^*) \equiv \Psi_{ij}^*(t^*) \equiv \vec{\Psi}^*(I, t^*) \quad T^*(x_i^*, z_j^*, t^*) \equiv T_{ij}^*(t^*) \equiv \vec{T}^*(I, t^*) \quad (3.4)$$

$$\vec{\theta}_n^* = \begin{bmatrix} \theta_n^*(1) \\ \dots \\ \theta_n^*(I) \\ \dots \\ \theta_n^*(N_T) \end{bmatrix} ; \vec{\theta}_{n-1}^* = \begin{bmatrix} \theta_{n-1}^*(1) \\ \dots \\ \theta_{n-1}^*(I) \\ \dots \\ \theta_{n-1}^*(N_T) \end{bmatrix} ; \vec{T}_h^* = \begin{bmatrix} T_h^*(1) \\ \dots \\ T_h^*(I) \\ \dots \\ T_h^*(N_T) \end{bmatrix}$$

La distribución de temperaturas de equilibrio, como ya se ha visto anteriormente, es un vector conocido a partir de este punto del problema.

Se van a discretizar las derivadas temporales tal que:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t_n} = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta t} \quad (3.5)$$

El valor ϕ_n representa la función ϕ en el tiempo t_n (análogamente con ϕ_{n-1} y t_{n-1}).

Se procede a realizar una simplificación importante que consiste en aproximar los términos no lineales de una estación determinada t_n a los de su estación anterior, facilitando de esta manera la resolución del sistema de ecuaciones. Si no se asumiera este paso, implicaría un proceso computacionalmente costoso que podría perjudicar la eficiencia numérica debido a que se trata con un sistema no lineal de ecuaciones.

$$NLP_n \approx NLP_{n-1} ; NLT_n \approx NLT_{n-1} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta estos detalles, se puede desarrollar las ecuaciones para aplicarles la resolución numérica empezando por separar las variables en instantes consecutivos n y $n-1$, siguiendo la nomenclatura de derivadas que viene explicada en el método de colocación. Se empieza con la ecuación de la energía.

$$\frac{\theta_n^* - \theta_{n-1}^*}{\Delta t^*} - \frac{1}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * \theta_n^* - \frac{1}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * T_h^* - \frac{N_{rc}}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * (s + T_h^* + \theta_n^*)^4 - \quad (3.7)$$

$$- [N * D_x] * \Psi_n^* = (D_x * \Psi_{n-1}^*) * (D_z * \theta_{n-1}^*) - (D_z * \Psi_{n-1}^*) * (D_x * \theta_{n-1}^*)$$

$$DL = D_x * D_x + D_z * D_z \quad (3.8)$$

$$\overrightarrow{NLT}_{n-1} = (D_x * \overrightarrow{\Psi}_{n-1}^*) * (D_z * \overrightarrow{\theta}_{n-1}^*) - (D_z * \overrightarrow{\Psi}_{n-1}^*) * (D_x * \overrightarrow{\theta}_{n-1}^*) \quad (3.9)$$

Para facilitar la notación, se puede utilizar DL que equivale al laplaciano. El miembro de la derecha es el vector NLT_{n-1} que se mencionó previamente. Los vectores en las ecuaciones no llevan la flecha para facilitar la notación.

Se introducen matrices nuevas de forma que se pueda tratar el problema numéricamente como son las siguientes:

$$M_{n-1} = spdiags(\overrightarrow{(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^3}, 0, N_T, N_T) \quad (3.10)$$

Se emplea esta matriz para que se quede en forma matricial posteriormente al juntar las submatrices del sistema que se multiplican por las variables del problema.

$$N = spdiags(D_z * \overrightarrow{T_h^*}, 0, N_T, N_T) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial T_h^*}{\partial z^*} \frac{\partial \Psi_n^*}{\partial x^*} = N * (D_x * \overrightarrow{\Psi_n^*}) = (N * D_x) * \overrightarrow{\Psi_n^*} \quad (3.12)$$

Esta matriz N es la que aparece en la ecuación térmica y se ha formulado también como una matriz debido a la misma causa de M_{n-1} .

Se decide tratar el término no lineal de temperaturas correspondiente a la radiación de forma análoga a la viene reflejada en el capítulo anterior para la temperatura hidrostática mediante una serie de Taylor

$$\begin{aligned} T_T^{*4} &= (s + T_h^* + \theta^*)^4 = (s + T_h^* + \theta_{n-1}^* + \theta_n^* - \theta_{n-1}^*) \simeq \\ &\simeq (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^4 + 4(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^3(\theta_n^* - \theta_{n-1}^*) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si se reemplazara esta expresión en la ecuación de energía discretizada y se desplazaran las variables lineales a la izquierda, se puede organizar de tal forma que:

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{\Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL - \frac{4N_{rc} \Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * M_{n-1} \right] \theta_n^* - \Delta t^* (N * D_x) \Psi_n^* = \\ &= \Delta t^* NLT_{n-1} + \theta_{n-1}^* + \frac{\Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * T_h^* + \\ &+ \frac{N_{rc} \Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * [(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^4 - 4(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^3 * \theta_{n-1}^*] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para calcular las potencias de vectores se hacen componente a componente como viene abajo:

$$(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^2 = (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*) \cdot (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*) \quad (3.15)$$

$$(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^3 = (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^2 \cdot (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*) \quad (3.16)$$

$$(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^4 = (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^3 \cdot (s + T_h^* + \theta_{n-1}^*) \quad (3.17)$$

La ecuación combinada de cantidad de movimiento es más sencilla de exponer y está discretizada y particularizada para el instante t_n^* :

$$\begin{aligned} DL * \left(\frac{\Psi_n^* - \Psi_{n-1}^*}{\Delta t^*} \right) - \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} DL^2 * \Psi_n^* + D_x * \theta_n^* = \\ = (D_x * \Psi_{n-1}^*) \cdot (D_z * DL * \Psi_{n-1}^*) - (D_z * \Psi_{n-1}^*) \cdot (D_x * DL * \Psi_{n-1}^*) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\overrightarrow{NLP}_{n-1} = (D_x * \overrightarrow{\Psi}_{n-1}^*) \cdot (D_z * DL * \overrightarrow{\Psi}_{n-1}^*) - (D_z * \overrightarrow{\Psi}_{n-1}^*) \cdot (D_x * DL * \overrightarrow{\Psi}_{n-1}^*) \quad (3.19)$$

Los términos no lineales se expresan con la notación del método de colocación. Si se reorganizan los elementos de la ecuación de la misma forma que en la de energía, queda

$$\left(DL - \Delta t^* \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} DL^2 \right) \Psi_n^* + \Delta t^* D_x \theta_n^* = DL * \Psi_{n-1}^* + \Delta t^* NLP_{n-1} \quad (3.20)$$

A partir de las ecuaciones (3.14) y (3.20) ya formuladas se pueden definir las submatrices que constituyen la matriz principal y son las siguientes:

$$A_\Psi = DL - \Delta t^* \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} DL^2$$

$$A_\theta = \Delta t^* D_x$$

$$B_\Psi = -\Delta t^* (N * D_x)$$

$$B_\theta = I - \frac{\Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL - \frac{4N_{rc} \Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * M_{n-1}$$

$$b_{\Psi} = DL * \Psi_{n-1}^* + \Delta t^* NLP_{n-1}$$

$$b_{\theta} = \Delta t^* NLT_{n-1} + \theta_{n-1}^* + \frac{\Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * T_h^* + \frac{N_{rc} \Delta t^*}{\sqrt{Pr * Ra}} DL * [(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^4 - 4(s + T_h^* + \theta_{n-1}^*)^3 * \theta_{n-1}^*]$$

Formándose el sistema matricial final que se implementará en el código MATLAB

$$\begin{bmatrix} A_{\Psi} & A_{\theta} \\ B_{\Psi} & B_{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_n^* \\ \theta_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\Psi} \\ b_{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{\Psi} & A_{\theta} \\ B_{\Psi} & B_{\theta} \end{bmatrix} ; b = \begin{bmatrix} b_{\Psi} \\ b_{\theta} \end{bmatrix} ; x = \begin{bmatrix} \Psi_n^* \\ \theta_n^* \end{bmatrix} ; A * x = b \quad (3.22)$$

Antes de resolver este sistema se van a implementar las condiciones de contorno de las paredes del recinto en la matriz del sistema matricial que se describió anteriormente usando la notación del método de colocación:

- Para la condición de la función de corriente nula en las paredes se va a hacer estas modificaciones: para todo elemento con índice I correspondiente a un nodo de contorno se anula toda la fila I de las submatrices A_1, A_2, B_1, B_2 y de los términos b_1, b_2 para después imponer que $A_1(I, I) = 1$.
- La condición de las derivadas nulas de la función de corriente requiere la introducción del concepto de subcontorno (porque se ha usado ya los nodos del contorno) y se esquematiza como viene en la imagen inferior:

$$I = (i-1) N_z + N_z - 1$$

$$I = (2-1) N_z + j \quad I = (N_x - 2) N_z + j$$

$$I = (i-1) N_z + 2$$

Figura 3.1 Representación del subcontorno en el recinto

- Para un nodo I que pertenezca al subcontorno adyacente al margen izquierdo vertical, se anula las filas I en las submatrices A_1, A_2, B_1, B_2 y de los términos b_1, b_2 , para posteriormente sustituir la fila I de A_1 por la fila de la matriz D_x asignada al nodo $K = I - N_z$, es decir, $A_1(I, 1: N_T) = D_x(K, 1: N_T)$. Si se trata del otro extremo, es decir, de la pared derecha, solo hay que cambiar $K = I + N_z$.
- Para un nodo I que pertenezca al subcontorno adyacente al margen horizontal inferior, se anula las filas I en las submatrices A_1, A_2, B_1, B_2 y de los términos b_1, b_2 , para posteriormente sustituir la fila I de A_1 por la fila de la matriz D_z asignada al nodo $K = I - 1$, es decir, $A_1(I, 1: N_T) = D_z(K, 1: N_T)$. Si se trata del otro extremo, es decir, de la pared superior, solo hay que cambiar $K = I + 1$.
- En la condición de temperatura nula para un nodo I de contornos horizontales inferior y superior se impone que $B_2(I, I) = 1$. Se recuerda que anteriormente se anuló en las submatrices y los términos independientes la fila I, por lo que no es necesario cambiar más componentes.
- Para imponer la condición de paredes verticales adiabáticas, en un nodo I perteneciente a dichas paredes, se iguala $B_2(I, 1: N_T)$ con la fila $D_x(I, 1: N_T)$.

Faltaría exponer las condiciones iniciales, por lo que se va a imponer lo siguiente:

$$\Psi^*(x^*, z^*, t^* = 0) = 0.0005 x^{*2} (x_{max} - x^*)^2 z^{*2} (z_{max} - z^*)^2 \cos\left(\frac{\pi^2 x^* z^*}{5 x_{max} z_{max}}\right) \quad (3.23)$$

$$\theta^*(x^*, z^*, t^* = 0) = 0.005 * \cos\left(\frac{2\pi(x^* - x_{min}^*)}{x_{max}^* - x_{min}^*}\right) * \sin\left(\frac{2\pi(z^* - z_{min}^*)}{z_{max}^* - z_{min}^*}\right) \quad (3.24)$$

Se ha seleccionado esta perturbación inicial de forma que cumpla las condiciones de contorno del problema que se analizan en este capítulo.

3.2 Códigos MATLAB empleados

Matriz Lpx

```
function [Lpx]=matrizLpx(x1,xN,N)
% N es el número total de nodos en el que el intervalo (x1,xN).
x(1)=x1;
%Es el punto inicial del intervalo a dividir en N nodos.
x(N)=xN;
%Es el punto final del intervalo a dividir.
```

```

for cl=1:N
    x(cl)=(x(N)+x(1))/2+(x(1)-x(N))/2*cos((cl-1)/(N-1)*pi);
end

%Lpx(i,j)=dLj(xi)/dx (derivada del j-ésimo interpolante de
Lagrange en el punto de colocación x_i)
for j=1:N
    denom=1;
    for m=1:N
        if m~=j
            denom=denom*(x(j)-x(m));
        end
    end

    for i=1:N
        sum=0;
        for k=1:N
            if k~=j
                prod=1;
                for m=1:N
                    if m~=k && m~=j
                        prod=prod*(x(i)-x(m));
                    end
                end
                sum=sum+prod/denom;
            end
        end
        Lpx(i,j)=sum;
    end
end
end

```

Matriz Dx y Dz

```

function [Dx]=matrizDx(Lpx,Nx,Nz)
for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        I=(i-1)*Nz+j;
        for m=1:Nx
            for n=1:Nz
                if n==j
                    lnz=1;
                else
                    lnz=0;
                end
                K=(m-1)*Nz+n;
                Dx(I,K)=Lpx(i,m)*lnz;
            end
        end
    end
end
end

```

```

function [Dz]=matrizDz (Lpz,Nx,Nz)
for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        I=(i-1)*Nz+j;
        for m=1:Nx
            if m==i
                lnx=1;
            else
                lnx=0;
            end
            for n=1:Nz
                K=(m-1)*Nz+n;
                Dz (I,K)=Lpz (j,n)*lnx;
            end
        end
    end
end
end

```

Resolución del problema de convección Rayleigh-Bénard con radiación

```

clc

clear all
close all

% Nodos de Chebyshev
Nx=20;
xmin=0;
xmax=2;
for i=1:Nx
    xch(i)=(xmax+xmin)/2+(xmin-xmax)/2*cos((i-1)/(Nx-1)*pi);
end

Nz=20;
zmin=0;
zmax=1;
for p=1:Nz
    zch(p)=(zmax+zmin)/2+(zmin-zmax)/2*cos((p-1)/(Nz-1)*pi);
end

Nt=Nx*Nz;

% Matrices derivativas
%Matrices sparse para que obtener mejores resultados
Lpx=sparse (Nx,Nx) ;
Lpz=sparse (Nz,Nz) ;
Dx=sparse (Nt,Nt) ; %derivada respecto a x
Dz=sparse (Nt,Nt) ; %derivada respecto a z
DL=sparse (Nt,Nt) ; %laplaciano
DL2=sparse (Nt,Nt) ; %biharmónico
[Lpx]=matrizLpx (xmin,xmax,Nx) ;
[Lpz]=matrizLpz (zmin,zmax,Nz) ;

```

```

[Dx]=matrizDx(Lpx,Nx,Nz);
[Dz]=matrizDz(Lpz,Nx,Nz);
DL=Dx*Dx+Dz*Dz;
DL2=DL*DL;
DxDL=Dx*DL;
DzDL=Dz*DL;

% Creacion de matrices y vectores del sistema
psi=zeros(Nt,1); %vector de \psi (función de corriente)
theta=zeros(Nt,1); %vector de temperaturas T
psinml=zeros(Nt,1); %vector de condiciones iniciales
thetanml=zeros(Nt,1);
Asyst=sparse(2*Nt,2*Nt); %matriz que engloba el sistema con
submatrices AP, AT, BP, BT
Apsi=sparse(Nt,Nt);
At=sparse(Nt,Nt);
Bpsi=sparse(Nt,Nt);
Bt=sparse(Nt,Nt);

bpsi=zeros(Nt,1); %vector de terminos independientes para \psi
btheta=zeros(Nt,1); %vector de terminos independientes para T
FBCpsi=ones(Nt,1);
FBCt=ones(Nt,1);

% Propiedades del fluido e incremento de tiempo
T2T1=0.5; s=1/(1-T2T1); %T2T1=T2/T1
Nrc=1; %chi=4*Nrc (chi de Goody) , Nrc_nuestro=Nrc_Goody*(1-
T2/T1)^3
Pr=0.733;
Ra=4.5e4; %equilibrio (v=0 o v=cte) que puede ser
%estable (reposo)/ inestable (permanece en movimiento)
dt=0.1; %Incremento de tiempo que se va a tomar.
Ntime=2000; %Limite de ntau, siendo t*=ntau*dtau

% Calculo de Th*
Th=Thydrostatic(s,Nrc,Nz,Lpz);
for j=1:Nz
    for i=1:Nx
        I=(i-1)*Nz+j; % Forma vector TH de las notas (valor de
Th en nodo I)
        TH(I,1)=Th(j,1);
    end
end

% Perturbación inicial theta* : cualquiera, se amortiguará con
el tiempo y
% T*=Th*+theta* tenderá a Th*
for i=1:Nx
    for j=1:Nz
        I=(i-1)*Nz+j;
        psinml(I,1)=0.0005*xch(i)^2*(xmax-
xch(i))^2*zch(j)^2*(zmax-
zch(j))^2*cos(pi^2*xch(i)*zch(j)/xmax/zmax/5);
        thetanml(I,1)=0.005*cos(2*pi*(xch(i)-xmin)/(xmax-
xmin))*sin(2*pi*(zch(j)-zmin)/(zmax-zmin));
    end
end

```

```

end
end

% Matrices del sistema, sin Bt que se define en el bucle
Apsi=DL-dt*sqrt(Pr/Ra)*DL2;
At=dt*Dx;
DzTh=spdiags(Dz*TH,0,Nt,Nt);
Bpsi=-dt*DzTh*Dx;

% Condiciones de contorno:
% CC en contornos horizontales (psi impuesta)
for i=1:Nx
    % inferior
    I=(i-1)*Nz+1;    Apsi(I,:)=0;    Apsi(I,I)=1;
At(I,:)=0;    FBCpsi(I,1)=0;
    Bpsi(I,:)=0;    FBCt(I,1)=0;
    % superior
    I=(i-1)*Nz+Nz;    Apsi(I,:)=0;    Apsi(I,I)=1;
At(I,:)=0;    FBCpsi(I,1)=0;
    Bpsi(I,:)=0;    FBCt(I,1)=0;
end
% CC en contorno verticales (psi impuesta)
for j=2:Nz-1
    %izquierda
    I=(1-1)*Nz+j;    Apsi(I,:)=0;    Apsi(I,I)=1;    At(I,:)=0;
FBCpsi(I,1)=0;
    Bpsi(I,:)=0;    FBCt(I,1)=0;
    %derecha
    I=(Nx-1)*Nz+j;    Apsi(I,:)=0;    Apsi(I,I)=1;
At(I,:)=0;    FBCpsi(I,1)=0;
    Bpsi(I,:)=0;    FBCt(I,1)=0;
end
% CC en subcontornos horizontales (vx=0 en cont horiz)
for i=2:Nx-1
    %subcontorno inferior
    K=(i-1)*Nz+2; At(K,:)=0; Apsi(K,:)=Dz(K-1,:);
FBCpsi(K,1)=0;
    %sub sup
    K=(i-1)*Nz+Nz-1; At(K,:)=0; Apsi(K,:)=Dz(K+1,:);
FBCpsi(K,1)=0;
end
% CC en subcontornos verticales (vz=0 en cont vert)
%vz=0 en cont vert
for j=3:Nz-2
    %subconjunto izq
    K=(2-1)*Nz+j;    At(K,:)=0; Apsi(K,:)=Dx(K-Nz,:);
FBCpsi(K,1)=0;
    %sub der
    K=(Nx-1-1)*Nz+j; At(K,:)=0; Apsi(K,:)=Dx(K+Nz,:);
FBCpsi(K,1)=0;
end

[X,Z]=meshgrid(xch,zch);
dtPrRa=dt/sqrt(Pr*Ra); % para facilitar notación

```

```

vntau=[0:10:Ntime];
h=2; %i para decir si quiero representar temperaturas (i=1) o
psi (i=2) o velocidades vx, vz (i=3)

for n=1:Ntime
    t=n*dt;
    n

% Forma matriz Bt y vector btheta de las notas y se modifican
con condiciones de contorno
    NLP(1:Nt,1)=(Dx*psinml).*(DzDL*psinml)-
(Dz*psinml).*(DxDL*psinml);
    NLT(1:Nt,1)=(Dx*psinml).*(Dz*thetanml)-
(Dz*psinml).*(Dx*thetanml);
    bpsi=(DL*psinml+NLP*dt).*FBCpsi;

    sTHthetanml=s+TH+thetanml;
    sTHthetanml_2=sTHthetanml.*sTHthetanml;
    sTHthetanml_3=sTHthetanml_2.*sTHthetanml;
    sTHthetanml_4=sTHthetanml_3.*sTHthetanml;
    DL_1=DL*spdiags(sTHthetanml_3,0,Nt,Nt);
    DL_2=DL*(sTHthetanml_4-4*sTHthetanml_3.*thetanml);
    Bt=speye(Nt)-dtPrRa*DL-4*dtPrRa*Nrc*DL_1;
    btheta=thetanml+dtPrRa*DL*TH+dtPrRa*Nrc*DL_2+NLT*dt;

% Condiciones de contorno para Bt
    % Horizontales (theta impuesta)
    for i=1:Nx
        % inferior
        I=(i-1)*Nz+1;    Bt(I,:)=0;    Bt(I,I)=1;    FBCt(I,1)=0;
        % superior
        I=(i-1)*Nz+Nz;  Bt(I,:)=0;    Bt(I,I)=1;    FBCt(I,1)=0;
    end
    % Verticales (paredes adiabaticas)
    for j=2:Nz-1
        %izquierdo
        I=(1-1)*Nz+j;    Bt(I,:)=Dx(I,:);    FBCt(I,1)=0;
        %derecho
        I=(Nx-1)*Nz+j;  Bt(I,:)=Dx(I,:);    FBCt(I,1)=0;
    end

%Resuelve para theta*_n (se suprimen asteriscos en theta*) y
pinta
%subplots

    btheta=FBCt.*btheta; %FBCt esta definido en las condiciones
de contorno de arriba
    Asyst=[Apsi,At;Bpsi,Bt]; b=[bpsi; btheta];
    sol=Asyst\b;
    psi(1:Nt,1)=sol(1:Nt,1);    theta(1:Nt,1)=sol(Nt+1:2*Nt,1);

    for j=1:Nz
        xmat(1:Nx,j)=xch(1:Nx);
        zmat(1:Nx,j)=zch(j);
    end

```

```

    psimat(1:Nx,j)=psi(((1:Nx)-1)*Nz+j,1);
    Thmat(1:Nx,j)=TH(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); % matriz de Th*
    thetamat(1:Nx,j)=theta(((1:Nx)-1)*Nz+j,1); % matriz de
theta*
    Tmat(1:Nx,j)=Thmat(1:Nx,j)+ thetamat(1:Nx,j); % matriz
de T*=Th+theta*
    end

    if h==3 %Vector de velocidades v=(vx,vz)
        psimat=psimat';
        for j=2:Nz
            vx(j,:)=(psimat(j,:)-psimat(j-1,:))/(zch(j)-zch(j-
1));
        end
        for j=2:Nx
            vz(:,j)=-(psimat(:,j)-psimat(:,j-1))/(xch(j)-xch(j-
1));
        end
        vx(1,:)=0; vx(Nz,:)=0;
        vz(:,1)=0; vz(:,Nx)=0;
    end

    for k=1:length(vntau)
        if n==vntau(k)
            if h==1
                subplot(2,2,1)% 1fila 2 col y este es el subplot
1
                contour(X,Z,Tmat','linewidth', 1)
                title('Isocontornos T^*') % T*=Th*+theta*
                xlabel('X'); ylabel('Z')
                subplot(2,2,2)
                contour(X,Z,thetamat') % Isocontornos de
theta*
                title('Isocontornos \theta^*')
                xlabel('X'); ylabel('Z')
                subplot(2,2,3)
                plot(thetamat(round(Nx/2),:),zch(:),'r')
%theta* en xch=L/H/2
                title('\theta^* en sección x=L/2')
                xlabel('\theta^*'); ylabel('Z')
                subplot(2,2,4)
                plot(Tmat(round(Nx/2),:),zch(:),'r') %
T*=Th*+theta* en xch=L/H/2
                hold on
                plot(Thmat(round(Nx/2),:),zch(:),'* b') % Th* en
xch=L/H/2
                title('Temperatura T_h^* en sección x=L/2')
                xlabel('T_h^*'); ylabel('Z')
                axis([-1 0 0 1])
                pause(0.01)
                hold off
            elseif h==2
                contour(X,Z,psimat','linewidth', 1)
                title('FUNCION DE CORRIENTE ')
                xlabel('X'); ylabel('Z')
            end
        end
    end

```

```

        hold off
        pause(0.01)
    elseif h==3
        scale=0.5;
        quiver(X, Z, vx, vz, scale)
        title('CAMPO DE VELOCIDADES')
        xlabel('X'); ylabel('Z')
        axis([0 xmax 0 zmax])
        hold off
        pause(0.01)
    end
end
end
end

% Pasa al instante siguiente
thetanm1=theta;    psinm1=psi;

a=xmax/zmax; thetamat=thetamat'; Thmat=Thmat';
DthetaDeta=(thetamat(2,:)-thetamat(1,:))/(zch(2)-zch(1));
DThDeta=(Thmat(2,1)-Thmat(1,1))/(zch(2)-zch(1));
F=DthetaDeta+DThDeta;
Nu(n)=trapz(xch, F)/(a*DThDeta);
end
figure
plot([1:n]*dt, Nu)

function [Th]=Thydrostatic(s, Nrc, Nz, Lpz) %Th*

D2z=Lpz*Lpz;
% Condiciones de contorno:
Theta1=0; Theta2=-1;

% Intervalo de tiempo y número de instantes a avanzar
dt=0.001; Ntime=1000;

% Valor inicial de Theta (puede ser cualquiera, va al
estacionario Th de todas formas)
Thetanm1(1:Nz,1)=Theta1;

% Avance en el tiempo
for n=1:Ntime
    t=n*dt;

% Forma matriz A y vector de términos independientes b a partir
de D2z y valores e tnm1:
    sThetanm1=s+Thetanm1;
    sThetanm12=sThetanm1.*sThetanm1;
    sThetanm13=sThetanm12.*sThetanm1;
    sThetanm14=sThetanm13.*sThetanm1;
    A=speye(Nz)-dt*D2z-4*dt*Nrc*D2z*spdiags(sThetanm13,0,Nz,Nz);
    b=Thetanm1+dt*Nrc*D2z*(sThetanm14-4*sThetanm13.*Thetanm1);
% Boundary conditions
    A(1,:)=0; A(1,1)=1;
    A(Nz,:)=0; A(Nz,Nz)=1;
    b(1,1)=Theta1; b(Nz,1)=Theta2;
end

```



```
Thetan=A\b;
if max(abs(Thetan-Thetanm1)) <10^-12
    break, % Entonces ya consideramos alcanzado el
estacionario y tenemos Th
end
Thetanm1=Thetan;
end
Th(1:Nz,1)=Thetan; % Esta es Th* (en programa hemos quitado
asteriscos a todas las variables de las notas)

end
```

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En este capítulo se va a mostrar numéricamente los resultados que se obtienen al aplicar los conceptos explicados en capítulos anteriores. Se han elaborado unos ficheros MATLAB implementando las características del problema de convección natural controlando el nivel de radiación térmica para el caso de un recinto rectangular. Ejecutando el código, se puede llegar a estudiar las propiedades del sistema fluido y que se enseñarán a continuación.

4.1 Convección de Rayleigh-Bénard sin radiación

4.1.1 Número de Rayleigh crítico

Se supone un sistema con un fluido en reposo. Para conseguir estudiar el problema sin radiación basta con igualar $N_{rc} = 0$. Si al aplicar una perturbación inicial en ψ^* (θ^* no se ha perturbado inicialmente por lo que toma valor nulo en $t^*=0$), el fluido recupera su estado de equilibrio amortiguando los efectos de la perturbación, se considerará estable. En cambio, si experimenta variaciones y no tiende al equilibrio, se considera inestable. Estos sucesos dependen de un parámetro que se ha visto en anteriores capítulos: el número de Rayleigh **Ra**. Si se analiza el problema tomando Ra distintos valores, se observará que existe un valor (Ra_c) que limita la estabilidad del problema, es decir, separa el intervalo de manera que para $Ra < Ra_c$ el sistema es estable y para $Ra > Ra_c$ se inestabiliza.

Se va a observar el caso de un recinto rectangular con relación de aspecto $A=x_{max}/z_{max}=2$. El fluido de esta simulación será aire, con $Pr=0.733$, con un mallado de 900 nodos con $N_x=30$, $N_y=30$.

Comenzando con $Ra=1000$ se obtienen unas distribuciones de T^* y Ψ^* junto con el campo de velocidades en distintos instantes de tiempo:

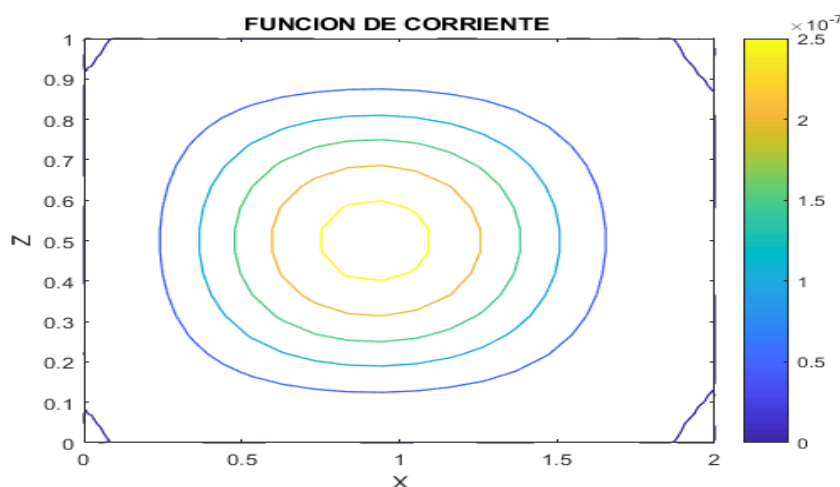


Figura 4.1 Función de corriente para $Ra=1000$, $t^*=13$

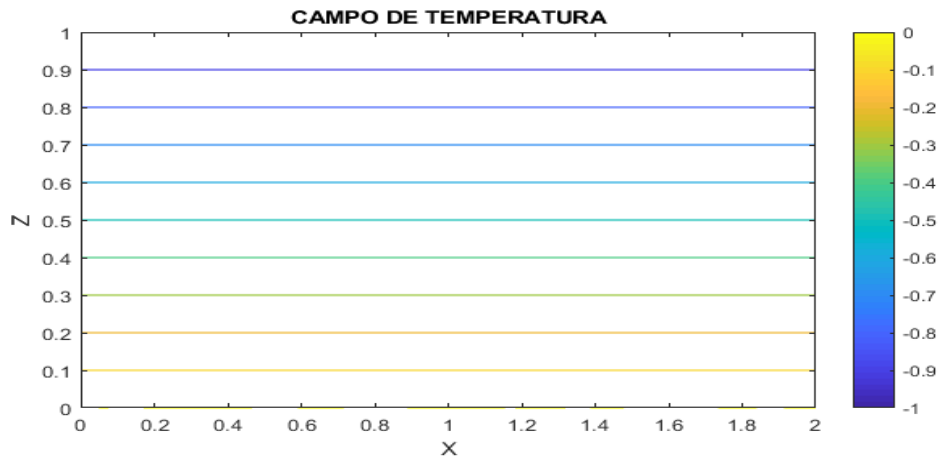


Figura 4.2 Distribución de temperaturas para $Ra=1000$, $t^*=13$

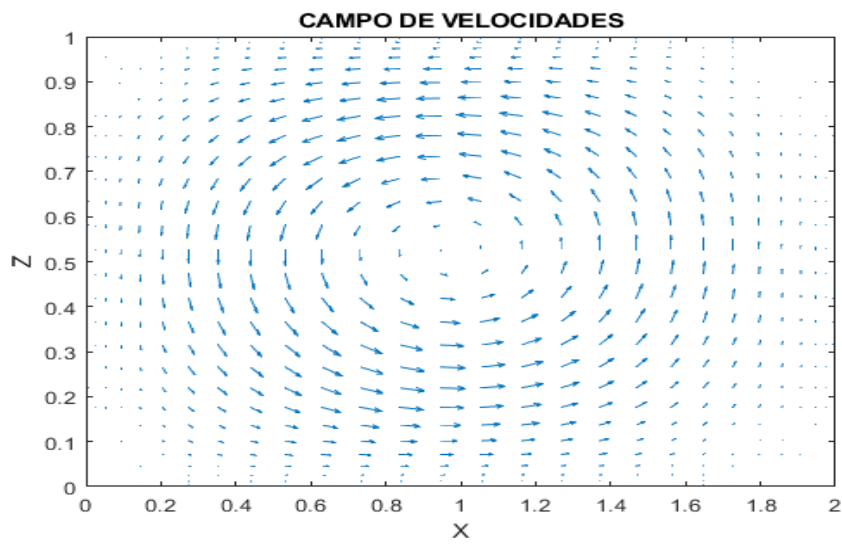


Figura 4.3 Campo de velocidades para $Ra=1000$, $t^*=13$

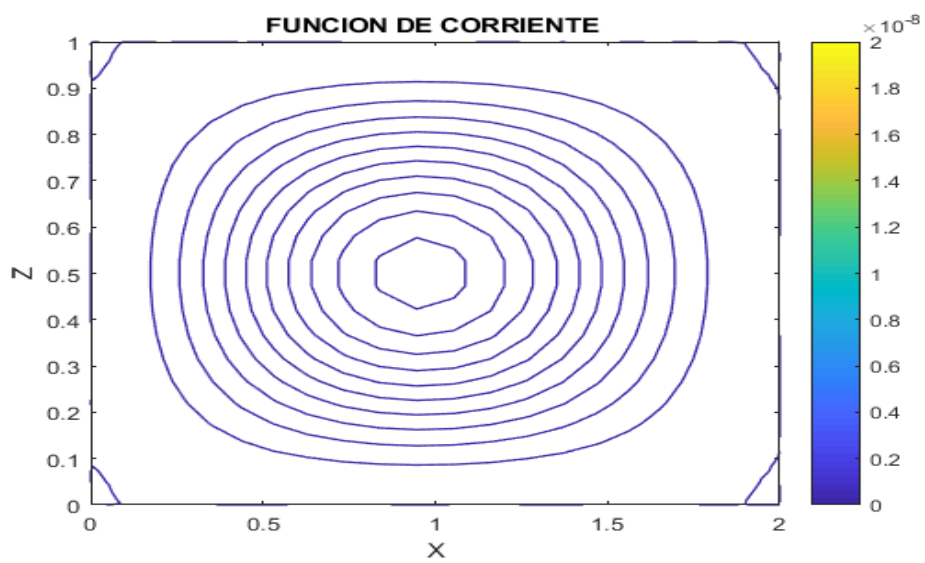


Figura 4.4 Función de corriente para $Ra=1000$, $t^*=80$

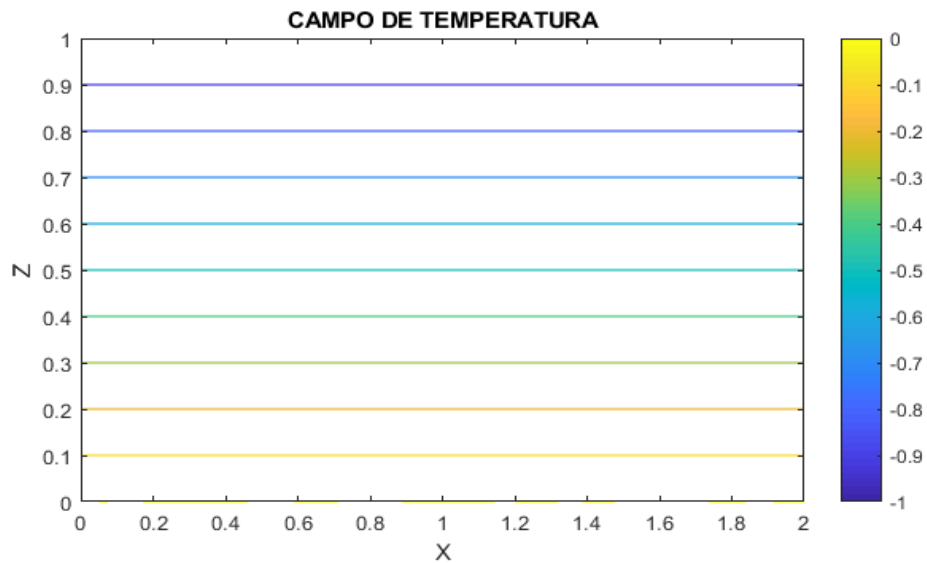


Figura 4.5 Distribución de temperaturas para $Ra=1000$, $t^*=80$

Para este caso se puede observar que a medida que transcurre el tiempo, la evolución de la función de corriente y el campo de temperaturas es estable, ya que la perturbación inicial que se ha introducido se ha amortiguado. Este resultado se ve reflejado en las figuras anteriores, en las que la función Ψ^* se representa mediante unas líneas de contorno cuya diferencia de valores entre ellos va reduciéndose en el tiempo, hasta que el fluido alcanza un estado de reposo. En cuanto al campo de T^* , a lo largo del tiempo, no varía su distribución, manteniendo las líneas horizontales y una variación uniforme de temperaturas en dirección z . Por lo que se puede afirmar que el número de Rayleigh crítico es superior a 1000.

Se va a representar las gráficas análogas para $Ra=4000$

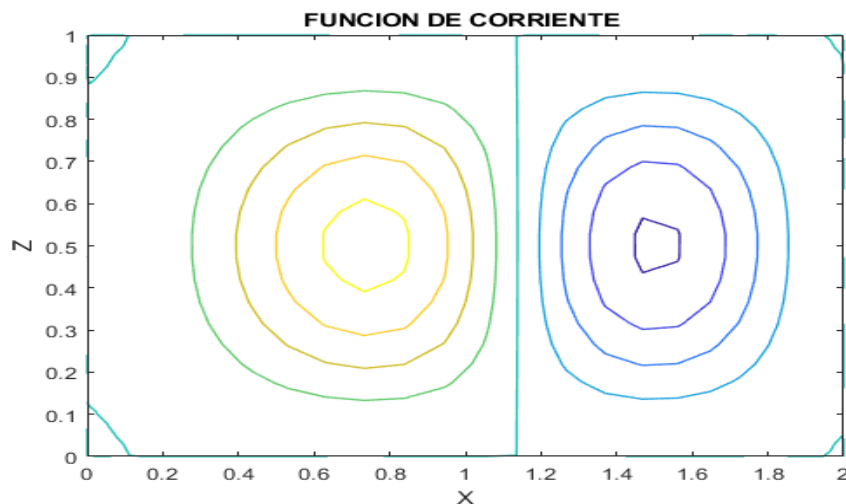


Figura 4.6 Función de corriente para $Ra=4000$, $t^*=40$

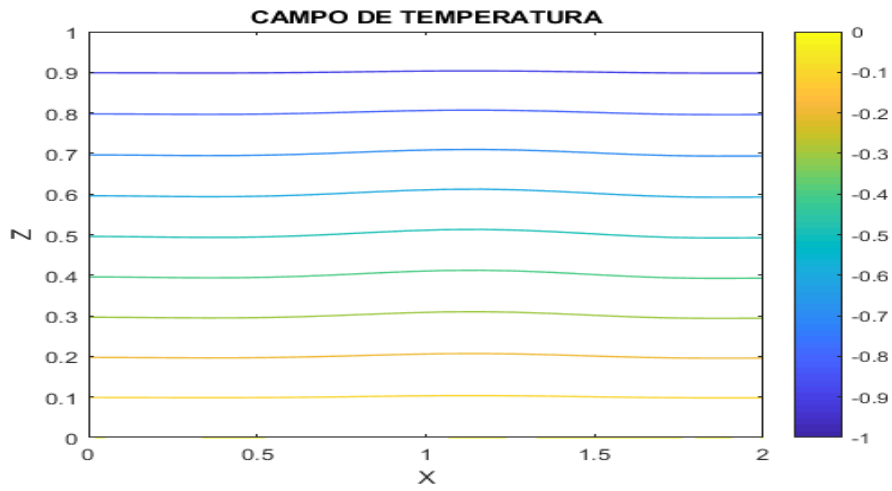


Figura 4.7 Distribución de temperaturas para $Ra=4000$, $t^*=40$

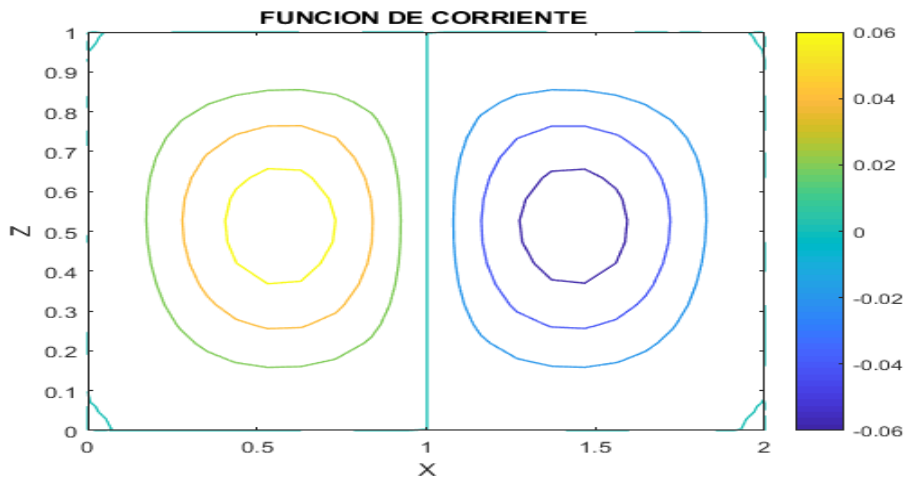


Figura 4.8 Función de corriente para $Ra=4000$, $t^*=100$

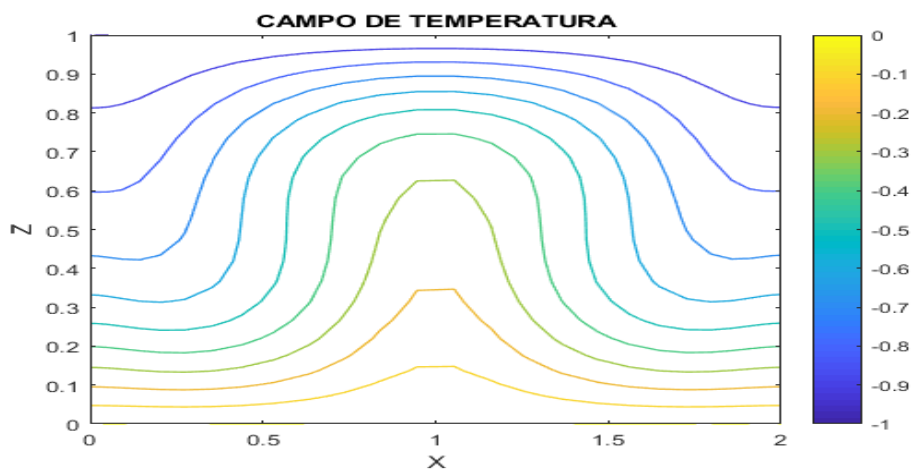
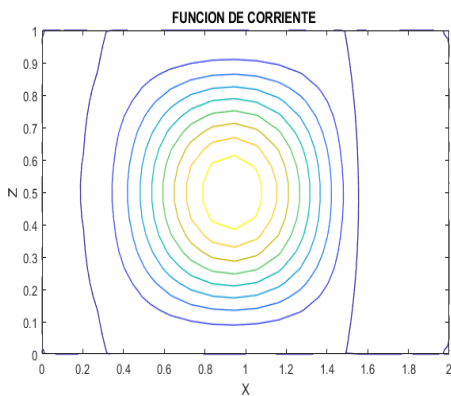


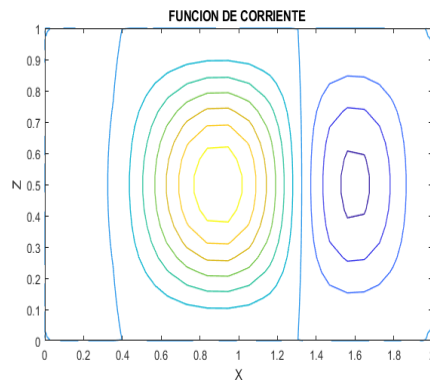
Figura 4.9 Distribución de temperaturas para $Ra=4000$, $t^*=100$

Las figuras anteriores muestran la evolución del fluido para Ra elevado. Se deduce que, según la función de corriente, en instantes de tiempo posteriores a la transición, el fluido asciende por la línea central de la cavidad, llegando al tope superior y se mueve hacia las paredes, para posteriormente descender y completar el circuito convectivo (se forman 2 células de convección térmica). Este proceso es estacionario y el fluido permanece en movimiento. Se recuerda que este paso a la inestabilidad en forma del fenómeno de convección se debe a la perturbación inicial y a otros parámetros que involucra Ra. Es interesante ver el campo de temperaturas ya que se percibe cómo el aire cálido ascendente calienta las zonas centrales y su entorno, mientras que, al enfriarse, se vuelve más denso y provoca su descenso sobre las paredes del recinto, cerrando el circuito ya mencionado.

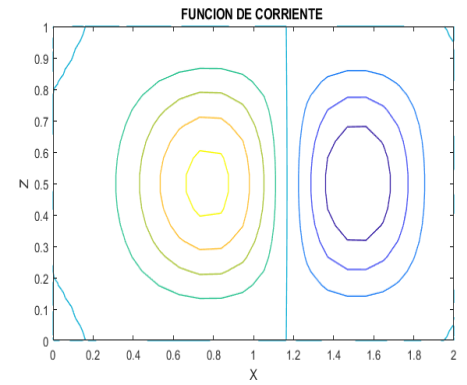
Para ver con mayor claridad la evolución de este proceso, se enseñan imágenes en distintos instantes de tiempo:



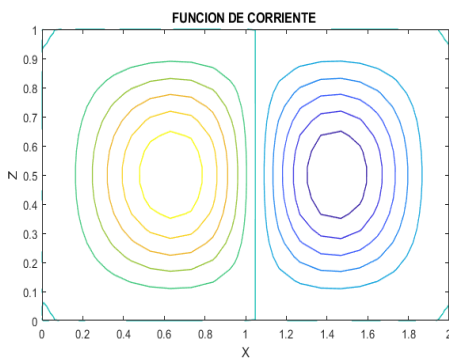
$t^*=5$



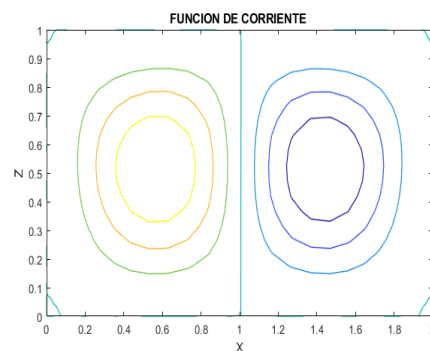
$t^*=16$



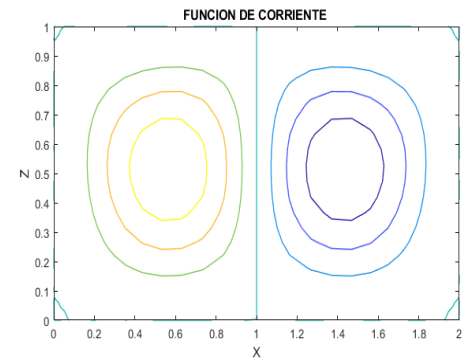
$t^*=32$



$t^*=55$

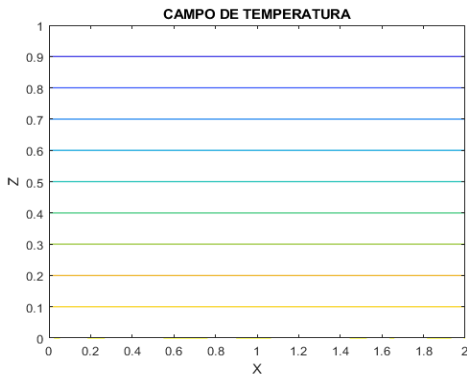


$t^*=80$

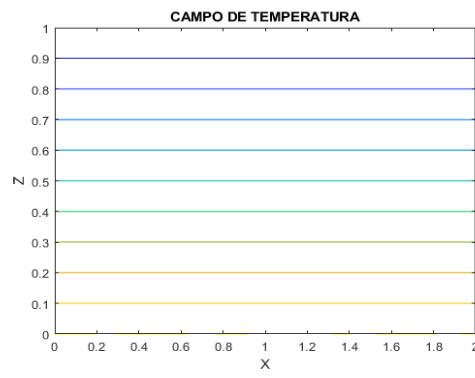


$t^*=160$

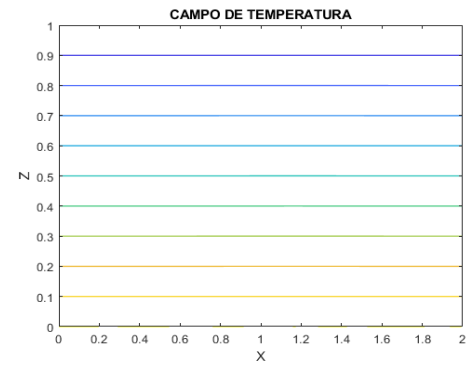
4 Resultados numéricos



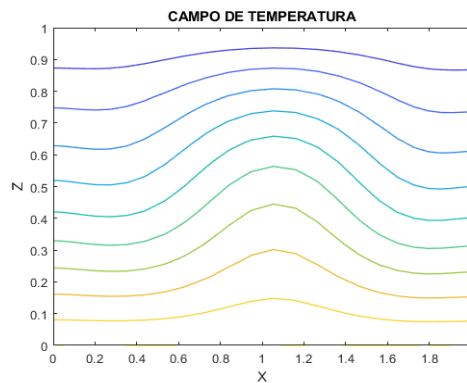
$t^*=5$



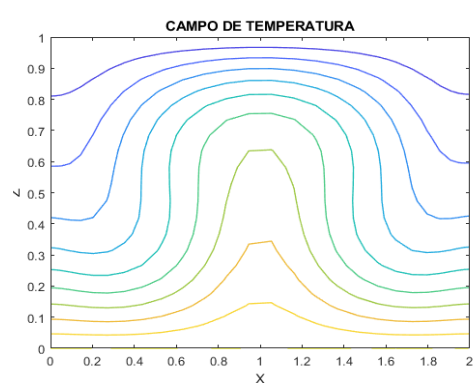
$t^*=16$



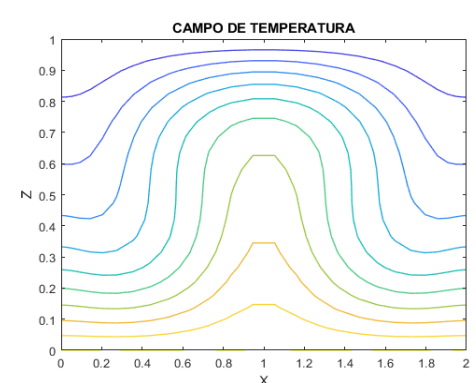
$t^*=32$



$t^*=55$



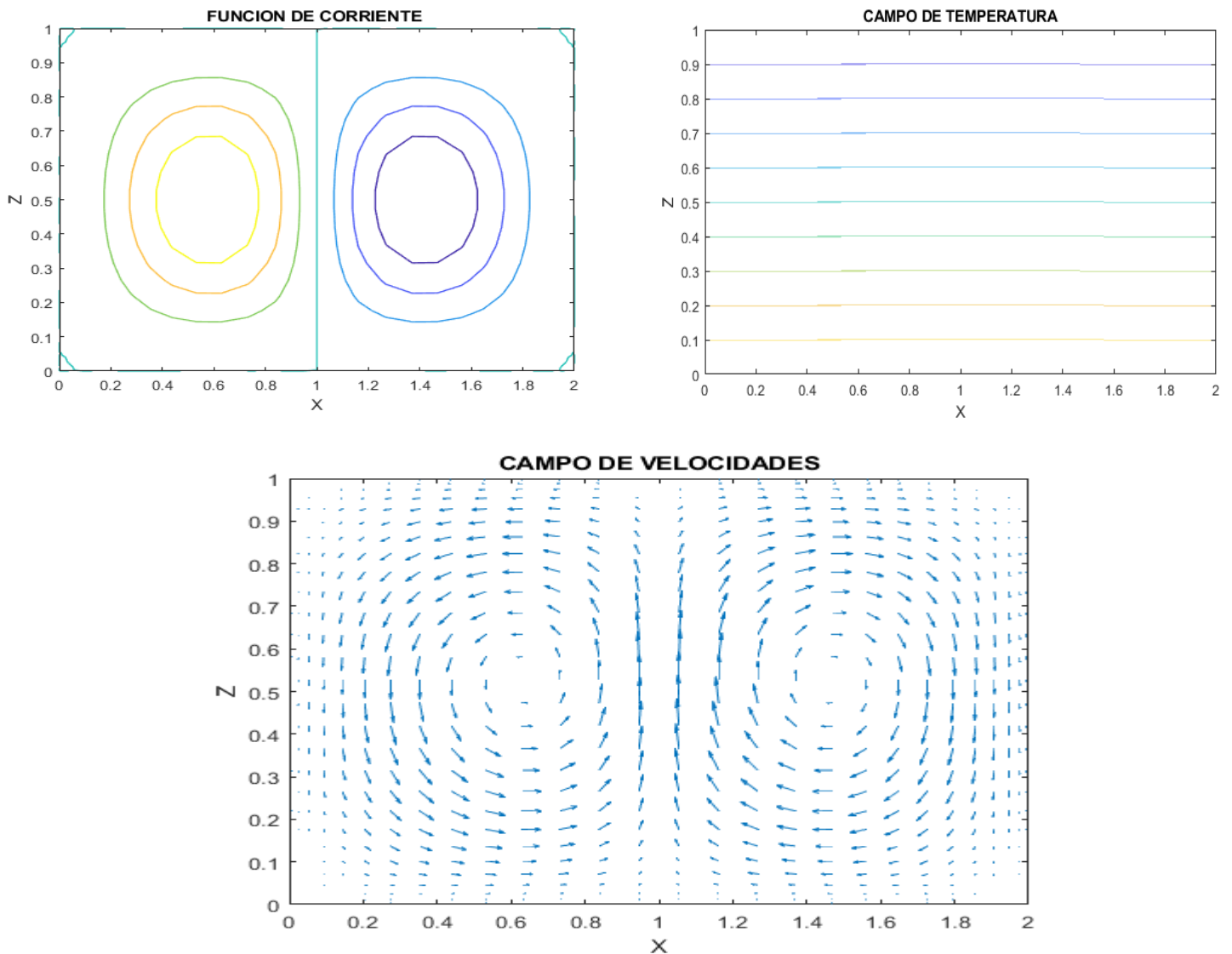
$t^*=80$



$t^*=160$

Se puede apreciar la transición al nuevo estado, que llega en el instante $t^*=55$. En la gráfica de Ψ^* , se van formando las 2 celdas de convección, mientras que para las T^* , se van curvando las líneas isotermas cobrando la forma de una montaña, representando el ascenso del aire más cálido por el centro del recinto.

Después de observar el comportamiento en los casos extremos, llega el momento de buscar el valor límite de Ra que separa los 2 regímenes de estabilidad e inestabilidad que da lugar a la convección térmica. En situaciones estables la transferencia de calor se produce principalmente mediante el mecanismo de conducción, mientras que en presencia de inestabilidad se realiza por convección. Para determinar este Ra_c se procede a un proceso de tanteo consistente en juzgar el Ra que se trate de la siguiente manera: si el movimiento del fluido es amortiguado, hay que elevar Ra , en cambio, si el fluido permanece en movimiento tras un largo período de tiempo ($t^*=3000$), hay que reducir Ra . Siguiendo este método sencillo, se ha deducido que Ra_c es aproximadamente 2013, a partir del cual el sistema se encuentra en un estado estacionario así:



Figuras 4.10 Estado estacionario del sistema para $Ra=2013$

En las figuras anteriores, se representan los estados que cobra el sistema fluido durante prácticamente todo el período de simulación, por lo que se puede suponer que es estacionario. Se puede notar en las células convectivas, que el hecho de que las curvas de nivel permanecen fijas implica que la variación de velocidades es aproximadamente nula con el tiempo, por lo que existe un equilibrio que es casi inestable. Para Ra menores ocurría que se llegaba al equilibrio estable (el flujo es amortiguado y las células se contraían). Mientras que para Ra mayores el sistema contenía aceleraciones que impedían la estacionariedad (las células se expandían).

4.1.2 Relaciones de aspecto y Ra_c

En este apartado se tiene como objetivo estudiar las variaciones de Ra_c frente a la relación de aspecto de la cavidad, A . El procedimiento es análogo al mostrado en el previo subapartado consistente en probar valores y seguir un criterio para seguir convergiendo en la búsqueda del Ra_c .

Se procede a realizar un barrido de distintas relaciones de aspecto A , teniendo asociada cada una un valor crítico diferente de Ra .

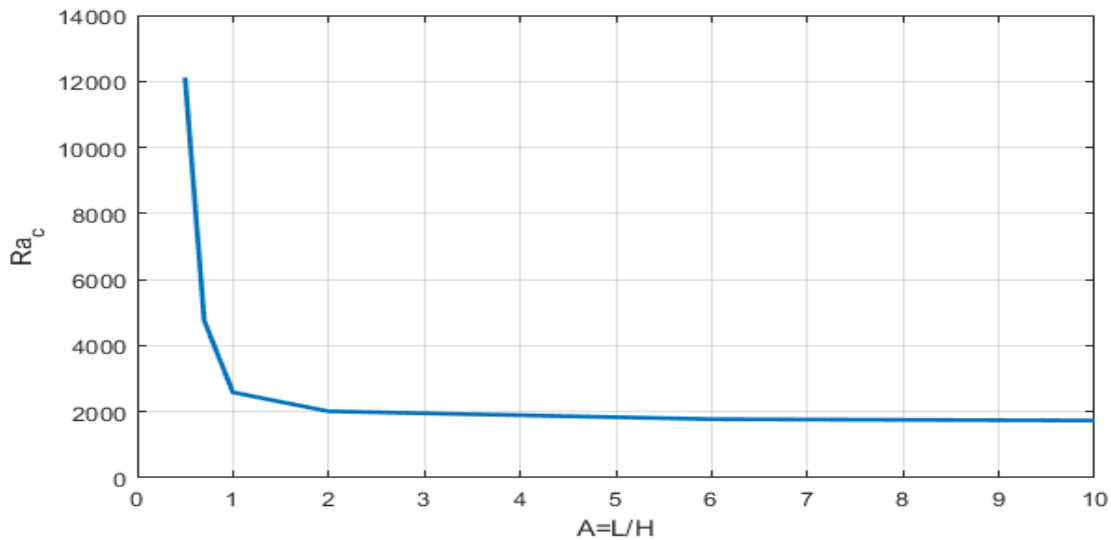


Figura 4.11 Relación entre A y Ra_c

De esta gráfica se ve que en dimensiones estrechas de la cavidad, con A pequeñas, se llega a Ra_c bastante grandes, debido a que la separación entre paredes se ve reducida, y para que suceda el fenómeno de convección natural es necesario mayores incrementos de temperatura que proporcionen fuerza suficiente al fluido para el movimiento.

En cambio, al aumentar la distancia entre las paredes se observa la reducción brusca hasta A cercana a 2 y a partir de ahí, va disminuyendo muy lentamente. En el infinito se puede predecir el valor de Ra_c , que equivale a 1708, según los resultados teóricos. Este es el valor al que tiende la curva representada, teniendo una asíntota horizontal que corta al eje de ordenadas en dicho Ra_c .

4.1.3 Número de células convectivas

A continuación, se analiza otra influencia de la variación de la relación de aspecto, el número de rollos de convección. Se observó una peculiaridad adicional al aumentar el parámetro A . Resulta que esto da lugar también a un mayor número de celdas convectivas, y cobra sentido esta observación ya que al tener mayor espacio entre las paredes verticales es más asequible para el fluido formar más circuitos convectivos, como se muestra en las figuras posteriores.

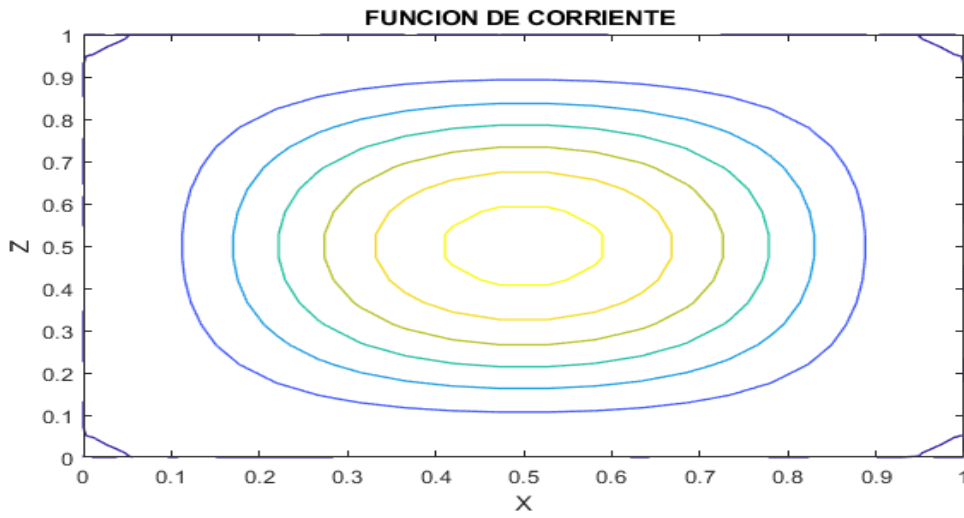


Figura 4.12 Función de corriente para $A=1$, $Ra_c=2586$

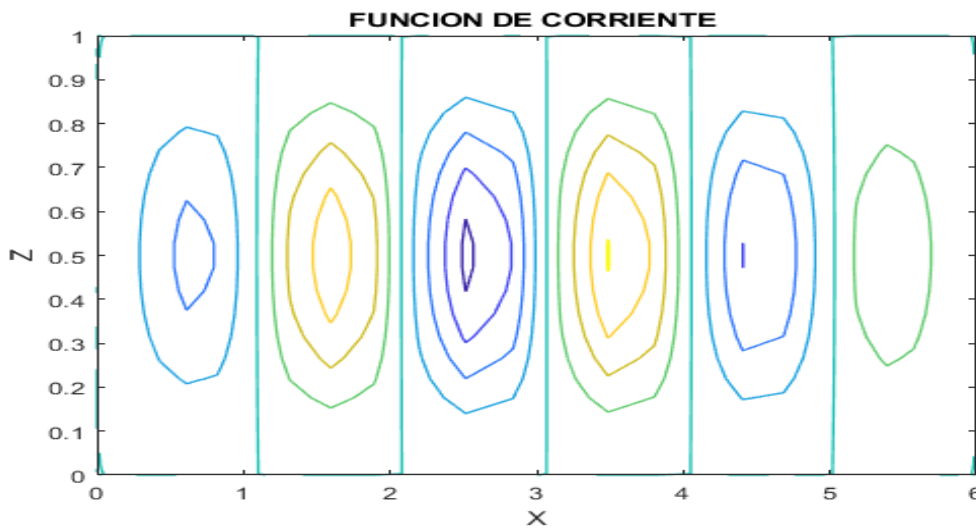


Figura 4.13 Función de corriente para $A=6$, $Ra_c=1775$

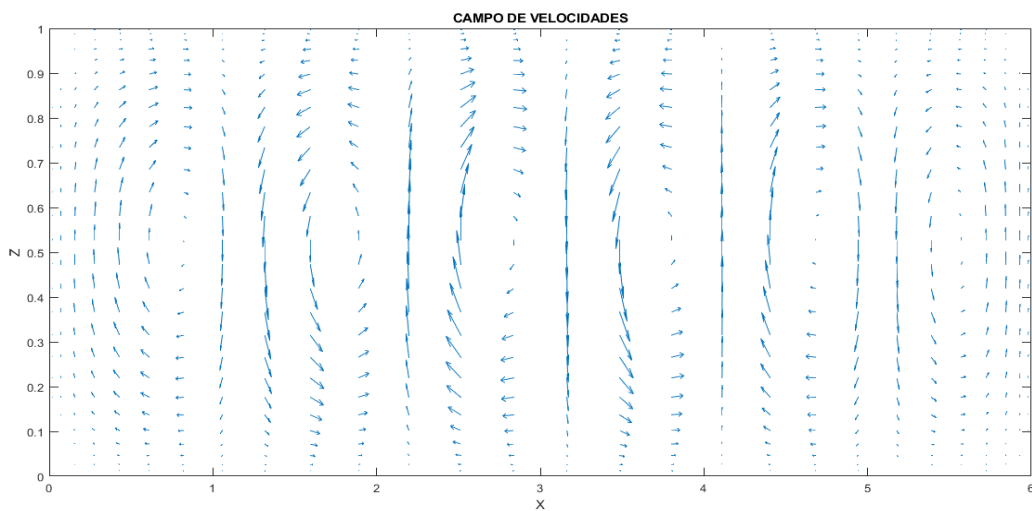


Figura 4.14 Campo de velocidades para $A=6$, $Ra_c=1775$

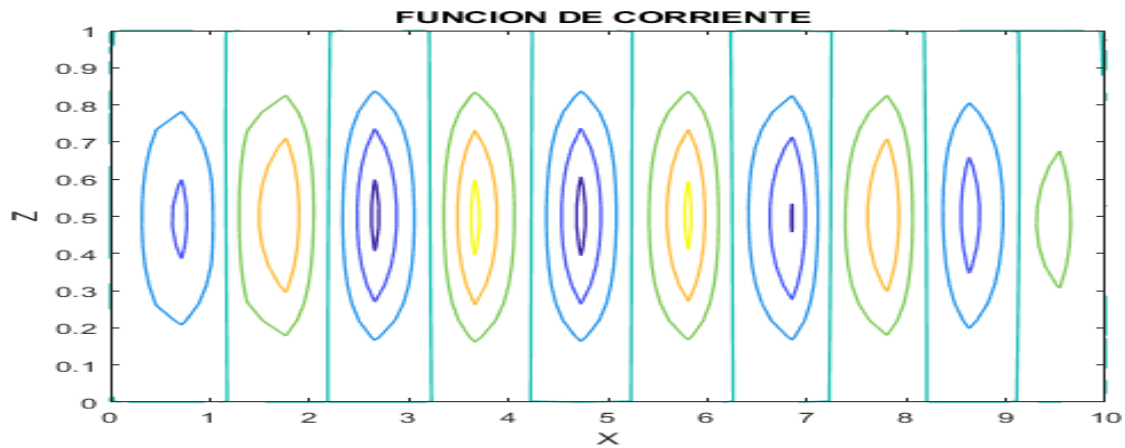


Figura 4.15 Función de corriente para $A=10$, $Ra_c=1734$

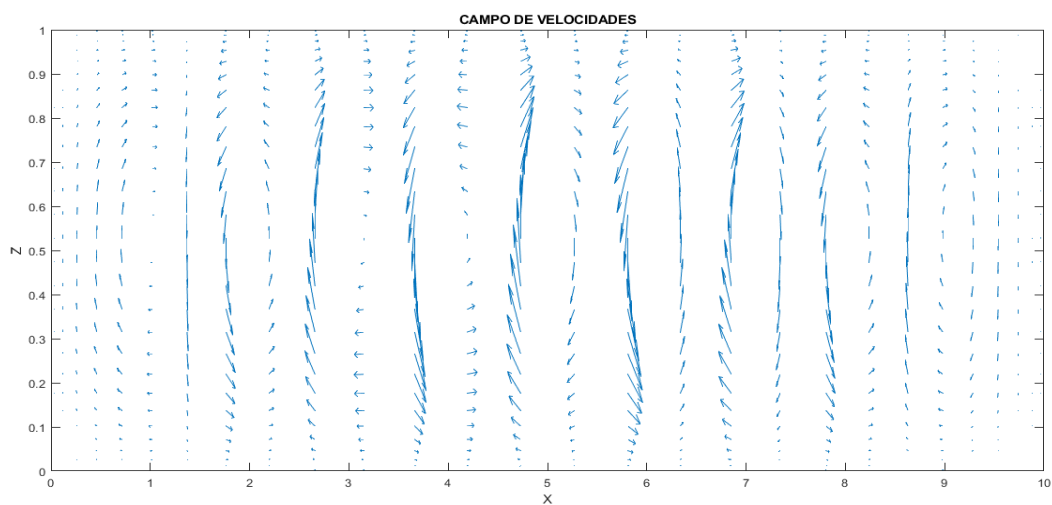


Figura 4.16 Campo de velocidades para $A=10$, $Ra_c=1734$

Adicionalmente a estas gráficas también tenemos el caso de $A=2$ (estudiado previamente), en el que se ve la convivencia de 2 circuitos convectivos en el recinto rectangular.

La conclusión es que al aumentar la dimensión horizontal respecto de la vertical es más posible que se llegue a un estado de mayor número de rollos de convección debido a la facilidad espacial que le proporciona al fluido en movimiento.

4.1.4 Número de Nusselt

Este parámetro es un indicador del aumento de transmisión de calor desde la altura de una superficie ($z^*=0$) sobre la que fluye un fluido, es decir, mide la relevancia que tiene la convección como transferencia de calor frente a la conducción pura de calor. La siguiente expresión define el número de Nusselt:

$$Nu(x) = \frac{-K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_0}{K \frac{T_1 - T_2}{H}} \quad (4.1)$$

El numerador se puede obtener si se emplea la distribución de temperaturas que se explicó en apartados anteriores:

$$-K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = K \frac{T_1 - T_2}{H} \left(1 - \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} \right)_{z^*=0} \right) \quad (4.2)$$

El número de Nusselt local queda de la siguiente forma, en función del gradiente térmico a la altura de la superficie y de Ra.

$$Nu(x^*) = 1 - \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} \right)_{z^*=0} \quad (4.3)$$

El calor por unidad de tiempo y de longitud se calcula integrando a lo largo de la placa inferior lo siguiente

$$Q_p = \int_0^L -K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} dx = K(T_1 - T_2) \int_0^A \left(1 - \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} \right)_{z^*=0} \right) dx^* \quad (4.4)$$

Por otro lado, también se puede obtener el calor en la situación hidrostática

$$Q_{p,0} = \int_0^L K \frac{T_1 - T_2}{H} dx = K(T_1 - T_2)A \quad (4.5)$$

Estos valores al dividirlos darán el Nu promedio de la placa, siendo más utilizado que el valor local.

$$\overline{Nu} = \frac{Q_p}{Q_{p,0}} = \frac{1}{A} \int_0^A \left(1 - \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} \right)_{z^*=0} \right) dx^* \quad (4.6)$$

Para este cálculo se ha empleado MATLAB aprovechando los resultados del programa de convección, y dada la distribución de T^* , se puede calcular la integral mediante el método de los trapecios.

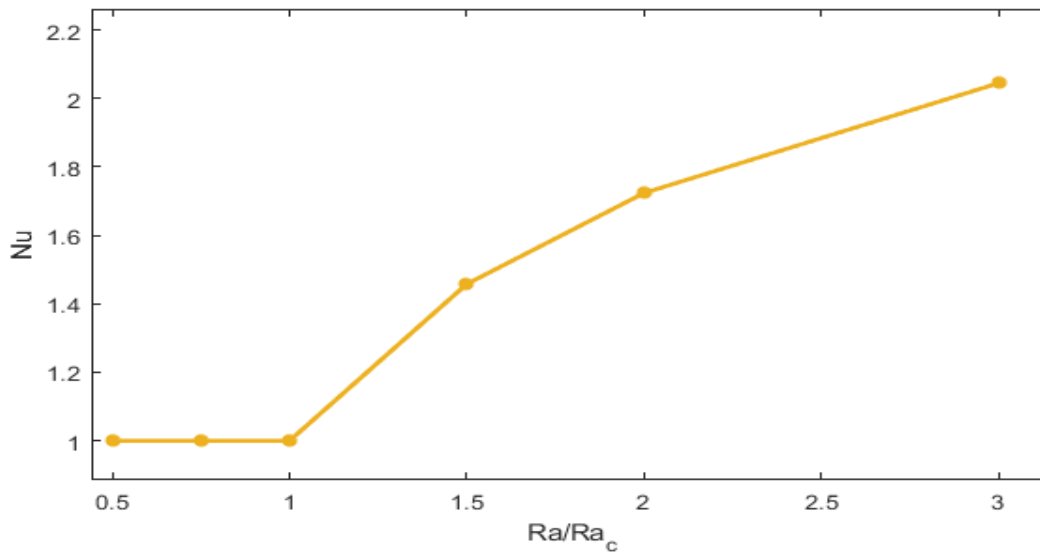


Figura 4.17 N° Nusselt medio para el caso de $A=2$, con $Ra_c=2013$

Si se calcula una correlación aproximada para este caso de convección natural con el rango de Ra que se ha empleado hay varias formas de expresarlo:

$$\overline{Nu} = 0.0086 Ra^{0.64} ; \overline{Nu} = 1.12 \left(\frac{Ra}{Ra_c} \right)^{0.64} \quad (4.7)$$

El número de Nusselt es independiente de Pr como se puede observar en las deducciones anteriores y en experimentos de estas condiciones como hicieron en su 1974 Koschmieder y Pallas llegando a los resultados que se muestran:

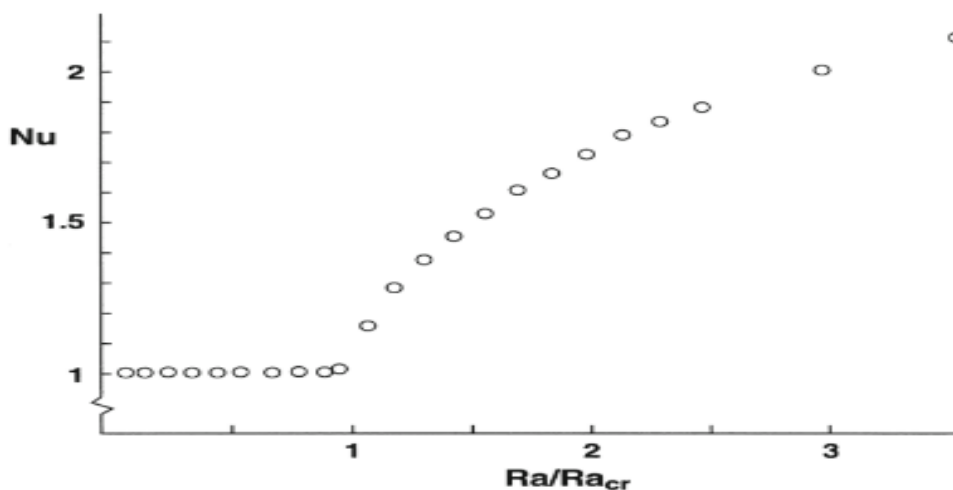


Figura 4.18 N° Nusselt medio de las pruebas experimentales de Koschmieder y Pallas de 1974 con aceites de silicona demostrando la existencia de un Ra_c a partir del cual la función de Nu empieza a crecer, siendo antes $Nu=1$

4.1.5 Tiempo estacionario

En el problema de convección de Rayleigh-Bénard se ha observado que tras un período de tiempo de evolución a partir del estado inicial (perturbación), se produce una transición hacia un nuevo estado en el que se forman células convectivas, en caso de superar el Ra_c para una relación de aspecto dado.

Se analiza el caso de $A=2$, para el que se va a escoger un $Ra=3000$ y se representa la evolución de Nu a lo largo del tiempo de simulación, llegándose a ver el paso desde un Nu inicial a un valor correspondiente al estacionario. Para esta configuración se obtiene un tiempo estacionario $t_e^* = 113$.

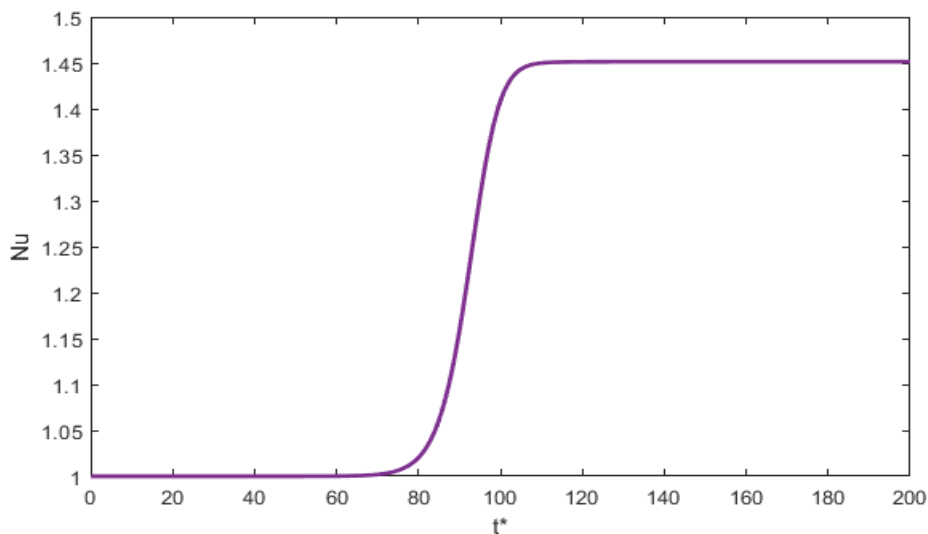


Figura 4.19 N° Nusselt medio en función del tiempo para el caso de $A=2$, con $Ra_c=3000$

En la siguiente figura se muestra el resultado de la variación de este tiempo estacionario al variar Ra si permanece constante $A=2$ del recinto.

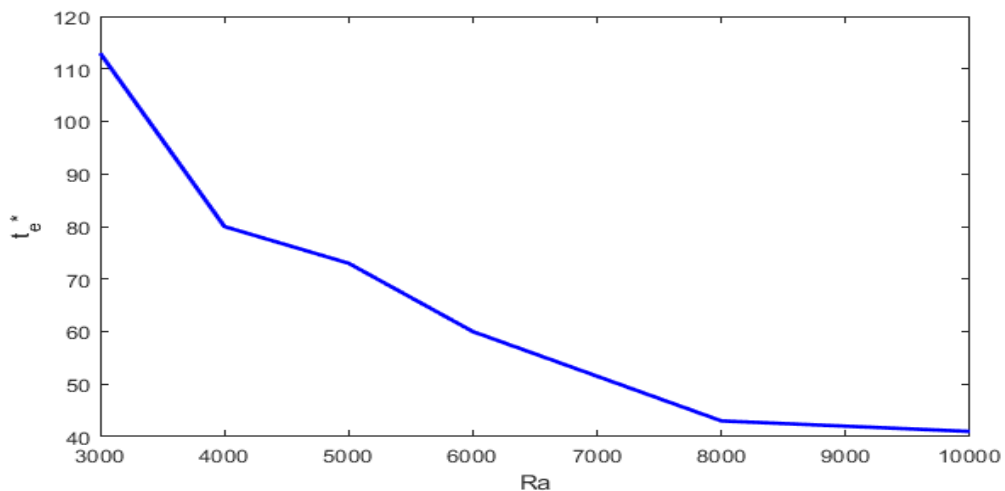


Figura 4.20 Tiempo de alcance estacionario en función de Ra con $A=2$

Se puede deducir que a medida que aumenta Ra , la intensidad de convección es mayor, por lo que se alcanza antes la formación de los rollos de convección y menor es el tiempo de alcance estacionario. Además, cuanto más se acerca Ra al valor crítico, se ve que el valor del tiempo tiende a infinito.

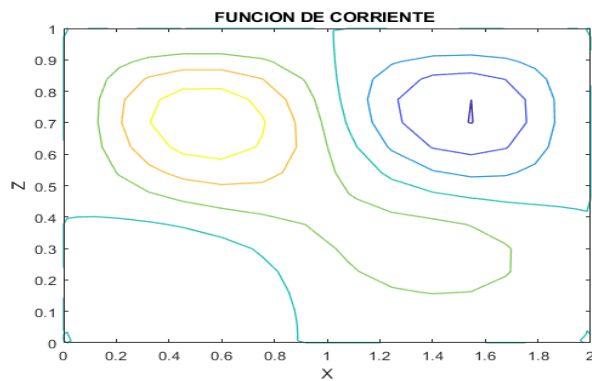
4.2 Convección de Rayleigh-Bénard con radiación

Se procede al estudio del caso de convección natural considerando la radiación y cuyo modelo e inclusión se han detallado en otros capítulos. En este análisis el parámetro de radiación – convección N_{rc} va a tomar valores distintos a 0 y se podrán observar los efectos que implica la presencia de radiación en este problema.

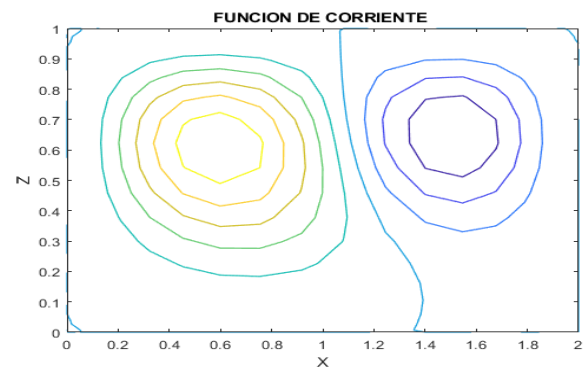
4.2.1 Número de Rayleigh crítico según N_{rc}

Se decide emplear un mallado menos fino que en el caso sencillo sin radiación debido a la complejidad y lentitud que conlleva la resolución del problema. Los resultados que se obtienen son bastante razonables comparados con el mallado anterior. Es por ello que se elige que $N_x = 20$, $N_z = 20$, es decir, unos 400 nodos.

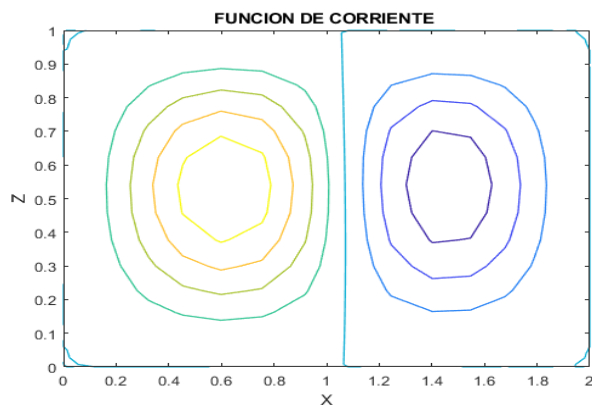
En este apartado se decide escoger un recinto nominal de $A=L/H=2$, que contiene un fluido que será el aire con $Pr=0.733$. Las paredes inferior y superior tienen una relación de temperaturas que es de $T_2/T_1 = 0.5$. En este caso si habrá perturbación inicial en ψ^* y θ^* (los que aparecen en el capítulo anterior y en el código). Se empezará por mostrar la evolución de un caso con $N_{rc} = 1$. Se ha visto que el $Ra_c = 4.5 * 10^4$, es decir, que a partir de este valor se alcanza la convección por inestabilidad.



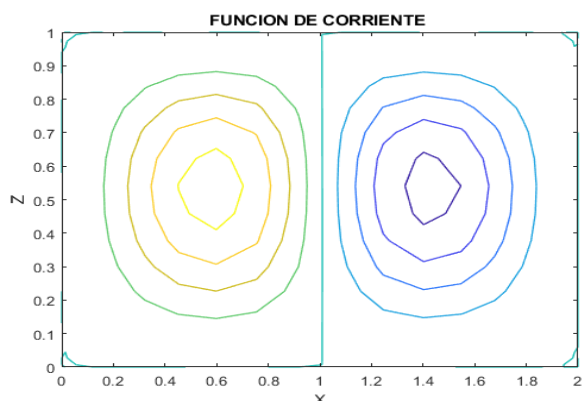
$t^*=1$



$t^*=5$



$t^*=20$



$t^*=80$

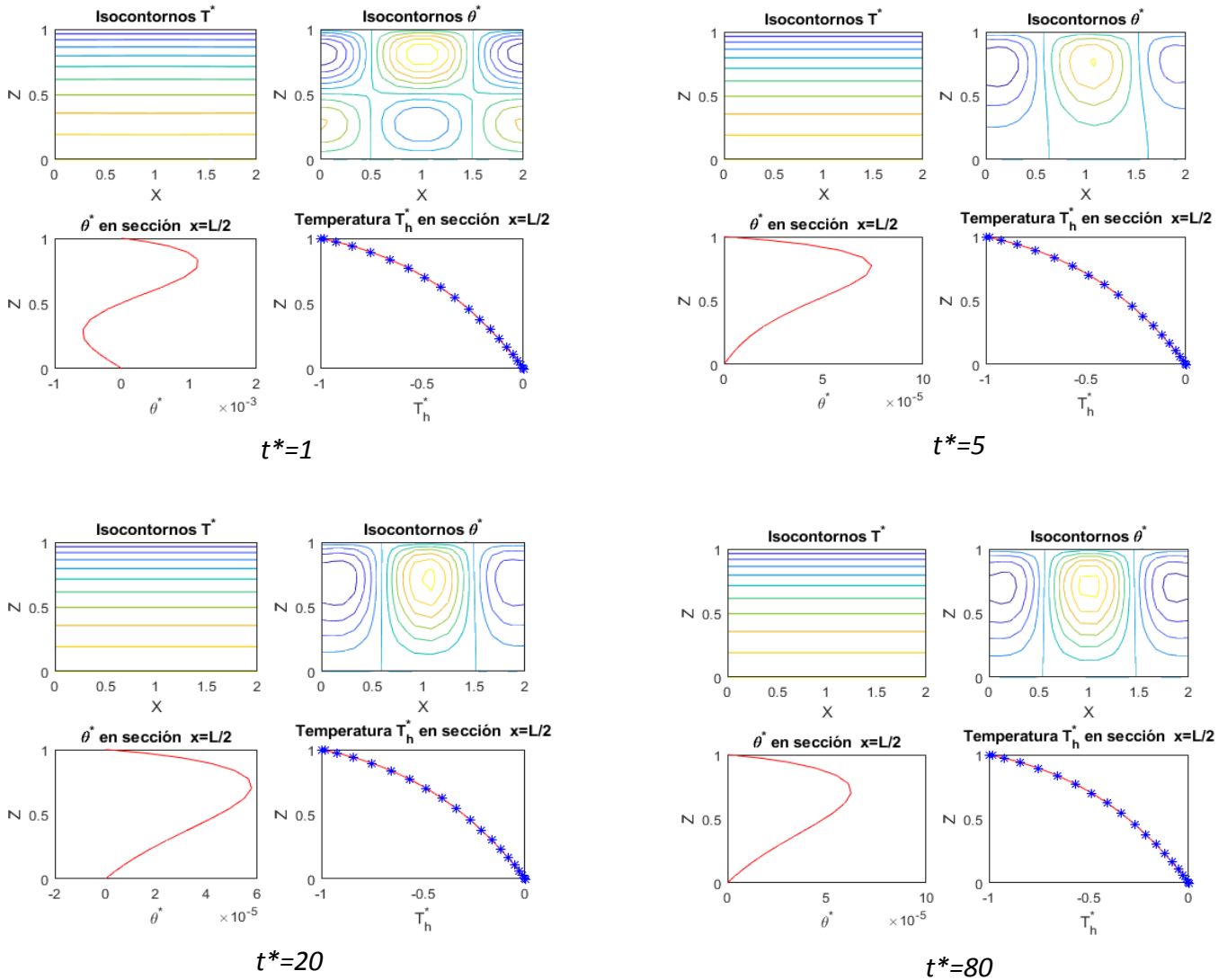


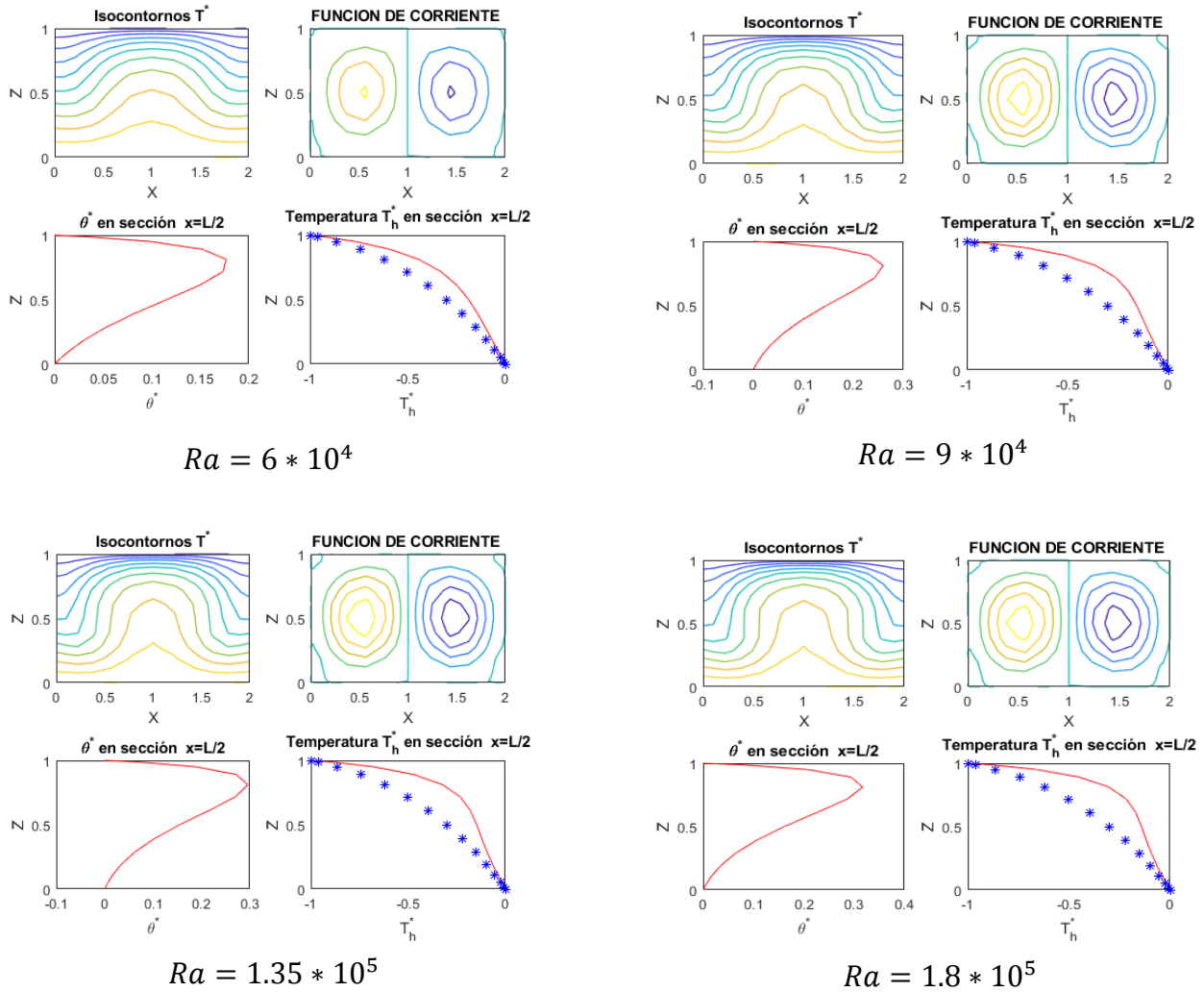
Figura 4.21 Evolución de Ψ y temperaturas con N_{rc} para $Ra_c = 4.5 \times 10^4$

El procedimiento para encontrar Ra_c ha sido idéntico al del caso sin radiación. En cuanto a la función de corriente se ha partido de la perturbación inicial en la que se forman más de 2 células pequeñas y con el tiempo se ha llegado a las 2 celdas de convección características de la configuración. Se debe tener en cuenta que al añadir una perturbación térmica inicial no se parte de las mismas condiciones de estado que en el caso sencillo sin radiación en el que se anuló la perturbación en θ^* y solo se le aplicó a la función de corriente. A pesar de ello se llega a la misma configuración estacionaria con la circulación del fluido formando rollos convectivos.

Se ha representado características más detalladas en cuanto a temperaturas. Entre ellas se puede observar la evolución de θ^* , que al estar próximo a la situación estable, se ve cómo se amortigua con el tiempo (se ve más claro en la línea roja que es el perfil de θ^* en la sección media del recinto). Además, si esto sucede, eso quiere decir que el perfil de variación de temperaturas T^* tiende a la distribución de equilibrio hidrostática T_h^* , con lo que es otro indicador que puede avisar de la transición a la inestabilidad en el problema.

En cada gráfica hay en la esquina inferior derecha una línea roja que representa $T^* = T_h^* + \theta^*$ y un conjunto de asteriscos azules que forman la distribución de T_h^* . Esas temperaturas se corresponden con las de la sección media del recinto, es decir, para $x=L/2$.

A continuación, se muestran ejemplos de casos inestables, por lo que se eleva a Ra más elevados.



Figuras 4.22 Distribución de Ψ , T^* en estado estacionario para $N_{rc} = 1$

En la situación inestable se puede notar como θ^* va aumentando su magnitud hasta que alcanza valores apreciables frente a los del equilibrio. Por otra parte, se llega a una distribución de líneas isotermas de T^* que comparte un parecido con la que se mostró para el caso sencillo sin radiación.

Lo que se deduce de estas gráficas y resultados es que la radiación contribuye a la estabilidad del problema, con lo cual, se hace más difícil alcanzar el estado inestable. Es por ello que salen Ra críticos bastante mayores comparados con el caso sin radiación. Se necesita de mayor energía para poder perturbar lo suficiente el fluido y de esa forma conseguir una circulación con células de convección.

Hay una idea que se puede deducir y que ya se preveía al analizar estas gráficas. Resulta que hay 2 tendencias:

- La convección tiene la intención de mezclar los perfiles de temperaturas de tal forma que se homogeneiza la distribución en cada sección. Por ejemplo, en la sección media hay un tramo hasta $z^* \sim 0.7$ en el que T^* posee una pendiente más vertical y esto es debido a la existencia de la convección. Este detalle se ve al aumentar Ra (hay mayor intensidad de convección) ya que cada vez este tramo es más vertical y el máximo de θ^* también sube. La convección tiene una propiedad homogeneizadora.
- Por otro lado, la radiación tiende a hacer lo opuesto a lo anterior. La transferencia de calor por radiación consigue disminuir el movimiento del fluido, por lo que la convección influye cada vez menos (mezcla menos relevante) al aumentar N_{rc} y la temperatura T^* se aproxima más a la distribución de equilibrio T_h^* . La radiación posee un carácter estabilizador por lo que los Ra_c son mayores.

Estos resultados se han obtenido para el caso particular de $N_{rc} = 1$, pero se puede probar a analizar la influencia de este parámetro de forma más globalizada. Para ello se han conservado las propiedades geométricas del recinto (la relación de aspecto $A=2$) y se ha analizado la variación de Ra_c frente a N_{rc} llegando al siguiente resultado.

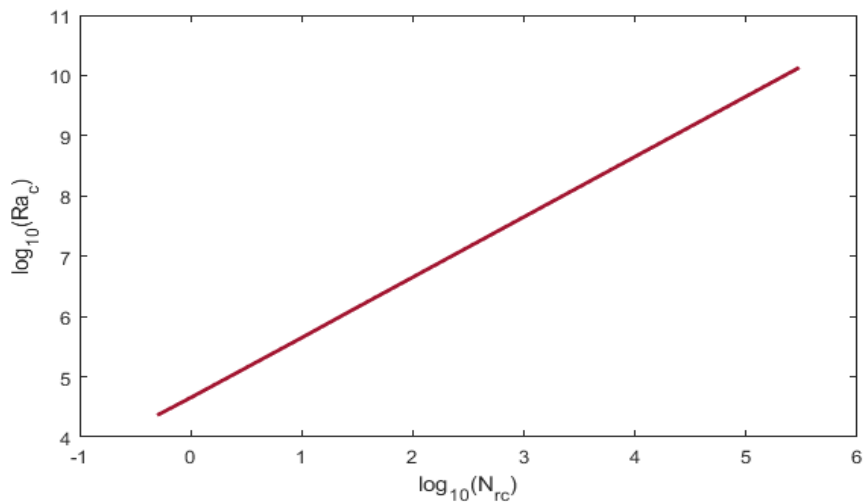


Figura 4.23 Ra crítico en función de N_{rc} en escala logarítmica

N_{rc}	Ra_c
0	2013
0.5	$2.3 * 10^4$
1	$4.5 * 10^4$
10	$4.45 * 10^5$
30	$1.35 * 10^6$
300	$1.35 * 10^7$
$3 * 10^3$	$1.35 * 10^8$
$3 * 10^4$	$1.35 * 10^9$
$3 * 10^5$	$1.35 * 10^{10}$

Se ha incluido una tabla con los valores necesarios y se han representado en una gráfica con escala logarítmica para mejor comprensión visual.

La idea que se obtiene de este proceso, es que al aumentar el nivel de radiación presente en el movimiento del fluido influye bastante a la estabilidad fortaleciéndola y dificultando que los efectos de las perturbaciones iniciales sean relevantes a lo largo del tiempo. Comparando con los resultados sacados de la literatura se puede ver que los resultados son similares. Se adjunta una gráfica sacada de un artículo de un estudio meteorológico que trata sobre la transferencia de radiación en la convección por celdas. En ella se muestra los efectos de varios parámetros en el Ra_c . Estos parámetros son λ (para valores grandes se llega a la aproximación opaca, que es la que nos interesa) y χ (parámetro similar al de radiación-convección pero de distinta magnitud).

Se ha obtenido una relación entre χ y N_{rc} de la siguiente forma:

$$\chi = \frac{16\sigma T_1^3}{3\beta\rho_0 c_p \alpha} = \frac{CT_1^3 (T_1 - T_2)^3}{K (T_1 - T_2)^3} = \frac{4N_{rc}}{(1 - (T_2/T_1))^3} \rightarrow N_{rc} = \frac{(1 - \theta_2)^3}{4} \chi \quad (4.8)$$

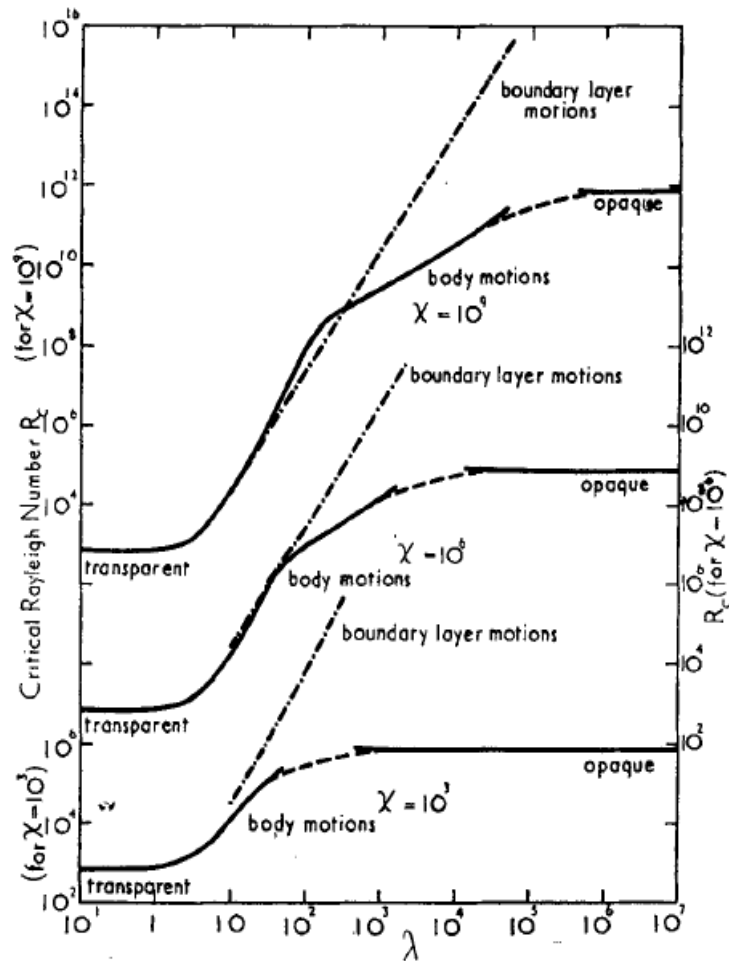


Figura 4.24 N^o Ra crítica para varios λ , χ según los resultados computacionales de R. M. Goody realizados en 1956

4.2.2 Relación de aspecto y Ra_c

El parámetro A, tal y como se analizó en apartados anteriores, influye en el número de celdas convectivas y en el Ra_c . Se representa el caso de convección con $N_{rc} = 1$ y $Ra = 6 \cdot 10^5$ (bastante superior al valor crítico de inestabilidad) en un recinto con proporciones de $A=3$.

Análogamente al caso sencillo sin radiación, el aumento de A da lugar a nuevas formas de convección (se observan 3 células de convección que se forman con el tiempo) como se puede ver reflejados en la figura posterior:

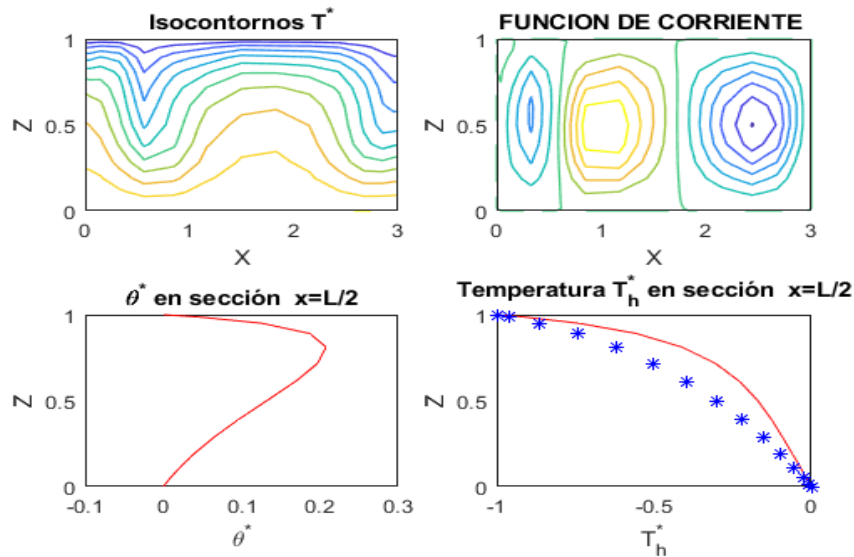


Figura 4.25 Estado estacionario para el caso de $A=3$ con radiación

Al tratarse de un caso inestable, θ^* no se atenúa con el tiempo, sino que hace lo opuesto y crece en magnitud hasta alcanzar valores apreciables que se notarán en la distribución de temperaturas T^* . Además se puede observar el efecto de la convección al homogeneizar las temperaturas con z^* (la curva roja de la esquina inferior derecha se verticaliza ligeramente) al aplicar Ra bastante más alto que el valor crítico. Se cumple la idea a la que se llegó anteriormente al ver que se forma un mayor número de circuitos de convección al aumentar la dimensión horizontal de la cavidad ya que de esta forma existe más espacio para que se favorezca el desarrollo de estos rollos.

En este apartado se realizará un procedimiento similar al que se ejecutó en el apartado anterior pero se añade otra variable dependiente que es N_{rc} . Se muestran a continuación unas gráficas en las que se ve la relación entre A y Ra_c crítico para 2 valores de N_{rc} .

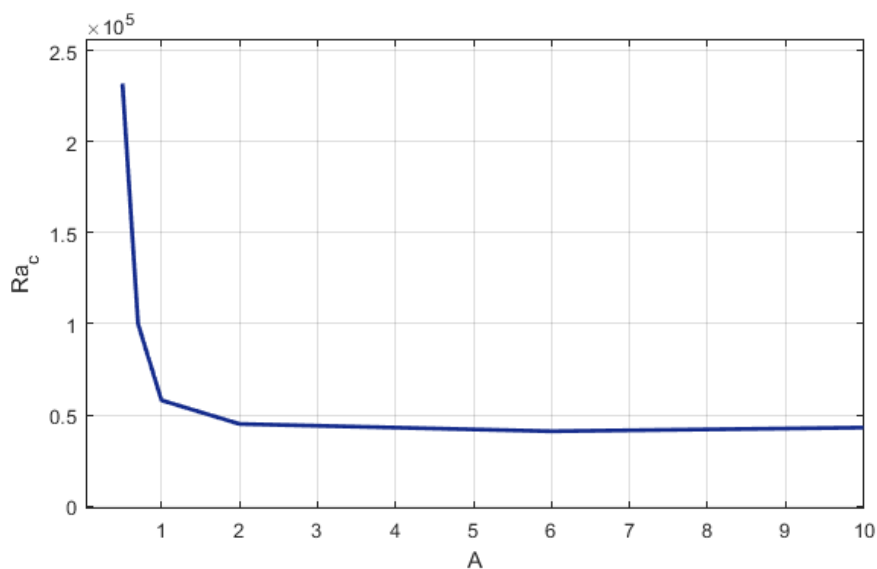


Figura 4.26 Función de Ra_c frente a A para $N_{rc}=1$. Tiene asíntota horizontal en torno a $Ra_c = 4.5 \times 10^4$

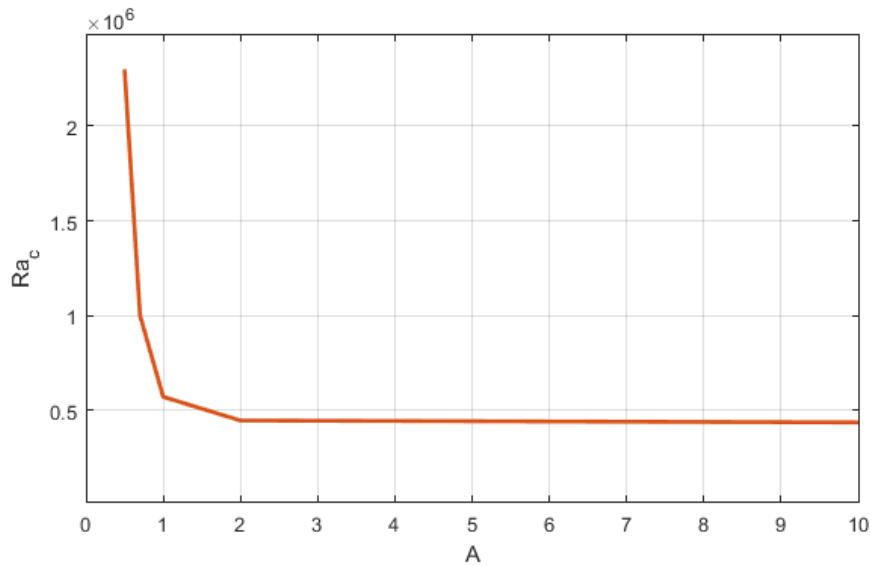


Figura 4.27 Función de Ra_c frente a A para $N_{rc}=10$. Tiene asíntota horizontal en torno a $Ra_c = 4.5 \cdot 10^5$

Adicionalmente a estas figuras también se puede ver en apartados previos esta función para $N_{rc}=0$, que se corresponde con el caso de convección libre sin radiación. La idea que se obtiene de estas gráficas es que a medida que se aumenta la distancia que separa las paredes verticales de la cavidad, el fluido tiene más facilidad para desestabilizarse y formar circuitos convectivos mientras que para recintos estrechos es más complicado y se requiere de Ra más altos para llegar a mover el fluido debido a la gran influencia de la condición de rigidez en las paredes del contorno que se encuentran a poca distancia.

También se puede apreciar que el aumento de N_{rc} favorece a la estabilidad en el recinto y se dificulta la aparición de inestabilidades en la circulación del aire.

4.2.3 Número de Nusselt

Para este apartado se calculará primero la fórmula para Nu promedio, que indica la importancia relativa entre la transferencia de calor desde la altura de una superficie caliente (la inferior a T_1) cuando se produce la convección con radiación del fluido en el recinto y en la situación de equilibrio donde no hay movimiento fluido.

$$Nu(x) = \frac{-((K + CT^3) \frac{\partial T}{\partial z})_{z=0}}{-((K + CT_e^3) \frac{\partial T_e}{\partial z})_{z=0}} \quad (4.9)$$

Esta es la definición de la que se parte y a partir de ahí se obtiene el Nu local

$$-K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = -K \frac{T_1 - T_2}{H} \frac{\partial}{\partial \eta} (T_h^* + \theta^*)_{\eta=0} \quad (4.10)$$

$$-K \left(\frac{\partial T_e}{\partial z} \right)_{z=0} = -K \frac{T_1 - T_2}{H} \frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (4.11)$$

$$Nu(x^*) = \frac{\left(\frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}}{\left(\frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}} \quad (4.12)$$

Lo siguiente será obtener el Nu promedio usando las siguientes expresiones para obtener los calores transferidos desde $z^*=\eta=0$ por unidad de tiempo y longitud

$$Q_p = \int_0^L - \left((K + CT^3) \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} dx = -(K + CT_1^3)(T_1 - T_2) \int_0^A \left(\frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} dx^* \quad (4.13)$$

$$Q_{p,0} = \int_0^L - \left((K + CT^3) \frac{\partial T_e}{\partial z} \right)_{z=0} dx = -(K + CT_1^3)(T_1 - T_2) \int_0^A \left(\frac{\partial T_h^*(\eta)}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} dx^* \quad (4.14)$$

$$= -(K + CT_1^3)(T_1 - T_2) A \left(\frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}$$

$$\overline{Nu} = \frac{Q_p}{Q_{p,0}} = \frac{1}{A \left(\frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}} \int_0^A \left(\frac{\partial T_h^*}{\partial \eta} + \frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} dx^* \quad (4.15)$$

Con esta fórmula se puede implementar en el código de convección natural con radiación tras obtener la distribución de θ^* y con la T_h^* que ya era conocido.

En primer lugar, se representan curvas de Nu en función de Ra para varios valores de N_{rc} para una relación de temperaturas de $T_2/T_1 = 0.5$ y $A=2$

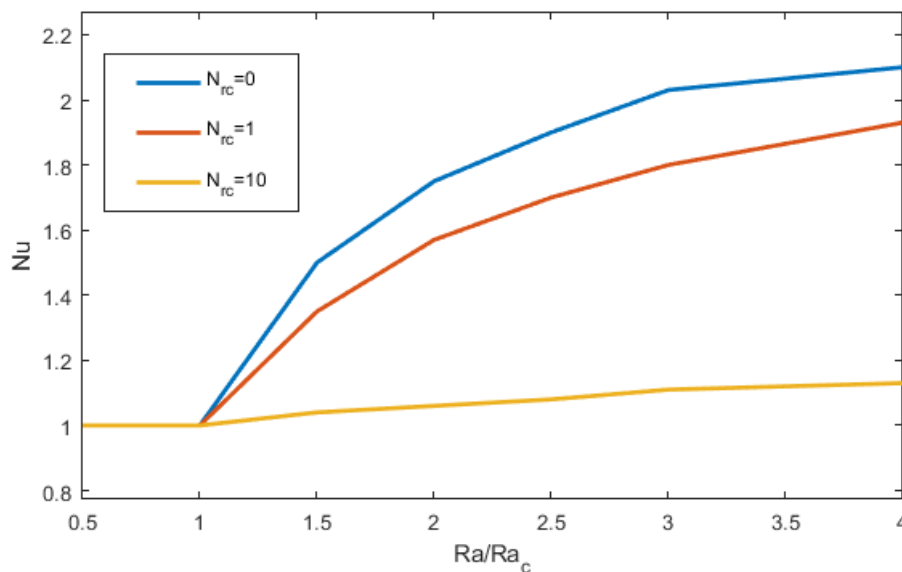


Figura 4.28 Función de Nu frente a Ra para varios N_{rc} con $T_2/T_1 = 0.5$

El Ra_c para estos valores de N_{rc} utilizados son:

N_{rc}	Ra_c
0	2013
1	$4.5 * 10^4$
10	$4.45 * 10^5$

El aumento del parámetro de radiación-convección reduce el crecimiento de Nu cuando se eleva Ra. La radiación colabora en la estabilidad dentro del movimiento fluido y las temperaturas en el recinto se aproximan cada vez más a las de equilibrio. Este efecto es superior al de la tendencia de Ra a aumentar Nu (para N_{rc} elevados) con las altas intensidades de convección como se puede apreciar en la figura anterior.

Se decide ver adicionalmente la influencia de la relación entre las temperaturas de la pared superior e inferior fijando $N_{rc} = 1$.

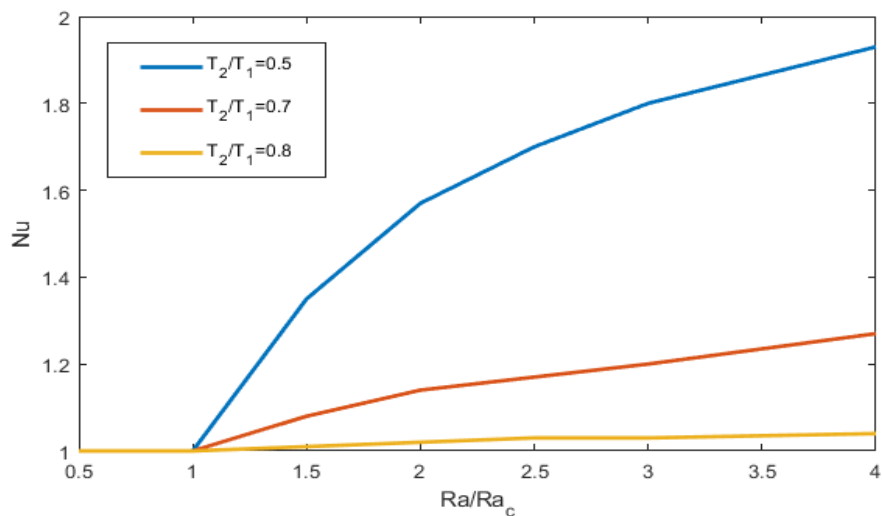


Figura 4.29 Función de Nu frente a Ra para varios T_2/T_1 con $N_{rc} = 1$

Los Ra_c críticos que se han usado para este $N_{rc}=1$ según las temperaturas son:

T_2/T_1	Ra_c
0.5	$4.5 * 10^4$
0.7	$2.2 * 10^5$
0.8	$7.9 * 10^5$

De la gráfica anterior se saca la conclusión de que al acercar los valores de temperaturas de paredes entre sí (al aumentar T_2/T_1), Nu crece cada vez menos al aumentar Ra . Esto sucede debido a que la fuerza que se produce por el gradiente térmico se atenúa por lo que la circulación se debilita y se complica mantener en movimiento el fluido del recinto (afecta a θ^*). El fenómeno es similar al del caso anterior pero aquí se han modificado la relación de temperaturas mientras que en el otro caso se aumentó la intensidad de radiación.

4.2.4 Tiempo estacionario

Se procede a recopilar los tiempos de alcance al régimen estacionario de la misma forma que en el caso sin radiación para un recinto con relación de aspecto $A=2$ y con relación de temperaturas $T_2/T_1 = 0.5$ y para distintos valores del parámetro N_{rc} . El resultado es el siguiente:

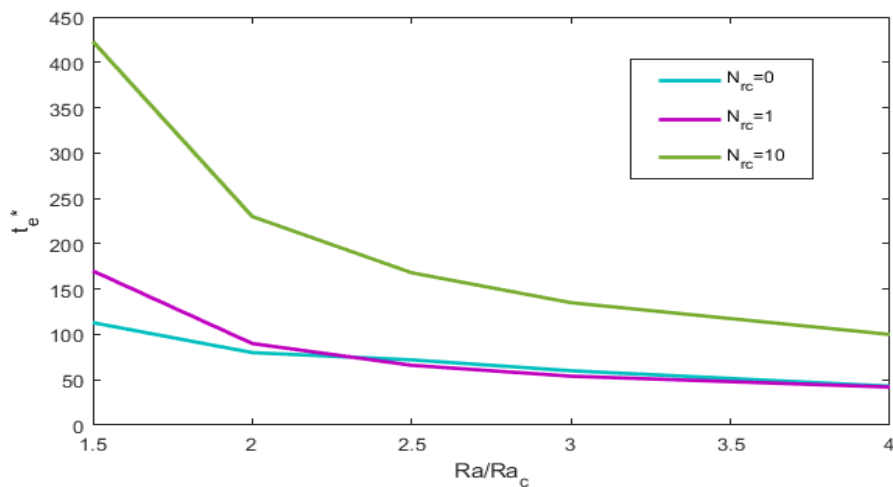


Figura 4.30 Función del tiempo estacionario frente a Ra para varios N_{rc} con $T_2/T_1 = 0.5$

También se ha optado por averiguar el efecto al realizar variaciones de temperaturas. Para este caso $N_{rc}=1$. Se llega a lo siguiente:

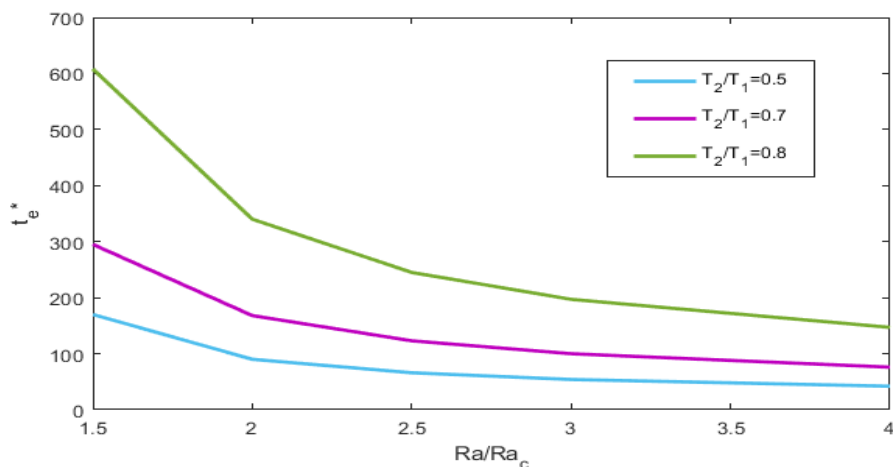


Figura 4.31 Función del tiempo estacionario frente a Ra para varios T_2/T_1 con $N_{rc} = 1$

El aspecto de las gráficas es lógico ya que al aumentar la intensidad de radiación tarda más tiempo en llegar al régimen estacionario debido a la propiedad estabilizadora que posee la radiación. También se menciona que al aumentar la relación de temperaturas entre paredes, es decir que se acercan sus valores, se dificulta la progresión hacia un estado estacionario debido a la poca fuerza por gradiente térmico que se genera en este recinto.

5 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

El objetivo principal de este trabajo ha sido analizar el efecto de la radiación en el fenómeno de convección natural de Rayleigh-Bénard de un fluido como medio participativo en un recinto rectangular bidimensional que fluye formando células convectivas. Se ha considerado las condiciones de paredes verticales adiabáticas y horizontales con temperaturas impuestas (siendo la inferior la más caliente), además de ser rígidas.

En el capítulo 2 se planteó el escenario del problema. Luego se asimiló una serie de hipótesis que daban lugar al tratamiento de un problema más asequible, llegando de esta forma a la aproximación de Boussinesq. En primer lugar, se investigó y se planteó el modelo de flujo de calor por radiación que se obtiene a partir de asumir la aproximación *optically thick*. Lo siguiente es plantear el cálculo de las temperaturas de equilibrio del problema. Luego se formula el problema de convección incluyendo el término del flujo de calor por radiación mencionado. A partir de ahí se desarrollan las ecuaciones de Navier-Stokes, y se aplica la adimensionalización pertinente con la que se llega a las ecuaciones de Saltzman (aparecen parámetros como son Pr y Ra , con el que se determina la intensidad de convección) con presencia de radiación. También aparece el parámetro de radiación-convección N_{rc} con el que se puede manejar la intensidad de radiación que se desea considerar.

En el capítulo 3 se elige una metodología frecuentemente usada para este tipo de estudios numéricos como es el método de colocación (en el apéndice viene explicado) que trata de usar las funciones interpolantes de Lagrange para adaptar las ecuaciones finales y permitir implementarlas en unos sencillos códigos de MATLAB con los que se puede proceder a la resolución numérica del problema de convección natural con radiación. Se usa un mallado espacial de la cavidad en nodos que siguen una distribución típica de los nodos de Chebyshev, mejorando la eficiencia del método. Se discretizan las ecuaciones y se particularizan para instantes de tiempo determinados para más tarde organizarlas y formar un sistema matricial cuya resolución permite obtener los campos de las variables incógnitas, que evolucionan a medida que va pasando el tiempo de simulación.

Finalmente, en el capítulo 4 se muestran los resultados que se obtienen tras realizar simulaciones con los códigos planteados. Se van a tratar varias configuraciones (variando Ra , A , N_{rc} , T_2/T_1 , etc.) para realizar varios objetivos: encontrar un valor crítico de Ra que limita la convección de forma estable e inestable, el cálculo del número de Nusselt que describe la importancia de la convección y radiación en la transferencia de calor a la altura del contorno inferior frente a la situación de equilibrio, describir la influencia de la relación de aspecto del recinto en Ra_c y en el número de células de convección que se forman, los tiempos de alcance del régimen estacionario. En primer lugar, se comprobó los resultados para el caso sencillo sin radiación y si se realizan comparativas con otros trabajos que tratan sobre este caso sencillo, se deduce que estos resultados son buenos. Por otro lado, se ha observado que la presencia de la radiación en el problema añade una estabilización al movimiento del fluido que dificulta, en general, la circulación y es por ello que Ra_c llega a valores más elevados para conseguir llegar a la inestabilidad. En

cuanto al Nu , se puede deducir que la influencia de θ^* es cada vez menor ya que se amortigua con el aumento de N_{rc} , por lo que Nu decrece. También se observó que al aumentar A , el valor crítico de Ra se reduce porque al haber más espacio el fluido tiene más libertad para formar los rollos convectivos y en mayor cantidad. Por último, en referencia a los tiempos estacionarios, se aprecia un aumento considerable al elevar la intensidad de radiación o también al aumentar T_2/T_1 .

Existe una gran cantidad de posibles trabajos destinados a realizarse en el futuro. Uno de ellos puede ser la extensión a un problema tridimensional ya sea en una cavidad con sección rectangular o circular u otras características geométricas. Otro ejercicio podría ser aplicar la aproximación opuesta a la de un medio opaco: *optically thin* o transparente. El problema con otras condiciones de contorno en las paredes del recinto también es una interesante opción. Por otra parte, se puede plantear un régimen turbulento en el problema de convección natural por lo que habría que aplicar unos valores muy altos de Ra . Un trabajo interesante sería generalizar este estudio para analizar el comportamiento en la estructura interna de una estrella como puede ser el Sol. En las estrellas es perfectamente aplicable la aproximación opaca, por lo que se podría realizar un análisis a gran escala para ver cómo fluye la energía en el interior de las estrellas mediante convección y radiación.

APÉNDICE

A. Método de colocación para problemas con una variable mediante interpolantes de Lagrange

En este apartado se va a explicar la metodología que se empleará para la resolución numérica de las ecuaciones de la convección natural de Rayleigh-Bénard con radiación. Se le denomina el *método de colocación*. Este método consiste en expresar las incógnitas como combinaciones lineales de funciones conocidas, que pueden ser obtenidas con el método de Lagrange.

Se considera una función $f(x)$ como incógnita, de la cual conocemos N valores $f_1, f_2 \dots f_N$ asociados a N puntos que pertenecen a un intervalo $[a,b]$, tal que $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$.

Se introduce unos polinomios interpolantes de Lagrange tal que:

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i=1 \dots N \quad (\text{A.1})$$

Esta expresión tiene la siguiente propiedad $L_i(x_j) = \delta_{ij} ; \forall i, j = 1 \dots N$

La derivada de esta función $L_i(x)$ se calcula de la siguiente forma:

$$L'_i(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_N)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_N)} \quad (\text{A.2})$$

De esta forma el polinomio de Lagrange se expresa como:

$$p(x) = \sum_{i=1}^N f_i L_i(x) \quad \text{coincidiendo con } f(x) \text{ en los puntos } x_i$$

A partir de este polinomio se puede tener la función de la derivada de $f(x)$ en los nodos x_i

$$\vec{f}'(x_i) = \sum_{j=1}^N f_j L'_j(x_i) \rightarrow \vec{f}' = \mathbf{L}_p \cdot \vec{f} \quad (\text{A.3})$$

La matriz \mathbf{L}_p se determina calculando las derivadas de las funciones $L_i(x)$. Análogamente se puede obtener la función de la derivada segunda:

$$\vec{f}'' = (\mathbf{L}_p \cdot \vec{f})' = \mathbf{L}_p (\mathbf{L}_p \cdot \vec{f}) = \mathbf{L}_p^2 \cdot \vec{f} \quad (\text{A.4})$$

En cuanto a la elección de los nodos para la función incógnita, se han de escoger unos puntos, que a priori parecen arbitrarios, pero es importante la elección adecuada de estos nodos para lograr una buena aproximación de $f(x)$. Si no se hace esto bien se llegará a observar que existe una desviación considerable entre la función calculada y la real en los puntos no pertenecientes a los nodos.

Pues según un investigador llamado Chebyshev, la elección óptima de los nodos debe coincidir con los ceros del polinomio, que vienen definidos por esta fórmula:

$$x_i = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} \cos \left[\frac{\pi(i - 1)}{N - 1} \right] \quad (\text{A.5})$$

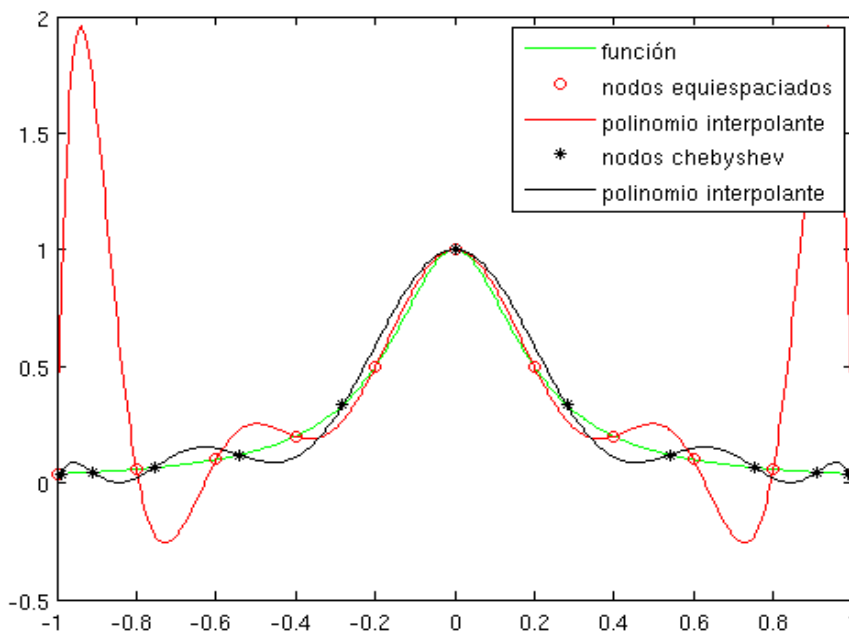


Figura A.1 Polinomios con diferentes elecciones de nodos

B. Método de colocación para problemas bidimensionales mediante interpolantes de Lagrange

En este apartado se va a centrar en nuestro caso, que se trata de un problema en un recinto rectangular bidimensional. Es necesario extender el método de aplicación anteriormente visto a 2 variables independientes x, z .

En las ecuaciones de Saltzman aparecen derivadas de primer orden, de segundo (laplaciano) y de cuarto orden (biarmónica), por lo que se verá una manera de tratarlas para obtener la solución. Se supone una función con 2 variables $\phi = \phi(x, z)$, definida en una cavidad rectangular tal que $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z \leq H$. Se tiene un conjunto de $N_x \times N_z$ nodos: $\{(x_m, z_n) : m=1 \dots N_x, n=1 \dots N_z\}$.

$$\phi(x, z) = \sum_{m=1}^{N_x} L_{xm}(x) \phi(x_m, z) = \sum_{N=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L_{xm}(x) L_{zn}(z) \phi(x_m, z_n) \quad (\text{B.1})$$

$\phi(x_m, z_n)$ representa el valor de la función ϕ en los nodos (x_m, z_n) , mientras que $L_{xm}(x)$, $L_{zn}(z)$ son las funciones interpolantes en las variables x, z .

$$L_{xm}(x) = \prod_{j=1, j \neq m}^{N_x} \frac{x - x_j}{x_m - x_j} \quad L_{zn}(z) = \prod_{j=1, j \neq n}^{N_z} \frac{z - z_j}{z_n - z_j} \quad (\text{B.2})$$

Las expresiones para las derivadas parciales con respecto a x, z de la función ϕ son:

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L'_{xm}(x) L_{zn}(z) \phi(x_m, z_n) \quad (\text{B.3})$$

$$\phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L_{xm}(x) L'_{zn}(z) \phi(x_m, z_n) \quad (\text{B.4})$$

La elección de los nodos en el caso bidimensional es muy relevante. Por lo tanto, se escogen los nodos de Chebyshev en la dirección x, z :

$$x_i = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \frac{x_{min} - x_{max}}{2} \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{N_x - 1} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$z_j = \frac{z_{max} + z_{min}}{2} + \frac{z_{min} - z_{max}}{2} \cos \left[\frac{(j-1)\pi}{N_z - 1} \right] \quad (\text{B.6})$$

En el siguiente esquema se representa la forma en la que se realiza el mallado de la cavidad del recinto rectangular del problema de convección.

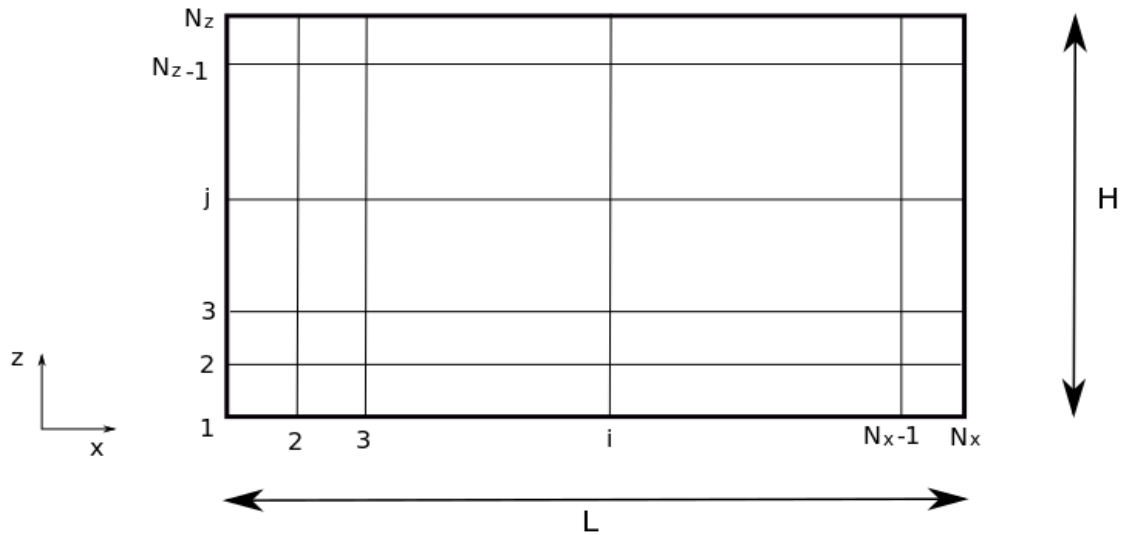


Figura B.1 Mallado de la cavidad rectangular

Una forma de referirse a un nodo en concreto es usando un vector con dimensión $N_T = N_x \times N_z$ con un índice I tal que $(x_i, z_j) \rightarrow I = (i - 1) \cdot N_z + j$

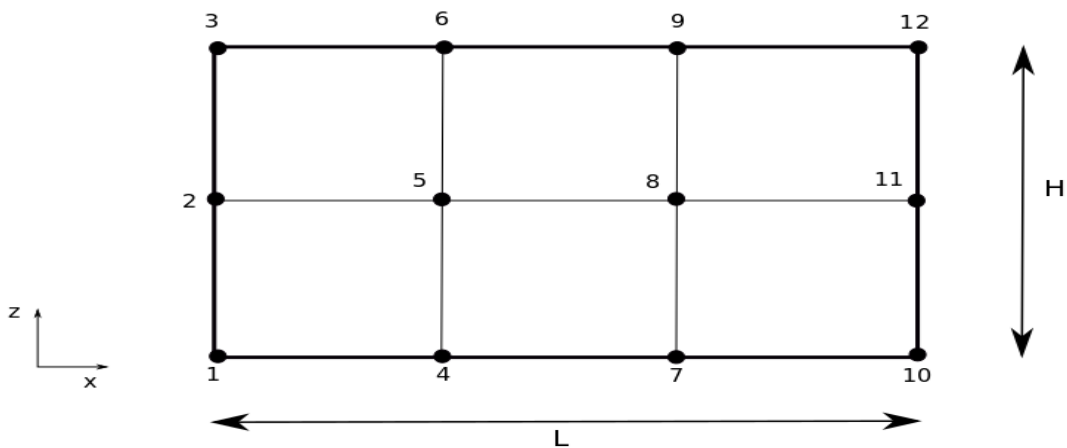


Figura B.2 Ejemplo de enumeración de nodos para $N_x=4$, $N_z=3$

Los productos de matrices de interpolantes de Lagrange y las derivadas se pueden expresar en forma de otras matrices D_x , D_z con dimensiones $N_T \times N_T$.

$$D_x(I, K) = L'_{xm}(x_i) L_{zn}(z_j) ; D_z(I, K) = L_{xm}(x_i) L'_{zn}(z_j) \quad I, K=1 \dots N_T \quad (\text{B.7})$$

Siendo $I = (i - 1).N_z + j$, $K = (m - 1).N_z + n$. Ahora se sustituyen las matrices en las expresiones de las derivadas parciales de ϕ :

$$\phi(I) = (i - 1)N_z + j ; I = 1 \dots N_T \quad (\text{B.8})$$

$$\phi_x(I) = \sum_{K=1}^{N_T} D_x(I, K) \phi(K) ; \phi_z(I) = \sum_{K=1}^{N_T} D_z(I, K) \phi(K) \quad (\text{B.9})$$

Análogamente se calculan las derivadas parciales de segundo orden:

$$\phi_{xx}(I) = \sum_{K=1}^{N_T} D_x(I, K) D_x(I, K) \phi(K) ; \phi_{zz}(I) = \sum_{K=1}^{N_T} D_z(I, K) D_z(I, K) \phi(K) \quad (\text{B.10})$$

Con estas expresiones, se puede obtener la del laplaciano y la biarmónica.

$$\nabla^2 \vec{\phi} = \overrightarrow{\phi_{xx}} + \overrightarrow{\phi_{zz}} = (D_x^2 + D_z^2) \cdot \vec{\phi} = Lap \cdot \vec{\phi} \quad (\text{B.11})$$

$$\nabla^4 \vec{\phi} = \overrightarrow{\phi_{xxxx}} + 2\overrightarrow{\phi_{xxzz}} + \overrightarrow{\phi_{zzzz}} = (D_x^4 + 2D_x^2 D_z^2 + D_z^4) \cdot \vec{\phi} = Lap^2 \cdot \vec{\phi} \quad (\text{B.12})$$

Lap también es equivalente a DL , como se verá en las expresiones de la memoria.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] *El Método de Colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard*, autor: **Pablo José Ruiz Contreras**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2013.
- [2] *Convección natural de Rayleigh-Bénard en recintos rectangulares, Mecánica de Fluidos Avanzada*, **Carlos Morales Pérez**
- [3] *Numerical study of one-dimensional unsteady radiation problems with applications to the thermal structure of planetary lower atmospheres*, autor: **Adrián Carriba Merino**, tutor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2019
- [4] *Procesos de convección natural con hipótesis anelástica*, autor: **Eduardo M. García Juárez**, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2014
- [5] *Análisis de la influencia de la radiación térmica en los procesos de convección de Rayleigh-Benard*, autor: **Ángel Enrique Boyer Varela**, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**, 2018
- [6] *Notas de la clase de convección natural, Mecánica de Fluidos Avanzada*, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**
- [7] *Notas de clase de integración numérica de ecuaciones de Saltzman, Mecánica de Fluidos Avanzada*, autor: **Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor**
- [8] *The influence of radiative transfer on celular convection*, autor: **R. M. Goody**, 1956
- [9] *Thermal radiation heat transfer, 5th Edition*, cap 12, autores: **John R. Howell, Robert Siegel, M. Pinar Mengüç**
- [10] *The effects of termal radiation on dry convective instability*, autor: **Vincent E. Larson**, 2001
- [11] *Fundamentals of atmospheric physics*, autor: **Murry L. Salby**, 1996
- [12] https://es.qwe.wiki/wiki/Rayleigh%E2%80%93B%C3%A9nard_convection
- [13] *Simulación numérica de convección natural en régimen turbulento*, autor: **Ángel Santamaría Gómez**, tutora: **Inmaculada Iglesias Estradé**, 2016
- [14] <https://www.comsol.com/blogs/4-methods-to-account-for-radiation-in-participating-media/>
- [15] *Implementation of the Rosseland and the P1 radiation models in the system of Navier-Stokes equations with the boundary element method*, autores: **PETER CRNJAC, LEOPOLD ŠKERGET, JURE RAVNIK & MATJAŽ HRIBERŠEK**, 2017
- [16] https://es.wikipedia.org/wiki/Radiaci%C3%B3n_t%C3%A9rmica
- [17] https://es.wikipedia.org/wiki/Equilibrio_t%C3%A9rmico_de_la_Tierra
- [18] *Hydrodynamic instability and transition to turbulence*, cap 2 autor: **Akiva M. Yaglom**, 2012