Inteligencia Artificial. Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial
ISSN: 1137-3601
revista@aepia.org
Asociación Española para la Inteligencia Artificial
España

Obtención de patrones de comportamiento de modelos semicualitativos

J.A. Ortega, R.M. Gasca, M. Toro
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos.
Universidad de Sevilla
Avda. Reina Mercedes s/n. Sevilla (Spain)
{jaortega, gasca,mtoro}@lsi.us.es

Resumen

En este artículo se propone una nueva metodología pensada para obtener los patrones de comportamiento de los modelos semicualitativos de sistemas dinámicos. En estos sistemas se permite la inclusión de conocimiento cualitativo y cuantitativo. La información cualitativa puede componerse de: operadores cualitativos, etiquetas cualitativas, funciones de bandas y funciones cualitativas. Además se presenta un formalismo para incorporar esta información a los modelos.
La idea de la metodología se puede resumir en la siguiente frase: "*cuando un modelo semicualitativo se transforma en una familia de modelos cuantitativos, cada uno de estos modelos tiene un comportamiento cuantitativo diferente, si bien entre si pueden responder a comportamientos cualitativos similares*". La metodología propuesta permite el estudio no sólo del regimen estacionario, ampliamente estudiado en la literatura sino que además posibilita realizar un estudio del régimen transitorio de los sistemas.
En este artículo además se hace un estudio teórico sobre la validez de las conclusiones obtenidas. La metodología se ha aplicado a un modelo de crecimiento logístico donde se ha incorporado un retraso en el bucle de realimentación. Este modelo tiene información cualitativa en las ecuaciones que lo definen.

1 Introducción

El conocimiento que se tiene de los sistemas que se estudian en ciencia e ingeniería está normalmente compuesto de información cualitativa, cuantitativa, y mezcla de las dos, que denominamos como información semicualitativa. Todo este conocimiento debe ser tenido en cuenta a la hora de estudiar los modelos construidos para estos sistemas. Estos modelos deben aportar diferentes niveles de abstracción numérica, desde la descripción puramente cualitativa [Kuipers94], semicuantitativa [Kay96] [Ortega *et al.* 98] [Berleant&Kuipers97], numérica intervalar [Vescovi *et al.* 95] [Corliss95] y cuantitativa.

La mayoría de las veces en los sistemas dinámicos no se considera el conocimiento cualitativo para el estudio y simulación de los mismos. En tal caso se trabajan con modelos cuantitativos, cuyo estudio es bien conocido. Pero si se considera dicho conocimiento, se han desarrollado en la bibliografía diferentes aproximaciones: transformación de relaciones no lineales a lineales a trozos, el método de MonteCarlo, distribuciones de probabilidad, métodos numéricos con intervalos reales, relaciones causales [Bousson&Travé-Massuyès94], conjuntos difusos [Bonarini&Bontempi94], programación lógica con restricciones [Hickey94], y combinación de todos los niveles de abstracción cualitativo y cuantitativo [Kay96], [Gasca98]. En este trabajo los sistemas dinámicos estudiados poseen cierta clase de conocimiento cualitativo.

En relación con los sistemas dinámicos, hay que decir que hay bastante bibliografía que estudia el régimen estacionario de un sistema dinámico, sin embargo, el estudio del régimen transitorio también es bastante importante. Por ejemplo, en los sistemas industriales de producción es interesante el estudio del transitorio para perfeccionar su rendimiento o para conocer el tiempo de recuperación tras fallos en su funcionamiento. Con la metodología descrita en este artículo se puede estudiar cualquier instante del sistema, por lo tanto, el régimen estacionario y el transitorio.

La metodología propuesta transforma un modelo semicualitativo en una familia de modelos cuantitativos. La simulación de cada modelo cuantitativo genera una trayectoria en el espacio de fase. Estos comportamientos cuantitativos se almacenan en una base de datos. Se propone un lenguaje de consulta/clasificación sobre esta base de datos. Las consultas permiten conocer las propiedades cualitativas de las trayectorias de la base de datos. La clasificación permite etiquetar los diferentes comportamientos cualitativos del sistema. Este comportamiento se expresa por medio de un conjunto de reglas cualitativas jerárquicas. Si bien, este último procedimiento no se aborda en este artículo, y su tratamiento se deja para posteriores trabajos.

Este artículo se distribuye como sigue: en primer lugar se define el concepto de modelo semicualitativo y de manera esquemática la metodología. A continuación se muestra el tipo de conocimiento cualitativo y sus técnicas de la transformación. Seguidamente se explica el algoritmo para la generación de la base de datos, y se define la sintaxis abstracta y la semántica del lenguaje de consulta/clasificación. Se realiza además, un estudio teórico sobre la validez de las conclusiones obtenidas del modelo y su extrapolación al sistema real. Finalmente, se aplica la metodología a un modelo de crecimiento logístico con un retraso. La metodología se va a aplicar a un sistema real de producción industrial de acero [Ortega *et al.* 99].

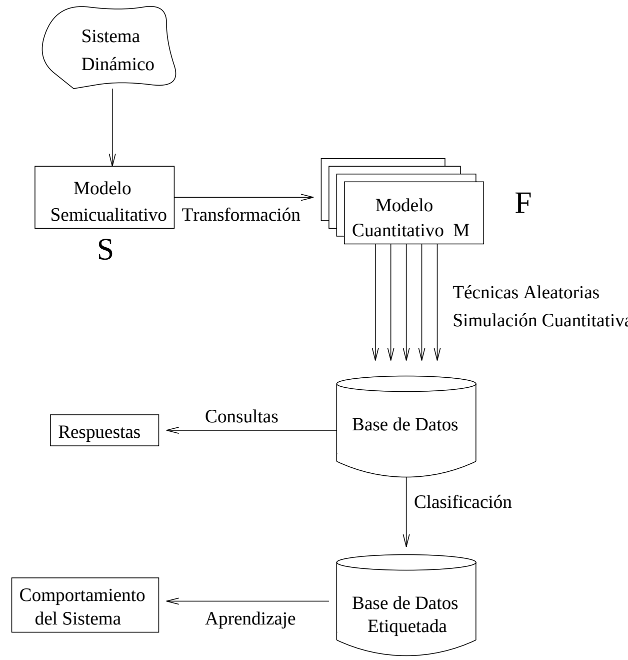

Figura 1: Metodología propuesta

2 Modelos semicualitativos y metodología propuesta

La metodología aplicada se recoge de manera esquemática en la figura 1. A partir de un sistema dinámico del que se tiene cierto tipo de conocimiento cualitativo, se construye un modelo semicualitativo S. Los modelos semicualitativos se formulan con operadores aritméticos y relacionales, funciones predefinidas (ln, exp, sen), literales numéricos y el conocimiento cualitativo que posteriormente se describe.

Sea un modelo semicualitativo S obtenido de un sistema dinámico con conocimiento cualitativo, formulado como sigue

$$\Phi(\dot{x}, x, q, t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \Phi_0(q, x_0) \quad (1)$$

siendo $x \in I\!R^n$ el conjunto de variables de estado del sistema, q los parámetros, t el tiempo, $\dot{x}$ la variación de las variables de estado con el tiempo, Φ_0 las restricciones con las condiciones iniciales del sistema, y Φ las restricciones que definen el sistema y que dependen de $\dot{x}, x, q, t$.

Cuando la metodología se aplica, las ecuaciones del sistema dinámico (1) se transforman en un conjunto de restricciones entre las variables, parámetros e intervalos. En este artículo, estamos interesados en aquellos sistemas que pueden expresarse como (2) después de que las reglas de transformación se hayan aplicado

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, p, t), \quad x(t_0) = x_0, \\ p \in I_p, \quad x_0 \in I_0 \end{cases} \tag{2}$$

donde p incluye los parámetros del sistema y los nuevos parámetros obtenidos por medio de las reglas de la transformación que posteriormente explicaremos en este trabajo, f es una función obtenida aplicando las reglas de transformación, e I_p, I_0 son intervalos reales. La ecuación (2) es una familia F de sistemas dinámicos dependientes de p y x_0.

Cada modelo cuantitativo $M \in F$ se obtiene mediante técnicas estocásticas. La simulación cuantitativa de cada modelo M origina una trayectoria cuantitativa. Cada una está formada con los valores de las variables de estado desde su valor inicial hasta su valor final y los valores de los parámetros del sistema. Por lo tanto, cada trayectoria contiene para las variables de estado, sus valores en régimen transitorio y en estacionario. Se obtiene una base de datos de trayectorias cuantitativas T con todos estos comportamientos cuantitativos. Se propone un lenguaje para realizar preguntas sobre las propiedades cualitativas del conjunto de trayectorias incluidos en la base de datos. Estas trayectorias también pueden ser clasificadas según algún criterio, obteniéndose entonces una base de datos etiquetada. Los diferentes patrones cualitativos de comportamiento del sistema se pueden obtener automáticamente a partir de la base de datos etiquetada aplicando algoritmos de aprendizaje basados en algoritmos genéticos, si bien estos últimos no se explican en este artículo, dejando su descripción para futuros trabajos.

3 Conocimiento cualitativo

Los sistemas dinámicos que se estudian en este trabajo pueden tener conocimiento cualitativo en los parámetros, en las condiciones iniciales y en las funciones que forman el sistema de ecuaciones diferenciales. Este conocimiento se puede expresar mediante operadores cualitativos, etiquetas cualitativas, funciones de banda y funciones continuas cualitativas. Cada uno de ellos y sus técnicas de transformación se detallan en esta sección.

En primer lugar, hay que considerar que la representación del conocimiento cualitativo se realiza mediante operadores que tienen asociados intervalos reales. Esta representación tiene como principal ventaja permitir la integración del conocimiento cualitativo y cuantitativo de manera sencilla [Gasca *et al.* 96]. También posibilita la incorporación del conocimiento de los expertos en la definición del rango de las variables y parámetros cualitativos del sistema. Hay técnicas desarrolladas sobre análisis de intervalos [Moore79], [Alefeld&Herzberger83] para solucionar los problemas de ecuaciones diferenciales con variables y parámetros que son intervalos.

3.1 Operadores Cualitativos

Los *operadores cualitativos* representa los parámetros y las condiciones iniciales cualitativas. Cada operador op cualitativo se define mediante un intervalo I_{op} donde se puede decir que la magnitud tiene esa etiqueta cualitativa. El intervalo para cada magnitud es suministrado por los expertos. Se clasifican en unarios U y binarios B.

3.1.1 Operadores unarios

Cada magnitud cualitativa del sistema tiene sus propios operadores unarios. Sea U_x el conjunto de operadores unarios para una magnitud x, por ejemplo $U_x = \{VN_x, MN_x, LN_x, AP0_x, LP_x, MP_x, VP_x\}$ representa para x el conjunto de etiquetas cualitativas *muy negativo, moderadamente negativo, ligeramente negativo, aproximadamente cero, ligeramente positivo, moderadamente positivo y muy positivo* respectivamente. La regla de transformación de cada operador unario es

$$op_u(e) \quad \equiv \quad \{\ e - r = 0, \quad r \in I_u \tag{3}$$

r es una nueva variable e I_u el intervalo ligado a op_u definido de acuerdo con [Travé-Massuyès *et al.* 97].

3.1.2 Operadores binarios

Sean e_1, e_2 dos expresiones aritméticas, y sea op_b un operador binario. La expresión $op_b(e_1, e_2)$ denota una relación cualitativa entre e_1y e_2. Se clasifican en

- Operadores relacionados con la diferencia $\geq, =, \leq$, a los que se les aplican las siguientes reglas de transformación

$e_1 = e_2 \quad \equiv$	$e_1 - e_2 = 0$
$e_1 \leq e_2 \quad \equiv$	$\begin{cases} e_1 - e_2 - r = 0 \\ r \in [-\infty, 0] \end{cases}$
$e_1 \geq e_2 \quad \equiv$	$\begin{cases} e_1 - e_2 - r = 0 \\ r \in [0, +\infty] \end{cases}$

- Operadores relacionados con el cociente $\{\ll, - <, \sim, \approx, \gg, Vo, Ne, ...\}$, cuya regla de transformación es

$$op_b(e_1, e_2) \quad \equiv \quad \begin{cases} e_1 - e_2 * r = 0 \\ r \in I_b \end{cases} \qquad (4)$$

siendo r una nueva variable e I_b el intervalo ligado a op_b de acuerdo con [Travé-Massuyès *et al.* 97].

3.2 Funciones de banda

Una función de banda $y = g(x)$ (figura 2) representa la familia de funciones incluidas entre dos funciones reales, una superior $\overline{g} : I\!R \rightarrow I\!R$ y otra inferior $\underline{g} : I\!R \rightarrow I\!R$. Se denotan por medio de

$$\langle \underline{g}(x), \overline{g}(x), I \rangle, \qquad \forall x \in I : \quad \underline{g}(x) \leq \overline{g}(x) \quad (5)$$

donde I es el rango de definición de g, y x es la variable independiente. La regla de la transformación que se aplica a (5) es

$$g(x) = \alpha \underline{g}(x) + (1 - \alpha)\overline{g}(x) \quad \text{con}\, \alpha \in [0, 1] \quad (6)$$

donde α es una nueva variable de manera que si $\alpha = 0 \Rightarrow g(x) = \overline{g}(x)$ y si $\alpha = 1 \Rightarrow g(x) = \underline{g}(x)$ y cualquier otro valor de α perteneciente al intervalo [0,1] representa un valor comprendido entre $\underline{g}(x)$ y $\overline{g}(x)$.

3.3 Funciones continuas cualitativas

Una función continua cualitativa $y = h(x)$ (figura 3) representa una restricción entre los

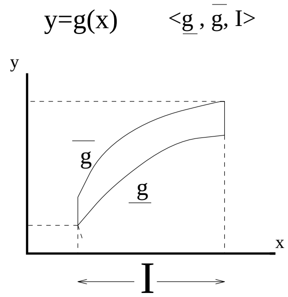

Figura 2: Función de banda

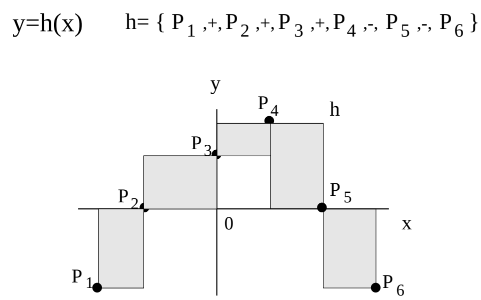

Figura 3: Función cualitativa continua

valores de x, y según las propiedades de h. Se denotan por

$$y = h(x), \quad h \equiv \{P_1, s_1, P_2, ...s_{k\;1}, P_k\} \quad (7)$$

siendo P_i puntos de la función, cada uno se define por el par de marcas cualitativas (d_i, e_i), siendo d_i la marca asociada a la x y e_i a y. Estos puntos están separados por el signo s_i de la derivada en el intervalo entre dos puntos consecutivos. El signo s_i es $+$ si en el intervalo correspondiente la función es monótona creciente, $-$ si es decreciente, ó 0 si es constante. Una función cualitativa monótona es un caso particular de estas funciones donde el signo es siempre el mismo $s_1 = ... = s_{k\;1}$. La interpretación cualitativa (figura 4.a) para cada $P_i = (d_i, e_i)$ de $y = h(x)$ es

$$\begin{cases} \text{si } x = d_i \Rightarrow y = e_i \\ \text{si } d_i < x < d_{i+1} \Rightarrow \begin{cases} s_i = + \Rightarrow e_i < y < e_{i+1} \\ s_i = - \Rightarrow e_i > y > e_{i+1} \\ s_i = 0 \Rightarrow y = e_i \end{cases} \end{cases}$$

Las reglas de transformación de una función continua cualitativa se aplican en tres pasos:

a) Normalización
La definición de la función se *completa* y *homogeneiza* usando las siguientes propiedades de

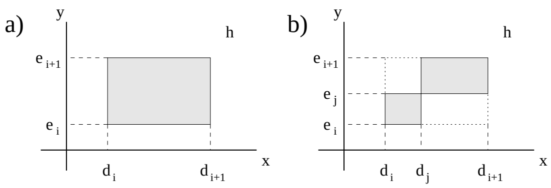

Figura 4: Interpretación cualitativa de una función

continuidad:
1. *una función que cambia de signo entre dos puntos consecutivos pasa a través de un punto cuyo valor en la función es 0*
2. *una función cuya derivada cambia de signo entre dos puntos consecutivos, pasa por un punto cuya derivada es cero.*

La definición de cualquier función (7) se completa siempre con los puntos extremos ($-\infty$, $+\infty$), los punto de corte con los ejes, y aquellos donde cambia la derivada (un máximo o un mínimo de h).

b) Extensión
La definición de estas funciones se enriquece mediante un proceso automático de incorporación de nuevas marcas. Esto se hace para disminuir la incertidumbre en la definición de una función, ya que como puede observarse el área del rectángulo se reduce (figura 4.b).

c) Transformación
Una función cualitativa continua

$$y = h(x), \quad h \equiv \{P_1, s_1, P_2, ...s_{k\ \ 1}, P_k\} \quad (8)$$

donde cada punto $P_i = (d_i, e_i)$ se transforma en un conjunto de funciones cuantitativas H. Cada función de H cumple las restricciones de la función cualitativa h. Se aplica el algoritmo **Seleccionar H** para obtener H. Este algoritmo divide h en sus segmentos. Un *segmento* es una sucesión de puntos consecutivos $\{P_m, ..., P_n\}$ de manera que todos tienen igual signo de derivada y no contienen un punto que corte un eje. Los segmentos dividen una función en regiones monótonas. El algoritmo propuesto aplica técnicas estocásticas para escoger cada función cuantitativa de H. Estas técnicas son similares al método de MonteCarlo, sin embargo, los valores obtenidos deben satisfacer las restricciones de h. La heurística seguida aplica una distribución aleatoria uniforme para obtener el valores para cada marca. Los valores obtenidos deben verificar las mismas relaciones de orden que existían entre sus respectivas marcas.

4 Generación de la base de datos de trayectorias

Aplicando las reglas de transformación a S se obtiene una familia F de modelos cuantitativos. Esta familia depende de un conjunto de parámetros intervalares p y de las funciones H. Cada modelo particular M de F se selecciona por medio de técnicas estocásticas, y se simula de manera cuantitativa aplicando cualquiera de las técnicas de simulación existentes (Euler, Runge-Kutta, ...). Esta simulación genera una trayectoria r que se almacena en la base de datos T.

Los siguientes algoritmos se aplican para obtener T.

Seleccionar Modelo(F)
para cada parámetro o variable intervalar de F
  seleccionar un valor en su intervalo
para cada función h de F
  seleccionar una función cuantitativa H

Generación de base de datos T
$T := \{\}$
para $i = 1$ a N
  M:= Seleccionar Modelo(F)
  r := Simulación Cuantitativa(M)
  $T := T \cup r$

donde N es el número de simulaciones a realizar y se define de acuerdo con la sección 6.

5 Lenguaje de consulta/clasificación

El objetivo de esta sección es describir un lenguaje de consulta para obtener información sobre la base de datos obtenida. Este lenguaje se amplia con la posibilidad de clasificar las trayectorias con etiquetas cualitativas, y así obtener una base de datos clasificada, a la que se le podrán aplicar técnicas de aprendizaje para describir los comportamientos del sistema.

5.1 Sintaxis abstracta

Sea T el conjunto de todas las trayectorias r almacenadas en la base de datos. La sintaxis abstracta del lenguaje propuesto es

Q:	$\forall\, r \in T \bullet [r, P]$	P:	P_b
$\mid$	$\exists\, r \in T \bullet [r, P]$	$\mid$	$P \,\wedge\, P$
$\mid$	$\mathcal{N} r \in T \bullet [r, P]$	$\mid$	$P \,\vee\, P$
$\mid$	$[r, p]$	$\mid$	$\neg\, P$
P_b :	P_d	P_d :	EQ
$\mid$	$f(L(F))$	$\mid$	CL
$\mid$	$\forall t : F \bullet F$		
$\mid$	$\exists t : F \bullet F$		
F :	F_b	F_b :	e_b
$\mid$	$F \,\&\, F$	$\mid$	$e \in I$
$\mid$	$F \mid F$	$\mid$	$u(e)$
$\mid$	$!F$	$\mid$	$b(e, e)$

Una consulta Q es: un cuantificador $\forall, \exists, \mathcal{N}$ aplicado sobre T, o una consulta básica $[r, P]$ que evalúa a *true* cuando la trayectoria r verifica la propiedad P.

Una propiedad P se puede formular mediante la composición de otras propiedades utilizando operadores lógicos $\wedge, \vee, \neg$. El resultado es la aplicación de los operadores entre las propiedades parciales.

Una propiedad básica P_b puede ser: una propiedad predefinida P_d, una función booleana f aplicada sobre una lista L de puntos o intervalos que verifican una fórmula F, o un cuantificador $\forall, \exists$ aplicado a los valores de una trayectoria particular durante un tiempo t. Este tiempo puede ser: un instante, un rango de tiempo, un operador temporal predefinido, o la lista de tiempos donde se verifica una fórmula F.

Una propiedad predefinida P_d es aquella cuya formulación es automática. Corresponden normalmente con consultas que se realizan sobre los sistemas dinámicos [Ortega *et al.* 97]. Hay dos predefinidas: EQ que se verifica cuando la trayectoria acaba en un equilibrio estable; y CL cuando acaba en un ciclo límite.

Una fórmula F puede componerse de otras fórmulas combinadas por medio de operadores booleanos $\&, |, !$. Una fórmula básica F_b puede ser una expresión booleana e_b, o una expresión numérica e perteneciente a un intervalo, o un operador cualitativo unario u o binario b.

Clasificación

Una regla de la clasificación se formula como un conjunto de consultas básicas con etiquetas, y posiblemente otras expresiones

$$[r, P_A] \Rightarrow A, e_{n1}, \ldots \quad [r, P_B] \Rightarrow B, e_{n2}, \ldots \quad \ldots$$

Una trayectoria r se clasifica con la etiqueta δ si verifica la propiedad P_δ.

5.2 Semántica

La semántica de cada instrucción de este lenguaje se transforma en una consulta sobre la base de datos. La consulta $[r, P]$ es *true* si la trayectoria r verifica la propiedad P. La semántica de una consulta con un cuantificador depende de este cuantificador. Si es $\forall$, evalúa a *true* cuando todas las trayectorias $r \in T$ verifican P. Si es $\exists$ devuelve *true* cuando hay al menos una trayectoria $r \in T$ que verifica P. Si es $\mathcal{N}$ entonces se devuelve el número de trayectorias de T que cumplen P.

Sea $\forall t : F_1 \bullet F_2$ una propiedad básica, que será *true* si durante el tiempo que F_1 se satisface, todos los valores de r verifican F_2. Si el cuantificador es $\exists$, entonces es *true* cuando al menos un valor de r que satisface F_1, también satisface F_2. Para evaluar una fórmula F, es necesario sustituir sus variables para sus valores. Estos valores se obtienen de T.

Sea $[r, P_A] \Rightarrow A, e_{A1}$ una regla de la clasificación. Una trayectoria $r \in T$ se clasifica con la etiqueta A si verifica propiedad P_A. El resultado de evaluar e_{A1} para esta trayectoria también se guarda en la base de datos.

6 Estudio teórico sobre las conclusiones

Al afirmar con la metodología que "hay un comportamiento del sistema que verifica la propiedad P" o que "todos los comportamientos del sistema verifican la propiedad P", surge la pregunta: *¿son las conclusiones obtenidas aplicables al sistema real?* La respuesta se encuentra en esta sección.

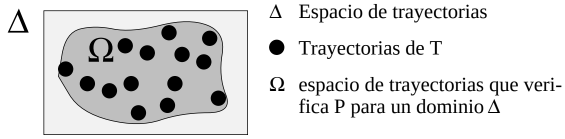

Figura 5: Espacio de Trayectorias

La pregunta que se va a responder a continuación es: *¿cual es la condición necesaria para afirmar que todos los comportamientos del sistema verifican una propiedad P?.*

Sea Δ el espacio de trayectorias del sistema, y sea Ω el espacio de las trayectorias de Δ que verifican P (figura 5). Sea $Vol(s)$ el volumen de un espacio s. Estamos interesados en saber *¿cual es la condición que debe verificarse para asegurar que $Vol(\Delta) = Vol(\Omega)$?.* De forma esquemática, esta cuestión puede plantearse como ¿cual es la condición que debe cumplirse para que la siguiente implicación sea cierta?

$$\forall r \in T \bullet [r, P] \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \forall r \in \Delta \bullet [r, P] \tag{9}$$

siendo α el grado de confianza. Necesitamo de técnicas estadísticas para responder a esta pregunta. Sea p la probabilidad de que una trayectoria r verifique una propiedad Q y $q = 1 - p$

$$p = \frac{Vol(\Omega)}{Vol(\Delta)} \tag{10}$$

Sea x una variable aleatoria, de forma que para n trayectorias el valor x es n si las $n-1$ primeras trayectorias verifican Q, y la $n-$ésima no. Sea α el grado de confianza. La expresión

$$\alpha = P(x > n) \tag{11}$$

es la probabilidad que las n primeras trayectorias verifican Q y hay una trayectoria en lo que queda de Δ que no la verifica.

Teorema: *La probabilidad p verifica que*

$$p \geq 1 - \frac{1}{n\alpha} \tag{12}$$

Demostración:
La esperanza $E[x]$ de una variable aleatoria x se define como

$$E[x] = \sum_{n=1} np^{n\ \ 1} q \tag{13}$$

Realizando manipulación simbólica y sustituyendo la suma geométrica por su valor se obtiene

$$E[x] = \frac{q}{p} \sum_{n=1} np^n = \frac{q}{p} \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} \tag{14}$$

Por otro lado, y aplicando la desigualdad de Chevyshev

$$E[x] = \sum_{x=1} xp(x) \geq \sum_{x=n+1} np^{n\ \ 1} \tag{15}$$

sustituyendo el sumatorio por su valor

$$E[x] = nP(x > n) \tag{16}$$

por lo tanto se obtiene que

$$\frac{E[x]}{n} \geq P(x > n) \tag{17}$$

sustituyendo $E[x]$ por su valor obtenido en (14), y si se aplica (11),

$$\frac{1}{n(1-p)} \geq P(x > n) = \alpha \tag{18}$$

operando de manera simbólica, se demuestra el teorema

$$\frac{1}{n\alpha} \geq 1 - p \Rightarrow p \geq 1 - \frac{1}{n\alpha} \tag{19}$$

$\diamondsuit$

La interpretación del teorema es: *dado un grado de confianza α, si se quiere asegurar que una propiedad P es true para un sistema dinámico con una probabilidad p, es necesario al menos obtener n trayectorias que la verifiquen.*

La siguiente tabla recoge varios ejemplos para p y n siendo $\alpha = 0.05$ y $\alpha = 0.01$

$\alpha = 0.05$	
$p = 0.6$	$n = 50$
$p = 0.8$	$n = 100$
$p = 0.98$	$n = 1000$
$p = 0.998$	$n = 10000$
$\alpha = 0.01$	
$p = 0.5$	$n = 200$
$p = 0.9$	$n = 1000$
$p = 0.99$	$n = 10000$
$p = 0.9999$	$n = 10^6$

De manera análoga, una consulta $\exists r \in \Delta \bullet [r, P]$ se puede siempre formular como $\neg \forall r \in \Delta \bullet [r, \neg P]$, aplicando una propiedad del cálculo de

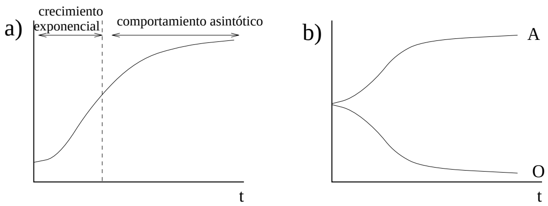

Figura 6: Modelo con crecimiento logístico

predicados, y por lo tanto, el estudio anterior sirve para este cuantificador. No obstante al ser una pregunta que sobre si existe un comportamiento que verifica una propiedad, basta simplemente con encontrar uno para poderlo afirmar, no obstante, siempre se pueden aplicar un razonamiento similar al realizado anteriormente.

7 Aplicación a un modelo logístico con retraso

En el mundo real es muy común encontrar procesos de crecimiento donde una fase inicial de crecimiento exponencial es seguida por otra fase de acercamiento asintótico a un valor de saturación (figura 6.a). A estos procesos se le dan los nombres genéricos: logístico, sigmoidal, o *s-shaped*. En la literatura, estos modelos se han estudiado profusamente. Abundan en procesos naturales, sociales y socio-tecnológicos. Por citar algunos, aparecen en: la evolución de las bacterias, la extracción de mineral, el crecimiento de la población mundial, desarrollos económicos, las curvas de aprendizaje, determinados fenómenos dentro de una población, como rumores o epidemias, nuevos productos que se introducen en el mercado, etc. Estos sistemas responden a un patrón de comportamiento bimodal con dos atractores (figura 6.b): A crecimiento normal, y O decadencia y extinción.

Cuando se añade un retraso en la realimentación, las ecuaciones diferenciales del modelo S quedan

$$\Phi \equiv \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(n\,r - m), y = delay_\tau(x), \\ x > 0, \quad r = h(y), \\ h \equiv \{(-\infty, -\infty), +, (d_0, 0), +, \\ (0,1), +, (d_1, e_0), -, \\ (1,0), -(+\infty, -\infty)\} \end{array} \right. \tag{20}$$

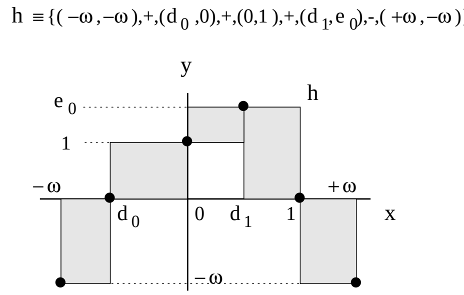

Figura 7: Función cualitativa h

siendo n el factor de crecimiento, m el factor de decrecimiento, y h una función cualitativa con un máximo en (x_1, y_0) (figura 7). Las condiciones iniciales son

$$\Phi_0 \equiv \left\{ \begin{array}{l} X_0 \in [LP_x, MP_x], LP_x(m), \\ LP_x(n), \tau \in MP_\tau, VP_\tau\} \end{array} \right. \tag{21}$$

donde LP, MP, VP son operadores unarios cualitativos para las variables x, τ.

Sobre este sistema nos gustaría conocer:

1. si siempre se alcanza un equilibrio

2. si hay un equilibrio cuyo valor no es cero

3. si todas las trayectorias con equilibrio cercano a cero, lo alcanzan sin oscilar.

4. clasificar la base de datos de acuerdo con los patrones de comportamientos del sistema.

Aplicaremos la metodología propuesta a este modelo.

En primer término, se aplica a S las reglas de transformación

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x(n\,r - m), y = delay_\tau(x), \\ x > 0, \, r = H(y), H, \\ x_0 \in [0,3], \, m, n \in [0,1], \, \tau \in [0.5, 10] \end{array} \right. \tag{22}$$

donde H se ha sido obtenido aplicando el algoritmo *Seleccionar H* sobre h, y los intervalos se definen de acuerdo con el conocimiento de los expertos. Con el algoritmo *Generación de Base de datos T* se obtiene la base de datos de trayectorias. Las preguntas propuestas se formulan con el lenguaje como sigue:

1. $\forall r \in T \bullet [r, EQ]$

2. $\exists r \in T \bullet [r, EQ \wedge \exists t : t \simeq t_f \bullet !AP0_x(x)]$

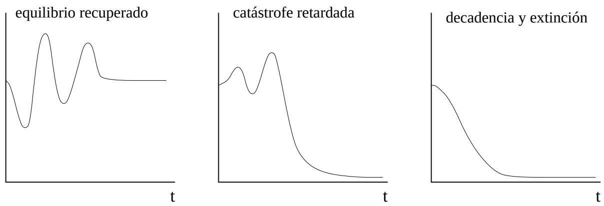

Figura 8: Modelo de crecimiento logístico con retraso

3. $\forall r \in T \bullet [r, EQ \wedge \exists t : t \simeq t_f \bullet AP0_x(x) \wedge length(\dot{x} = 0) = 0$

siendo $AP0_x$ un operador unario de x. La lista de puntos donde $\dot{x} = 0$ es la lista con los máximos y mínimos de la trayectoria. Si su longitud es 0 , entonces no hay oscilaciones.

4. La base de datos se clasifica con las etiquetas

$[r, EQ \wedge length(\dot{x} = 0) > 0 \wedge \exists t : t \simeq t_f \bullet !AP0_x(x)] \Rightarrow$ equilibrio recuperado,

$[r, EQ \wedge length(\dot{x} = 0) > 0 \wedge \exists t : t \simeq t_f \bullet AP0_x(x)] \Rightarrow$ catástrofe retardada,

$[r, EQ \wedge \exists t : t \simeq t_f \bullet AP0_x(x)] \Rightarrow$ decadencia y extinción

Estos corresponden con los tres posibles comportamientos del sistema (figura 8). Los resultados obtenidos están en concordancia con aquellos que se obtienen cuando se realiza un razonamiento matemático [Aracil *et al.* 97].

8 Conclusiones y trabajo futuro

En este artículo se ha presentado una forma de incorporar información cualitativa a sistemas dinámicos semicualitativos. Los modelos para estos sistemas se construyen a partir de restricciones, operadores cualitativos, funciones aritméticas, de banda y cualitativas.

Se ha propuesto de manera resumida una nueva metodología para automatizar el análisis de sistemas dinámicos con conocimiento cuantitativo y cualitativo. Esta metodología se basa en reglas de transformación, aplicación de técnicas estocásticas, simulación cuantitativa, generación de una base de datos de trayectorias y definición de un lenguaje de consulta/clasificación. La simulación se realiza por medio de técnicas estocásticas, guardándose los resultados en una base de datos que se puede clasificar con el lenguaje propuesto. Sobre la base de datos etiquetada se aplican algoritmos genéticos para obtener conclusiones sobre el sistema dinámico.

Sobre los sistemas estudiados, los resultados obtenidos con la metodología expuesta coinciden con otros aparecidos en la bibliografía, por lo que parece apropiado continuar su estudio y aplicación a otros sistemas semicualitativos.

En el futuro, queremos enriquecer el lenguaje propuesto con: operadores para comparar trayectorias entre sí, lógica temporal entre distintos tiempos de una misma trayectoria, más tipo de ecuaciones,... Para finalizar decir, que una compañía metalúrgica está interesada en modificar su sistema de producción de acero aplicando la metodología que se ha expuesto en este artículo. En futuros trabajos, describiremos este sistema en detalle y las conclusiones obtenidas.

Referencias

[Alefeld&Herzberger83] G. Alefeld y J. Herzberger J., Introduction to Interval Computations *Academic Press*, New York. 1983.

[Aracil *et al.* 97] J. Aracil, E. Ponce, L. Pizarro. Behavior patterns of logistic models with a delay *Mathematics and computer in simulation* 44: 123–141, 1997.

[Berleant&Kuipers97] D. Berleant y B.J. Kuipers. Qualitative and quantitative simulation: bridging the gap *Artificial Intelligence* 95, pp. 215-255, 1997

[Bonarini&Bontempi94] A. Bonarini y G. Bontempi. Qua.SI.: Qualitative Simulation approach for fuzzy models. *Proceedings of ESM'94* pages 420–424, Barcelona, June 1994.

[Bousson&Travé-Massuyès94] K. Bousson y L. Travé-Massuyès. Putting more numbers in the qualitative simulator CA-EN. In *Proc. 2nd Int. Conf. on Inteligent Systems Engineering.* 1994.

[Corliss95] G.F. Corliss. Guaranteed error bounds for ordinary differential equations *Theory of Numerics in Ordinary and Partial Differential Equations*. Oxford University Press. 1995.

[Gasca *et al.* 96] R.M. Gasca, M. Toro, J.A. Ortega. Propagación de restricciones integrando conocimiento cualitativo y cuantitativo*Boletín de AEPIA* núm 6, pp. 23-30 1996.

[Gasca98] R.M. Gasca. Razonamiento y Simulación en Sistemas que integran conocimiento cualitativo y cuantitativo. *Ph.D. Thesis*, University of Sevilla (Spain), 1998.

[Hickey94] T.J. Hickey. CLP(F) and Constrained ODEs. *Technical Report* 1994.

[Kay96] H. Kay. Refining imprecise models and their behaviors. Ph.D. Thesis University of Texas (USA), 1996.

[Kuipers94] B.J. Kuipers. *Qualitative reasoning. Modeling and simulation with incomplete knowledge*, The MIT Press, Cambridge,Massachussetts 1994.

[Moore79] R.E. Moore. Methods and Applications of Interval Analysis *SIAM Studies in Applied Mathematics* Philadelphia,PA) 1979.

[Ortega *et al.* 97] J.A. Ortega, R.M. Gasca, M. Toro. Automatización del análisis y simulación de modelos cualitativos mediante restricciones. En *Proc VII Conferencia Asociación Española para Inteligencia Artificial*, pages 85–94, Málaga (Spain), November 1997.

[Ortega *et al.* 98] J.A. Ortega, R.M. Gasca, M. Toro. Including qualitative knowledge in semiqualitative dynamical systems. *Lecture Notes in Artificial Intelligence* 1415: 329–335, 1998.

[Ortega *et al.* 99] J.A. Ortega, R.M. Gasca, M. Toro. Behavior patterns of semiqualitative dynamic systems by means of quantitative simulations *Proceedings Int. Joint Conference on Artificial Intelligence* Estocolmo (Suecia) 1999.

[Travé-Massuyès *et al.* 97] L. Travé-Massuyès, Ph. Dague, F. Guerrin. *Le raisonement qualitativ pour les sciences de l'ingènieur*. Hermes Ed., Paris 1997.

[Vescovi *et al.* 95] M. Vescovi, A. Farquhar, Y. Iwasaki. Numerical interval simulation: combined qualitative and quantitative simulation to bound behaviors of non-monotonic systems. *Proc. 14th Int. Joint Conference on Artificial Intelligence* pages 1806–1812, Canada, 1995.