Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Civil - Hidrología

Aplicación de la teoría de juegos a la gestión de centrales hidroeléctricas y el reparto de aguas en el trasvase Tajo-Segura

Autora: Marta Aragón Martínez

Tutor: Manuel Ordoñez Sánchez

Dpto. Matemáticas Aplicadas II
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Civil

Aplicación de la teoría de juegos a la gestión de centrales hidroeléctricas y el reparto de aguas en el trasvase Tajo-Segura

Autora:

Marta Aragón Martínez

Tutor:

Manuel Ordoñez Sánchez

Dpto. de Matemáticas Aplicadas II

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Grado: Aplicación de la teoría de juegos a la gestión de centrales hidroeléctricas y el reparto de aguas en el trasvase Tajo-Segura

Autora: Marta Aragón Martínez

Tutor: Manuel Ordoñez Sánchez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

Agradecimientos

A mi tutor Manolo, con el que llevo varios años trabajando y gracias al cual no he perdido mi amor hacia las matemáticas.

A Manuel por ayudarme con todo lo que ha podido y más.

Resumen

Se podría sintetizar en dos conceptos los principales objetivos de la construcción de un trasvase: el reparto de agua, con el fin de consumirla en otro punto que se ve más desfavorecido por la falta de esta, y la obtención de energía hidroeléctrica, donde se aprovechan los saltos o el propio curso del agua para construir una central hidroeléctrica y así transformar su energía cinética en energía eléctrica.

El mayor problema que se presenta en el Trasvase Tajo-Segura es que no se aprovechan lo suficiente los recursos a lo largo de Castilla La-Mancha, donde transcurre casi en su totalidad. No existen derivaciones de agua hacia pueblos del alrededor, aunque estos sí pueden disponer de la energía de las centrales hidroeléctricas cercanas. Pero ¿y si la unión de varios jugadores o clientes hiciese que fuese viable aprovechar más y/o mejor los recursos disponibles? Es por esta razón por la que nace este trabajo, el cual se centrará en el objetivo final de optimizar los repartos de costes de energía hidroeléctrica, así como el reparto de las aguas y de su coste, y para ello se utilizará como herramienta la Teoría de Juegos.

La Teoría de Juegos es una herramienta muy potente que se lleva desarrollando desde mediados del siglo pasado. El número de aplicaciones donde se usa ha ido aumentando a la par que se desarrollaba y han sido varios los matemáticos que han expuesto teorías de reparto de costes de energía o agua. No obstante, en este trabajo, a través de la utilización de diferentes conceptos como el núcleo del juego, el valor de Shapley o un juego de costos, se tratará de encontrar la solución a situaciones que se pueden dar en la vida real y, dado en la zona donde se realiza el estudio, estas soluciones podrían ayudar a su desarrollo.

Sin embargo, no es objetivo de este trabajo la resolución de problemas reales, sino que se explicarán situaciones hipotéticas, que se pueden dar en la vida real, en las cuales la aplicación de la Teoría de Juegos lleva a una solución válida de reparto de los costes entre varios jugadores.

Por el hecho de que no sean problemas reales, a la hora del reparto de costes de energía eléctrica se expondrán diferentes soluciones, todas de ellas válidas, para que en el caso de que en la situación real una no sea válida, ya sea por el tipo de jugador o sus preferencias, se pueda llegar al menos a una solución de consenso entre todos.

En el caso del reparto del agua y sus costes se expondrá únicamente una solución con la cual, variando los jugadores o sus preferencias, se podrá llegar a una solución válida para todos ellos.

Abstract

The main objectives of the construction of a transfer could be synthesized in two concepts: the distribution of water, in order to consume it in another point that is more disadvantaged by the lack of it, and obtaining hydroelectric energy, where they are used the waterfalls or the water course itself to build a hydroelectric power station and thus transform its kinetic energy into electrical energy.

Tajo-Segura Transfer presents a big problem, it is that the resources throughout Castilla La-Mancha, where it takes place almost entirely, are not being used enough. There are no water diversions to surrounding towns, although they can dispose the energy from nearby hydroelectric plants. However, what if the union of several players or clients made it feasible to take advantage of more and / or better available resources? It is the reason that this work was born, which will focus on the final objective of optimizing the distribution of hydroelectric energy costs, as well as the distribution of water and its costs. To do this, the Game Theory will be used as a tool.

Game Theory is a very powerful tool that has been developed since the middle of the last century. The number of applications where it is used has been increasing as well. There have been several mathematicians who have exposed theories of distribution of energy or water costs. However, in this work we will try to find solutions to situations that can happen in real life through the use of different concepts such as the core of the game, the value of Shapley or a costs game, and, because of the area of study, these solutions could help its development.

However, the resolution of real problems is not the objective of this work, but hypothetical situations will be explained. The application of Game Theory leads to a valid solution for the distribution of costs between multiple players.

Due to the fact that they are not real problems, different solutions, all of them valid, will presented for the distribution of the electrical energy costs. This have been made in the case that, in a real situation, one of the presented solutions is not valid (because of the players or their preferences), so we have another tries with a different solution that will work perfectly.

In the case of the distribution of water and its costs, only one solution will be presented with which, by varying the players or their preferences, a solution valid for all of them can be reached.

Índice

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

Notación

:	Tal que
$<$	Menor o igual
$>$	Mayor o igual
$\succsim$	Al menos tan aceptable
$\succ$	Más aceptable
$\mathbb{R}$	Número reales
$\emptyset$	Vacío
$\subseteq$	Subconjunto de o igual a
$\backslash$	Backslash
$\Leftrightarrow$	Si y sólo si
!	Factorial

1 MARCO INTRODUCTORIO

1.1. Marco histórico

El agua es un bien básico para la vida. Las primeras civilizaciones se asentaron en zonas cercanas a ella para poder abastecerse, especialmente cerca de cuencas de ríos. Aprovechaban ese agua no solo para beber, sino también para la agricultura y la empleaban como vía de transporte. Pero el crecimiento de las civilizaciones y la necesidad de más agua para la agricultura obligó a ingeniar sistemas de captación y almacenamiento del agua de lluvia que les permitiera subsistir, así como métodos para poder llegar al agua subterránea. Hay indicios de métodos de captación de agua de lluvia en el desierto de Negev hace 4000 años, así como de pequeños pozos del período del Neolítico. [1]

Los romanos le dieron al agua una gran importancia en su vida cotidiana. Ellos están considerados como los primeros ingenieros civiles al abastecer todas sus *civitas*, ciudades, estudiando el movimiento del agua, la conservación de la energía y construyendo grandes acueductos y sifones para su transporte a lo largo de todo el imperio. Además, Vitruvio, un arquitecto e ingeniero romano del siglo I a.C. puso las bases para la explotación de aguas subterráneas. Este explica que para encontrar las aguas subterráneas bastaba con tumbarse en el suelo y observar la evaporación que salía de él. [1]

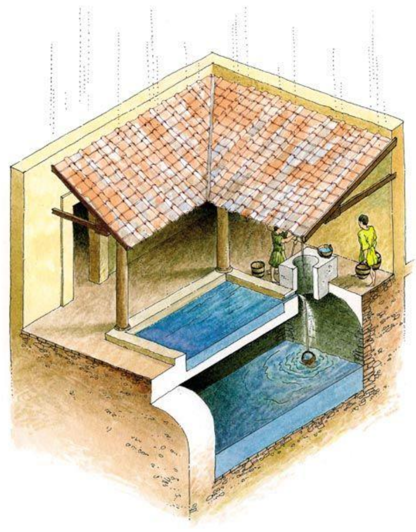


Ilustración 1: impluvium. *(Fuente: Murcia y el agua. Historia de una pasión. Ilustración 12)*

La civilización romana se abastecía principalmente de aguas superficiales de ríos y lagos, pero también captaban aguas de lluvia aprovechando los tejados de las *domus,* las viviendas unifamiliares. Este agua caía hasta el *impluvium*, un estanque de poca altura que se encontraba en el *atrium*, el patio interior de las viviendas, bajo el que se construían cisternas en las cuales se almacenaba el agua y de las que se extraía la necesaria mediante un pozo.

El agua almacenada era de uso propio de la *domus*, cosa que en la civilización árabe estaba prohibido por el Corán, que dice *"todo musulmán que retiene el agua que no necesita peca contra Allah".* La civilización árabe tenía el agua como un bien sagrado. El Corán establecía una serie de normas hídricas, en las cuales se establecía el orden del reparto del agua según el uso, los usuarios y la procedencia de la captación, estableciendo un inicio en la jerarquización del agua. Conforme a estos criterios, los últimos en recibir agua eran los agricultores. Pero lo que no queda claro es si se establecía un precio a esa agua, ya que había dos derechos fundamentales en la ley islámica: derecho al sediento, tanto personas como animales, y derecho al riego. [2]

Algo que caracterizó a la civilización árabe fue la exquisita canalización de sus aguas, tanto de abastecimiento como de saneamiento. El agua se llevaba a los aljibes públicos y se utilizaban acequias para el riego. Aún hoy día queda constancia de gran parte de las canalizaciones árabes.

No fue hasta el siglo XIX cuando Henry Darcy, científico francés, estableció las leyes fundamentales de la filtración del agua a través de los suelos, la *Ley de Darcy*. Hasta ese momento se había estado usando la teoría de Vitruvio para la localización de las aguas subterráneas, por lo que la ley de Darcy marcó un gran avance en la búsqueda de las mismas.

El derecho de la propiedad condiciona tanto la asignación como la distribución de los recursos, pero esto puede favorecer o perjudicar a terceros, por lo que es necesario limitar los derechos sobre los diferentes bienes. En el caso del agua, aparece en 1879 en España la primera ley de aguas, impulsada por la revolución liberal francesa, donde se definen como dominio público hidráulico casi todas las aguas superficiales con el fin de que su uso sea más favorable para la sociedad.

A lo largo del siglo XX hubo un gran desarrollo de las obras hidráulicas al mejorarse los métodos de extracción de aguas subterráneas, lo que conllevó al abaratamiento del coste del agua al haber mayor disponibilidad de esta. Es en la primera mitad de este siglo cuando se introduce la energía hidroeléctrica, lo que da un fuerte impulso en la industria española al carecer de medios para la obtención de energía a los niveles que un gran avance industrial requería.

La ley de aguas de 1879 se deroga en 1985 y es sustituida por otra donde se da una nueva definición al dominio público hidráulico, incluyéndose ahora, además de las aguas superficiales, las aguas subterráneas renovables, cauces de los ríos y lechos, aguas embalsadas, etc. Es necesaria una nueva definición debido a los cambios demográficos y sociales ocurridos a lo largo de los años anteriores, así como los cambios en la industria, la agricultura y la ganadería, que generan un déficit de agua, lo que ha dado lugar a la necesidad de invertir en procesos de reutilización o de economización de ella. Estos cambios provocan que España se encuentre en una economía madura del agua, como dijo Randall en 1981, donde existe una progresiva degradación del agua como consecuencia del uso intensivo que se le está dando, debido también a los conflictos entre los diferentes usuarios. Las necesidades hídricas de la España del momento se reflejaron en la ley de aguas de 1985, que ahora se encuentra renovada en el Real Decreto 1/2001 [3]

El 28 de julio de 2010, la Asamblea General de las Naciones Unidas, aprobó una resolución que reconoce al agua potable y al saneamiento básico como derecho humano esencial para el pleno disfrute de la vida y de todos los derechos humanos. A esto hay que añadirle la cada vez mayor consciencia medioambiental.

1.2. Trasvase Tajo-Segura

El Acueducto del Trasvase Tajo-Segura ha sido, y probablemente es, la obra hidráulica más importante en España. Nace del desequilibrio hidrológico de la zona del Levante y Sureste peninsular, lo cual ha limitado su desarrollo económico y social desde tiempos de Felipe II, cuando ya se pensaba en un trasvase de los ríos Castril y Guardal hacia la zona de Lorca y la cuenca del Almanzora.

Cuando se plantea a principios del siglo pasado la mitigación de dicho desequilibrio hidrológico se realiza el Plan Nacional de Obras Hidráulicas de 1933 en el cual se sugiere el uso de aguas del Tajo y del Ebro para trasvasar. Se presentaron diversas propuestas como el trasvase Tajo-Segura, plan del ingeniero Lorenzo Pardo, o un trasvase de aguas del Ebro a Valencia y luego que parte de las aguas del Turia y Júcar se llevaran a Murcia y Alicante, propuesto por el ingeniero D. Félix de los Ríos. Pero no fue hasta 1960 cuando la Dirección General de Obras Hidráulicas empezó a fomentar los estudios para la corrección del desequilibrio, los cuales concluyeron con la redacción del "Anteproyecto General de Aprovechamiento conjunto de los recursos hidráulicos del Centro y Sureste de España. Complejo Tajo-Segura" a finales de 1967, aprobado finalmente en agosto de 1968.

Para este Anteproyecto se presentaron dos propuestas más, aparte de la del complejo Tajo-Segura. Estas fueron:

- Aprovechamiento Ebro-Pirineo Oriental: de abastecimiento urbano e industrial y, por tanto, de menor prioridad que si fuera abastecimiento agrícola. Esto unido a que Cataluña tenía numerosos embalses proyectados con el fin de cumplir este abastecimiento, se desecha la propuesta.

- Aprovechamiento Ebro-Júcar-Segura: este era un rival para el complejo Tajo-Segura, pero el hecho de que era el Segura el que necesitaba los trasvases de agua de manera más urgente hace que se deseche esta propuesta porque era necesario hacer un doble trasvase, lo que retrasaría el desarrollo de la zona del sureste.

De manera técnica el complejo Tajo-Segura se divide en cuatro tramos en los que se combina el flujo a lámina libre, en canales sobre la superficie o en acueductos, y el flujo a presión. Se indica a continuación la localización de dichos tramos y la ubicación de centrales hidroeléctricas, aspecto importante de este trabajo:

- *Tramo I*: se toman las aguas al pie de la presa del Bolarque (central hidroeléctrica), que forma el contraembalse de los embalses de Entrepeñas (central hidroeléctrica) y Buendía, hasta el embalse de la Bujeda (central hidroeléctrica reversible).
- *Tramo II*: salen las aguas a presión del embalse de la Bujeda hasta llegar al embalse de Alarcón (central hidroeléctrica).
- *Tramo III*: salen las aguas desde el contraembalse de Alarcón hasta la cámara de carga del túnel de Talave. En este tramo cabe destacar el acueducto de Santa Quiteria de más de medio kilómetro de longitud con pilas de hormigón de hasta 30 m de altura.
- *Tramo IV*: se trata de un túnel en carga hasta que lo entrega en el embalse del Talave y luego las aguas discurren por la Rambla de Talave (central hidroeléctrica del Fontanar). Finalmente, las aguas desembocan en el río Mundo, afluente del Segura.

Ilustración 2: acueducto de Santa Quiteria. *(Fuente: CEDEX "Aprovechamiento conjunto de los recursos hidráulicos del centro y sureste de España. Complejo Tajo-Segura")*

1.1.1 Postrasvase

Lo que hoy día se conoce como postrasvase es toda la red de abastecimiento de agua generada en la zona de Murcia, como se puede observar en la ilustración 3.

Esencialmente el agua del postrasvase es usada para uso agrícola, fin principal de la realización del trasvase, y desde el inicio del funcionamiento del trasvase, hace ya más de 40 años, ha habido disputas de los regantes con el gobierno central respecto a los volúmenes de aguas trasvasadas. El proyecto se desarrolló con el fin de trasvasar 600 hm^3 de agua anualmente, como se especifica en la Ley de Aguas de 1971, sin embargo, apenas se llega a la mitad.

Un problema que tiene el trasvase Tajo-Segura es que las zonas de Castilla La-Mancha no pueden disfrutar del agua que va por esa zona, solo los regantes de la zona del postrasvase. Es por ello por lo que en este trabajo se dan dos perspectivas:

- Desde el punto de vista del aprovechamiento de la energía hidroeléctrica del trasvase, de la cual sí se pueden aprovechar los clientes cercanos.
- Desde el punto de vista de abastecimiento de agua, tanto para uso agrícola como para uso urbano o industrial.

Aunque ambos puntos se desarrollarán de manera teórica, en el caso del aprovechamiento del agua para abastecimiento no es real ni posible en este momento al no existir infraestructuras que lo permitan.

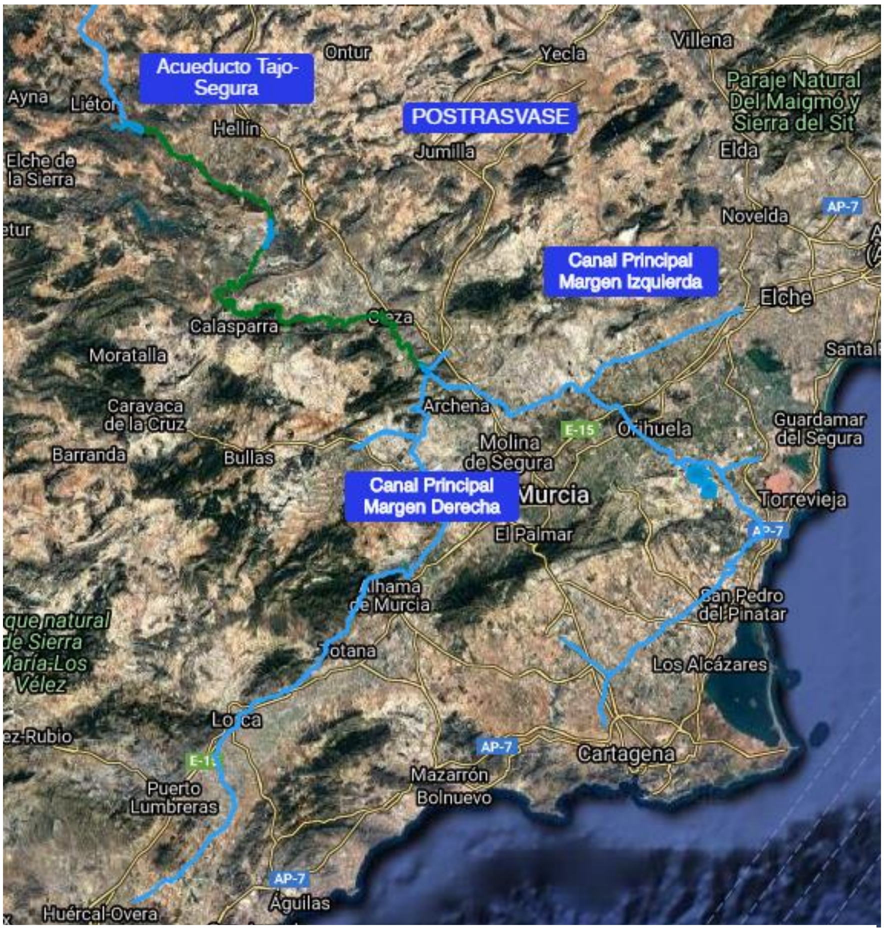


Ilustración 3: ubicación del postrasvase *(Fuente: http://www.scrats.es/mapa-del-trasvase.html)*

1.3. La teoría de juegos en la reasignación de costes

La **Teoría de Juegos** (TJ en adelante) es una de las multitudes ramas de las matemáticas en la cual se aplican una serie de modelos matemáticos con el fin de estudiar distintas situaciones de conflicto y/o cooperación con el objeto de argumentar un conjunto de decisiones de índole económico, generalmente. Desde que nació la TJ a mediados del siglo XX, de mano de von Neumann y

Morgenstern con la publicación de su libro *Theory of games and economic behaviour* en 1944, se ha ido desarrollando paulatinamente hasta la actualidad.

Ilustración 4: John von Neumann (centro) y Oskar Morgenstern (derecha) junto con su libro

Gracias a la TJ es posible modelar cómo las personas deciden e interactúan entre ellas, es por ello por lo que es muy usada en el marco de la economía.

Es posible diferenciar dos ramas principales: la teoría de juegos no cooperativos y la teoría de juegos cooperativos. Con el uso de ambos tipos de juegos se plantea el propósito de solucionar la problemática que ha sido posible vislumbrar en el marco histórico anterior.

En la **Teoría de Juegos Cooperativos** (TJC en adelante) se estudia a una serie de jugadores en un escenario y las diferentes alternativas que surgirían en el caso de cooperar todos, algunos en grupos o no cooperar. El que los jugadores vayan a cooperar o no va a depender de sus propios intereses, con el fin de obtener así el mayor beneficio posible. Esto se consigue a través de la implementación de los **principios de eficiencia, equidad y aceptabilidad**, proporcionando una asignación eficaz de costes comunes. Esta asignación de costes, de los costes del agua y las infraestructuras necesarias para que sea un bien social y económico accesible a todos, es la que se debe ejecutar de la manera más justa posible, con el fin de que exista un beneficio generalizado y es aquí, por tanto, donde entra la TJC.

Dentro de los juegos cooperativos existen dos tipos: los juegos de utilidad transferible o juegos de función característica (denominados TU-games) y los juegos de utilidad no transferible. Es el primer tipo de juego en el que se definen unos beneficios o costes reales en cada grupo de jugadores. Cuando se realiza un juego de utilidad transferible, los jugadores pueden cooperar y, para ello, realizar acuerdos vinculantes sobre dicha cooperación con el objetivo de que no haya problema entre los jugadores. De esta manera todos conocen las reglas del juego y son libres a hacer lo que les sea más provechoso para cada uno de ellos. Autores como Shapley u Owen sostienen que existen condiciones superaditivas, de modo que el interés recae en formar una gran coalición (coalición formada por todos los jugadores).

Existe una gran cantidad de juegos de utilidad transferible, principalmente suelen ser juegos de beneficio o de coste, pero ambos se caracterizan por tener como solución un número real. Según el valor que se les dé a estos números, en función de cómo lo tase cada jugador, serán juegos de beneficio, si el valor de los números es grande, o juegos de coste, si el valor es pequeño. Estos números, beneficios o costes, según quiera verse, se caracterizan por ser completamente transferibles entre los jugadores, es decir, se puede repartir entre ellos. Mientras que, en el caso de los juegos de utilidad no transferible el valor de la cooperación se mide individualmente.

La TJC es una herramienta muy fuerte pero el cálculo de las funciones características lleva consigo una gran optimización, que crece exponencialmente con la cantidad de agentes involucrados, esto lo explicaban von Neumann y Morgenstern en su libro *Theory of games and economic behaviour* (1944), en el cual postulan las bases de la relación de la teoría de juegos y la teoría económica, al comentar:

> *"If the number of participants (...) is increased, something of a very different nature happens. (...) However, to take the simplest cases, a three-person game is very fundamentally different from a two-person game, a four-person game from a three-person game, etc. The combinatorial complications of the problem which is, as we saw, no maximum problem at all increase tremendously with every increase in the number of players"* [4]

Por tanto, el planeamiento teórico de la TJC se basa en que existen una serie de agentes que interactúan por un bien, común entre todos, y del cual pretenden obtener el máximo beneficio individual. Es necesario ver qué jugadores cooperan y por cuánto lo van a hacer para poder obtener una *posible solución* del juego.

Por otro lado, la **Teoría de Juegos No Cooperativos** (TJNC en adelante), como su propio nombre indica, no busca una gran coalición como la existente en los juegos cooperativos, sino que busca una solución para el bien individual de cada jugador, pero que está condicionada por las decisiones del resto de jugadores. Estos suelen ser juegos bipersonales como, por ejemplo, los juegos estratégicos. En estos últimos cada jugador debe elegir una estrategia, teniendo en cuenta que los jugadores no se pueden poner de acuerdo entre ellos para elegir, pero saben qué jugadores juegan y cuáles son todos los posibles resultados de las diferentes tácticas. El objetivo de cada jugador es elegir estratégicamente el resultado que más le convenga, el mejor, teniendo en cuenta sus preferencias y conociendo la posible elección de los otros jugadores.

En los juegos no cooperativos se trata de encontrar **una o más estrategias para cada jugador** y que dé el mejor resultado respetando sus preferencias [5], como ya se ha comentado.

Una solución muy usada es el **Equilibrio de Nash**, desarrollada por John Nash en 1951, en el cual se busca un punto en la solución en el cual los dos jugadores tengan el mejor resultado posible de los que podrían darse. El equilibrio de Nash se explicará más adelante junto al ejemplo de los prisioneros.

Como ya se ha mencionado, los juegos no cooperativos más comunes son los juegos bipersonales (dos jugadores), así como son los **juegos de suma cero**, en los que un jugador gana a cambio de que otros pierdan, y **juegos de suma no nula**, en los que la suma de la ganancia de los jugadores puede variar según las decisiones que realicen individualmente [6].

De modo que es, a través de esa búsqueda de la mejor *posible solución* para cada uno de los jugadores donde se aplicará la reasignación de costes, sabiendo que el resto de los jugadores tomarán aquella decisión que les vaya mejor de manera individual.

1.4. Herramientas de análisis económicos de recursos hídricos.

Las políticas tarifarias que se imponen para la distribución y uso del agua se fundamentan en técnicas de asignación de costes que tiene en cuenta numerosos factores como son la interconexión de elementos del sistema, la variabilidad aleatoria de los propios recursos hídricos, etc. Por lo que **una excesiva simplificación llevaría a una mala interpretación y a errores significativos en los resultados económicos.**

Con el objetivo de intentar optimizar estos costes se decide realizar este trabajo aplicando la TJC, en especial usando juegos de funciones características o de utilidad transferible, para el caso del reparto de la energía eléctrica, y la TJNC, a través de un juego de costos, para el reparto de las aguas. Se realizará una reasignación de costes en dos escenarios distintos y utilizando juegos diferentes:

- Reparto de la energía hidroeléctrica entre diversos jugadores. Para buscar una posible solución se buscará: el *core* o núcleo de la solución, el valor de Shapley y el nucleolo.
- Reparto de aguas para tres jugadores. Para buscar una posible solución se realizará un juego de costos para el reparto de aguas. Esto se trata de un juego no cooperativo.

Los jugadores que se tendrán serán de tres tipos:

- Agricultores
- Núcleos urbanos
- Industrias

Se han elegido estos tres jugadores porque son los tres tipos de usuarios de agua: uso agrícola, abastecimiento de agua potable para uso humano y uso industrial.

Es necesario puntualizar que los estudios que se hacen en este trabajo se realizan con valores orientativos del precio de la energía eléctrica y de las demandas de agua. Es decir, los precios y capacidades que se toman no son los reales, puesto que la obtención de estos datos concretos es difícil de conseguir, y se ha preferido realizar el ejercicio con valores teóricos con el fin de enseñar que es posible encontrar una solución. Además, sabiendo que el desarrollo será completamente válido en el momento en el cual se conozcan el precio de la energía eléctrica y la cantidad total de agua que demande cada jugador.

2 NORMATIVA DEL RECURSO DEL AGUA: SU FINANCIACIÓN Y LA ASIGNACIÓN DE COSTES.

2.1. El marco normativo europeo

En el marco normativo europeo cabe destacar la Directiva Marco Europea de Aguas. A partir de esta España necesita crear una ley de aguas, la que es hoy día el texto refundido de la Ley de Aguas, en la que se establezcan, al menos, todos los puntos definidos en la Directiva Europea con, al menos, la misma autoridad.

2.1.1 Directiva Marco de Aguas

La Directiva 2000/60/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 23 octubre de 2000, por la que se establece un marco comunitario de actuación en el ámbito de la política de aguas, conocida también como la Directiva Marco Europea de Aguas (DMA), se crea con el fin de unificar las actuaciones en materia de protección del agua en la Unión Europea (UE). Es uno de los grandes motivos que ha provocado el cambio de orientación de la política de los Estados Miembros de la UE, bajo la primera premisa: *"el agua no es un bien comercial como los demás, sino un patrimonio que hay que proteger, defender y tratar como tal"*.

La DMA admite la necesidad de establecer en cada demarcación hidrográfica un programa de medidas (Artículo 11) para así poder alcanzar los objetivos ambientales previstos en el Artículo 4, en los cuales se diferencia el hecho de que sea para aguas superficiales, subterráneas o zonas protegidas. También se reflejan, en esta Directiva, los aspectos correspondientes a la recuperación de los costes de los servicios relacionados con el agua, incluidos los costes medioambientales y los referidos a los recursos (Artículo 9), teniendo en cuenta los resultados de los análisis económicos del uso del agua (Artículo 5 y Anexo III)

2.1.1.1 Artículo 5. Análisis económico del uso del agua

En el Artículo 5 se establece que cada Estado Miembro será responsable de proteger que se efectúen los siguientes requisitos en cada demarcación:

- Un análisis de las características de la demarcación.
- Un estudio de las repercusiones de la actividad humana en el estado de las aguas superficiales y de las aguas subterráneas.
- Un análisis económico del uso del agua, de acuerdo con las especificaciones técnicas fijadas en los anexos II y III.

Al cabo de trece años se procederá a su revisión y, posteriormente, cada seis años con el fin de certificar que se han llevado a cabo los requisitos mencionados.

2.1.1.2 Artículo 9. Recuperación del coste de los servicios

"*Los Estados miembros tendrán en cuenta el principio de la recuperación de los costes de los servicios relacionados con el agua, incluidos los costes medioambientales y los relativos al recurso, a la vista del análisis económico efectuado con arreglo al anexo III, y en particular de conformidad con el principio de que quien contamina paga.*"

Según el artículo 2 de la DMA se engloba en "servicios relacionados con el agua" a todos los servicios en beneficio de los hogares, las instituciones públicas o cualquier actividad económica, consistentes en:

- La extracción, el embalse, el depósito, el tratamiento y la distribución de aguas superficiales o subterráneas.
- La recogida y depuración de aguas residuales, que vierten posteriormente en las aguas superficiales.

No se tiene como objetivo la recuperación íntegra de costes. La lógica sugiere que unos precios adecuados conllevarían un uso más eficiente del recurso y, por consiguiente, un menor consumo y unas mejores condiciones ambientales. Esto es lo que se entiende como el principio de transparencia en la economía del agua.

Este artículo recoge también la necesidad de una contribución adecuada de los diversos usos del agua basado en el análisis económico efectuado en consonancia con el anexo III, que se definirá más adelante.

2.1.1.3 Artículo 11. Programa de medidas

"*Los Estados miembros velarán por que se establezca para cada demarcación hidrográfica, o para la parte de una demarcación hidrográfica internacional situada en su territorio, un programa de medidas, teniendo en cuenta los resultados de los análisis exigidos con arreglo al artículo 5, con el fin de alcanzar los objetivos ambientales planteados en el artículo 4. Estos programas de medidas podrán hacer referencia a medidas derivadas de la legislación adoptada a nivel nacional y que cubran la totalidad del territorio de un Estado miembro. En su caso, un Estado miembro podrá adoptar medidas aplicables a todas las demarcaciones hidrográficas y/o a las partes de demarcaciones hidrográficas internacionales situadas en su territorio.*"

Las medidas básicas son los requisitos mínimos que deberán cumplirse y consistirán, entre otros, en la "*las medidas que se consideren adecuadas a efectos del artículo 9*".

2.1.1.4 Anexo III. Contenidos del análisis económico

"*El análisis económico contendrá la suficiente información lo suficientemente detallada (teniendo en cuenta los costes asociados con la obtención de los datos pertinentes) para:*

a) efectuar los cálculos necesarios para tener en cuenta, de conformidad con el artículo 9, el principio de recuperación de los costes de los servicios relacionados con el agua, tomando en consideración los pronósticos a largo plazo de la oferta y la demanda de agua en la demarcación hidrográfica y, en caso necesario:

-las previsiones del volumen, los precios y los costes asociados con los servicios relacionados con el agua, y

-las previsiones de la inversión correspondiente, incluidos los pronósticos relativos a dichas inversiones;

b) estudiar la combinación más rentable de medidas que, sobre el uso del agua, deben incluirse *en el programa de medidas de conformidad con el artículo 11, basándose en las previsiones de los costes potenciales de dichas medidas*."

En este anexo se define el objetivo del análisis económico previsto en el Artículo 5 como el de generar los datos necesarios para poder efectuar los cálculos de recuperación de costes y así poder estudiar la combinación óptima de medidas básicas en sus previsiones de costes.

2.2. Organización de los servicios del agua en España

Las prestaciones de los servicios del agua en España están caracterizadas por la gran participación de agentes públicos y privados, como se puede observar en la siguiente tabla:

Tabla 1: organización de los servicios del agua en España (MIMAM, 2007)

Servicio	***Agentes (Competentes o financiadores de infraestructuras)***	***Instrumentos de "Recuperación de Costes"***
Embalses y transporte en alta (aguas superficiales)	Organismos de Cuenca, Sociedades Estatales y otros agentes	Canon de Regulación Tarifa de Utilización de Agua
Aguas subterráneas	Organismos de Cuenca, colectivos de riego y usuarios privados (autoservicios)	Las fijadas por los ayuntamientos Las fijadas por las CCAA
Abastecimiento urbano	Ayuntamientos, Mancomunidades, Comunidades Autónomas y otros	Tarifa de abastecimiento
Recogida de Aguas Residuales Urbanas	Ayuntamientos, Mancomunidades, Comunidades Autónomas y otros	Tasa de Alcantarillado
Tratamiento de Aguas Residuales Urbanas	Ayuntamientos, Mancomunidades Comunidades Autónomas y otros	Canon de saneamiento Tarifas de servicio
Distribución de agua de riego	Organismos de Cuenca, Comunidades de Regantes y otros colectivos de riego	Derramas y tarifas/cuotas de los colectivos de riego (que incluyen el importe del pago de Canon y Tarifa a los Organismos de Cuenca)
Control de vertidos	Organismos de Cuenca	Canon de Control de Vertidos

2.2.1 Dominio Público Hidráulico

Las normativas en las que se definen el Dominio Público Hidráulico (DPH), las posibles zonas aledañas a los cauces, definiciones como: zona inundable, zona de peligrosidad, etc. Fue resumida en un folleto informativo "*Los usos en las zonas inundables: Directiva de Inundaciones, Ley de Aguas y Reglamento del Dominio Público Hidráulico"* en el cual se define al Dominio Público Hidráulico a partir del artículo 2 de la Ley de Aguas (TRLA): "Es DPH, entre otros elementos, los cauces de corrientes naturales, continuas o discontinuas. Son terrenos de titularidad pública".

2.2.2 Servicios de captación, embalse y transporte

Conforme a la Ley de Aguas y El Reglamento del Dominio Público Hidráulico, tanto la extracción, como el embalse y el transporte son competencia de las Confederaciones Hidrográficas en las cuencas intercomunitarias y por las Comunidades Autónomas (CCAA) en las cuencas intracomunitarias

2.2.3 Servicios de abastecimiento, alcantarillado y depuración de aguas urbanas

Los servicios de abastecimientos (tratamiento y distribución del agua potable), alcantarillado y depuración de las aguas urbanas son competencia de los municipios como se indica en los Artículos 25 y 26 de la Ley 7/1985, reguladora de las Bases de Régimen Local. Éstas a su vez pueden dar el servicio directamente o a través de concesiones a empresas públicas, privadas o mixtas. Conviene señalar que la depuración de las aguas residuales urbanas, en algunos casos, son tratadas por las administraciones autonómicas mediante la contratación de empresas especializadas.

2.2.4 Servicios de distribución del agua de riego

Los beneficiarios del agua superficial destinada al riego que posean la misma toma o concesión están constituidos en comunidades de regantes desde el año 1879 (Ley de Aguas del 13 de junio). Las comunidades de regantes se encargan de gestionar la distribución, mantenimiento y reparto de las redes que llevan el agua desde los canales hasta las parcelas privadas.

2.3. Plan Energético Nacional

El sector eléctrico es un sistema regulado, de competencia estatal y planificado mediante el Plan Energético Nacional (PEN), o como se denomina actualmente: Plan Nacional Integrado de Energía y Clima (PNIEC).

Hasta hace varias décadas la mayor parte de la energía producida en España era nuclear o térmica clásica. Había muy poco aprovechamiento de la energía hidráulica y la energía solar y eólica aún eran planes de futuro.

En Castilla La-Mancha, a fecha de 1992 más de tres cuartas partes (3/4) de la energía consumida era nuclear y apenas un 3,5% era energía hidroeléctrica [7]. Por aquel momento no se estaba aprovechando el potencial del trasvase para dar energía a Castilla La-Mancha al existir únicamente dos centrales: la central reversible de Bolarque y la central de Bujeda. Queda señalar que la energía producida en la central de Bolarque era y es usada en Madrid. Esto unido al no llevar el agua suficiente al Segura (no se alcanzaban los 600 hm^3 que se habían prometido), hacía que la impresión que daba el trasvase no fuese lo suficientemente buena.

Al cabo de los años se fueron desarrollando más centrales hidroeléctricas a lo largo del trasvase, de las cuales se podrían nutrir los usuarios de alrededor, corrigiéndose así el déficit existente en Castilla La-Mancha. Con ello, además, se estaría incrementando la cantidad de energía renovable que se usa en España, lo cual es el fin último de los sucesivos planes energéticos que se han ido desarrollando en España.

2.4. Régimen económico-financiero de las aguas continentales en España

El Régimen económico-financiero de las aguas continentales en España se estructura en tres bloques de tributos:

-Tributos sobre el uso del dominio público hidráulico

-Tributos recuperadores del coste de infraestructuras

-Tributos ambientales

Los dos últimos tributos no entran en el ámbito que desempeña este trabajo.

2.4.1 Tributos sobre el uso del Dominio Público Hidráulico

En el artículo 112 del Texto Refundido de la Ley de Aguas (TRLA, 20 julio de 2001) se dice que la utilización, ocupación o aprovechamiento de los bienes de DPH requieren autorización administrativa por parte del organismo de cuenca competente, el cual debe de adquirir una tasa denominada canon de utilización de los bienes del dominio público hidráulico, con el fin de ser destinado a la mejora y protección de dicho dominio.

2.4.2 Ley 52/1980 de regulación del régimen económico de la explotación Acueducto Tajo-Segura

En la Ley 21/1971 sobre el Aprovechamiento Conjunto Tajo-Segura, se concretaban aspectos técnicos con el fin de conseguir un correcto desarrollo hidráulico del mismo. No obstante, faltaban por definir las circunstancias en las cuales se iba a desarrollar económicamente el trasvase. Es por ello por lo que el 16 de octubre de 1980 se propone la Ley 52/1980 en la cual se especifica la regulación del régimen económico de la explotación a través de tres aspectos principales para el establecimiento de las tarifas de agua [8]:

- La obra principal de conducción del acueducto Tajo-Segura no será objeto de ninguna subvención.
- La recaudación obtenida por la parte de la tarifa de conducción de aguas correspondiente al concepto de aportación por el coste de las obras se aplicará para inversiones en obras hidráulicas que permitan un más rápido desarrollo de la cuenca.
- La revisión de la tarifa cada dos años en función de la actualización de las inversiones.

Gracias a esta Ley se hace viable la política de trasvases hidrográficos ya que, al eliminar las subvenciones hace que las tarifas sean más altas impidiendo el uso de esas aguas a las zonas de Castilla

La-Mancha, por donde atraviesa el trasvase, al ser antieconómico. A esto se le añade en intercambio de flujo monetario que iría hacia la cuenca del Tajo, al trasvasar aguas no útiles hasta el Segura, y una revalorización de activos.

Estas condiciones económicas específicas para el trasvase Tajo-Segura trataban de unir a las dos cuencas con el fin de cooperar. Se demostraba, además, la rentabilidad del proyecto de manera permanente al no haber una "congelación" de las tarifas, sino que estas se van actualizando de acuerdo con la devaluación de la moneda.

En esta Ley se establece, además, un caudal ecológico que deberá llevar el Tajo de 6 m^3/s, pero cabe comentar que la designación de este caudal mínimo medioambiental se estableció sin haberse hecho ningún tipo de estudio fluvial.

2.5. Asignación de costes

Como se ha estado diciendo, el agua es de dominio público, pero existe sobre ella un monopolio. El hecho de que el agua se trate de manera diferente a otro bien común lo explica Young R.A [9], resumiendo las condiciones que hacen del agua un recurso especial, justificando la intervención de la administración pública en la gestión y asignación de los derechos sobre su uso.

2.5.1 Modelo de oferta

El agua se toma como un factor de producción. A la política hidráulica le interesa que exista una inversión pública en las infraestructuras que, posteriormente, se darán en concesión a una serie de usuarios. Aquí el Estado sería el promotor y el recaudador financiero.

2.5.2 Modelo de demanda

Los modelos de demanda surgen en economías desarrolladas, donde el agua va dejando de ser un factor de producción y se convierte en un bien económico. Ahora, la política hidráulica pretende un uso eficiente del agua, especialmente desde el punto de vista económico, como se reflejó en la Ley de Aguas de 1985.

Con la actual economía y existencia de instituciones, las obras de infraestructuras hidráulicas se llevan cada vez menos a cabo por la administración pública, así como la explotación, pasando a manos privadas.

El objetivo final es una inversión en los servicios del agua que sea financieramente sostenible, que limite las subvenciones públicas y maximice el óptimo económico.

3 LA TEORÍA DE JUEGOS

La Teoría de Juegos, como se ha comentado en el primer punto del trabajo, es uno de los múltiples campos de estudio de las matemáticas en el cual trata de optimizar un problema en el que se ven implicados dos o más participantes, denominados jugadores, de manera que el resultado obtenido a través del uso de modelos matemáticos sea el más justo posible. Para poder hacer esto será necesario generar una función cuyos valores serán optimizados a través de las acciones del propio jugador y del resto de jugadores, al no existir unos costes establecidos. Generalmente, los jugadores suelen tener conflictos entre ellos.

Según Anita van Gellekom se puede definir la teoría de juegos como: "una teoría matemática que trabaja con el modelado y análisis de conflictos" [5] . Por otro lado, Bouza en su artículo *Los modelos teóricos de la economía y la Teoría de Juegos,* la define diciendo: "la Teoría de Juegos permite usar un lenguaje que permite formular, analizar y entender el efecto de las estrategias y escenarios" [10].

El inicio de la teoría de juegos se otorga a John von Neumann en su artículo *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (1928) y también en su libro *Theory games and economic behavior* (1944) que escribió junto con Oskar Morgenstern, como se comentó anteriormente, por lo que se puede considerar como una rama relativamente nueva.

En 1928, von Neumann afirmó que prácticamente cualquier juego de competición podría modelarse como un juego matemático con una estructura del tipo: existe un conjunto de jugadores, cada jugador tiene una serie de estrategias y una función de pago que proviene del producto Cartesiano de esas estrategias puesto en números reales, a esto se le añade que cada uno de ellos (cada uno de los jugadores) deberán elegir su estrategia de manera independiente al resto. Aunque no fue hasta 1944 cuando, junto con Morgenstern, denominaron a esta estructura tipo como **forma normal** de un juego, ya que con ello se conseguía representar la gran parte de los juegos.

La TJ se podría dividir en dos según se puedan llegar a acuerdos entre jugadores, Teoría de Juegos Cooperativos, o que esto no sea posible, Teoría de Juegos No Cooperativos. Estos acuerdos son designados como contratos vinculantes.

Mientras que la Teoría de Juegos Cooperativos se corresponde con estrategia, situaciones de equilibrio, negociaciones, coaliciones, etc., la Teoría de Juegos No Cooperativos busca una estrategia individual.

En los años 50 se desarrollaron los conceptos de núcleo de un juego y del valor de Shapley, ambos soluciones para juegos cooperativos. La idea general de núcleo se le atribuye a Donald B. Gillies en su artículo *Solutions to general non-zero-sum games* (1959) [5] [11]. Por otro lado, el valor de Shapley recibe el nombre de su creador, Lloyd Shapley, quien definió una solución en 1953 para el reparto de las ganancias de la coalición de todos los jugadores.

Como se ha dicho anteriormente, será necesario optimizar una serie de funciones para poder hacer los repartos de costos. En la TJ existen multitud de funciones cuya finalidad difiere una de la otra en más o menos grado. En este trabajo nos centraremos en varios: core, nucleolo, Shapley y un juego de costes (no cooperativo).

3.1. Juego de utilidad transferible y su solución

Como se ha explicado con anterioridad, los juegos de utilidad transferible son un tipo de **juego cooperativo** en el cual se puede dividir la solución (beneficio o coste) entre los jugadores, pero una definición más exacta y desde un punto de vista matemático, la da Anita van Gellekom en su tesis doctoral *Cost and profit sharing in a cooperative environment.*

3.1.1 Definición de juego de utilidad transferible

Siendo $\mathbb{N}$ un conjunto universal e infinito de jugadores, un juego de utilidad transferible, o de función característica, es la pareja (N, v) donde $N \subset \mathbb{N}$ es un conjunto finito de jugadores y $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ es la función característica. Si por otro lado se define a S como cualquier posible coalición ($S \subseteq N$), siendo la **gran coalición** cuando $S = N$, la función característica, v, dará un valor real $v(S)$, el valor de S, a cada coalición. El conjunto completo de juegos de gran coalición se denotará como $\mathbb{G}^N$ y al conjunto de todos los posibles juegos como $\mathbb{G} := \cup_{N \subset \mathbb{N}} \mathbb{G}^N$.

Una manera más clara de ver el espacio de juegos $\mathbb{G}$ es como lo define Joss Sánchez.Pérez en su artículo *Juegos cooperativos y sus aplicaciones económicas*:

$$\mathbb{G} = \{v: 2^N \rightarrow \mathbb{R} \,|v(\emptyset) = 0\}$$

3.1.2 Definición del concepto de solución

Una posible solución Φ asigna un subconjunto $\Phi(N, v)$ a cada juego de utilidad transferible (N, v) en unos juegos $\mathbb{G}' \subseteq \mathbb{G}$.

Es necesario indicar que la solución $\Phi(N, v)$ puede estar vacía o que ofrezca más de una asignación al juego. Esta solución también se puede escribir como $\Phi(v)$ cuando no hay duda de los jugadores que participan. La definición de una solución es muy general, pero a las soluciones de este tipo de juegos se le pide que cumplan una serie de axiomas como son:

- **Eficiencia:** para todo $(N, v) \in \mathbb{G}'$ y para toda $x \in \Phi(N, v)$ se tiene que:

  $$x(N) = v(N)$$

  El inconveniente es ver cómo se divide $v(N)$, una posible solución sería dividirlo exactamente entre el número de jugadores.

- **Anonimato:** para todo $N, N' \in \mathbb{N}$, todas las biyecciones (una biyección es una función que da un emparejamiento exacto de los elementos de dos conjuntos) $\sigma: N \rightarrow N'$ y todos $(N, v), (N', v^\sigma) \in \mathbb{G}': \Phi(N', v^\sigma) = \Phi(N, v)^\sigma$, donde $v^\sigma(S') := v\big(\sigma^{-1}(S')\big)$ y $x^\sigma_{i'} = x_{\sigma^{-1}(i')}$ para toda $x \in \Phi(N, v)$. El anonimato quiere decir que la solución solo depende del valor de las coaliciones y no de los jugadores que estén jugando, es decir, no depende del "nombre de los jugadores".

- **Dummy player property:** siendo el jugador $i \in N$ el llamado *dummy player* si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)$ para todo $S \subseteq N \backslash \{i\}$. Una solución Φ tendrá esta propiedad si para todo $(N, v) \in \mathbb{G}'$, y por eficiencia, para todo $x \in \Phi(N, v)$:

  $$x_i = v(i) \text{ para todo } dummy\ players\ i \in N$$

  Una solución con esta propiedad hace que el *dummy player* reciba la misma cantidad que con lo que contribuye a cada coalición.

- **Covarianza:** una solución Φ será covariante para todo $(N, v) \in \mathbb{G}'$, todos los juegos aditivos (N, a) y todos los números reales $\lambda \geq 0$ con $(N, \lambda v + a) \in \mathbb{G}'$
$$\Phi(N, \lambda v + a) = \lambda\Phi(N, v) + \{(a(1), \ldots, a(n))\}$$
Siendo un juego aditivo si:
$$v(S) + v(T) = v(S \cup T) \text{ para toda } S, T \subseteq N \text{ con } S \cap T = \emptyset$$
O puede ser superaditivo si:
$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) \text{ para toda } S, T \subset N \text{ con } S \cap T = \emptyset$$
Generalmente todos los juegos son superaditivos. [12]
- **Racionalidad individual:** una solución Φ se denomina racional individualmente si para todo $(N, v) \in \mathbb{G}'$, para todo $x \in \Phi(N, v)$:
$$x_i \geq v(i) \text{ para todo } i \in N$$
Las soluciones racionales individualmente darán a cada jugador al menos lo que podría ganar estando solo, es decir, asegura a cada jugador que no van a perder nada por jugar. Esta propiedad es más efectiva en el caso de juegos de beneficio que en el de juegos de coste, en estos últimos lo más apropiado es la desigualdad reversa (reversed inequality)

3.2. Juego no cooperativo

Existen numerosos tipos de juegos no cooperativos, los más habituales son los bipersonales, que pueden ser simétricos o asimétricos [6]. Una manera muy fácil de entenderlos es a través del clásico ejemplo del prisionero:

Imagínense a dos prisioneros, cada uno en una sala de interrogatorios distintas por lo que no pueden tener ningún tipo de conversación entre ellos. Les acusan de un robo, pero la fiscalía no tiene pruebas suficientes como para meterlos en la cárcel los 20 años que corresponderían. Se les ofrece distintas soluciones a los prisioneros, a ambos las mismas: si ambos confiesan el crimen irán cinco años a la cárcel por haber colaborado con la justicia, si ninguno confiesa no habría pruebas suficientes tendrían solamente una condena de un año a la cárcel, pero si uno confiesa y el otro se calla tendrían libertad y una condena de 20 años, respectivamente.

Tabla 2: matriz del juego de los jugadores

		Prisionero 2	
		Cooperar con la policía	*No cooperar con la policía*
Prisionero 1	*Cooperar con la policía*	(5,5)	(0, 20)
	No cooperar con la policía	(20,0)	(1,1)

Está claro que, de manera individual, lo mejor es confesar, porque si uno confiesa y el otro se calla se va directamente libre, y si el otro confiesa también tendrá una condena de cinco años en lugar de una condena de 20. Esto se puede resumir en una matriz de pagos de ambos jugadores, representada en la tabla 2.

Nash desarrolló en 1951 su teoría del equilibrio, que hoy día sigue siendo muy estudiada. Esta se basa en dos supuestos principales:

- **Racionalidad:** los jugadores son racionales y saben encontrar la máxima utilidad y para ello son capaces de hacer todos los cálculos necesarios.
- **Conocimiento común de la racionalidad:** lo que quiere decir es que un jugador sabe que el resto de jugadores son racionales y sabe además que ellos saben que él lo es, por lo que va a ser posible buscar la mejor respuesta de las mejores respuestas.

Se puede definir, por tanto, punto de equilibrio de Nash como aquel en el cual los jugadores no se arrepienten de la decisión que han tomado una vez ha finalizado el juego, es decir, no quieren cambiar la solución de manera individual, ya que si hay arrepentimiento no puede ser la mejor respuesta. En el ejemplo del prisionero está claro que si ambos eligen cooperar no se pueden arrepentir de su decisión ya que el otro también ha cooperado y podría haber ido 20 años a la cárcel en lugar de 5. Esta es una solución de estrategia maximin [6], es decir, se trata de buscar la máxima ganancia propia.

El teorema minimax de von Neumann (1928) presenta la existencia generalizada de soluciones minimax en diversas estrategias de juegos de dos personas de suma cero. Las soluciones minimax, al contrario que las maximin, buscan que el rival se lleve la menor ganancia posible, es decir, no buscan un bien individual, sino el peor fin para el resto de los jugadores. En este tipo de juegos se puede asumir que el teorema minimax es equivalente a la existencia de equilibrio de Nash, ya que von Neumann formuló el teorema como una igualdad de resultados que cada jugador puede garantizarse a sí mismo, sin importar qué haya hecho el otro oponente.

3.3. Núcleo del juego

Cuando se estudia el núcleo de un juego, también denominado como *core*, se pueden obtener ninguno, uno, varios o infinitos elementos o posibles asignaciones, pero la solución real será la combinación convexa de esas asignaciones. Cada uno de los jugadores se inclinarán hacia un vector de pagos $x(i)$ que se genera a partir de la coalición de estos mismos, pero en núcleo de juego no puede haber dominancia de imputaciones. El que una imputación sea dominada es debido a que una cierta coalición, S, puede forzar el uso de un vector de pago. Por tanto, se define al núcleo del juego $C(v)$, como el conjunto de imputaciones que poseen la propiedad de **racionalidad de grupo**. [12]

Para poder comprender esto se deben definir algunos términos como son:

- **Imputación:** una imputación se define como un vector de pagos racional individual que reparte la suma máxima, es decir, el más beneficioso para un jugador.
$$x_i(v) \geq v(\{i\}) \text{ para todo } i \in N, \qquad \sum_{i \in N} x_i(v) = v(N)$$
- **Racionalidad de grupo**: conjunto de vectores de pago de cada jugador que deben ser mayor o igual a un cierto beneficio $v(S)$.
$$\sum_{i \in S} x_i(v) \geq v(S) \text{ para todo } S \subseteq N$$

Se puede definir, por tanto, el core como:

$$C(v) = \{\mathrm{x} \in R^n \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \ \ para\ todo\ S \subseteq N\}$$

Siendo $x \in R^n$ uno de los posibles vectores de pago

Por lo que, el núcleo del juego o core se puede definir como todas las posibles combinaciones para las asignaciones de un juego [5]. Una característica muy importante del core, que podría verse como una ventaja, es que, como mínimo, da a la coalición S su valor $v(S)$, por lo que no hay ninguna coalición que tenga una motivación para separarse.

3.4. Nuclelolo

El nucleolo es otra posible solución para un juego de n-personas que fue introducido por Schmeridler en su artículo *The Nucleolus of a Characteristic Function Game* de noviembre de 1969, donde define al nucleolo como "una función continua de la función característica" [13]. Para poder buscar el nucleolo de un juego, este debe ser un juego que no tenga imputaciones vacías y cuya resolución se hará a través de la determinación de un problema de programación lineal donde se obtendrá un único punto.

El nucleolo se caracteriza por existir siempre y ser consistente. Realmente Schmeridler lo definió como una solución alternativa al core para que, en aquellos juegos que el core estuviese vacío, siempre hubiese una solución.

Por lo general es una solución difícil de calcular en casi todos los juegos, es por ello por lo que se definió el **prenucleolo**.

El prenucleolo se calcula en el caso en el que no se haya podido obtener el punto del nucleolo y este fija una zona aproximada dentro de la cual se puede encontrar el nucleolo.

Para poder entender matemáticamente al nucleolo es necesario explicar una serie de conceptos:

- **Juego de función característica:** es un conjunto (N, v) donde:
  - $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de n-jugadores.
  - *v* es la función característica que señala cada subconjunto de jugadores *S* dentro de *N*. Se asume que $v(N) \geq 0$ y que $v(S) = 0, v(\emptyset) = 0$
- **Vector de pagos**: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, de modo que $x_i \geq 0$ para $i = 1,2,3, \dots, n$ así como que $x(N) = v(N)$, mientras que para cada subconjunto de jugadores: $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$. Se puede definir *X* como el conjunto de todos los posibles vectores de pago, de modo que depende del juego, *v*.

Así se puede definir al **nucleolo** como un conjunto de puntos de *X* que son los más aceptables:

$$\{x \in X : x \gtrsim y \text{ para todo } y \in X\}$$

Con el objetivo de poder entenderlo habría que definir los vectores $q(x), q(y)$. $q(x)$ se define como un vector en E^{2^n}, para cualquier *x* en *X*, de modo que los componentes del vector son números que vienen de la diferencia $v(S) - x(S)$ ordenados de mayor a menor. Si $x \gtrsim y$ se dice que *x* es *al menos* tan aceptable como *y*, si $q(x)$ no es mayor que $q(y)$ en el orden lexicográfico en E^{2^n}, sin embargo, si $x \succ y$, se dice que *x* es *más aceptable* que *y*. [13]

Además de que Schmeridler dé estas definiciones, prueba que para cualquier juego existe un nucleolo no vacío, es por esta razón por la que se considera el nucleolo en el estudio de este trabajo, para que si en una situación real no hubiese core, tener al menos una posible solución aceptable con la que trabajar.

3.5. El valor de Shapley

El valor de Shapley nos da una solución única en la que se cumple gran parte de las características requeridas para los juegos de función característica de utilidad transferible: eficiencia, anonimato, the dummy player property y aditividad. Se trata de una solución covariante y linear en $\mathbb{G}$. Además, el valor de Shapley forma parte del core, al tratarse del baricentro del mismo.

Esto se puede entender de la siguiente manera: el core da una serie de posibles valores de vectores de imputación válidos para una gran coalición, pero, ¿cuál se puede adoptar como bueno entre todos ellos?, para eso se usará este valor.

El valor de Shapley del juego se define como "la contribución esperada cuando todas las permutaciones son equiprobables." [12].

"El valor de Shapley asigna a cada jugador una media ponderada de las contribuciones marginales de ese jugador" [12]

Se trata de hacer una distribución de pagos entre los jugadores de manera que se cumplan determinados criterios, llamados axiomas, previamente establecidos.

Sea $\mathbb{G}(J, v)$ un juego en forma coalicional, en donde $J = \{1, \dots, n\}$. . Se considera la siguiente asignación de pagos para los n jugadores:

$$\phi(J, v) = (\phi_1(J, v), \dots, \phi_n(J, v))$$

La función de asignación de pagos debe cumplir los siguientes axiomas:

- **Eficiencia.** La función de asignación debe distribuir el pago total del juego. Es decir, debe ser:

$$\sum_i \phi_i(J, v) = v(J).$$

- **Simetría**. Para cualquier par de jugadores que realicen aportaciones equivalentes para cada coalición, es decir, tales que cumplan que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall S \subset J, \text{con } i, j \notin S \text{ se tiene que } \phi_i(J, v) = \phi_j(J, v)$$

- **Tratamiento del jugador pasivo.** Si un jugador no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores no debe recibir ningún pago coalicional. Es decir, para cada jugador, para el cual se verifica que:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \subset J, se\ tiene\ que\ \phi_i(J, v) = v(\{i\})$$

- **Aditividad**. La función de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Formalmente, dados dos juegos cualesquiera $v\ y\ w,$ se tiene que

$$\phi_i(J, v + w) = \phi_i(J, v) + \phi_i(J, w), \forall i \in J$$

De modo que existe una única solución que verifica los cuatro axiomas anteriores y ese es el valor de Shapley, $Sh: \mathbb{G} \to \mathbb{R}^n$ y viene dado por la siguiente expresión:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \not\ni i} \frac{s!\,(n - s - 1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Así $\phi_i(v)$ es el pago esperado para el jugador i. [12]

El valor de Shapley puede interpretarse como la contribución marginal esperada de cada jugador al entrar en una coalición al azar. En efecto, el valor $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ es la contribución marginal efectiva de *i* al incorporarse a *S*, mientras que el factor $\frac{s!(n-s-1)!}{n!}$ es la probabilidad de que a *i* le toque incorporarse precisamente a *S*.

Cuando se quiera representar el valor de Shapley se hará como un punto en una zona de la posible solución.

4 REPARTO DE COSTES DE LA ENERGÍA HIDROELÉCTRICA

4.1. Marco de la problemática

Un **trasvase** es una obra hidráulica, generalmente grande, donde se trasvasa agua de una cuenca a otra vecina por necesidades hídricas. Este trabajo se centra en el trasvase Tajo-Segura, una de las obras de ingeniería hidráulica más grande de España. Sus orígenes se remontan a principios del pasado siglo, pero no fue hasta 1966 que se retomó la idea y en 1979 se puso en funcionamiento.

Este trasvase tiene diferentes finalidades en función de la zona. Pero, en general los trasvases sirven como riego, abastecimiento, para generar energía y otros usos múltiples.

En este trabajo nos centraremos en dos: la generación de energía a través de las centrales hidroeléctricas y el reparto del agua (agua que se destina a riego y abastecimiento).

Seguramente al leer esto se piense que se está dando un enfoque posiblemente equivocado a lo que puede hacerse con la TJ, pero no es así. La TJ nos ayuda a solucionar muchos problemas normales del día a día o, mejor dicho, a optimizarlos. La TJC se comporta muy bien en el ámbito del trabajo con aguas, al tratarse de proyectos de gran envergadura en los que se busca mejorarlo lo máximo posible. Aplicar la TJC a problemas con agua nos dará beneficio, ya sea por la optimización de la inversión y la proyección de la obra, minorizándola, o bien aprovechando más los recursos de los que se dispone.

La primera vez que se estudió el **agua como recurso energético** con la TJC fue Gately en 1974, incluyendo un concepto que aún se usa hoy en día: *propensity to disrupt a coalition.* Para ello calculó el coste de dar electricidad a la zona de estudio, el sur de la India, la cual dividió en 3 áreas y estudió 5 estructuras de coalición posibles. Cuando la diferencia entre los costes si un área es autosuficiente menos los costes en una coalición son negativos, sería irracional participar en dicha coalición. Esta diferencia es la que me dé el beneficio.

En este juego tenemos un core no vacío, esto es debido a que con la *propensity to dirupt* se añadirán imputaciones al core. La propensión para interrumpir de un área dice lo que pierden las otras dos áreas si esta sale de la coalición.

A lo largo del trasvase se ha aprovechado la energía potencial del agua para generar energía eléctrica, ya sea por haber tenido que estar embalsada o porque se realizan caídas en algunos puntos. Este trabajo se centrará en tres centrales de todas las nombradas anteriormente:

Ilustración 5: central hidroeléctrica del embalse de Entrepeñas *(Fuente: Google Street View)*

- *Central 1*: central del embalse Entrepeñas. Se elige esta en lugar de la central de Bolarque, una de las más antiguas e importantes de España, porque, como se comentó, la central de Bolarque está destinada a abastecer de energía a Madrid.
- *Central 2*: central hidroeléctrica de Alarcón. Se trata de una central hidroeléctrica ubicada en el embalse de Alarcón que puede proporcionar una potencia de 16MW al año.
- *Central 3*: central de El Fontanar. Las centrales de El Fontanar son tres, al existir tres rápidas en esa zona. Tienen una potencia total anual de 29 MW.

Ilustración 6: central hidroeléctrica del embalse de Alarcón *(Fuente: https://www.cobraih.com/)*

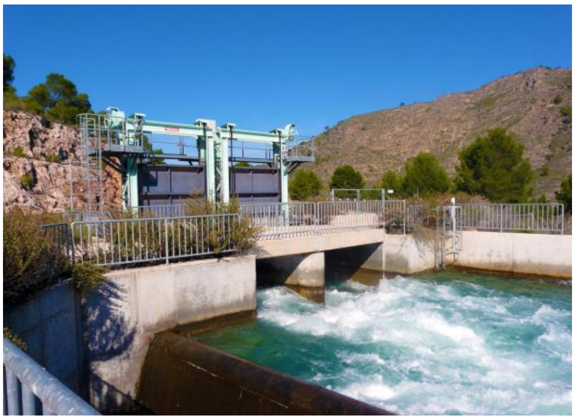


Ilustración 7: central hidroeléctrica de El Fontanar *(Fuente: [https://www.cobraih.com/)](https://www.cobraih.com/)*

Figura 1: ubicación de las centrales hidroeléctricas

4.2. Jugadores

Se jugarán con tres grupos de jugadores diferentes, realizando el mismo cálculo para:

- Tres industrias
- Tres agricultores
- Cuatro núcleos urbanos

Son tres ejemplos de distintos usuarios que necesitan de energía eléctrica y el que sea una energía renovable como es la energía hidroeléctrica ayuda a abaratar costes y a reducir el impacto ambiental.

El hecho de que se haya elegido un grupo de cuatro jugadores es para mostrar la dificultad que se le añade cada vez que se añade un jugador más en el juego, como se explicó en los primeros apartados.

Realizar tres veces el juego con distintos grupos y número de jugadores ayuda a enfatizar que es posible encontrar una solución para el reparto de los costes de energía hidroeléctrica con valores hipotéticos, por lo que será también posible con valores reales.

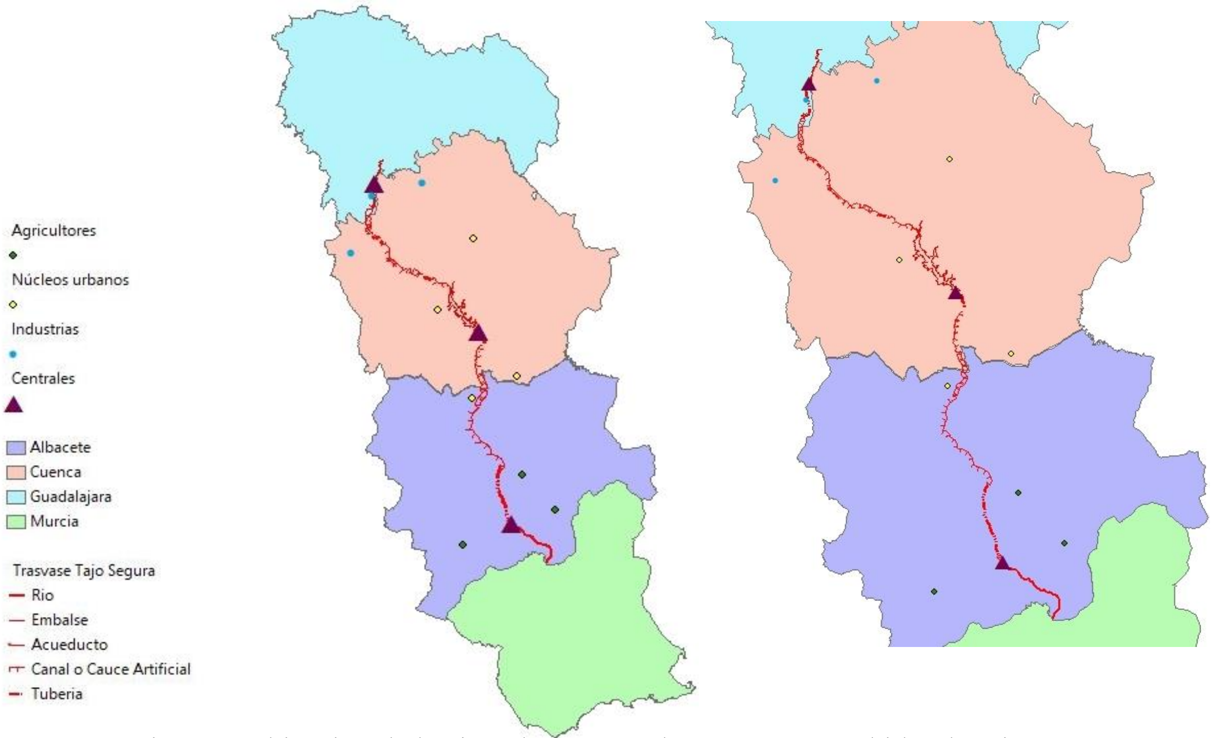


Figura 2: ubicación de los jugadores para el reparto energía hidroeléctrica

4.3. Juego

Con el fin de encontrar la mejor repartición de los costes (€/kWh) para las distintas combinaciones de jugadores se realizarán diversos pasos:

1. **Cálculo del core:** el core dará todas las posibles soluciones en las que los jugadores, formando una gran coalición, conseguirán al menos los mismos beneficios que jugando solos. Esa es la definición propia del core de un juego. Así se favorece que participen, ya que no existe alicientes a que no lo hagan.

2. **Cálculo del valor de Shapley:** el valor de Shapley nos ofrece una solución más idónea, que es el baricentro del core. Se consigue un vector en el cual cada componente se corresponde con un jugador.

Por otro lado, se compararán los resultados obtenidos con el **cálculo del nucleolo,** que es otra posible solución para un juego de n-personas, pero tiene menos propiedades que el valor de Shapley. La única propiedad que tiene es la de existencia y consistencia, es decir, siempre existe y es consistente. El nucleolo se presenta como otro vector de n-componentes, siendo n el número de jugadores.

Así se obtendría la mejor posible solución a la hora de cooperar.

Para poder conseguir estos resultados se han utilizado un código de MATLAB elaborado por los profesores de la Universidad de Vigo Miguel Ángel Mirás Calvo, del departamento de Matemáticas, y Estela Sánchez Rodríguez, del departamento de Estadística e investigación operativa. Pero, anterior a esto, ha sido necesario calcular los costes de cooperar o estar solos, así como el vector de pago.

El reparto de ganancias está referido a la planificación de inversiones en energía hidroeléctrica en una región determinada, en este caso en Castilla La-Mancha.

Primero es necesario, como ya se ha comentado, **calcular los costes**. Estos costes se calcularán para tres posibles situaciones:

1) Cooperación completa entre todos los jugadores.
2) Autosuficiencia.
3) Cooperación parcial.

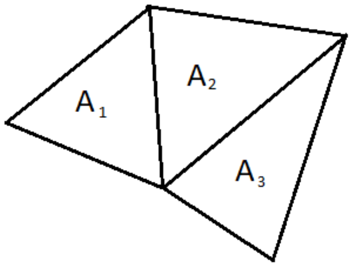


Figura 3: representación de los diferentes costes para un conjunto de jugadores A

La diferencia entre la autosuficiencia y sus costes bajo una estructura de coalición establece su recompensa en esa coalición y la función característica.

Si la diferencia es negativa, no se debe cooperar.

Para calcular estos costes finales primero es necesario definir el costo de las tres posibles situaciones, por ejemplo, en un juego de tres jugadores, como puede ser el caso de los agricultores o de las industrias: $C(1)$ correspondería con el costo del jugador 1 al ser autosuficiente (no coopere con nadie), $C(12)$ sería el costo de que cooperenlos jugadores 1 y 2 (cooperación parcial) y $C(123)$ el coste de que exista una cooperación completa.

Es necesario especificar que obligado que se cumplan que el costo de cooperar no puede ser mayor que la suma de los costes individuales de cada jugador. Es decir, en el caso expuesto de la cooperación parcial $C(12) \leq C(1) + C(2)$, lo mismo ocurre en la cooperación completa, $C(123) \leq C(1) + C(2) + C(3)$. En el juego de 4 jugadores, ocurriría lo mismo.

Posteriormente, a la hora definir los **valores finales** (costes de cooperación) se definirán como el costo de estar solos menos el coste de cooperar. En el caso de autosuficiencia del jugador 1, su valor o coste final se define como $V(1) = C(1)$, sin embargo, si fuese una cooperación parcial se definiría como $V(12) = C(1) + C(2) - C(12)$ y se debe cumplir en todo momento que este valor final $V(a)$, siendo a un subconjunto de jugadores, sea mayor o igual que cero $V(a) \geq 0$, con el fin de que exista una solución core.

Una vez calculados los costes finales, se debe generar el vector de pagos $x = (x_1, x_2, x_3)$ para el juego de 3 jugadores o $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ para el juego de 4 jugadores.

En todo momento se debe cumplir que:

$$x_1 \geq V(1)$$
$$x_2 \geq V(2)$$
$$x_3 \geq V(3)$$
$$x_1 + x_2 \geq V(12)$$
$$x_1 + x_3 \geq V(13)$$
$$x_2 + x_3 \geq V(23)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = V(123)$$

Sería equivalente en el caso de 4 jugadores.

Una vez se obtienen los valores finales de los costes, se calcularán con ellos el core del juego y el valor de Shapley.

A la hora de calcular el core se usará la función `coreset(v)` siendo v un vector donde se introducen dichos costes finales de manera ordenada. Por ejemplo, en el caso del juego de tres jugadores (industrias):

```
IND=[VI1 VI2 VI3 VI12 VI13 VI23 VI123];
coreset(IND)
```

Para el cálculo del valor de Shapley y el nucleolo se usarán las funciones `Shapley(v)` y `nucleolus(v)` respectivamente, siendo v el mismo vector que en el caso anterior.

4.4. Resultados

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para cada juego. Se presentarán en cada uno de ellos: los costos de jugar de cada jugador, los costos de cooperación, los valores finales obtenidos, el vector de pago, una representación del core de la solución, el valor de Shapley y el valor de nucleolo.

4.4.1 Agricultores

Tabla 3: costos de autosuficiencia en agricultores

Coste de estar solo	
Coste	Valor numérico
C(1)	1
C(2)	0.8
C(3)	0.7

Tabla 4: costos de cooperación parcial en agricultores

Coste de la unión de varios (cooperación parcial)		
Costo	Valor numérico	¿Cumple?
C(12)	-0.7	Sí
C(13)	-1	Sí
C(23)	-0.4	Sí

En la columna "¿Cumple?" de la tabla 4 como de la tabla 5 se comprueba la condición que se comentó anteriormente, donde el valor del costo de la cooperación (parcial o completa) debe ser menor que la suma de los costos individuales de cada jugador.

Tabla 5: costos de la cooperación completa en agricultores

Costo de la unión de todos (cooperación completa)		
Costo	Valor numérico	¿Cumple?
C(123)	-1.4	Si

Una vez se obtienen los costos individuales y de las cooperaciones, se pasa al cálculo de los valores o costes finales:

Tabla 6: costes finales en agricultores

	Costes finales		
	Combinaciones	Valor numérico	¿Cumple?
Autosuficiencia	V(1)=C(1)	1	Sí
	V(2)=C(2)	0.8	Sí
	V(3)=C(3)	0.7	Sí
Cooperación parcial	V(12)=C(1)+C(2)-C(12)	2.5	Sí
	V(13)=C(1)+C(3)-C(13)	2.7	Sí
	V(23)=C(2)+C(3)-C(23)	1.9	Sí
Cooperación total	V(123)=C(1)+C(2)+C(3)-C(12)-C(13)-C(23)-C(123)	4	Sí

En el caso de las tablas de costes finales, tabla 6, en la columna "¿Cumple?" lo que se comprueba es la segunda condición en la cual el valor del coste positivo, con el fin de poder encontrar el core de la solución.

A continuación, se pasa al cálculo del vector de pagos y se obtiene un vector de pagos:

$$x_{agricultores} = (1.5, 1.3, 1.2)$$

El siguiente paso es la obtención de los dos resultados principales: el core del juego y el valor de Shapley.

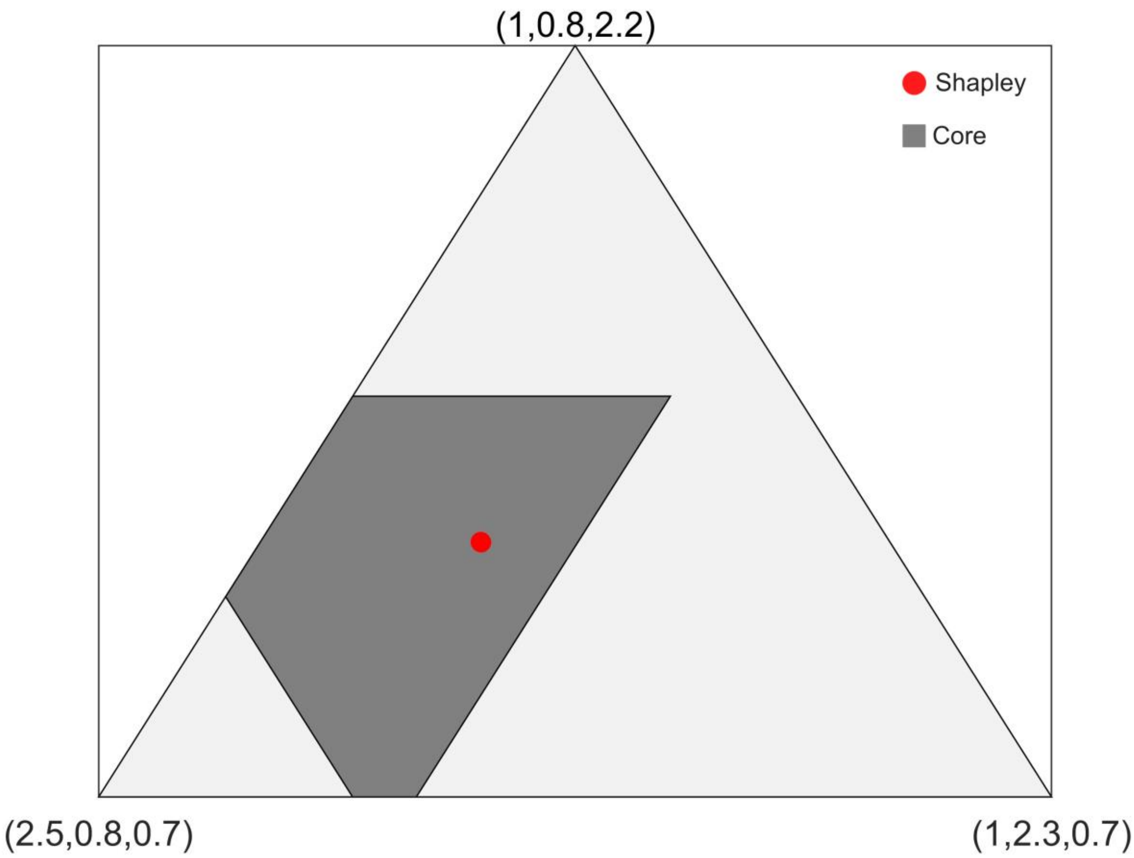


Figura 4: solución del core del juego y Shapley para agricultores

Tabla 7: valor de Shapley para agricultores

Valor de Shapley en agricultores		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
1.6500	1.1500	1.2000

Al calcular el valor de Shapley es un vector donde cada componente corresponde a uno de los jugadores. Lo mismo se obtendría al calcular el nucleolo.

Tabla 8: valor del nucleolo para agricultores

Valor del nucleolo en agricultores		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
1.7750	1.0500	1.1750

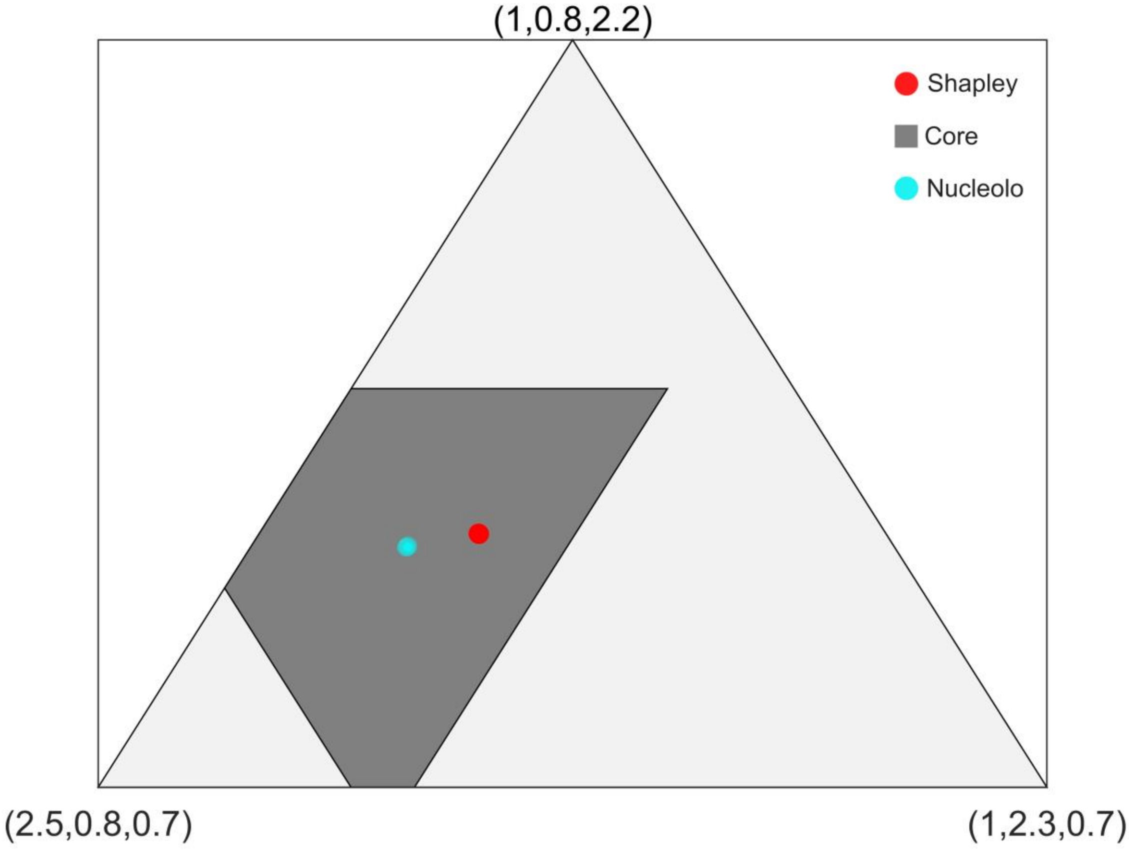


Figura 5: solución del core del juego, Shapley y nucleolo para agricultores

Son valores muy cercanos a los obtenidos con Shapley, es por ello por lo que se puede considerar como una buena solución, pero el nucleolo, como se comentó anteriormente, tiene menos propiedades que el valor de Shapley y se considera, por lo general, que el valor de Shapley es una solución más fiable.

4.4.2 Industrias

Tabla 9: costos de la autosuficiencia en industrias

Costo de estar solo (autosuficiencia)	
Costo	Valor numérico
C(1)	0.8
C(2)	0.2
C(3)	0.5

Tabla 10: costos de la cooperación parcial en industrias

Costo de la unión de varios (cooperación parcial)		
Costo	Valor numérico	¿Cumple?
C(12)	-0.2	Sí
C(13)	-0.7	Sí
C(23)	-1	Sí

Tabla 11: costos de la cooperación completa en industrias

Costo de la unión de todos (cooperación completa)		
Costo	Valor numérico	¿Cumple?
C(123)	0.4	Sí

En la columna "¿Cumple?" de las tablas 10 y 11 se representa lo mismo que en el apartado anterior, si se cumple la condición de que el valor del costo de la cooperación (parcial o completa) debe ser menor que la suma de los costos individuales de cada jugador.

Tabla 12: costes finales en industrias

	Costes finales		
	Combinaciones	Valor numérico	¿Cumple?
Autosuficiencia	V(1)=C(1)	0.8	Sí
	V(2)=C(2)	0.2	Sí
	V(3)=C(3)	0.5	Sí
Cooperación parcial	V(12)=C(1)+C(2)-C(12)	1.2	Sí
	V(13)=C(1)+C(3)-C(13)	2	Sí
	V(23)=C(2)+C(3)-C(23)	1.7	Sí

	Costes finales		
	Combinaciones	Valor numérico	¿Cumple?
Cooperación total	V(123)=C(1)+C(2)+C(3)-C(12)-C(13)-C(23)-C(123)	3.4	Sí

Al igual que en el apartado anterior, lo que se comprueba en la columna "¿Cumple?" de la tabla 12 es la condición de que el valor del coste final sea positivo, con el fin de obtener una solución de core.

A continuación, se pasa al cálculo del vector de pagos y se obtiene un vector de pagos:

$$x_{industrias} = (1, 0.8, 1.2)$$

El siguiente paso es la obtención de los dos resultados principales: el core del juego y el valor de Shapley.

Tabla 13: valor de Shapley para industrias

Valor de Shapley en industrias		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
1.1167	0.6667	1.2167

También se calculará el nucleolo, con el objetivo de comparar las soluciones obtenidas. Su valor se muestra en la tabla de abajo:

Tabla 14: valor del nucleolo para industrias

Valor del nucleolo en industrias		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
1.0500	0.6000	1.3500

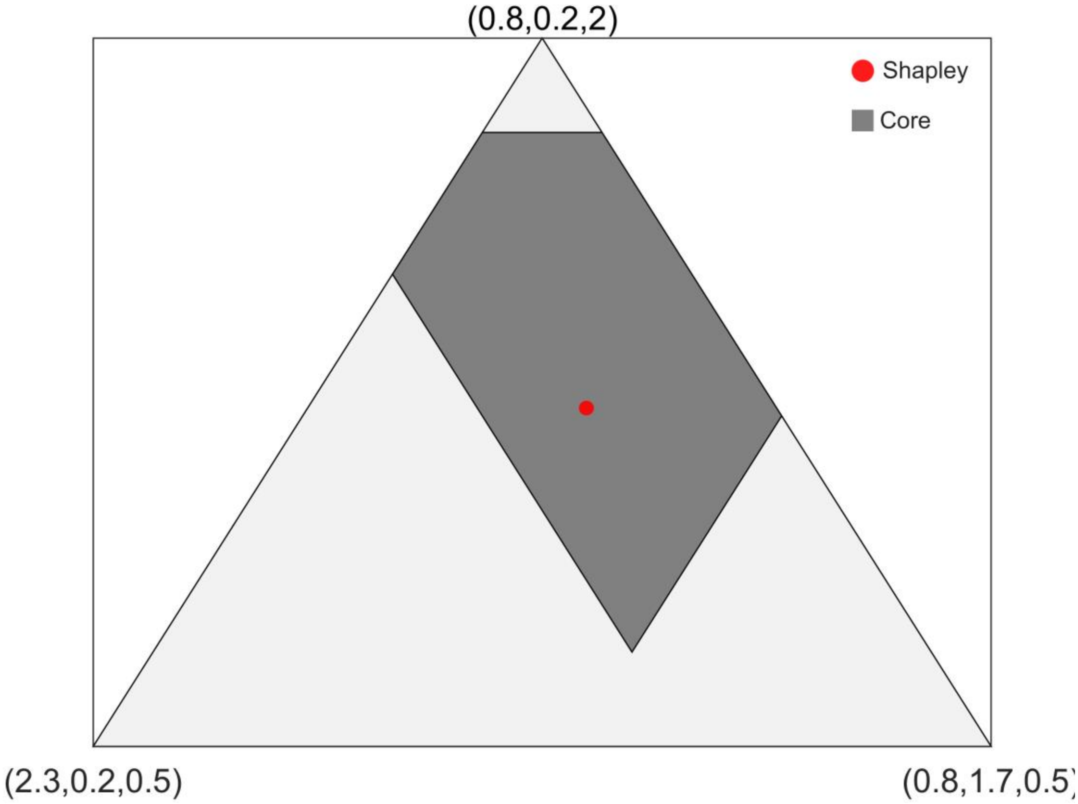


Figura 7: solución del core y Shapley para industrias

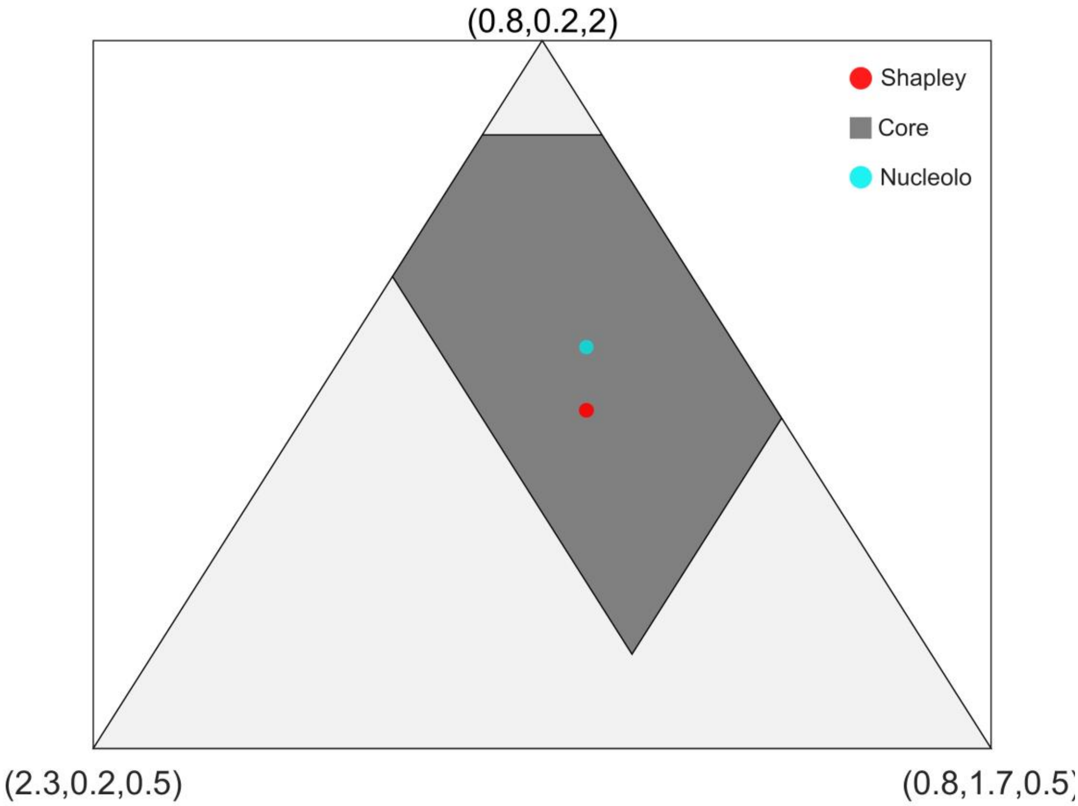


Figura 6: solución del core del juego, Shapley y nucleolo para industrias

Como en el caso anterior, nucleolo y Shapley son valores parecidos. Aunque parece ser menos dispar en el caso en el que nos encontramos que en el de los agricultores.

4.4.3 Núcleos urbanos

Tabla 15: costos de autosuficiencia en núcleos urbanos

Costo de estar solo (autosuficiencia)	
Costo	Valor numérico
C(1)	0.1
C(2)	0.2
C(3)	0.5
C(4)	0.4

Tabla 16: costos de la cooperación parcial en núcleos urbanos

Costo de la unión de varios (cooperación parcial)		
Costo	Valor numérico	¿Cumple?
C(12)	-0.9	Sí
C(13)	-1	Sí
C(14)	-0.7	Sí
C(23)	-0.3	Sí
C(24)	-0.9	Sí
C(34)	-1.1	Sí
C(123)	-1.5	Sí
C(124)	-1.8	Sí
C(134)	-1.1	Sí
C(234)	-1.4	Sí

Tabla 17: costos de la cooperación completa en núcleos urbanos

Costo de la unión de todos (cooperación completa)		
Costo	Valor numérico	¿Cumple?
C(1234)	-1.2	Sí

En la columna "¿Cumple?" de las tablas 16 y 17 se comprueba la primera condición, que el valor numérico del costo de la cooperación (parcial o completa) sea ser menor que la suma de los costos individuales de cada jugador.

Tabla 18: costes finales

	Costes finales		
	Combinaciones	Valor numérico	¿Cumple?
Autosuficiencia	V(1)=C(1)	0.1	Sí
	V(2)=C(2)	0.2	Sí
	V(3)=C(3)	0.5	Sí
	V(4)=C(4)	0.4	Sí
Cooperación parcial	V(12)=C(1)+C(2)-C(12)	1.2	Sí
	V(13)=C(1)+C(3)-C(13)	1.6	Sí
	V(14)=C(1)+C(4)-C(14)	1.2	Sí
	V(23)=C(2)+C(3)-C(23)	1	Sí
	V(24)=C(2)+C(4)-C(24)	1.5	Sí
	V(34)=C(3)+C(4)-C(34)	2	Sí
	V(123)=C(1)+C(2)+C(3)-C(12)-C(13)-C(23)-C(123)	4.5	Sí
	V(124)=C(1)+C(2)+C(4)-C(12)-C(14)-C(24)-C(124)	5	Sí
	V(134)=C(1)+C(3)+C(4)-C(12)-C(13)-C(34)-C(134)	5.1	Sí
	V(234)=C(2)+C(3)+C(4)-C(23)-C(24)-C(34)-C(234)	4.8	Sí
Cooperación total	V(1234)=C(1)+C(2)+C(3)+C(4)-C(12)-C(13)-C(14)-C(23)-C(24)-C(34)-C(123)-C(124)-C(134)-C(234)-C(1234)	11.9	Sí

En esta tabla, al igual que en las anteriores de costes finales, se comprueba en la columna "¿Cumple?" que el valor del coste no sea negativo, con el fin de obtener el núcleo del juego.

A continuación, se pasa al cálculo del vector de pagos, en este caso será de cuatro componentes al ser un juego de 4 jugadores, y se obtiene el siguiente vector de pagos:

$$x_{núcleos} = (1.8, 2.4, 6.4, 2.5)$$

El próximo paso es la obtención de los dos resultados principales: el núcleo del juego y el valor de Shapley. Ahora el valor de Shapley será un vector de 4 componentes al ser un juego de 4 jugadores y el núcleo será 3D.

Tabla 19: valor de Shapley para núcleos urbanos

Valor de Shapley en núcleos urbanos			
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4
3.1833	3.0667	3.3500	3.5000

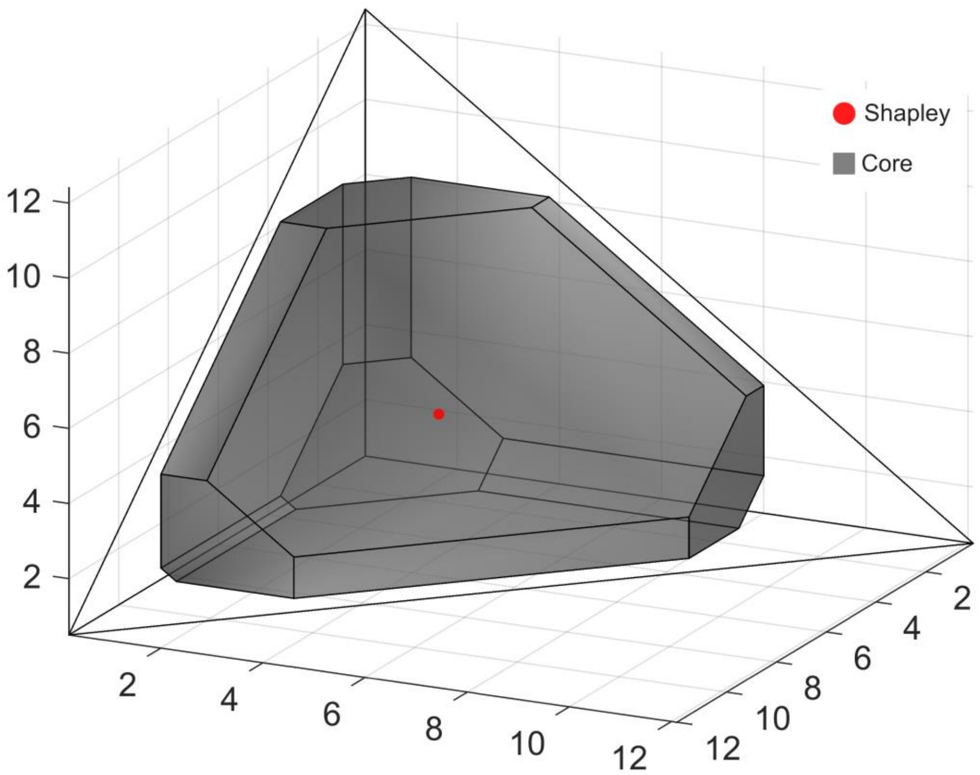


Figura 8: solución del core y Shapley para núcleos urbanos

Dado que para un juego de cuatro personas sale un core en 3D, se ofrecen a continuación las imágenes de los distintos lados del core para obtener una vista más adecuada del mismo, en función de la numeración establecida en la figura 10:

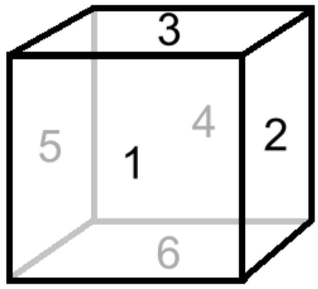
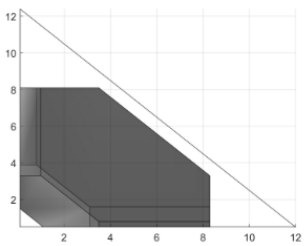
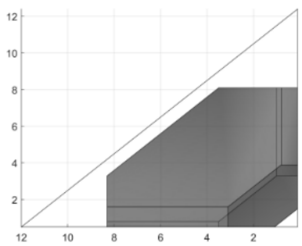


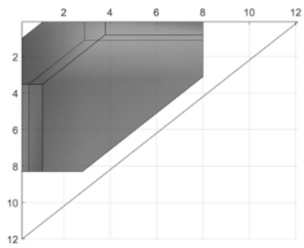
Figura 9: numeración de los
lados del core



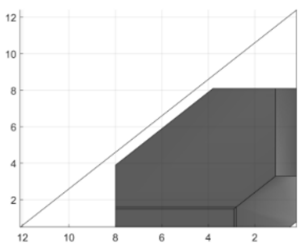
Lado 1



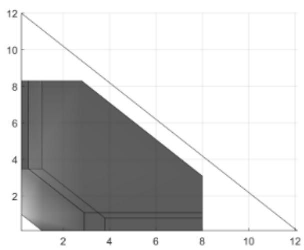
Lado 2



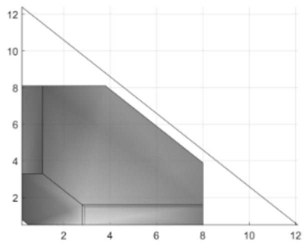
Lado 3



Lado 4



Lado 5



Lado 6

Figura 10: distintas vistas del core de núcleos urbanos

Al igual que se ha obtenido el valor de Shapley es necesario calcular el nucleolo, que también será un vector de 4 componentes.

En este caso, de 4 jugadores, parece que hay mayor disparidad entre los valores de los componentes de ambos vectores, aunque en la figura 12, donde se muestra el core así como la ubicación del valor de Shapley y del nucleolo, parece que ambas soluciones estén más cercanas que en los casos anteriores.

Tabla 20: valor del nucleolo para núcleos urbanos

Valor del nucleolo en núcleos urbanos			
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4
3.0750	3.1750	3.4750	3.3750

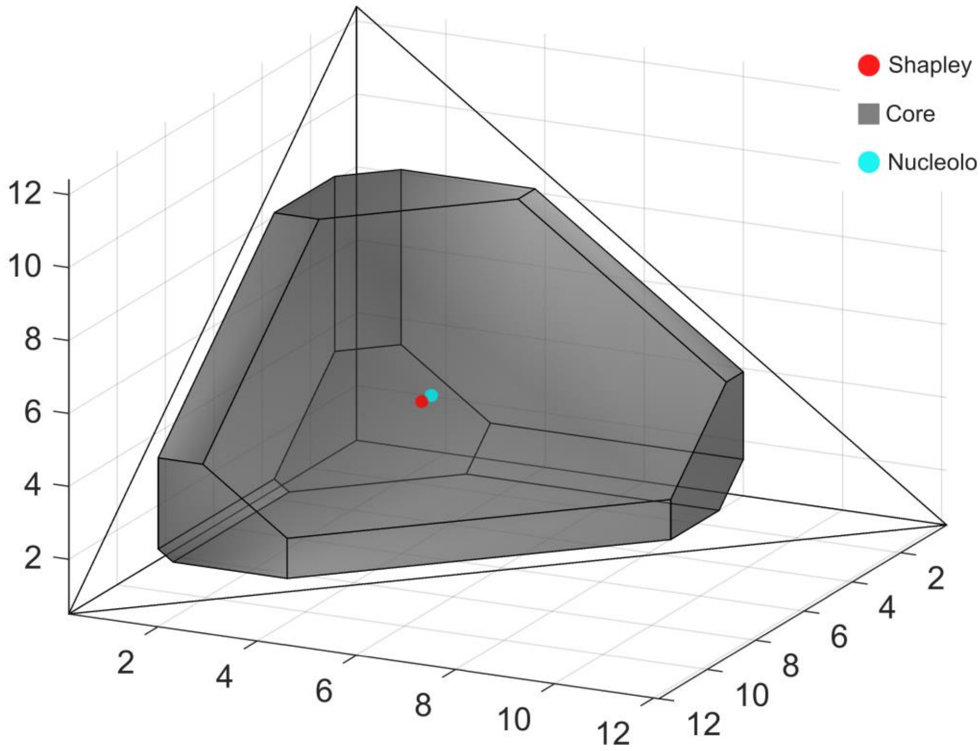


Figura 11: solución del core del juego, Shapley y nucleolo para núcleos urbanos

4.5. Conclusiones

Una vez estudiados los resultados anteriores en los tres juegos se debe contemplar varios aspectos antes de tomar una decisión final.

- Como ya se ha aclarado en varias ocasiones, los valores obtenidos no son reales, sino que son teóricos. Un precio medio del kWh puede rondar los 10 céntimos, mientras que en este trabajo se establecen valores del orden de euros. Esto es porque se ha supuesto un precio en el que se incluiría un porcentaje del coste de las infraestructuras.
- En el core existe multitud de posibles combinaciones de solución, es decir, existen infinidad de *posibles* soluciones, es por ello por lo que se añade un segundo método para encontrar otra solución, el cual sería el valor de Shapley.

- A la hora de calcular los costes finales se obligó a que estos fueran siempre positivos, con el fin de que no apareciese un core vacío o, lo que es lo mismo, que no existiese solución. No obstante, podría darse, en una situación real, que una cierta cooperación no sea adecuada y, por tanto, se llegase a un core vacío. Es por esto por lo que se añade una posible tercera solución: el nucleolo.

Como ya se aclaró, cuando Schmeridler definió el nucleolo, lo hizo con la intención de que funcionase en el caso en el cual el core estuviese vacío. Se decide, por tanto, añadir el cálculo del nucleolo. Aunque, si el core existiese, el nucleolo debe encontrarse dentro de él.

Ahora, para decidir cuál sería mejor solución, se hace la diferencia a cada componente del valor de Shapley y el nucleolo con el fin de ver cuál da un vector de pagos "más caro" y lo que se obtiene es lo siguiente:

Tabla 21: diferencia de los valores de Shapley y nucleolo en agricultores

Diferencia de los valores de Shapley y nucleolo en agricultores		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
-0.125	0.1	0.025

Tabla 22: diferencia de los valores de Shapley y nucleolo en industrias

Diferencia de los valores de Shapley y nucleolo en industrias		
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3
0.0637	0.0667	-0.1333

Tabla 23: diferencia de los valores de Shapley y nucleolo en núcleos urbanos

Diferecia de los valores de Shapley y nucleolo en núcleos urbanos			
Jugador 1	Jugador 2	Jugador 3	Jugador 4
0.1083	-0.1083	-0.125	0.125

En aquellos resultados de las tablas anteriores en los cuales aparezca un valor negativo significa que pagan menos, es decir, sería más beneficioso para esos jugadores usar el valor de Shapley como solución en lugar del nucleolo. Si el valor fuese positivo ocurriría lo contrario.

Se puede observar, entonces, que si se usase el nucleolo como solución final en los casos de agricultores e industrias (juego de 3 jugadores) sería mejor para 2/3 jugadores (en cada juego), ya que el pago sería menor. Que el nucleolo de un mayor beneficio es porque los jugadores no son simétricos y que no sean simétricos implica que Shapley no es un buen valor, ya que una de sus características es la simetría, como se comentó en el apartado 3.5.

Sin embargo, en el caso de los núcleos urbanos (juego de 4 jugadores) ambas soluciones se pueden considerar igualmente correctas al beneficiarse solo la mitad de los jugadores y con unos valores iguales en valor absoluto.

Aunque es cierto que cualquier solución dentro del core puede ser solución y que la solución de nucleolo sería más beneficiosa para la mayor parte de los jugadores, se toma como **solución óptima** de cada caso el vector de costes que da **Shapley**. Esto se decide porque:

- El valor de Shapley tiene más propiedades, pero debido al entorno del juego creado hace que la solución obtenida con este salga ligeramente peor que la del nucleolo. Esto se debe a que los jugadores no son simétricos, axioma del valor del Shapley.

  En el momento en el cual el juego no sea un juego ficticio y se agrupen jugadores de características similares, por ejemplo, tres agricultores que cultiven viñedos, la solución obtenida con el valor de Shapley será mucho mejor.

- El que tenga más propiedades que el nucleolo hace que refleje mejor la situación que el core. Además, la existencia del nucleolo cuando existe el core no aporta mucho a la solución, pero, como ya se ha puntualizado en varias ocasiones, se introduce la posibilidad del cálculo del nucleolo para que en el caso de que en una situación real se obtenga un core vacío, se tenga al menos una solución aceptable.

De modo que, los vectores de costes finales obtenidos son:

Tabla 24: solución final para agricultores

Agricultores		
1.6500	1.1500	1.2000

Tabla 25: solución final para industrias

Industrias		
1.1167	0.6667	1.2167

Tabla 26: solución final para núcleos urbanos

Núcleos urbanos			
3.1833	3.0667	3.3500	3.5000

5 REPARTO DE LOS RECURSOS Y COSTES DE LA DEMANDA DE AGUA

5.1. Marco de la problemática

La necesidad del agua se lleva remarcando desde el principio de este trabajo y el reparto de su coste no es una valoración fácil. Aquí se abordará ese problema del consumo de agua y su reparto de costes.

Cuando se habla de consumo existen dos vías alternativas: abastecerse de aguas locales o comprar el consumo de agua a empresas externas, de modo que se está importando esa agua. Este consumo es complejo, puesto que existen muchos usuarios diferentes que demandan agua y con consumos también diversos, ya que está claro que no demandará la misma cantidad de agua una industria que se dedique a hacer zumos, una vivienda o un centro comercial. Es debido a esto, a la diversidad de usuarios que toman agua cada día, que se centrará de nuevo el trabajo en 3 usuarios principales, pero, a su vez, ahora hay que tener en cuenta el agua del que se puede hacer uso de ella, que puede ser de tres tipos:

- Agua superficial: captada directamente de un embalse o lago.
- Agua subterránea: captada directamente de un manantial, este tipo de aguas son más puras y no suelen necesitar de ningún tratamiento químico, con una filtración puede ser suficiente.
- Agua tratada: agua potabilizada desde unos embalses concretos.

Han sido varios los intentos que se han hecho de mejorar el reparto de las aguas a través de la TJ. A continuación, se presentan algunos.

Braden, Eheart y Saleth (1991) estudiaron la negociación de Nash en la cuenca de Crane Creek, en Kentakee. Si aplicaban el típico modelo de derecho al agua (water rights) veían que era muy rígido. En cambio, aplicando un alquiler o modelo de puntos se podía incrementar la eficiencia. Realizaron un ejemplo de una cuenca pequeña con 8 granjeros y generaron una serie de hipótesis para su estudio: se conoce la cantidad total de agua existente para riego, el sistema de derecho de agua era más estricto en algunas estaciones y, además, el uso consuntivo del agua hacía que la *biding Flow constraints* generase una transferencia inválida. Por lo que, finalmente, los autores creen que no es suficiente un reparto del agua ni a través de un comportamiento cooperativo ni competitivo y deciden generar un modelo de negociación (*Bargaining model*) basado en Harsango (1986), Zanthen (1930) y Nash (1950) [14]. En este nuevo modelo los autores asumen que se puede repartir toda el agua existente entre los n-jugadores en función de las reglas y el entorno de negociación.

En 1992 Harrison y Tisdel ven una problemática en Australia, existen diferentes métodos de asignación de agua. Es por ello que buscan aquel juego cooperativo que genere la distribución más equitativa. El mercado puede realizar acciones individuales, pero esto no tiene porqué garantizar una redistribución de los ingresos del mercado, siendo el agua equitativa a nivel de justicia social. Por lo que se necesita de un modelo de juego cooperativo en forma característica con utilidad transferible. [14]

Para buscar ese modelo realizan un ejemplo con diferentes granjas y establecen una distribución de ingresos según 4 asignaciones diferentes. Estas asignaciones parten de los valores: core, Shapley y de la asignación máxima. Todo esto lleva al *Rawlsion criterion*, donde se busca el máximo bienestar del peor miembro del grupo, evaluando la justicia del modelo. [14]

En el 2000, Sprutmont sugiere un plan de asignación de bienestar entre las riberas de los ríos, con preferencias casi lineales sobre el agua y el dinero. Para ello establece un juego cooperativo que se basa en la eficiencia, la estabilidad del core y las consideraciones justas en la asignación de los ingresos del agua. Estas premisas llevan a un juego convexo donde solo hay un plan de asignación de bienes que cumpla la estabilidad del core para que ninguna ribera tenga un bienestar mayor que el resto. Esto lo consigue con un vector de contribución marginal de cada ribera al río, cuyo orden corresponde al orden de los agentes del río.

La estabilidad y la justicia establecen un bienestar de aspiración, que se corresponde con el máximo bienestar en ausencia del resto. Para conseguirlo, reciben un pago igual a su contribución marginal a la coalición de sus predecesores a lo largo del río. Los autores demuestran que el core tiene una estructura conocida y es convexo.

Y, por último, otra manera de resolver el problema de resolver el reparto de agua lo hicieron en 2003 Van der Brink, Van der Laan y Vasil'ev con un tipo especial de juego cooperativo: **juegos de grafos lineales**, cada jugador está linealmente ordenado. Los autores aplican el concepto de *Harsanyi solution*, de modo que, a cada jugador, se le asigna un pago igual que la suma de sus correspondientes acciones en *Harsanyi dividends.*

Como se ha podido observar son casi 30 años investigando sobre la mejor manera de repartir los costes y los recursos que ofrece el agua y no se ha obtenido una solución que sea "la correcta".

5.2. Jugadores

Los jugadores elegidos son los mismos que en el caso anterior. Se eligen agricultores, industrias y núcleos urbanos porque son los tres grandes consumidores de agua del mercado. Pero en este caso solo habrá un jugador de cada tipo, de modo que cada uno tendrá unas necesidades hídricas distintas al resto. Por ejemplo, el agua de consumo humano debe ser agua potable, es por ello que la mayor parte del agua consumida por los núcleos urbanos será agua tratada, mientras que el resto de servicios que necesiten de ella, como pueden ser la extinción de incendios, la refrigeración o el riego de parques, usarán aguas de calidad inferior.

Se usarán los siguientes jugadores que se alimentarán principalmente de aguas del embalse de Alarcón:

- TJ Agricultura. Se encuentran en Cuenca y su producción se basa en: cebollas, viñedos, olivos, cereales, guisantes y almendros.
- Industria química JVL. Se encuentra en Albacete. Se elige una industria química al ser una gran demandante de agua.
- Valverde del Júcar. Pequeño pueblo de unos mil habitantes ubicado en Cuenca, a las orillas del embalse de Alarcón.

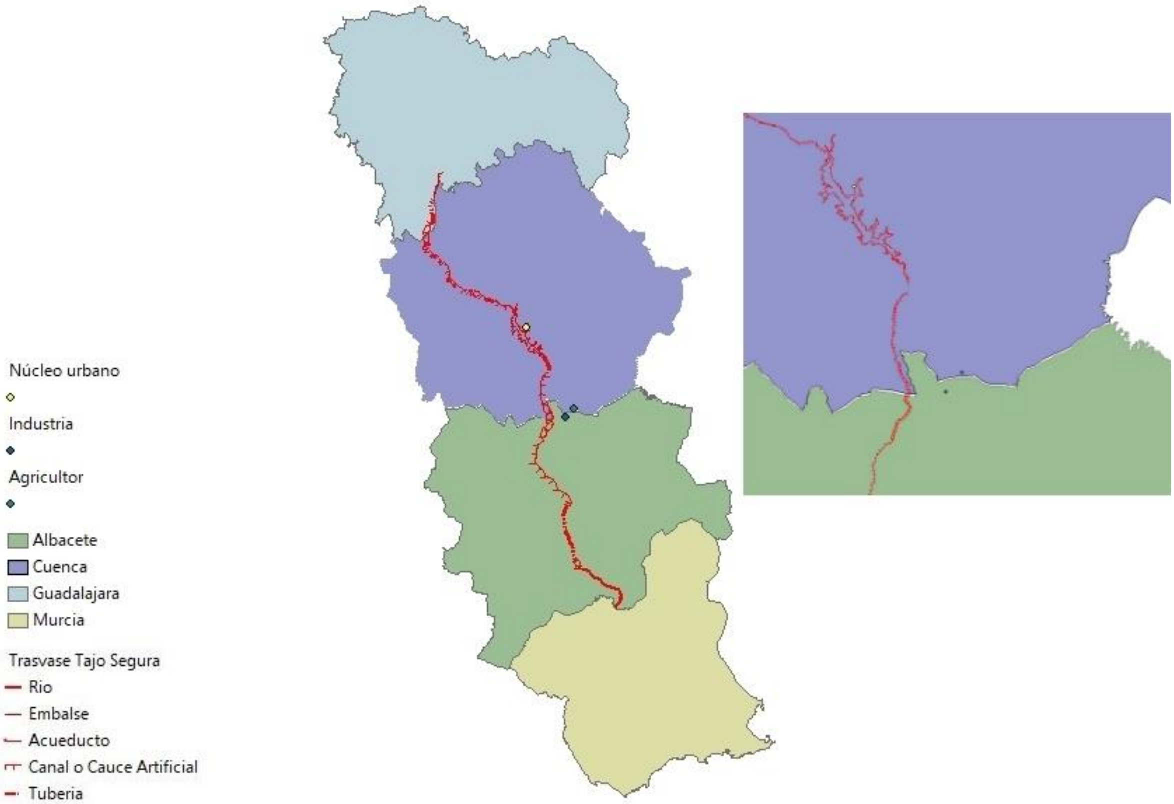


Figura 12: ubicación de los jugadores para el reparto de aguas

5.3. Juego

Sea k = 1, 2, 3 los tres jugadores o usuarios, por lo que las variables de decisión de cada uno de ellos son las siguientes:

S_k= Uso de agua superficial de fuente local (embalse).

G_k = Uso de agua subterránea de fuente local (manantiales).

T_k = Uso de agua tratada (embalses y ríos y lagos).

S_k^* = Uso importado de agua superficial.

G_k^* = Uso importado de agua subterránea.

$D_k^{mín}$ = Cantidad de agua mínima necesaria.

D_k = Cantidad de agua demandada.

S_T = Cantidad máxima disponible de agua superficial desde fuente local.

G_T = Cantidad máxima de agua subterránea disponible de la fuente local.

S_T^* = Máxima cantidad de agua superficial disponible importada.

G_T^*= Uso máximo disponible de agua subterránea importada.

Para el caso de los **agricultores** tendrán, además las siguientes variables:

E = Conjunto de cultivos que solo pueden usar agua subterránea.

a_i= Proporción del cultivo i en el área agrícola.

w_i = Necesidad de agua del cultivo i por ha.

N = Conjunto de cultivos que pueden usar agua tratada.

$w\ = \sum a_i \cdot w_i$ = necesidad total de agua por ha.

a_1= Proporción cultivos sensibles.

a_3 = Proporción cultivos no sensibles.

En el caso de las **industrias** serán las siguientes variables:

B_g = Proporción mínima de agua subterránea que la industria tiene que recibir.

B_t= Proporción máxima de agua tratada que la industria puede usar.

Y, por último, los **núcleos urbanos** dependerán de:

B_d = Proporción máxima de agua tratada que los usuarios domésticos pueden recibir.

Entonces, la estrategia de cada jugador es el vector de cinco elementos:

$$X_k\ =\ (S_k, G_k, T_k, S_k^*, G_k^*)$$

La función de pago de cada jugador es la cantidad total de agua recibida:

$$F_k = S_k +\ G_k +\ T_k + S_k^* + G_k^*$$

5.3.1 Restricciones

Los jugadores tienen dos limitaciones comunes: la cantidad de agua suministrada no puede ser menor que una cantidad mínima necesaria $D_{mín}$ y no puede ser mayor que la demanda, D_k, para evitar el desperdicio de agua:

$$S_k +\ G_k +\ T_k + S_k^* + G_k^* > D_{mín}$$
$$S_k +\ G_k +\ T_k + S_k^* + G_k^* < D_k$$

Además, cada jugador tiene sus propias limitaciones individuales y existen hay cuatro restricciones de interconexión adicionales debido a los recursos limitados:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_T$$
$$G_1 + G_2 + G_3 = G_T$$
$$S_1^* + S_2^* + S_3^* \leq S_T^*$$
$$G_1^* + G_2^* + G_3^* \leq G_T^*$$

Es requerido que se utilicen todos los recursos locales antes de importar agua de otras cuencas.

5.3.1.1 Restricciones de los agricultores

Los usuarios agrícolas (k = 1) tienen dos condiciones principales:

La primera, referida a la **calidad del agua**, ya que el agua subterránea tiene la mejor calidad de riego y el agua tratada tiene la peor, por lo tanto, los cultivos sensibles a la calidad del agua pueden usar solo agua subterránea, y solo los cultivos menos sensibles pueden ser irrigados con agua tratada. La proporción de agua subterránea disponible no puede ser menor que la necesidad de agua de los cultivos que solo pueden usar agua subterránea.

$$\frac{G_1 + G_1^*}{S_1 + G_1 + T_1 + S_1^* + G_1^*} \geq \frac{\sum_{i \in E} a_i \cdot w_i}{w}$$

Del mismo modo, la **proporción de agua tratada** disponible no puede ser mayor que la proporción de necesidad de agua de los cultivos que pueden usar agua tratada.

$$\frac{T_1}{S_1 + G_1 + T_1 + S_1^* + G_1^*} \geq \frac{\sum_{i \in T} a_i \cdot w_i}{w}$$

Éstas dos últimas ecuaciones nos referiremos a ellas de aquí en adelante como:

$$\frac{G_1 + G_1^*}{S_1 + G_1 + T_1 + S_1^* + G_1^*} \geq \alpha_1$$
$$\frac{T_1}{S_1 + G_1 + T_1 + S_1^* + G_1^*} \geq \beta_1$$

Al definir:

$$\frac{\sum_{i \in E} a_i \cdot w_i}{w} = \alpha_1 \qquad \frac{\sum_{i \in T} a_i \cdot w_i}{w} = \beta_1$$

5.3.1.2 Restricciones de las industrias

Los usuarios industriales (k = 2) también tienen sus propias restricciones:

Para mantener una calidad media suficiente del agua utilizada por la industria, se especifica una proporción mínima de agua subterránea, ya que el agua subterránea tiene la mejor calidad. La peor calidad del agua tratada requiere que la industria use solo una proporción limitada de agua tratada en su uso del agua. Con valores de umbral dados $B_{máx}$ y $B_{mín}$, estas restricciones pueden reescribirse como:

$$\frac{G_2 + G_2^*}{S_2 + G_2 + T_2 + S_2^* + G_2^*} \geq B_{mín}$$

$$\frac{T_2}{S_2 + G_2 + T_2 + S_2^* + G_2^*} \leq B_{máx}$$

5.3.1.3 Restricciones de los núcleos urbanos

Los usuarios domésticos (k = 3) solo han tratado la limitación del uso del agua, ya que puede usarse solo para fines limitados, como el riego en parques, fuentes, etc.

$$\frac{T_3}{S_3 + G_3 + T_3 + S_3^* + G_3^*} \leq B_d$$

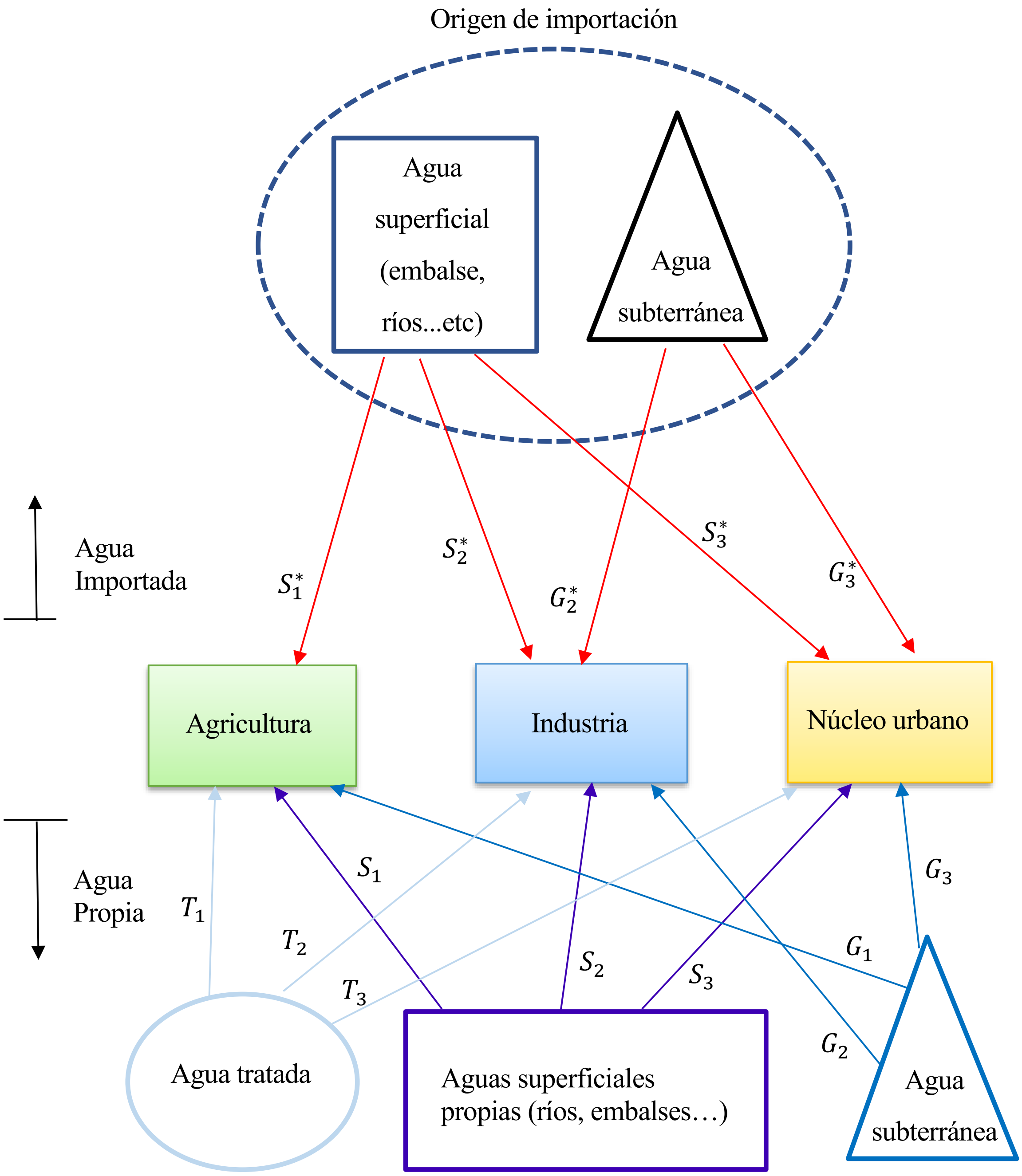
5.3.2 Parámetros del modelo

Este modelo es un juego no cooperativo de tres jugadores con funciones de pago dadas en la ecuación y conjuntos de estrategias definidos por las ecuaciones de restricción con todos los componentes no negativos.

Tabla 27: parámetros del modelo

Jugadores	*Agricultores*	*Industrias*	*Núcleo urbano*
D_k^{min}	50	20	110
D_k	70	60	150
a_1	0.25		
a_3	0.6		
B_g		1.507	
B_t		3.482	
B_d			0.6

5.3.3 Esquema reparto



Agricultor:

$$F_1 = S_1 + G_1 + T_1 + S_1^*$$

Industria:

$$F_2 = S_2 + G_2 + T_2 + S_2^* + G_2^*$$

Núcleo urbano:

$$F_3 = S_3 + G_3 + T_3 + S_3^* + G_3^*$$

Según el esquema presentado, las funciones de pago y las restricciones, anteriormente explicadas, se obtendrían los pagos de cada jugador.

5.4. Resultados

5.4.1 Agricultores

La empresa agricultora con la que se está trabajando produce: almendros, cebollas, cereales, guisantes, olivos y viñedos.

Existen unos cultivos más sensibles que otros en función de la calidad del agua: salinidad, cantidad de toxinas, etc., es por ello por lo que tanto las cebollas, guisantes y almendros se consideran cultivos sensibles (a_1), mientras que a los viñedos, olivos y cereales como cultivos no sensibles (a_3), aunque realmente sean moderadamente sensibles.

Gran parte de la producción de esta empresa son cebollas, viñedos y olivos, el resto está en minoría, por lo que, de la producción, se supone un 30% del terreno para cultivos sensibles y un 60% para los no sensibles. El 10% del terreno restante se encuentra en barbecho y no se contabiliza al no necesitar de riego.

Tabla 28: resultados para agricultores

Parámetro	***Valor***
S_1	30
G_1	5
T_1	2
S_1^*	20
G_1^*	0
$D_1^{mín}$	50
D_1	70
E	1
Cebollas	0.12
Guisantes	0.1
Almendros	0.08
Viñedos	0.3
Olivos	0.18
Cereales	0.12
N	2
W	1.266
w_1	0.3
w_3	2
$\boldsymbol{F_1}$	**57**

Del mismo modo que se habían definido a los cultivos sensibles como a_1 y a los no sensibles como a_3, la nomenclatura para la cantidad de agua que necesitan los cultivos sensibles por hectárea se establece en la tabla 22 como w_1 y para los cultivos no sensibles como w_3.

El que E=1 indica que solo un cultivo necesita de agua subterránea y es por ello que la cantidad de agua subterránea que se usa son 5 hm³/año y no es necesario importar. Lo mismo ocurre con N=2 condiciona que solo dos de los cultivos puedan usar agua tratada, es por lo que la cantidad de agua tratada demandada es solo de 2 hm³/año, es necesario señalar que no tiene porqué ser igual el número de cultivos con el valor de cantidad de agua tratada usada.

Es preciso apuntar de nuevo que todos los valores que aparecen en las tablas son valores teóricos que no tienen que ver con la realidad de la empresa, industria o pueblo, pero que ayudan a concebir una idea de lo que sería posible hacer aplicando teoría de juego a este tipo de situaciones.

5.4.2 Industrias

En el caso de las industrias se trabaja en función de unas proporciones mínimas y máximas de agua de manantial (muy buena calidad) y de agua tratada, respectivamente, que es lo que se especificó anteriormente como B_{min} y $B_{máx}$. Por otro lado, están las proporciones que reciben de estas aguas: B_g de aguas de manantiales (subterráneas) y B_t de aguas tratadas.

Tabla 29: resultados para industrias

Parámetro	***Valor***
S_2	12
G_2	3
T_2	1.54
S_2^*	8
G_2^*	2
$D_2^{mín}$	20
D_2	60
$B_{mín}$	0.1
$B_{máx}$	2
B_g	1.51
B_t	3.48
$\boldsymbol{F_2}$	**26.54**

5.4.3 Núcleos urbanos

En el caso de los núcleos urbanos casi toda el agua que se precisa es agua tratada (potable) y parte de aguas superficiales para usos que precisen menor calidad del agua. En este apartado se debe determinar B_d que se define como la proporción máxima de agua tratada que los hogares pueden recibir. De debe establecer este parámetro porque el agua tratada es más cara que si se tomase de un manantial o de un embalse, pero es necesario que sea agua tratada para consumo humano.

El agua tratada es más cara por razones bastante obvias: necesitan de un tratamiento mucho mayor que el agua de riego o de refrigeración, el cloro que se añade para potabilizarla debe ser suficiente como para que exista una cierta cantidad de cloro residual y no se reproduzcan microorganismos perjudiciales en ella.

Tabla 30: resultado para núcleos urbanos

Parámetro	***Valor***
S_3	17
G_3	8
T_3	50
S_3^*	15
G_3^*	2
$D_3^{mín}$	80
D_3	150
B_d	0.6
$\boldsymbol{F_3}$	**92**

5.4.4 Comprobaciones

Para ver si los resultados obtenidos son válidos se debe cumplir que globalmente, entre los tres jugadores, se cumpla lo mencionado anteriormente:

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_T$$
$$G_1 + G_2 + G_3 = G_T$$
$$S_1^* + S_2^* + S_3^* \leq S_T^*$$
$$G_1^* + G_2^* + G_3^* \leq G_T^*$$

De modo que:

S_T que es la cantidad total de agua superficial que se toma del embalse de Alarcón, en este caso, debe valer: $S_T = 59$

G_T que es la cantidad total de agua subterránea que se toma de manantiales, debe valer: $G_T = 16$. Está bien que este valor sea menor porque es un agua más costosa de obtener y, adicionalmente, hay que tener en cuenta que no se debe sobreexplotar los acuíferos.

S_T^* que es la cantidad total de agua superficial que se importa, debe ser $S_T^* \geq 43$

G_T^* que es la cantidad total de agua subterránea que se importa, debe ser $G_T^* \geq 4$

5.5. Conclusiones

Después del estudio del reparto de aguas entre estos tres jugadores, la solución que realmente es la que interesa es la cantidad de agua recibida por cada jugador (F_k), que sería la función de pago de cada uno de ellos.

$$F_k = S_k + G_k + T_k + S_k^* + G_k^*$$

Al igual que en el caso de las centrales y como se ha aclarado en varias ocasiones, los valores obtenidos no son reales, sino que son teóricos. La obtención de la demanda de agua real de los jugadores es muy difícil de obtener. De hecho, puede ser variable estacionalmente, cosa muy probable en el caso del pueblo y de la empresa agricultora, ya que no será la misma la demanda en función de la población (vacaciones) o de la estación (verano/invierno), respectivamente.

Es obligatorio que $D_k^{mín} < F_k < D_k$, ya que no es posible que la solución, la función de pago F_k, sea menor que la cantidad mínima de agua necesaria, pero tampoco puede ser mayor que la cantidad demandada que pueden permitirse los jugadores.

En el caso de la empresa **agricultora** recibe un total de 57 hm^3/año, lo que se puede considerar correcto, puesto que la cantidad mínima de agua necesaria estaba establecida en $D_k^{mín}$ =50 hm^3 y la cantidad que demanda es de D_k =70 hm^3.

Cada cultivo tiene asignado un porcentaje de área del terreno, de modo que se puede calcular con ello la necesidad de agua por hectárea. Que, en última estancia, se encuentra relacionada con los diferentes tipos de agua que recibe, como se explicó en las restricciones.

En el caso de la **industria** química recibe un total de 26,54 hm^3/año, lo que se puede considerar correcto, puesto que la cantidad mínima de agua necesaria estaba establecida en $D_k^{mín}$ =20 hm^3 y la cantidad que demanda es de D_k =60 hm^3.

En la industria se establecen unos valores máximos de agua tratada que puede consumir, debido al precio de la misma (es la más costosa), y unos valores mínimos de agua subterránea, ya que se considera de una calidad muy buena y es más fácil de destilar, aspecto necesario en este tipo de industrias.

Y, por último, para el **núcleo urbano,** recibe un total de 92 hm^3/año, lo que se puede considerar correcto, puesto que la cantidad mínima de agua necesaria estaba establecida en $D_k^{mín}$ =80 hm^3 y la cantidad que demanda es de D_k =150 hm^3.

Tiene sentido que el pueblo sea el que demanda más agua, ya que no es solo consumo humano, aunque la proporción máxima de agua que puede recibir se queda fijada en un 60% del total, sino que hay que añadir el riego de parques y jardines, la limpieza de calles y la refrigeración, entre otros.

6 EL POR QUÉ USAR LA TEORÍA DE JUEGOS EN BASE A LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Cuando se tiene un problema como alguno de los mostrados en el trabajo, en los que es necesario optimizar un cierto valor, ya sea el reparto de un producto, de un beneficio obtenido o el pago de un cierto bien, existen diferentes métodos de resolución. Las tres principales son las siguientes:

- **Programación no lineal**: podría considerarse como la mejor opción porque la solución obtenida sería la más cercana a la realidad, pero los problemas no lineales tienen la principal contraprestación de que son muy difíciles de manejar, tanto su modelización como su resolución. Es por ello por lo que muchas veces no merece la pena esa mayor complicación en el cálculo de una solución.

- **Programación lineal:** los problemas lineales no suelen presentarse en la realidad, sino que suelen venir de haber simplificado un problema no lineal, mediante métodos de linealización, en el cual ha habido una gran pérdida de información. Si estos datos que no se tienen en cuenta a la hora de haber linealizado fuesen locales, el inconveniente que esto causaría no sería importante. Pero, generalmente, los problemas con los que se trabaja son globales y perduran durante un espacio de tiempo determinado, por lo que no es conveniente esa pérdida de información.

  A lo anterior es preciso añadir que la solución obtenida se quedaría escasa al no ofrecer ningún tipo de propiedad la resolución mediante programación lineal, ya que son simples restricciones que ayudan a la obtención de un resultado final. De modo que se pierde la parte cualitativa del problema, aspecto muy importante del mismo, y se resuelve, pero sin llegar a grandes conclusiones.

- **Teoría de Juegos.** La Teoría de Juegos ofrece:
  - Un cálculo relativamente simple gracias a la existencia de los programas actuales.
  - Una resolución no sometida a la linealización o no linealización del problema.
  - Exhibir las propiedades cualitativas del problema, lo que es, seguramente, la razón más importante por la que se debe de tener en cuenta el uso de la TJ en la resolución de problemas.
  - Muchas posibles soluciones en función del ámbito de aplicación del problema, pudiendo elegir así las mejores para el cual tenemos que resolver.

De modo que, como ya se había señalado al principio del trabajo, en el apartado 1.4." una excesiva simplificación llevaría a una mala interpretación y a errores significativos en los resultados económicos". Aquí se quería indicar que no es buena idea realizar el cálculo de los costes a través de la programación lineal, ya que esas simplificaciones darían lugar a errores que pondría en peligro la elección de los costes obtenidos, pudiendo no ser los más adecuados.

Queda señalar, que como se ha mostrado en los dos apartados anteriores, se ha obtenido unas soluciones adecuadas a pesar del uso de datos ficticios y esto puede considerarse como una razón más a la hora del uso de la TJ en la solución de estos tipos de problema, ya que se adapta realmente bien a los datos que se tenga y siempre es posible encontrar algún tipo de solución que satisfaga las necesidades de los jugadores.

REFERENCIAS

[1] Ad., «SONDAGUA,» 15 Mayo 2019. [En línea]. Available: http://www.sondagua.cl/blog/historia-y-origen-de-los-pozos-de-agua/.

[2] J. J. Argudo García, «iagua,» 23 Mayo 2019. [En línea]. Available: https://www.iagua.es/blogs/juan-jose-argudo-garcia/al-andalus-y-agua-islamica.

[3] F. Arbués Gracia, «Necesidades y derechos de propiedad del agua,» de *V Encuentro de Economía Pública*, Valencia, 1998.

[4] J. von Neumann y O. Morgenstern, Theory of games and economic behaviour, Princeton: Princeton University Press, 1953.

[5] A. v. Gellekom, *Cost and profit sharing in a cooperative environment,* Nijmegen, 1999.

[6] S. Allende Alonso, C. Bouza Herrera y J. Martínez Barbeito, «Una visita a la teoría de juegos: los juegos no-cooperativos,» *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación,* vol. 4, nº 1, pp. 27-41, 2006.

[7] J. Herrera Sant, «La energía eléctrica en Castilla-La Mancha. Balance energético del trasvase Tajo-Segura,» Centro de Estudios Castilla-La Mancha, 1992.

[8] «CEDEX,» [En línea]. Available: https://ceh.cedex.es/Planificacion/Planificacion_hidrologica/ComplejoTajoSegura/complejo_tajo_segura.htm.

[9] R. A. Young, «Measuring Economic Benefits for Water Investments and Policies,» *World Bank Technical Paper,* nº 338, 1996.

[10] C. N. Bouza-Herrera, *Los modelos teóricos de la economía y la Teoría de Juegos,* Havana: University of Havana, 2017.

[11] S. Kim, Game Theory applications in network design, South Korea: IGI Global, 2014.

[12] J. Sánchez-Pérez, «Juegos cooperativos y sus aplicaciones económicas».

[13] D. Schmeidler, «The Nucleolus of a Characteristic Function Game,» de *Game and economic theory. Selected contributions in honor of Robert J. Aumann*, S. Hart y A. Neyman, Edits., The University of Michigan Press, 1995.

[14] I. Parrachino, A. Dinar y F. Patrone, «3. Application to Water Resources,» de *Cooperative game theory and its application to natural, environmental and water resource issues.*, 2006, p. 46.

[15] B. McQuillin, «The extended and generalized Shapley,» 2008.