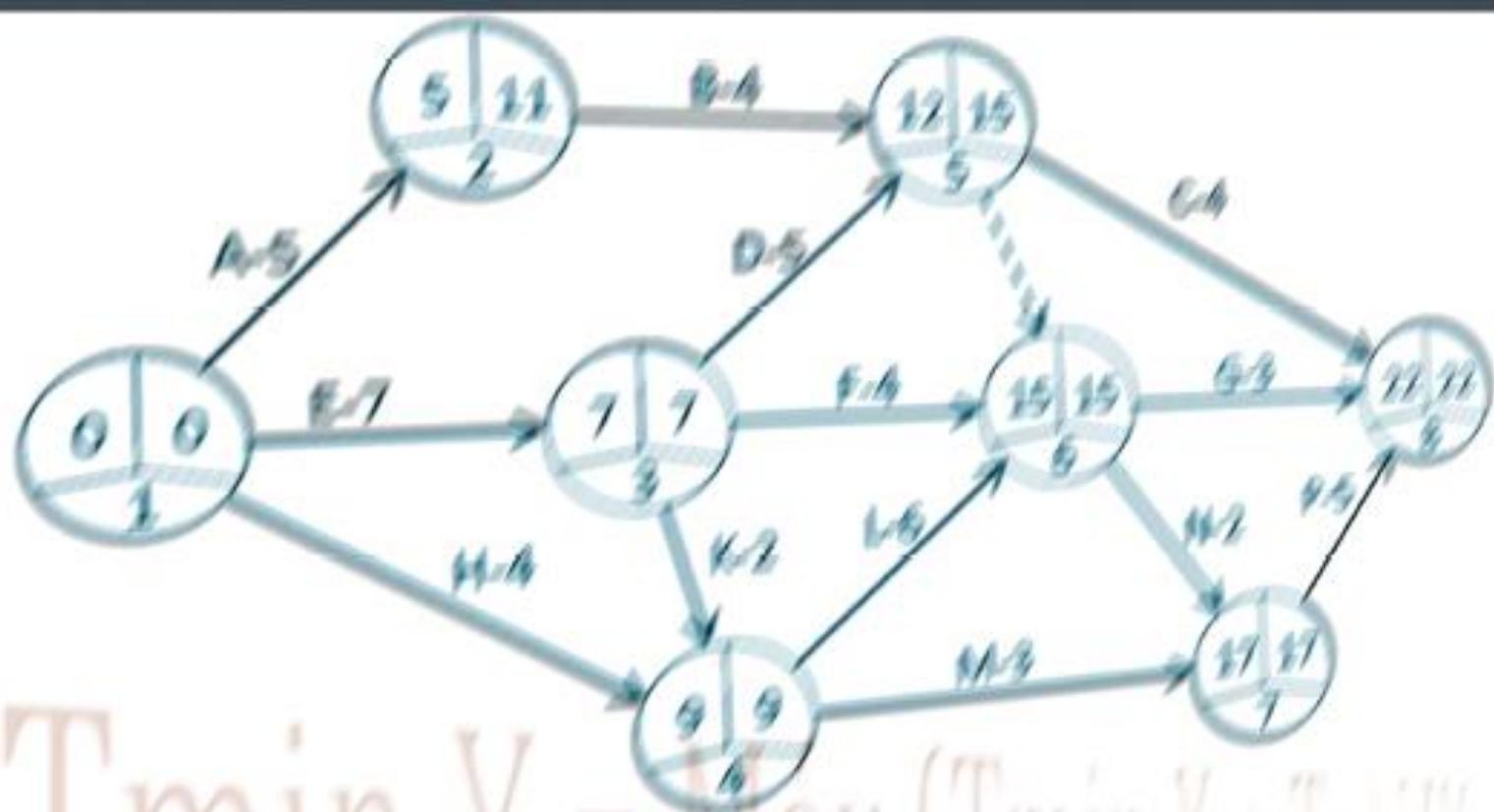


INVESTIGACIÓN OPERATIVA.
TÉCNICAS Y MODELOS DE
PROGRAMACIÓN DE
PROYECTOS COMPLEJOS



$$T_{min} Y = \text{Max} (T_{min} X + T_x), \forall X$$



**INVESTIGACIÓN OPERATIVA. TÉCNICAS Y MODELOS DE
PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS COMPLEJOS.**

Dr. Francisco Navarrete Pérez

Profesor Titular de la Universidad de Sevilla

INVESTIGACIÓN OPERATIVA. TÉCNICAS Y MODELOS DE PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS COMPLEJOS.

Francisco Navarrete Pérez

EDITORIAL: Mamut Digital

ISBN PAPEL: 978-84-15635-09-3

ISBN EBOOK: 978-84-15635-10-9

Depósito Legal: SE-1608-2013

Primera edición: septiembre de 2013

© De los textos: el autor

© De la edición: Mamut Digital, S.L.

Edición preparada y revisada por el autor: septiembre 2020

ÍNDICE

| | |
|--|----|
| INTRODUCCIÓN | 9 |
| CAPÍTULO I. CONCEPTOS GENERALES | 11 |
| 1. LA PLANIFICACIÓN | 11 |
| 2. LA PROGRAMACIÓN | 11 |
| 3. LA ORGANIZACIÓN | 12 |
| 4. EL CONTROL | 12 |
| CAPÍTULO II. LOS SISTEMAS DE PROGRAMACIÓN | 15 |
| 5. LA GRÁFICA GANTT | 15 |
| 6. EL MÉTODO PERT | 16 |
| 6.1. Elementos básicos de las redes Pert | 17 |
| 6.2. Relaciones entre las actividades de un proyecto | 18 |
| 6.3. Diseño de una red Pert | 20 |
| 6.4. Recomendaciones a tener en cuenta para dibujar una red Pert | 22 |
| 6.5. Precedencias inmediatas y precedencias por transitividad | 24 |
| 6.6. Método para dibujar la red Pert | 26 |
| 6.7. Determinación del tiempo esperado de ejecución (te) de una actividad | 30 |
| 6.8. Numeración de los sucesos de una red | 35 |
| 6.9. Cálculo de los tiempos mínimos y máximos de los sucesos | 36 |
| 6.10. Fechas más pronta y más tardía de comienzo y finalización de una actividad | 39 |
| 6.11. Concepto de holgura de una actividad | 40 |
| 6.12. Cálculo de holguras con sucesos ficticios | 41 |
| 6.13. Concepto de camino. Camino más largo y camino crítico | 45 |
| 6.14. Redes con plazo de ejecución del proyecto | 46 |
| 6.15. Comportamiento de las holguras según el tipo de red | 48 |
| 6.16. Conceptos elementales sobre caminos | 50 |
| 6.17. Relaciones entre las holguras de un proyecto | 54 |
| 6.18. Condiciones particulares de algunas actividades y sus holguras ... | 56 |
| 6.19. Efectos que produce el incremento del tiempo esperado de una actividad | 60 |
| 6.20. Análisis probabilístico | 63 |
| 6.21. Control periódico de un proyecto | 74 |
| 7. EL MÉTODO CPM | 79 |
| 7.1. Diferencias entre Pert y CPM | 79 |
| 7.2. Relación coste-duración de una actividad | 80 |
| 7.3. Determinación del Coeficiente de Coste | 81 |
| 7.4. Coste total de un proyecto | 83 |
| 7.5. Cálculo de la fecha óptima de realización de un proyecto | 86 |

| | |
|---|------------|
| 8. EL MÉTODO ROY | 123 |
| 8.1. Diferencias entre el método Roy y el método Pert | 123 |
| 8.2. Tipos de restricciones | 124 |
| 8.3. Relaciones entre las actividades | 126 |
| 8.4. Trazado de la red Roy | 127 |
| 8.5. Cálculo de tiempos mínimos y máximos | 130 |
| 8.6. Calculo de tiempos en redes con restricciones de posterioridad máxima | 133 |
| 8.7. Cálculo de tiempos cuando existen restricciones de tipo disyuntivo | 138 |
| 8.8. Cálculo de tiempos mínimos y máximos con tablas | 141 |
| 8.9. Cálculo de tiempos, con tablas, cuando hay restricciones de posterioridad máxima | 146 |
| 8.10. Cálculo de holguras | 150 |
| CAPÍTULO III. LA DISTRIBUCIÓN DE LOS RECURSOS | 153 |
| 9. LA NIVELACIÓN DE RECURSOS | 154 |
| 9.1. Nivelación de recursos considerando que las actividades comienzan lo más pronto posible | 155 |
| 9.2. Nivelación de recursos considerando que las actividades comienzan lo más tarde posible | 169 |
| 9.3. Nivelación de recursos en un ciclo repetitivo | 180 |
| 10. LA ASIGNACIÓN DE RECURSOS | 188 |
| 10.1. El método ROC 8001 | 188 |
| CAPÍTULO IV. OPTIMIZACIÓN | 199 |
| 11. LA PROGRAMACIÓN LINEAL | 199 |
| 12. MODELADO DEL PROBLEMA | 200 |
| 12.1. La función objetivo | 200 |
| 12.2. Las variables | 200 |
| 12.3. Las restricciones | 200 |
| 13. FORMA GENERAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL | 202 |
| 14. FORMA MATRICIAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL | 203 |
| 14.1. La función objetivo | 203 |
| 14.2. El sistema de restricciones | 203 |
| 15. FORMA STANDARD DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL | 204 |
| 15.1. Transformaciones para pasar un planteamiento lineal a forma Standard | 204 |
| 16. FORMA CANÓNICA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL | 206 |

| | |
|---|-----|
| 17. SOLUCIONES BÁSICAS Y ÓPTIMAS | 208 |
| 17.1. Solución básica | 208 |
| 17.2. Solución básica no degenerada | 208 |
| 17.3. Solución básica degenerada | 208 |
| 17.4. Solución óptima | 209 |
| 18. RESOLUCIÓN GRÁFICA | 210 |
| 19. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO SIMPLEX | 216 |
| 19.1. La tabla del simplex | 216 |
| 19.2. El método de la gran "M" o de la "M" grande | 217 |
| 19.3. Situaciones indeterminadas | 222 |
| 19.4. Variables de signo libre | 223 |
| 19.5. Casos especiales del algoritmo del simplex | 225 |

INTRODUCCIÓN

El término “Investigación Operativa” se utilizó por primera vez en el año 1939 y se desarrolló durante la Segunda Guerra Mundial, pero su origen se remonta a épocas anteriores a la Primera Revolución Industrial. Empero, fue durante este período cuando empezaron a desarrollarse los problemas que más adelante encontraron su solución en la Investigación Operativa. No obstante, los textos sobre esta materia no se publicaron hasta el año 1950, una vez terminada la guerra, produciéndose a partir de entonces una gran expansión de la investigación de operaciones que se extendió con rapidez en organizaciones industriales, académicas y gubernamentales, fundamentalmente en Estados Unidos y Gran Bretaña (ACKOFF y SASIENI, 1987: 7-17). En 1953 se creó la *Operations Research Society of America* (Sociedad Americana de Investigación de Operaciones). Pronto, otros países siguieron el ejemplo y en 1957 se estableció la *International Federation of Operational Research Societies* (Federación Internacional de Sociedades de Investigación de Operaciones).

A pesar de que la Investigación Operativa se ha desarrollado vastamente, son pocas las definiciones acertadas sobre el término, la mayoría de ellas por ser excluyentes o limitativas. Sin embargo, cabe destacar la definición dada por Russell L. Ackoff y Maurice W. Sasieni (1987: 17) en la que se considera a la Investigación Operativa como *la aplicación del método científico, por equipos interdisciplinarios, a problemas que comprenden el control de sistemas organizados hombre-máquina, para dar soluciones que sirvan mejor a los propósitos de la organización como un todo.*

La Investigación de Operaciones se aplica fundamentalmente a los problemas combinatorios (p. ej. definición de las inversiones más rentables), los campos aleatorios (p. ej. problemas de stocks, reparación y renovación de equipos) y las situaciones de competencia (p. ej. definición de políticas de aprovisionamiento). Para la resolución de estos planteamientos, se utilizan técnicas de investigación operativa basadas, entre otras, en las siguientes teorías: teoría de juegos, teoría de colas de espera, teoría de la decisión, teoría de los grafos, teoría de control, programación lineal, probabilidad y estadística matemática y programación dinámica.

En los capítulos que conforman este libro no se abordan, como es obvio, la totalidad de teorías que integran la Investigación de Operaciones, sino que se limita a aquellos procedimientos que tienen que ver con la teoría de la decisión, teoría de grafos, probabilidad matemática y programación lineal.

Así, el primer capítulo se dedica a conceptos generales que tienen que ver con la planificación, la programación, la organización y el control de proyectos. En el segundo capítulo se estudian las técnicas de programación de proyectos complejos: el método Pert y el método de los potenciales o de Roy, basados ambos en el desarrollo de la teoría de grafos, en el que tienen cabida problemas de secuenciación y coordinación, así como de probabilidad y control, y el método CPM, donde se aborda la teoría de la decisión. En el capítulo III, se plantean problemas de asignación y nivelación de recursos, resueltos por modelos heurísticos. Finalmente, en el cuarto capítulo se exponen ejercicios de optimización resueltos mediante la programación lineal.

CAPÍTULO I. CONCEPTOS GENERALES

1. LA PLANIFICACIÓN

Existen multitud de definiciones para este concepto. Según Russell L. Ackoff (1985: 13), la Planificación consiste en proyectar un futuro deseado y los medios efectivos para conseguirlo. Para Cuervo García (1975: 142), la Planificación es un proceso que supone la elaboración y evaluación de cada parte de un conjunto interrelacionado de decisiones, antes de que se inicie la acción. Por otra parte, García Echevarría (1970: 183), define la Planificación como el proceso de preparación de las decisiones.

De las dos primeras definiciones podemos concluir que la Planificación es una toma de decisiones previa, mientras que las dos últimas coinciden en señalar que no es un acto, sino un proceso (CARVAJAL, 2001: 158). A partir de ellas, podríamos definir la Planificación como *un proceso de decisión anticipada de lo que se debe hacer, cuándo debe hacerse, cómo debe hacerse y quién debe hacerlo* (SUÁREZ, 1996: 65).

La Planificación de una Obra comprende:

- La descomposición del proyecto en actividades o tareas.
- La estimación de la duración de cada una de las actividades.
- Las relaciones de precedencia que existe entre ellas.
- La asignación de los recursos necesarios, a cada actividad, para que pueda ejecutarse.

2. LA PROGRAMACIÓN

La Programación prevé el desarrollo de la ejecución de las actividades, en el tiempo y lugar exactos, respetando la planificación y estableciendo el momento en que debe iniciarse cada una de ellas.

La Programación de una Obra comprende:

- Calcular la fecha de comienzo y finalización de cada actividad.
- Determinar la duración total del proyecto.
- Calcular el margen (holgura) que cada actividad tiene para realizarse.

- Averiguar cuáles son las actividades críticas del proyecto.
- Estudiar la relación entre el coste directo de las actividades y sus duraciones.
- Calcular la fecha óptima de realización del proyecto.
- Realizar una distribución de recursos idónea.

3. LA ORGANIZACIÓN

Organizar una obra es dotarla de los medios materiales y humanos adecuados y establecer los métodos y procedimientos más convenientes y eficaces, de acuerdo con el volumen y ritmo de los trabajos a realizar, sus características, situación y demás circunstancias particulares.

La Organización de una Obra comprende:

- Elegir el cerramiento provisional de obra que mejor se adapte al entorno de la edificación.
- Determinar el tipo de maquinaria de elevación de materiales y su ubicación.
- Decidir la localización y dimensiones de los talleres (ferralla, encofrado...) en las distintas fases de la obra.
- Disponer las casetas provisionales de obra en los lugares idóneos.
- Estudiar las distintas fases de movimiento de tierras y la maquinaria a usar.
- Situar correctamente las zonas de acopio de materiales.
- Diseñar una correcta circulación interior de la obra.
- Señalizar adecuadamente la obra para informar de: riesgos, uso de equipos de protección, etc.
- Trazar convenientemente las instalaciones provisionales de obra.

4. EL CONTROL

El control es un proceso que se inicia en el instante que comienza la obra y que termina con posterioridad a ella para extraer conclusiones finales útiles en la labor de planificar y presupuestar otros procesos idénticos o similares (CARVAJAL, 2001: 238).

El Control de una Obra comprende:

- Vigilar en todo momento el cumplimiento de la planificación prevista.
- Comprobar los resultados, rectificar los planteamientos iniciales donde sea preciso y ajustarlos a la nueva situación.
- Corregir las desviaciones negativas que se originen.
- Verificar el cumplimiento estricto de los plazos tanto parciales como totales.
- Comprobar que los costes se corresponden con los previstos inicialmente.
- Asegurarse de que la producción es la planificada en cantidad y calidad.

CAPÍTULO II. LOS SISTEMAS DE PROGRAMACIÓN

5. LA GRÁFICA GANTT

Es un sistema de programación ideado por Henry L. Gantt para racionalizar y organizar los suministros de municiones de la Army Bureau of Ordnance durante la Primera Guerra Mundial.

Consiste en un diagrama de barras horizontales, donde cada una de las barras representa a una actividad del proyecto. La longitud de la barra es proporcional a la duración de la actividad.

Procedimiento para dibujar una gráfica Gantt:

- Descomponer el proyecto en actividades.
- Estimar la duración de las actividades.
- Determinar las precedencias entre ellas.
- Representar las actividades en un gráfico de barras.

Ejemplo: en la siguiente tabla aparecen relacionadas todas las actividades de un proyecto, con indicación de la duración de cada una de ellas, así como de las actividades siguientes y precedentes. A partir de esta información se construye la Gráfica Gantt de la figura 5.1.

| Actividad | Duración | Actividades siguientes | Actividades precedentes |
|-----------|----------|------------------------|-------------------------|
| A | 3 | E | --- |
| B | 2 | D | --- |
| C | 4 | F | --- |
| D | 4 | G | B |
| E | 5 | I | A |
| F | 3 | H | C |
| G | 7 | --- | D |
| H | 3 | --- | F |
| I | 6 | --- | E |

Este método de programación tiene la ventaja de ser sencillo de elaborar, pero tiene el inconveniente de que no se observa con claridad cuáles son las relaciones entre las distintas tareas o actividades y, como consecuencia de ello, no podemos predecir las repercusiones de un posible retraso en la ejecución de alguna de las actividades. Por esta razón, actualmente no se utiliza como modelo de programación, aunque sigue

teniendo aplicaciones como herramienta auxiliar de los sistemas actuales (PERT, CPM, ROY), fundamentalmente en la nivelación de recursos y para representar gráficamente el Plan Económico de Obra.

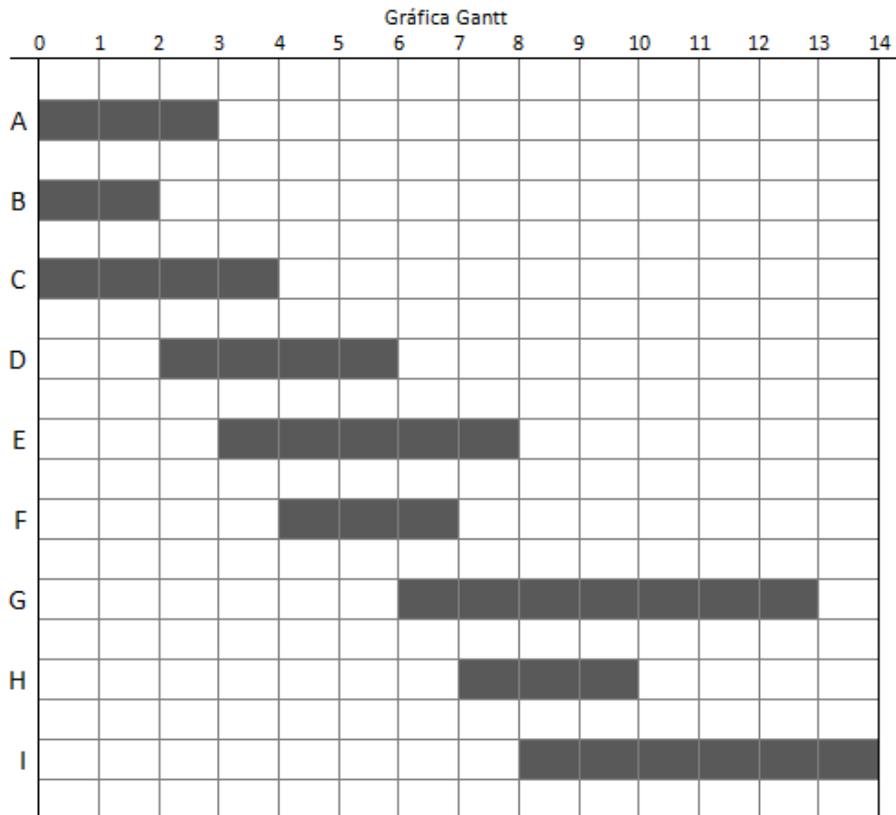


Figura 5.1

6. EL MÉTODO PERT

El método Pert (Program Evaluation and Review Technique) fue desarrollado por la Marina de los EE.UU. en 1958 para dar solución a los problemas de coordinación y control del proyecto de submarinos atómicos armados con proyectiles Polaris. Ante la imposibilidad de programar este proyecto mediante una gráfica Gantt, que era el sistema que había en ese momento, la Armada estadounidense puso en marcha una investigación con el objetivo de obtener un nuevo modelo de programación y control de proyectos. Así, se constituyó un equipo de investigadores dirigido por el almirante W.F. Raborn y con la participación de personal técnico de la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina, de la empresa de material aeronáutico Lockheed y de la empresa de Ingenieros Consultores Booz, Allen y Hamilton. La aplicación de este nuevo método de programación al proyecto Polaris supuso una reducción de dos años en la ejecución del proyecto (ROMERO, 1988: 23-24).

6.1. ELEMENTOS BÁSICOS DE LAS REDES PERT

Actividad

Una actividad o tarea es una operación necesaria para alcanzar un cierto objetivo dentro de la ejecución de un proyecto. Por ejemplo, "hormigonado de pilares", es una actividad que forma parte de la ejecución de la estructura de un edificio. Su representación gráfica se realiza mediante una flecha, como se indica en la figura 6.1.

Existen tres tipos de actividades:

- Actividades reales que consumen tiempo y recursos, p.ej. "Colocación de encofrado de forjado".
- Actividades reales que consumen tiempo pero no recursos, p.ej. "Espera de fraguado de forjado".
- Actividades ficticias o virtuales, que no consumen ni tiempo ni recursos. Este tipo de actividad se introduce en una red para marcar precedencias entre dos o más actividades reales y se representa como aparece en la figura 6.2, mediante una flecha con línea discontinua.

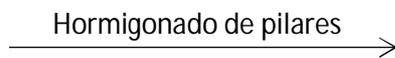


Figura 6.1



Figura 6.2

Suceso

Un suceso o nudo es un acontecimiento, es decir, un punto o instante en el tiempo, o una fecha en el calendario. No consume tiempo ni recursos, sólo indica el principio o fin de una actividad o de un conjunto de actividades. Se representa mediante un círculo. En la figura 6.3 se representa una actividad con un suceso inicial y un suceso final.

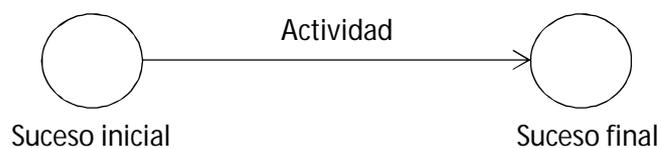


Figura 6.3

6.2. RELACIONES ENTRE LAS ACTIVIDADES DE UN PROYECTO

Relación lineal

Existe una relación lineal cuando es necesario que una actividad concluya para que otra actividad pueda comenzar.

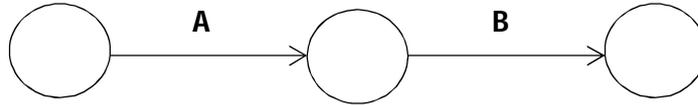


Figura 6.4

La figura 6.4 representa una relación lineal. En este caso, la relación que existe entre las actividades A y B se puede enunciar de diversas formas:

- La actividad A precede a la actividad B
- La actividad A es anterior a la actividad B
- La actividad A es ascendiente de la actividad B
- La actividad B es siguiente de la actividad A
- La actividad B es posterior a la actividad A
- La actividad B es descendiente de la actividad A

Nótese que el suceso final de la actividad A coincide con el suceso inicial de la actividad B. Es decir, ese suceso representa el momento en que termina la actividad A y comienza la actividad B.

Relación de convergencia

Es el tipo de relación que se da cuando es preciso que varias actividades finalicen para que una sola actividad pueda comenzar. Un ejemplo de ello es la figura 6.5.

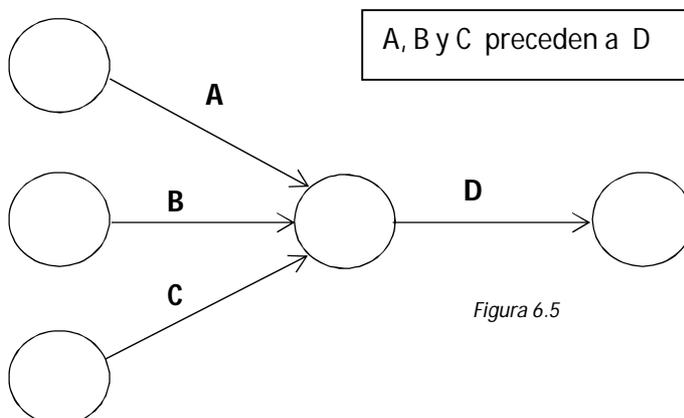


Figura 6.5

Relación de divergencia

Es la relación que tiene lugar cuando es necesario que una actividad termine para que un conjunto de actividades pueda comenzar, como se indica en la figura 6.6.

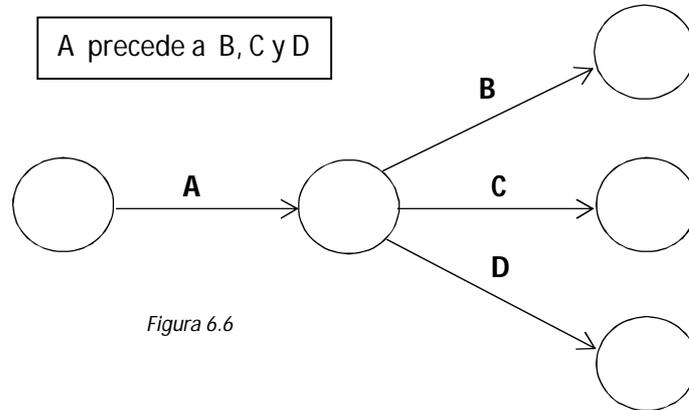


Figura 6.6

Relación de convergencia-divergencia

La figura 6.7 ilustra una relación de convergencia-divergencia. Este tipo de relación existe cuando es preciso que un conjunto de actividades haya concluido para que varias actividades puedan empezar.

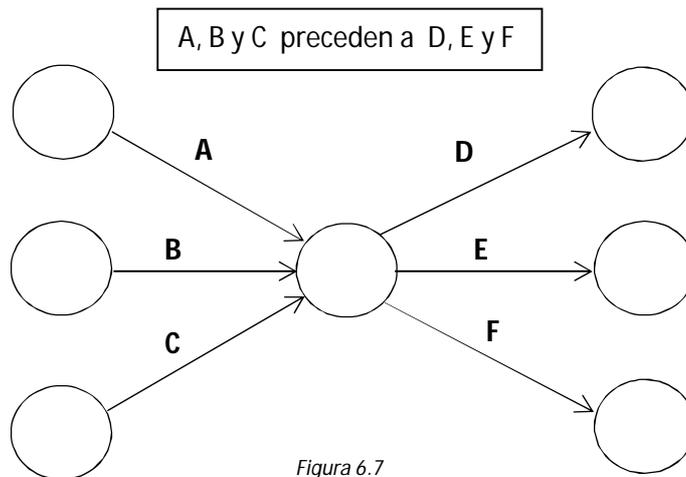


Figura 6.7

6.3. DISEÑO DE UNA RED PERT

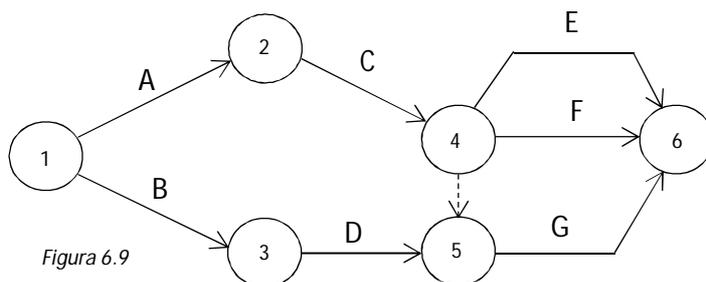
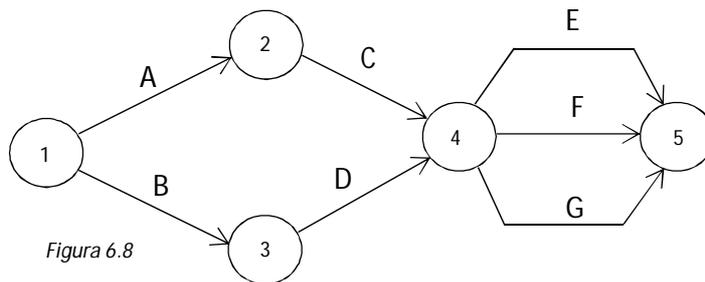
Para dibujar una red Pert es necesario partir de una relación de actividades con indicación de las precedencias existentes entre ellas.

Ejemplo 1

- La actividad A precede a la actividad C
- La actividad B precede a la actividad D
- La actividad C precede a las actividades E – F – G
- La actividad D precede a la actividad G
- Las actividades E – F – G no preceden a ninguna

La figura 6.8 representa las relaciones de precedencia enunciadas anteriormente. Sin embargo, no es correcta dado que establece, a la vez, una prelación entre la actividad D y las actividades E y F, cuestión que no aparece en el enunciado. Para resolver esta situación es preciso introducir una actividad ficticia, como se ha hecho en la figura 6.9. Ahora las relaciones de precedencia se corresponden exactamente con el enunciado.

Por otro lado, las redes Pert son susceptibles de ser tratadas informáticamente. En este caso, el ordenador identifica a las actividades mediante los sucesos iniciales y finales de cada una de ellas. De manera que, a lo que nosotros llamamos actividad A, actividad B y actividad C, el ordenador le llama actividad 1-2, actividad 1-3 y actividad 2-4, respectivamente. Surge de esta forma otro conflicto dado que a las actividades E y F el ordenador las considera una única actividad: la actividad 4-6. De nuevo es necesario acudir a las actividades ficticias para resolver correctamente la red, cuestión que se ha solventado en la figura 6.10.



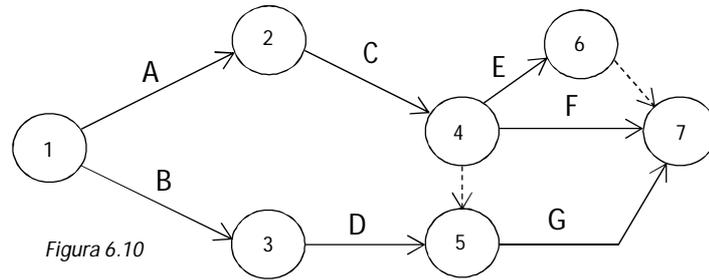


Figura 6.10

Ejemplo 2

Las actividades A, B y C preceden a D
 La actividad D no precede a ninguna

En este caso tenemos tres actividades que en principio tendrían que compartir el nudo inicial y el final. En las figuras 6.11, 6.12 y 6.13 ofrecemos tres formas de resolverlo gráficamente.

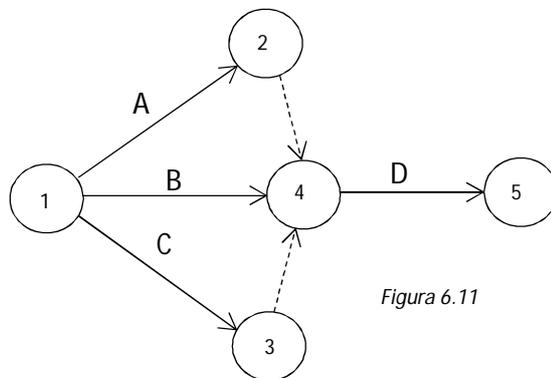


Figura 6.11

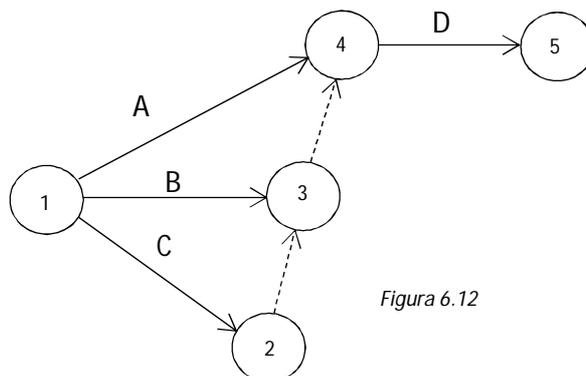
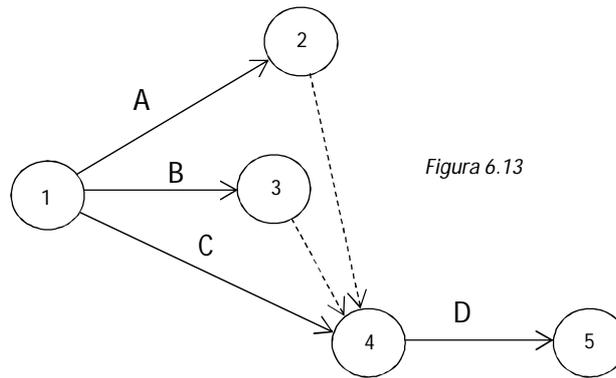
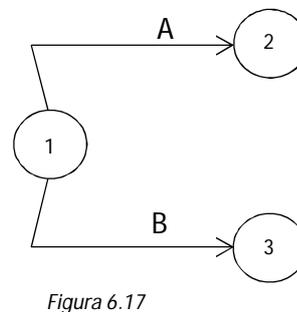
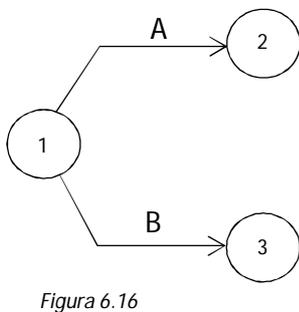
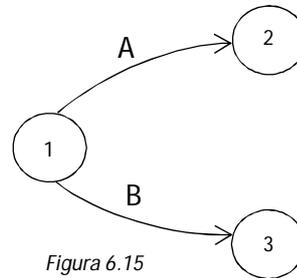
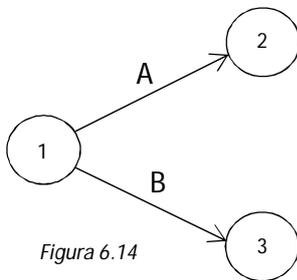


Figura 6.12



6.4. RECOMENDACIONES A TENER EN CUENTA PARA DIBUJAR UNA RED PERT

a) Las actividades se representarán por líneas rectas o líneas quebradas formando ángulos obtusos (figuras 6.14 y 6.16). Nunca líneas curvas ni ángulos agudos (figuras 6.15 y 6.17).



b) El trazado de las actividades se realizará de izquierda a derecha o en vertical (figura 6.18). Nunca de derecha a izquierda (figura 6.19).

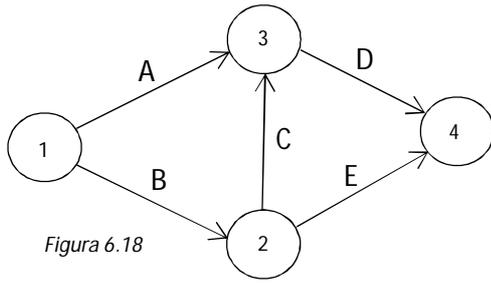


Figura 6.18

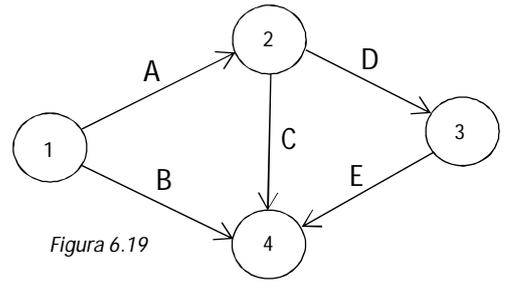


Figura 6.19

c) Se introducirán únicamente las actividades ficticias imprescindibles (figura 6.20). Será incorrecta aquella red que presente actividades ficticias innecesarias (figura 6.21).

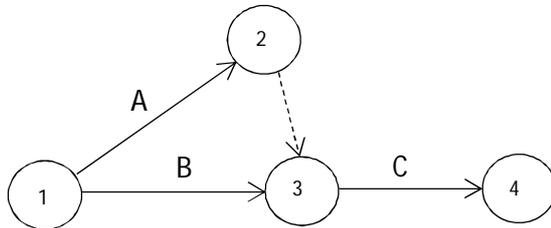


Figura 6.20

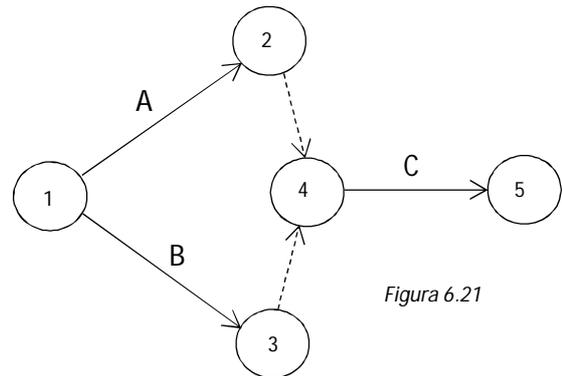


Figura 6.21

d) Se evitará, en la medida de lo posible, que las actividades se crucen. Las redes de las figuras 6.22 y 6.23 representan a las mismas actividades, con las mismas precedencias, sin embargo en la figura 6.23 no se cruzan las actividades C y D.

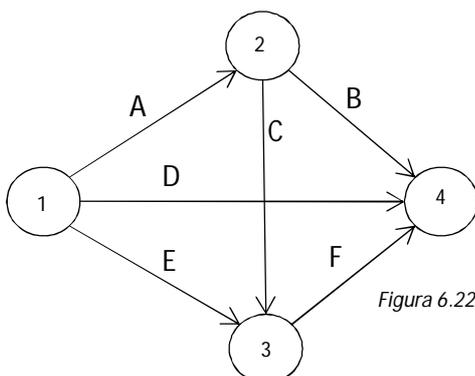


Figura 6.22

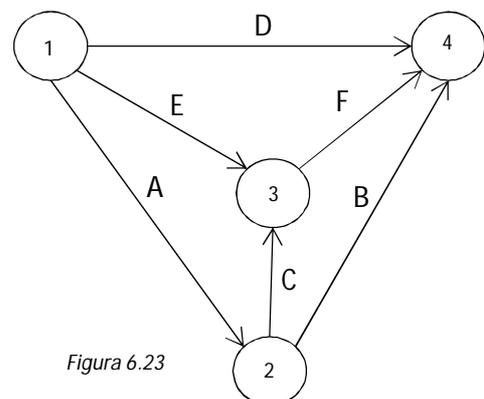


Figura 6.23

6.5. PRECEDENCIAS INMEDIATAS Y PRECEDENCIAS POR TRANSITIVIDAD

Si se aplica la propiedad transitiva a las relaciones existentes entre las actividades de la red reproducida en la figura 6.24, se puede afirmar que si la actividad A precede a la D, y la actividad D precede a la G, entonces la actividad A precede a la G. Las dos primeras serían precedencias inmediatas y la última constituiría una precedencia por transitividad.

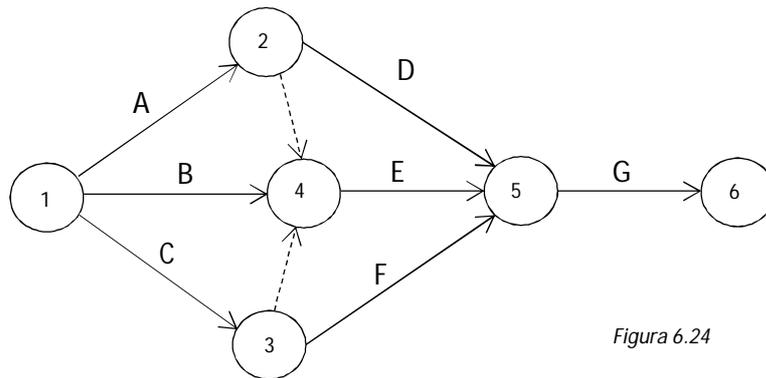


Figura 6.24

En el trazado de una red se deben evitar las dobles precedencias a través de actividades ficticias. Es decir, si entre dos actividades existe una precedencia por transitividad, no sería correcto que además existiera entre ellas una precedencia inmediata a través de actividades ficticias. Esto es lo que ocurre en la figura 6.25, donde se observa que la actividad B precede a la C y que ésta precede a la D. Por lo tanto, la actividad B precede a la D, aunque no sea de manera directa, sino a través de la actividad C. Sin embargo, a través de las actividades ficticias 3-4 y 4-5 se crea una precedencia inmediata entre la B y la D. Es decir, hay una doble precedencia entre estas dos actividades, una indirecta o por transitividad a través de la actividad C y otra directa o inmediata a través de actividades ficticias. La figura 6.26 muestra la forma de dibujar la red correctamente evitando esa doble precedencia.

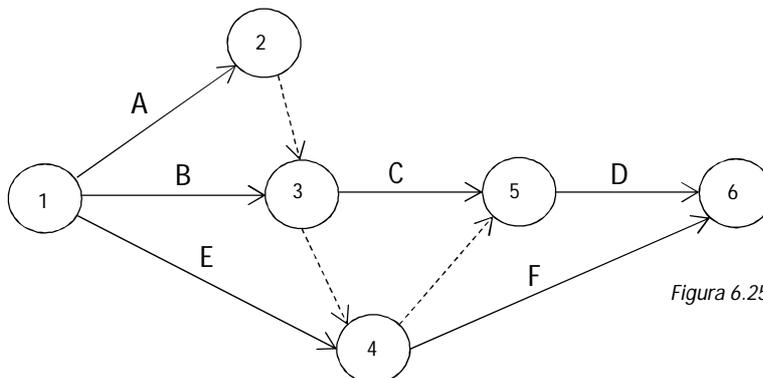


Figura 6.25

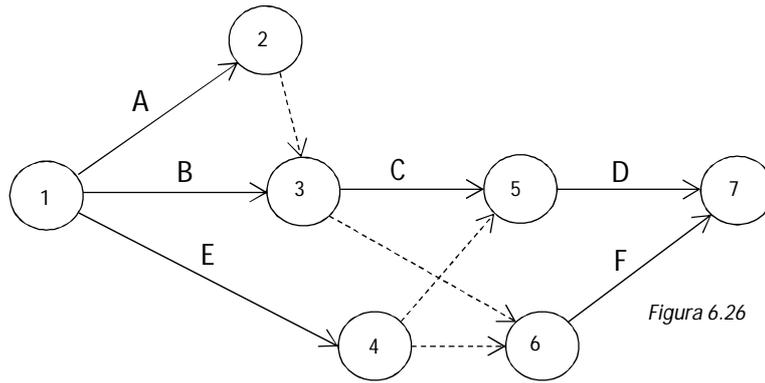


Figura 6.26

Tampoco es correcto que entre dos actividades exista una doble precedencia de manera inmediata a través de actividades ficticias. Un ejemplo de ello aparece en la figura 6.27, donde la actividad B precede a la G de manera inmediata a través de la ficticia 3-6 y, a la vez, mediante las ficticias 3-5 y 5-6. En este caso, la doble precedencia se evita fácilmente eliminando la actividad 3-6, tal como muestra la figura 6.28. Sin embargo, en otras ocasiones la solución es más compleja, como ocurre en la figura 6.29, donde la actividad D precede a la E por un lado a través de las ficticias 4-5 y 5-7 y, por otro lado, mediante las ficticias 4-6 y 6-7. Aquí la solución no se obtiene eliminando una actividad virtual, sino que hay que introducir otra para resolverlo satisfactoriamente, como se indica en la figura 6.30.

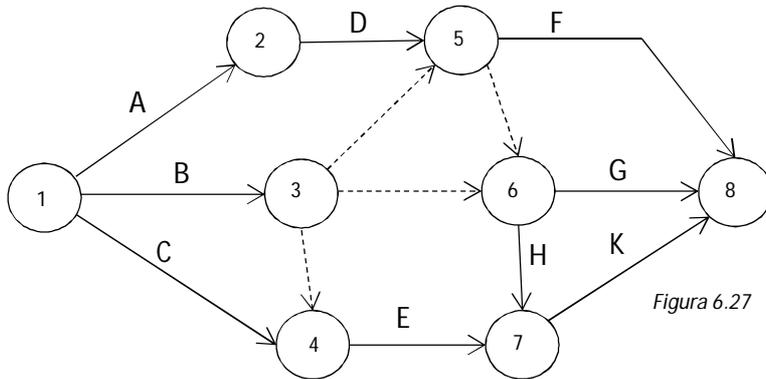


Figura 6.27

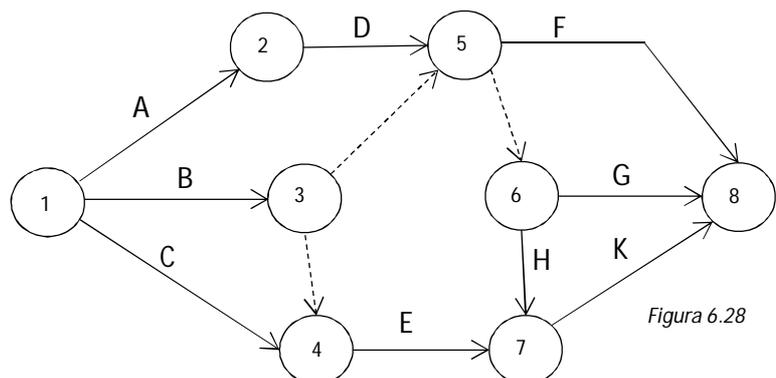


Figura 6.28

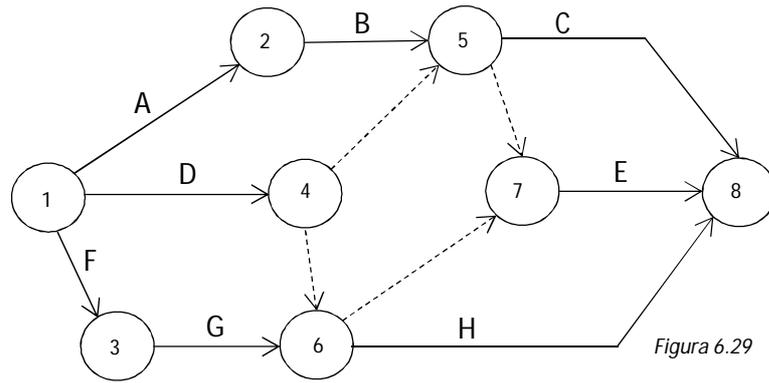


Figura 6.29

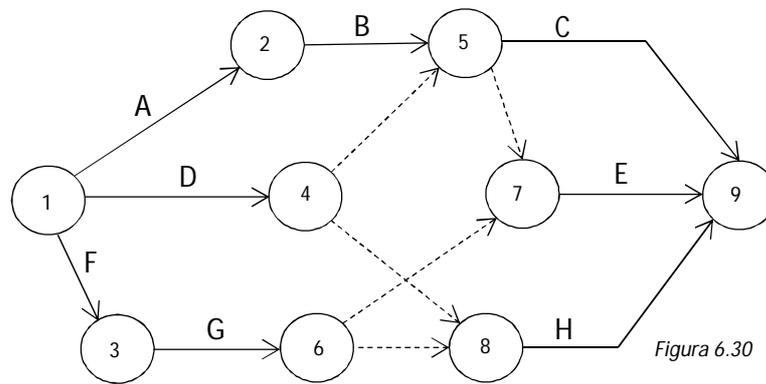


Figura 6.30

6.6. MÉTODO PARA DIBUJAR LA RED PERT

Como hemos visto en ejemplos anteriores, el trazado de la red Pert se realiza a partir de una relación de actividades con indicación de las relaciones que existen entre ellas. Empero, cuando tenemos un mayor número de actividades, resulta algo más complejo dibujar la red directamente. En estas circunstancias, se aconseja seguir los siguientes pasos:

- Representar las relaciones de precedencia entre las actividades de forma matricial, bien utilizando la matriz de ascendencia o bien la de descendencia. Cuando empleamos la matriz de ascendencia se dice que abordamos el problema "buscando los carentes de ascendientes". En el caso de usar la matriz de descendencia, diremos que afrontamos el problema "buscando los carentes de descendientes".
- Realizar la descomposición en niveles.
- Ordenar los niveles obtenidos.
- Dibujar la representación gráfica de la descomposición en niveles.
- Dibujar la red Pert.

Ilustraremos la aplicación de esta metodología con un ejemplo:

La activ. A es siguiente de -----
 La activ. B es siguiente de -----
 La activ. C es siguiente de B
 La activ. D es siguiente de B
 La activ. E es siguiente de C
 La activ. F es siguiente de A , D , E , G , J , L , N
 La activ. G es siguiente de B
 La activ. H es siguiente de A
 La activ. I es siguiente de A
 La activ. J es siguiente de C , D , G
 La activ. K es siguiente de A , H , I
 La activ. L es siguiente de A , B , C
 La activ. M es siguiente de A , B , C , I , K , L
 La activ. N es siguiente de B , C , D

a) Representar las relaciones de precedencia entre las actividades de forma matricial.

Para ello, utilizamos una matriz cuadrada de orden $(N \times N)$, donde N es el número de actividades, de manera que las actividades que aparecen en las columnas son las descendientes de las actividades que aparecen en las filas (matriz de descendencia) o bien las actividades que aparecen en las columnas son las ascendientes de las actividades que aparecen en las filas (matriz de ascendencia). Para nuestro ejemplo vamos a utilizar la matriz de ascendencia. En ella, todos sus elementos toman valor 1 ó 0, de modo que si el elemento correspondiente a la fila A y la columna B es un 1 significa que las actividades A y B están ligadas por una relación de precedencia, mientras que si el valor es cero entonces entre estas dos actividades no existe ninguna prelación. Para una mayor claridad y rapidez de ejecución, las casillas con valor cero se dejan en blanco y sólo se colocan los unos. De esta manera se construye la matriz de la figura 6.31.

| | | ASCENDIENTES | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
| DESCENDIENTES | A | | | | | | | | | | | | | | |
| | B | | | | | | | | | | | | | | |
| | C | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | D | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | E | | | 1 | | | | | | | | | | | |
| | F | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 |
| | G | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | H | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | I | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | J | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | |
| | K | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | | | |
| | L | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | M | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | | 1 | 1 | |
| | N | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |

Figura 6.31

b) Realizar la descomposición en niveles. Esta operación consiste en agrupar las actividades en conjuntos o niveles con unas características comunes. Para ello, ampliamos la matriz mediante un vector columna V_1 cuyos elementos se obtienen al sumar los elementos de cada una de las filas de la matriz. El primer nivel estará compuesto por aquellas actividades que se correspondan con los elementos del vector V_1 cuyos valores sean igual a cero. En nuestro caso el primer nivel estará formado por las actividades A y B, anotándose debajo del vector. A continuación, se eliminan de la matriz las filas y columnas correspondientes a las actividades que conforman el primer nivel, obteniéndose una matriz resultante de menor orden que la inicial. Seguidamente, se amplía la matriz mediante un vector columna V_2 cuyos elementos se obtienen al sumar los elementos de cada una de las filas de la matriz resultante. El segundo nivel estará compuesto por aquellas actividades que se correspondan con los elementos del vector V_2 cuyos valores sean igual a cero. En nuestro caso el segundo nivel estará formado por las actividades C, D, G, H e I, anotándose debajo del vector. Repetir esta iteración tantas veces como sea necesario hasta conseguir que todas las actividades formen parte de un nivel. En nuestro ejemplo se han conseguido cuatro niveles, como se muestra en la figura 6.32.

| | | ASCENDIENTES | | | | | | | | | | | | | | Vector | | | |
|---------------|---|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | V ₁ | V ₂ | V ₃ | V ₄ |
| DESCENDIENTES | A | | | | | | | | | | | | | | | 0 | -- | -- | -- |
| | B | | | | | | | | | | | | | | | 0 | -- | -- | -- |
| | C | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | D | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | E | | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 0 | -- |
| | F | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 7 | 6 | 4 | 0 |
| | G | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | H | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | I | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | J | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | 3 | 3 | 0 | -- |
| | K | 1 | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | 3 | 2 | 0 | -- |
| | L | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | 3 | 1 | 0 | -- |
| | M | 1 | 1 | 1 | | | | | | 1 | | 1 | 1 | | | 6 | 4 | 2 | 0 |
| | N | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 3 | 2 | 0 | -- |

| | A | C | E | F |
|-------|---|----|-----|----|
| | B | D | J | M |
| | | G | K | |
| | | H | L | |
| | | I | N | |
| NIVEL | I | II | III | IV |

Figura 6.32

c) Ordenar los niveles obtenidos. El orden de los niveles depende de la matriz utilizada. Las actividades del nivel correspondiente al vector V_1 constituirán el primer nivel cuando empleemos la matriz de ascendencia, dado que estas actividades carecen de ascendientes y serán las primeras que aparecen en la red Pert. Sin embargo, cuando usemos la matriz de descendencia, las actividades del nivel correspondiente al vector V_1 son aquellas que carecen de descendientes y, por lo tanto, constituirán el último nivel.

d) Dibujar la representación gráfica de la descomposición en niveles. Se trata de representar gráficamente los niveles obtenidos a partir de la matriz. Para ello, cada uno de los niveles obtenidos se representa mediante una línea vertical con trazo discontinuo. En cada nivel, las actividades se mostrarán a través de flechas. Finalmente, se marcarán las prelacións existentes entre las actividades, expresando únicamente las precedencias inmediatas y eliminando las precedencias por transitividad, como se reproduce en la figura 6.33.

Hay que tener en cuenta que los niveles obtenidos de esta forma cumplen las siguientes propiedades:

- Las actividades de un nivel sólo pueden preceder a actividades que se encuentren en niveles posteriores, nunca a las de niveles anteriores.
- Entre las actividades que conforman un nivel no se pueden dar relaciones de precedencia.

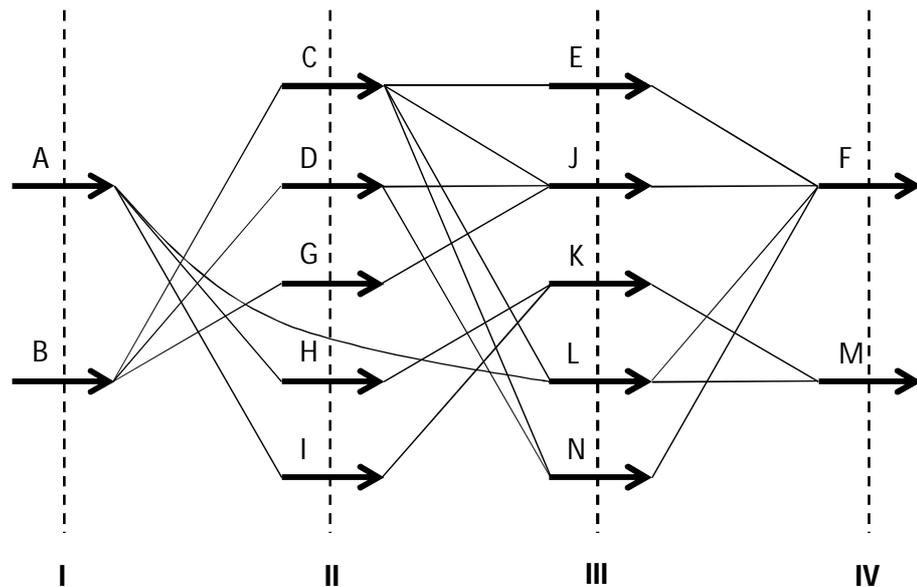


Figura 6.33

e) Dibujar la red Pert. Partiendo de la representación gráfica de la descomposición en niveles, es mucho más fácil acometer el trazado de la red Pert, que si lo hacemos desde la relación de precedencias inicial. La figura 6.34 presenta la red Pert de nuestro ejemplo correctamente resuelta.

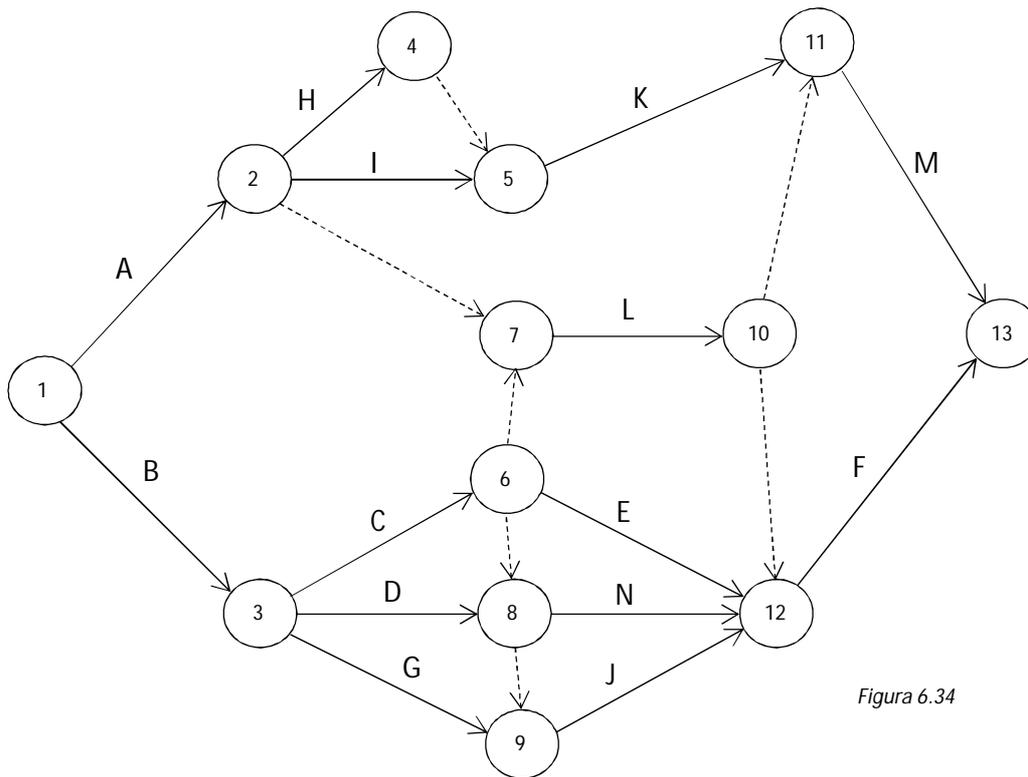


Figura 6.34

6.7. DETERMINACIÓN DEL TIEMPO ESPERADO DE EJECUCIÓN (te) DE UNA ACTIVIDAD

La duración de una actividad no puede fijarse, en la mayoría de los casos, con exactitud, dado que depende de una serie de circunstancias aleatorias, como pueden ser: averías de máquinas, interrupción del suministro eléctrico, retrasos en la recepción de materiales, baja por enfermedad de los operarios, etc. El método Pert aborda este carácter aleatorio de las actividades considerando tres estimaciones de tiempos: tiempo optimista (t_o), tiempo normal (t_n) y tiempo pesimista (t_p) (Romero, 1988: 38).

El tiempo optimista, representa el tiempo mínimo en que podría ejecutarse la actividad si todo marchara excepcionalmente bien, no produciéndose ningún tipo de contratiempo durante la fase de ejecución. La probabilidad de que se cumpla este tiempo no es mayor al 1%. El tiempo normal representa el tiempo en que normalmente se realizará la actividad, es decir, es el tiempo que se empleará cuando las circunstancias que influyen en la duración de la actividad no sean excesivamente favorables, ni excesivamente desfavorables. Finalmente, el tiempo pesimista representa el tiempo máximo en que podría ejecutarse la actividad si todas las circunstancias que influyen en su duración fueran totalmente desfavorables,

produciéndose toda clase de contratiempos, exceptuándose casos extremos (huelgas, incendios, etc.). Igualmente, la probabilidad de que se cumpla este tiempo no es mayor al uno por ciento (ibídem).

A partir del t_o , t_n y t_p se calcula el tiempo esperado de la actividad (t_e) mediante la media ponderada de estos tres tiempos. La ponderación de cada uno de ellos dependerá de la Ley de Distribución Estadística que siga la actividad. Los autores del método Pert estimaban que las actividades de un proyecto seguían una distribución estadística tipo β (beta), sin embargo esta afirmación ha sido contestada por autores europeos, sobre todo franceses, que sostienen que la distribución beta no se ajusta correctamente a determinadas actividades. Como alternativa proponen distribuciones de tipo triangular y rectangular. Como consecuencia de ello, en un proyecto convivirán actividades que tengan una distribución estadística tipo beta, con otras que sigan una distribución tipo triangular o rectangular. No obstante, el conjunto del proyecto tiende hacia una distribución de tipo Normal (figura 6.35), como estudiaremos más adelante en el capítulo dedicado al cálculo de probabilidades.

A continuación estudiamos las distintas distribuciones estadísticas que siguen las actividades de un proyecto, indicando en cada una de ellas la manera de obtener el tiempo esperado (t_e) y la varianza (σ^2).

Distribución β

Como se observa en la figura 6.36 la distribución beta tiene una forma acampanada y asimétrica, pudiendo presentar la asimetría hacia la izquierda o hacia la derecha, aunque en ocasiones también puede ser simétrica. Se diferencia de la distribución Normal (campana de Gauss) en que ésta es simétrica y asintótica, es decir la curva se aproxima cada vez más al eje de abscisas pero no llega a cortarlo o lo corta en $+\infty$ y $-\infty$. Por el contrario, la distribución beta corta al eje de abscisas en los extremos del recorrido.

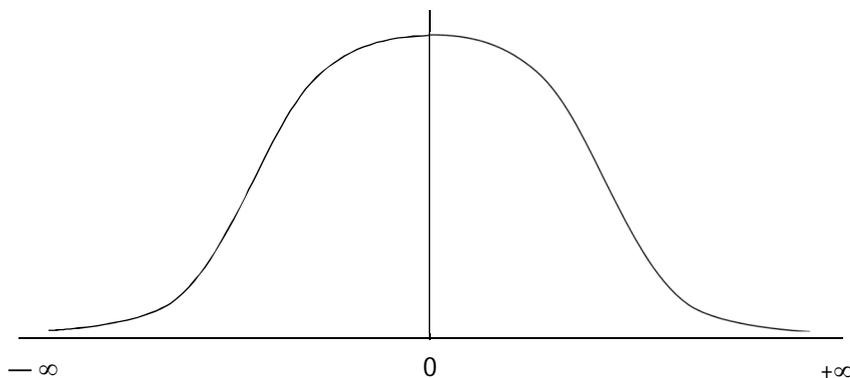


Figura 6.35

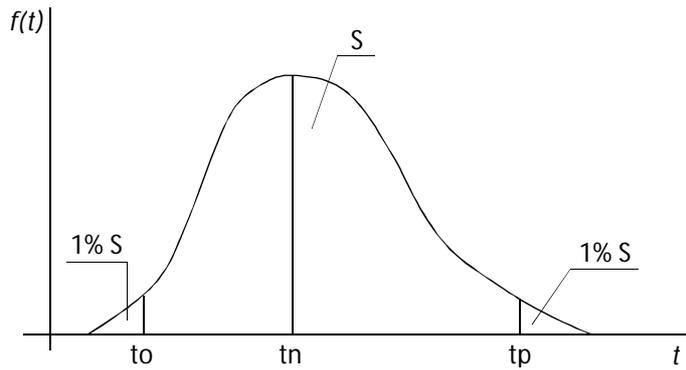


Figura 6.36

En el eje de abscisas se representa el tiempo de ejecución de la actividad $[t]$ y en el eje de ordenadas la función de densidad $[f(t)]$ que nos indica la probabilidad para cada valor de t .

Si llamamos S a la superficie total que encierra la curva, el tiempo optimista y el pesimista se encuentran a una distancia del extremo de la curva tal que la superficie que abarca es igual al 1% de S . Por otro lado, el tiempo normal coincide con el punto más alto de la curva, es decir con el mayor valor de $f(t)$.

El tiempo esperado de la actividad (t_e) coincidirá con el tiempo normal cuando la curva sea simétrica (figura 6.37), pero tendrá distinto valor cuando la curva presente asimetría. Si la distribución es asimétrica hacia la izquierda, el tiempo esperado se localizará a la izquierda del tiempo normal, es decir $t_e < t_n$ (figura 6.38). Cuando la asimetría es hacia la derecha, el tiempo esperado se encontrará a la derecha del tiempo normal, es decir $t_e > t_n$ (figura 6.39).

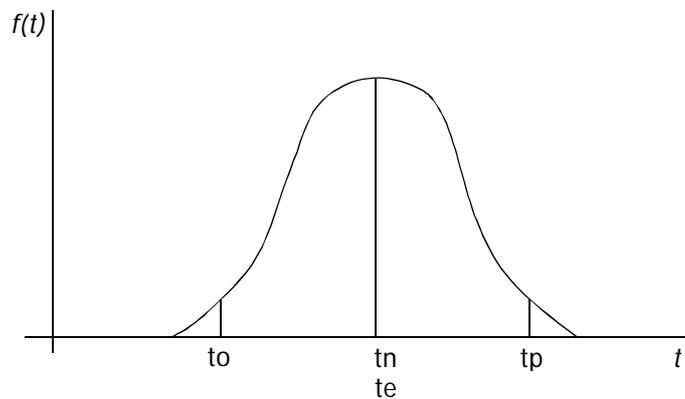


Figura 6.37

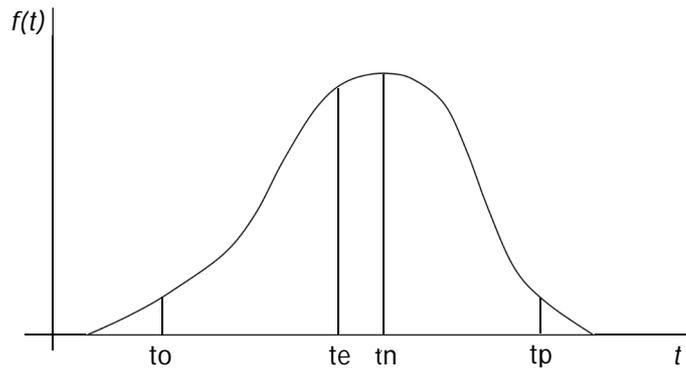


Figura 6.38

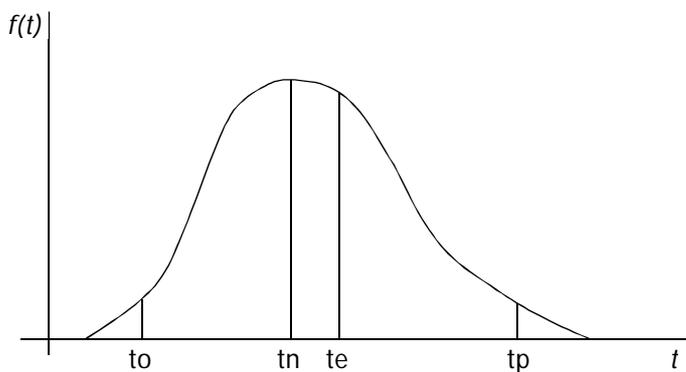


Figura 6.39

La localización exacta del tiempo esperado es un tercio de la distancia que existe entre el tiempo normal y el promedio del t_o con el t_p , como se aprecia en la figura 6.40, de manera que divide la curva en dos partes de igual superficie ($\frac{1}{2} S$).

En términos matemáticos lo expresaríamos de la siguiente forma:

$$t_e - t_n = \frac{D}{3} = \frac{\left(\frac{t_o + t_p}{2}\right) - t_n}{3}$$

De donde obtenemos:

$$t_e = \frac{t_o + 4t_n + t_p}{6}$$

El tiempo esperado así calculado nos indica el tiempo de ejecución de una actividad con gran aproximación, pero el tiempo de elaboración real no lo sabremos hasta que la actividad se materialice, lo cual crea cierta incertidumbre en cuanto a la bondad de los cálculos realizados. El modo de medir esta incertidumbre se expresa a través de la varianza (σ^2). Dicho de otra forma, la varianza indica el riesgo de no acertar el tiempo esperado de la actividad.

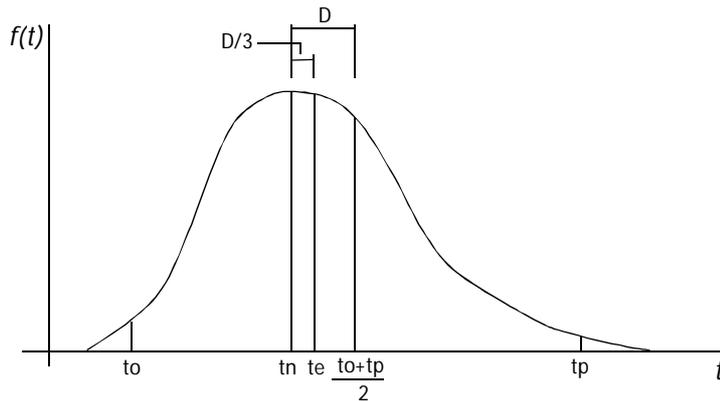


Figura 6.40

La varianza es el cuadrado de la desviación típica (σ), la cual se define como la sexta parte del recorrido de la variable aleatoria, es decir $\sigma = 1/6 (tp - to)$. Por lo tanto, la expresión matemática de la varianza es la siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{(tp - to)^2}{36}$$

Distribución Triangular

La distribución triangular toma su nombre de la forma geométrica que genera. Al igual que la distribución beta, puede ser simétrica, asimétrica hacia la izquierda o asimétrica hacia la derecha (figura 6.41). Los tiempos optimista y pesimista se encuentran en los extremos y el tiempo normal en el punto más alto. El tiempo esperado se obtiene mediante la media aritmética de estos tres tiempos, coincidiendo con el t_n cuando la distribución es simétrica. En el caso de presentar asimetría hacia la izquierda $t_e < t_n$ y cuando la asimetría es hacia la derecha $t_e > t_n$.

Las fórmulas para calcular el tiempo esperado y la varianza serán:

$$t_e = \frac{to + t_n + t_p}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{(t_p - to)^2 - (t_p - t_n) \times (t_n - to)}{18}$$

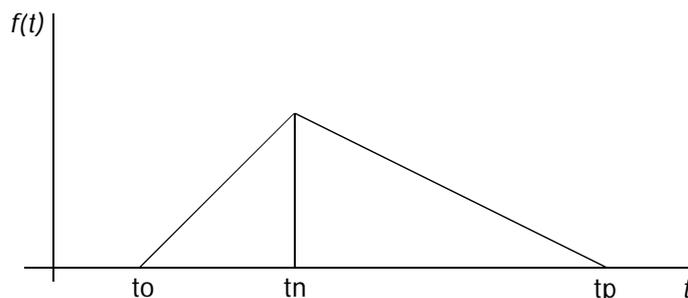


Figura 6.41

Distribución rectangular o uniforme

Cuando tenemos dificultades para estimar el tiempo normal de una actividad es preferible utilizar la distribución uniforme o rectangular, dado que en este tipo de distribución sólo se utiliza el tiempo pesimista y el tiempo optimista. En la figura 6.42 se reproduce una distribución rectangular, cuyo tiempo esperado será la media aritmética del optimista y el pesimista y la varianza será la diferencia entre ellos elevada al cuadrado y dividida por doce.

La expresión matemática será:

$$t_e = \frac{t_o + t_p}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(t_p - t_o)^2}{12}$$

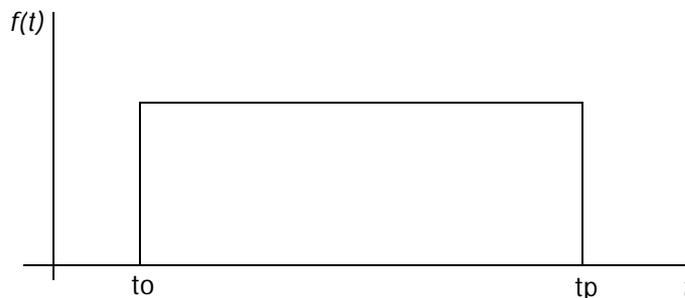


Figura 6.42

6.8. NUMERACIÓN DE LOS SUCESOS DE UNA RED

La numeración de los sucesos se realizará comenzando por el suceso inicial de la red, adjudicándole el número 1, y a partir de él se numerarán de manera correlativa el resto de sucesos, siempre que se cumpla la condición de que el número del suceso inicial de una actividad debe ser menor que el del suceso final de dicha actividad. Dicho de otra forma: se numerarán los sucesos de modo que no se pueda adjudicar un número a un suceso si no se han numerado los sucesos precedentes. La numeración normalmente sigue el orden de los números naturales (1, 2, 3, 4, ...), como se puede observar en la figura 6.43, sin embargo muchas veces es conveniente que la numeración no sea correlativa sino que sea, por ejemplo, de cinco en cinco (1, 5, 10, 15, 20, ...) o de diez en diez (1, 10, 20, 30, 40, ...). Esto es conveniente en proyectos con muchas actividades, donde es posible que se olvide inicialmente alguna actividad, o donde puedan aparecer nuevas actividades que, al ser incorporadas a la red, den lugar a nuevos sucesos, de manera que estos nuevos sucesos se numerarán con los dígitos no utilizados. Por ejemplo, si la numeración utilizada ha sido 1, 5, 10, 15,... y aparece un suceso nuevo situado entre el 5 y el 10, le podemos otorgar el número 7, evitando así tener que renumerar todos los sucesos de la red.

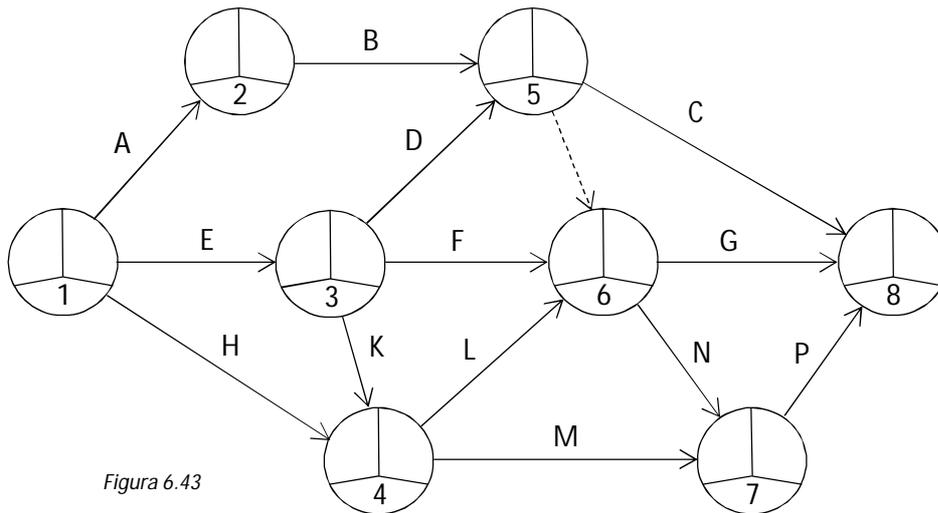


Figura 6.43

De manera genérica el suceso inicial de una actividad se denominará suceso "i" y el final, suceso "j", tal y como aparece en la figura 6.44.

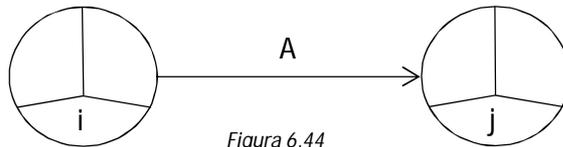


Figura 6.44

6.9. CÁLCULO DE LOS TIEMPOS MÍNIMOS Y MÁXIMOS DE LOS SUCESOS

Cada suceso tiene asociado dos tiempos: el tiempo mínimo (T_{min}) y el tiempo máximo (T_{max}). Así, como cada actividad tiene un suceso inicial y un suceso final, tendremos que cada actividad participa de cuatro tiempos: el tiempo mínimo del suceso inicial ($T_{min.i}$), el tiempo máximo del suceso inicial ($T_{max.i}$), el tiempo mínimo del suceso final ($T_{min.j}$) y el tiempo máximo del suceso final ($T_{max.j}$), como se ilustra en la figura 6.45.

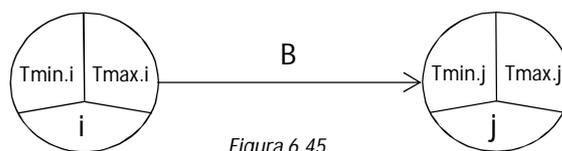


Figura 6.45

El cálculo de los T_{min} y T_{max} de cada uno de los sucesos se realizará mediante un orden predeterminado, de modo que se comenzará calculando todos los T_{min} y después todos los T_{max} .

Cálculo de tiempos mínimos (tiempos early)

Se comenzará por el suceso número 1, asignando un valor de $T_{min} = 0$. A continuación se irán calculando los T_{min} de los demás sucesos en el mismo orden en que se han numerado, de manera que el T_{min} de un suceso "j" será el T_{min} del suceso inmediatamente anterior a él (suceso "i") más el tiempo esperado de la actividad que los une (t_{ij}), es decir: $T_{min.j} = T_{min.i} + t_{ij}$.

Cuando exista más de un suceso inmediatamente anterior al suceso "j", se calculará del siguiente modo: $T_{min.j} = \text{Máx.} (T_{min.i} + t_{ij}), \forall i$

Un ejemplo de cálculo de T_{min} se puede ver en la figura 6.46, donde:

$$T_{min\ 1} = 0$$

$$T_{min\ 2} = T_{min\ 1} + t_{1,2} = 0 + 5 = 5$$

$$T_{min\ 3} = T_{min\ 1} + t_{1,3} = 0 + 7 = 7$$

$$T_{min\ 4} = \text{Máx} (T_{min\ 1} + t_{1,4}; T_{min\ 3} + t_{3,4}) = \text{Máx} (0 + 4; 7 + 2) = 9$$

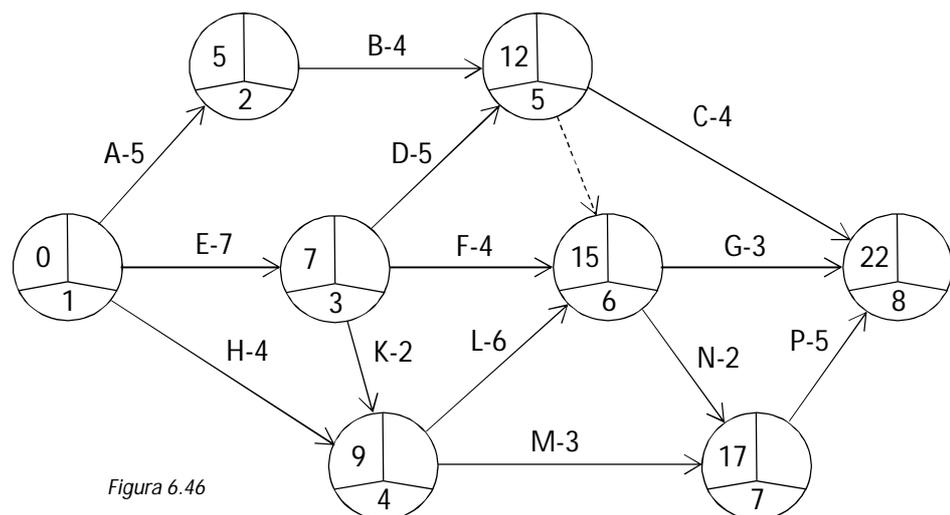
$$T_{min\ 5} = \text{Máx} (T_{min\ 2} + t_{2,5}; T_{min\ 3} + t_{3,5}) = \text{Máx} (5 + 4; 7 + 5) = 12$$

$$T_{min\ 6} = \text{Máx} (T_{min\ 5} + t_{5,6}; T_{min\ 3} + t_{3,6}; T_{min\ 4} + t_{4,6}) = \text{Máx} (12 + 0; 7 + 4; 9 + 6) = 15$$

$$T_{min\ 7} = \text{Máx} (T_{min\ 6} + t_{6,7}; T_{min\ 4} + t_{4,7}) = \text{Máx} (15 + 2; 9 + 3) = 17$$

$$T_{min\ 8} = \text{Máx} (T_{min\ 5} + t_{5,8}; T_{min\ 6} + t_{6,8}; T_{min\ 7} + t_{7,8}) = \\ = \text{Máx} (12 + 4; 15 + 3; 17 + 5) = 22$$

El T_{min} del último suceso de la red recibe el nombre de Tiempo mínimo final (T_{min} . Final), o también Tiempo Programado (T_{prog}).

Cálculo de tiempos máximos (tiempos last)

Los tiempos máximos se calculan en orden inverso al de los tiempos mínimos. Es decir, se comenzará por asignar un valor al T_{max} del suceso número 8 y posteriormente se

van calculando los tiempos de los sucesos 7, 6, 5, ..., 1, de modo que el Tmax de un suceso "i" será el Tmax del suceso inmediato posterior (Tmax.j) menos el tiempo esperado de la actividad que los une (tij), es decir: $T_{max.i} = T_{max.j} - t_{ij}$.

Cuando exista más de un suceso inmediato posterior al suceso "i", se calculará del siguiente modo: $T_{max.i} = \text{Mín}(T_{max.j} - t_{ij}), \forall j$

El valor para el Tmax que se consignará en el último suceso de la red coincidirá con el plazo de ejecución del proyecto y se denomina Tiempo máximo final (Tmax. Final), o también Tiempo Previsto (Tprev). Cuando no se haya estipulado un plazo de ejecución para el proyecto, el Tprev se igualará al Tprog.

Partiendo de la misma red donde se habían calculado los Tmin, en la figura 6.47 se han calculado los Tmax suponiendo que no existe plazo de ejecución del proyecto, verificándose:

$$T_{max_8} = 22$$

$$T_{max_7} = T_{max_8} - t_{7,8} = 22 - 5 = 17$$

$$T_{max_6} = \text{Mín}(T_{max_8} - t_{6,8}; T_{max_7} - t_{6,7}) = \text{Mín}(22 - 3; 17 - 2) = 15$$

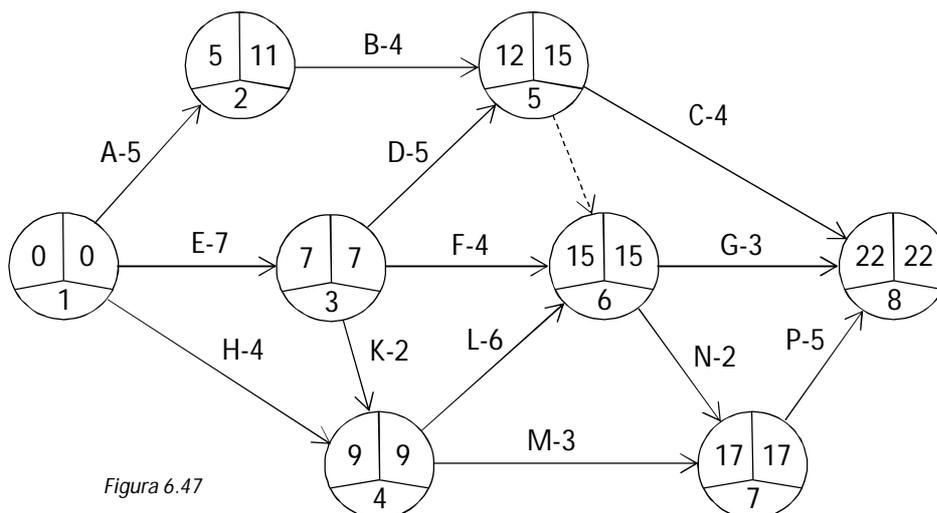
$$T_{max_5} = \text{Mín}(T_{max_8} - t_{5,8}; T_{max_6} - t_{5,6}) = \text{Mín}(22 - 4; 15 - 0) = 15$$

$$T_{max_4} = \text{Mín}(T_{max_6} - t_{4,6}; T_{max_7} - t_{4,7}) = \text{Mín}(15 - 6; 17 - 3) = 9$$

$$T_{max_3} = \text{Mín}(T_{max_5} - t_{3,5}; T_{max_6} - t_{3,6}; T_{max_4} - t_{3,4}) = \\ = \text{Mín}(15 - 5; 15 - 4; 9 - 2) = 7$$

$$T_{max_2} = T_{max_5} - t_{2,5} = 15 - 4 = 11$$

$$T_{max_1} = \text{Mín}(T_{max_2} - t_{1,2}; T_{max_3} - t_{1,3}; T_{max_4} - t_{1,4}) = \text{Mín}(11 - 5; 7 - 7; 9 - 4) = 0$$



6.10. FECHAS MÁS PRONTA Y MÁS TARDÍA DE COMIENZO Y FINALIZACIÓN DE UNA ACTIVIDAD

En el apartado anterior hemos visto cómo se calculan los tiempos mínimos y máximos. Ahora vamos a ver algunos conceptos ligados a estos tiempos:

Fecha más pronta de comienzo de una actividad

Esta fecha se corresponde con el tiempo mínimo del suceso inicial ($T_{min.i}$) y representa la fecha en que comenzará la actividad, si las actividades anteriores a ella se ejecutan en su tiempo esperado.

Fecha más pronta de finalización de una actividad

Será la fecha en que termine la actividad si comienza lo más pronto posible. Por lo tanto, se calculará sumando al $T_{min.i}$ el tiempo esperado de la actividad ($T_{min.i} + t_{ij}$).

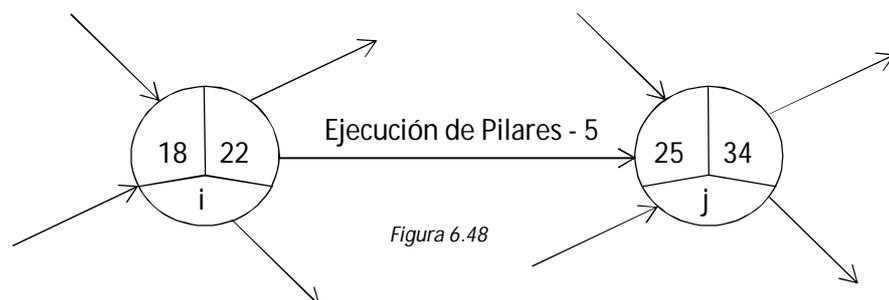
Fecha más tarde de finalización de una actividad

Esta fecha se corresponde con el tiempo máximo del suceso final ($T_{max.j}$) y representa la fecha máxima en que debe terminar la actividad para que el proyecto no se retrase.

Fecha más tarde de comienzo de una actividad

Será la fecha más tarde en que debe comenzar la actividad para que el proyecto no sufra ningún retraso. Se calcula restando al $T_{max.j}$ el tiempo esperado de la actividad ($T_{max.j} - t_{ij}$).

En la figura 6.48 se muestra un resumen de estos cuatro conceptos, aplicados a la actividad "Ejecución de Pilares", con un tiempo esperado de 5 fechas.



$$\text{Fecha más pronta de comienzo} = T_{min.i} = 18$$

$$\text{Fecha más pronta de finalización} = T_{min.i} + t_{ij} = 18 + 5 = 23$$

$$\text{Fecha más tarde de finalización} = T_{max.j} = 34$$

$$\text{Fecha más tarde de comienzo} = T_{max.j} - t_{ij} = 34 - 5 = 29$$

6.11. CONCEPTO DE HOLGURA DE UNA ACTIVIDAD

La holgura de una actividad es el margen que tiene para realizarse sin comprometer el plazo de ejecución del proyecto. No obstante, como cada actividad tiene dos tiempos iniciales ($T_{min.i}$ y $T_{max.i}$) y dos tiempos finales ($T_{min.j}$ y $T_{max.j}$), las distintas combinaciones entre ellos permiten calcular cuatro tipos de holguras, que pasamos a enunciar:

Holgura total (Ht)

Es el número de fechas que puede retrasarse la realización de una actividad sin que se retrase la fecha final del proyecto. Dicho de otra manera, es el margen de tiempo que existe entre la fecha más pronta de comienzo y la fecha más tarde de comienzo.

$$\text{Fecha más pronta de comienzo} = T_{min.i}$$

$$\text{Fecha más tarde de comienzo} = T_{max.j} - t_{ij}$$

$$H_t = T_{max.j} - t_{ij} - T_{min.i}$$

Holgura libre (Hl)

Es el número de fechas que puede retrasarse la realización de una actividad sin que afecte al comienzo de las actividades siguientes. Es decir, es el margen de tiempo que existe entre el final más pronto de la actividad y el comienzo más pronto de las actividades siguientes.

$$\text{Final más pronto de la actividad} = T_{min.i} + t_{ij}$$

$$\text{Comienzo más pronto de actividades siguientes} = T_{min.j}$$

$$H_l = T_{min.j} - t_{ij} - T_{min.i}$$

Holgura independiente (Hi)

Es el tiempo que queda disponible cuando las actividades precedentes finalizan lo más tarde posible y las actividades siguientes comienzan lo más pronto posible. Como el final más tarde de las actividades precedentes es $T_{max.i}$ y el comienzo más pronto de las actividades siguientes es $T_{min.j}$, obtendríamos la siguiente expresión:

$$H_i = T_{min.j} - t_{ij} - T_{max.i}$$

Holgura condicional (Hc)

Es el tiempo que queda disponible cuando las actividades precedentes terminan lo más tarde posible. Por lo tanto, se puede enunciar:

$$H_c = T_{max.j} - t_{ij} - T_{max.i}$$

En la figura 6.49 se resumen gráficamente los cuatro tipos de holguras.

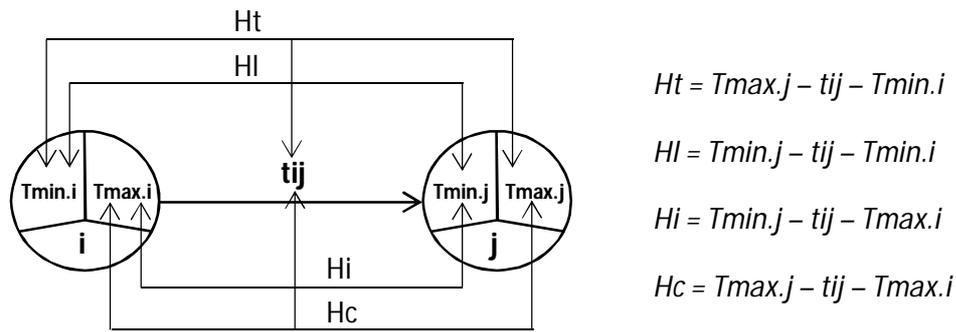


Figura 6.49

6.12. CÁLCULO DE HOLGURAS CON SUCESOS FICTICIOS

En el capítulo 6.1 habíamos visto que en determinadas circunstancias es preciso introducir en la red actividades ficticias para poder representar correctamente las relaciones existentes entre las actividades reales del proyecto. En muchos casos, la incorporación de estas actividades ficticias conlleva la creación de nuevos sucesos que también suelen ser sucesos ficticios. Ahora bien, cuando realizamos el cálculo de holguras con las formulas enunciadas anteriormente se cometen errores si tomamos para ello los Tmin y Tmax de tales sucesos. Conviene pues, en primer lugar, detectar cuáles son los sucesos ficticios de cada una de las actividades y, posteriormente, realizar el cálculo de las holguras tomando los Tmin y Tmax de los sucesos reales a considerar para tales actividades.

Concepto de suceso ficticio

Consideramos que un suceso es ficticio cuando a él solo llegan actividades ficticias, o también, cuando de él solo parten actividades ficticias. En las figuras 6.50 y 6.51 tenemos algunos ejemplos de sucesos ficticios.

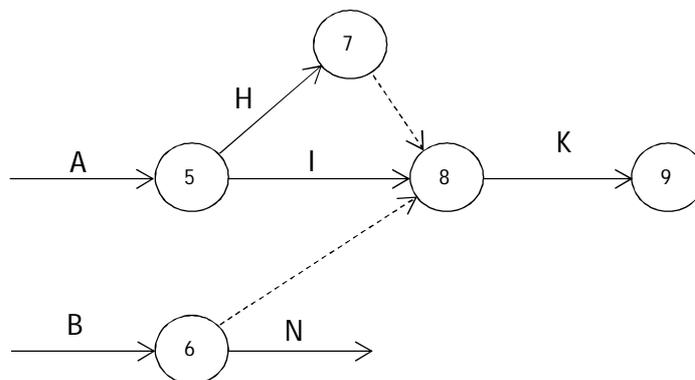


Figura 6.50

En la figura 6.50 el único suceso ficticio es el nº 7, dado que de él sólo parte una actividad ficticia. Por otro lado, en la figura 6.51 existen tres sucesos ficticios, el nº 10 (a él sólo llegan actividades ficticias), el nº 11 (de él sólo parten actividades ficticias) y el nº 14 (a él sólo llegan actividades ficticias).

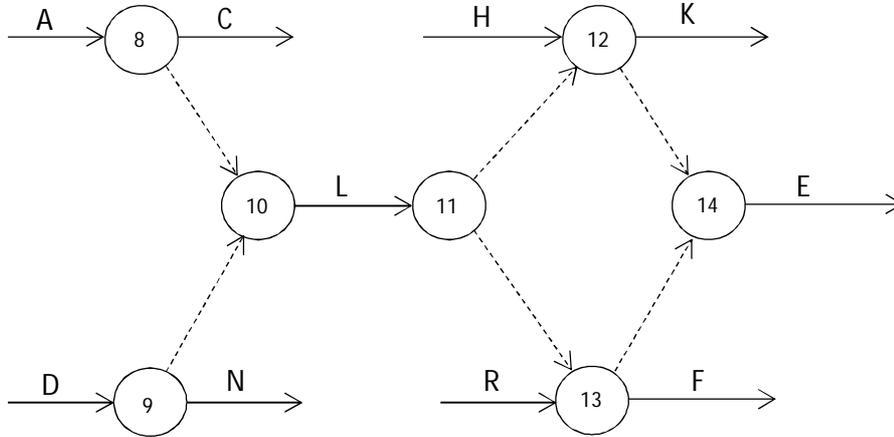


Figura 6.51

Forma de calcular las holguras con sucesos ficticios

Cuando el suceso ficticio de una actividad es el inicial, el T_{min} de dicho suceso es válido, pero el T_{max} hay que sustituirlo (sólo a efectos de cálculo) por el mayor de los T_{max} de los sucesos inmediatamente precedentes. Un ejemplo de ello lo tenemos en la figura 6.52, donde el suceso 5 es ficticio (a él sólo le llegan actividades ficticias) y por ello, para el cálculo de las holguras, tomaremos como T_{max 5} el mayor valor entre T_{max 3} y T_{max 4}.

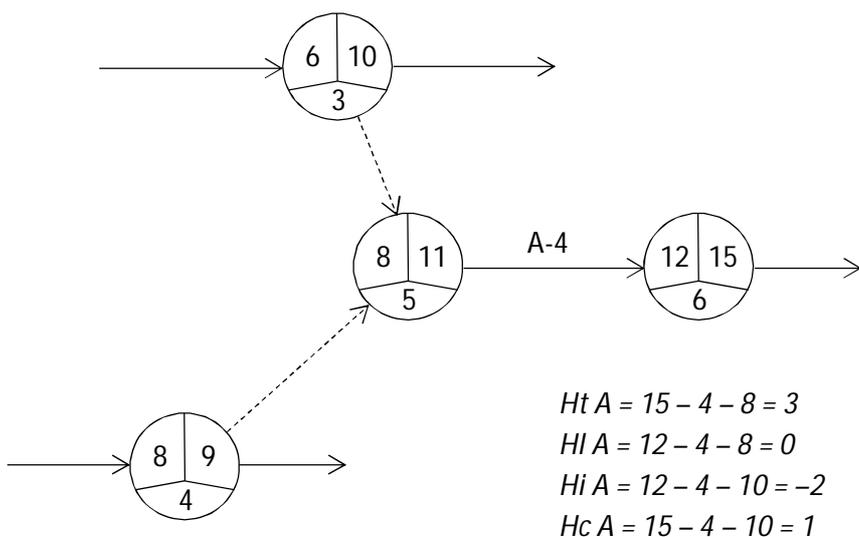
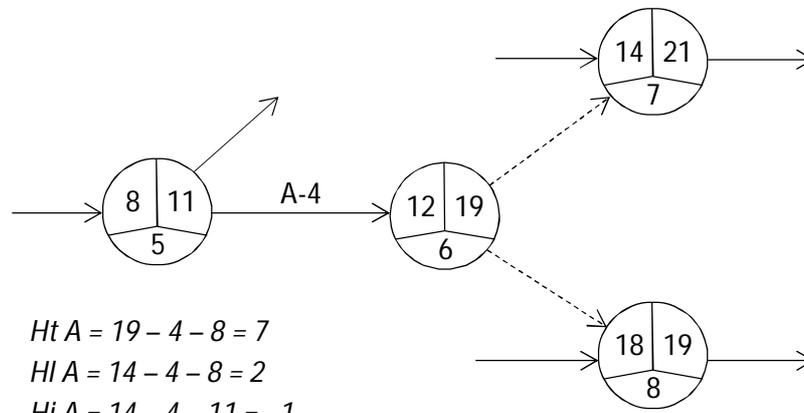


Figura 6.52

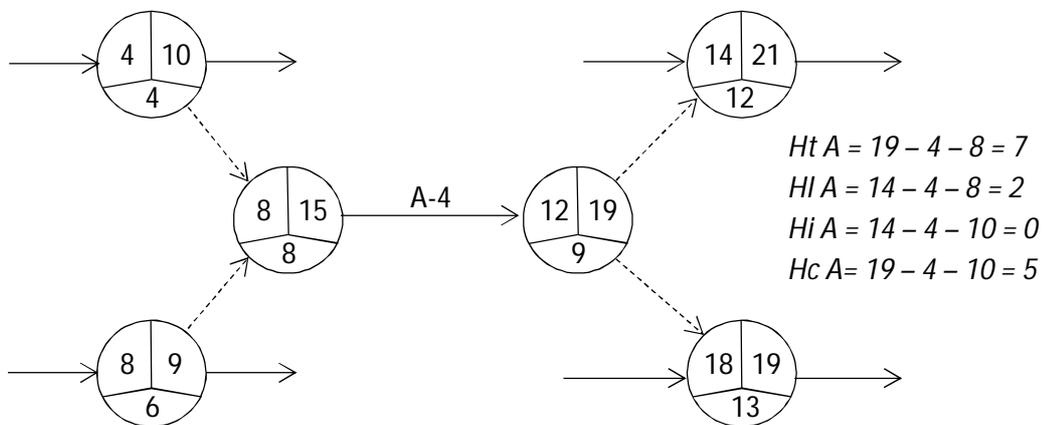
Cuando el suceso ficticio de una actividad es el final, el Tmax de dicho suceso es válido, pero el Tmin hay que sustituirlo (sólo a efectos de cálculo) por el menor de los Tmin de los sucesos inmediatamente siguientes. Así, en la figura 6.53, donde el suceso 6 es ficticio (de él sólo salen actividades ficticias) tomaremos como $Tmin_6$ el menor entre $Tmin_7$ y $Tmin_8$.



$$\begin{aligned}
 Ht A &= 19 - 4 - 8 = 7 \\
 HI A &= 14 - 4 - 8 = 2 \\
 Hi A &= 14 - 4 - 11 = -1 \\
 Hc A &= 19 - 4 - 11 = 4
 \end{aligned}$$

Figura 6.53

En el caso de que tanto el suceso inicial como el final sean ficticios, aplicaremos a cada suceso lo dicho anteriormente. Es decir, el valor de $Tmax_i$ será sustituido por el mayor de los precedentes y como valor de $Tmin_j$ tomaremos el menor de los siguientes, como se ilustra en la figura 6.54.



$$\begin{aligned}
 Ht A &= 19 - 4 - 8 = 7 \\
 HI A &= 14 - 4 - 8 = 2 \\
 Hi A &= 14 - 4 - 10 = 0 \\
 Hc A &= 19 - 4 - 10 = 5
 \end{aligned}$$

Figura 6.54

Ejemplo de cálculo de holguras

Dada la red de la figura 6.55, calcular el valor de todas las holguras.

Las actividades B, D, E, F, G, L, M, N, P y R tienen suceso inicial y final reales, por lo tanto sus holguras se calculan directamente aplicando las fórmulas vistas en el apartado 6.11, obteniendo los valores que aparecen en la tabla de la figura 6.56.

Sin embargo, las actividades H y K tienen el suceso inicial ficticio, por ello las holguras se calcularán conforme a lo explicado en el punto 6.12, de la forma siguiente:

$$H_t H = 25 - 7 - 7 = 11$$

$$H_I H = 16 - 7 - 7 = 2$$

$$H_i H = 16 - 7 - 16 = -7$$

$$H_c H = 25 - 7 - 16 = 2$$

$$H_t K = 23 - 3 - 7 = 13$$

$$H_I K = 14 - 3 - 7 = 4$$

$$H_i K = 14 - 3 - 16 = -5$$

$$H_c K = 23 - 3 - 16 = 4$$

Por otro lado, las actividades A, C y T tienen el suceso final ficticio, por lo que sus holguras se calcularán como sigue:

$$H_t A = 10 - 4 - 0 = 6$$

$$H_I A = 7 - 4 - 0 = 3$$

$$H_i A = 7 - 4 - 3 = 0$$

$$H_c A = 10 - 4 - 3 = 3$$

$$H_t C = 16 - 5 - 0 = 11$$

$$H_I C = 7 - 5 - 0 = 2$$

$$H_i C = 7 - 5 - 3 = -1$$

$$H_c C = 16 - 5 - 3 = 8$$

$$H_t T = 16 - 3 - 3 = 10$$

$$H_I T = 7 - 3 - 3 = 1$$

$$H_i T = 7 - 3 - 12 = -8$$

$$H_c T = 16 - 3 - 12 = 1$$

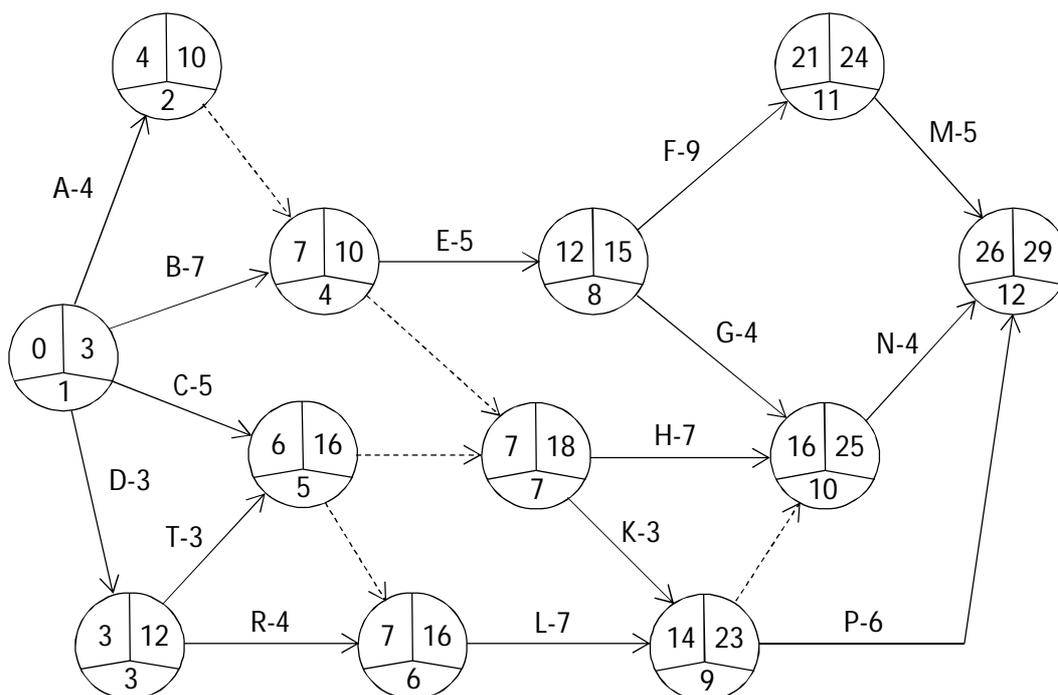


Figura 6.55

| | A | B | C | D | E | F | G | H | K | L | M | N | P | R | T |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ht | 6 | 3 | 11 | 9 | 3 | 3 | 9 | 11 | 13 | 9 | 3 | 9 | 9 | 9 | 10 |
| Hi | 3 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 6 | 6 | 0 | 1 |
| Hi | 0 | -3 | -1 | -3 | -3 | -3 | -3 | -7 | -5 | -9 | -3 | -3 | -3 | -9 | -8 |
| Hc | 3 | 0 | 8 | 6 | 0 | 0 | 6 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Figura 6.56

6.13. CONCEPTO DE CAMINO. CAMINO MÁS LARGO Y CAMINO CRÍTICO

Un camino es una sucesión de actividades unas a continuación de otras. Por lo tanto, un camino es un conjunto de actividades entre las que existe una relación lineal. La duración de un camino cualquiera es la suma de los tiempos esperados de todas las actividades que conforman dicho camino. Por ello, el camino más largo de la red es aquel cuya duración es igual al Tprog.

Todas las actividades que componen el camino más largo tienen su Ht de igual valor y será la diferencia que existe entre el Tprev y el Tprog. Es decir, todas las actividades del camino más largo tienen $Ht = Tprev - Tprog$. Así, cuando estamos en una red donde el $Tprev > Tprog$, las actividades del camino más largo tendrán holguras totales positivas, sin embargo cuando el $Tprev < Tprog$ el valor de estas holguras será negativo. Finalmente, si $Tprev = Tprog$ las holguras totales de estas actividades serán igual a cero. En este caso, el camino más largo recibe el nombre de camino crítico y las actividades y sucesos que componen este camino son actividades críticas y sucesos críticos.

Suceso crítico

Los sucesos críticos son aquellos que tienen $Tmin = Tmax$. En la red de la figura 6.57 son críticos los sucesos 1, 3, 5, 6 y 8. Los demás sucesos tienen holgura, siendo el valor de ésta la diferencia entre su Tmax y su Tmin. Así, la holgura de los distintos sucesos será:

$$H \text{ suceso 1} = 0 - 0 = 0 \text{ (crítico)}$$

$$H \text{ suceso 2} = 9 - 4 = 5 \text{ (no crítico)}$$

$$H \text{ suceso 3} = 6 - 6 = 0 \text{ (crítico)}$$

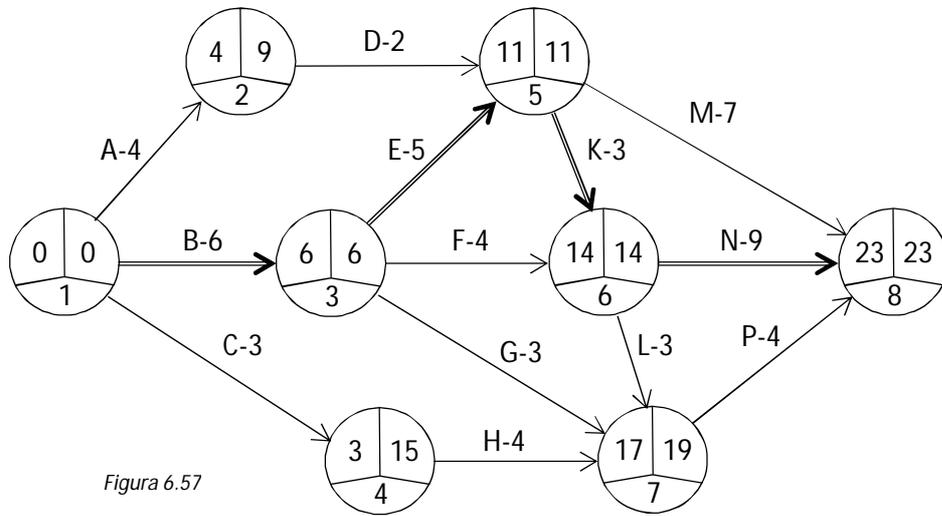
$$H \text{ suceso 4} = 15 - 3 = 12 \text{ (no crítico)}$$

$$H \text{ suceso 5} = 11 - 11 = 0 \text{ (crítico)}$$

$$H \text{ suceso 6} = 14 - 14 = 0 \text{ (crítico)}$$

H suceso 7 = 19 – 17 = 2 (no crítico)

H suceso 8 = 23 – 23 = 0 (crítico)



Actividad crítica

Para que una actividad sea crítica debe cumplir dos requisitos simultáneamente:

- a) Que los sucesos inicial y final de dicha actividad sean críticos.
- b) Que todas sus holguras sean igual a cero.

Atendiendo a lo dicho anteriormente, las actividades críticas de la red de la figura 6.57 son las actividades B, E, K y N. Obsérvese que los sucesos inicial y final de la actividad M son críticos, sin embargo la actividad no es crítica dado que tiene holgura (Ht = 5). Las actividades críticas se representan mediante una flecha con doble trazo.

Camino crítico

Como se ha señalado anteriormente el camino crítico está formado por las actividades críticas y la suma de los tiempos esperados de dichas actividades es igual al Tprog del proyecto.

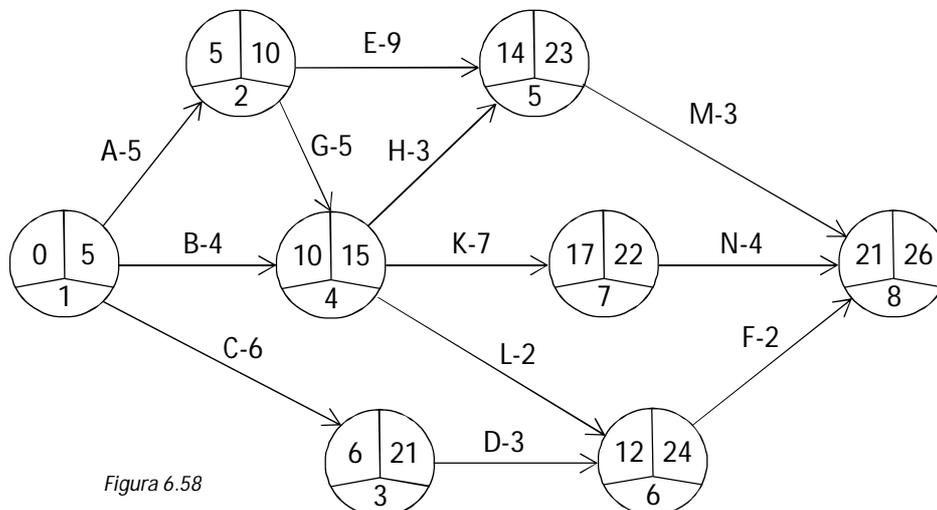
6.14. REDES CON PLAZO DE EJECUCIÓN DEL PROYECTO

Cuando entre el promotor y el constructor no se ha pactado un plazo de ejecución del proyecto, al Tprev se le asigna un valor igual al Tprog, obteniéndose una red similar a la que hemos visto en la figura 6.57, con actividades críticas y, al menos, un camino crítico. Empero, cuando el promotor impone un plazo de ejecución, al Tprev del proyecto se le asigna un valor igual a dicho plazo. Si este plazo coincide con el Tprog, entonces estaremos en la misma situación descrita anteriormente, pero la

probabilidad de que esto ocurra es bastante pequeña. Lo normal será que el plazo sea distinto al T_{prog} , dándose dos situaciones distintas, que $T_{prog} < T_{prev}$ o bien que $T_{prog} > T_{prev}$.

Redes con $T_{prog} < T_{prev}$

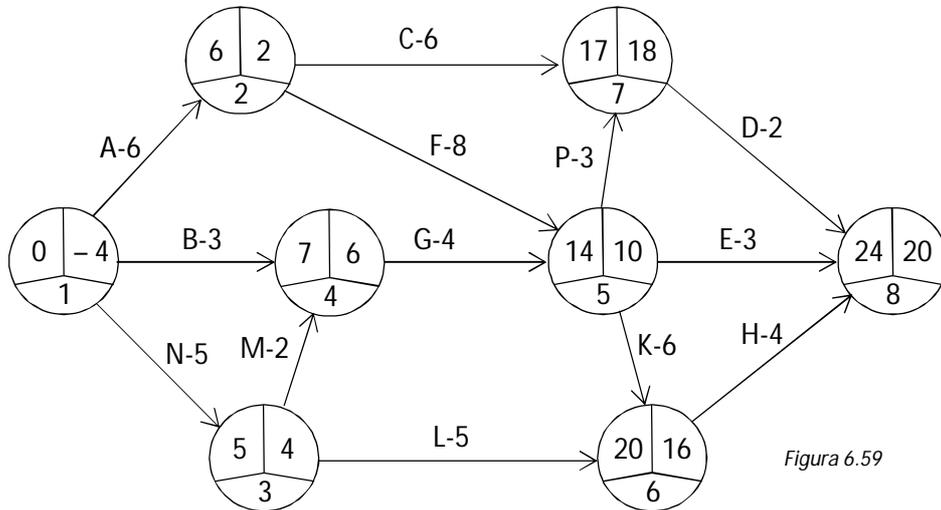
En este tipo de redes no hay actividades críticas, dado que todas las actividades tienen holgura. Por ello, existe una gran probabilidad de que el proyecto finalice antes del plazo indicado. En la figura 6.58 se reproduce una red que representa un proyecto cuyo plazo de ejecución es de 26 fechas. Como se puede observar, las actividades que pertenecen al camino más largo son A, G, K y N, dado que es el camino que está marcando el T_{prog} . Estas cuatro actividades tienen $H_t = 5$ y además todos los sucesos que pertenecen a este camino también tienen holgura igual a 5. Las demás actividades tienen $H_t > 5$ y los demás sucesos también tienen holgura mayor de 5. Dicho de otra forma: la diferencia $T_{prev} - T_{prog}$ nos indica cual es la holgura total de las actividades que pertenecen al camino más largo y además esta diferencia es constante en todos los sucesos que pertenecen a dicho camino.



Redes con $T_{prog} > T_{prev}$

Cuando el T_{prog} es mayor que el T_{prev} el proyecto va a finalizar más tarde del plazo acordado. Es decir, el proyecto va a sufrir un retraso respecto del plazo fijado por el promotor. Este retraso provoca que en la red aparezcan actividades con H_t negativa, llamadas actividades hipercríticas, dando lugar a caminos hipercríticos. Un ejemplo de ello lo tenemos en la red la figura 6.59, donde el $T_{prog} = 24$ y el plazo de ejecución es de 20 fechas. En este caso, la diferencia $T_{prev} - T_{prog} = -4$, lo cual nos indica que la H_t de las actividades que conforman el camino más largo es igual a -4 , y que la

diferencia entre el Tmax y el Tmin de los sucesos que pertenecen a este camino también es -4 . Las demás actividades tienen $H_t > -4$ y los demás sucesos también tienen holgura mayor a -4 .



6.15. COMPORTAMIENTO DE LAS HOLGURAS SEGÚN EL TIPO DE RED

Hemos visto en el punto anterior que la H_t de las actividades que pertenecen al camino más largo de la red tiene un valor igual a la diferencia que existe entre el T_{prev} y el T_{prog} . También se ha enunciado que la H_t de las actividades que no pertenecen al camino más largo debe tener un valor mayor a esa diferencia. Ahora bien, ¿cuál es el comportamiento de las demás holguras? Para ilustrar la respuesta a esta pregunta vamos a partir de las tablas representadas en las figuras 6.60, 6.61 y 6.62, en las cuales aparecen los valores de las holguras correspondientes a las actividades de las redes estudiadas anteriormente en las figuras 6.57, 6.58 y 6.59, respectivamente.

Redes con $T_{prev} = T_{prog}$

| | A | B | C | D | E | F | G | H | K | L | M | N | P |
|----|---|---|----|---|---|---|----|----|---|---|---|---|---|
| Ht | 5 | 0 | 12 | 5 | 0 | 4 | 10 | 12 | 0 | 2 | 5 | 0 | 2 |
| HI | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 | 4 | 8 | 10 | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 |
| Hi | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 8 | -2 | 0 | 0 | 5 | 0 | 0 |
| Hc | 5 | 0 | 12 | 0 | 0 | 4 | 10 | 0 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |

Figura 6.60

Como se puede observar en la tabla de la figura 6.60:

$H_t \rightarrow$ En el camino más largo $H_t = 0$. En las demás actividades $H_t > 0$

Hl → En el camino más largo Hl = 0. En las demás actividades Hl ≥ 0

Hi → En el camino más largo Hi = 0. En las demás actividades Hi = cualquier valor.

Hc → En el camino más largo Hc = 0. En las demás actividades Hc ≥ 0

Redes con Tprev > Tprog

Como se puede observar en la tabla de la figura 6.61:

Ht → En el camino más largo Ht = 5. En las demás actividades Ht > 5

Hl → En el camino más largo Hl = 0. En las demás actividades Hl ≥ 0

Hi → En el camino más largo Hi = -5. En las demás actividades Hi = cualquier valor.

Hc → En el camino más largo Hc = 0. En las demás actividades Hc ≥ 0

| | A | B | C | D | E | F | G | H | K | L | M | N |
|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Ht | 5 | 11 | 15 | 15 | 9 | 12 | 5 | 10 | 5 | 12 | 9 | 5 |
| Hl | 0 | 6 | 0 | 3 | 0 | 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| Hi | -5 | 1 | -5 | -12 | -5 | -5 | -5 | -4 | -5 | -5 | -5 | -5 |
| Hc | 0 | 6 | 10 | 0 | 4 | 0 | 0 | 5 | 0 | 7 | 0 | 0 |

Figura 6.61

Obsérvese que las actividades del camino más largo siempre tienen Hl = 0, Hc = 0 y

Ht = -Hi.

Redes con Tprev < Tprog

| | A | B | C | D | E | F | G | H | K | L | M | N | P |
|----|----|---|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| Ht | -4 | 3 | 6 | 1 | 3 | -4 | -1 | -4 | -4 | 6 | -1 | -1 | 1 |
| Hl | 0 | 4 | 5 | 5 | 7 | 0 | 3 | 0 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 |
| Hi | 4 | 8 | 9 | 4 | 11 | 4 | 4 | 4 | 4 | 11 | 1 | 4 | 4 |
| Hc | 0 | 7 | 10 | 0 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7 | 0 | 3 | 5 |

Figura 6.62

En la tabla de la figura 6.62 se aprecia lo siguiente:

Ht → En el camino más largo Ht = -4. En las demás actividades Ht > -4

Hl → En el camino más largo Hl = 0. En las demás actividades Hl ≥ 0

Hi → En el camino más largo Hi = 4. En las demás actividades Hi = cualquier valor.

Hc → En el camino más largo Hc = 0. En las demás actividades Hc ≥ 0

Obsérvese que las actividades del camino más largo siempre tienen Hl = 0, Hc = 0 y

Ht = -Hi.

6.16. CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE CAMINOS

6.16.1. Holgura total de un camino

El concepto de H_t de un camino es semejante al de H_t de una actividad. En el apartado 6.11 vimos que la H_t de una actividad se calculaba mediante la fórmula:

$$H_t = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\min.i}$$

donde:

$T_{\max.j}$ = T_{\max} del nudo final de la actividad.

t_{ij} = tiempo esperado o duración de la actividad.

$T_{\min.i}$ = T_{\min} del nudo inicial de la actividad.

De manera análoga, la H_t de un camino será:

$$H_t \text{ camino} = T_{\max.j} - \sum t_{ij} - T_{\min.i}$$

donde:

$T_{\max.j}$ = T_{\max} del nudo final del camino.

$\sum t_{ij}$ = Suma de las duraciones de las actividades que componen el camino.

$T_{\min.i}$ = T_{\min} del nudo inicial del camino.

Por otro lado, también se puede calcular la H_t de un camino si conocemos las holguras libres de las actividades, mediante la siguiente fórmula:

$$H_t \text{ camino} = \sum H_l + (T_{\max.j} - T_{\min.j})$$

donde:

$\sum H_l$ = Suma de las holguras libres de las actividades del camino.

$T_{\max.j}$ = T_{\max} del suceso final del camino.

$T_{\min.j}$ = T_{\min} del suceso final del camino.

Ejemplo 1: en la red de la figura 6.63, calcular la H_t del camino D-H-L-O.

$$1. \quad H_t \text{ cam. D-H-L-O} = T_{\max.j} - \sum t_{ij} - T_{\min.i} = 29 - 18 - 4 = 7$$

$$2. \quad H_t \text{ cam. D-H-L-O} = \sum H_l + (T_{\max.j} - T_{\min.j}) = 4 + (29 - 26) = 7$$

Ejemplo 2: en la misma red, calcular la H_t del camino A-D-J-P.

$$1. \quad H_t \text{ cam. A-D-J-P} = T_{\max.j} - \sum t_{ij} - T_{\min.i} = 31 - 14 - 0 = 17$$

$$2. \quad H_t \text{ cam. A-D-J-P} = \sum H_l + (T_{\max.j} - T_{\min.j}) = 14 + (31 - 28) = 17$$

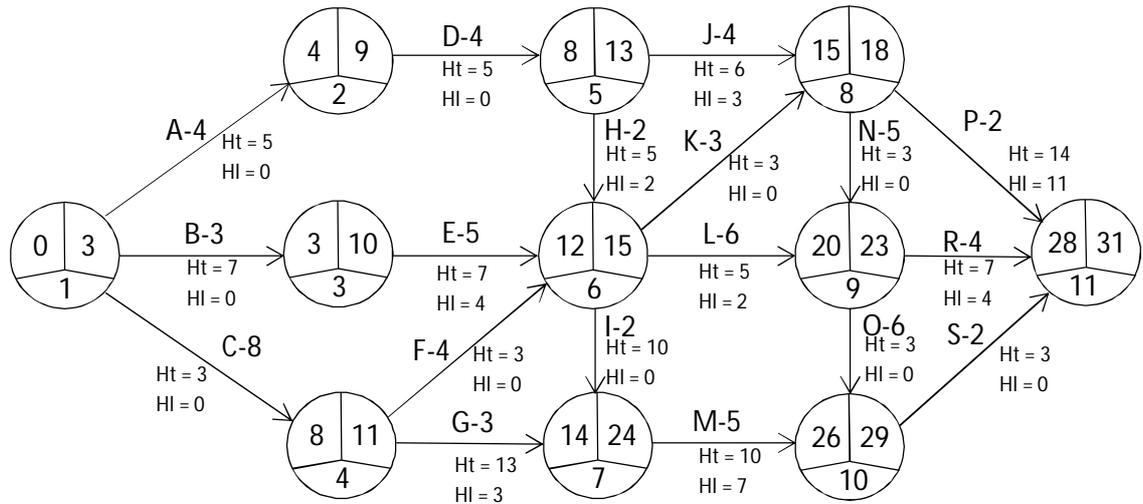


Figura 6.63

6.16.2. Duración de un camino

Según explicamos en el apartado 6.13, la duración de un camino es la suma de los tiempos esperados de las actividades que conforman dicho camino. No obstante, también se puede calcular a través de las holguras libres y mediante la holgura total del camino. Es decir, podemos calcular la duración de un camino de tres formas distintas:

1. Dur. Cam. = $\sum t_{ij}$
2. Dur. Cam. = $T_{\min.j} - \sum HI - T_{\min.i}$
3. Dur. Cam. = $T_{\max.j} - Ht \text{ cam.} - T_{\min.i}$

donde:

$\sum t_{ij}$ = Suma de los tiempos esperados de las actividades del camino.

$T_{\min.j}$ = T_{min} del suceso final del camino

$\sum HI$ = Suma de las holguras libres de las actividades del camino.

$T_{\min.i}$ = T_{min} del suceso inicial del camino.

$T_{\max.j}$ = T_{max} del suceso final del camino

Ht cam. = Holgura total del camino.

Ejemplo 1: en la red de la figura 6.63, calcular la duración del camino B-E-L-R.

1. Dur. Cam. = $\sum t_{ij} = 3 + 5 + 6 + 4 = 18$
2. Dur. Cam. = $T_{\min.j} - \sum HI - T_{\min.i} = 28 - 10 - 0 = 18$
3. Dur. Cam. = $T_{\max.j} - Ht \text{ cam.} - T_{\min.i} = 31 - 13 - 0 = 18$

Ejemplo 2: sobre la misma red, calcular la duración del camino E-I-M.

1. Dur. Cam. = $\sum t_{ij} = 5 + 2 + 5 = 12$
2. Dur. Cam. = $T_{min.j} - \sum HI - T_{min.i} = 26 - 11 - 3 = 12$
3. Dur. Cam. = $T_{max.j} - H_t \text{ cam.} - T_{min.i} = 29 - 14 - 3 = 12$

6.16.3. Camino más largo, o de mayor duración, de una red

Una vez que hemos representado las actividades de un proyecto mediante una red Pert, es necesario detectar cuáles son las actividades que pertenecen al camino más largo (CML). La forma más rápida de hacerlo es buscar aquel camino cuya suma de tiempos esperados coincide con el Tiempo Programado del proyecto, es decir:

$$\text{CML} = \text{camino de mayor } \sum t_{ij}$$

Por otro lado, también se puede buscar el camino más largo el proyecto mirando las holguras libres (o las holguras condicionales), de manera que será aquel camino en el que todas sus actividades tengan $HI = 0$ (o todas sus actividades tengan $H_c = 0$).

$$\text{CML} = \text{camino con } \sum HI = 0$$

$$\text{CML} = \text{camino con } \sum H_c = 0$$

Finalmente, podemos localizar el camino más largo de la red mediante las holguras totales (o las holguras independientes), dado que las actividades de este camino son aquellas que tienen menor H_t , coincidiendo este valor con la diferencia entre el T_{prev} y el T_{prog} ($H_t = T_{prev} - T_{prog}$). También mediante las holguras independientes, dado que las actividades de este camino son aquellas que tienen $H_i = T_{prog} - T_{prev} = -H_t$.

$$\text{CML} = \text{actividades con menor } H_t$$

$$\text{CML} = \text{actividades con } H_i = T_{prog} - T_{prev}$$

Ejemplo: en la red de la figura 6.63 podemos encontrar en camino más largo de tres formas:

1. Buscando el camino cuya duración coincide con el T_{prog} . En nuestro caso, este camino está formado por las actividades C-F-K-N-O-S, cuya duración es:

$$\sum t_{ij} = 8 + 4 + 3 + 5 + 6 + 2 = 28$$

2. Buscando aquel camino en el que todas sus actividades tengan $HI = 0$. Efectivamente, ese camino es el formado por las actividades C-F-K-N-O-S.

3. Buscando aquellas actividades que tengan la H_t más pequeña, verificándose que ese valor coincide con la diferencia $T_{prev} - T_{prog}$. Así, en nuestro ejemplo $T_{prev} - T_{prog} = 3$ y las actividades C-F-K-N-O-S tienen todas ellas $H_t = 3$, no existiendo ninguna otra actividad con H_t menor o igual a tres.

6.16.4. Holgura total del camino más largo de la red

Hemos visto anteriormente que la Ht de un camino cualquiera es:

$$Ht \text{ camino} = \sum HI + (T_{\max.j} - T_{\min.j})$$

Y también que el camino más largo de la red es:

$$CML = \text{camino con } \sum HI = 0$$

De estas dos fórmulas se puede deducir que la Ht del camino más largo de la red será:

$$Ht \text{ CML} = T_{\text{prev}} - T_{\text{prog}}$$

Efectivamente, si observamos la figura 6.63, la diferencia entre el T_{prev} y el T_{prog} es de 3 fechas, lo cual implica que la Ht del camino más largo es igual a 3.

6.16.5. Duración del camino más largo que pasa por una actividad

Para saber cuál es la duración del camino más largo que pasa por una actividad, lo primero que tendríamos que hacer es averiguar cuáles son los caminos que pasan por dicha actividad y a continuación calcular la duración de cada uno de ellos. Por ejemplo, si en la red de la figura 6.63 queremos saber cuál es la duración del camino más largo que pasa por la actividad M, lo primero sería enunciar todos los caminos que pasan por M, o que contienen a M, los cuales serían los siguientes:

A-D-H-I-M-S

B-E-I-M-S

C-F-I-M-S

C-G-M-S

Seguidamente, calculamos la duración de cada uno de ellos:

$$\text{Dur. Cam. A-D-H-I-M-S} = \sum tij = 4 + 4 + 2 + 2 + 5 + 2 = 19$$

$$\text{Dur. Cam. B-E-I-M-S} = \sum tij = 3 + 5 + 2 + 5 + 2 = 17$$

$$\text{Dur. Cam. C-F-I-M-S} = \sum tij = 8 + 4 + 2 + 5 + 2 = 21$$

$$\text{Dur. Cam. C-G-M-S} = \sum tij = 8 + 3 + 5 + 2 = 18$$

Como se puede observar, el camino más largo es C-F-I-M-S, cuya duración es de 21 fechas. Sin embargo, no es necesario realizar todas estas operaciones para saberlo, dado que se puede usar la siguiente fórmula:

$$\text{Dur. CML que pasa por una actividad} = T_{\text{prev}} - Ht \text{ de la actividad}$$

Si aplicamos esta fórmula a nuestro ejemplo tendríamos:

$$\text{Dur. CML pasa por M} = T_{\text{prev}} - H_t M = 31 - 10 = 21$$

Como podemos apreciar el resultado es el mismo.

6.16.6. Holgura total del camino más largo que pasa por una actividad

Para calcular la holgura total del camino más largo que pasa por una actividad procederíamos igual que hicimos en el apartado anterior para saber cuál es el camino más largo y, una vez detectado éste, calculamos su H_t . Si aplicamos este razonamiento a la actividad M de la figura 6.63, tendríamos:

$$H_t \text{ cam. C-F-I-M-S} = T_{\text{max.j S}} - \sum t_{ij} - T_{\text{min.i C}} = 31 - 21 - 0 = 10$$

Empero, como sucedió en el apartado anterior, no es necesario realizar todo este procedimiento, sino que basta con aplicar la siguiente fórmula:

$$H_t \text{ CML pasa por una actividad} = H_t \text{ de la actividad}$$

Dicho de otra forma, la holgura total de una actividad, no sólo es la holgura total de esa actividad sino que también es la holgura total del camino más largo que pasa por ella.

Aplicando la formula a nuestro ejemplo:

$$H_t \text{ CML pasa por M} = H_t M = 10$$

6.17. RELACIONES ENTRE LAS HOLGURAS DE UN PROYECTO

Como ya estudiamos en el apartado 6.11, las holguras de una actividad cualquiera se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$H_t = T_{\text{max.j}} - t_{ij} - T_{\text{min.i}} \quad (1)$$

$$H_l = T_{\text{min.j}} - t_{ij} - T_{\text{min.i}} \quad (2)$$

$$H_c = T_{\text{max.j}} - t_{ij} - T_{\text{max.i}} \quad (3)$$

$$H_i = T_{\text{min.j}} - t_{ij} - T_{\text{max.i}} \quad (4)$$

Ahora bien, si restamos las fórmulas (1) y (2) tenemos:

$$H_t = T_{\text{max.j}} - t_{ij} - T_{\text{min.i}} \quad (1)$$

$$H_l = T_{\text{min.j}} - t_{ij} - T_{\text{min.i}} \quad (2)$$

$$H_t - H_l = T_{\text{max.j}} - T_{\text{min.j}}$$

Si hacemos lo mismo con las fórmulas (3) y (4) tenemos:

$$H_c = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\max.i} \quad (3)$$

$$H_i = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\max.i} \quad (4)$$

$$H_c - H_i = T_{\max.j} - T_{\min.j}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que la diferencia que existe entre la holgura total y la holgura libre es igual a la diferencia entre la holgura condicional y la holgura independiente y, además, también es igual a la diferencia entre el T_{max} y el T_{min} del suceso final de la actividad (sólo si dicho suceso es real).

$$H_t - H_l = H_c - H_i = T_{\max.j} - T_{\min.j}$$

De otro lado, si restamos las fórmulas (1) y (3) obtenemos:

$$H_t = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\min.i} \quad (1)$$

$$H_c = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\max.i} \quad (3)$$

$$H_t - H_c = T_{\max.i} - T_{\min.i}$$

Realizando la misma operación con las fórmulas (2) y (4):

$$H_l = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\min.i} \quad (2)$$

$$H_i = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\max.i} \quad (4)$$

$$H_l - H_i = T_{\max.i} - T_{\min.i}$$

De donde se deduce que la diferencia que hay entre la holgura total y la holgura condicional es la misma que existe entre la holgura libre y la holgura independiente y, también, la diferencia entre el T_{max} y el T_{min} del suceso inicial de la actividad (sólo si dicho suceso es real).

$$H_t - H_c = H_l - H_i = T_{\max.i} - T_{\min.i}$$

Ejemplo

Dada la actividad M de la figura 6.64, se pueden calcular todas sus holguras:

$$H_t = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\min.i} = 30 - 6 - 18 = 6$$

$$H_l = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\min.i} = 28 - 6 - 18 = 4$$

$$H_c = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\max.i} = 30 - 6 - 23 = 1$$

$$H_i = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\max.i} = 28 - 6 - 23 = -1$$

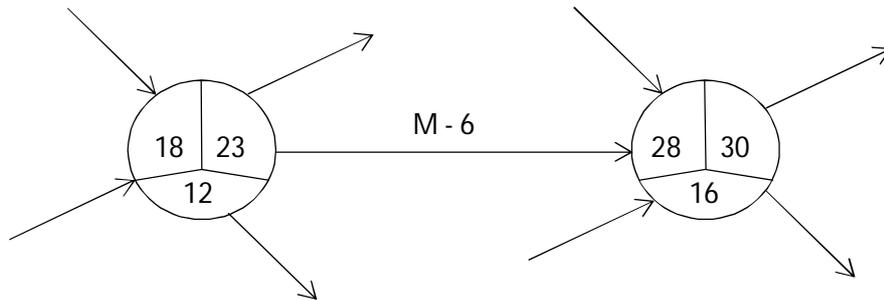


Figura 6.64

Y se puede comprobar que:

$$H_t - H_l = 6 - 4 = 2$$

$$H_c - H_i = 1 - (-1) = 2$$

$$T_{\max.16} - T_{\min.16} = 30 - 28 = 2$$

Y también que:

$$H_t - H_c = 6 - 1 = 5$$

$$H_l - H_i = 4 - (-1) = 5$$

$$T_{\max.12} - T_{\min.12} = 23 - 18 = 5$$

6.18. CONDICIONES PARTICULARES DE ALGUNAS ACTIVIDADES Y SUS HOLGURAS

6.18.1. Actividades que nacen en un suceso crítico

Cuando el suceso inicial de una actividad es crítico, implica que $T_{\min.i} = T_{\max.i}$ y si comparamos las fórmulas de la H_t y la H_c vemos que la única diferencia que existe entre ellas es que para la H_t tomamos como tercer término " $T_{\min.i}$ ", mientras que para la H_c tomamos como tercer término " $T_{\max.i}$ ", pero si el suceso inicial es crítico estos dos valores son iguales, por lo tanto $H_t = H_c$.

$$H_t = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\min.i}$$

$$H_c = T_{\max.j} - t_{ij} - T_{\max.i}$$

$$\text{Si suceso "i" es crítico} \rightarrow T_{\min.i} = T_{\max.i} \rightarrow H_t = H_c$$

De forma análoga, si comparamos las fórmulas de la H_l y la H_i tenemos:

$$H_l = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\min.i}$$

$$H_i = T_{\min.j} - t_{ij} - T_{\max.i}$$

$$\text{Si suceso "i" es crítico} \rightarrow T_{\min.i} = T_{\max.i} \rightarrow H_l = H_i$$

En definitiva, cuando el suceso inicial de una actividad es crítico, $H_t = H_c$ y $H_I = H_i$.

6.18.2. Actividades que llegan a un suceso crítico

Cuando el suceso final de una actividad es crítico, entonces $T_{min.j} = T_{max.j}$.

Razonando de manera similar a lo hecho en el apartado anterior, llegamos a las siguientes conclusiones:

$$H_t = T_{max.j} - t_{ij} - T_{min.i}$$

$$H_I = T_{min.j} - t_{ij} - T_{min.i}$$

$$\text{Si suceso "j" es crítico} \rightarrow T_{min.j} = T_{max.j} \rightarrow H_t = H_I$$

$$H_c = T_{max.j} - t_{ij} - T_{max.i}$$

$$H_i = T_{min.j} - t_{ij} - T_{max.i}$$

$$\text{Si suceso "j" es crítico} \rightarrow T_{min.j} = T_{max.j} \rightarrow H_c = H_i$$

Es decir, cuando el suceso final de una actividad es crítico, entonces $H_t = H_I$ y $H_c = H_i$.

6.18.3. Actividades que nacen en un suceso crítico y llegan a un suceso crítico

Cuando tanto el suceso inicial como el final de una actividad son críticos, entonces $T_{min.i} = T_{max.i}$ y $T_{min.j} = T_{max.j}$, en consecuencia todas sus holguras tienen el mismo valor, o sea: $H_t = H_I = H_c = H_i$, pudiéndose presentar dos situaciones diferentes:

- a) $H_t = H_I = H_c = H_i = 0 \rightarrow$ actividad crítica
- b) $H_t = H_I = H_c = H_i > 0 \rightarrow$ actividad no crítica

6.18.4. Actividades que convergen en un suceso

Cuando dos o más actividades tienen en común el suceso final y este suceso es real, siempre se cumple que al menos una de las actividades que llega a dicho suceso tiene $H_I = 0$. Cuestión obvia, dado que al menos una de las actividades es la que está marcando el tiempo mínimo del suceso. En la figura 6.65 se puede observar que de las tres actividades que llegan el suceso "j", la que marca el $T_{min.j}$ es la actividad C y, por consiguiente, esta actividad tiene $H_I = 0$. Como consecuencia lógica de lo anterior cabe señalar que cuando a un suceso real solo llega una actividad, su $H_I = 0$.

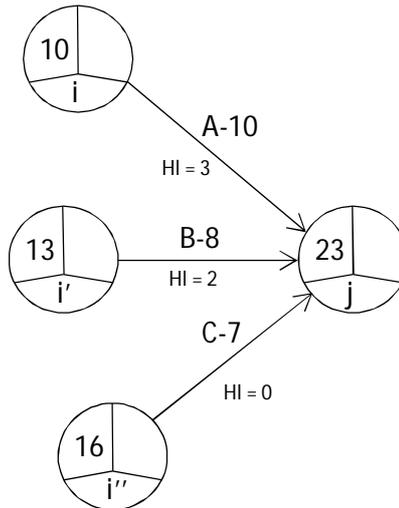


Figura 6.65

6.18.5. Actividades que divergen de un suceso

Si de un suceso real salen dos o más actividades, al menos una de ellas tiene $H_c = 0$. El razonamiento es análogo al anterior, puesto que de las actividades que salen de un suceso al menos una marca el T_{max} de dicho suceso y por ello tendrá $H_c = 0$. Un ejemplo de ello lo vemos en la figura 6.66, donde el $T_{max.i}$ lo marca la actividad A, cuya $H_c = 0$. Evidentemente, si de un suceso real sólo parte una actividad, su $H_c = 0$.

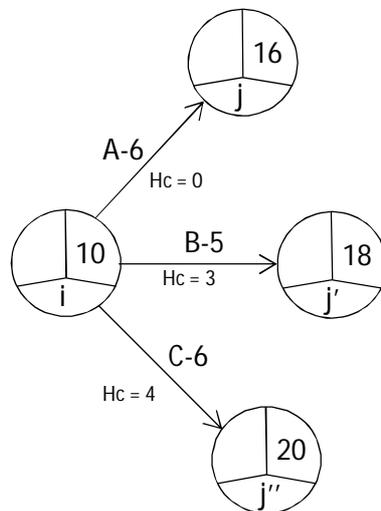


Figura 6.66

6.18.6. Actividades entre las que existe una relación de convergencia-divergencia

Si observamos la figura 6.67 se aprecia que entre las actividades M-H-L y las actividades R-A-C existe una relación de convergencia-divergencia que se materializa a

través del suceso 21, al que llegan las actividades M-H-L y del que salen las actividades R-A-C.

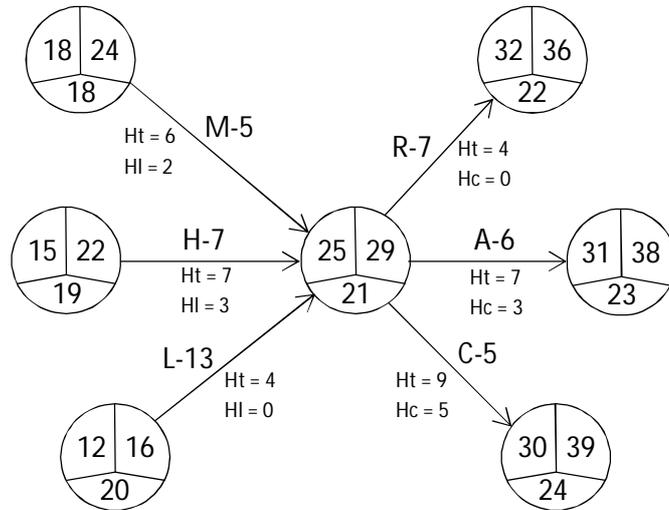


Figura 6.67

Por lo enunciado en los puntos anteriores podemos afirmar que la actividad L tiene $HI = 0$, por ser la que marca el T_{min} del suceso 21, y la actividad R tiene $Hc = 0$, por ser la que marca el T_{max} de dicho suceso.

Pero, además, también se puede asegurar que de las tres actividades que llegan al suceso 21, la que tiene $HI = 0$ es también la que tiene menor Ht .

Efectivamente, si calculamos las holguras de estas tres actividades tenemos:

$$\begin{array}{lll} Ht\ M = 6 & Ht\ H = 7 & Ht\ L = 4 \\ HI\ M = 2 & HI\ H = 3 & HI\ L = 0 \end{array}$$

Pudiendo comprobarse que la actividad L, que es la que tiene $HI = 0$, es la que tiene menor Ht .

Igualmente, de las tres actividades que salen del suceso 21, la que tiene $Hc = 0$ es, a la vez, la que tiene menor Ht .

En efecto:

$$\begin{array}{lll} Ht\ R = 4 & Ht\ A = 7 & Ht\ C = 9 \\ Hc\ R = 0 & Hc\ A = 3 & Hc\ C = 5 \end{array}$$

De manera que la actividad R, que es la que tiene $Hc = 0$, es la que tiene menor Ht .

Obsérvese que la holgura total de la actividad L coincide con la holgura total de la actividad R y, además, también coincide con la diferencia entre el T_{max} y el T_{min} del suceso 21. Dicho de otra forma, en todo suceso siempre se verifica que la menor Ht que entra es igual a la menor Ht que sale, e igual a la diferencia entre el T_{max} y el T_{min} de ese suceso. Como puede comprobarse en nuestro ejemplo:

Menor Ht que entra en suceso 21 = Ht L = 4

Menor Ht que sale del suceso 21 = Ht R = 4

$T_{max.21} - T_{min.21} = 4$

6.19. EFECTOS QUE PRODUCE EL INCREMENTO DEL TIEMPO ESPERADO DE UNA ACTIVIDAD

Cuando se ha realizado la programación de una obra y a cada actividad se le ha asignado un tiempo esperado (te), a partir de estos tiempos, como ya se ha estudiado en apartados anteriores, se calcula el Tiempo Programado del proyecto. Sin embargo, pueden acaecer determinados hechos imprevistos que supongan un incremento del tiempo esperado de algunas actividades. Como consecuencia de ello, se pueden ver afectadas las fechas de comienzo de las actividades siguientes, incluso puede influir en el Tiempo Programado y causar un retraso del proyecto. Para saber con certeza cuál es el efecto que produce, en el conjunto del proyecto, el incremento del tiempo esperado de una actividad es de gran utilidad el análisis de sus holguras.

Así, si lo que queremos saber es cómo afecta al comienzo de las actividades siguientes, basta comparar el incremento producido en el "te" con la holgura libre de la actividad. De manera que si el valor de la holgura libre es mayor o igual al incremento del tiempo esperado, no se retrasa el comienzo de las actividades siguientes; mientras que si la holgura libre es menor que dicho incremento, entonces las actividades siguientes retrasarán su comienzo en un número de fechas igual a la diferencia entre el incremento producido y la holgura libre. Es decir:

$$\text{Retraso comienzo activ. siguientes} = \Delta te - HI$$

Por otro lado, si lo que interesa saber es cómo afecta al tiempo final del proyecto, basta comparar el incremento del tiempo esperado con la holgura total de la actividad. De modo que si el valor de la holgura total es mayor o igual al incremento del tiempo esperado, no se produce retraso del proyecto; pero, si la holgura total es menor que dicho incremento, entonces el proyecto se retrasa en un número de fechas igual a la diferencia entre el incremento originado y la holgura total. Es decir:

$$\text{Retraso del proyecto} = \Delta te - Ht$$

No obstante, cuando trabajamos con una red donde $T_{prev} > T_{prog}$, puede ocurrir que un incremento en el tiempo esperado de una actividad no provoque retraso del proyecto, pero si afecte al T_{prog} . Para la resolución de este tipo de problemas es de gran utilidad el concepto de "duración del CML que pasa por una actividad" estudiado en el apartado 6.16.5.

Ejemplo

Dada la red de la figura 6.68, si la actividad E incrementa su "te" en 6 fechas, responder a las siguientes preguntas:

- a) ¿Se retrasa el comienzo de la actividad K?
- b) ¿Se retrasa el proyecto?
- c) ¿Se modifica el Tprog?

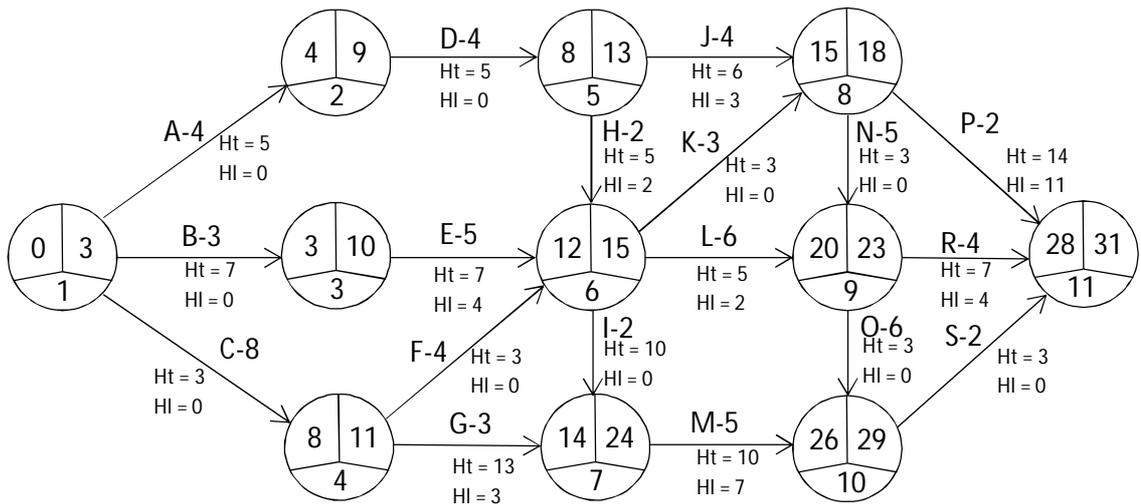


Figura 6.68

Si analizamos el proyecto advertimos que tiene un plazo de ejecución de 31 fechas (Tprev) y que, en principio, puede acabar en 28 fechas (Tprog). La actividad E tiene Ht = 7, HI = 4 y te = 5.

Si el tiempo esperado de la actividad se incrementa en 6 fechas, significa que pasaría a valer $te = 5 + 6 = 11$. Si sustituimos en la red el tiempo esperado de la actividad E por su nuevo valor y calculamos de nuevo los tiempos mínimos, vemos que afecta a los sucesos 6, 7, 8, 9, 10 y 11, tal y como se muestra en la figura 6.69.

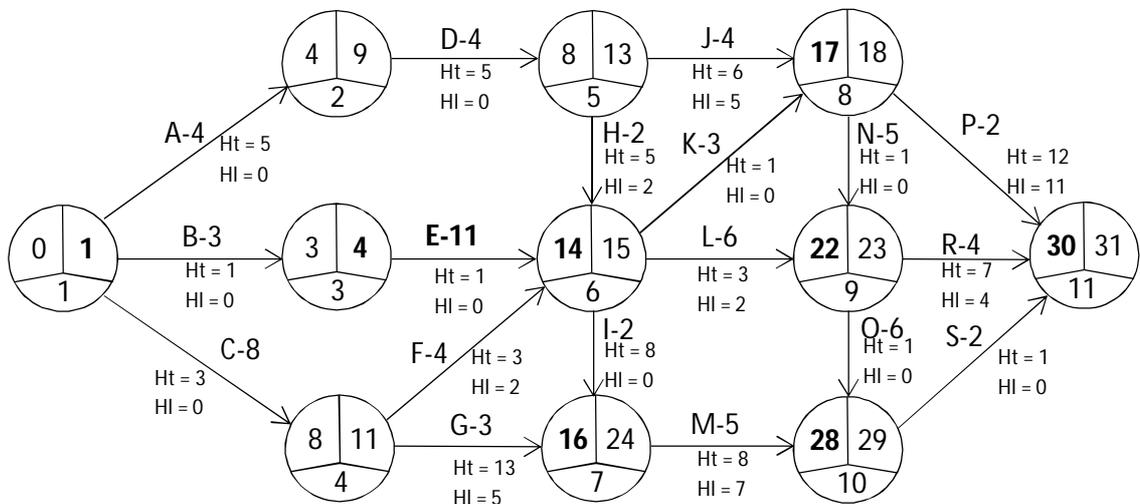


Figura 6.69

Como se puede observar, el suceso 6 ha pasado de tener $T_{min} = 12$ a $T_{min} = 14$, o sea se ha incrementado en dos fechas y, por consiguiente, la actividad K retrasa su comienzo en dos fechas. Por otro lado, el T_{prog} también se ha incrementado en dos fechas, pasando a tener un valor de $T_{prog} = 30$, pero el proyecto no sufre ningún retraso, dado que el plazo de ejecución es de 31 fechas.

Ahora bien, para llegar a estas conclusiones no es necesario calcular de nuevo todos los tiempos mínimos, sino que basta comparar el incremento del tiempo esperado de la actividad E con las holguras de dicha actividad. Así:

$$\text{Retraso comienzo activ. K} = \Delta t_e E - H_i E = 6 - 4 = 2$$

$$\text{Retraso del proyecto} = \Delta t_e E - H_t E = 6 - 7 = -1 \text{ (al ser negativo no existe retraso).}$$

$$\text{Dur. CML pasa por E} = T_{prev} - H_t E = 31 - 7 = 24$$

Si la activ. E incrementa su t_e en 6 fechas, entonces:

$$\text{Dur. CML pasa por E} = 24 + 6 = 30, \text{ con lo cual pasará a ser el CML de la red y el } T_{prog} = 30.$$

6.20. ANÁLISIS PROBABILÍSTICO

En el apartado 6.7 se ha estudiado la forma de calcular el tiempo esperado de una actividad, según su distribución de probabilidad estadística, mediante la media ponderada de los tiempos optimista, normal y pesimista. Ahora bien, no hay certeza absoluta de que el tiempo de ejecución real de una actividad coincida con el tiempo esperado teórico calculado previamente. Dicho de otra forma, existe una cierta incertidumbre o riesgo de no alcanzar dicho tiempo esperado.

El método Pert aborda esta situación de riesgo considerando que las duraciones de las actividades son variables aleatorias de las que conocemos sus distribuciones de probabilidad. La suma de las duraciones de las actividades que componen el camino más largo es el T_{prog} , también denominado tiempo esperado del proyecto (T_e) que, al ser la suma de varias variables aleatorias, también es una variable aleatoria.

Como las actividades del proyecto pueden seguir cada una de ellas una ley de distribución estadística (beta, triangular o rectangular) se hace necesario saber qué tipo de distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria " T_e ". Para ello, es preciso enunciar el *Teorema central del límite de probabilidad*, que dice: "la suma de n variables aleatorias converge en distribución, cuando $n \rightarrow \infty$, a una variable aleatoria que sigue una distribución normal, que tiene por media la suma de las medias y por varianza la suma de las varianzas de las n variables aleatorias". De manera que, cuando el camino más largo de un proyecto tiene un alto número de actividades, se puede afirmar que el tiempo esperado del proyecto (T_e) converge en distribución a una variable normal (N) que tiene por media la suma de los tiempos esperados de las actividades del camino más largo y por varianza la suma de las varianzas de estas mismas actividades:

$$T_e \rightarrow C.D. \rightarrow N(\sum t_e \text{ CML}, \sum \sigma^2 \text{ CML})$$

De este modo, a cada proyecto le vendrá asociada una variable normal distinta. Por ejemplo, el proyecto representado en la figura 6.70 tiene asociada la variable normal $N(26, 4)$.

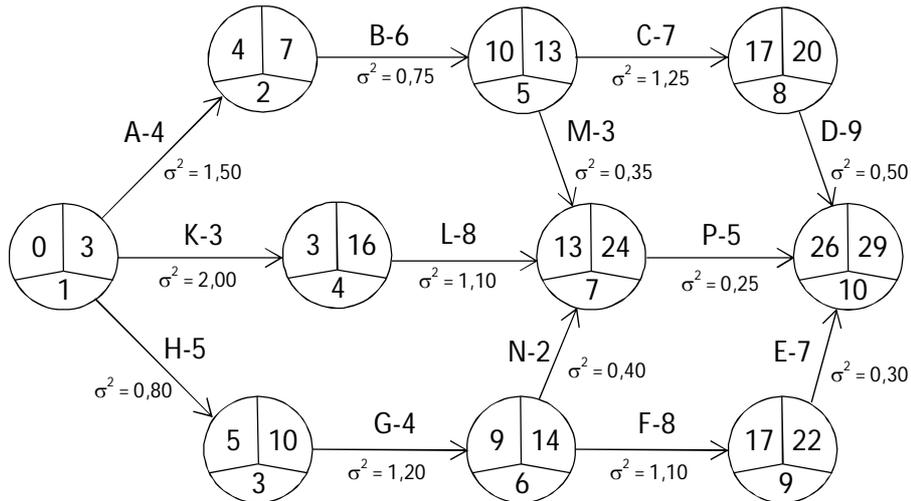


Figura 6.70

Para poder acometer el cálculo de probabilidades de un proyecto es necesario realizar una operación denominada *tipificar la variable normal*, consistente en transformar la variable normal de nuestro proyecto $N(26, 4)$ en la variable normal estándar $N(0, 1)$ que es la única que se encuentra tabulada. Para ello, se utiliza la siguiente fórmula:

$$Z = \frac{T_{prev} - T_{prog}}{\sqrt{\sum \sigma^2 CML}}$$

Así, para saber cuál es la probabilidad de cumplimiento de un proyecto, bastará aplicar la fórmula y, una vez obtenido el valor de Z, este factor nos permitirá encontrar la probabilidad buscada con la ayuda de una tabla de valores de la función normal estándar $N(0, 1)$. Dicha tabla es la que se reproduce en la figura 6.71, para los valores positivos de Z, y en la figura 6.72, para los valores negativos de Z.

Si observamos la tabla de valores de Z positivos, vemos que comprende las probabilidades entre 0,5000 y 0,9999, es decir, entre 50% y 100%. Por el contrario, la tabla de valores negativos comprende las probabilidades entre 0,0000 y 0,5000, o sea, entre el 0% y 50%. Por esta razón, podemos afirmar que cuando $T_{prev} > T_{prog}$, el valor de Z será positivo y, por lo tanto, la probabilidad de cumplimiento del proyecto será mayor del 50%. Análogamente, cuando $T_{prev} < T_{prog}$, el valor de Z será negativo y consecuentemente la probabilidad de cumplimiento del proyecto será menor del 50%. Finalmente, cuando $T_{prev} = T_{prog}$, el valor de Z es igual a cero, siendo la probabilidad de cumplimiento del proyecto igual al 50%.

| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5946 | 0.5985 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7703 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8441 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8645 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9133 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9278 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9430 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9617 | 0.9623 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9648 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9680 | 0.9693 | 0.9700 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9762 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9785 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9874 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.99.79 | 0.99.80 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9990 | 0.9993 | 0.9995 | 0.9997 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |

Figura 6.71

| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| - 3.0 | 0.0013 | 0.0010 | 0.0007 | 0.0005 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0000 |
| - 2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| - 2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| - 2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| - 2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| - 2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| - 2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| - 2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| - 2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0126 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| - 2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| - 2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| - 1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0238 | 0.0233 |
| - 1.8 | 0.0359 | 0.0352 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0300 | 0.0294 |
| - 1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| - 1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| - 1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0570 | 0.0559 |
| - 1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0722 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| - 1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| - 1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| - 1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| - 1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| - 0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| - 0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| - 0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2297 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| - 0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2648 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| - 0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2867 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| - 0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| - 0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| - 0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4015 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| - 0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| - 0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4769 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |

Figura 6.72

Las afirmaciones realizadas anteriormente, se pueden deducir gráficamente de la curva representativa de la distribución normal. Como puede observarse en la figura 6.73, el punto más alto de la curva se corresponde con el tiempo esperado del proyecto y divide a la curva en dos partes de igual superficie. Por esta razón, cuando $T_{prev} > T_{prog}$, la probabilidad de cumplimiento del proyecto, o lo que es lo mismo, la probabilidad de que el proyecto finalice en su T_{prev} o antes, equivale a la parte rayada de la figura 6.74 que, como se advierte, es mayor del 50%. Por idéntico razonamiento, de la figura 6.75 podemos deducir que, cuando $T_{prev} < T_{prog}$, la probabilidad de cumplimiento del proyecto es menor del 50%. Por último, cuando $T_{prev} = T_{prog}$, la probabilidad será del 50%, como se intuye en la figura 6.76.

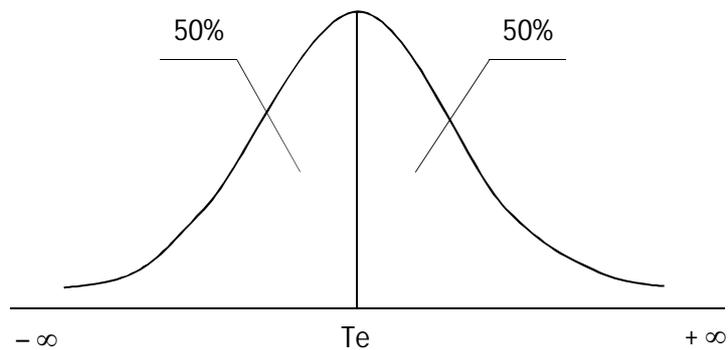


Figura 6.73

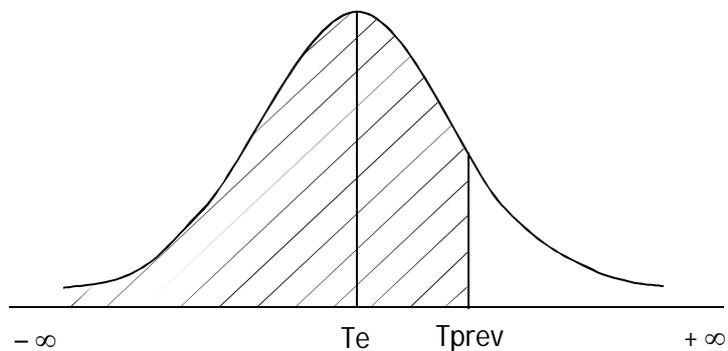


Figura 6.74

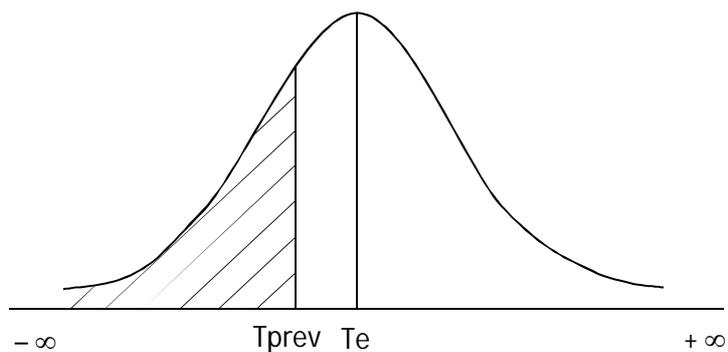


Figura 6.75

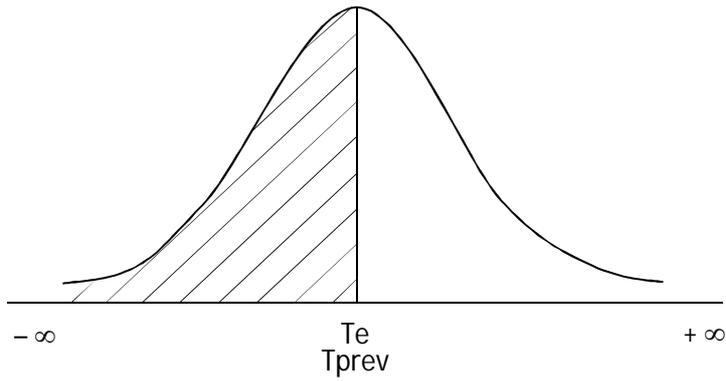


Figura 6.76

Ejemplo

¿Cuál será la probabilidad de cumplimiento del proyecto representado en la red de la figura 6.70?

Estamos en una red donde:

$$T_{prev} = 29; \quad T_{prog} = 26; \quad \Sigma\sigma^2 \text{ CML} = 4$$

Como consecuencia, al ser $T_{prev} > T_{prog}$, la probabilidad de cumplimiento del proyecto es mayor del 50%, pero si se desea saber cuál es exactamente dicha probabilidad, se aplica la fórmula:

$$Z = \frac{T_{prev} - T_{prog}}{\sqrt{\Sigma\sigma^2 \text{ CML}}} = \frac{29 - 26}{\sqrt{4}} = 1,50$$

Buscando en la tabla de la figura 6.71 el valor de $Z = 1,50$, obtenemos una probabilidad del 0,9332, o sea del 93,32%.

El cálculo de probabilidades no se limita a saber cuál es la probabilidad de cumplimiento de un proyecto, sino que da respuesta a otros supuestos probabilísticos que se suelen plantear en los métodos de planificación por redes. A continuación se presentan los casos más frecuentes y de mayor interés desde el punto de vista de la programación de proyectos. En todos ellos tomaremos como ejemplo la red de la figura 6.70.

6.20.1. Probabilidad de terminar el proyecto en una fecha determinada o antes

En este supuesto la fórmula a emplear será:

$$Z = \frac{T_{\text{pedido}} - T_{\text{prog}}}{\sqrt{\Sigma \sigma^2 \text{ CML}}}$$

Ejemplo 1: ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto finalice en fecha 28 o antes?

$$Z = \frac{28 - 26}{\sqrt{4}} = 1 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,8413 \rightarrow P(\text{Te} \leq 28) = 84,13\%$$

Ejemplo 2: ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto finalice en fecha 23 o antes?

$$Z = \frac{23 - 26}{\sqrt{4}} = -1,5 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,0668 \rightarrow P(\text{Te} \leq 23) = 6,68\%$$

6.20.2. Probabilidad de que el proyecto finalice en un intervalo de tiempo

La probabilidad de que un proyecto finalice en un intervalo de tiempo dado es la diferencia de probabilidades que existe entre las dos fechas extremas de dicho intervalo. Es decir:

$$P(X \leq \text{Te} \leq Y) = P(\text{Te} \leq Y) - P(\text{Te} \leq X)$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se realice entre fecha 23 y 28?

$$P(23 \leq \text{Te} \leq 28) = P(\text{Te} \leq 28) - P(\text{Te} \leq 23) = 84,13\% - 6,68\% = 77,45\%$$

6.20.3. Probabilidad de que el proyecto termine más allá de una fecha determinada

La probabilidad de que un proyecto finalice en más de "X" fechas será lo que le falte para llegar al 100% a la probabilidad de que el proyecto se ejecute en "X" fechas o antes.

$$P(\text{Te} > X) = 100 - P(\text{Te} \leq X)$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto se ejecute en más de 28 fechas?

$$P(\text{Te} > 28) = 100 - P(\text{Te} \leq 28) = 100 - 84,13 = 15,87\%$$

6.20.4. Plazo de ejecución de un proyecto para tener una probabilidad de cumplimiento de "X" %

Se trata de averiguar cuál sería el plazo de ejecución de un proyecto para el cual tendríamos una probabilidad "X" de finalizar el proyecto. En este caso el problema se resuelve en sentido contrario. Esto es: a través de la tabla de probabilidades se determina cual es valor de Z, sustituyendo este valor en la fórmula y despejando la única incógnita que, en nuestro caso, es el Tprev del proyecto. En el caso de no encontrar en la tabla el valor buscado, se elegirá el valor inmediato superior.

Ejemplo 1: ¿Cuál sería el plazo de ejecución del proyecto para que éste tuviese una probabilidad de cumplimiento del 68%?

68% → 0,68 → tabla 0,6808 (inmediato superior) → Z = 0,47

$$0,47 = \frac{T_{prev} - T_{prog}}{\sqrt{\Sigma\sigma^2 \text{ CML}}} = \frac{T_{prev} - 26}{\sqrt{4}} \rightarrow T_{prev} = (0,47 \times 2) + 26 = 26,94$$

Es decir, la probabilidad de que el proyecto termine en 26,94 fechas o antes es del 68%, o también, si el plazo de ejecución es de 26,94 fechas, la probabilidad de cumplimiento del proyecto es del 68%.

Ejemplo 2: ¿Cuál sería el plazo de ejecución del proyecto para que éste tuviese una probabilidad de cumplimiento del 11%?

11% → 0,11 → tabla 0,1112 (inmediato superior) → Z = -1,22

$$-1,22 = \frac{T_{prev} - T_{prog}}{\sqrt{\Sigma\sigma^2 \text{ CML}}} = \frac{T_{prev} - 26}{\sqrt{4}} \rightarrow T_{prev} = (-1,22 \times 2) + 26 = 23,56$$

Es decir, la probabilidad de que el proyecto termine en 23,56 fechas o antes es del 11%, o también, si el plazo de ejecución es de 23,56 fechas, la probabilidad de cumplimiento del proyecto es del 11%.

6.20.5. Probabilidad de cumplimiento de un camino

De la misma forma que se puede saber cuál es la probabilidad de cumplimiento del proyecto, se puede calcular la probabilidad de cumplimiento de un camino cualquiera de la red. Para ello, se utilizará la siguiente fórmula:

$$Z = \frac{T_{\text{max.j}} - \Sigma \text{ te cam}}{\sqrt{\Sigma\sigma^2 \text{ cam}}}$$

Donde:

Tmax.j = Tiempo máximo del nudo final del camino.

Σ te cam = Suma de los tiempos esperados de las actividades del camino.

Σσ² cam = Suma de las varianzas de las actividades del camino.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de cumplimiento del camino H-G-F?

$$Z = \frac{22 - 17}{\sqrt{3,10}} = 2,84 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,9977 \rightarrow 99,77\%$$

6.20.6. Probabilidad de que una actividad comience en una fecha concreta o antes

Cuando el cálculo de probabilidades se refiere al comienzo de una actividad, la fórmula a emplear será:

$$Z = \frac{T_{\text{pedido}} - T_{\text{min. i}}}{\sqrt{\Sigma \sigma^2 \text{ CML llega a "i"}}}$$

Donde:

T_{pedido} = es la fecha concreta para la que se pide la probabilidad.

$T_{\text{min. i}}$ = Tiempo mínimo del suceso inicial de la actividad.

$\Sigma \sigma^2 \text{ CML llega a "i"}$ = Suma de las varianzas de las actividades que conforman el camino más largo que llega al suceso inicial de la actividad.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que la actividad P comience en fecha 11 o antes?

$$Z = \frac{11 - 13}{\sqrt{2,60}} = -1,24 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,1075 \rightarrow 10,75\%$$

6.20.7. Probabilidad de que una actividad finalice en una fecha concreta o antes

En este caso se utilizará la misma fórmula que en el caso anterior, pero añadiendo el tiempo esperado y la varianza de la actividad de que se trate. Es decir:

$$Z = \frac{T_{\text{pedido}} - (T_{\text{min. i}} + t_{ij})}{\sqrt{\Sigma \sigma^2 \text{ CML llega a "i"} + \sigma^2 \text{activ}}}$$

Donde:

T_{pedido} = es la fecha concreta para la que se pide la probabilidad.

$T_{\text{min. i}}$ = Tiempo mínimo del suceso inicial de la actividad.

t_{ij} = Duración de la actividad

$\Sigma \sigma^2 \text{ CML llega a "i"}$ = Suma de las varianzas de las actividades que conforman el camino más largo que llega al suceso inicial de la actividad.

$\sigma^2 \text{ activ}$ = Varianza de la propia actividad.

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que la actividad E finalice en fecha 28 o antes?

$$Z = \frac{28 - 24}{\sqrt{3,40}} = 2,17 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,9850 \rightarrow 98,50\%$$

6.20.8. Cálculo de probabilidades cuando existe más de un CML

Cuando se trabaja con proyectos que tienen más de un camino con duración igual al tiempo programado, el cálculo de probabilidades se realiza con las mismas fórmulas vistas anteriormente. La única salvedad es saber qué $\Sigma\sigma^2$ elegir, dado que existe más de un CML. La elección de uno u otro dependerá del signo de Z, de manera que si el valor de Z es positivo, tomaremos el mayor $\Sigma\sigma^2$ de los posibles, mientras que en el caso de que el valor de Z sea negativo, se elige el menor $\Sigma\sigma^2$. Este mismo razonamiento se empleará cuando se trate de determinar la probabilidad de que una actividad comience o finalice en una fecha concreta y exista más de un camino que marque el T_{min.i} de la actividad.

Para una mejor comprensión de lo dicho anteriormente, se ilustra el concepto con varios ejemplos, tomando como base el proyecto representado en la figura 6.77.

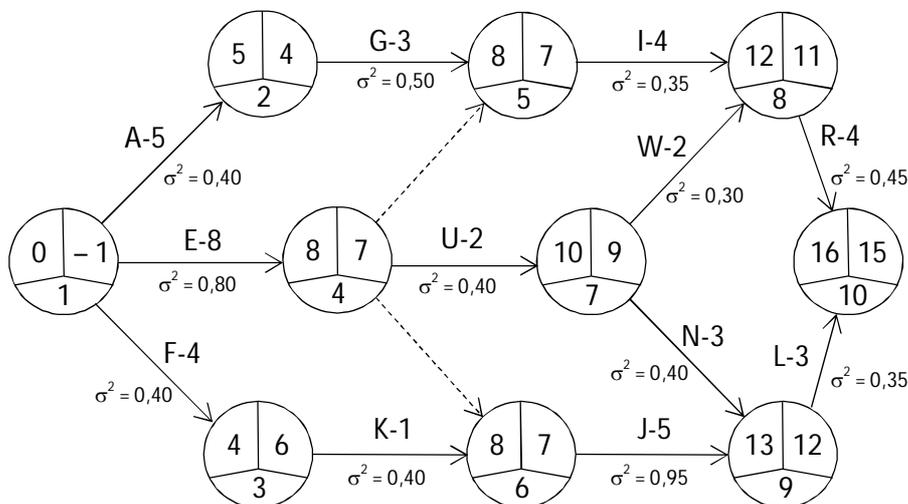


Figura 6.77

Ejemplo 1: ¿Cuál es la probabilidad de cumplimiento del proyecto?

En este caso hay cinco caminos cuya duración es igual al T_{prog}, es decir, existen cinco CML. A saber:

- Camino A-G-I-R → $\Sigma te = 16$; $\Sigma\sigma^2 = 1,70$
- Camino E-I-R → $\Sigma te = 16$; $\Sigma\sigma^2 = 1,60$
- Camino E-U-W-R → $\Sigma te = 16$; $\Sigma\sigma^2 = 1,95$

Camino E-U-N-L $\rightarrow \Sigma te = 16; \Sigma \sigma^2 = 1,95$

Camino E-J-L $\rightarrow \Sigma te = 16; \Sigma \sigma^2 = 2,10$

Aplicamos la fórmula:

$$Z = \frac{T_{prev} - T_{prog}}{\sqrt{\Sigma \sigma^2 \text{ CML}}}$$

Como la diferencia $T_{prev} - T_{prog}$ es negativa y, por lo tanto, Z también es negativo, utilizaremos como $\Sigma \sigma^2$ el menor, es decir, 1,60. Quedando:

$$Z = \frac{15 - 16}{\sqrt{1,60}} = -0,79 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,2148 \rightarrow 21,48\%$$

Ejemplo 2: ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto finalice en fecha 17 o antes?

En este caso como Z será positivo, tomamos el mayor $\Sigma \sigma^2$.

$$Z = \frac{T_{pedido} - T_{prog}}{\sqrt{\Sigma \sigma^2 \text{ CML}}}$$

$$Z = \frac{17 - 16}{\sqrt{2,10}} = 0,69 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,7149 \rightarrow 71,49\%$$

Ejemplo 3: ¿Cuál es la probabilidad de que la actividad R comience en fecha 14 o antes?

Aplicamos la fórmula:

$$Z = \frac{T_{pedido} - T_{min. i}}{\sqrt{\Sigma \sigma^2 \text{ CML llega a "i"}}$$

En esta ocasión hay tres caminos que marcan el $T_{min. i}$ de la actividad R:

Camino A-G-I $\rightarrow \Sigma te = 12; \Sigma \sigma^2 = 1,25$

Camino E-I $\rightarrow \Sigma te = 12; \Sigma \sigma^2 = 1,15$

Camino E-U-W $\rightarrow \Sigma te = 12; \Sigma \sigma^2 = 1,50$

Y, como el valor de Z será positivo, tomamos el de mayor $\Sigma \sigma^2$. Quedando:

$$Z = \frac{14 - 12}{\sqrt{1,50}} = 1,63 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0,9484 \rightarrow 94,84\%$$

6.21. CONTROL PERIÓDICO DE UN PROYECTO

El método Pert es una herramienta de programación que se adapta a los cambios que se originan durante la propia fase de planificación y, posteriormente, cuando el proyecto se ejecuta. Por lo tanto, es un elemento dinámico que se ajusta a las exigencias del proyecto y su ulterior puesta en marcha. Para ello, se apoya en una de las funciones básicas de la dirección de producción: el control.

Efectivamente, una vez que el proyecto comienza a materializarse es necesario comprobar si el ritmo del mismo se corresponde con la programación previamente realizada o si, por el contrario, existen desviaciones. Por ello, se hace preciso dotarse de las herramientas adecuadas para poder detectar estas posibles desviaciones, tomar las medidas oportunas para su rectificación y adaptar la red Pert a la realidad imperante.

Esto se consigue realizando controles periódicos “in situ” en los que se genera la información necesaria para tomar las decisiones encaminadas a la consecución de los objetivos propuestos. La periodicidad de estos controles depende del tipo de proyecto, de la duración total del mismo y de los imperativos exigidos por la Dirección.

Una vez girada la visita a la obra y tomado los datos relativos al desarrollo de la misma, se comparan dichos datos con la programación previa y se adapta la red a la situación real. Esto se lleva a cabo, trazando una *línea de control* sobre la red que cortará a las actividades que en la fecha del control se estén ejecutando. La red resultante del control será aquella en la que se eliminará la parte de la red que quede a la izquierda de la línea de control, originándose un nuevo suceso inicial del que partirán las actividades que han quedado cortadas por la línea de control. El trazado del resto de la red permanecerá inalterable, salvo aquellas actividades ficticias que ya no sean necesarias u otras ficticias que puedan aparecer como consecuencia de la nueva situación.

Finalmente, es de gran utilidad para ilustrar el resultado de los distintos controles efectuados durante la ejecución del proyecto, representar gráficamente el resultado de cada uno de ellos, lo cual se lleva a efecto mediante un *gráfico de desviaciones*. Dicho gráfico se genera en unos ejes coordenados, representando las fechas de los controles en el eje horizontal y el ritmo del proyecto (adelanto o retraso respecto al plazo previsto) en el eje vertical.

Ejemplo

La red de la figura 6.78 corresponde a la programación un proyecto en el que, durante su ejecución, se efectuaron tres controles, el primero en fecha 10 y los dos restantes en fecha 18 y 24, de los que se obtuvo la siguiente información.

Control en fecha 10:

Actividades ya ejecutadas: A, B y C

Actividades en fase de ejecución:

D, faltándole 3 fechas para terminar

E, faltándole 4 fechas para terminar

F, faltándole 6 fechas para terminar

Actividades no comenzadas: G

Control en fecha 18:

Actividades ya ejecutadas: E, F y H

Actividades en fase de ejecución:

G, faltándole 1 fechas para concluir

J, faltándole 2 fechas para concluir

Control en fecha 24:

Actividades ya ejecutadas: G, I y J

Actividades en fase de ejecución:

K, faltándole 1 fechas para concluir

L, faltándole 1 fechas para concluir

Se pide, dibujar las redes resultantes de cada uno de los controles y el gráfico de desviaciones.

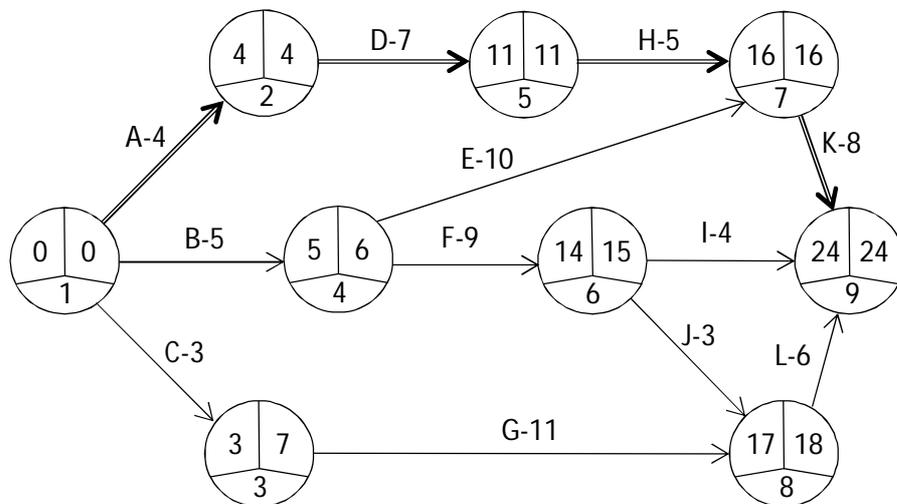


Figura 6.78

En primer lugar, se representa sobre la red inicial la línea de control en fecha 10. Esta línea cortará a las actividades D, E y F, que están en ejecución, y pasará por el inicio de la actividad G, que aún no ha comenzado, como se aprecia en la figura 6.79.

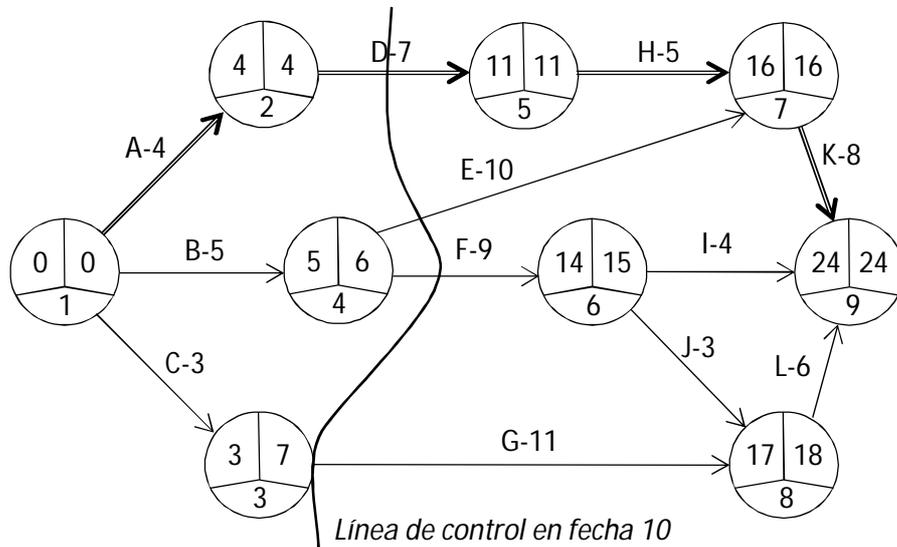


Figura 6.79

A continuación, se obtiene la red resultante del control en fecha 10, eliminando la parte de la red que queda a la izquierda de la línea de control, dibujando un nuevo suceso inicial del que partirán las actividades D, E, F y G, como aparece en la figura 6.80. Seguidamente, se calculan los nuevos tiempos mínimos y máximos, asignando como tiempo mínimo del suceso inicial la fecha del control. Finalmente, se compara el Tprog obtenido en la red resultante del control con el Tprev de la red inicial, para ver cuál es el ritmo del proyecto, obteniéndose:

$$\text{Retraso} = \text{Tprog. Control} - \text{Tprev. Inicial} = 27 - 24 = 3$$

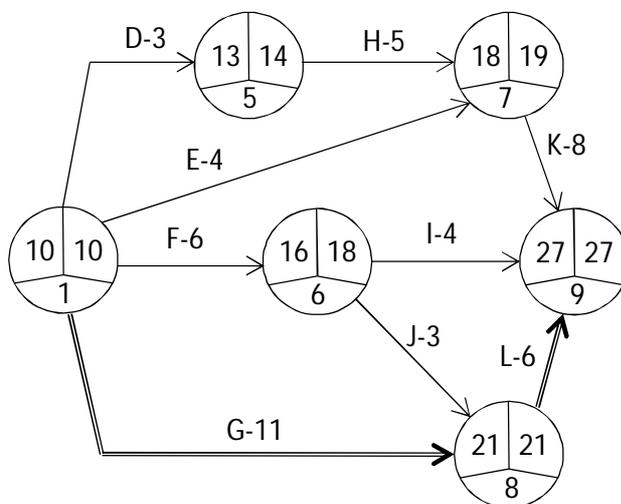


Figura 6.80

En segundo lugar, sobre la red resultante del primer control, se dibuja la línea de control en fecha 18 (figura 6.81) y procediendo del mismo modo que se hizo anteriormente, se obtiene la red resultante del control en fecha 18 (figura 6.82) y se verifica el ritmo del proyecto, siendo:

$$\text{Retraso} = T_{\text{prog. Control}} - T_{\text{prev. Inicial}} = 26 - 24 = 2$$

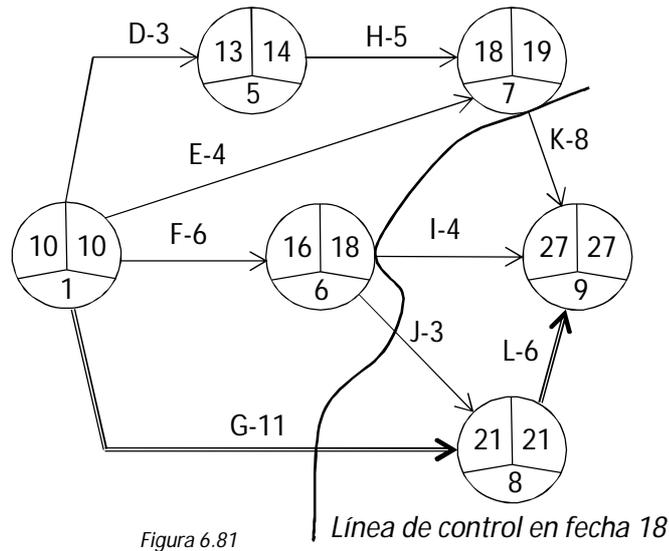


Figura 6.81

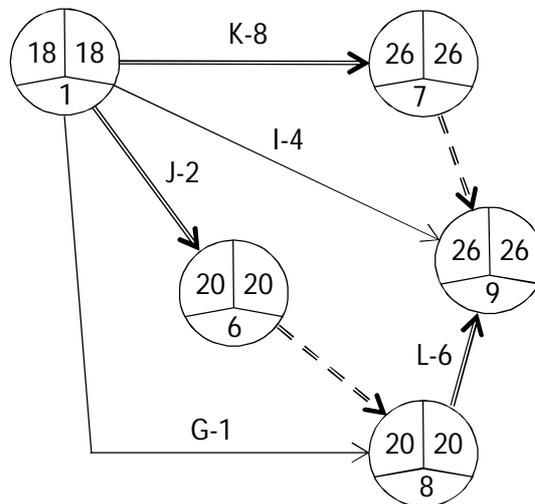


Figura 6.82

En tercer lugar, sobre la red resultante del segundo control, se traza la línea de control en fecha 24 (figura 6.83), se obtiene la red resultante del control en fecha 24 (figura 6.84) y se comprueba el ritmo del proyecto, que en este caso será:

$$\text{Retraso} = T_{\text{prog. Control}} - T_{\text{prev. Inicial}} = 25 - 24 = 1$$

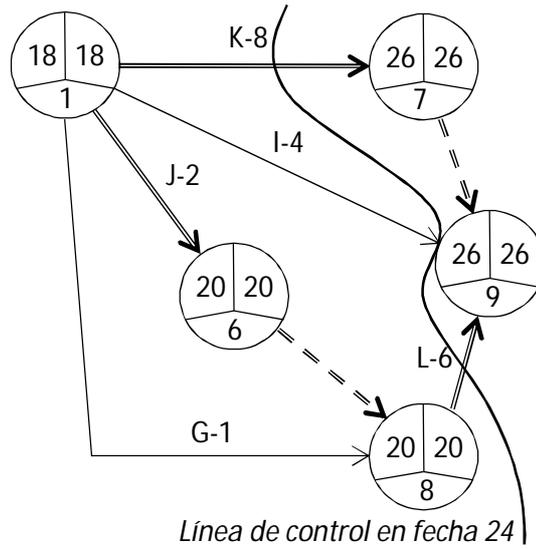


Figura 6.83

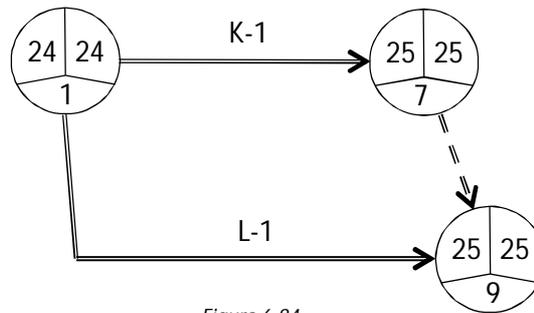


Figura 6.84

Para finalizar, se dibuja el gráfico de desviaciones (figura 6.85) donde se puede observar la evolución del proyecto.

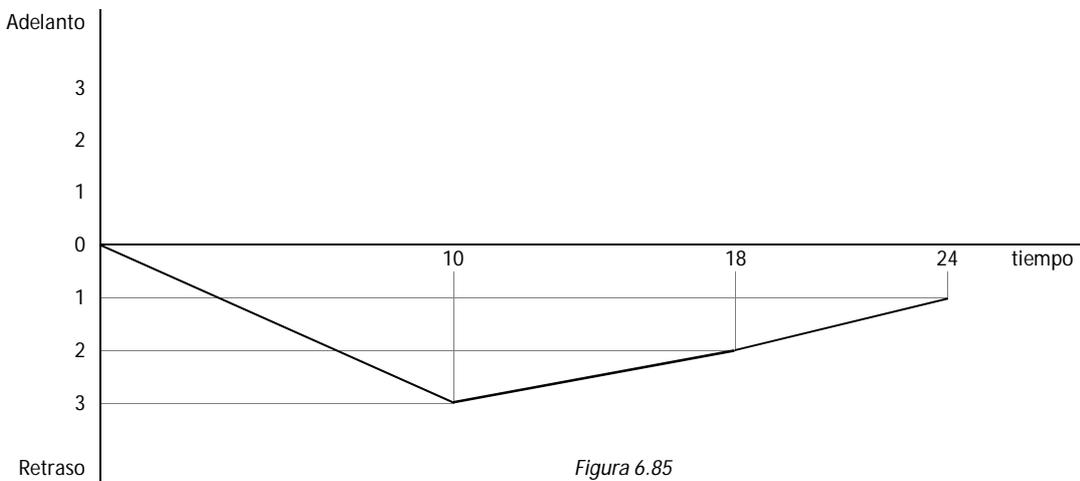


Figura 6.85

7. EL MÉTODO CPM

En 1957 un equipo de investigadores de la compañía E.I. Du Pont de Nemours, dirigido por los ingenieros Morgan R. Walker y James E. Kelley, crearon una técnica llamada Critical Path Method (CPM) para programar y controlar los proyectos de mantenimiento en sus plantas de fabricación.

7.1. DIFERENCIAS ENTRE PERT Y CPM

La técnica del CPM, o Método del Camino Crítico, es muy parecida al Pert, salvo algunas diferencias de nomenclatura y la manera de calcular el tiempo esperado de las actividades, basándose en un grafo idéntico donde las actividades se representan por flechas y los acontecimientos por nudos. La gran diferencia entre estos dos métodos de programación radica en una aportación del CPM consistente en establecer una relación entre el coste directo de una actividad y la duración de la misma.

Las diferencias relativas a la nomenclatura son las siguientes:

| <u>PERT</u> | | | <u>CPM</u> |
|---------------|---|---|-----------------|
| Suceso | → | → | Nudo |
| Actividad | → | → | Trabajo |
| Holgura | → | → | Flotante |
| Tiempo mínimo | → | → | Tiempo más bajo |
| Tiempo Máximo | → | → | Tiempo más alto |

Sin embargo, estas diferencias terminológicas se refieren al origen de estos modelos de programación, dado que en la actualidad estos términos se mezclan y se usan de manera indistinta, de modo que, tanto en uno como en otro método, se utilizan los mismos términos (suceso o nudo, actividad o trabajo, etc.).

Una diferencia significativa entre PERT y CPM es la forma de obtener el tiempo esperado de las actividades. Mientras que en el PERT se utiliza un modelo probabilístico, estimando tres tiempos (t_o , t_n y t_p) para cada actividad y a partir de ellos se calcula el "te" mediante la media ponderada de los mismos, en función de la ley de probabilidad estadística que siga cada actividad, en el CPM se sigue un modelo determinista, donde se hace una única estimación de la duración de cada actividad en función de experiencias anteriores iguales o similares.

Empero, como se ha indicado anteriormente, la diferencia fundamental entre PERT y CPM estriba en la aportación que realizó James E. Kelley enunciando que entre el coste directo y la duración de una actividad existe una relación funcional decreciente. Es decir, que el coste directo de una actividad está en función del tiempo esperado de dicha actividad:

$$C_{ij} = f(t_{ij})$$

7.2. RELACIÓN COSTE-DURACIÓN DE UNA ACTIVIDAD

Cada una de las actividades de un proyecto requiere cierta cantidad de tiempo para su ejecución. Esta cantidad de tiempo es la duración de la actividad. Sin embargo, el método CPM considera que para cada una de las actividades del proyecto existen varios tiempos de ejecución distintos, comprendidos en un intervalo cuyos extremos son el *tiempo normal* y el *tiempo acelerado*, correspondiéndoles a cada uno de ellos un coste directo diferente. Por ejemplo, supongamos que se desea realizar la actividad “cimentación” de una manzana de edificios y para ello se cuenta con tres cuadrillas de operarios. Si se desea acelerar la ejecución de la actividad, basta añadir una cuarta cuadrilla de operarios. Con ello se consigue efectuar la actividad en menos tiempo, pero los costes directos aumentan. Si se añade una quinta cuadrilla de nuevo disminuirá el tiempo de ejecución y aumentará el coste directo. Empero, llegará un momento en que, aunque se aumente el número de cuadrillas, el tiempo de ejecución no disminuirá, es decir, la actividad necesita un tiempo de ejecución mínimo que no podrá rebajarse por mucho que se aumente el número de trabajadores, dado que la actividad se realiza en un espacio determinado y con unos medios (maquinaria, materiales, ...) prefijados. A este tiempo mínimo de ejecución de la actividad, con la máxima utilización de recursos disponibles, se le denomina tiempo acelerado (t_a) y al coste directo asociado a este tiempo se le llama coste acelerado (C_a). Por otro lado, si lo que se pretende es desacelerar la ejecución de la actividad, bastará con asignar una cuadrilla menos. Así, con dos cuadrillas, la actividad se realizará en más tiempo, pero los costes directos disminuirán. Si se quita otra cuadrilla, más tiempo y menos costes directos. Pero, al igual que antes, llega un momento en que no es posible quitar más cuadrillas, puesto que la actividad necesita un número de operarios mínimos para poder realizarse. A este tiempo de ejecución, con la mínima utilización de recursos, se le denomina tiempo normal (t_n) y le corresponderá un coste directo mínimo llamado coste normal (C_n).

Esta relación funcional decreciente puede adoptar diversas formas. En la figura 7.1, se muestra aquella que se presenta con mayor regularidad estadística. En ella, el punto T (denominado Punto Tope) se corresponde con el tiempo acelerado (t_a) y el coste

acelerado (C_a), mientras que el punto N (llamado Punto Normal) se corresponde con el tiempo normal (t_n) y el coste normal (C_n). Desde el punto de vista económico el tramo de la curva que interesa considerar es el comprendido entre los puntos T y N.

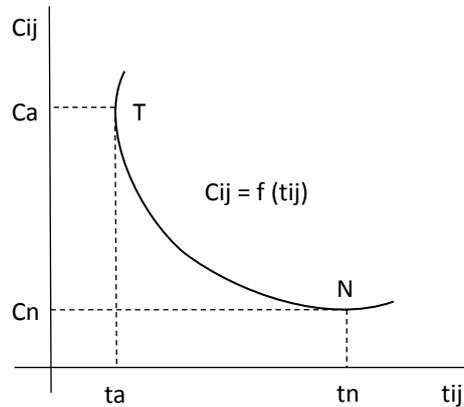


Figura 7.1

7.3. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE COSTE

A efectos de cálculo se hace necesario saber cuál es la diferencia de coste que existe entre los distintos tiempos de ejecución de la actividad comprendidos entre el tiempo acelerado y el tiempo normal. A esta diferencia de coste por unidad de tiempo se le llama *Coefficiente de Coste*. Dicho de otra forma, se denomina Coeficiente de Coste al incremento o decremento que experimenta el coste directo de una actividad, cuando disminuye o aumenta el tiempo de ejecución de la misma en una unidad de tiempo.

Como la relación coste-duración de una actividad viene dada por una curva, para poder calcular el coeficiente de coste será necesario utilizar complicados problemas de programación matemática (funciones cuadráticas, cúbicas, etc.). Para simplificar el problema y facilitar el cálculo del coeficiente de coste, se suele sustituir la curva por una recta trazada desde el punto tope al punto normal, como aparece en la figura 7.2. Con ello, se puede tratar el problema desde el punto de vista de la programación lineal paramétrica. Ahora bien, al tomar la recta en lugar de la curva, se comete un error que en la mayoría de los casos es insignificante y por eso este cambio funciona bien. Pero otras veces, cuando la curva es muy cóncava, como en la figura 7.3, el error es mayor y por lo tanto no despreciable. En estos casos, la curva se sustituye por dos o más rectas, de manera que el error cometido sea pequeño, como aparece en la figura 7.4.

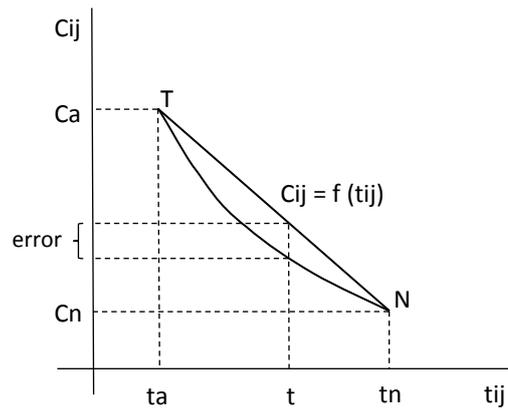


Figura 7.2

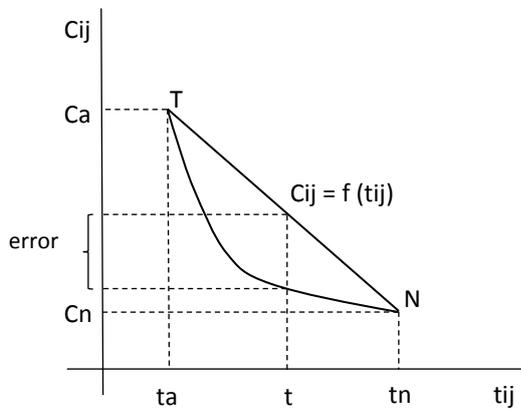


Figura 7.3

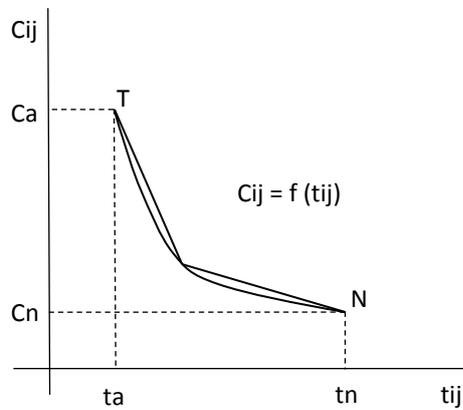


Figura 7.4

El coeficiente de coste se denotará con la expresión:

$$-\frac{\Delta c}{\Delta t}$$

Para su cálculo, se aplicará el concepto de semejanza de triángulos. Así, en la figura 7.5, el triángulo NAB es semejante al triángulo NCT y por ello se puede afirmar que:

$$\frac{NA}{BA} = \frac{NC}{TC}$$

Sustituyendo por sus valores:

$$\frac{1}{\text{Coef. coste}} = \frac{tn - ta}{Ca - Cn}$$

Hallando la inversa se obtiene el valor del Coeficiente de Coste:

$$-\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{Ca - Cn}{tn - ta}$$

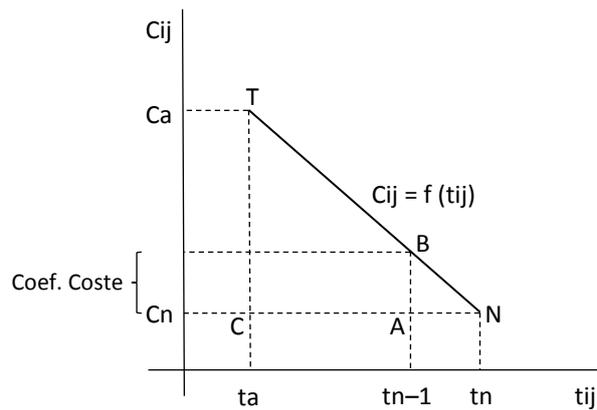


Figura 7.5

7.4. COSTE TOTAL DE UN PROYECTO

En el cálculo del Coste Total de un proyecto intervienen fundamentalmente los costes directos (CD) y los costes indirectos (CI), así como las bonificaciones o premios y las penalizaciones que se puedan establecer contractualmente. Los costes directos de una actividad están formados por los gastos de mano de obra directa, materiales y equipos necesarios para su ejecución. Los costes directos del proyecto serán la suma de los costes directos de todas las actividades que lo constituyen. Es decir, los costes directos son aquellos que pueden imputarse de forma concreta y directa a las actividades. Contrariamente, los costes indirectos de un proyecto, son aquellos que no se imputan de manera concreta a una actividad, dado que pertenecen a todo el proceso de producción. Estos costes están formados por gastos generales de empresa (GGE), como los gastos de dirección y supervisión, y los gastos generales de obra (GGO), como alquileres, seguros, impuestos y amortizaciones.

7.41. Programa Normal (PN) y Programa Acelerado (PA) de un proyecto

Como se ha visto anteriormente, cada una de las actividades de un proyecto se puede ejecutar en cualquier tiempo comprendido entre su " t_n " y su " t_a ". En consecuencia, existen infinitas combinaciones posibles entre las duraciones de las distintas actividades. Cada una de estas combinaciones es un Programa distinto al que le corresponderá un T_{prog} y un coste directo determinado. Pues bien, de todos los Programas posibles hay dos programas extremos que reciben el nombre de Programa Normal (PN) y Programa Acelerado (PA). El primero de ellos, es aquel en el que todas las actividades se ejecutan en su tiempo normal, siendo el T_{prog} la suma de los " t_n " de

las actividades del CML. Este Programa tiene asociado un coste directo que es la suma de los “Cn” de todas las actividades del proyecto. El segundo, es aquel en el que todas las actividades se ejecutan en su tiempo acelerado, siendo el Tprog la suma de los “ta” de las actividades del CML. Este Programa tiene asociado un coste directo que es la suma de los “Ca” de todas las actividades del proyecto. Es decir:

Programa Normal → PN ($T_{prog} = \sum t_n \text{ CML}$; $CD = \sum C_n \text{ todas activ.}$)

Programa Acelerado → PA ($T_{prog} = \sum t_a \text{ CML}$; $CD = \sum C_a \text{ todas activ.}$)

7.4.2. Curva de Costes Directos Mínimos de un proyecto

La curva de costes directos mínimos de un proyecto viene dada por los menores costes directos para cada una de las posibles fechas de finalización del mismo. Obteniéndose una curva como la de la figura 7.6, donde:

C = Coste

t = tiempo

PN = Programa Normal

PA = Programa Acelerado

PE = Programa más económico para fecha TA

TN = Tprog del Programa Normal

TA = Tprog del Programa Acelerado

CN = Costes Directos del Programa Normal

CA = Costes Directos del Programa Acelerado

CE = Costes Directos mínimos para fecha TA

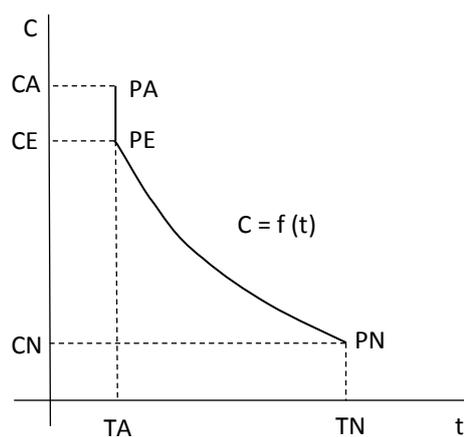


Figura 7.6

De la figura se deduce que los costes directos del Programa Acelerado no son los menores costes directos para la fecha de finalización del mismo (TA), existiendo otro Programa (PE) que finaliza en la misma fecha pero con menores costes directos. Por ello, la curva de costes directos mínimos es la comprendida entre los puntos PE y PN.

7.4.3. Curva de Costes Indirectos de un proyecto

Empíricamente se ha comprobado que la curva de costes indirectos es una función creciente, pudiendo ser este crecimiento proporcional (dando lugar a una recta) o no proporcional (dando lugar a una curva cóncava o convexa). Genéricamente se representa mediante una curva cóncava, como se aprecia en la figura 7.7.

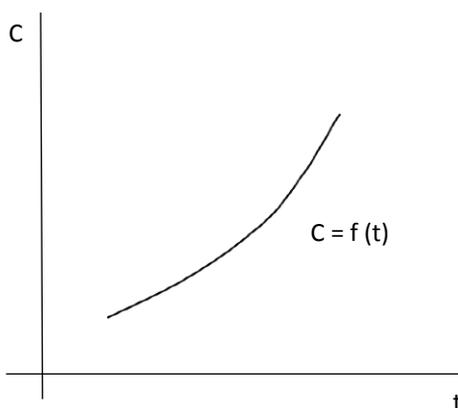


Figura 7.7

7.4.4. Curva de Premio-Penalización de un proyecto

Es frecuente que entre el promotor y el constructor se pacte una fecha de terminación del proyecto y, consecuentemente, se establezcan contractualmente cláusulas donde se penalice al constructor si no cumple con dicha fecha y finaliza el proyecto más tarde de lo acordado. Análogamente, también se puede estipular que si acaba el proyecto antes del tiempo concertado, reciba un premio o bonificación. En la figura 7.8 se observa la forma estándar de una curva de premio-penalización. El punto donde la curva corta al eje de abscisas es el plazo de ejecución pactado, más allá del cual existirán penalizaciones (costes positivos) y antes de la cual habrá premios (costes negativos).

7.4.5. Curva de Coste Total de un proyecto

El coste total de un proyecto será la suma de los costes directos, costes indirectos y premios o penalizaciones, originando una curva que puede presentar diversas formas, siendo la más frecuente la que se muestra en la figura 7.9, donde la curva inicialmente es decreciente, pero llegado un punto empieza a crecer. Este punto de inflexión se corresponde con el menor coste total de ejecución del proyecto. Es decir, es el punto óptimo de la curva y le corresponderá un tiempo de finalización del proyecto que es la fecha óptima de realización del proyecto

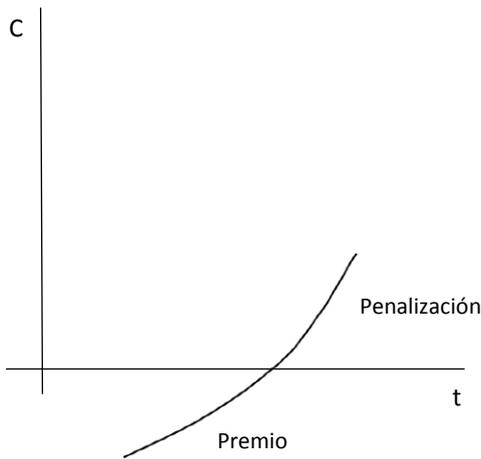


Figura 7.8

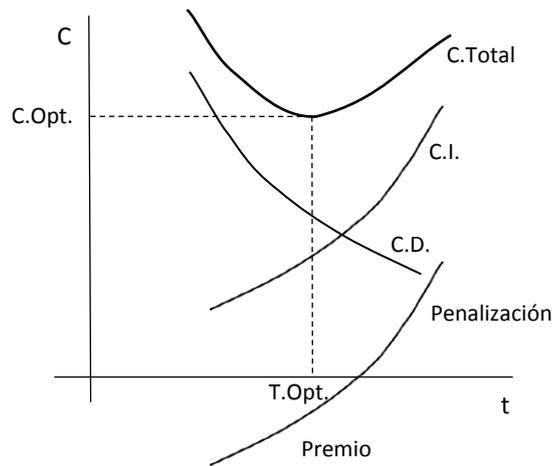


Figura 7.9

7.5. CÁLCULO DE LA FECHA ÓPTIMA DE REALIZACIÓN DEL PROYECTO

Para poder saber cuál es la fecha óptima de realización de un proyecto es necesario conocer los CD, CI y premio o penalización de cada una de las posibles fechas de finalización del mismo. Los costes indirectos suelen calcularse mediante una fórmula polinómica y los premios-penalizaciones, como ya se ha dicho, vienen establecidas contractualmente. Por ello, el cálculo de estos costes no supone dificultad alguna. Sin embargo, el cálculo de los costes directos reviste mayor complejidad. Existen métodos matemáticos que resuelven la situación, pero en la práctica no se suelen utilizar debido al alto número de ecuaciones que hay que manejar. Por ello, se utilizan métodos gráficos, siendo el más empleado el método combinatorio. Para ello, se utilizan diversas técnicas dependiendo del programa de partida, que puede ser el programa normal, el programa acelerado o cualquier otro programa intermedio.

7.5.1. Determinación de la curva de costes directos mínimos partiendo del Programa Normal. (Método combinatorio)

La aplicación del método combinatorio implica conocer el tiempo normal y el tiempo acelerado de cada una de las actividades, así como el coste normal y el coste acelerado de las mismas. El primer paso consiste en identificar las actividades que pertenecen al camino más largo. El segundo paso radica en especificar, para una duración determinada del proyecto, aquella combinación de duraciones de actividades que dé lugar al menor coste directo.

Para una mejor comprensión del proceso de programación por el método combinatorio, se explica con un ejemplo práctico.

Ejemplo de aplicación del método combinatorio.

Dada la red de la figura 7.10 de la que se conocen los datos expresados en la tabla de la figura 7.11, se desea saber cuál es la fecha óptima de realización del proyecto, partiendo del Programa Normal. Además, se sabe que los costes indirectos se calculan mediante la siguiente fórmula: $CI = 25 + 2 T_{prog}$. También se conoce que si el proyecto finaliza en fecha 18 o antes no existen premios ni penalizaciones, pero a partir de esta fecha se penaliza con 2 u.m. (unidades monetarias) para la siguiente fecha y 5 u.m. más por cada fecha.

Obsérvese que los nudos o sucesos, normalmente representados por círculos, se dibujan más grandes y alargados, con el objetivo de ir anotando los tiempos mínimos y máximos en cada una de las programaciones necesarias para resolver el problema por el método combinatorio.

Para resolver el problema se siguen los siguientes pasos:

a) Calcular los coeficientes de costes de todas las actividades aplicando la fórmula

$$-\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{C_a - C_n}{t_n - t_a}$$

Obteniéndose los siguientes valores:

| A | B | C | D | E | F | G | H |
|----|-----|-----|---|---|---|---|---|
| 15 | 4,5 | 9,5 | 3 | 4 | 5 | 2 | 8 |

b) Trasladar los valores de los coeficientes de costes calculados a la red.

c) Representar en la red el Programa Normal. Es decir, calcular los T_{min} y T_{max} , considerando que todas las actividades se están ejecutando en sus tiempos normales (t_n).

d) Identificar las actividades que pertenecen al camino crítico, que en este caso son: B, D y G.

Los puntos b), c) y d) están representados en la figura 7.12.

e) Realizar las programaciones necesarias para acelerar al máximo el proyecto:

El objetivo es, partiendo del punto PN de la figura 7.6, llegar al punto PE a través de sucesivas programaciones.

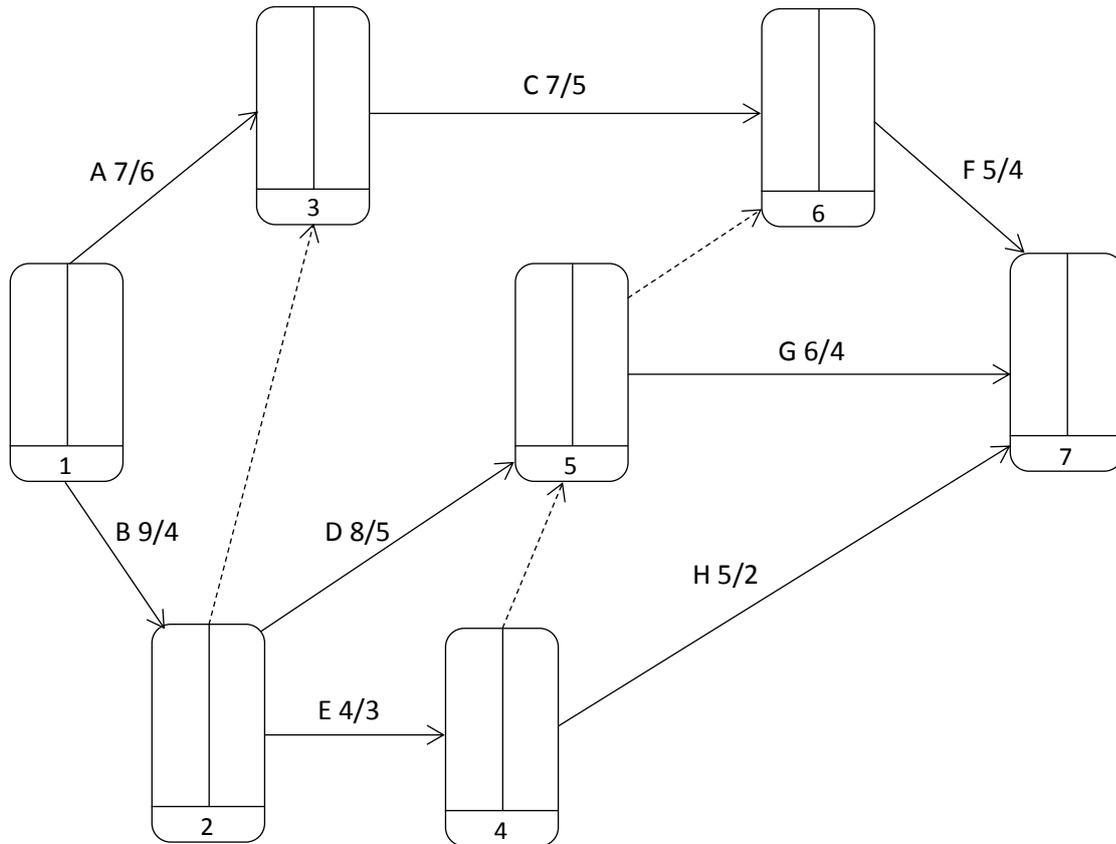


Figura 7.10

| Actividad | Programa Normal | | Programa Acelerado | |
|-----------|-----------------|----------------|--------------------|------------------|
| | tn | Cn | ta | Ca |
| A | 7 | 15 | 6 | 30 |
| B | 9 | 19 | 4 | 41,5 |
| C | 7 | 21 | 5 | 40 |
| D | 8 | 30 | 5 | 39 |
| E | 4 | 18 | 3 | 22 |
| F | 5 | 20 | 4 | 25 |
| G | 6 | 20 | 4 | 24 |
| H | 5 | 14 | 2 | 38 |
| | | $\Sigma = 157$ | | $\Sigma = 259,5$ |

Figura 7.11

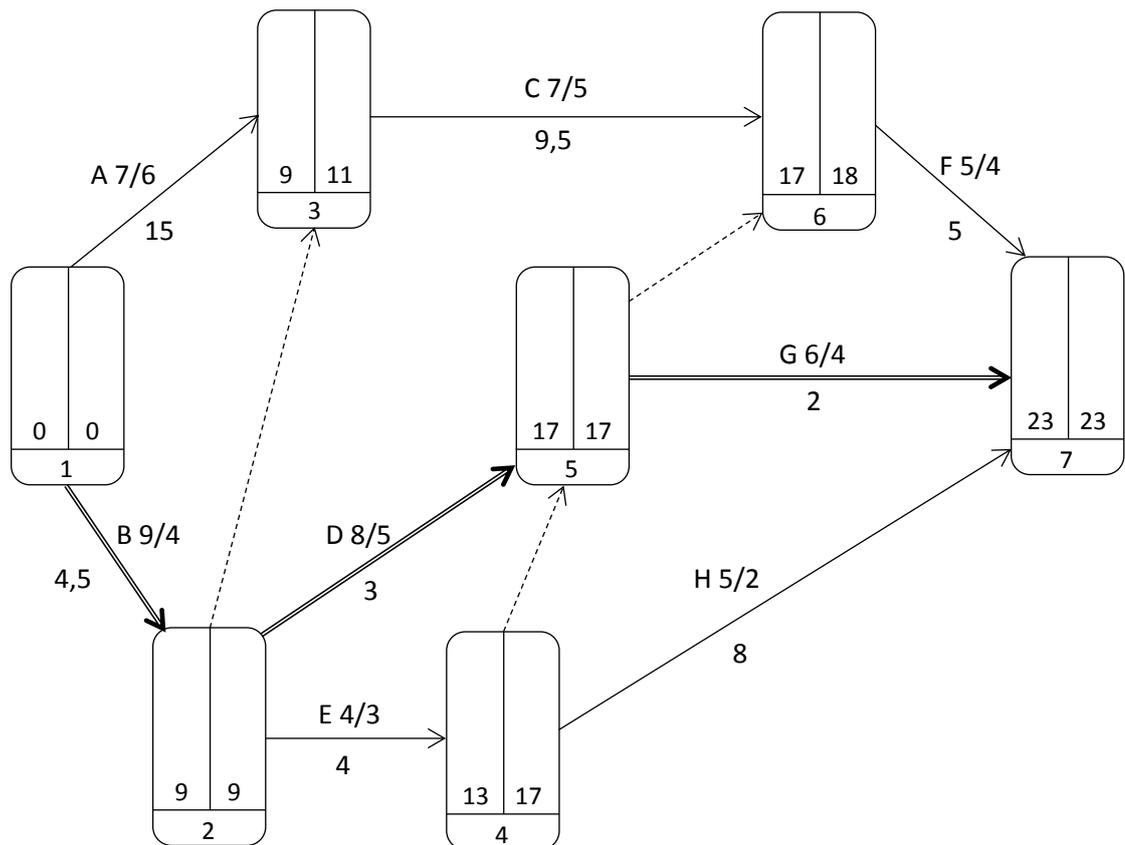


Figura 7.12

Primera programación

La finalidad es reducir la duración del proyecto, lo cual se obtiene reduciendo la duración de alguna de las actividades críticas, dado que si reducimos la duración de una actividad que no es crítica, significaría un aumento del coste directo sin afectar a la duración del proyecto. Ahora bien, el objetivo se puede conseguir reduciendo la duración de la actividad B y también reduciendo la duración de D o G. ¿Cuál se elige de las tres? Obviamente, la que tenga un menor coeficiente de coste, ya que de esta manera el incremento de los costes directos es el menor posible. Por ello, la primera programación consistirá en reducir la duración de la actividad G. El segundo interrogante sería: ¿cuántas fechas se reduce? La actividad G permite una reducción de dos fechas (dado que su tiempo acelerado es 4), pero sólo vamos a reducir una fecha puesto que al hacerlo se observa que el camino B-D-F se hace crítico, ya que es el segundo camino más largo de la red. Al realizar esta operación el incremento de coste que se produce es de 2 u.m. y con ello el proyecto finalizará en fecha 22, siendo el coste directo para esta fecha el que se tenía en fecha 23 (157 u.m.) más el incremento de coste producido. En definitiva:

Primera programación → Reducir la duración de la actividad G en 1 fecha.
 $\Delta c = 2$ u.m.
 $C_{22} = 157 + 2 = 159$ u.m.

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.13.

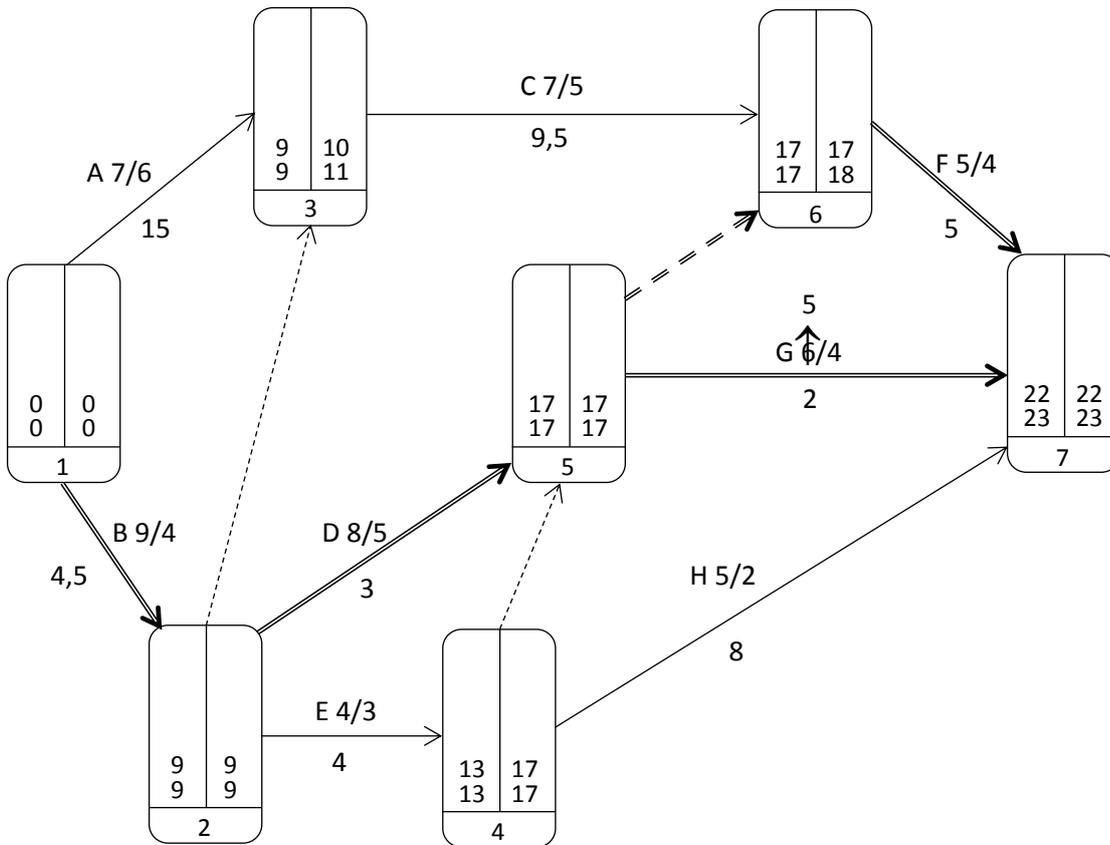


Figura 7.13

Segunda programación

Para seguir reduciendo la duración del proyecto, se presentan de nuevo tres posibilidades: reducir la duración de la actividad B, reducir la duración de la actividad D o reducir simultáneamente la duración de las actividades F y G. La que produce un menor incremento de costes directos es la segunda opción. El número de fechas a reducir será de 1 fecha, haciéndose crítico el camino B-C-F, que es el tercer camino más largo. Por lo tanto:

Segunda programación → Reducir la duración de la actividad D en 1 fecha.
 $\Delta c = 3$ u.m.
 $C_{21} = 159 + 3 = 162$ u.m.

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.14.

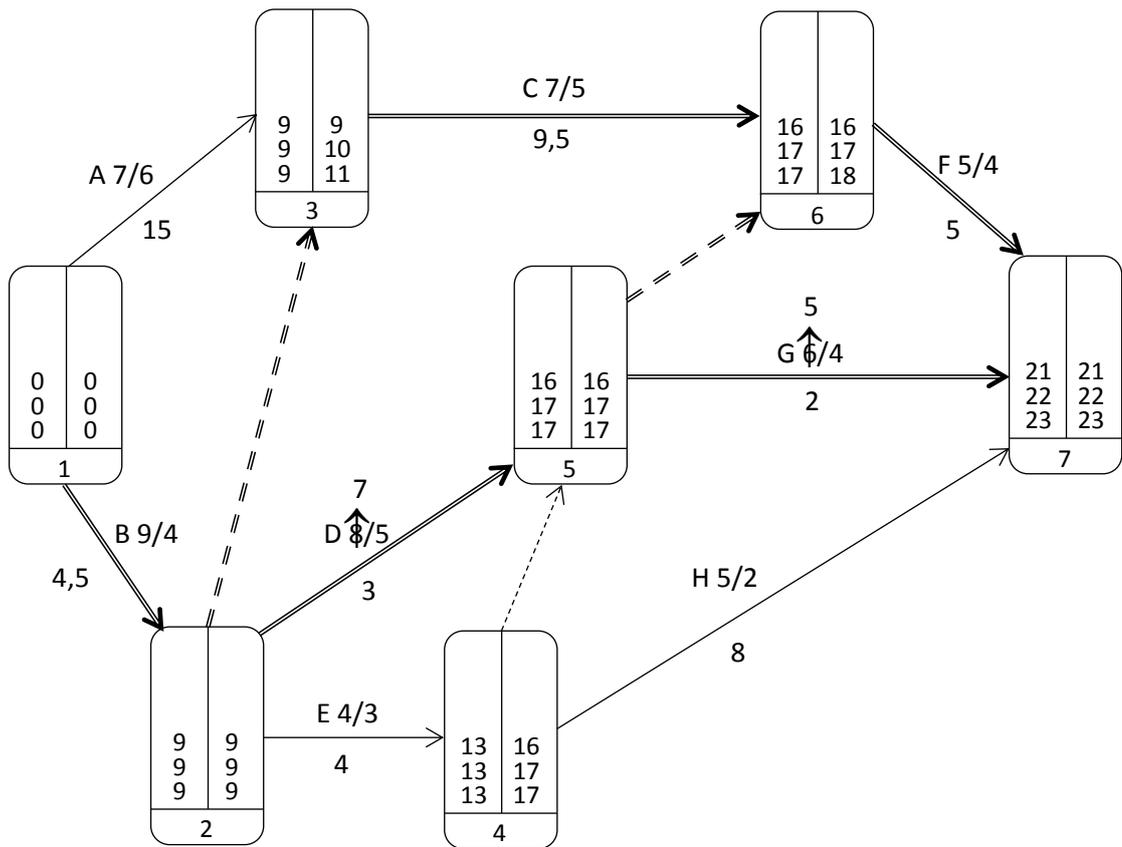


Figura 7.14

Tercera programación

En este caso las opciones son las siguientes:

- Reducir la duración de las actividades F y G $\rightarrow \Delta c = 7$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades F y D $\rightarrow \Delta c = 8$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades C y D $\rightarrow \Delta c = 12,5$ u.m.
- Reducir la duración de la actividad B $\rightarrow \Delta c = 4,5$ u.m.

La mejor opción es reducir la actividad B en 2 fechas, haciéndose crítico el camino A-C-F. Por ello:

- Tercera programación \rightarrow Reducir la duración de la actividad B en 2 fechas.
 $\Delta c = 2 \times 4,5 = 9$ u.m.
 $C_{20} = 162 + 4,5 = 166,5$ u.m.
 $C_{19} = 166,5 + 4,5 = 171$ u.m.

La red resultante después de aplicar la tercera programación es la que aparece en la figura 7.15.

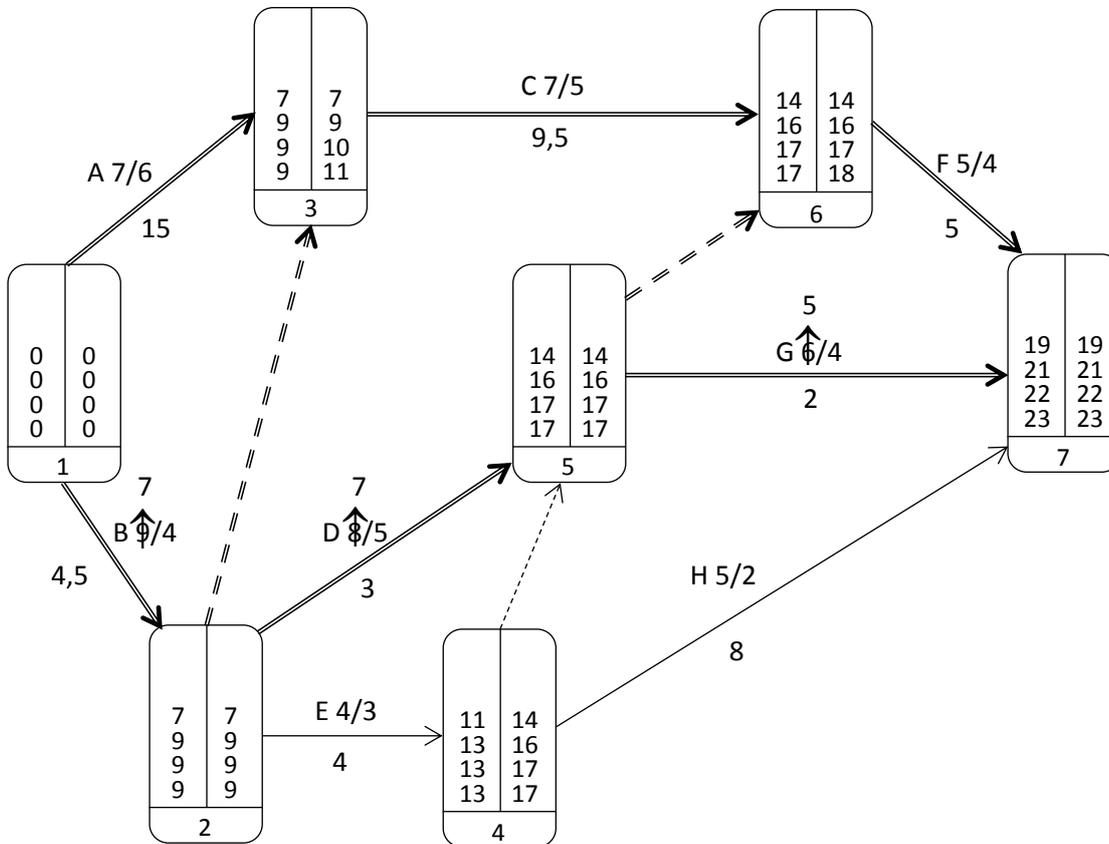


Figura 7.15

Cuarta programación

Existen las siguientes opciones:

- Reducir la duración de las actividades A y B → $\Delta c = 19,5$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades C y B → $\Delta c = 14$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades F y B → $\Delta c = 9,5$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades C y D → $\Delta c = 12,5$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades F y D → $\Delta c = 8$ u.m.
- Reducir la duración de las actividades F y G → $\Delta c = 7$ u.m.

Cuarta programación → Reducir la duración de las activ. F y G en 1 fecha.
 $\Delta c = 7$ u.m.
 $C18 = 171 + 7 = 178$ u.m.
 No aparecen nuevos caminos críticos

La red resultante después de aplicar la cuarta programación es la que aparece en la figura 7.16.

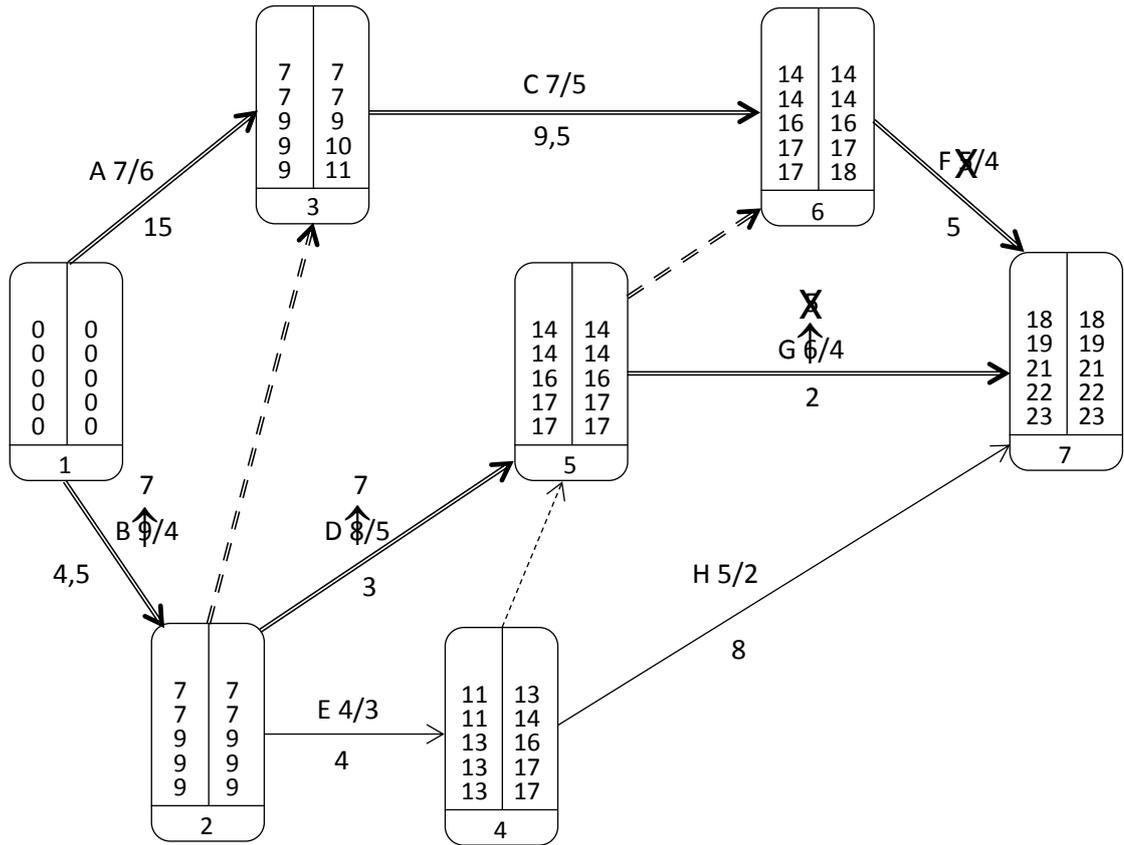


Figura 7.16

Quinta programación

Las opciones son las mismas que en la cuarta programación excepto las que contengan a las actividades F y G que ya están completamente aceleradas. Por lo tanto:

- Quinta programación → Reducir la duración de las activ. C y D en 2 fechas.
- $\Delta c = 12,5 \times 2 = 25 \text{ u.m.}$
- $C17 = 178 + 12,5 = 190,5 \text{ u.m.}$
- $C16 = 190,5 + 12,5 = 203 \text{ u.m.}$
- Se hace crítico el camino B-E-H

La red resultante después de aplicar la quinta programación es la que aparece en la figura 7.17.

Sexta programación

- La única opción que queda es:
- Reducir la duración de las activ. A y B en 1 fecha.
- $\Delta c = 19,5 \text{ u.m.}$
- $C15 = 203 + 19,5 = 222,5 \text{ u.m.}$
- No aparecen nuevos caminos críticos.

La red resultante después de aplicar la sexta programación es la que aparece en la figura 7.18.

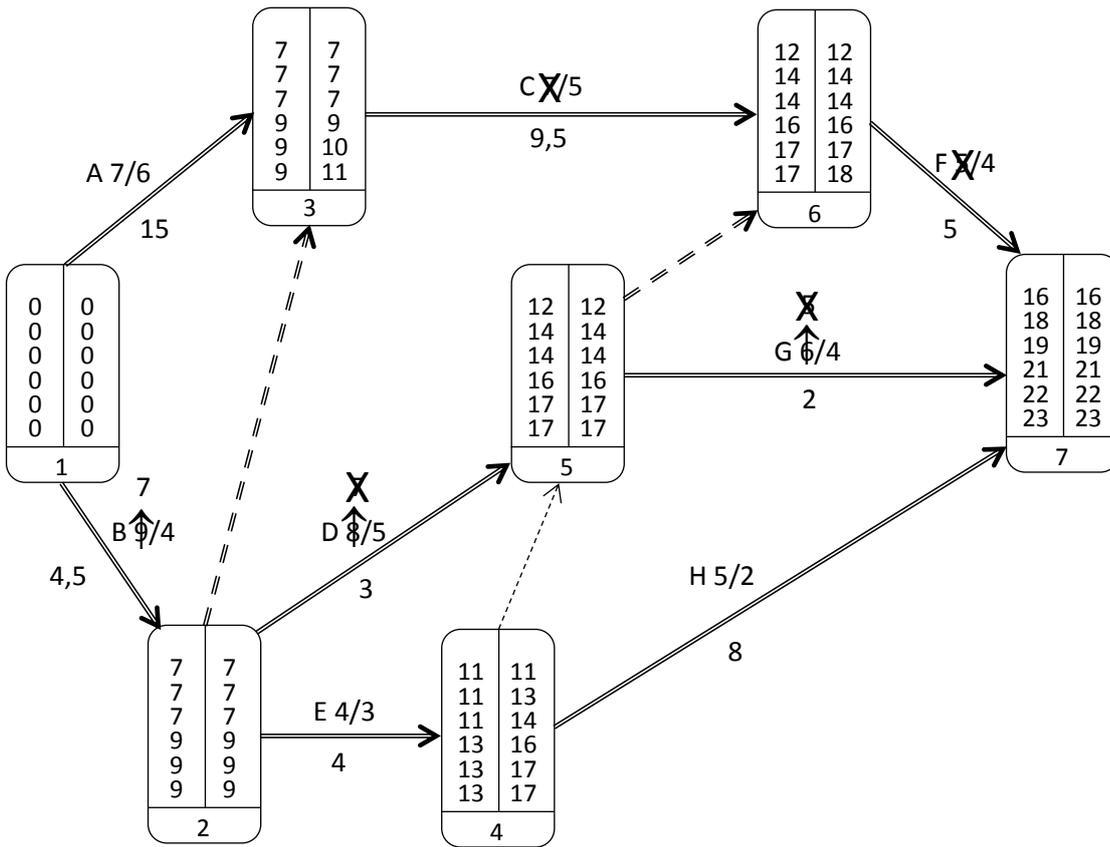


Figura 7.17

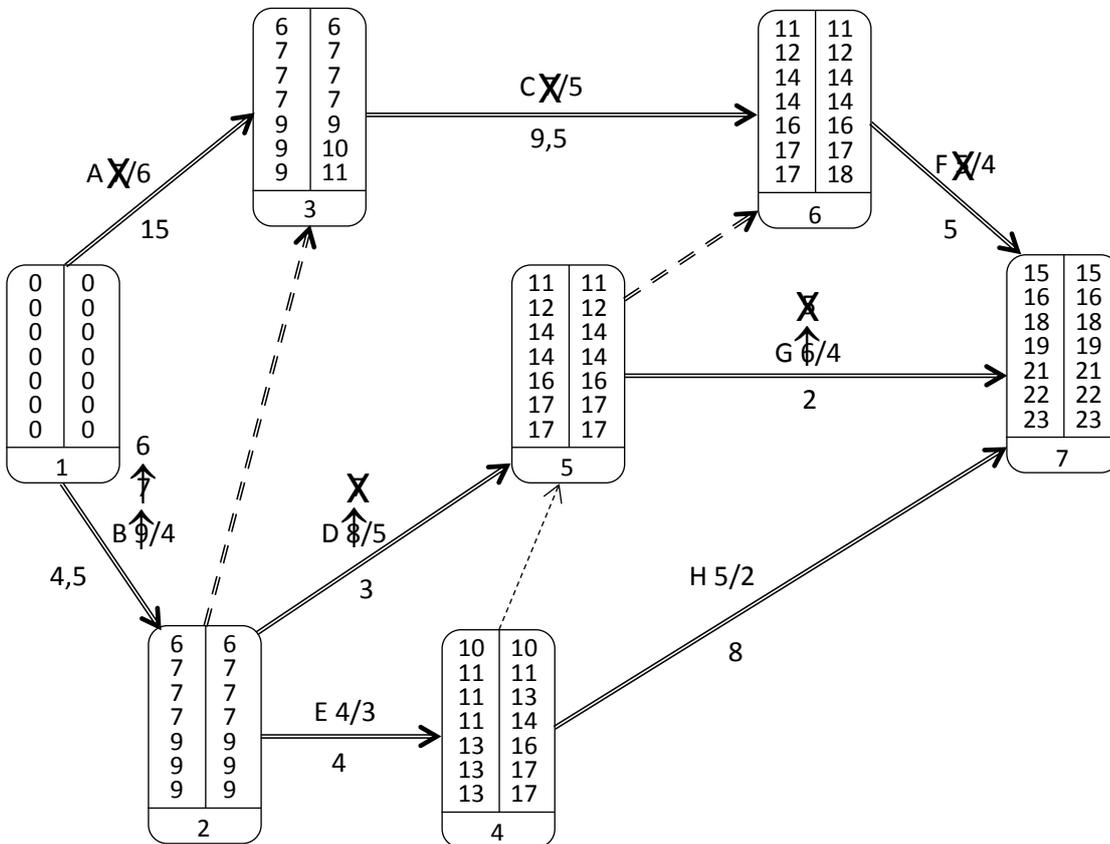


Figura 7.18

f) Dibujar la curva de costes directos mínimos.

A partir de los datos obtenidos en las programaciones se dibuja la curva de la figura 7.19.

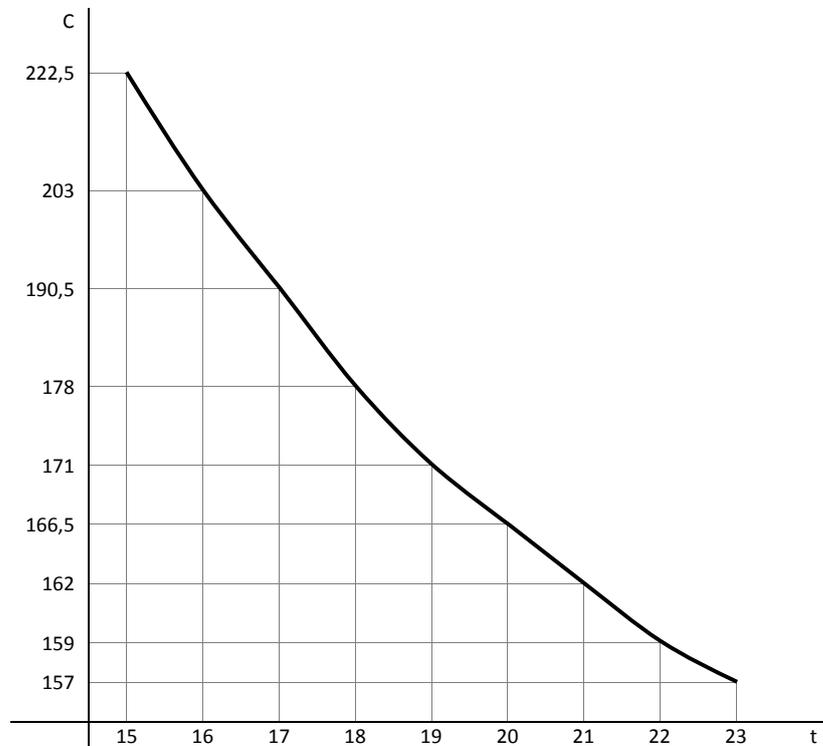


Figura 7.19

g) Determinar la fecha óptima de realización del proyecto.

Para ello, a los costes directos calculados para cada una de las fechas de terminación del proyecto se le suman los costes indirectos y las penalizaciones que procedan, obteniéndose los costes totales. Como se puede observar en la tabla de la figura 7.20 el menor coste total es 236 u.m., que se corresponde con fecha 19. Por lo tanto, ésta será la fecha óptima.

h) Dibujar la curva de costes totales.

Sobre la base de los datos de la tabla anterior se construye la curva de costes totales que se reproduce en la figura 7.21.

| Fecha | C.D. | C.I. | Penalización | C. Total |
|-------|-------|------|--------------|----------|
| 23 | 157 | 71 | 22 | 250 |
| 22 | 159 | 69 | 17 | 245 |
| 21 | 162 | 67 | 12 | 241 |
| 20 | 166,5 | 65 | 7 | 238,5 |
| 19 | 171 | 63 | 2 | 236 |
| 18 | 178 | 61 | 0 | 239 |
| 17 | 190,5 | 59 | 0 | 249,5 |
| 16 | 203 | 57 | 0 | 260 |
| 15 | 222,5 | 55 | 0 | 277,5 |

ÓPTIMO

Figura 7.20

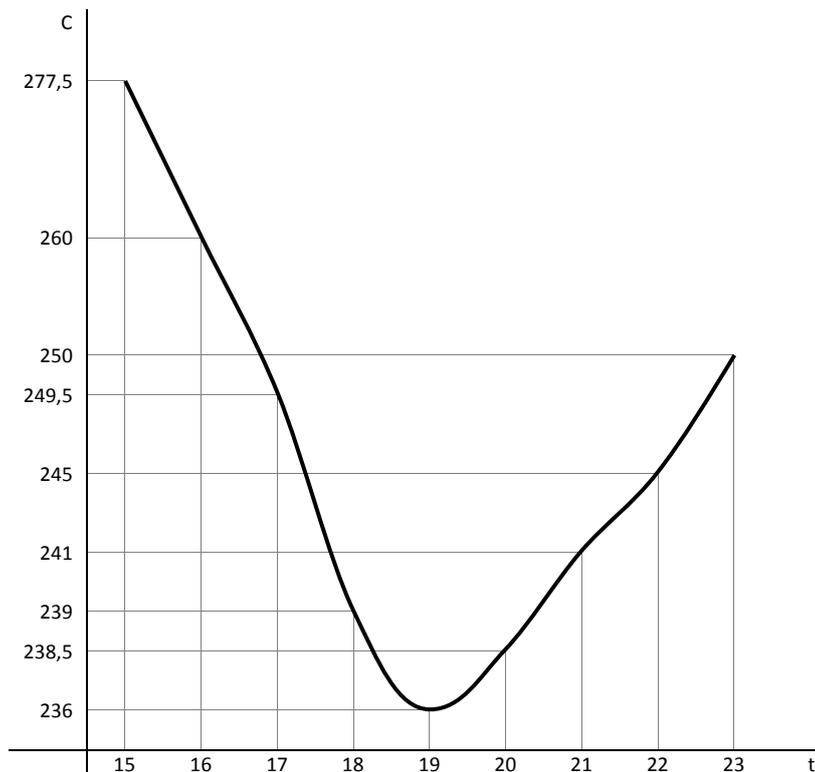


Figura 7.21

7.5.2. Determinación de la curva de costes directos mínimos partiendo del Programa Acelerado. (Método combinatorio)

El planteamiento del problema es similar al caso anterior, pero ahora en lugar de partir del punto PN de la curva (figura 7.6), éste será el punto de destino, siendo el origen el punto PA. Es decir, se parte del programa acelerado y el objetivo es ir alargando la duración del proyecto en sucesivas programaciones hasta llegar al máximo posible, que será cuando se llegue al programa normal.

No obstante, cuando el programa inicial es el PA, la resolución del problema se plantea en dos etapas. La primera consistirá en llegar al punto PE que, como se puede

observar, corresponde a un programa que finaliza en la misma fecha que el programa acelerado, pero a un menor coste directo. Esto se consigue alargando la duración de las actividades no críticas, lo cual implica un decremento de coste, hasta que consuman su holgura o hasta que lleguen a su "tn". Por ello, esta etapa recibe el nombre de "Consumo de holguras". La segunda etapa consistirá en pasar del punto PE al PN de manera análoga a como se hizo en el apartado anterior, pero alargando la duración de las actividades críticas.

Tomando como base el mismo ejemplo de caso anterior, vamos a resolverlo ahora partiendo del programa acelerado. Para ello se siguen los siguientes pasos:

- Calcular los coeficientes de costes de todas las actividades (de idéntica manera a como se hizo en el caso anterior).
- Trasladar los valores de los coeficientes de costes calculados a la red. (Ídem).
- Representar en la red el Programa Acelerado. Es decir, calcular los T_{min} y T_{max}, considerando que todas las actividades se están ejecutando en sus tiempos acelerados (t_a).
- Identificar las actividades que pertenecen al camino crítico, que en este caso son: A, C y F.
- Calcular la H_t de todas las actividades no críticas.

Los puntos b), c), d) y e) están representados en la figura 7.22.

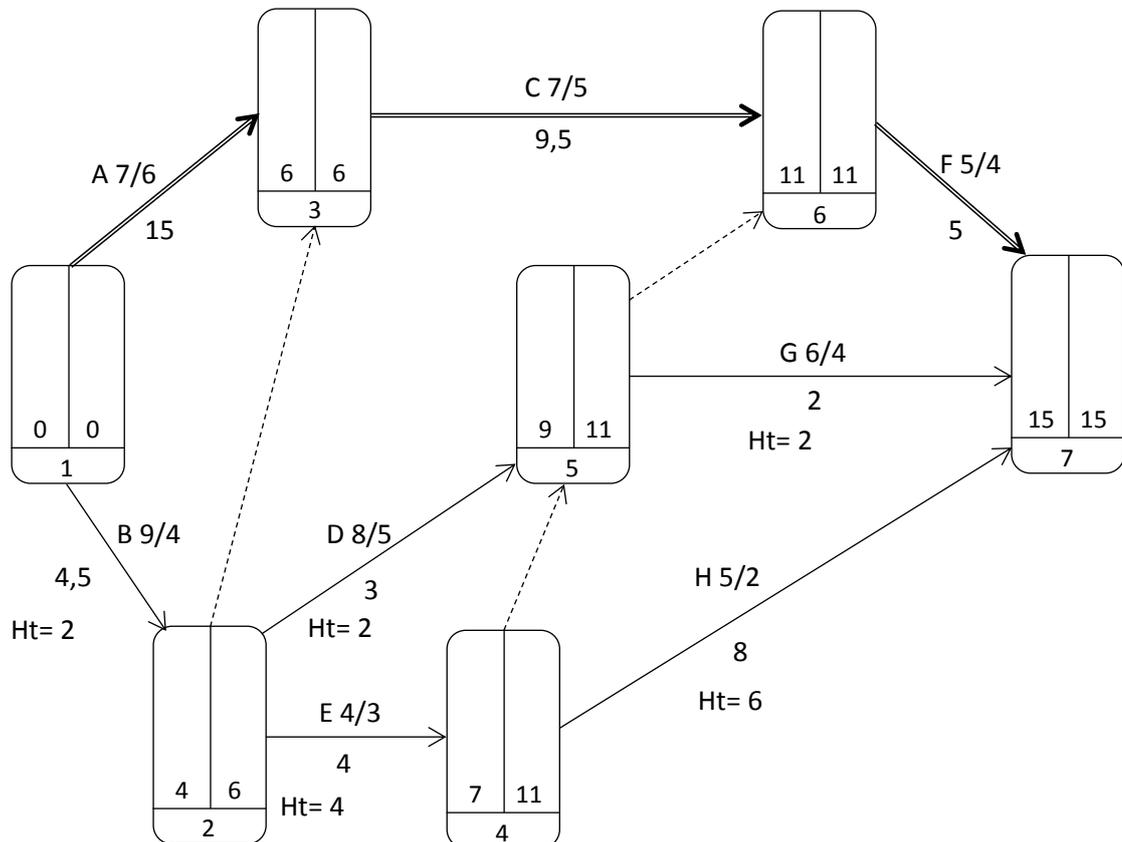


Figura 7.22

f) Realizar el Consumo de Holguras.

Se trata de alargar la duración de las actividades no críticas, lo cual supone un decremento del coste directo del proyecto. Ahora bien, esta operación no se debe hacer de manera arbitraria, alargando la duración de las actividades sin un orden preestablecido, sino que hay que hacerlo aplicando una metodología que permita llegar al programa más económico para fecha 15, que es la fecha más pronta en que puede finalizar el proyecto. Para ello, se comienza por las actividades que tienen mayor Ht, alargando su duración hasta que el valor de su Ht sea igual a la inmediata inferior. Posteriormente, se repite esta misma operación, realizando tantas iteraciones como sea necesario, hasta que las actividades consumen toda su holgura o han llegado a su "tn". Aplicando este procedimiento a nuestro ejemplo, tendríamos:

Primera programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen Ht = 6 a Ht = 4.

Alargar la duración de la activ. H en 2 fechas $\rightarrow -\Delta c = 2 \times 8 = 16$ u.m.

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.23.

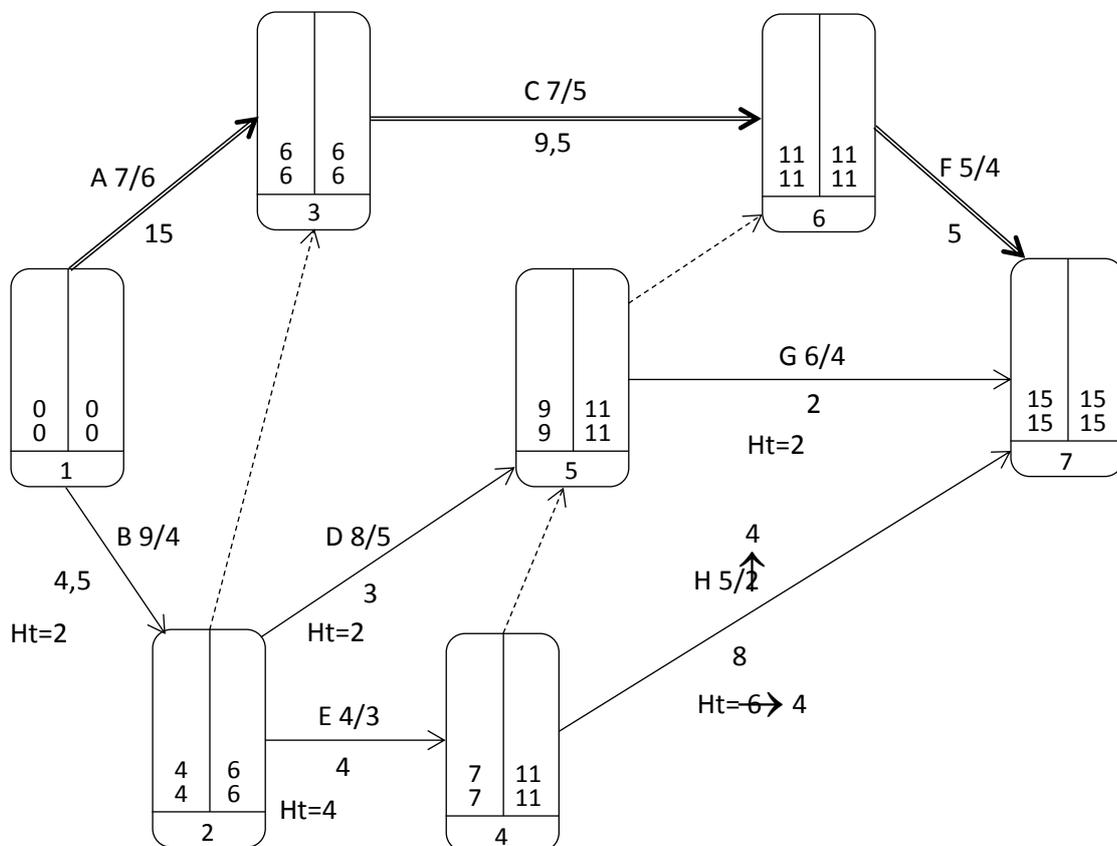


Figura 7.23

Segunda programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen $Ht = 4$ a $Ht = 2$.

- a) Alargar la duración de la activ. H en 1 fecha $\rightarrow -\Delta c = 8$ u.m.
- b) Alargar la duración de la activ. E en 1 fecha $\rightarrow -\Delta c = 4$ u.m.

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.24

Tercera programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen $Ht = 2$ a $Ht = 0$.

Alargar la duración de la activ. B en 2 fechas $\rightarrow -\Delta c = 2 \times 4,5 = 9$ u.m.

Decremento de coste total por consumo de holguras = 37 u.m.

Coste directo mínimo para fecha 15 = $259,5 - 37 = 222,5$ u.m.

La red resultante después de aplicar la tercera programación es la que aparece en la figura 7.25.

g) Realizar las programaciones necesarias para pasar de fecha 15 a fecha 23.

Para ello, se parte de la red resultante después de realizar el consumo de holguras (figura 7.26).

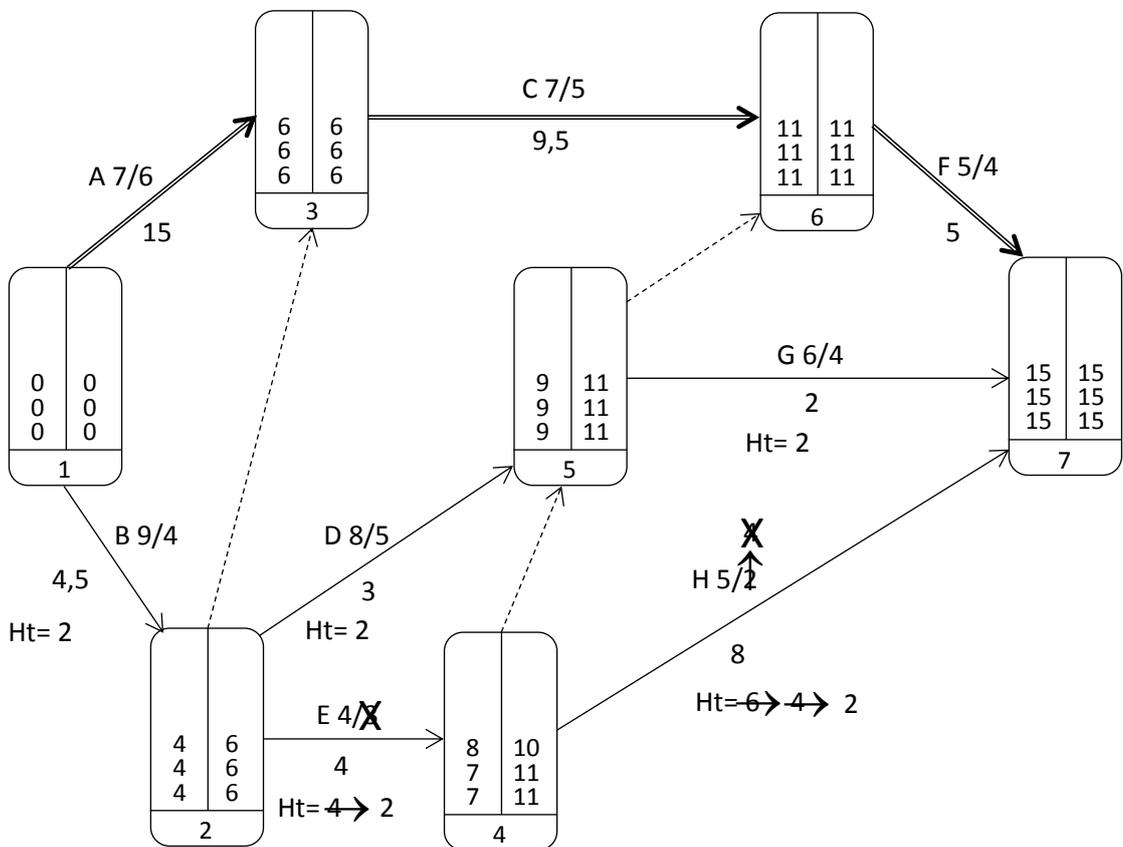


Figura 7.24

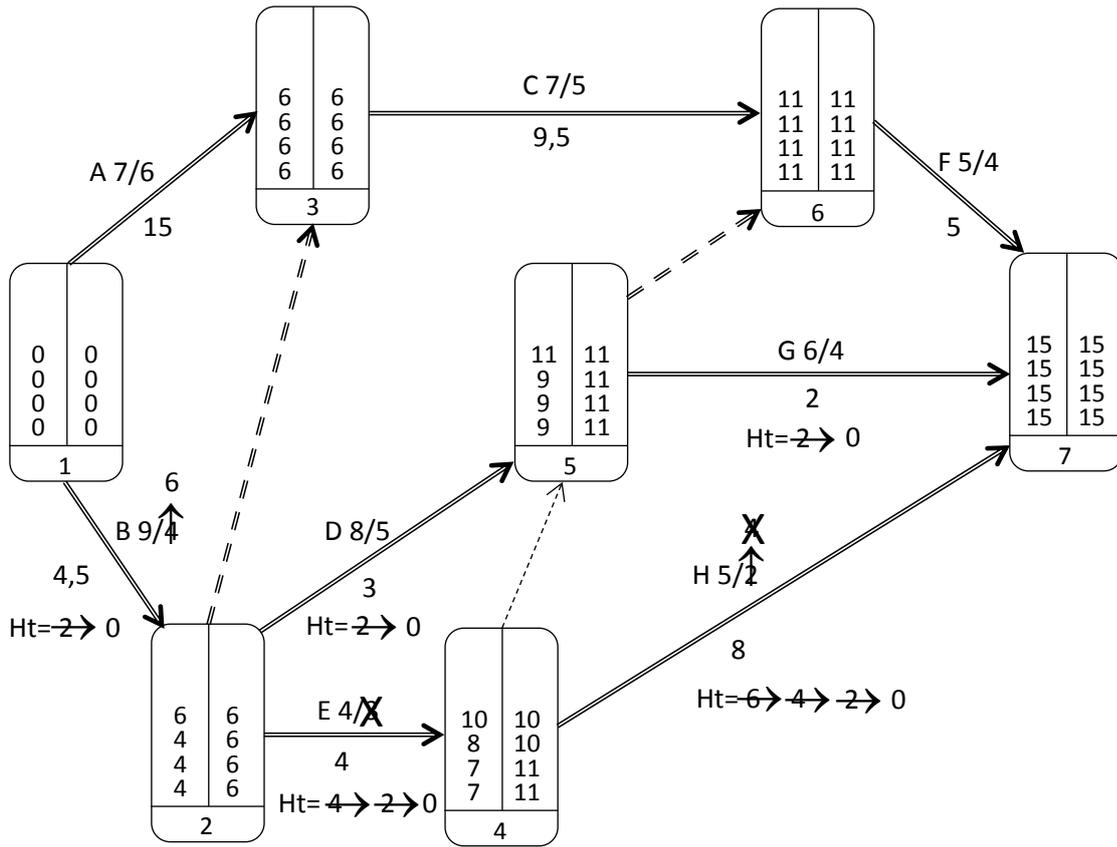


Figura 7.25

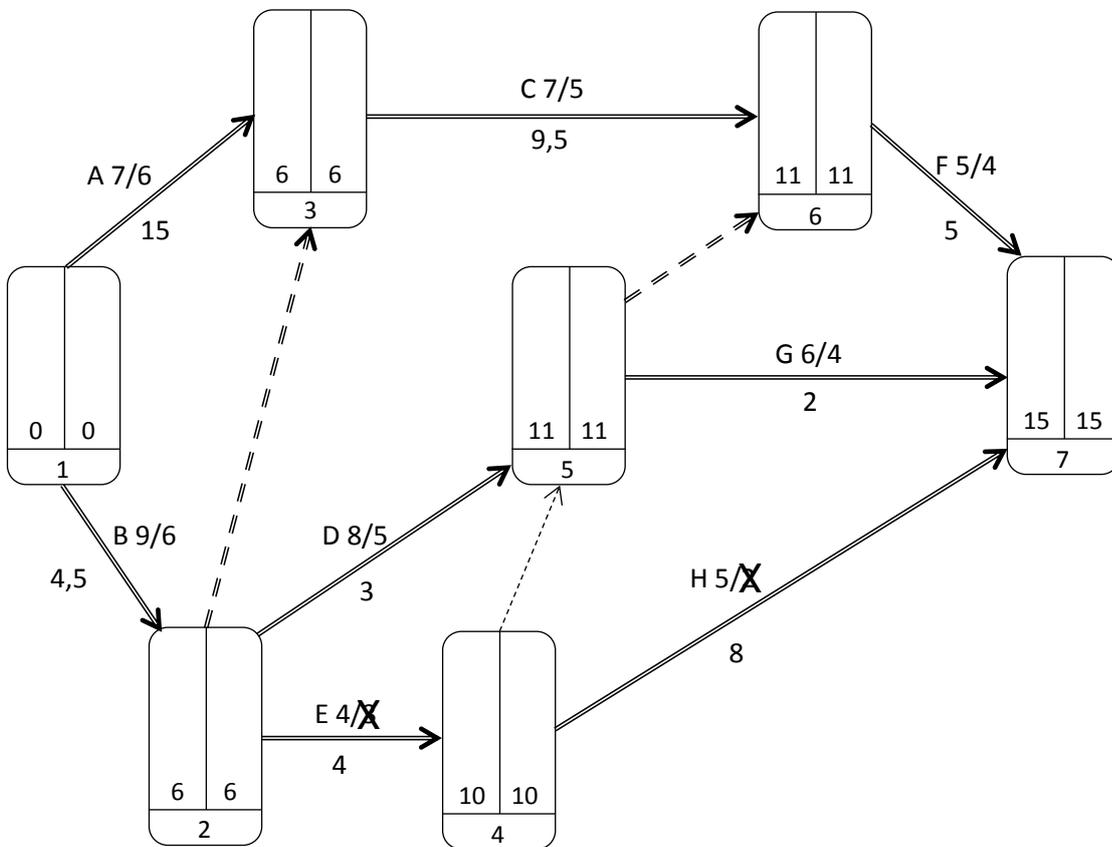


Figura 7.26

PASAR DE FECHA 15 A FECHA 23

Primera programación

Alargar la duración de las activ. A y B en 1 fecha

– $\Delta c = 19,5$ u.m.

$C16 = 222,5 - 19,5 = 203$ u.m.

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.27.

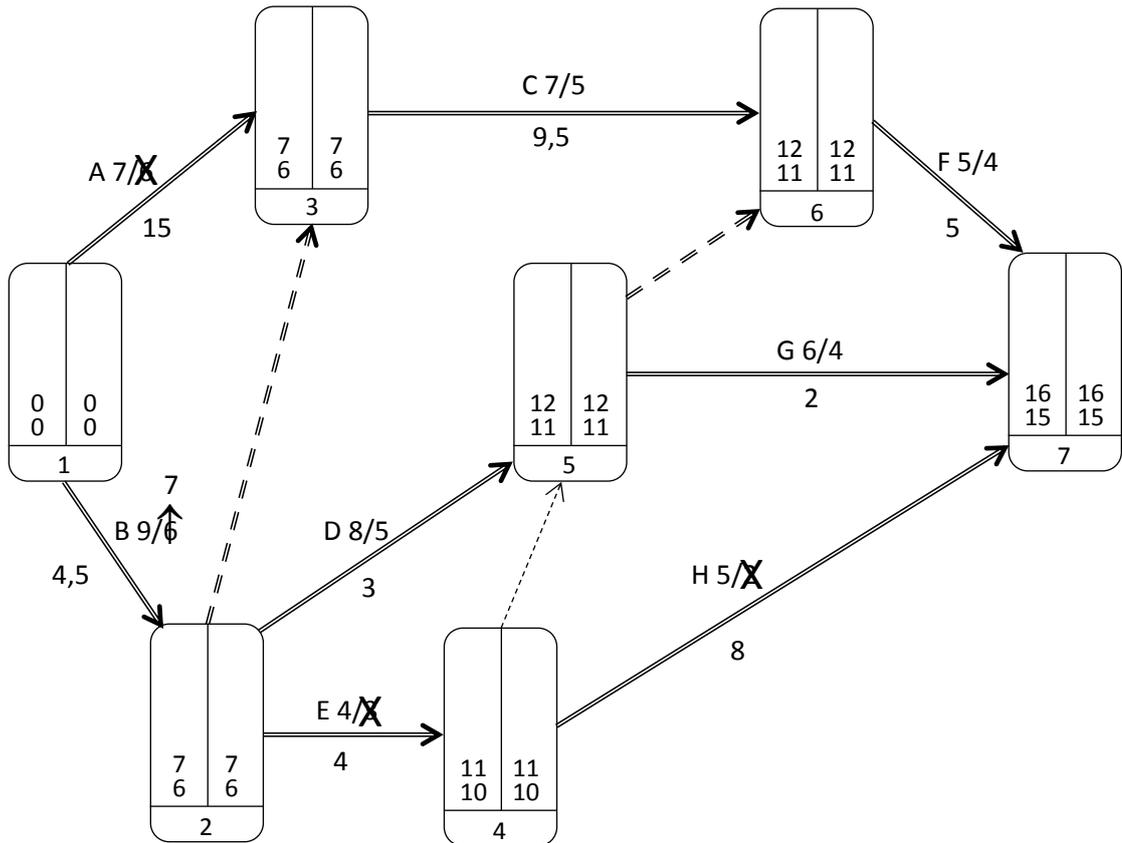


Figura 7.27

Segunda programación

Alargar la duración de las activ. C y D en 2 fechas

– $\Delta c = 2 \times 12,5 = 25$ u.m.

$C17 = 203 - 12,5 = 190,5$ u.m.

$C18 = 190,5 - 12,5 = 178$ u.m.

Dejan de ser críticas las actividades E y H

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.28.

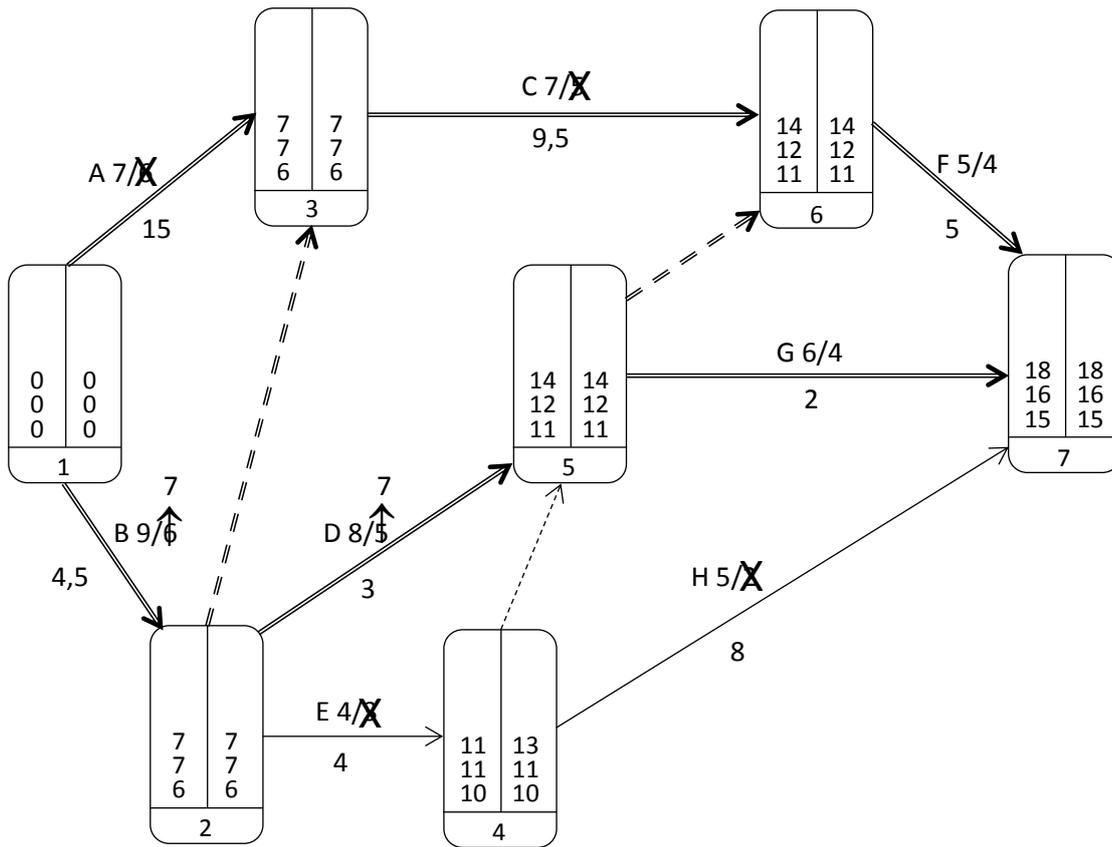


Figura 7.28

Tercera programación

Alargar la duración de las activ. F y G en 1 fecha

– $\Delta c = 7$ u.m.

$C19 = 178 - 7 = 171$ u.m.

La red resultante después de aplicar la tercera programación es la que aparece en la figura 7.29.

Cuarta programación

Alargar la duración de la activ. B en 2 fechas

– $\Delta c = 2 \times 4,5 = 9$ u.m.

$C20 = 171 - 4,5 = 166,5$ u.m.

$C21 = 166,5 - 4,5 = 162$ u.m.

Deja de ser crítica la actividad A.

La red resultante después de aplicar la cuarta programación es la que aparece en la figura 7.30.

Quinta programación

Alargar la duración de la activ. D en 1 fecha

$-\Delta c = 3 \text{ u.m.}$

$C22 = 162 - 3 = 159 \text{ u.m.}$

Dejan de ser críticas las actividades C y 2-3 (ficticia)

La red resultante después de aplicar la quinta programación es la que aparece en la figura 7.31.

Sexta programación

Alargar la duración de la activ. G en 1 fecha

$-\Delta c = 2 \text{ u.m.}$

$C23 = 159 - 2 = 157 \text{ u.m.}$

Dejan de ser críticas las actividades F y 5-6 (ficticia)

La red resultante después de aplicar la sexta programación es la que aparece en la figura 7.32.

Como se puede comprobar, los costes directos mínimos obtenidos para las fechas comprendidas entre 15 y 23, son los mismos que cuando se resolvió en el punto 7.5.1. Por lo tanto, el programa óptimo es aquel que finaliza en fecha 19 con unos costes totales de 236 u.m.

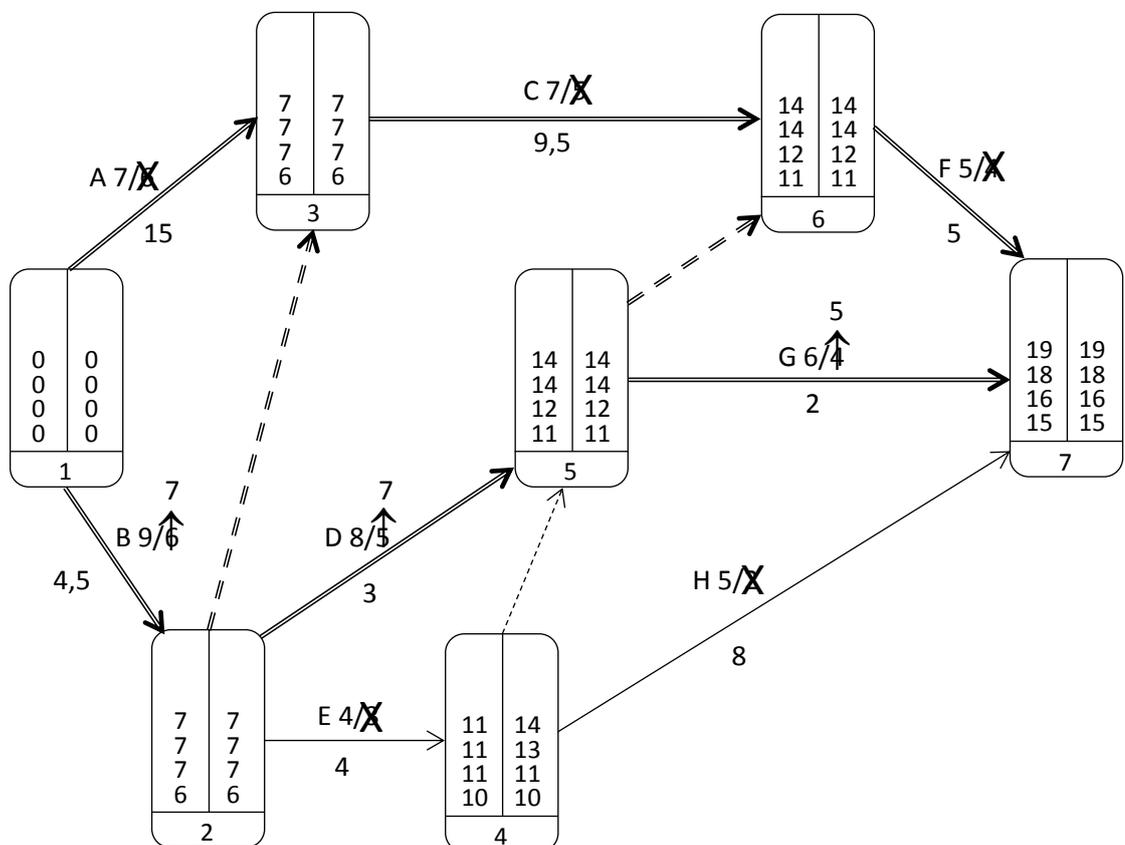


Figura 7.29

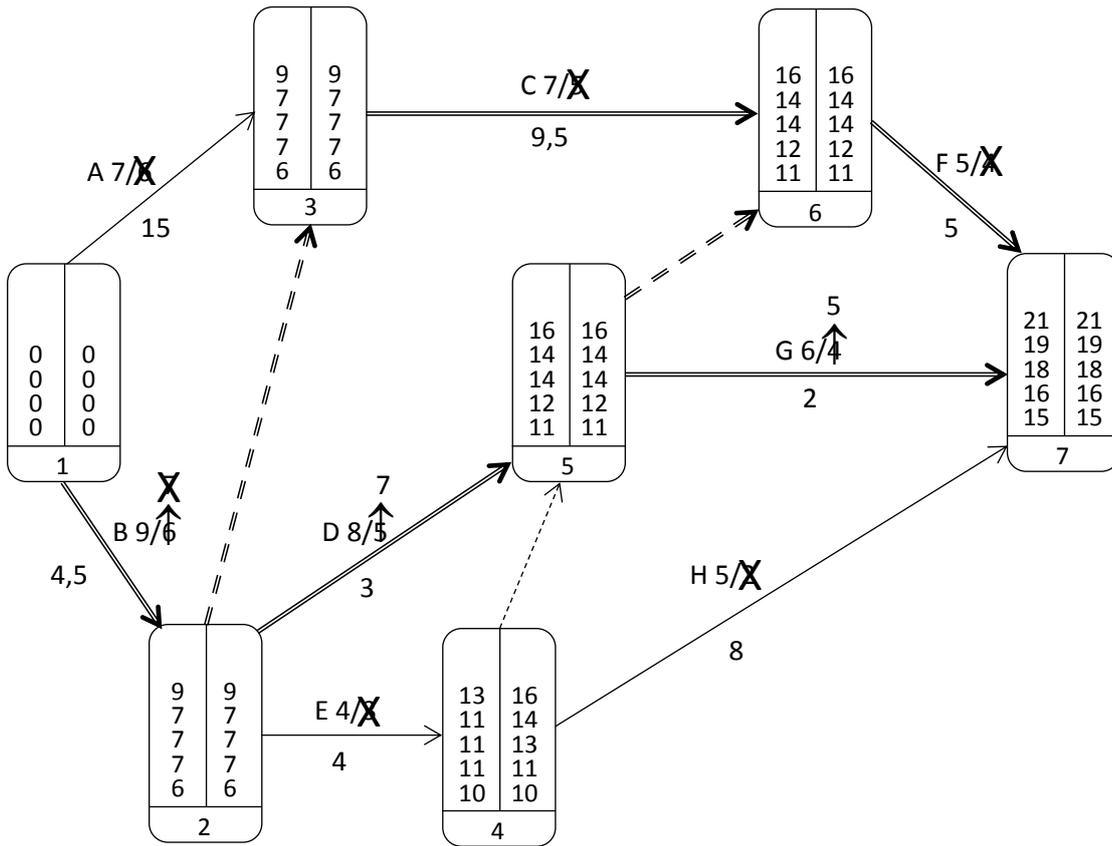


Figura 7.30

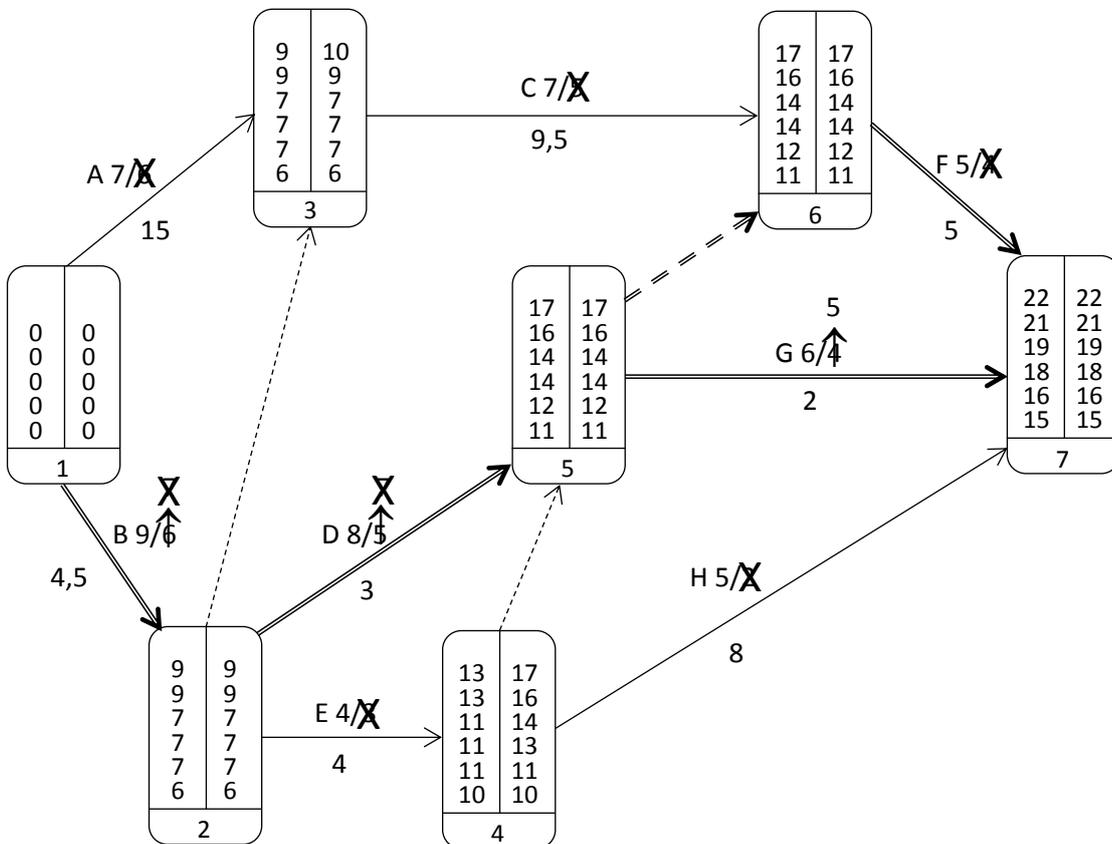


Figura 7.31

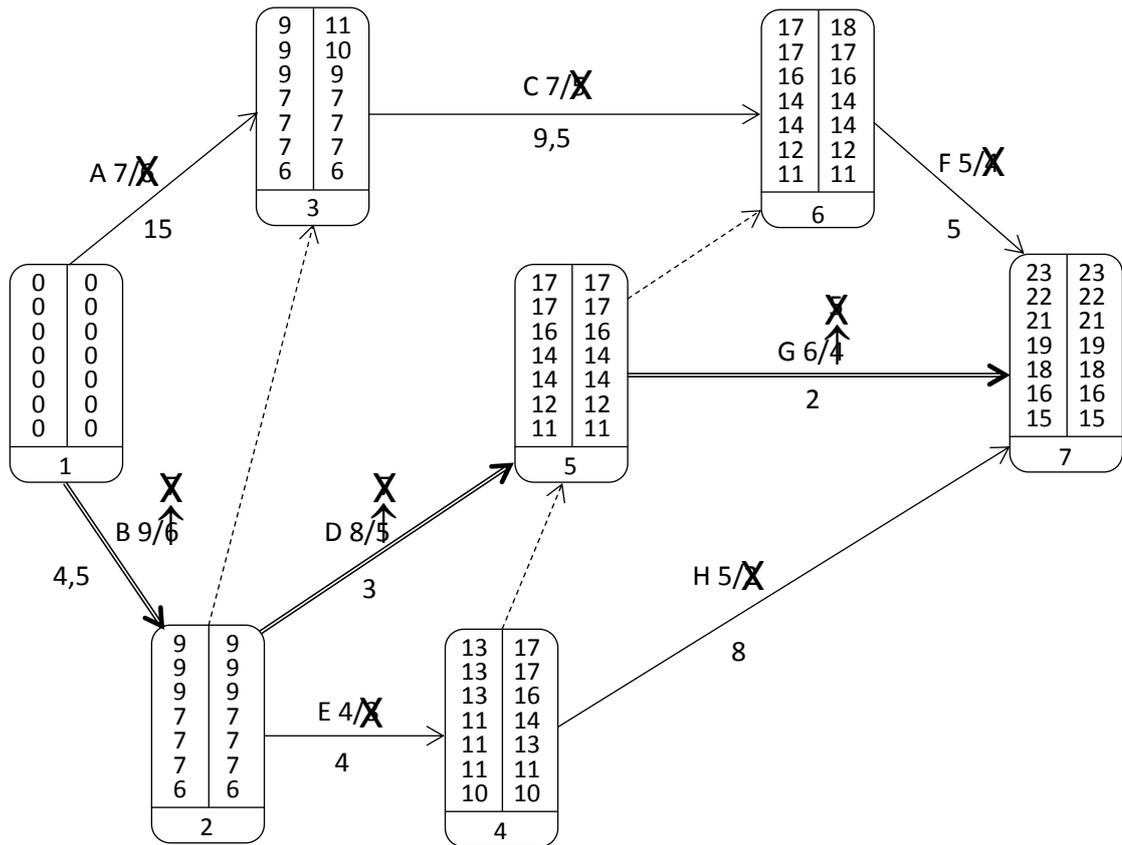


Figura 7.32

7.5.3. Determinación de la curva de costes directos mínimos partiendo de un Programa Intermedio. (Método combinatorio)

A veces, el programa inicial no coincide con el PN ni con el PA, sino que es otro intermedio entre estos dos. Es decir, es un programa donde puede haber actividades que se estén ejecutando en su tiempo acelerado junto a otras que se estén ejecutando en su tiempo normal y otras que se realizan en un tiempo entre el “ta” y el “tn”. En estos casos se procede, al igual que cuando partimos del PA, consumiendo holguras de manera previa y posteriormente, en un primer estadio, desacelerar el proyecto alargando la fecha final del mismo hasta llegar al programa normal y, en un segundo momento, partiendo de nuevo de la situación después del consumo de holguras, acelerar el proyecto reduciendo la fecha final del mismo hasta llegar al punto PE, es decir, hasta llegar al programa más económico que finalice en la misma fecha que el programa acelerado.

Ejemplo

Dado el proyecto representado en la figura 7.33, determinar la fecha óptima de realización del proyecto en el intervalo 18-22 y dibujar la curva de costes totales. Los coeficientes de costes vienen expresados en decenas de euros. Las actividades se están ejecutando en el tiempo marcado con un círculo. Los costes directos de este

programa ascienden a 45.000 euros. Si el proyecto finaliza en fecha 18 ó 19 se establece un premio de 2.000 euros y si acaba en fecha 21 ó 22 existe una penalización de 3.000 euros. Así mismo, los costes indirectos para cada una de las posibles fechas de finalización del proyecto son:

- Fecha 18 → CI = 1.000 euros.
- Fecha 19 → CI = 1.500 euros
- Fecha 20 → CI = 2.000 euros
- Fecha 21 → CI = 2.500 euros
- Fecha 22 → CI = 3.000 euros

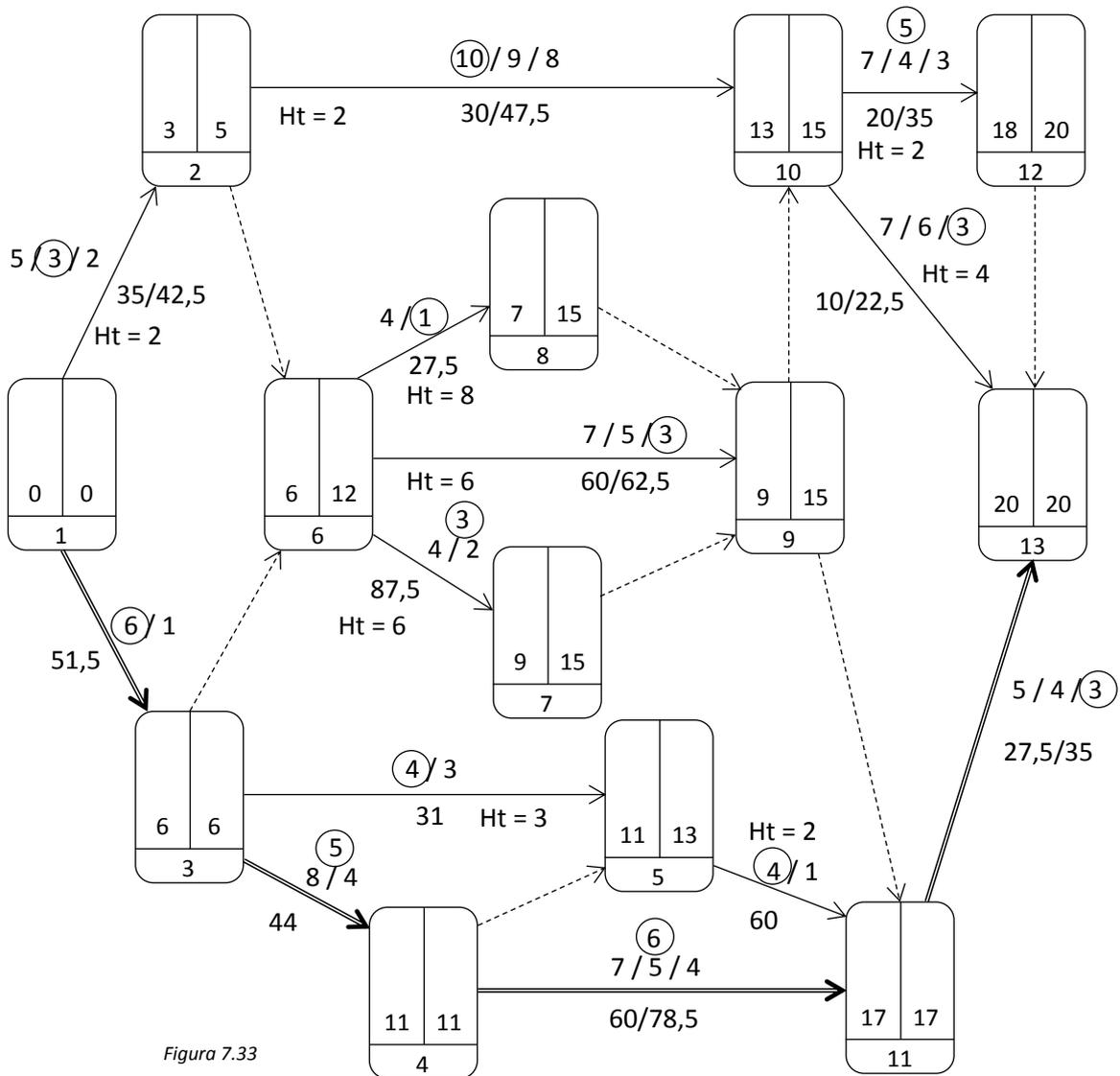


Figura 7.33

Para la resolución de este problema se siguen los siguientes pasos:

a) Consumir holguras para situarse en el programa más económico que finalice en fecha 20

Primera programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen $Ht = 8$ a $Ht = 6$.

· Alargar la duración de la activ. 6–8 en 2 fechas.

– $\Delta c = 2 \times 275 = 550$ euros

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.34.

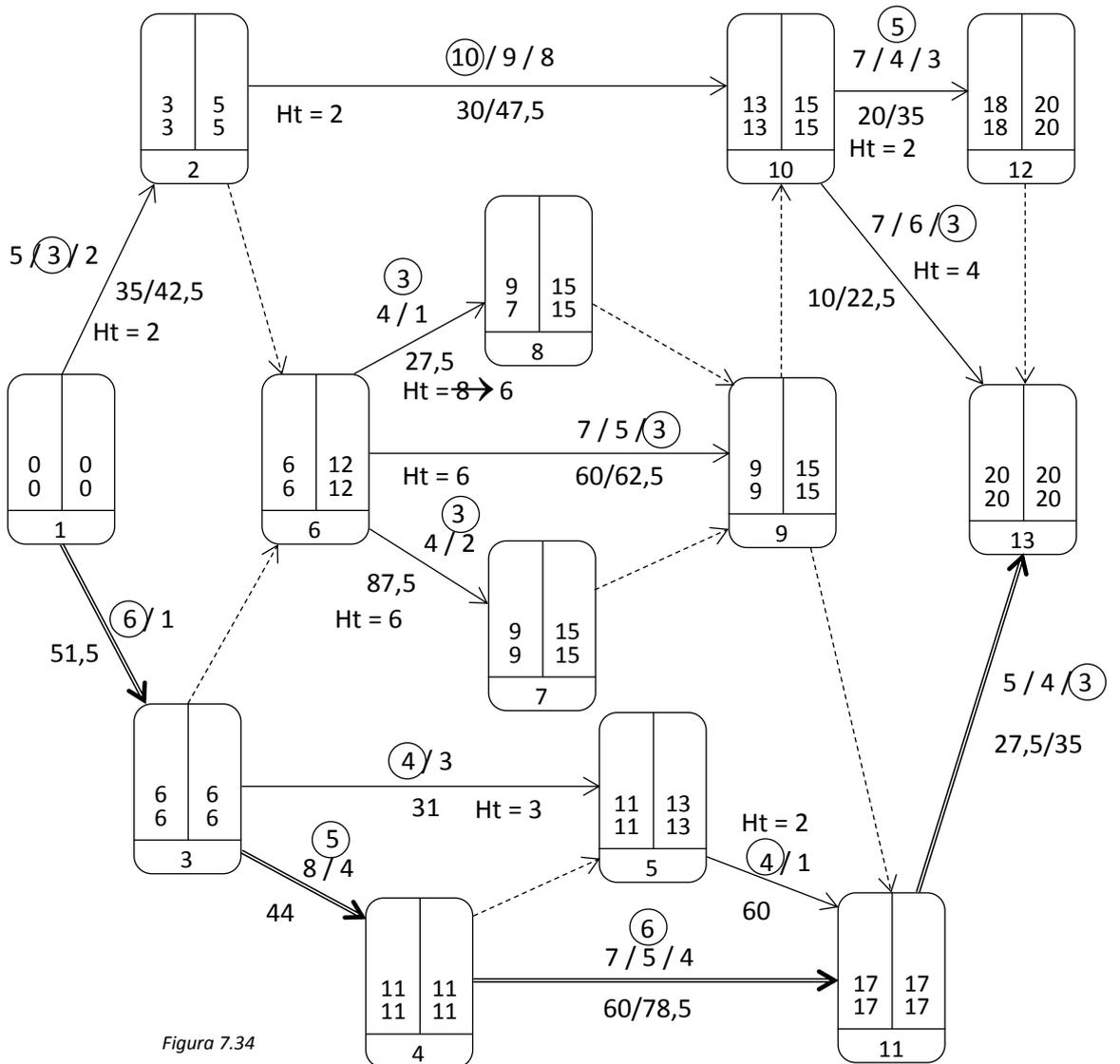


Figura 7.34

Segunda programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen $Ht = 6$ a $Ht = 4$.

· Alargar la duración de las activ. 6–8, 6–9 y 6–7 en 1 fecha.

– $\Delta c = 1.775$ euros

· Alargar la duración de las activ. 6–9 en 1 fecha.

– $\Delta c = 625$ euros

Las actividades 6—7 y 6—8 se quedan con Ht = 5, dado que no es posible alargar más su duración.

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.35.

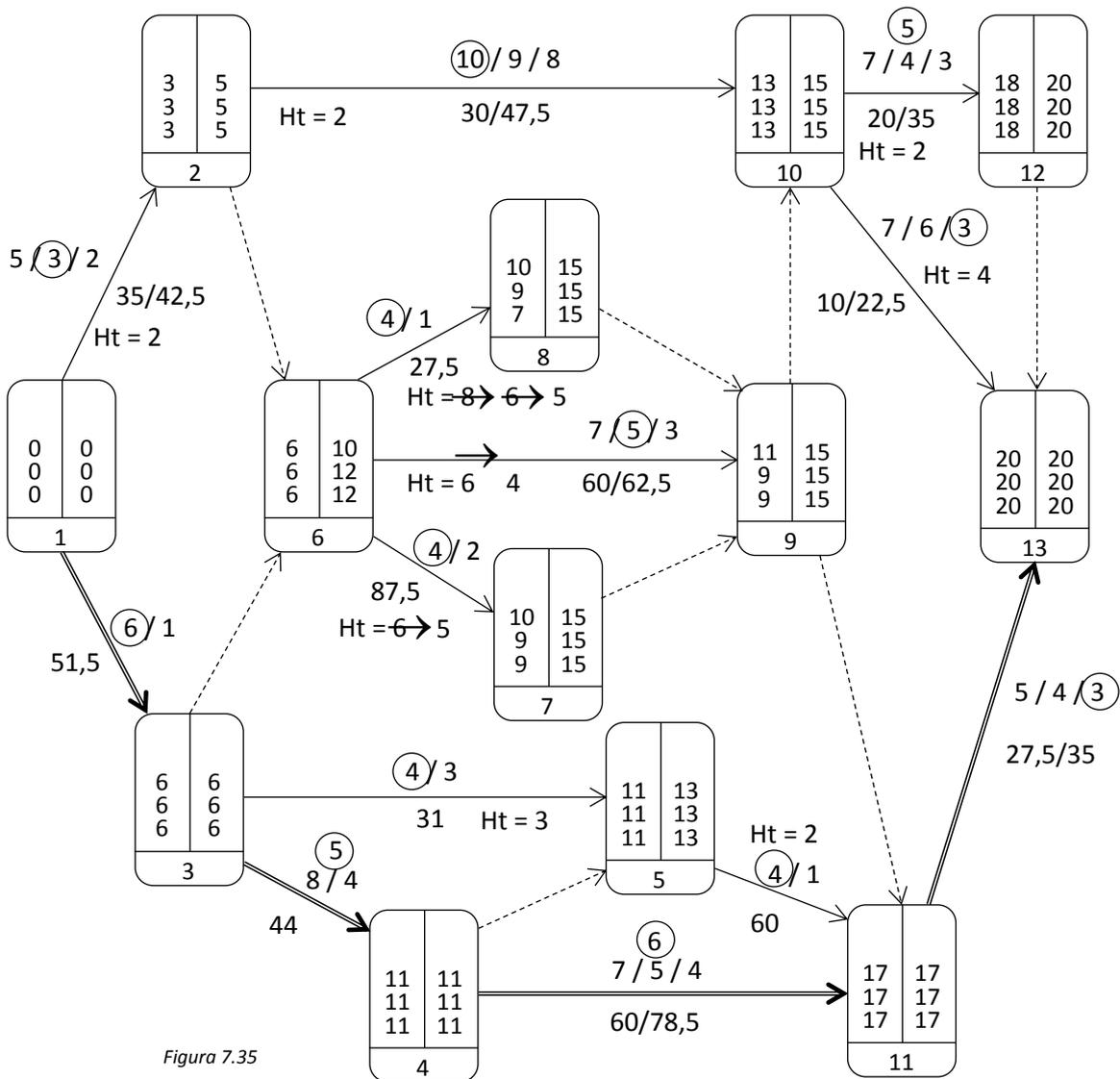


Figura 7.35

Tercera programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen Ht = 4 a Ht = 2.

- Alargar la duración de la activ. 6—9 y 10—13 en 2 fechas.
- $\Delta c = 2 \times 825 = 1.650$ euros.

La actividad 3—5 se queda con Ht = 3, puesto que no se puede alargar su duración.

La red resultante después de aplicar la tercera programación es la que aparece en la figura 7.36.

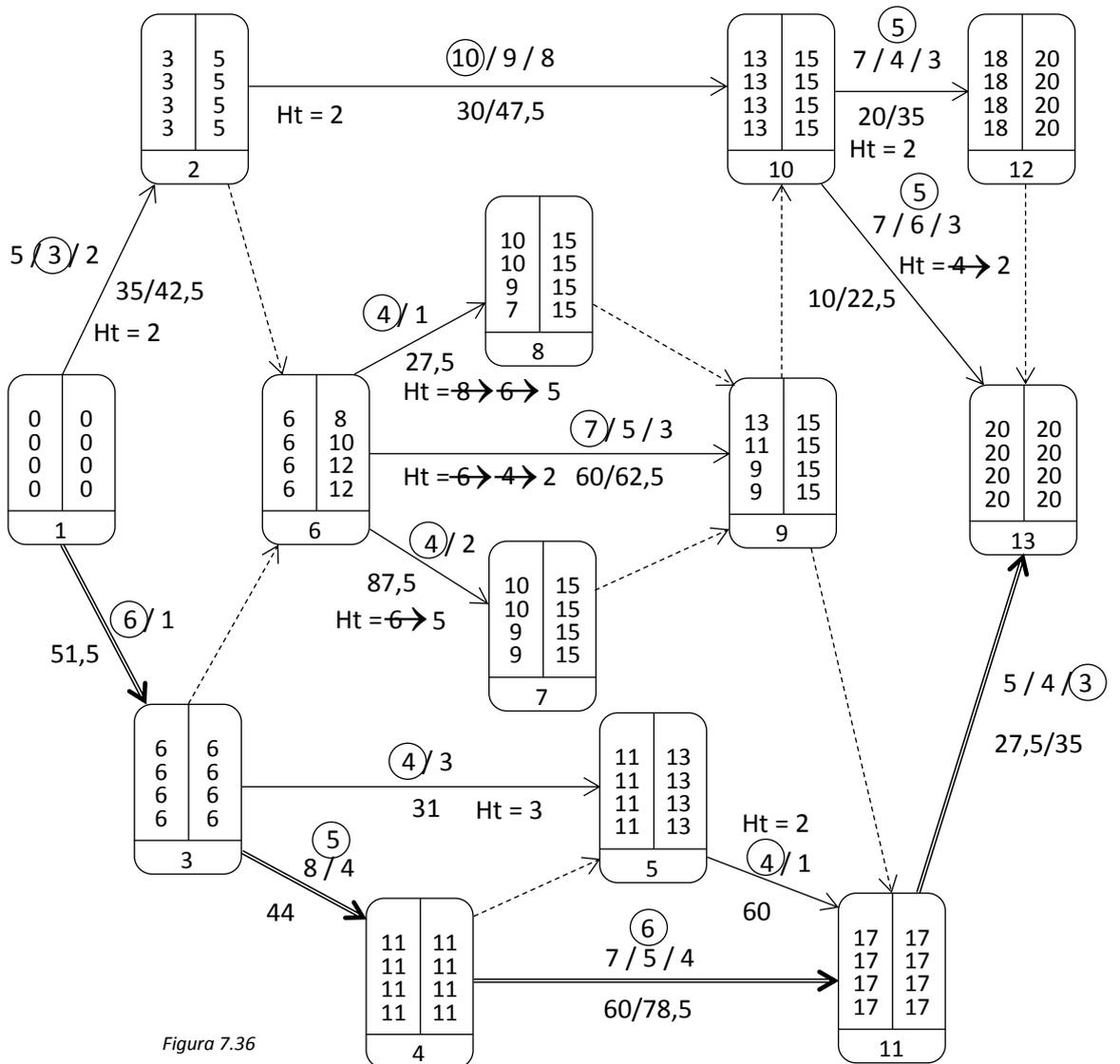


Figura 7.36

Cuarta programación. Objetivo: pasar las activ. que tienen Ht = 2 a Ht = 0.

- Alargar la duración de la activ. 10—12 y 10—13 en 1 fecha.
– $\Delta c = 425$ euros
- Alargar la duración de las activ. 1—2 en 1 fecha.
– $\Delta c = 350$ euros

La actividad 5—11 se queda con Ht = 2, debido a que no se puede alargar su duración. Por otro lado, las actividades 6—7 , 6—8 y 6—9 reducen su Ht en una fecha.

La red resultante después de aplicar la cuarta programación es la que aparece en la figura 7.37.

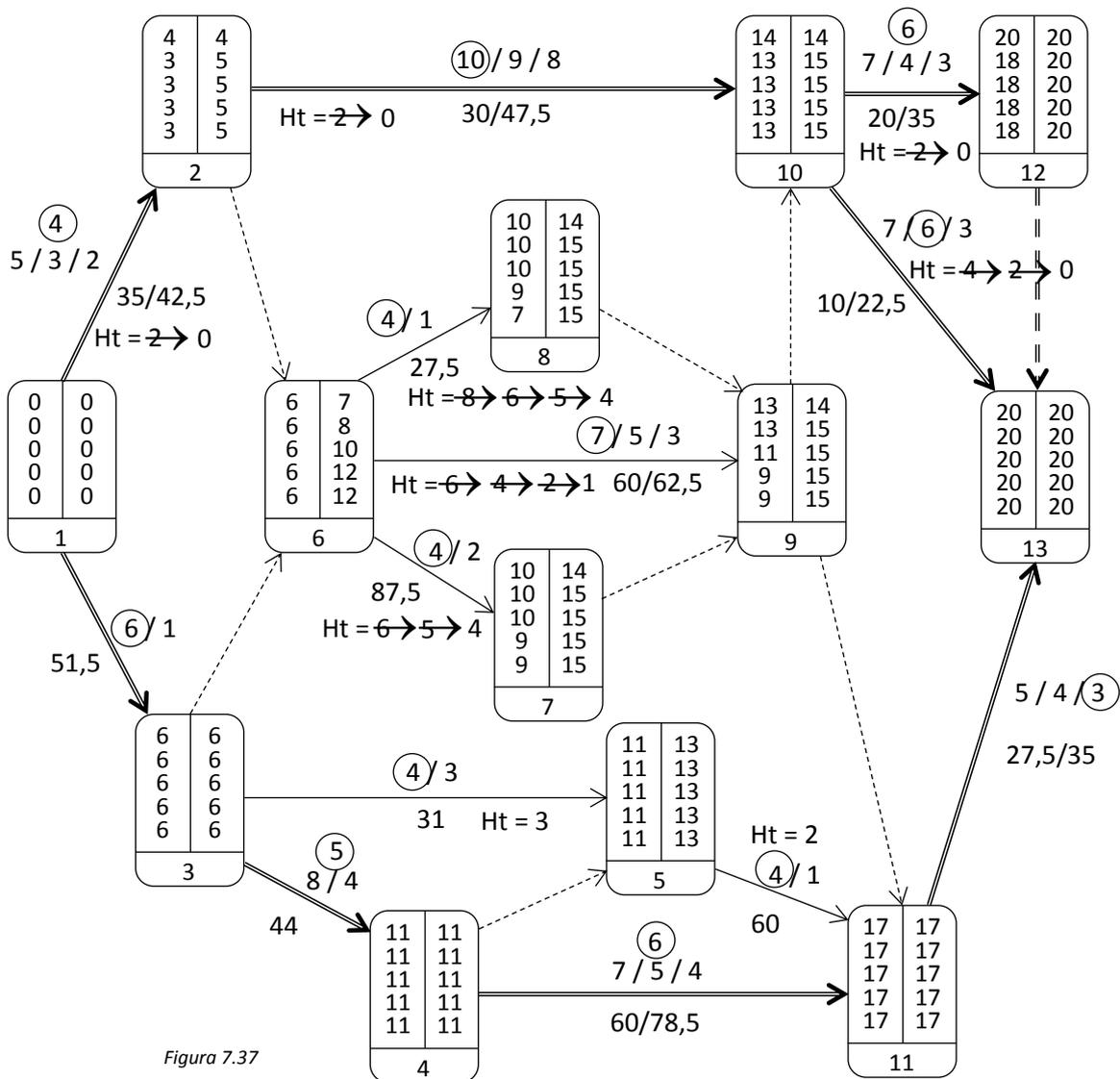


Figura 7.37

Con esta programación se concluye el proceso de consumo de holguras, aunque han quedado algunas actividades con holgura, pero no se puede disminuir más.

El decremento de coste total por consumo de holguras será:

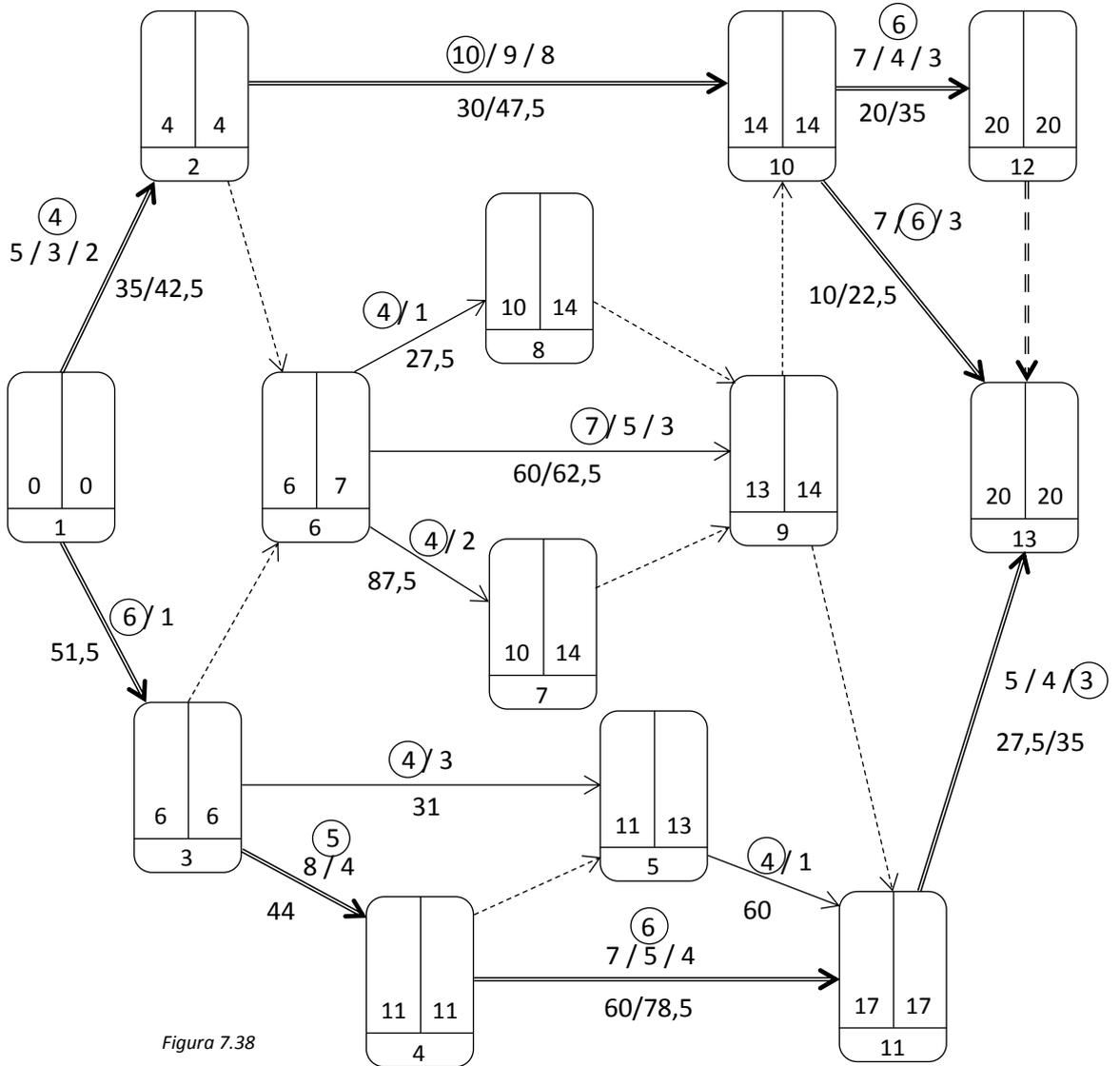
$$-\Delta c \text{ total cons. Holg.} = 5.375 \text{ euros}$$

El coste directo mínimo para fecha 20 importará:

$$C_{20} = 45.000 - 5.375 = 39.625 \text{ euros}$$

b) Alargar el Tprog del proyecto de fecha 20 a fecha 22

Para ello, partimos de la red que representa al programa más económico para fecha 20 (figura 7.38).



Primera programación

Alargar la duración de las actividades 1—2 y 4—11 en 1 fecha
 – $\Delta c = 950$ euros
 $C_{21} = 39.625 - 950 = 38.675$ euros

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.39.

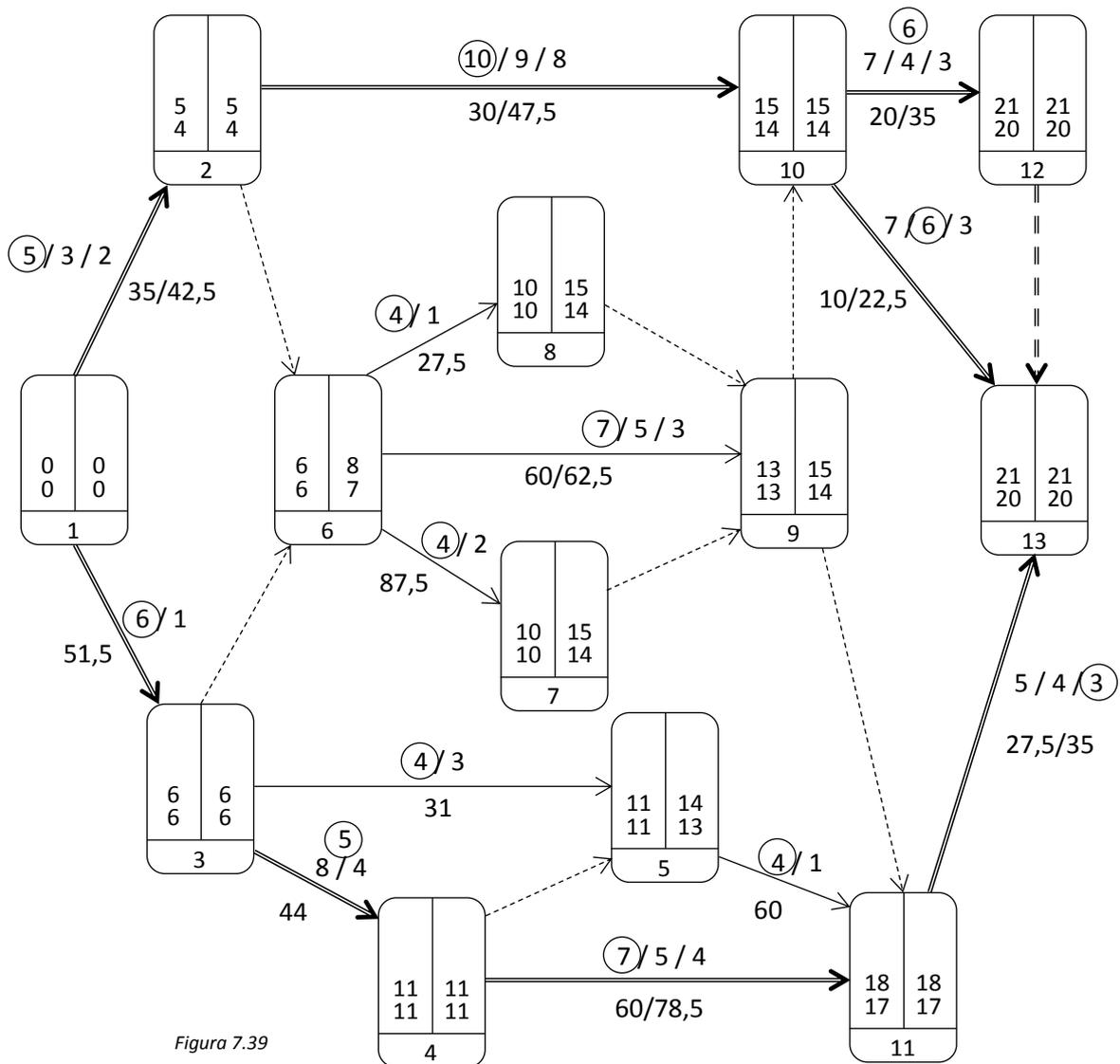


Figura 7.39

Segunda programación

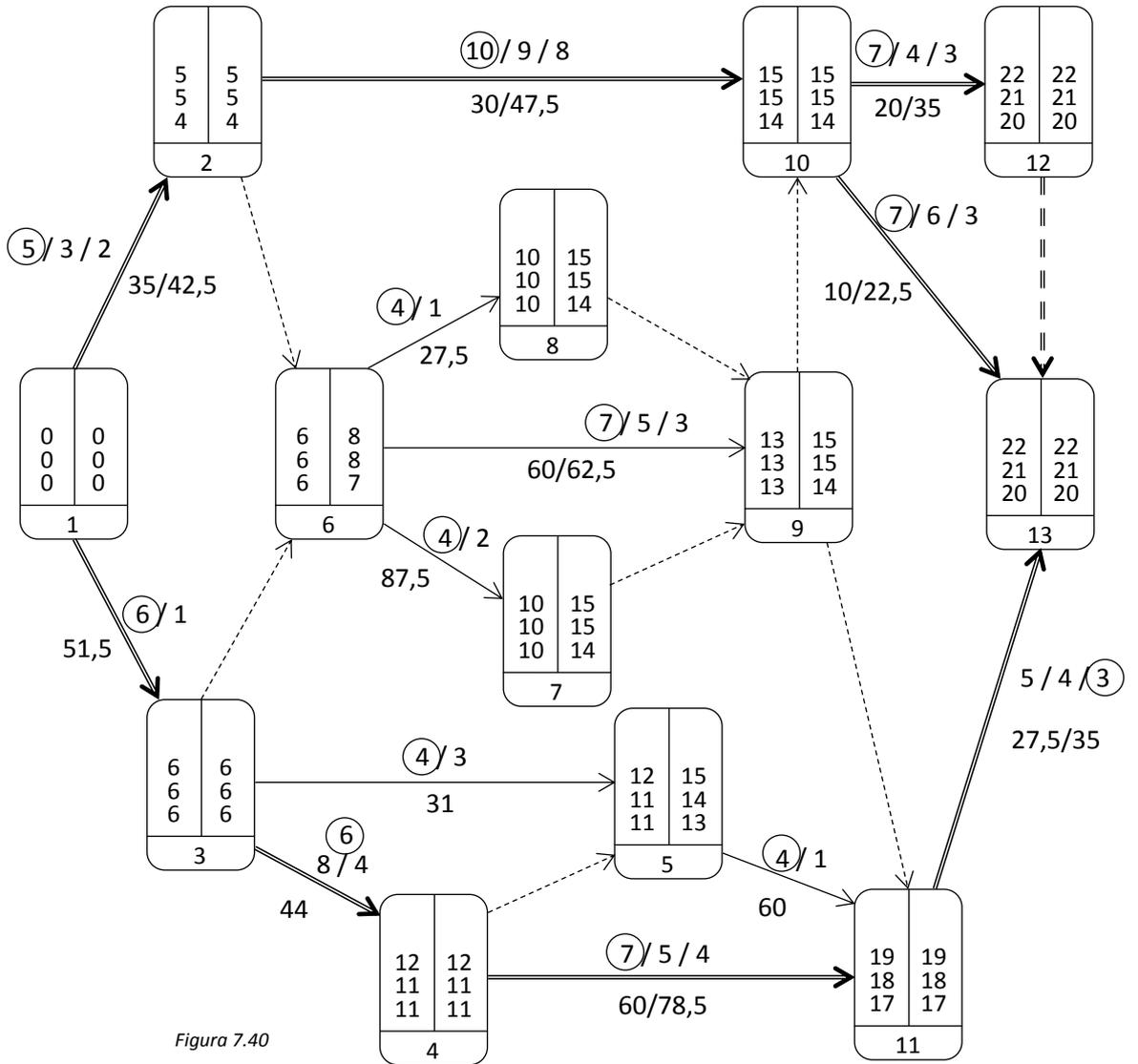
Alargar la duración de las actividades 10—12, 10—13 y 3—4 en 1 fecha
 – $\Delta c = 740$ euros

$$C22 = 38.675 - 740 = 37.935 \text{ euros}$$

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.40.

c) Reducir el Tprog del proyecto de fecha 20 a fecha 18

Para ello, partimos de nuevo de la red de la figura 7.38.



Primera programación

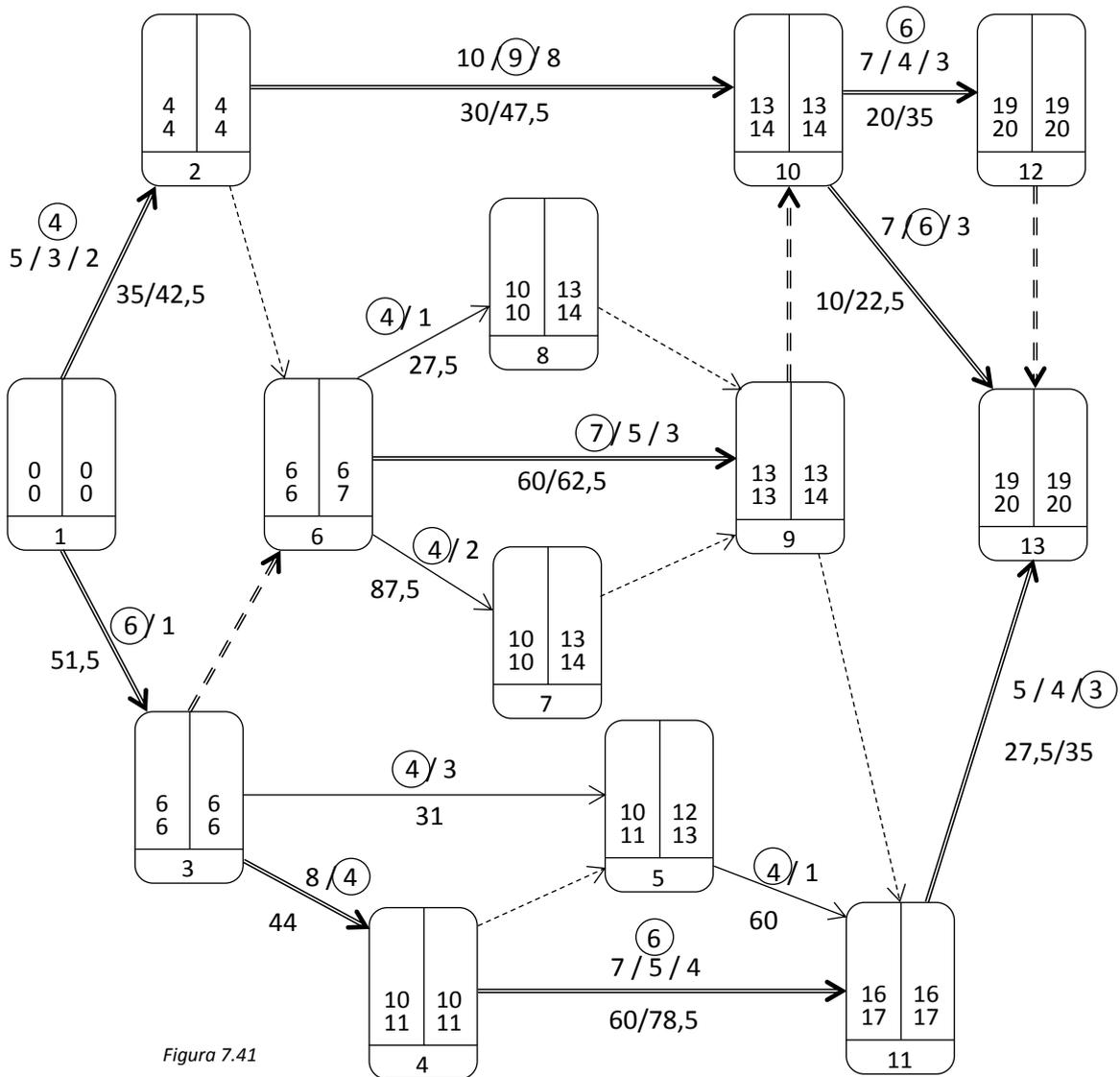
Reducir la duración de las actividades 2—10 y 3—4 en 1 fecha

$$\Delta c = 740 \text{ euros}$$

$$C_{19} = 39.625 + 740 = 40.365 \text{ euros}$$

Se hace crítico el camino 3 – 6 – 9 – 10

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.41.



Segunda programación

Reducir la duración de las actividades 1—2 y 1—3 en 1 fecha

$$\Delta c = 865 \text{ euros}$$

$$C_{18} = 40.3625 + 865 = 41.230 \text{ euros}$$

No aparecen nuevos caminos críticos.

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.42.

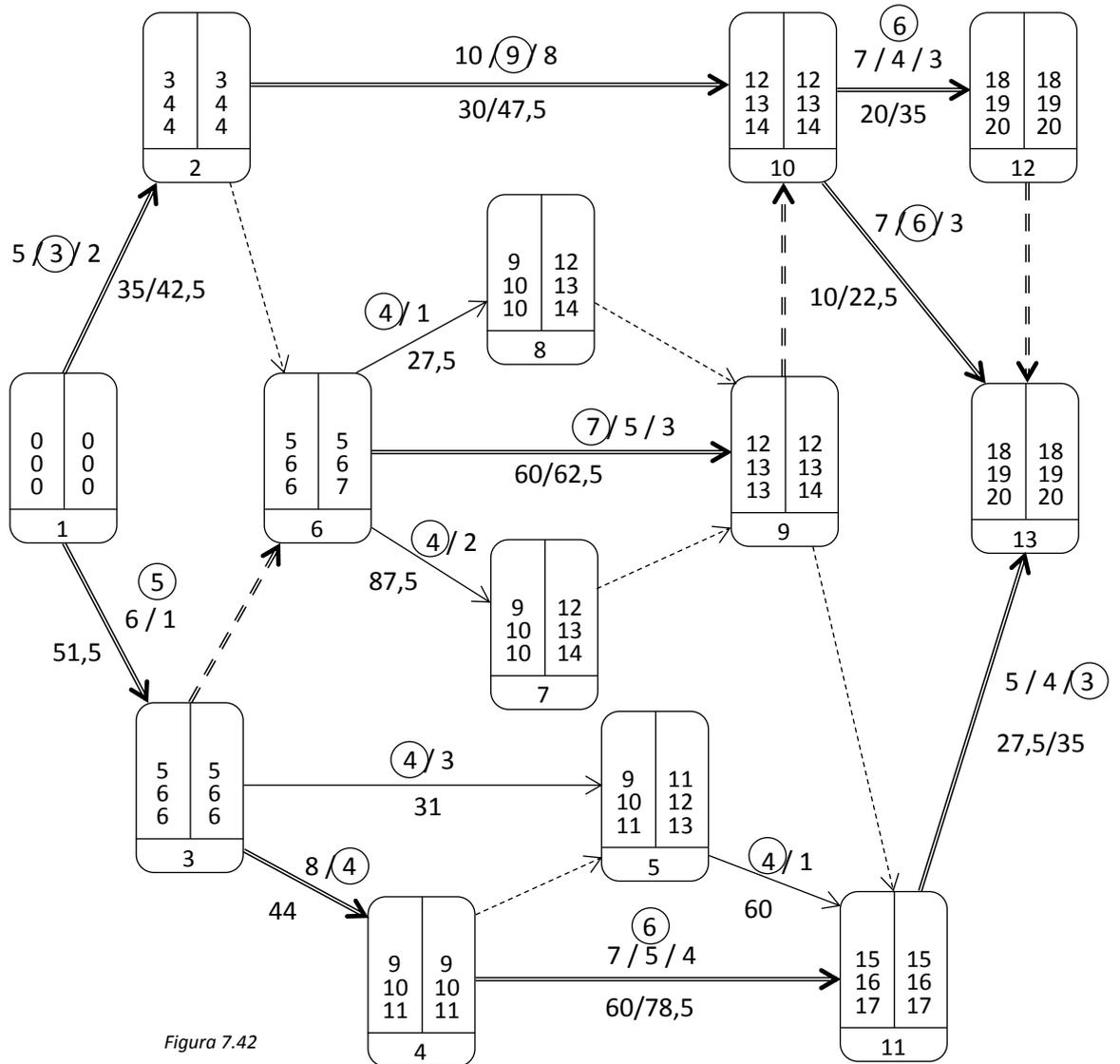


Figura 7.42

d) Determinar la fecha óptima de realización del proyecto

Sumando a los costes directos, obtenidos en las diferentes programaciones realizadas, los costes indirectos y afectándolos con los premios o penalizaciones que correspondan para cada una de las posibles fechas de finalización del proyecto, se obtiene el cuadro de la figura 7.43 donde se puede observar que el menor coste total asciende a 39.865 euros y se corresponde con fecha 19. Por lo tanto, esta fecha será la óptima.

e) Dibujar la curva de Costes Totales

Representando los datos obtenidos en la tabla anterior se obtiene la curva de costes totales reproducida en la figura 7.44.

| Fecha | C.D. | C.I. | P.P. | C.T. |
|-------|--------|-------|---------|--------|
| 18 | 41.230 | 1.000 | - 2.000 | 40.230 |
| 19 | 40.365 | 1.500 | - 2.000 | 39.865 |
| 20 | 39.625 | 2.000 | 0 | 41.625 |
| 21 | 38.675 | 2.500 | 3.000 | 44.175 |
| 22 | 37.935 | 3.000 | 3.000 | 43.935 |

ÓPTIMO

Figura 7.43

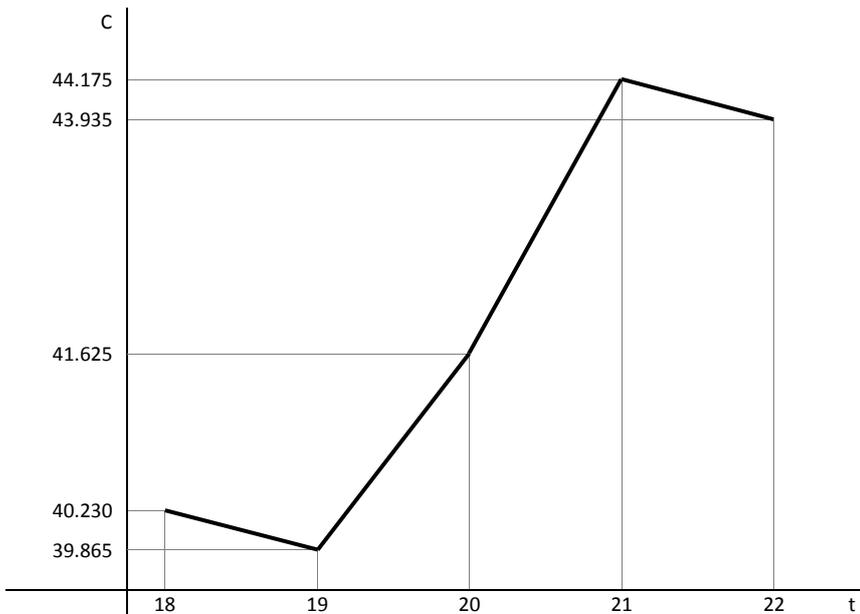


Figura 7.44

7.5.4. Casos complejos en el método combinatorio

Como se ha visto en los ejemplos anteriores, cuando se acelera un proyecto, reduciendo la duración de las actividades críticas, lo que suele ocurrir es que actividades que tienen holgura, la consumen y pasan a ser críticas. Sin embargo, en algunas ocasiones sucede justo lo contrario: actividades críticas que dejan de serlo. En estos casos, la programación resulta más compleja, dado que consistirá en reducir la duración de determinadas actividades críticas, a la vez que alargamos la duración de aquellas otras que, como consecuencia de lo anterior, han dejado de ser críticas. Es decir, le consumimos la holgura que han adquirido para que vuelvan a ser críticas, puesto que esto supone un decremento en los costes directos.

Ejemplo

Dada la red de la figura 7.45, que representa un proyecto que se está ejecutando en el Programa Normal, determinar los costes directos mínimos para cada una de las fechas comprendidas entre 19 y 24, sabiendo que los costes directos del PN ascienden a 24.000 euros y que los coeficientes de coste vienen dados en miles de euros.

Primera programación

- Reducir la duración de las actividades F e I en 2 fechas

$$\Delta c = 2 \times 700 = 1.400 \text{ euros}$$

$$C_{23} = 24.000 + 700 = 24.700 \text{ euros}$$

$$C_{22} = 24.700 + 700 = 25.400 \text{ euros}$$

Se hacen críticas las actividades A, E, R, H, V, Ñ, C, L, W, D y M

La red resultante después de aplicar la primera programación es la que aparece en la figura 7.46.

Segunda programación

- Reducir la duración de las actividades Q, B, D y L en 1 fecha

$$\Delta c = 2.600 \text{ euros}$$

Obsérvese que, al realizar esta programación, la actividad F deja de ser crítica. Por lo tanto, alargaremos la duración de esta actividad para consumir su holgura, obteniendo así un decremento del coste directo.

- Alargar la duración de la actividad F en 1 fecha

$$- \Delta c = 300 \text{ euros}$$

$$C_{21} = 25.400 + 2.600 - 300 = 27.700 \text{ euros}$$

Se hace crítica la actividad K.

La red resultante después de aplicar la segunda programación es la que aparece en la figura 7.47.

Tercera programación

- Reducir la duración de las actividades Q, B, D, L y K en 2 fechas

$$\Delta c = 2 \times 2.800 = 5.600 \text{ euros}$$

De nuevo se da la circunstancia de que la actividad F deja de ser crítica. Por ello, alargaremos la duración de dicha actividad.

- Alargar la duración de la actividad F en 1 fecha

$$- \Delta c = 300 \text{ euros}$$

$$C_{20} = 27.700 + 2.800 - 300 = 30.200 \text{ euros}$$

$$C_{19} = 30.200 + 2.800 = 33.000 \text{ euros}$$

La red resultante después de aplicar la tercera programación es la que aparece en la figura 7.48.

En resumen, los costes directos mínimos para cada una de las fechas a considerar son los siguientes:

$$\text{Fecha 24} \rightarrow \text{C.D.} = 24.000 \text{ euros}$$

$$\text{Fecha 23} \rightarrow \text{C.D.} = 24.700 \text{ euros}$$

$$\text{Fecha 22} \rightarrow \text{C.D.} = 25.400 \text{ euros}$$

$$\text{Fecha 21} \rightarrow \text{C.D.} = 27.700 \text{ euros}$$

$$\text{Fecha 20} \rightarrow \text{C.D.} = 30.200 \text{ euros}$$

$$\text{Fecha 19} \rightarrow \text{C.D.} = 33.000 \text{ euros}$$

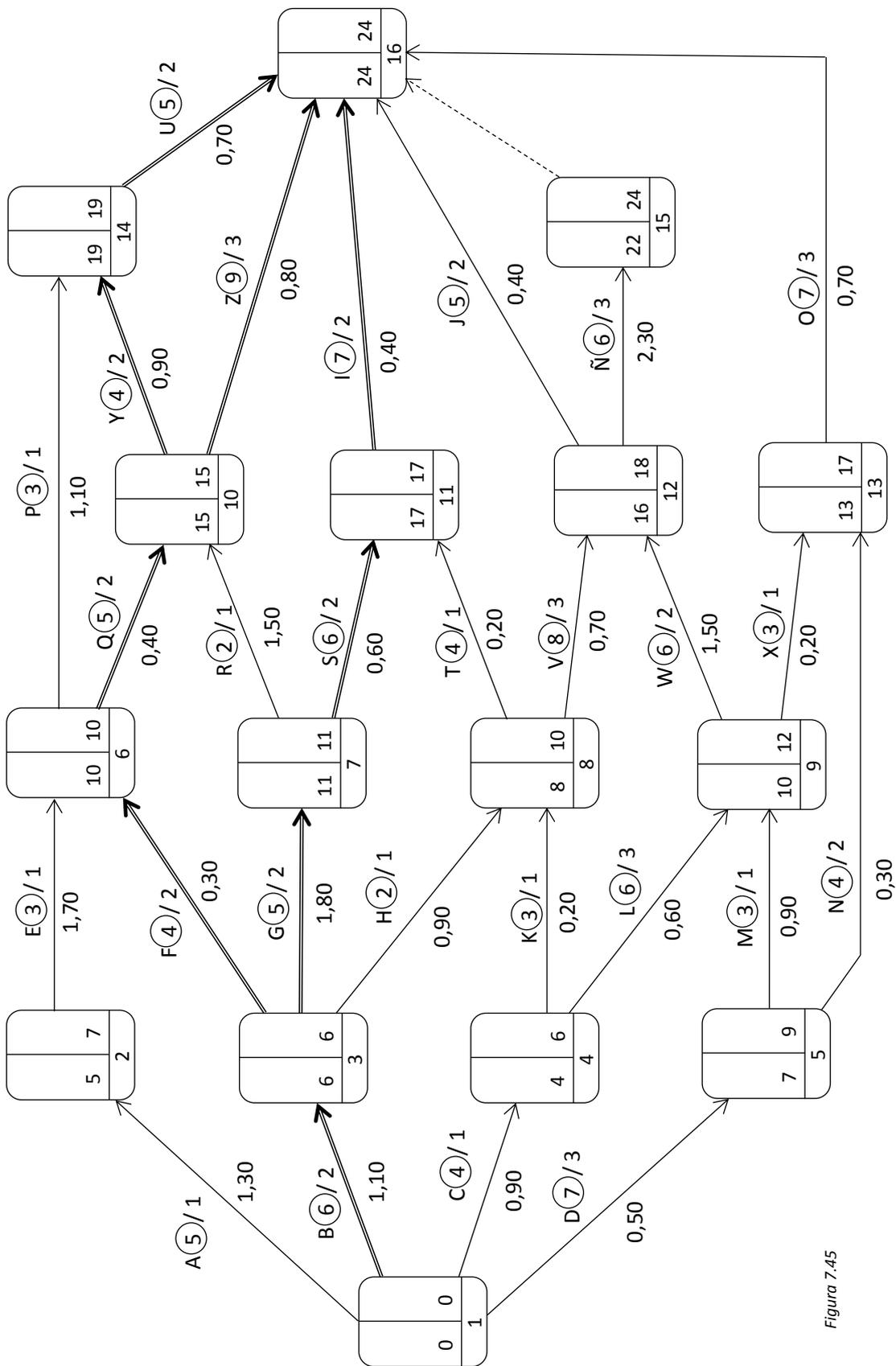


Figura 7.45

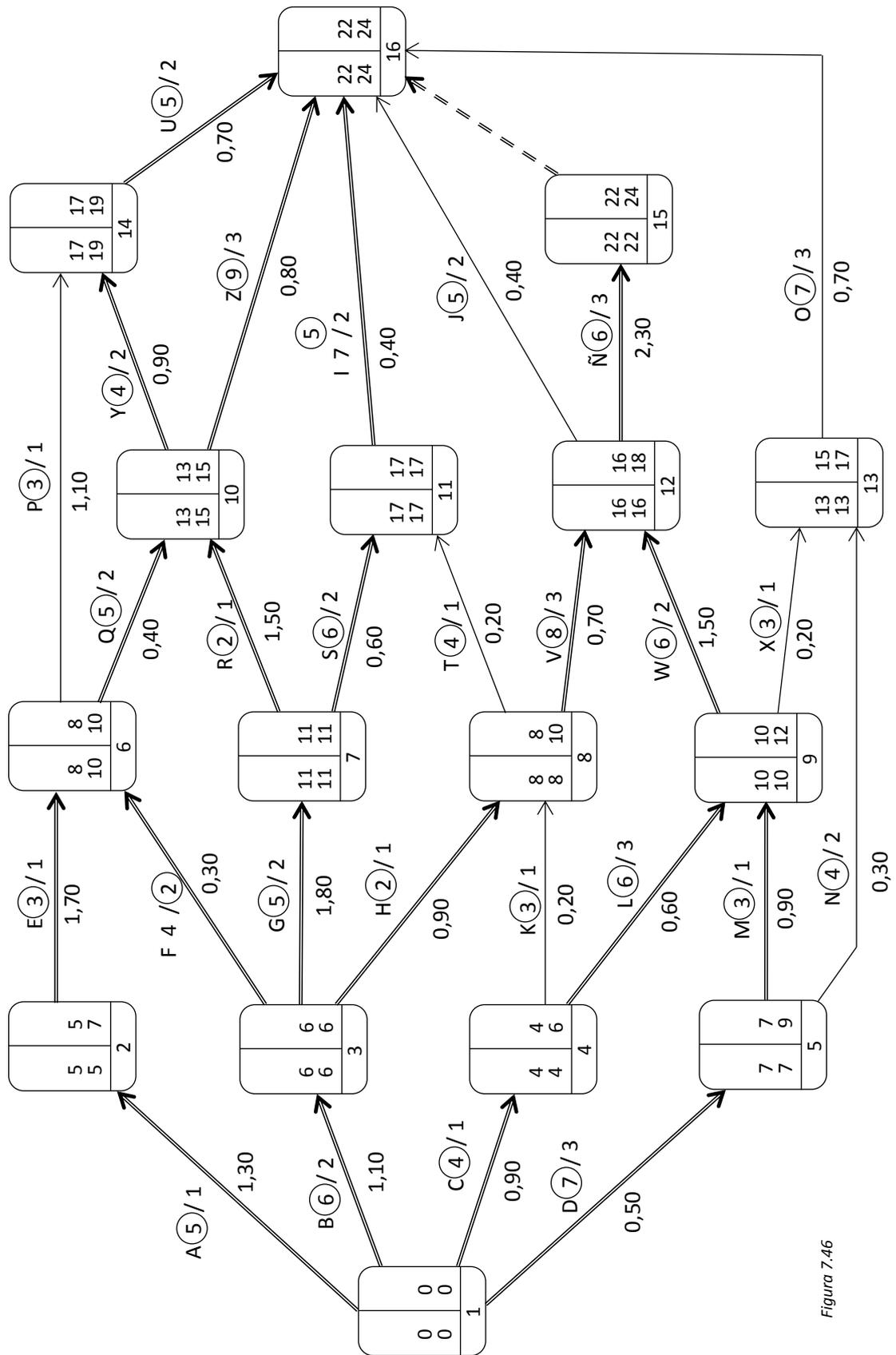


Figura 7.46

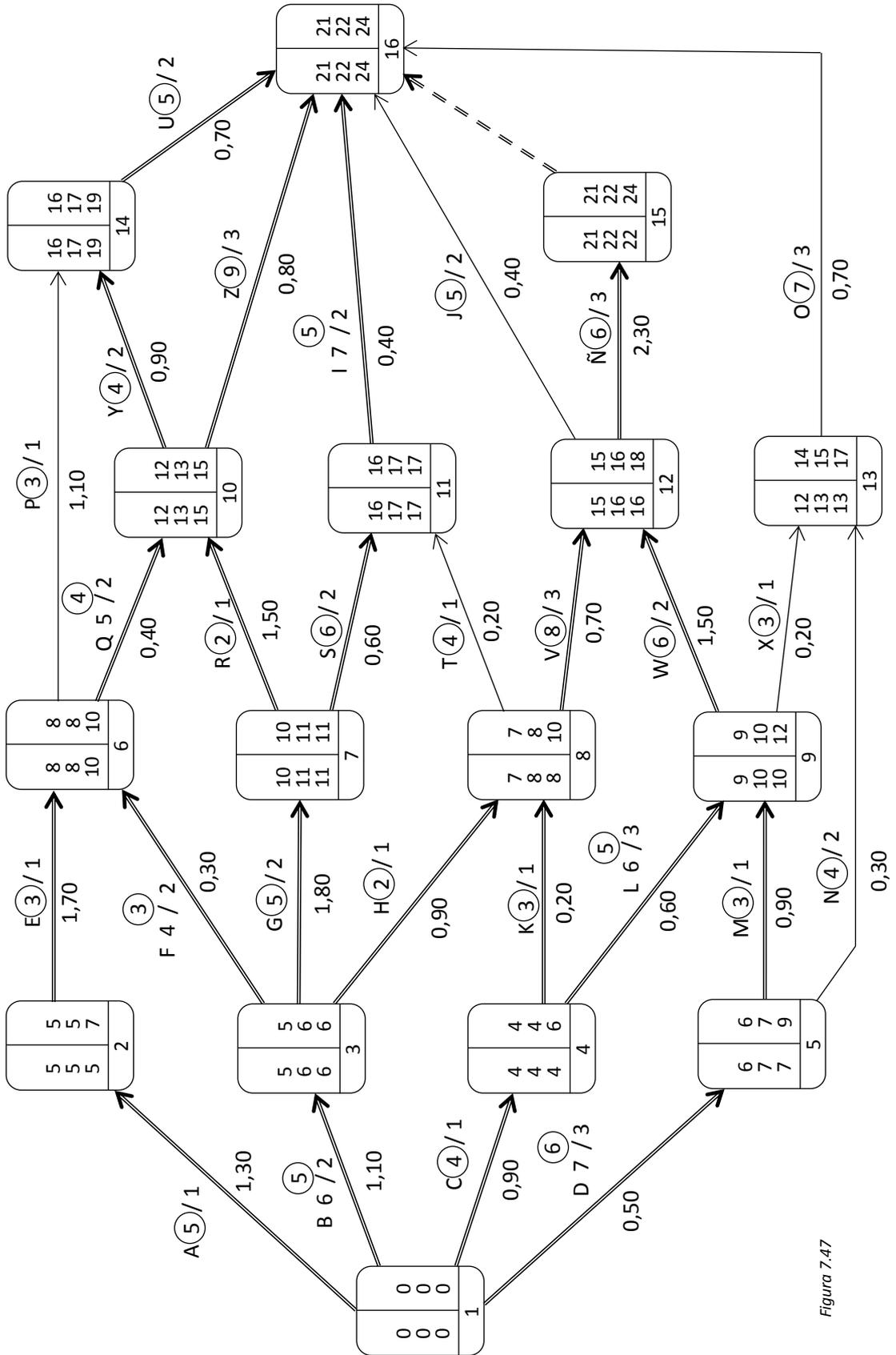


Figura 7.47

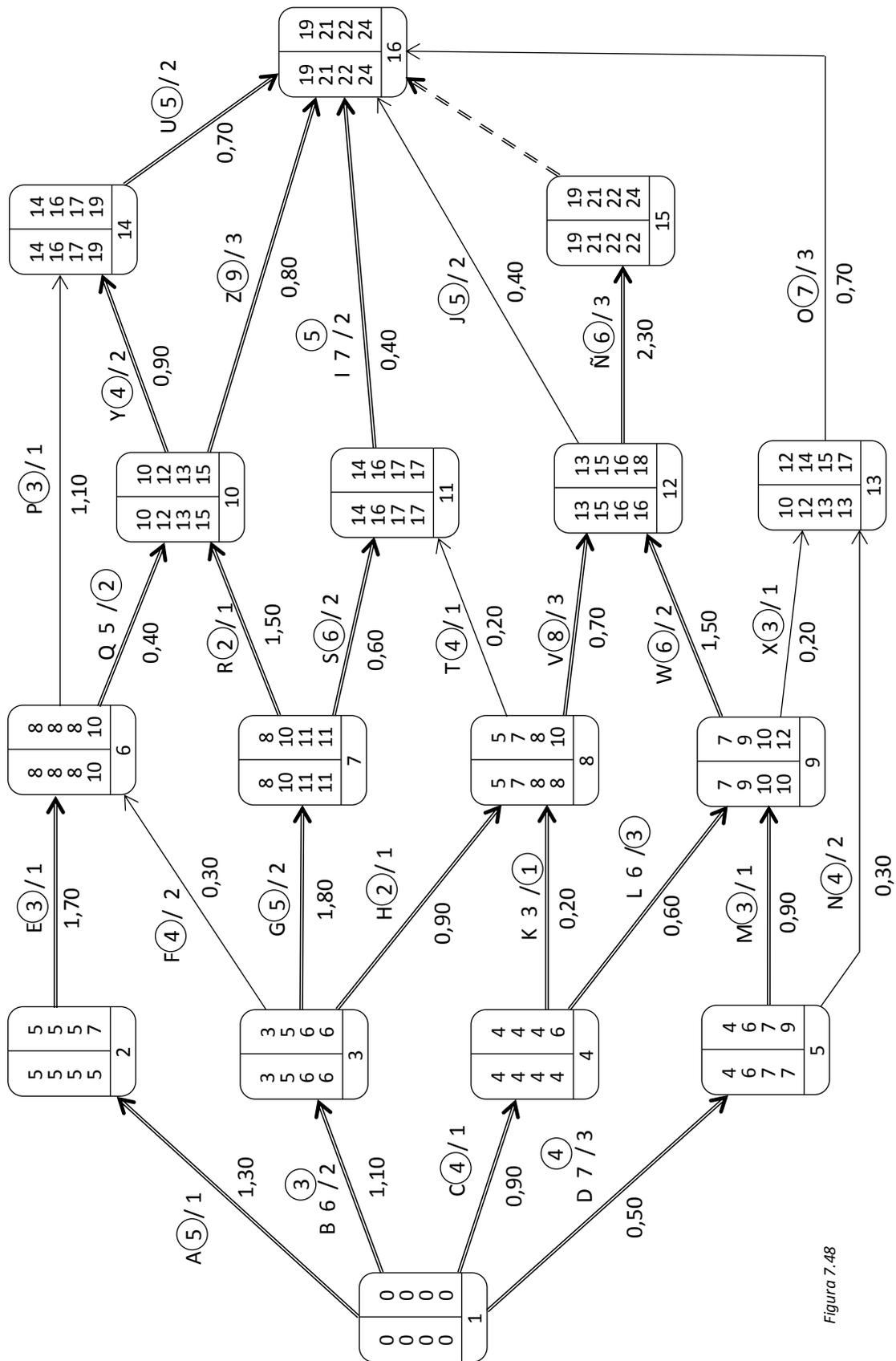


Figura 7.48

8. EL MÉTODO ROY O DE LOS POTENCIALES

En 1959 el francés Bernard Roy realizó la primera publicación sobre un método de programación denominado MPM o método de los potenciales. Un año más tarde presentó el método ya perfeccionado. El método Roy es muy similar al método Pert. Al igual que éste, descompone un proyecto en una serie de actividades o tareas ligadas entre sí mediante un conjunto de restricciones. El resultado es un grafo análogo al Pert pero con notables diferencias en cuanto a la forma de representar las actividades y las posibilidades de cálculo.

8.1. DIFERENCIAS ENTRE EL MÉTODO ROY Y EL MÉTODO PERT

La principal diferencia entre estos métodos radica en la forma de representar gráficamente las actividades que conforman el proyecto. Mientras que en el método Pert las actividades se construyen con flechas, en el método Roy se utilizan figuras geométricas, generalmente un cuadrado o un rectángulo. Así mismo, las relaciones de precedencia se manifiestan a través de los nudos o sucesos en el Pert y a través de restricciones, representadas mediante flechas, en el Roy.

Dicho de otra forma, tanto el método Pert como el método Roy están basados en la Teoría de Grafos, de manera que ambos tienen como origen el mismo grafo. Así, cuando los arcos del grafo se hacen corresponder con las actividades del proyecto y los nudos del grafo constituyen los sucesos, se obtiene una red Pert. En el caso contrario, es decir, cuando los nudos del grafo representan las actividades de un proyecto y mediante los arcos del grafo se manifiestan las relaciones de precedencias, se obtiene una red Roy. En la figura 8.1 se ofrece un resumen gráfico de estas diferencias.

| | PERT | | ROY | |
|-----------|----------|---|----------|---|
| | Elemento | Representación | Elemento | Representación |
| Actividad | Flecha |  | Nudo |  |
| Ligadura | Nudo |  | Flecha |  |

Figura 8.1

8.2. TIPOS DE RESTRICCIONES

Como se ha comentado anteriormente, una red ROY se construye con actividades y restricciones. La variedad de restricciones que se pueden aplicar hacen que este método sea más flexible que el PERT, siendo ésta una de las ventajas que presenta el método de los potenciales.

Básicamente existen tres tipos de restricciones:

A) De tipo Potencial, que se dividen en:

A.1) Restricciones de sucesión, que a su vez se dividen en:

A.1.1) Restricciones de posterioridad mínima.

A.1.2) Restricciones de posterioridad máxima

A.2) Restricciones de localización temporal

B) De tipo Disyuntivo

C) De tipo Acumulativo

8.2.1. Restricciones de tipo potencial

8.2.1.1. Restricciones de Sucesión

Estas restricciones son las que se utilizan para indicar las prelación entre las actividades y, por consiguiente, constituyen las restricciones básicas para representar una red Roy. Con ellas, se acota el tiempo que debe transcurrir entre el comienzo de dos actividades. Pueden ser:

De posterioridad mínima

Indican que entre el comienzo de una actividad A y el comienzo de una actividad B, debe transcurrir como mínimo un tiempo "Ta", que coincide con la duración de la actividad A. Se representa mediante una flecha que parte de la actividad A y llega a la actividad B, como se observa en la figura 8.2, significando que la actividad A precede a la actividad B.

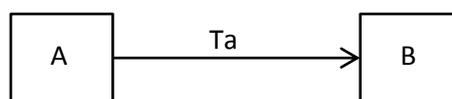


Figura 8.2

De posterioridad máxima

Señalan que entre el comienzo de una actividad A y el comienzo de una actividad D, debe transcurrir como máximo un tiempo igual a “Tda”. Se representa mediante una flecha que parte de la actividad D y llega a la actividad A (figura 8.3). El valor de esta restricción es igual a “Tda” pero con signo negativo. Para que una restricción de posterioridad máxima pueda considerarse como tal ha de cumplirse que “Tda” debe ser mayor o igual que la duración del camino más largo que exista entre las actividades A y D. En nuestro ejemplo:

$$T_{da} \geq T_a + T_b + T_c$$

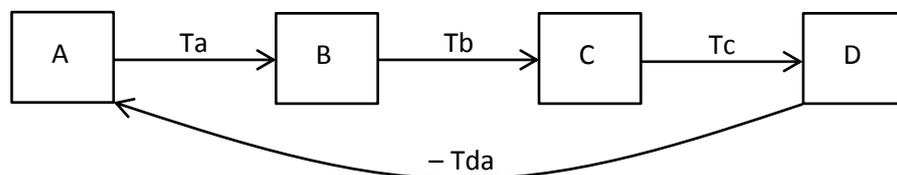


Figura 8.3

8.2.1.2. Restricciones de localización temporal

Son aquellas restricciones que ubican a las actividades de un proyecto en un tiempo determinado. Así, obligan a que una actividad finalice con anterioridad o posterioridad a una fecha determinada, o también, a que dicha actividad comience antes o después de una fecha concreta.

8.2.2. Restricciones de tipo disyuntivo

Este tipo de restricciones aparece cuando dos o más actividades requieren para su ejecución de un mismo recurso y éste carece de capacidad suficiente para atender, de manera simultánea, el desarrollo de dichas tareas. Es decir, cuando dos o más actividades no se pueden ejecutar de manera simultánea, al no existir recursos suficientes para ello. La situación se resuelve haciendo que el desarrollo de dichas actividades no coincida en el tiempo. Esto se consigue introduciendo en la red nuevas restricciones de posterioridad mínima entre aquellas actividades que no se puedan ejecutar de manera simultánea.

8.2.3. Restricciones de tipo acumulativo

Estas restricciones se emplean cuando existen limitaciones en la disponibilidad de recursos o cuando en determinadas fechas se acumula una gran demanda de recursos, frente a otras fechas en la que la demanda es bastante inferior o nula, dando como

resultado un perfil del recurso con una distribución desequilibrada. En el capítulo III se tratará más detalladamente este tipo de restricciones.

8.3. RELACIONES ENTRE LAS ACTIVIDADES

Al igual que en el método Pert, las relaciones existentes entre las actividades de un proyecto representado por el método Roy, pueden ser de tipo lineal (figura 8.4), de convergencia (figura 8.5), de divergencia (figura 8.6) y de convergencia-divergencia (figura 8.7).

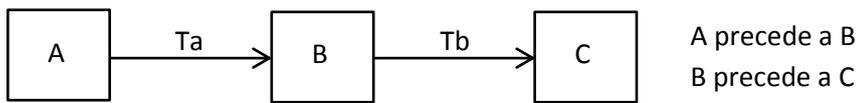


Figura 8.4

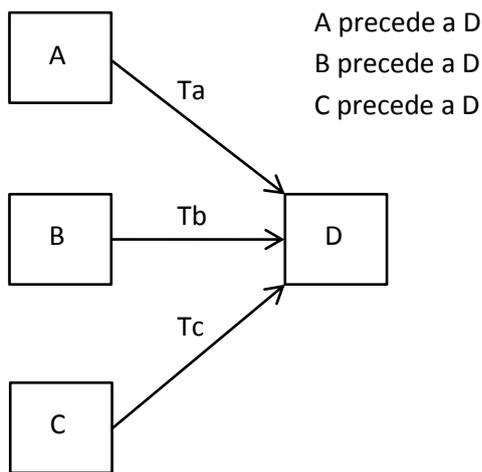


Figura 8.5

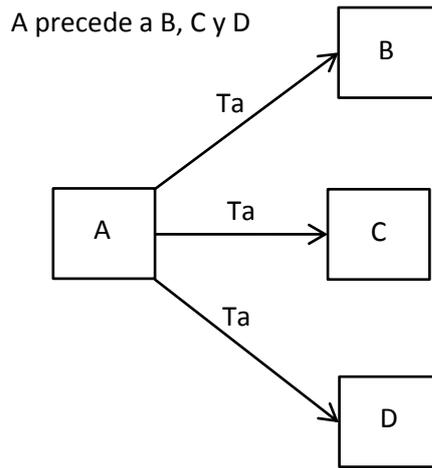


Figura 8.6

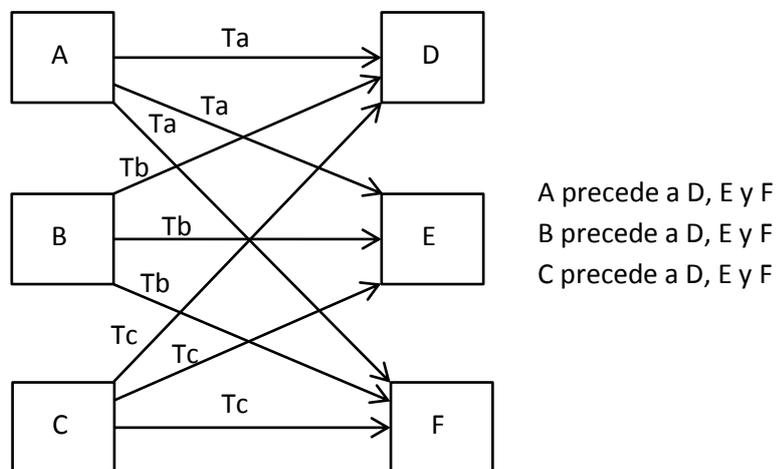


Figura 8.7

8.4. TRAZADO DE LA RED ROY

De manera análoga a lo estudiado en el apartado 6.6, para la obtención de una red Roy seguiremos los siguientes pasos:

- a) Representar las relaciones de precedencia entre las actividades de forma matricial, bien utilizando la matriz de ascendencia o bien la de descendencia.
- b) Realizar la descomposición en niveles.
- c) Ordenar los niveles obtenidos.
- d) Dibujar la representación gráfica de la descomposición en niveles.
- e) Dibujar la red Roy.

Ejemplo

| | |
|-----------------------------------|---------------|
| La activ. A precede a F-H-I-K-L-M | duración = 4 |
| La activ. B precede a C-D-G-L-M-N | duración = 5 |
| La activ. C precede a E-J-L-M-N | duración = 4 |
| La activ. D precede a F-J-N | duración = 7 |
| La activ. E precede a F | duración = 8 |
| La activ. F precede a ----- | duración = 5 |
| La activ. G precede a F-J | duración = 8 |
| La activ. H precede a K | duración = 6 |
| La activ. I precede a K-M | duración = 3 |
| La activ. J precede a F | duración = 6 |
| La activ. K precede a M | duración = 2 |
| La activ. L precede a F-M | duración = 6 |
| La activ. M precede a ----- | duración = 3 |
| La activ. N precede a F | duración = 10 |

a) Representar las relaciones de precedencia entre las actividades de forma matricial

Para ello, se utilizará la matriz de ascendencia de la figura 8.8.

| | | ASCENDIENTES | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
| DESCENDIENTES | A | | | | | | | | | | | | | | |
| | B | | | | | | | | | | | | | | |
| | C | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | D | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | E | | | 1 | | | | | | | | | | | |
| | F | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 |
| | G | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| | H | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | I | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| | J | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | |
| | K | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | | | |
| | L | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | M | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 1 | | 1 | 1 | |
| | N | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |

Figura 8.8

b) Realizar la descomposición en niveles

Se lleva a efecto obteniendo tanto vectores columnas como sean necesarios. En nuestro ejemplo, como aparece en la figura 8.9, se han obtenido cuatro niveles.

| | | ASCENDIENTES | | | | | | | | | | | | | | Vector | | | |
|---------------|---|--------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | V ₁ | V ₂ | V ₃ | V ₄ |
| DESCENDIENTES | A | | | | | | | | | | | | | | | 0 | -- | -- | -- |
| | B | | | | | | | | | | | | | | | 0 | -- | -- | -- |
| | C | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | D | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | E | | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | 0 | -- |
| | F | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | | 1 | 7 | 6 | 4 | 0 |
| | G | | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | H | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | I | 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | -- | -- |
| | J | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | 3 | 3 | 0 | -- |
| | K | 1 | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | 3 | 2 | 0 | -- |
| | L | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | 3 | 1 | 0 | -- |
| | M | 1 | 1 | 1 | | | | | | 1 | | 1 | 1 | | | 6 | 4 | 2 | 0 |
| | N | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 3 | 2 | 0 | -- |

| | | | |
|-------|----|-----|----|
| A | C | E | F |
| B | D | J | M |
| | G | K | |
| | H | L | |
| | I | N | |
| NIVEL | | | |
| I | II | III | IV |

Figura 8.9

c) Ordenar los niveles obtenidos

Como la matriz utilizada es la de ascendencia, los niveles se ordenan de menor a mayor en el mismo orden en que se han ido obteniendo.

d) Dibujar la representación gráfica de la descomposición en niveles

Cada uno de los niveles obtenidos se representa mediante una línea vertical con trazo discontinuo. En cada nivel, las actividades se mostrarán a través de nudos. Finalmente, se marcarán las prelación existentes entre las actividades, expresando únicamente

las precedencias inmediatas y eliminando las precedencias por transitividad, como se reproduce en la figura 8.10.

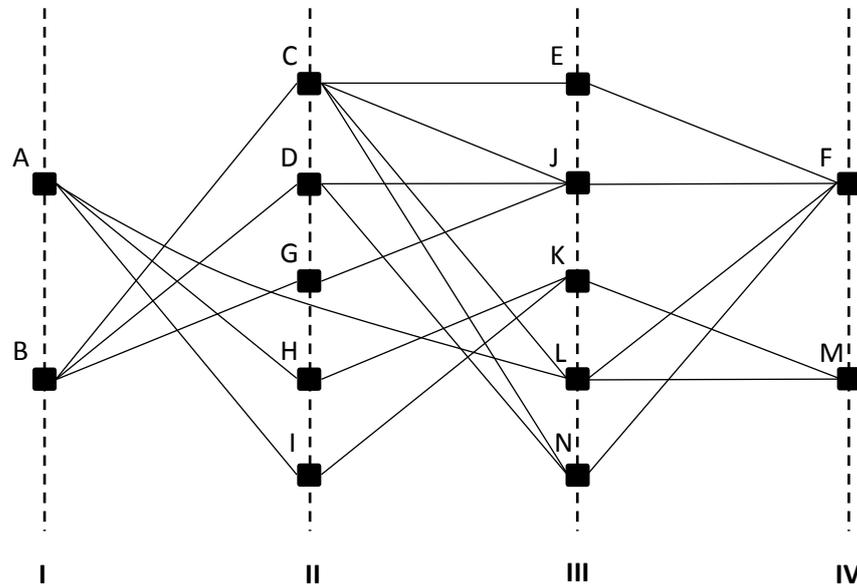


Figura 8.10

e) Dibujar la red Roy

Se dibujan en primer lugar las actividades que se encuentran en el nivel I y, posteriormente, se va completando la red con las actividades siguientes, relacionándolas mediante restricciones de posterioridad mínima. Como se puede observar en la figura 8.11 el trazado es más fácil que en las redes Pert, puesto que no es necesario introducir actividades ficticias. No obstante, para facilitar los cálculos, se suelen incluir dos actividades ficticias, una al principio de la red y otra al final, que constituirán la actividad inicial de la red, denominada actividad alfa (α), y la actividad final de la misma, denotada como actividad omega (ω). La actividad α precederá a aquellas actividades que no tienen ascendientes, mientras que la actividad ω será la siguiente de aquellas que carezcan de descendientes.

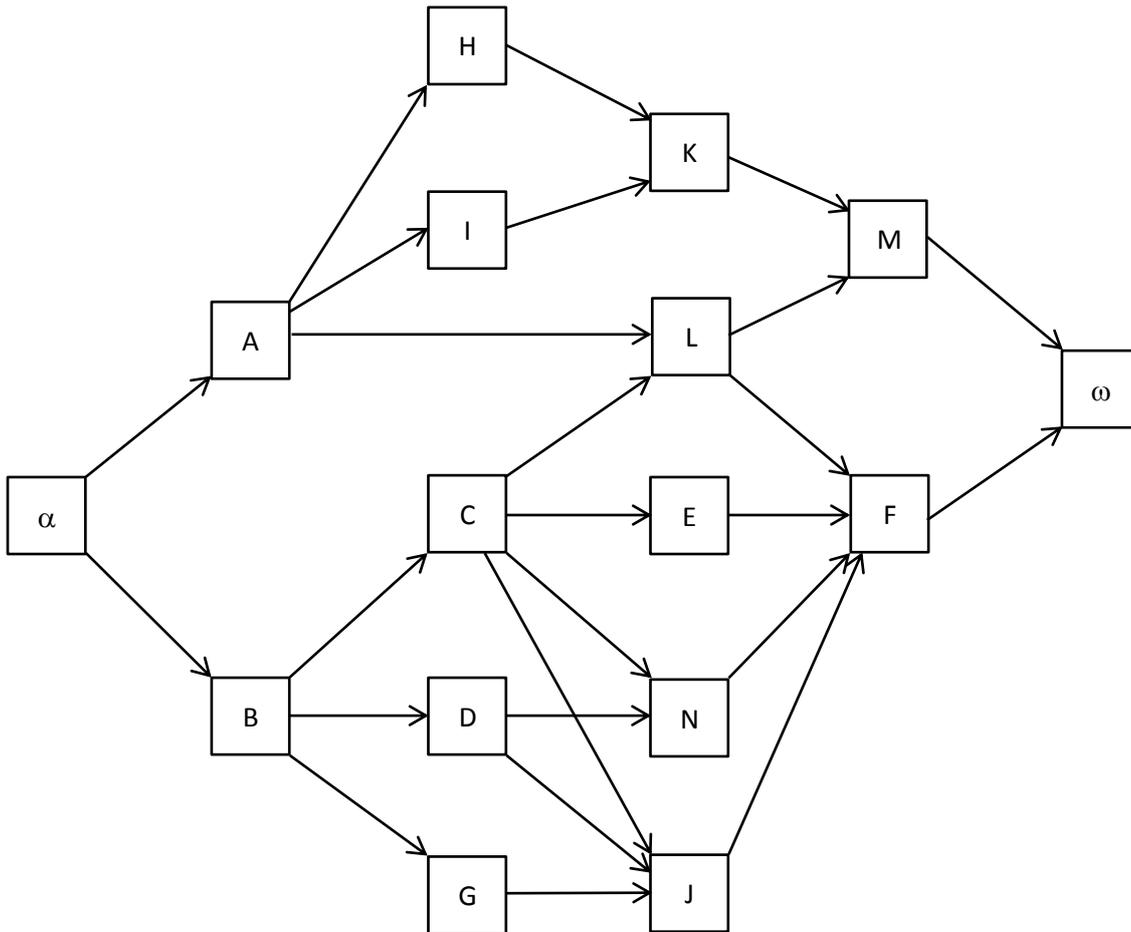


Figura 8.11

8.5. CÁLCULO DE TIEMPOS MÍNIMOS Y MÁXIMOS

En las redes Roy cada actividad tiene asociada dos tiempos: tiempo mínimo (Tmin) y tiempo máximo (Tmax). El tiempo mínimo representa el comienzo más pronto de la actividad, mientras que el tiempo máximo corresponde al comienzo más tarde.

Existen varias formas de indicar los tiempos mínimos y máximos en las redes Roy. El más extendido es colocar el Tmin en la parte superior de la actividad y el Tmax en la parte inferior de la misma, como aparece en la figura 8.12. Pero también se usan otras formas, como las indicadas en las figuras 8.13 y 8.14.



Figura 8.12

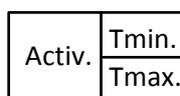


Figura 8.13

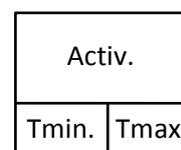


Figura 8.14

El procedimiento de cálculo de estos tiempos es similar al cálculo de los tiempos en el método Pert. En primer lugar, partiendo de la red de la figura 8.11, se procederá a dotar a cada restricción de su valor, que será igual a la duración de la actividad de la que procede. A continuación se calculan los T_{min} y T_{max} .

Cálculo de tiempos mínimos

Se comenzará por la actividad α , asignando un valor de $T_{min} = 0$. A continuación se irán calculando los T_{min} de las demás actividades, de manera que el T_{min} de una actividad será el T_{min} de la actividad inmediatamente anterior a ella más el valor de la restricción que las une. Cuando exista más de una actividad inmediatamente anterior, se calculará del siguiente modo:

$$T_{min} Y = \text{Máx} (T_{min} X + T_x), \forall X$$

donde X representa todas las posibles actividades inmediatamente anteriores a la actividad Y.

En la red de nuestro ejemplo los tiempos mínimos se calcularían así:

$$T_{min} \alpha = 0$$

$$T_{min} A = T_{min} \alpha + T_\alpha = 0 + 0 = 0$$

$$T_{min} B = T_{min} \alpha + T_\alpha = 0 + 0 = 0$$

$$T_{min} H = T_{min} A + T_a = 0 + 4 = 4$$

$$T_{min} I = T_{min} A + T_a = 0 + 4 = 4$$

$$T_{min} C = T_{min} B + T_b = 0 + 5 = 5$$

$$T_{min} D = T_{min} B + T_b = 0 + 5 = 5$$

$$T_{min} G = T_{min} B + T_b = 0 + 5 = 5$$

$$T_{min} K = \text{Max} (T_{min} H + T_h; T_{min} I + T_i) = \text{Max} (4 + 6; 4 + 3) = 10$$

$$T_{min} L = \text{Max} (T_{min} A + T_a; T_{min} C + T_c) = \text{Max} (0 + 4; 5 + 4) = 9$$

$$T_{min} E = T_{min} C + T_c = 5 + 4 = 9$$

$$T_{min} N = \text{Max} (T_{min} C + T_c; T_{min} D + T_d) = \text{Max} (5 + 4; 5 + 7) = 12$$

$$T_{min} J = \text{Max} (T_{min} C + T_c; T_{min} D + T_d; T_{min} G + T_g) = \text{Max} (5 + 4; 5 + 7; 5 + 8) = 13$$

$$T_{min} M = \text{Max} (T_{min} K + T_k; T_{min} L + T_l) = \text{Max} (10 + 2; 9 + 6) = 15$$

$$T_{min} F = \text{Max} (T_{min} L + T_l; T_{min} E + T_e; T_{min} N + T_n; T_{min} J + T_j) = \\ = \text{Max} (9 + 6; 9 + 8; 12 + 10; 13 + 6) = 22$$

$$T_{min} \omega = \text{Max} (T_{min} M + T_m; T_{min} F + T_f) = \text{Max} (15 + 3; 22 + 5) = 27$$

Cálculo de tiempos máximos

Se comenzará por la actividad ω , asignando un T_{max} igual al plazo de ejecución del proyecto. En el caso de no existir dicho plazo, se asignará un T_{max} igual al T_{min} ω . Seguidamente se irán calculando los T_{max} de las demás actividades, de manera que el T_{max} de una actividad será el T_{max} de la actividad inmediatamente posterior a ella menos el valor de la restricción que las une. Cuando exista más de una actividad inmediatamente posterior, se calculará del siguiente modo:

$$T_{max} Y = \text{Min} (T_{max} X - T_y), \forall X;$$

donde X representa todas las posibles actividades inmediatamente posteriores a la actividad Y.

En la red de nuestro ejemplo, suponiendo que no existe plazo de ejecución, los tiempos máximos se calcularían así:

$$T_{max} \omega = T_{min} \omega = 27$$

$$T_{max} M = T_{max} \omega - T_m = 27 - 3 = 24$$

$$T_{max} F = T_{max} \omega - T_f = 27 - 5 = 22$$

$$T_{max} K = T_{max} M - T_k = 24 - 2 = 22$$

$$T_{max} L = \text{Min} (T_{max} M - T_l; T_{max} F - T_l) = \text{Min} (24 - 6; 22 - 6) = 16$$

$$T_{max} E = T_{max} F - T_e = 22 - 8 = 14$$

$$T_{max} N = T_{max} F - T_n = 22 - 10 = 12$$

$$T_{max} J = T_{max} F - T_j = 22 - 6 = 16$$

$$T_{max} H = T_{max} K - T_h = 22 - 6 = 16$$

$$T_{max} I = T_{max} K - T_i = 22 - 3 = 19$$

$$T_{max} C = \text{Min} (T_{max} L - T_c; T_{max} E - T_c; T_{max} N - T_c; T_{max} J - T_c) = \\ = \text{Min} (16 - 4; 14 - 4; 12 - 4; 16 - 4) = 8$$

$$T_{max} D = \text{Min} (T_{max} N - T_d; T_{max} J - T_d) = \text{Min} (12 - 7; 16 - 7) = 5$$

$$T_{max} G = T_{max} J - T_g = 16 - 8 = 8$$

$$T_{max} A = \text{Min} (T_{max} H - T_a; T_{max} I - T_a; T_{max} L - T_a) = \\ = \text{Min} (16 - 4; 19 - 4; 16 - 4;) = 12$$

$$T_{max} B = \text{Min} (T_{max} C - T_b; T_{max} D - T_b; T_{max} G - T_b) = \text{Min} (8 - 5; 5 - 5; 8 - 5;) = 0$$

$$T_{max} \alpha = \text{Min} (T_{max} A - T_\alpha; T_{max} B - T_\alpha) = \text{Min} (12 - 0; 0 - 0) = 0$$

En la figura 8.15 se representa la red con todos los cálculos anteriores.

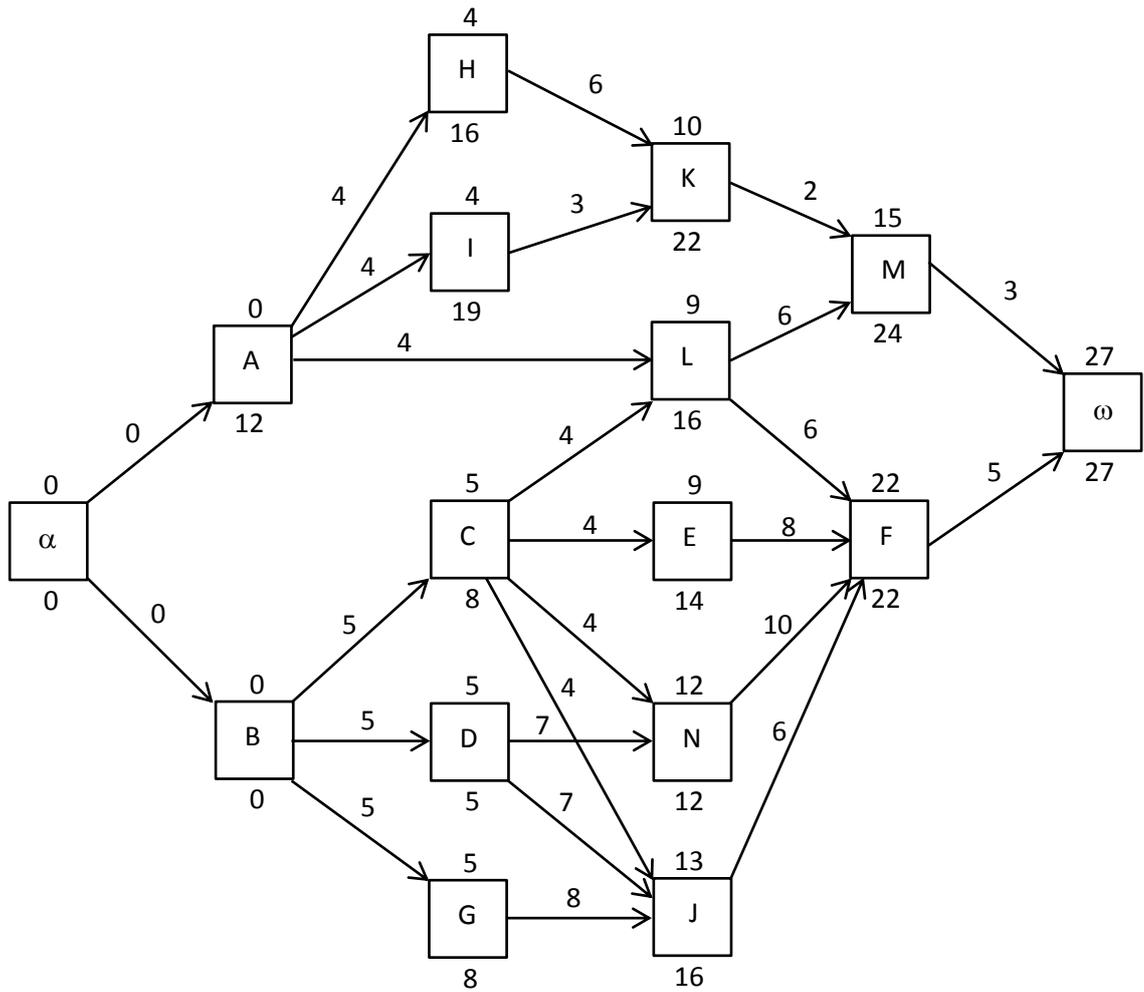


Figura 8.15

8.6. CÁLCULO DE TIEMPOS EN REDES CON RESTRICCIONES DE POSTERIORIDAD MÁXIMA

En el apartado 8.2.1.1 se ha estudiado el concepto de restricción de posterioridad máxima. Ahora, mediante un ejemplo, se ilustra la manera en que este tipo de restricciones afecta a los tiempos mínimos y máximos.

Ejemplo

Dada la red de la figura 8.16 compruebe las siguientes restricciones y aplique aquellas que puedan considerarse como restricciones de posterioridad máxima. Calcule los nuevos tiempos mínimos y máximos.

$$N \rightarrow A = -13 \quad L \rightarrow E = -10 \quad N \rightarrow B = -18$$

$$P \rightarrow C = -16 \quad M \rightarrow D = -14$$

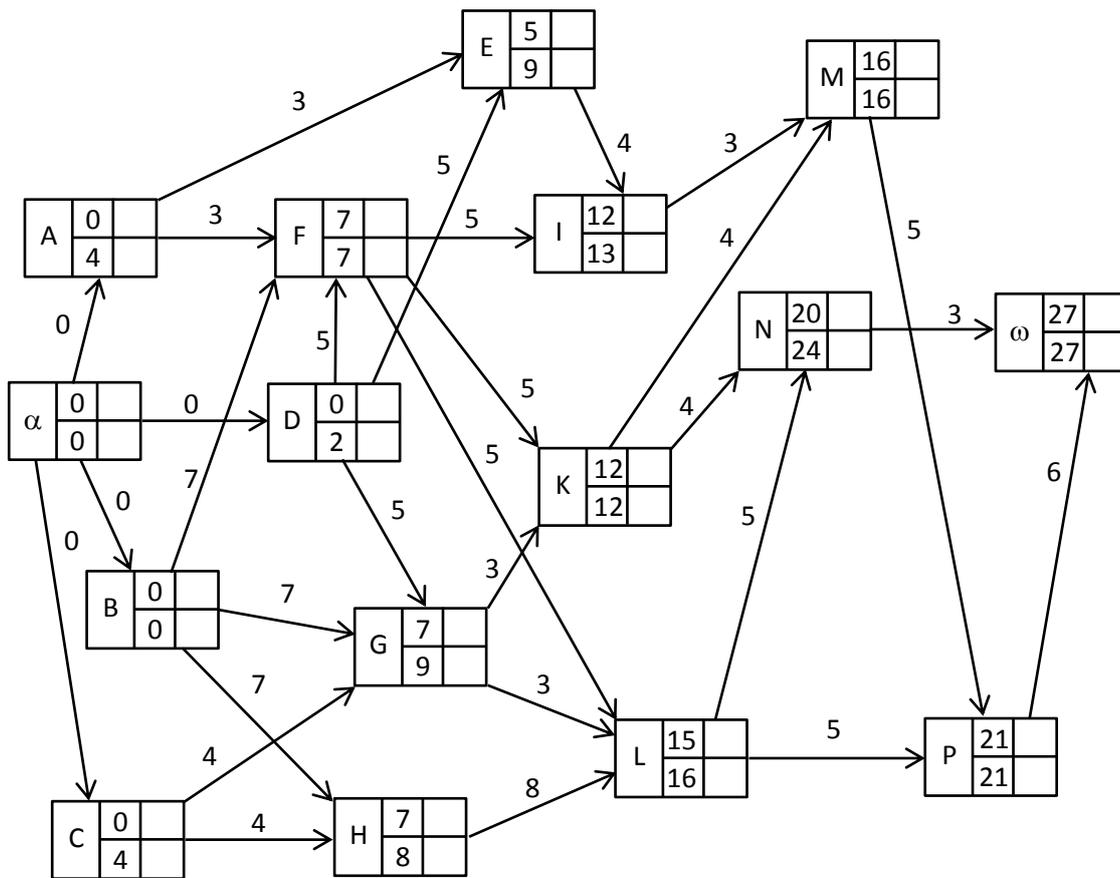


Figura 8.16

a) Comprobación de las restricciones

La restricción $N \rightarrow A = -13$ es válida dado que no existe ningún camino entre dichas actividades cuya duración sea mayor que 13.

La restricción $P \rightarrow C = -16$ no es válida dado que existe un camino entre dichas actividades cuya duración es mayor que 16.

La restricción $L \rightarrow E = -10$ no es válida dado que entre dichas actividades no existe ningún camino.

La restricción $M \rightarrow D = -14$ es válida dado que no existe ningún camino entre dichas actividades cuya duración sea mayor que 14.

La restricción $N \rightarrow B = -18$ no es válida dado que existe un camino entre dichas actividades cuya duración es mayor que 18.

Como consecuencia de esta comprobación, sólo dos de estas restricciones pueden ser consideradas restricciones de posterioridad máxima. Así que estas dos restricciones se introducen en la red, como se aprecia en la figura 8.17.

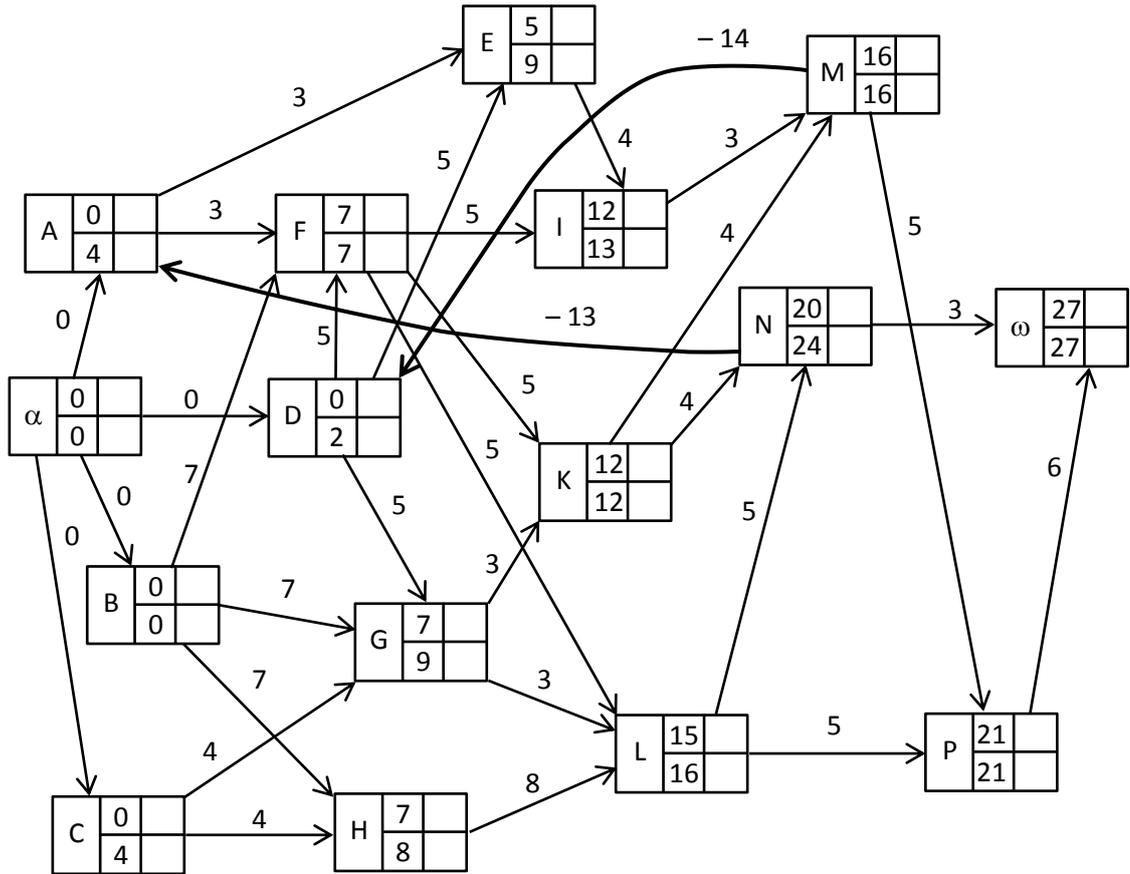


Figura 8.17

b) Calcular los nuevos Tmin y Tmax

Una vez encajadas las restricciones de posterioridad máxima en la red, se procede a verificar cómo afectan estas restricciones a los tiempos mínimos y máximos. Es decir, hay que recalculer dichos tiempos teniendo en cuenta las nuevas restricciones. El procedimiento a seguir para ello consiste en ver, en primer lugar, como afecta a los Tmin y, posteriormente, como afecta a los Tmax.

Comenzaremos, pues, con los tiempos mínimos. Para ello, se recalculan los Tmin al ir introduciendo, una a una, las restricciones de posterioridad máxima. El orden en que se van estudiando cada una de las restricciones es indiferente. En nuestro caso, como existen dos restricciones, se va a comenzar por la restricción $N \rightarrow A = -13$. Esta restricción afecta al Tmin de la actividad A, puesto que:

$$Tmin A = \text{Max} (Tmin \alpha + T\alpha; Tmin N + Tna) = \text{Max} [0 + 0; 20 + (-13)] = 7$$

Recalculando los demás Tmin, se comprueba que cambian los siguientes:

$$Tmin F = 10$$

$$Tmin E = 10$$

$$Tmin I = 15$$

Tmin K = 15
 Tmin M = 19
 Tmin P = 24
 Tmin ω = 30

A continuación, se procede de la misma forma con la restricción $M \rightarrow D = -14$, produciéndose los siguientes cambios:

Tmin D = 5
 Tmin G = 10

La figura 8.18 muestra, en la columna de la derecha, los Tmin definitivos de cada una de las actividades después de introducir las restricciones de posterioridad máxima.

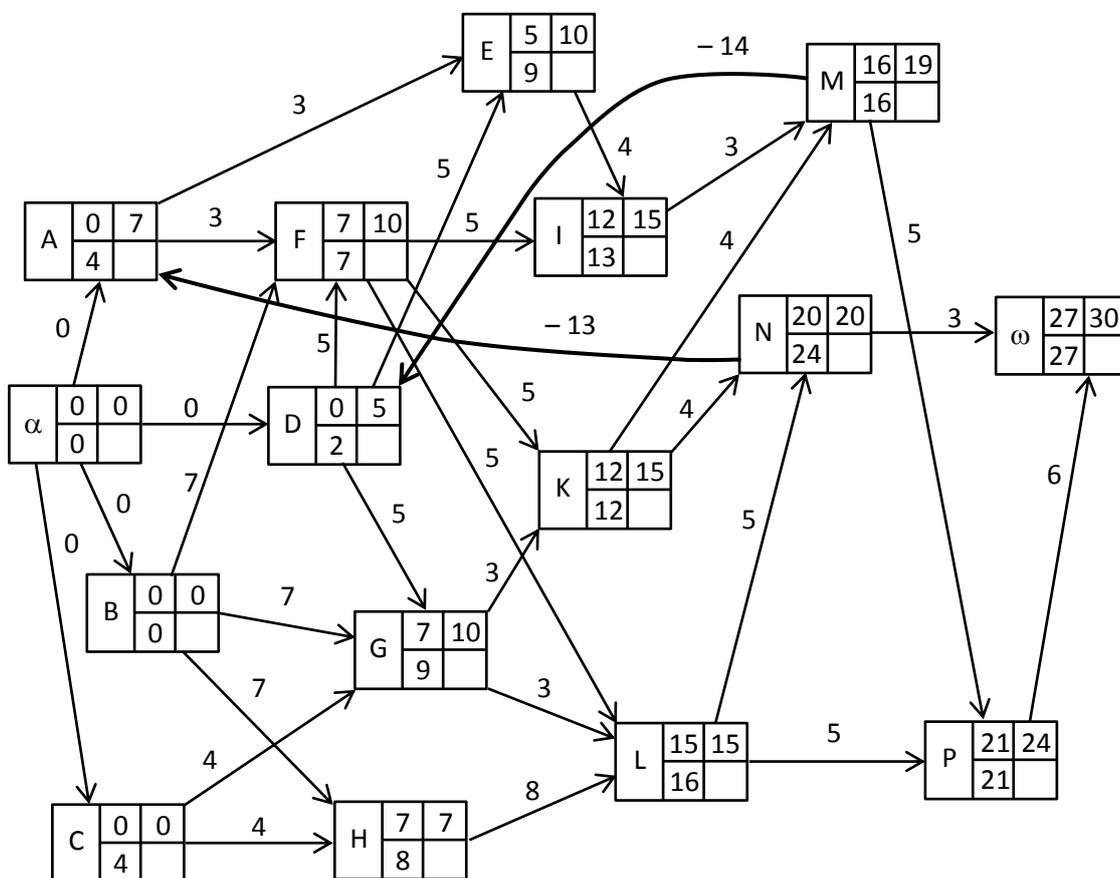


Figura 8.18

Una vez calculados los nuevos Tmin, se procede a calcular los nuevos Tmax. Cuando el Tprog de proyecto, o sea el Tmin ω, no ha cambiado como consecuencia de lo visto anteriormente, el procedimiento para recalculer los Tmax es análogo al utilizado para los Tmin. Sin embargo, cuando el Tprog cambia, como ocurre en nuestro ejemplo, el cálculo de los nuevos Tmax hay que hacerlo en dos fases. En una primera fase, hay que calcular los nuevos tiempos sin tener en cuenta las restricciones de posterioridad

máxima, es decir, operando sólo con las restricciones de posterioridad mínima iniciales. En la segunda fase, partiendo de los tiempos obtenidos en la primera fase, se recalculan los tiempos introduciendo una a una las restricciones de posterioridad máxima.

Aplicando este criterio al ejemplo que estamos estudiando, en la primera fase se logran los tiempos máximos, que aparecen en la columna de la derecha de cada una de las actividades, de la figura 8.19.

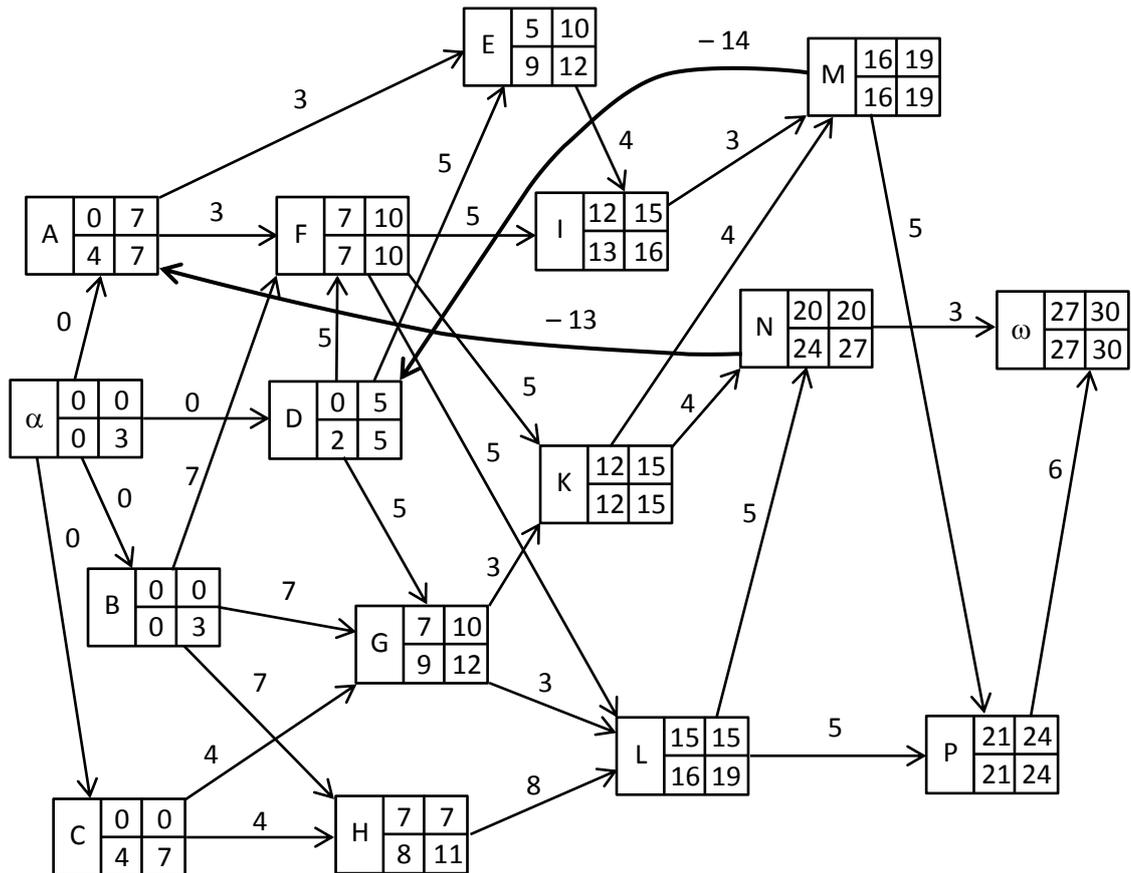


Figura 8.19

En la segunda fase, para el cálculo de los tiempos máximos, se estudia en primer lugar la restricción $N \rightarrow A = -13$. Esta restricción afecta al T_{\max} de la actividad N, dado que:

$$T_{\max} N = \text{Min} (T_{\max} \omega - T_n; T_{\max} A - T_{na}) = \text{Min} [30 - 3; 7 - (-13)] = 20$$

Recalculando los demás T_{\max} , se comprueba que cambian los siguientes:

$$T_{\max} L = 15$$

$$T_{\max} H = 7$$

$$T_{\max} B = 0$$

$$T_{\max} C = 3$$

$$T_{\max} \alpha = 0$$

Seguidamente, se procede de la misma forma con la restricción $M \rightarrow D = -14$, no produciéndose ningún cambio en los T_{max} . Por lo tanto, los tiempos definitivos son los que se aprecian en la figura 8.20.

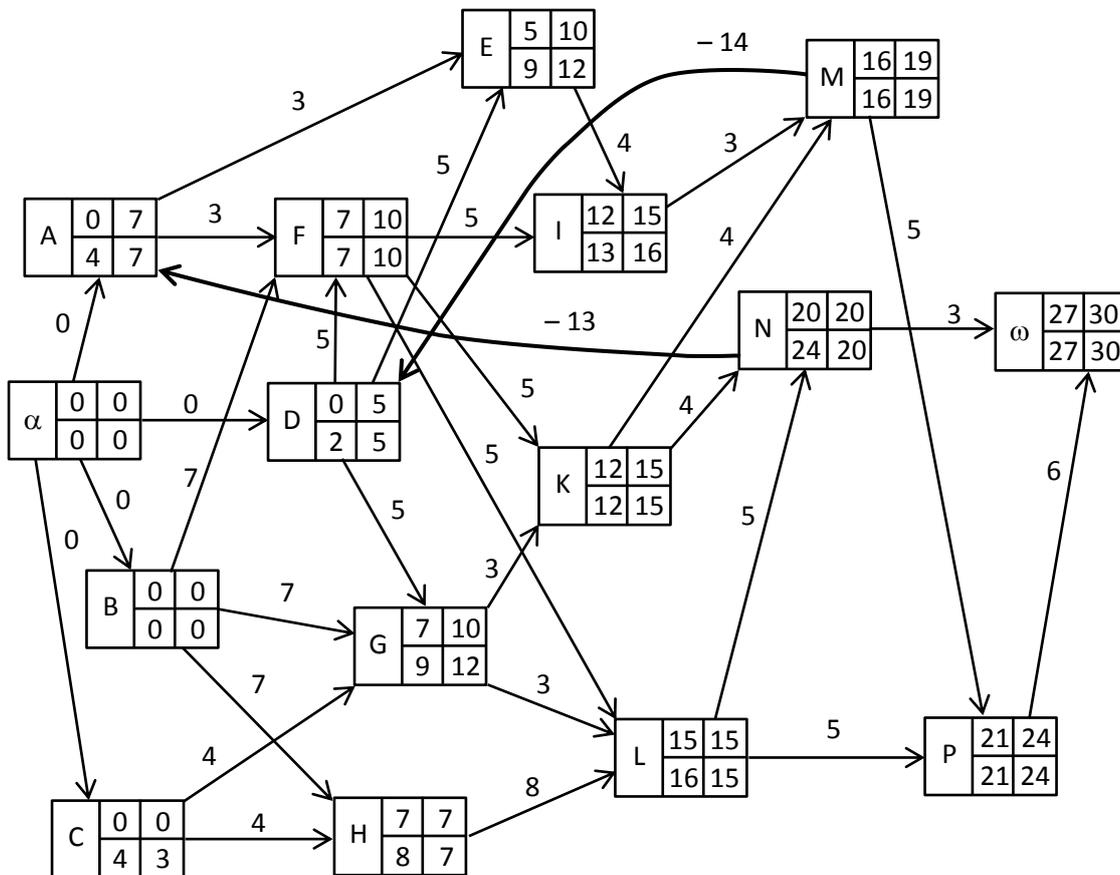


Figura 8.20

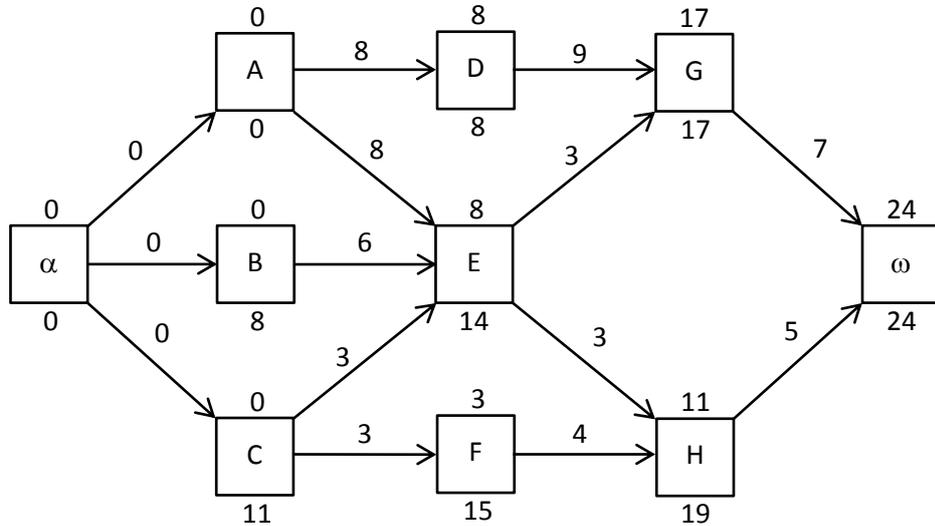
8.7. CÁLCULO DE TIEMPOS CUANDO EXISTEN RESTRICCIONES DE TIPO DISYUNTIVO

Las disyunciones o restricciones de tipo disyuntivo se presentan, como ya se vio en el apartado 8.2.2, cuando dos o más actividades que se deben realizar simultáneamente necesitan más recursos que los disponibles. Por lo tanto, al no poderse realizar al mismo tiempo, necesariamente tendrá que realizarse primero una y después la otra. La cuestión es saber cuál debe ser la primera. La respuesta es que se deben ejecutar en el orden que más favorezca la realización del proyecto desde el punto de vista de que el mismo no se retrase o que dicho retraso, en el caso de que no pueda evitarse, sea el menor posible. Para resolver esta cuestión existen dos métodos, uno analítico y otro gráfico.

La aplicación de estos dos métodos se explica mediante el siguiente ejemplo práctico.

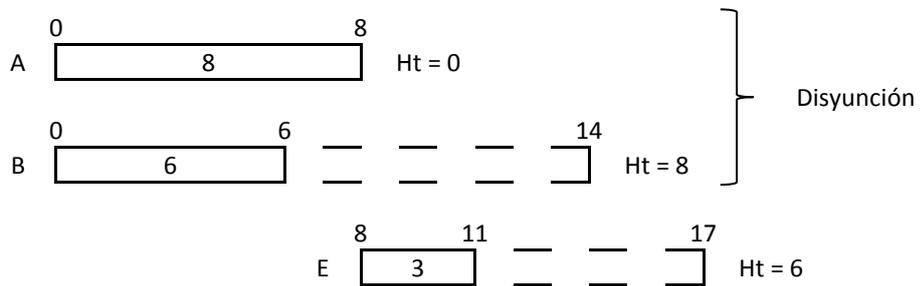
Ejemplo

Dada la red de la figura 8.21, si las actividades A, B y E necesitan de un mismo recurso y éste no puede satisfacer a las tres simultáneamente, resuelva la situación creada.



Planteamiento del problema

El primer paso para resolver el problema satisfactoriamente es representar las tres actividades mediante un diagrama de barras o Gráfica Gantt, donde pueda observarse con claridad si estas tres actividades coinciden o no en el tiempo. El resultado es la figura 8.22, donde se puede apreciar que las actividades A y B coinciden temporalmente, mientras que la actividad E no coincide con ninguna de las dos. Por lo tanto, existe disyunción sólo entre las actividades A y B.



Resolución por el método analítico

El problema sólo admite dos soluciones, o bien se realiza primero la actividad A y después la B, o bien se ejecuta primero la B y posteriormente la A. Para resolver el problema analíticamente se aplica, a las dos hipótesis, la siguiente fórmula:

$$R = \text{Final más pronto } 1^{\text{a}} - \text{Comienzo más tarde } 2^{\text{a}}$$

Donde:

R = Retraso del proyecto

Final más pronto 1^{a} = Final más pronto de la actividad que se ejecute en primer lugar

Comienzo más tarde 2^{a} = Comienzo más tarde de la actividad que se ejecute en segundo lugar.

La mejor solución será aquella que provoque menor retraso.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Primera hipótesis} \rightarrow \text{Realizar en primer lugar la actividad A} \\ \text{Realizar en segundo lugar la actividad B} \end{array} \right\} R = 8 - 8 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Segunda hipótesis} \rightarrow \text{Realizar en primer lugar la actividad B} \\ \text{Realizar en segundo lugar la actividad A} \end{array} \right\} R = 6 - 0 = 6$$

La mejor solución es la primera, puesto que no provoca retraso del proyecto.

Resolución por el método gráfico

Otra forma de resolver el problema es representar las actividades, para cada una de las hipótesis planteadas, en el orden que se van a ejecutar mediante un diagrama de barras. La diferencia entre la fecha de terminación de la segunda actividad y lo más tarde que debe terminar ésta, será el retraso del proyecto. La hipótesis que dé como resultado un menor retraso, será la mejor solución. En nuestro ejemplo, la mejor solución es la primera hipótesis, como se puede apreciar en la figura 8.23.

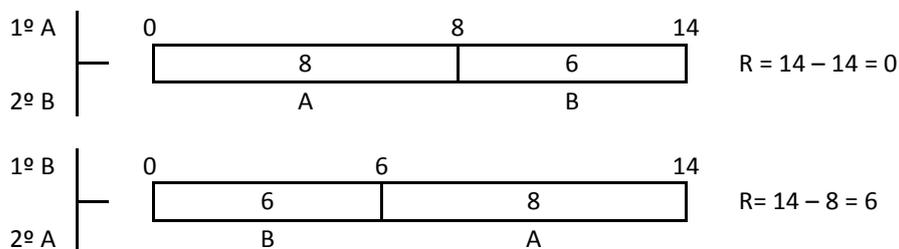


Figura 8.23

Traslado de la solución adoptada a la red

Una vez resuelta la disyunción, por cualquiera de los dos métodos estudiados anteriormente, hay que trasladar la solución adoptada a la red, lo cual se materializa incluyendo una nueva restricción de posterioridad mínima entre las dos actividades en cuestión. Esta operación implica recalcular los tiempos mínimos y máximos. Además, la mayor parte de la veces, cuando se introduce una nueva restricción en la red suele ocurrir que otras restricciones sobran, al no ser necesarias. Por esta razón, hay que comprobar este extremo. En el caso concreto que nos ocupa, al introducir una nueva restricción desde la actividad A hasta la actividad B, sobra la restricción que va desde la actividad α hasta la actividad B y la restricción que va desde la actividad A hasta la actividad E, ambas por aplicación de la propiedad transitiva. En la figura 8.24 se representa la red final, con los nuevos tiempos mínimos y máximos.

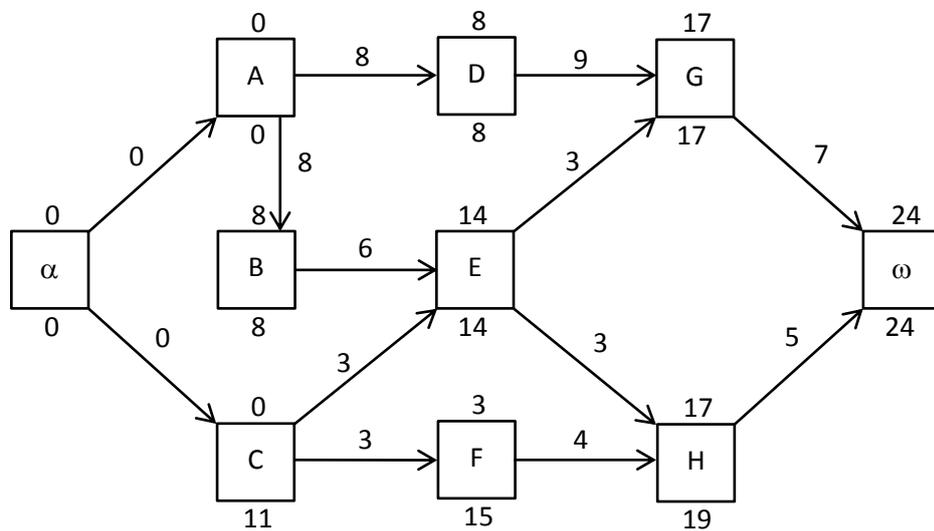


Figura 8.24

8.8. CÁLCULO DE TIEMPOS MÍNIMOS Y MÁXIMOS CON TABLAS

Una de las ventajas que tiene el método de los potenciales, respecto del método PERT, es que se pueden calcular los T_{min} y T_{max} sin necesidad de dibujar la red, utilizando tablas como las que se reproducen en las figuras 8.25 y 8.26.

TIEMPOS MÍNIMOS

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 8.25

TIEMPOS MÁXIMOS

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Figura 8.26

La tabla de cálculo contará con tantas columnas como actividades tenga el proyecto y, cada una de estas columnas, se divide a su vez en dos subcolumnas, siendo la subcolumna de la izquierda más ancha que la de la derecha en el caso de los tiempos mínimos, y al revés cuando se trate de los tiempos máximos.

Tabla de cálculo de tiempos mínimos

En el encabezamiento de cada columna aparecerá el nombre de la actividad en cuestión y el valor de su tiempo mínimo. Debajo, en la subcolumna de la izquierda, aparecerán las actividades que preceden a la del encabezamiento, igualadas a su duración, mientras que en la subcolumna de la derecha se enfrenta a cada actividad el tiempo mínimo previamente calculado para cada una de ellas, como se aprecia en la figura 8.27.

| | | | |
|--------------------------------|--------|----|----------------------|
| Actividad del encabezamiento → | R | 14 | ← Tiempo mínimo de R |
| | M = 3 | 9 | ← Tiempo mínimo de M |
| Actividades que preceden a R → | B = 4 | 10 | ← Tiempo mínimo de B |
| | T = 10 | 3 | ← Tiempo mínimo de T |

Figura 8.27

Como se ha dicho, los tiempos mínimos de las actividades M, B y T ya se han calculado previamente y, a partir de ellos, se calcula el tiempo mínimo de R mediante la siguiente fórmula:

$$T_{min R} = \text{Max}(\text{Dur. M} + T_{min M}; \text{Dur. B} + T_{min B}; \text{Dur. T} + T_{min T})$$

$$T_{min R} = \text{Max}(3 + 9; 4 + 10; 10 + 3) = 14$$

Tabla de cálculo de tiempos máximos

En el encabezamiento de cada columna aparecerá el nombre de la actividad en cuestión y el valor de su tiempo máximo. Debajo, en la subcolumna de la derecha, aparecerán las actividades siguientes a la del encabezamiento, igualadas a la duración de la actividad del encabezamiento, mientras que en la subcolumna de la izquierda se enfrenta a cada actividad el tiempo máximo previamente calculado para cada una de ellas, como se aprecia en la figura 8.28.

| | | | |
|----------------------|----|-------|--------------------------------|
| Tiempo máximo de C → | 21 | C | ← Actividad del encabezamiento |
| Tiempo máximo de A → | 30 | A = 6 | |
| Tiempo máximo de D → | 28 | D = 6 | ← Actividades siguientes a C |
| Tiempo máximo de F → | 27 | F = 6 | |

Figura 8.28

Como se ha dicho, los tiempos máximos de las actividades A, D y F ya se han calculado previamente y, a partir de ellos, se calcula el tiempo máximo de C mediante la siguiente fórmula:

$$T_{\max} C = \text{Min}(T_{\max} A - \text{Dur. C}; T_{\max} D - \text{Dur. C}; T_{\max} F - \text{Dur. C})$$

$$T_{\max} C = \text{Min}(30 - 6; 28 - 6; 27 - 6) = 21$$

Ejemplo

Calcular los tiempos mínimos y máximos de la siguiente relación de precedencias mediante tablas, sin dibujar la red.

| | |
|------------------------|---------------|
| A precede a B, C, D | Duración = 4 |
| B precede a H | Duración = 9 |
| C precede a H | Duración = 3 |
| D precede a H, I | Duración = 7 |
| E precede a J | Duración = 6 |
| F precede a J | Duración = 8 |
| G precede a E, F | Duración = 11 |
| H precede a K, L | Duración = 5 |
| I precede a J, K, L | Duración = 5 |
| J precede a M | Duración = 10 |
| K precede a N | Duración = 4 |
| L no precede a ninguna | Duración = 3 |
| M no precede a ninguna | Duración = 8 |
| N no precede a ninguna | Duración = 6 |

Antes de comenzar a calcular los tiempos es conveniente ordenar la información en una tabla donde aparezcan todas las actividades con sus precedentes y siguientes, incluyendo las actividades ficticias de inicio y final (α y ω), como aparece en la figura 8.29.

| Activ. | Activ. Precedentes | Activ. Siguintes | Duración |
|----------|--------------------|------------------|----------|
| α | --- | A, G | 0 |
| A | α | B, C, D | 4 |
| B | A | H | 9 |
| C | A | H | 3 |
| D | A | H, I | 7 |
| E | G | J | 6 |
| F | G | J | 8 |
| G | α | E, F | 11 |
| H | B, C, D | K, L | 5 |
| I | D | J, K, L | 5 |
| J | E, F, I | M | 10 |
| K | H, I | N | 4 |
| L | H, I | ω | 3 |
| M | J | ω | 8 |
| N | K | ω | 6 |
| ω | L, M, N | --- | 0 |

Figura 8.29

Cálculo de tiempos mínimos

En primer lugar, se rellena la tabla colocando las actividades en el encabezamiento y debajo, en la subcolumna de la izquierda, se anotan las actividades precedentes igualadas a sus respectivas duraciones (figura 8.30).

| α | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|----------|------------|-----|-----|-----|------|------|------------|-------------------|-----|
| | $\alpha=0$ | A=4 | A=4 | A=4 | G=11 | G=11 | $\alpha=0$ | B=9 C=3 D=7 | D=7 |

| J | K | L | M | N | ω |
|-------------------|------------|------------|------|-----|-------------------|
| E=6 F=8 I=5 | H=5 I=5 | H=5 I=5 | J=10 | K=4 | L=3 M=8 N=6 |

Figura 8.30

Seguidamente, se asigna a la actividad " α " un tiempo mínimo igual a cero, colocando este valor a la derecha de la actividad, allí donde se encuentre. En este caso, la actividad " α " se encuentra, además del encabezamiento, debajo de las actividades A y G (figura 8.31).

| α | 0 | A | B | C | D | E | F | G | H | I | | |
|----------|---|------------|---|-----|-----|-----|------|------|------------|---|-------------------|-----|
| | | $\alpha=0$ | 0 | A=4 | A=4 | A=4 | G=11 | G=11 | $\alpha=0$ | 0 | B=9 C=3 D=7 | D=7 |

| J | K | L | M | N | ω |
|-------------------|------------|------------|------|-----|-------------------|
| E=6 F=8 I=5 | H=5 I=5 | H=5 I=5 | J=10 | K=4 | L=3 M=8 N=6 |

Figura 8.31

De esta forma, se puede calcular el tiempo mínimo de las actividades A y G:

$$T_{\min} A = 0 + 0 = 0$$

$$T_{\min} G = 0 + 0 = 0$$

Ahora, se procede con las actividades A y G lo mismo que con la actividad α . Es decir, se coloca el valor del tiempo mínimo de la actividad A a la derecha de la misma, allí donde aparezca dicha actividad (en el encabezamiento y debajo de las actividades B, C y D) y el tiempo mínimo de la actividad G igualmente (en el encabezamiento y debajo de E y F). Con lo cual ya se pueden calcular los tiempos mínimos de las actividades B, C, D, E y F. Siguiendo este procedimiento, de manera iterativa, se llega a la figura 8.32, donde se han calculado todos los tiempos mínimos.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|------------|---|-----|---|-----|---|-----|---|------|----|------|----|------------|---|-----|----|-----|----|
| α | 0 | A | 0 | B | 4 | C | 4 | D | 4 | E | 11 | F | 11 | G | 0 | H | 13 | I | 11 |
| | | $\alpha=0$ | 0 | A=4 | 0 | A=4 | 0 | A=4 | 0 | G=11 | 0 | G=11 | 0 | $\alpha=0$ | 0 | B=9 | 4 | D=7 | 4 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | C=3 | 4 | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | D=7 | 4 | | |

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|-----|----|----------|----|
| J | 19 | K | 18 | L | 18 | M | 29 | N | 22 | ω | 37 |
| E=6 | 11 | H=5 | 13 | H=5 | 13 | J=10 | 19 | K=4 | 18 | L=3 | 18 |
| F=8 | 11 | I=5 | 11 | I=5 | 11 | | | | | M=8 | 29 |
| I=5 | 11 | | | | | | | | | N=6 | 22 |

Figura 8.32

Cálculo de tiempos máximos

En primer lugar, se rellena la tabla colocando las actividades en el encabezamiento y debajo, en la subcolumna de la derecha, se anotan las actividades siguientes igualadas a la duración de la actividad del encabezamiento (figura 8.33).

| | | | | | | | | | |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| α | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| A=0 | B=4 | H=9 | H=3 | H=7 | J=6 | J=8 | E=11 | K=5 | J=5 |
| G=0 | C=4 | | | I=7 | | | F=11 | L=5 | K=5 |
| | D=4 | | | | | | | | L=5 |

| | | | | | |
|------|-----|------------|------------|------------|----------|
| J | K | L | M | N | ω |
| M=10 | N=4 | $\omega=3$ | $\omega=8$ | $\omega=6$ | |

Figura 8.33

Seguidamente, se asigna a la actividad " ω " un tiempo máximo igual a 37, colocando este valor a la izquierda de la actividad, allí donde se encuentre. En este caso, la actividad " ω " se encuentra, además del encabezamiento, debajo de las actividades L, M y N (figura 8.34).

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|-----|----|-----|
| α | | A | | B | | C | | D | | E | | F | | G | | H | | I | |
| 3 | A=0 | 13 | B=4 | 22 | H=9 | 22 | H=3 | 22 | H=7 | 19 | J=6 | 19 | J=8 | 13 | E=11 | 27 | K=5 | 19 | J=5 |
| 0 | G=0 | 19 | C=4 | | | | | 14 | I=7 | | | | | 11 | F=11 | 34 | L=5 | 27 | K=5 |
| | | 7 | D=4 | | | | | | | | | | | | | | | 34 | L=5 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|------|----|-----|----|------------|----|------------|----|------------|----|----------|
| J | | K | | L | | M | | N | | 37 | ω |
| 19 | M=10 | 31 | N=4 | 37 | $\omega=3$ | 37 | $\omega=8$ | 37 | $\omega=6$ | | |

Figura 8.34

De esta forma, se puede calcular el tiempo máximo de las actividades L, M y N:

$$T_{\max L} = 37 - 3 = 34$$

$$T_{\max M} = 37 - 8 = 29$$

$$T_{\max N} = 37 - 6 = 31$$

Ahora, se procede con las actividades L, M y N lo mismo que con la actividad ω . Es decir, se coloca el valor del tiempo máximo de la actividad L a la izquierda de la misma, allí donde aparezca dicha actividad (en el encabezamiento y debajo de las actividades H e I), el tiempo máximo de la actividad M igualmente (en el encabezamiento y debajo de J) y el tiempo máximo de N de idéntica forma (en el encabezamiento y debajo de K). Con lo cual, ya se pueden calcular los tiempos máximos de las actividades J y K. Siguiendo este procedimiento, de manera iterativa, se llega a la figura 8.35, donde se han calculado todos los tiempos máximos.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|-----|----|-----|
| 0 | α | 3 | A | 13 | B | 19 | C | 7 | D | 13 | E | 11 | F | 0 | G | 22 | H | 14 | I |
| 3 | A=0 | 13 | B=4 | 22 | H=9 | 22 | H=3 | 22 | H=7 | 19 | J=6 | 19 | J=8 | 13 | E=11 | 27 | K=5 | 19 | J=5 |
| 0 | G=0 | 19 | C=4 | | | | | 14 | I=7 | | | | | 11 | F=11 | 34 | L=5 | 27 | K=5 |
| | | 7 | D=4 | | | | | | | | | | | | | | | 34 | L=5 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|------|----|-----|----|------------|----|------------|----|------------|----|----------|
| 19 | J | 27 | K | 34 | L | 29 | M | 31 | N | 37 | ω |
| 29 | M=10 | 31 | N=4 | 37 | $\omega=3$ | 37 | $\omega=8$ | 37 | $\omega=6$ | | |

Figura 8.35

8.9. CÁLCULO DE TIEMPOS MÍNIMOS Y MÁXIMOS, CON TABLAS, CUANDO HAY RESTRICCIONES DE POSTERIORIDAD MÁXIMA

Cuando en una red ROY existen restricciones de posterioridad máxima, el cálculo de tiempos mínimos y máximos también se puede realizar mediante tablas, siguiendo la siguiente metodología:

a) Primera tabla: se calculan los tiempos mínimos y máximos, sólo con las restricciones de posterioridad mínima, sin tener en cuenta las restricciones de posterioridad máxima.

b) Segunda tabla: se calculan los tiempos mínimos y máximos incorporando las restricciones de posterioridad máxima. Cuando en esta tabla no se logra llegar al resultado, hay que ir a una tercera tabla. Si en la tercera tabla tampoco se alcanza el resultado, hay que ir a una cuarta tabla. Y así, sucesivamente, hasta que se llegue al resultado esperado.

Ejemplo

Calcular los tiempos mínimos y máximos del ejemplo anterior, incluyendo las siguientes restricciones de posterioridad máxima:

$$\begin{aligned}
 H &\rightarrow A = -14 \\
 N &\rightarrow B = -20 \\
 M &\rightarrow F = -18
 \end{aligned}$$

Cálculo de tiempos mínimos

a) Primera tabla (figura 8.36): será idéntica a la de la figura 8.32.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|------------|---|-----|---|-----|---|-----|---|------|----|------|----|------------|---|-----|----|-----|----|
| α | 0 | A | 0 | B | 4 | C | 4 | D | 4 | E | 11 | F | 11 | G | 0 | H | 13 | I | 11 |
| | | $\alpha=0$ | 0 | A=4 | 0 | A=4 | 0 | A=4 | 0 | G=11 | 0 | G=11 | 0 | $\alpha=0$ | 0 | B=9 | 4 | D=7 | 4 |
| | | | | C=3 | 4 | | | | | | | | | | | D=7 | 4 | | |

| | | | | | | | | | | | |
|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|-----|----|----------|----|
| J | 19 | K | 18 | L | 18 | M | 29 | N | 22 | ω | 37 |
| E=6 | 11 | H=5 | 13 | H=5 | 13 | J=10 | 19 | K=4 | 18 | L=3 | 18 |
| F=8 | 11 | I=5 | 11 | I=5 | 11 | | | | | M=8 | 29 |
| I=5 | 11 | | | | | | | | | N=6 | 22 |

Figura 8.36

b) Segunda tabla: se procede igual que en la primera tabla, pero añadiendo las restricciones de posterioridad máxima (en **negrita** para diferenciarlas de las restricciones de posterioridad mínima). A las restricciones de posterioridad máxima se le enfrenta en la subcolumna de la derecha el valor del tiempo mínimo de dicha actividad en la primera tabla, como aparece en la figura 8.37.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|--------------|----|--------------|----|-----|--|-----|--|------|--|--------------|----|------------|--|-----|--|-----|--|
| α | A | | B | | C | | D | | E | | F | | G | | H | | I | |
| | $\alpha=0$ | | A=4 | | A=4 | | A=4 | | G=11 | | G=11 | | $\alpha=0$ | | B=9 | | D=7 | |
| | H=-14 | 13 | N=-20 | 22 | | | | | | | M=-18 | 29 | | | C=3 | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | D=7 | | | |

| | | | | | | | | | |
|-----|-----|--|-----|--|------|--|-----|--|----------|
| J | K | | L | | M | | N | | ω |
| E=6 | H=5 | | H=5 | | J=10 | | K=4 | | L=3 |
| F=8 | I=5 | | I=5 | | | | | | M=8 |
| I=5 | | | | | | | | | N=6 |

Figura 8.37

Ahora se calculan los tiempos mínimos siguiendo el mismo procedimiento visto anteriormente, llegando a la tabla de la figura 8.38.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|---|----------------------------|---------|---------------------|---------|----------|---|----------|---|-----------|----|----------------------|---------|-----------------|---|-------------------|-------------|----------|----|
| α | 0 | A | 0 | B | 4 | C | 4 | D | 4 | E | 11 | F | 11 | G | 0 | H | 13 | I | 11 |
| | | $\alpha=0$ H=-14 | 0 13 | A=4 N=-20 | 0 22 | A=4 0 | 0 | A=4 0 | 0 | G=11 0 | 0 | G=11 M=-18 | 0 29 | $\alpha=0$ 0 | 0 | B=9 C=3 D=7 | 4 4 4 | D=7 4 | 4 |

| | | | | | | | | | | | |
|-------------------|----------------|------------|----------|------------|----------|------|----|-----|----|-------------------|----------------|
| J | 19 | K | 18 | L | 18 | M | 29 | N | 22 | ω | 37 |
| E=6 F=8 I=5 | 11 11 11 | H=5 I=5 | 13 11 | H=5 I=5 | 13 11 | J=10 | 19 | K=4 | 18 | L=3 M=8 N=6 | 18 29 22 |

Figura 8.38

Los tiempos mínimos calculados en la tabla de la figura 8.38 serán los definitivos sólo si se cumplen las siguientes igualdades:

- Tmin H en la primera tabla = Tmin H en la segunda tabla
- Tmin N en la primera tabla = Tmin N en la segunda tabla
- Tmin M en la primera tabla = Tmin M en la segunda tabla

Como, efectivamente, se cumplen dichas igualdades, estos tiempos mínimos son los definitivos.

Cálculo de tiempos máximos

a) Primera tabla (figura 8.39): será idéntica a la de la figura 8.35.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|-----|----|-----|
| 0 | α | 3 | A | 13 | B | 19 | C | 7 | D | 13 | E | 11 | F | 0 | G | 22 | H | 14 | I |
| 3 | A=0 | 13 | B=4 | 22 | H=9 | 22 | H=3 | 22 | H=7 | 19 | J=6 | 19 | J=8 | 13 | E=11 | 27 | K=5 | 19 | J=5 |
| 0 | G=0 | 19 | C=4 | | | | | 14 | I=7 | | | | | 11 | F=11 | 34 | L=5 | 27 | K=5 |
| | | 7 | D=4 | | | | | | | | | | | | | | | 34 | L=5 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|------|----|-----|----|------------|----|------------|----|------------|----|----------|
| 19 | J | 27 | K | 34 | L | 29 | M | 31 | N | 37 | ω |
| 29 | M=10 | 31 | N=4 | 37 | $\omega=3$ | 37 | $\omega=8$ | 37 | $\omega=6$ | | |

Figura 8.39

b) Segunda tabla: se procede igual que en la primera tabla, pero añadiendo las restricciones de posterioridad máxima (en **negrita** para diferenciarlas de las restricciones de posterioridad mínima). A las restricciones de posterioridad máxima se le enfrenta en la subcolumna de la izquierda el valor del tiempo máximo de dicha actividad α en la primera tabla, como aparece en la figura 8.40.

| | | | | | | | | | |
|------------|-------------------|-----|-----|------------|-----|-----|--------------|--------------|-------------------|
| α | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
| A=0 G=0 | B=4 C=4 D=4 | H=9 | H=3 | H=7 I=7 | J=6 | J=8 | E=11 F=11 | K=5 L=5 | J=5 K=5 L=5 |
| | | | | | | | 3 | A=-14 | |

| | | | | | |
|------|-----|------------|------------------|------------------|----------|
| J | K | L | M | N | ω |
| M=10 | N=4 | $\omega=3$ | $\omega=8$ 11 | $\omega=6$ 13 | |
| | | | F=-18 | B=-20 | |

Figura 8.40

Ahora se calculan los tiempos mínimos siguiendo el mismo procedimiento visto anteriormente, llegando a la tabla de la figura 8.41.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|--------------|----|-----|
| 0 | α | 3 | A | 8 | B | 14 | C | 7 | D | 13 | E | 11 | F | 0 | G | 17 | H | 14 | I |
| 3 | A=0 | 8 | B=4 | 17 | H=9 | 17 | H=3 | 17 | H=7 | 19 | J=6 | 19 | J=8 | 13 | E=11 | 27 | K=5 | 19 | J=5 |
| 0 | G=0 | 14 | C=4 | | | | | 14 | I=7 | | | | | 11 | F=11 | 34 | L=5 | 27 | K=5 |
| | | 7 | D=4 | | | | | | | | | | | | | 3 | A=-14 | 34 | L=5 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|------|----|-----|----|------------|----|--------------|----|--------------|----|----------|
| 19 | J | 27 | K | 34 | L | 29 | M | 31 | N | 37 | ω |
| 29 | M=10 | 31 | N=4 | 37 | $\omega=3$ | 37 | $\omega=8$ | 37 | $\omega=6$ | | |
| | | | | | | 11 | F=-18 | 13 | B=-20 | | |

Figura 8.41

Los tiempos máximos calculados en la tabla de la figura 8.41 serán los definitivos sólo si se cumplen las siguientes igualdades:

- Tmax A en la primera tabla = Tmax A en la segunda tabla
- Tmax B en la primera tabla = Tmax B en la segunda tabla
- Tmax F en la primera tabla = Tmax F en la segunda tabla

Estas igualdades no se cumplen, dado que el tiempo máximo de la actividad B en la primera tabla es 13 y en la segunda tabla 8. Por lo tanto, hay que hacer una tercera tabla.

c) Tercera tabla: se procede igual que en la segunda tabla, pero a las restricciones de posterioridad máxima se le enfrenta en la subcolumna de la izquierda el valor del tiempo máximo de dicha actividad en la segunda tabla, como aparece en la figura 8.42.

| | | | | | | | | | | | |
|--|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|--------------|-----|
| | α | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
| | A=0 | B=4 | H=9 | H=3 | H=7 | J=6 | J=8 | E=11 | K=5 | J=5 | |
| | G=0 | C=4 | | | I=7 | | | F=11 | L=5 | K=5 | |
| | | D=4 | | | | | | | 3 | A=-14 | L=5 |

| | | | | | | | | | | |
|--|------|-----|------------|------------|--------------|----------|--------------|--|--|--|
| | J | K | L | M | N | ω | | | | |
| | M=10 | N=4 | $\omega=3$ | $\omega=8$ | $\omega=6$ | | | | | |
| | | | | 11 | F=-18 | 8 | B=-20 | | | |

Figura 8.42

Ahora se calculan los tiempos máximos siguiendo el mismo procedimiento visto anteriormente, llegando a la tabla de la figura 8.43.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|-----|----|------|----|--------------|----|-----|
| 0 | α | 3 | A | 8 | B | 14 | C | 7 | D | 13 | E | 11 | F | 0 | G | 17 | H | 14 | I |
| 3 | A=0 | 8 | B=4 | 17 | H=9 | 17 | H=3 | 17 | H=7 | 19 | J=6 | 19 | J=8 | 13 | E=11 | 24 | K=5 | 19 | J=5 |
| 0 | G=0 | 14 | C=4 | | | | | 14 | I=7 | | | | | 11 | F=11 | 34 | L=5 | 24 | K=5 |
| | | 7 | D=4 | | | | | | | | | | | | | 3 | A=-14 | 34 | L=5 |

| | | | | | | | | | | | |
|----|------|----|-----|----|------------|----|--------------|----|--------------|----|----------|
| 19 | J | 24 | K | 34 | L | 29 | M | 28 | N | 37 | ω |
| 29 | M=10 | 28 | N=4 | 37 | $\omega=3$ | 37 | $\omega=8$ | 37 | $\omega=6$ | | |
| | | | | | | 11 | F=-18 | 8 | B=-20 | | |

Figura 8.43

Los tiempos máximos calculados en la tabla de la figura 8.43 serán los definitivos sólo si se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} T_{\max} A \text{ en la tercera tabla} &= T_{\max} A \text{ en la segunda tabla} \\ T_{\max} B \text{ en la tercera tabla} &= T_{\max} B \text{ en la segunda tabla} \\ T_{\max} F \text{ en la tercera tabla} &= T_{\max} F \text{ en la segunda tabla} \end{aligned}$$

Como, efectivamente, se cumplen dichas igualdades, estos tiempos máximos son los definitivos.

8.10. CÁLCULO DE HOLGURAS

El cálculo de holguras por el método Roy se confecciona de modo similar al método Pert, puesto que el concepto es el mismo. De esta manera, partiendo de las fórmulas enunciadas en el Pert se puede llegar a las fórmulas empleadas en el método Roy y viceversa. Las formulas aplicadas en el método Roy son las siguientes:

$$H_t = T_{\max} - T_{\min}$$

$$H_l = \text{Min} (T_{\min} K) - \text{duración} - T_{\min}, \forall K$$

donde K representa cualquier actividad inmediatamente posterior a la estudiada.

$$H_c = T_{\max} - \text{Max} (\text{Final más tarde de } Z), \forall Z$$

donde Z representa cualquier actividad inmediatamente anterior a la estudiada.

$$H_i = \text{Min} (T_{\min} K) - \text{duración} - \text{Max}(\text{Final más tarde } Z), \forall K \text{ y } \forall Z$$

Ejemplo

En la figura 8.44, calcular las holguras de la actividad H.

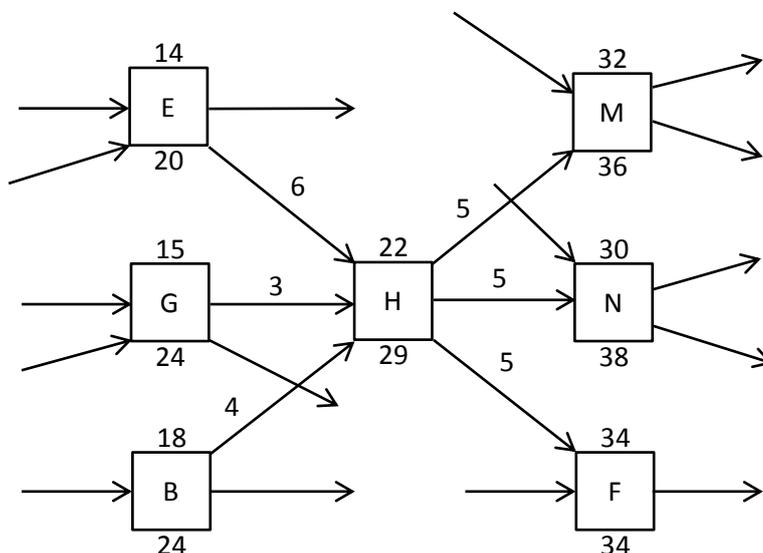


Figura 8.44

$$H_t H = T_{\max} H - T_{\min} H = 29 - 22 = 7$$

$$H_l H = \min (T_{\min} M; T_{\min} N; T_{\min} F) - T_h - T_{\min} H = \min (32; 30; 34) - 5 - 22 = 3$$

$$\begin{aligned} H_c H &= T_{\max} H - \max (\text{Final más tarde E; Final más tarde G; Final más tarde B}) = \\ &= 29 - \max (26; 27; 28) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i H &= \min (T_{\min} M; T_{\min} N; T_{\min} F) - T_h - \max (\text{Final más tarde E; Final más tarde G; \\ \text{Final más tarde B}) &= \min (32; 30; 34) - 5 - \max (26; 27; 28) = -3 \end{aligned}$$

CAPÍTULO III. LA DISTRIBUCIÓN DE LOS RECURSOS

Los métodos de programación de proyectos que se han estudiado en los capítulos anteriores, fundamentalmente los métodos Pert y CPM, presuponen que no existe limitación alguna en la disponibilidad de recursos necesarios para ejecutar un determinado proyecto. Es decir, la cantidad de recursos demandados por las distintas actividades que conforman el proyecto no suponen una restricción para la buena marcha del mismo. Sin embargo, esta idea no siempre se corresponde con la realidad. En multitud de ocasiones surgen problemas relacionados con la disponibilidad de determinados recursos que pueden implicar un retraso del proyecto. Otras veces, la distribución temporal de los recursos no es la adecuada al advertirse fechas donde existe una gran acumulación de recursos, mientras que en otras fechas escasean.

Existe una gran profusión de métodos para resolver los problemas de limitación de recursos. En general, se pueden agrupar en los siguientes tipos:

a) Métodos del perfil funcional

Son aquellos que están fundamentados en la aplicación de una curva analítica que se adapta con bastante aproximación al perfil del recurso.

b) Métodos analógicos

Son aquellos que se basan en analogías físicas. Un ejemplo de ello son los de carácter eléctrico, que asemejan una red Pert a una red eléctrica, pudiendo aplicar razonamientos apoyados en la Ley de Ohm.

c) Métodos heurísticos

Los métodos heurísticos son aquellos que están basados en técnicas y procedimientos ubicados en la planificación satisfactoria. Es decir, son métodos que proporcionan una buena solución, aunque no se garantiza que sea la solución óptima.

d) Modelos matemáticos

Son aquellos métodos de programación matemática que resuelven el problema ofreciendo la mejor solución posible, o sea, la solución óptima. Entre ellos, se encuentra la Programación Lineal, que permite encontrar la solución exacta a través de una función objetivo que se optimiza al someterla a una serie de restricciones. Empero, el número de ecuaciones e incógnitas a emplear es tan elevado que desaconsejan su utilización. Por ejemplo, un proyecto de 55 actividades, con cuatro tipos de recursos y un plazo de ejecución de 30 días, da lugar a un planteamiento lineal con 5.875 ecuaciones y 1.650 variables.

Los métodos más empleados en la práctica son los algoritmos heurísticos, planteándose en general dos tipos de problemas: la nivelación de recursos y la asignación de recursos.

9. LA NIVELACIÓN DE RECURSOS

La finalidad de los métodos de nivelación de recursos consiste en realizar una distribución de recursos lo más homogénea posible dentro del espacio temporal del proyecto, sin que ello suponga un retraso del mismo. Dicho de otra forma, se trata de que el consumo de los distintos recursos se materialice de manera uniforme, respetando la fecha de finalización del proyecto. Para ello, se cambiará la fecha de comienzo de determinadas actividades, hasta conseguir que el perfil de cada uno de los recursos se aproxime lo más posible al perfil ideal, representado en la figura 9.1, el cual es totalmente uniforme, es decir, demanda una cantidad de recursos constante a lo largo del tiempo.

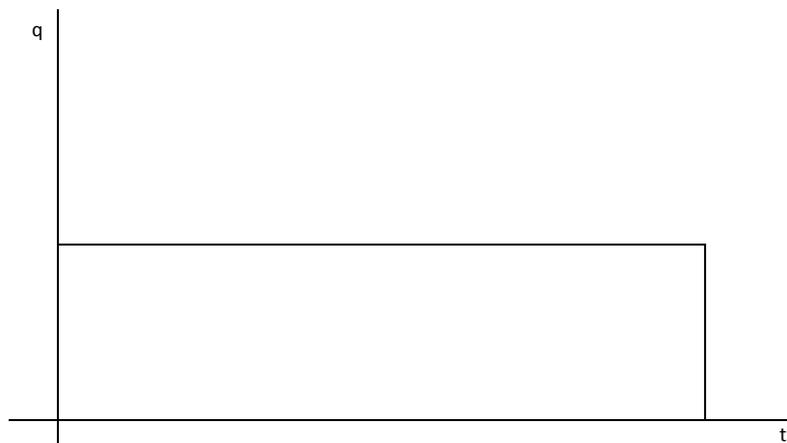


Figura 9.1

Los métodos heurísticos más utilizados para la nivelación de recursos son el método Burgess-Killebrew, ideado por los norteamericanos A. R. Burgess y J. B. Killebrew, cuando se trata de nivelar los recursos de un único proyecto, y el método $(MS)^2$, cuando la nivelación de recursos concierne a varios proyectos simultáneamente.

En los ejemplos que siguen, referidos a un único proyecto, se va a utilizar el método Burgess-Killebrew.

La nivelación se puede realizar considerando que las actividades del proyecto comienzan lo más pronto posible, o bien que comienzan lo más tarde posible. También se puede aplicar a procesos constructivos que responden a un ciclo que se repite varias veces.

9.1. NIVELACIÓN DE RECURSOS CONSIDERANDO QUE LAS ACTIVIDADES COMIENZAN LO MÁS PRONTO POSIBLE

Para realizar la nivelación de recursos de un proyecto, se parte de la representación del mismo mediante una red Pert, CPM o Roy y se siguen los siguientes pasos:

- Traducir la red a una gráfica Gantt.
- Calcular las cargas unitarias de cada uno de los recursos.
- Dibujar los perfiles iniciales de los recursos.
- Calcular las Cargas Medias y el Σ carga² ideal.
- Determinar la prioridad de los recursos.
- Realizar el proceso de nivelación.
- Dibujar los perfiles definitivos de los recursos.

Ejemplo 1

Dada la red de la figura 9.2 que representa un proyecto con una duración de 18 fechas, cuyas actividades demandan recursos tipo I y tipo II, según el cuadro de la figura 9.3, se desea realizar la nivelación de dichos recursos, suponiendo que las actividades comienzan lo más pronto posible. Se sabe que el coste unitario de los recursos asciende a 90 euros el tipo I y 60 euros el tipo II.

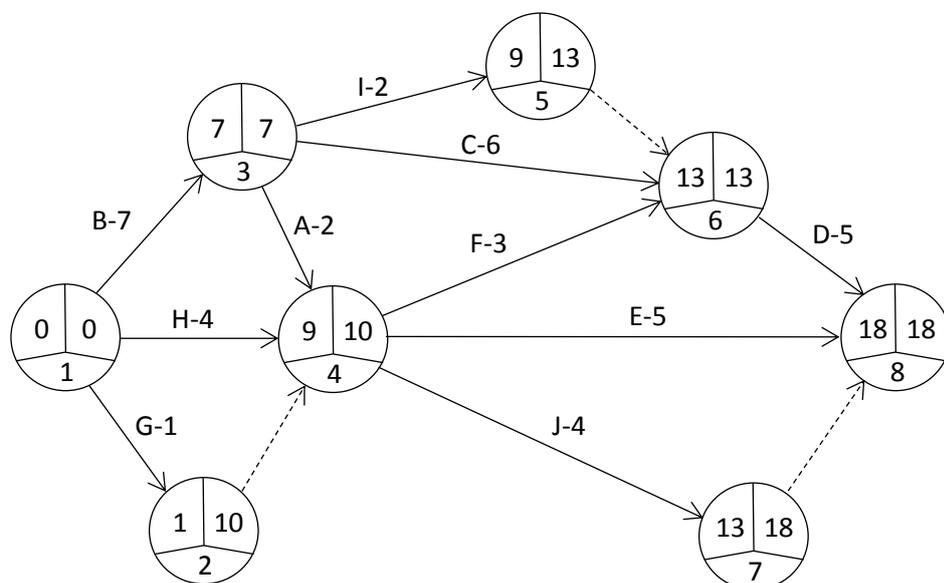


Figura 9.2

| Actividad | Recurso tipo I | Recurso tipo II |
|-----------|----------------|-----------------|
| A | 2 | 2 |
| B | 2 | 3 |
| C | 3 | -- |
| D | -- | 2 |
| E | -- | 3 |
| F | 2 | 4 |
| G | 4 | 2 |
| H | -- | 3 |
| I | 3 | -- |
| J | 5 | 2 |

Figura 9.3

Aplicando los pasos enunciados anteriormente:

a) Traducir la red a una gráfica Gantt

Se trata de representar las actividades del proyecto mediante un diagrama de barras, como se explicó en el apartado 5. El orden de las actividades en la gráfica Gantt será el siguiente:

- Se ordenarán según el menor Comienzo Más Pronto.
- A igual Comienzo Más Pronto, se ordenarán según la menor Ht.
- A igual Ht, se ordenarán según la menor duración.
- A igual duración, se ordenarán arbitrariamente.

Aplicando estos criterios, se obtiene la gráfica Gantt de la figura 9.4, en la que a cada actividad se le ha incorporado dos dígitos separados por un guion, que indican la cantidad de recursos tipo I y tipo II que necesita la actividad para ejecutarse. Además, se ha representado mediante una línea discontinua la holgura total de cada una de las actividades.

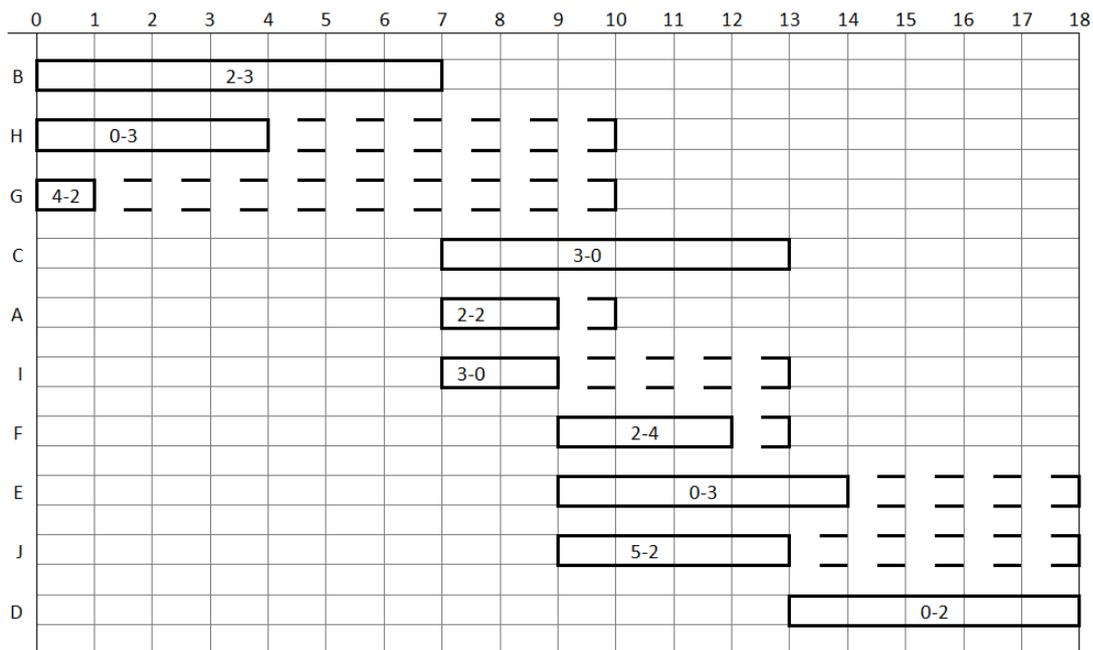


Figura 9.4

b) Calcular las cargas unitarias de cada uno de los recursos

Consiste en determinar la cantidad de recursos necesarios para cada una de las fechas de realización del proyecto. Esto se consigue sumando los recursos de las distintas actividades que están presentes en cada una de las fechas. Gráficamente se resuelve añadiendo a la gráfica Gantt tantas filas como tipo de recursos haya (en nuestro caso dos), tal y como aparece en la figura 9.5.

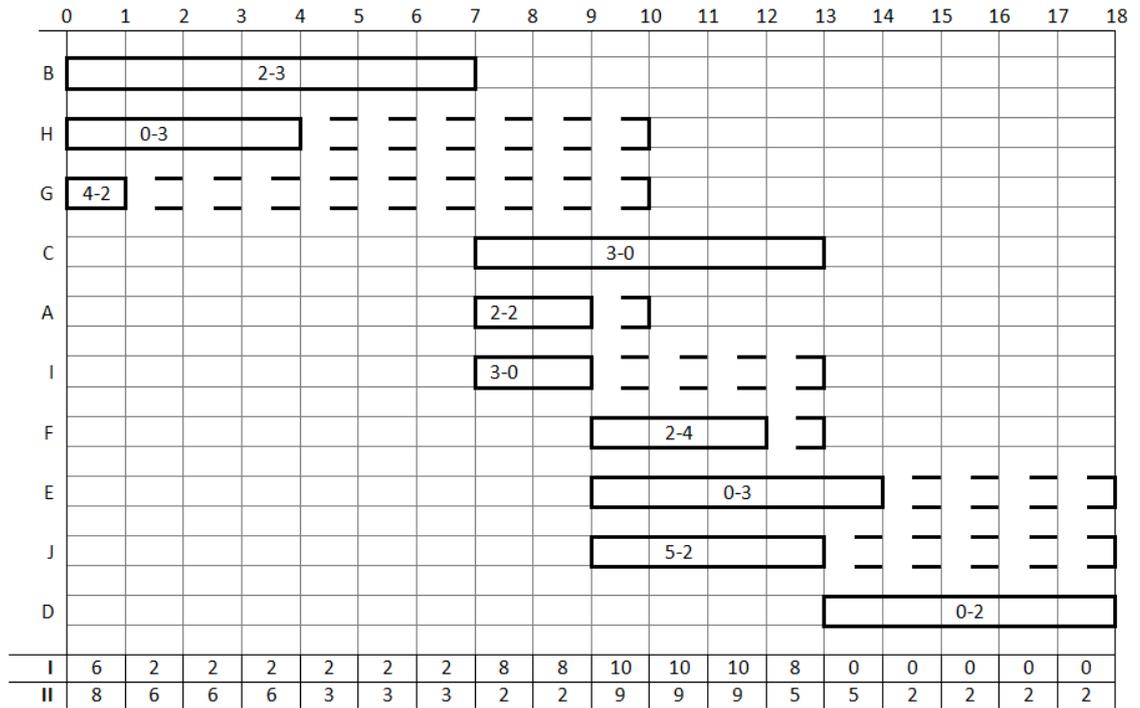


Figura 9.5

c) Dibujar los perfiles iniciales de los recursos

Se trata de dibujar, para cada uno de los recursos, el perfil de demanda del mismo. Esto se consigue representando gráficamente las cargas unitarias calculadas anteriormente, como puede observarse en las figuras 9.6 y 9.7.

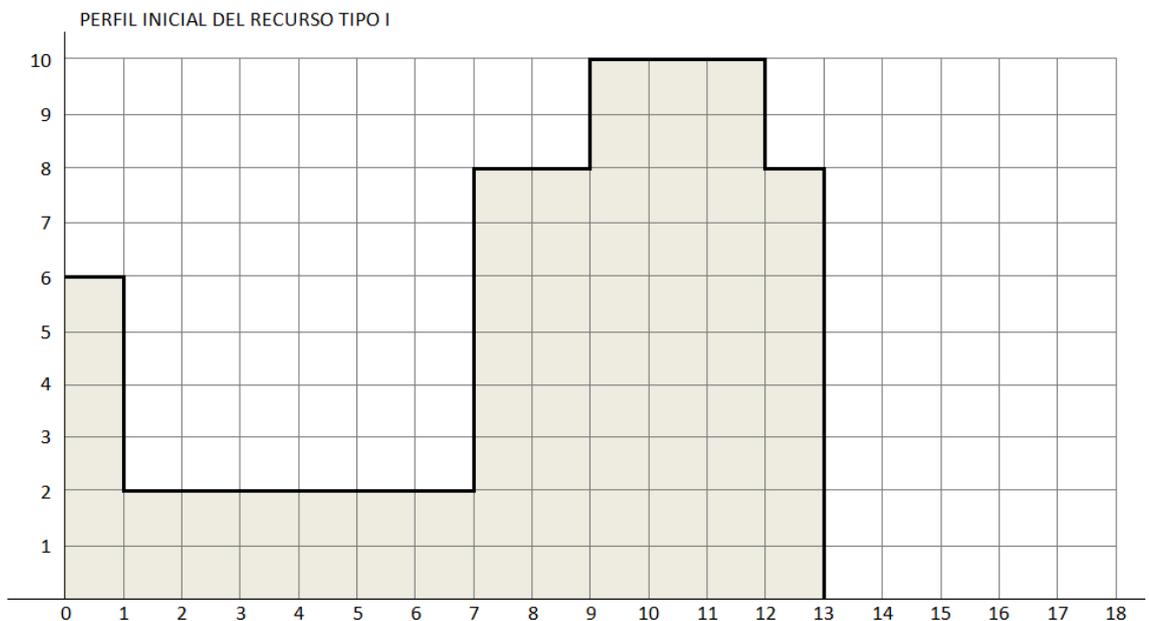


Figura 9.6

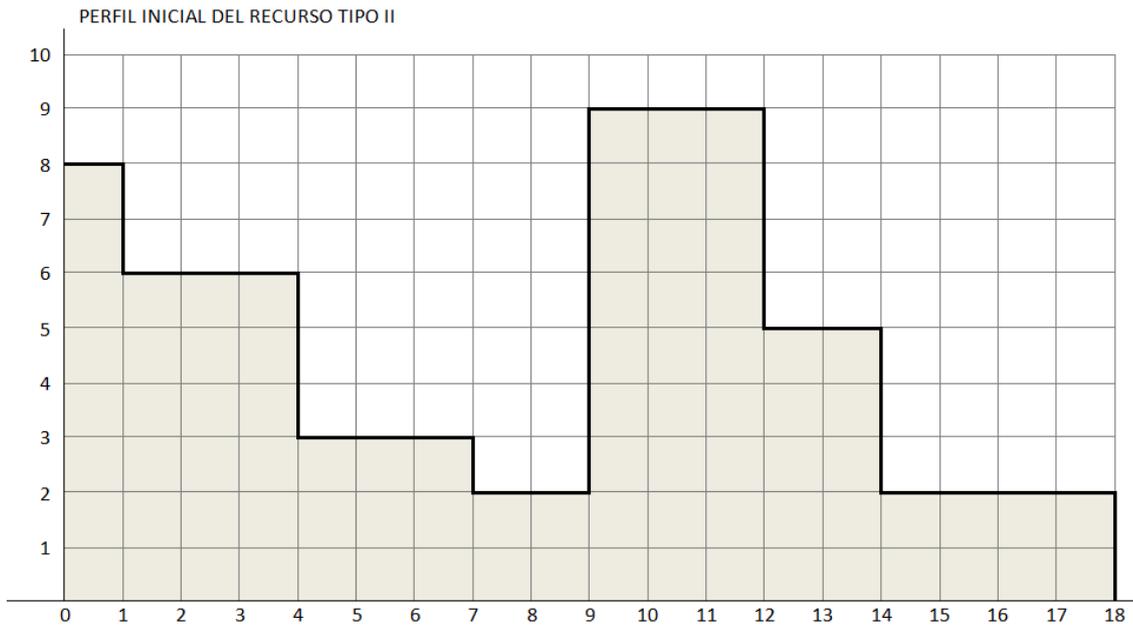


Figura 9.7

d) Calcular las Cargas Medias y el $\Sigma carga^2$ ideal

La carga media de un recurso se obtiene al dividir la suma de las cargas unitarias por el periodo de aplicación de dicho recurso. Definiéndose el *periodo de aplicación* como el máximo número de fechas en que el recurso puede estar presente de manera simultánea, teniendo en cuenta que las actividades se pueden desplazar hacia la derecha hasta consumir su holgura.

En nuestro ejemplo:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|----|----|----|----|---|---|---|----|----|-----|-----|-----|----|----|---|---|---|---|---------------------|
| I | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 8 | 10 | 10 | 10 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\Sigma I = 72$ |
| I^2 | 36 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 64 | 64 | 100 | 100 | 100 | 64 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\Sigma I^2 = 552$ |
| II | 8 | 6 | 6 | 6 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 9 | 9 | 9 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | $\Sigma II = 84$ |
| II^2 | 64 | 36 | 36 | 36 | 9 | 9 | 9 | 4 | 4 | 81 | 81 | 81 | 25 | 25 | 4 | 4 | 4 | 4 | $\Sigma II^2 = 516$ |

$$\bar{I} = \frac{\Sigma I}{P.A.} = \frac{72}{17} = 4,235294$$

Siendo:

\bar{I} = Carga Media del recurso tipo I

ΣI = Suma de las cargas unitarias del recurso tipo I

P.A. = Periodo de Aplicación del recurso tipo I (obsérvese que el recurso está presente en 13 fechas, pero desplazando las actividades que tienen holgura hacia la derecha puede llegar a estar presente en 17 fechas, como máximo).

Igualmente, para el recurso tipo II:

$$\bar{II} = \frac{\Sigma II}{P.A.} = \frac{84}{18} = 4,666666$$

Por otro lado, para determinar la Suma de la Carga al cuadrado Ideal, se utiliza la siguiente fórmula:

$$\Sigma I^2 \text{ ideal} = (\bar{I})^2 \times P.A. = 4,235294^2 \times 17 = 304,94 \approx 305$$

Siendo:

$\Sigma I^2 \text{ ideal}$ = Suma de la carga al cuadrado ideal del recurso tipo I

$(\bar{I})^2$ = Carga Media del recurso tipo I, elevada al cuadrado.

P.A. = Periodo de Aplicación del recurso tipo I.

Análogamente, para el recurso tipo II:

$$\Sigma II^2 \text{ ideal} = (\bar{II})^2 \times P.A. = 4,666666^2 \times 18 = 392$$

e) Determinar la prioridad de los recursos

El orden en el que se nivelan los recursos viene dado por el coste total de los mismos, teniendo prioridad el que tenga mayor coste. Por lo tanto:

Coste unitario recurso tipo I = 90 euros

Coste unitario recurso tipo II = 60 euros

Coste total recurso tipo I = $\Sigma I \times \text{Coste unitario} = 72 \times 90 = 6480$ euros

Coste total recurso tipo II = $\Sigma II \times \text{Coste unitario} = 84 \times 60 = 5040$ euros

En consecuencia, tiene prioridad el recurso tipo I por ser el que tiene mayor coste total.

f) Realizar el proceso de nivelación

El objetivo del proceso de nivelación es conseguir que el perfil de un recurso concreto se acerque lo más posible al perfil ideal. Esto se consigue retrasando el comienzo de determinadas actividades, es decir, desplazando dichas actividades hacia la derecha en la gráfica Gantt. Sin embargo, puede ocurrir que cuando se retrase el comienzo de una actividad se obtenga el resultado contrario, o sea, nos alejemos del perfil ideal. La manera de saber si el desplazamiento de una actividad es acertado o no, es verificando como afecta dicho desplazamiento a la suma de la carga al cuadrado (Σcarga^2) del recurso que se esté nivelando. Cuando Σcarga^2 disminuye, o se mantiene constante, el desplazamiento es válido. En el caso contrario, cuando Σcarga^2 aumenta, el desplazamiento no es válido. La razón de este proceder es porque el perfil ideal es aquel que tiene menor Σcarga^2 y que coincide con $\Sigma \text{carga}^2 \text{ ideal}$, calculado

previamente. Por ello, si $\sum \text{carga}^2$ aumenta, significa que el perfil del recurso se está alejando del perfil ideal.

En el procedimiento para nivelar los recursos es preciso observar las siguientes cuestiones:

- Se nivelarán los recursos en el orden de prioridad establecido. En nuestro caso, primero se nivela el recurso tipo I y posteriormente el recurso tipo II.

- En la nivelación de cada uno de los recursos, las actividades se nivelarán en orden inverso al que aparecen en la gráfica Gantt.

- La nivelación de una actividad consistirá en ir desplazándola hacia la derecha, hasta que consuma su holgura o hasta que la suma de la carga al cuadrado aumente. Por lo tanto, no se podrán nivelar las actividades que no posean holgura.

- Una vez que se han nivelado todas las actividades que necesitan de un determinado recurso, se efectúa una segunda iteración comenzando de nuevo por la primera actividad que se ha nivelado. Se realizarán tantas iteraciones como admita el recurso en cuestión.

- Después de nivelar el recurso prioritario, se nivela el siguiente recurso en orden de prioridad, realizando todas las iteraciones que sean necesarias. En este caso, sólo se nivelan las actividades que tienen el recurso de que se trate, exceptuando aquellas que también tienen recurso prioritario (ya nivelado).

- Concluida la nivelación del segundo recurso en orden de prioridad, se sigue con el tercero, el cuarto, etc., hasta nivelar todos los recursos.

Aplicando el procedimiento descrito anteriormente al ejemplo en estudio, se obtiene lo siguiente:

Nivelación del recurso tipo I (prioritario)

Se parte de la gráfica Gantt de la figura 9.4, a la que se añade debajo las cargas unitarias del recurso tipo I y sus cuadrados correspondientes (ver figura 9.8), con indicación de los sumatorios vinculados ($\sum I = 72$; $\sum I^2 = 552$; $\sum I^2 \text{ ideal} = 305$). Si se comparan los dos últimos, se advierte que el perfil del recurso está lejos de ser el perfil ideal.

Se comienza la nivelación por la actividad J, la cual comienza en fecha 9 y termina en fecha 13. Si retrasamos el comienzo de esta actividad en una fecha, comenzará en fecha 10 y terminará en fecha 14 y, como consecuencia de ello, el sumatorio de la carga al cuadrado pasará a valer $\sum I^2 = 502$, es decir, se ha reducido en 50 unidades y, por lo tanto, es válido. Seguidamente, se desplaza otra fecha la actividad J, comprobando de nuevo que el sumatorio de la carga al cuadrado baja en 50 unidades,

situándose en $\sum I^2 = 452$. En los dos desplazamientos siguientes el sumatorio de la carga al cuadrado sigue bajando situándose en 402 y 372, respectivamente. Finalmente, en el siguiente movimiento el sumatorio de la carga al cuadrado se mantiene en 372, no pudiéndose realizar más desplazamientos, dado que la actividad ya ha consumido toda su holgura.

El procedimiento descrito anteriormente se puede contemplar en la figura 9.8, donde se ha simulado el desplazamiento de la actividad J debajo de la gráfica, indicando en cada movimiento las cargas unitarias que se ven afectadas. Así, en el primer movimiento, la actividad dejará de estar presente en la columna comprendida entre fecha 9 y 10, como consecuencia de ello la carga pasará de 10 unidades a 5 unidades y el cuadrado de la carga de 100 a 25 (el sumatorio de la carga al cuadrado disminuirá en 75). Así mismo, la actividad va a estar presente en la columna comprendida entre fecha 13 y 14, pasando la carga de 0 a 5 y el cuadrado de 0 a 25 (el sumatorio de la carga al cuadrado aumentará en 25). En definitiva, el sumatorio de la carga al cuadrado disminuye en 50, siendo el nuevo valor $\sum I^2 = 552 - 50 = 502$.

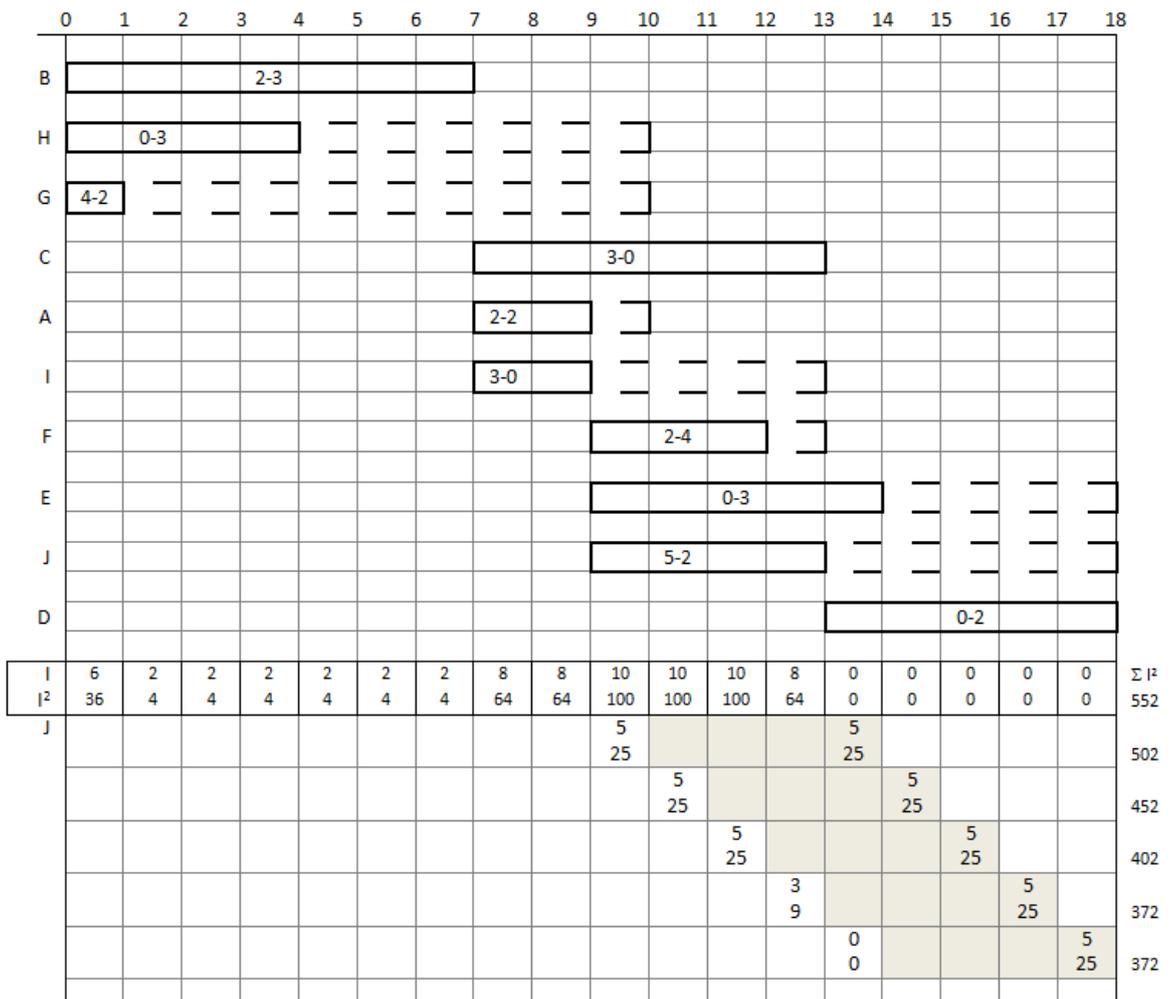


Figura 9.8

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | | |
|------------------------|-----|----|----|----|----|----|-----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|----|----|----|----|---------|--------------|-----|
| B | 2-3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| H | 0-3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| G | 4-2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| C | | | | | | | | 3-0 | | | | | | | | | | | | | |
| A | | | | | | | 2-2 | | | | | | | | | | | | | | |
| I | | | | | | | 3-0 | | | | | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | 2-4 | | | | | | | | | | | |
| E | | | | | | | | | | 0-3 | | | | | | | | | | | |
| J | | | | | | | | | | 5-2 | | | | | | | | | | | |
| D | | | | | | | | | | | | | | 0-2 | | | | | | | |
| I | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 8 | 8 | 10 | 10 | 10 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Σi^2 | |
| J | 36 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 64 | 64 | 100 | 100 | 100 | 64 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 552 | |
| J | | | | | | | | | | 5 | | | | 5 | | | | | | | 502 |
| J | | | | | | | | | | | 5 | | | | 5 | | | | | | 452 |
| J | | | | | | | | | | | | 5 | | | | 5 | | | | | 402 |
| J | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | 5 | | 372 |
| J | | | | | | | | | | | | | | 9 | | | | | 25 | | 372 |
| J | | | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | | 5 | 372 |
| F | | | | | | | | | | | 3 | | | 5 | | | | | | | 372 |
| I | | | | | | | | | | | 9 | | | 25 | | | | | | | 372 |
| I | | | | | | | | 5 | | | 6 | | | | | | | | | | 360 |
| I | | | | | | | | | 5 | | | 8 | | | | | | | | | 360 |
| I | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | 372 |
| A | | | | | | | | | | | | 9 | | | | | | | | | 372 |
| A | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 372 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 372 |
| G | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | 2 | 6 | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | 4 | 36 | | | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | 2 | 6 | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | 4 | 36 | | | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | 2 | 6 | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | 4 | 36 | | | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | 2 | 6 | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | 4 | 36 | | | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | 2 | 6 | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | 4 | 36 | | | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 | 6 | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 | 36 | | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 2 | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4 | 360 |
| G | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 384 |
| NO ADMITE 2ª ITERACIÓN | | | | | | | | | | | | | | | | | | | NO VALE | | |

Figura 9.10

Nivelación del recurso tipo II

La nivelación del recurso tipo II se realiza a partir de la situación en que han quedado las actividades después de nivelar el recurso tipo I. Para ello, lo primero es calcular las cargas unitarias del recurso tipo II (que ahora no coincidirán con las calculadas inicialmente, dado que hay actividades que se han desplazado al nivelar el recurso I) y sus cuadrados correspondientes. A partir de aquí, el proceso de nivelación es idéntico al llevado a cabo con el recurso prioritario, con la única salvedad de que ahora sólo se nivelan las actividades que consumen recurso tipo II, pero no consumen recurso tipo I, y además posean holgura. Sólo hay dos actividades que cumplan con estos requisitos, la actividad E y la H. Sometidas dichas actividades al proceso de nivelación, se verifica que la actividad E no admite nivelación, al aumentar el sumatorio de la carga al cuadrado, mientras que la actividad H sí que admite nivelación en los dos primeros desplazamientos. En la figura 9.11 queda plasmado el proceso de nivelación del recurso tipo II.

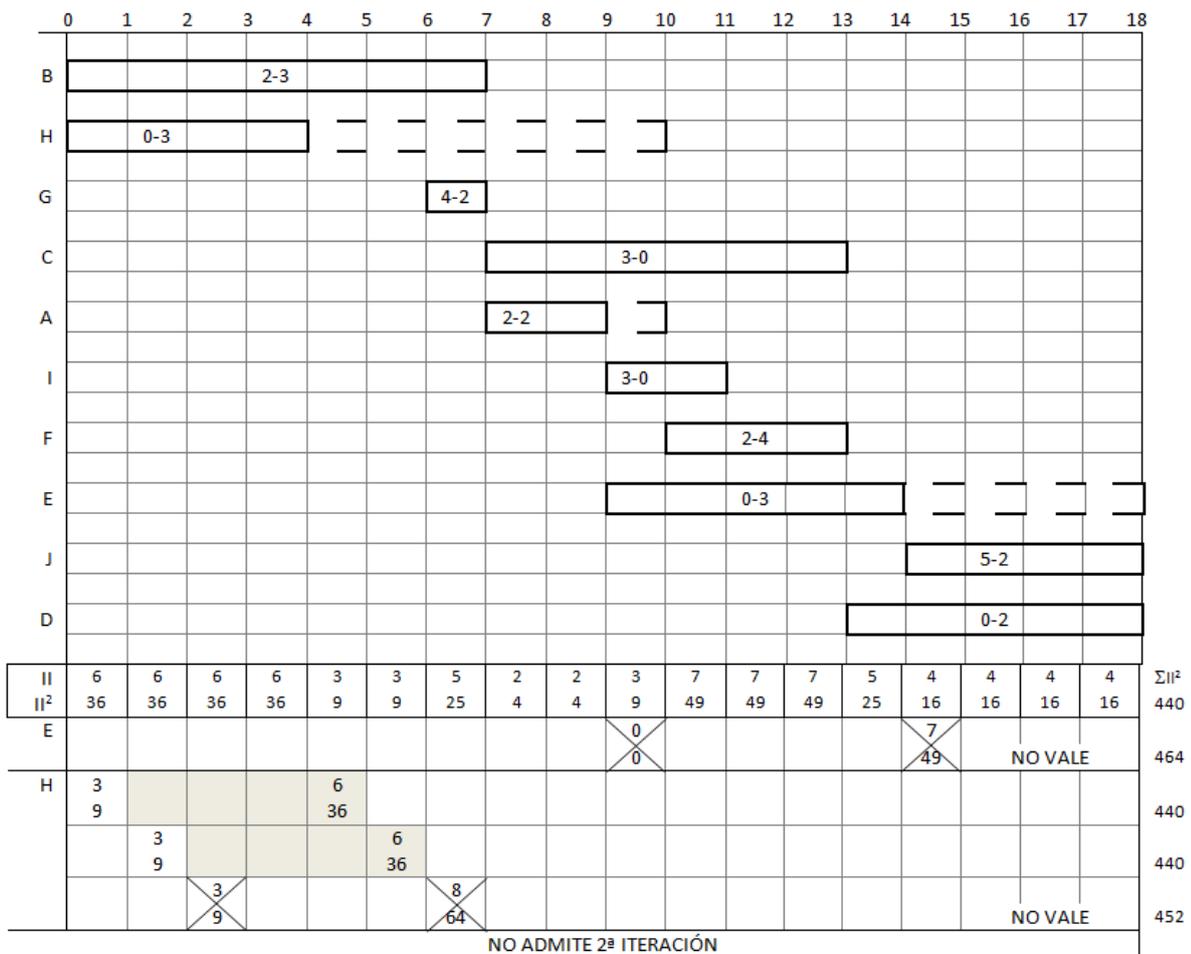


Figura 9.11

g) Dibujar los perfiles definitivos de los recursos

Una vez concluido el proceso de nivelación, se dibuja la gráfica Gantt definitiva en la que las actividades se muestran en la posición que han quedado después de los desplazamientos a que han sido sometidas. Debajo de la gráfica Gantt (figura 9.12) se recalculan las cargas unitarias de los dos recursos y, finalmente, se representan gráficamente estas cargas unitarias, obteniéndose los perfiles definitivos de los recursos que, como puede verse en las figuras 9.13 y 9.14, se aproximan más al perfil ideal que los iniciales.

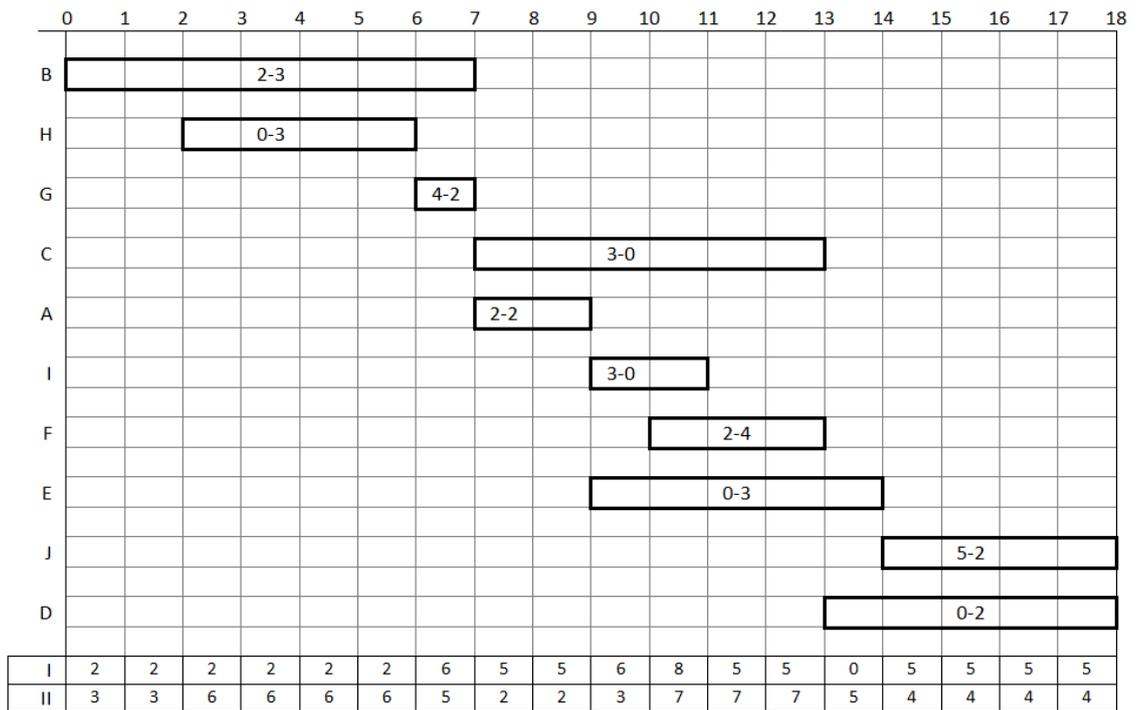


Figura 9.12

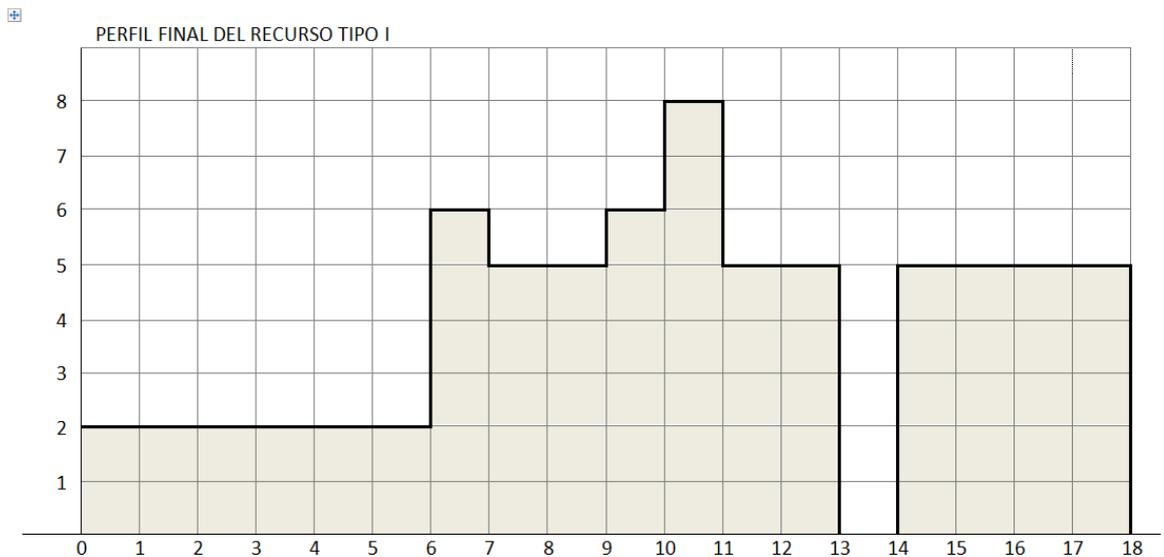


Figura 9.13

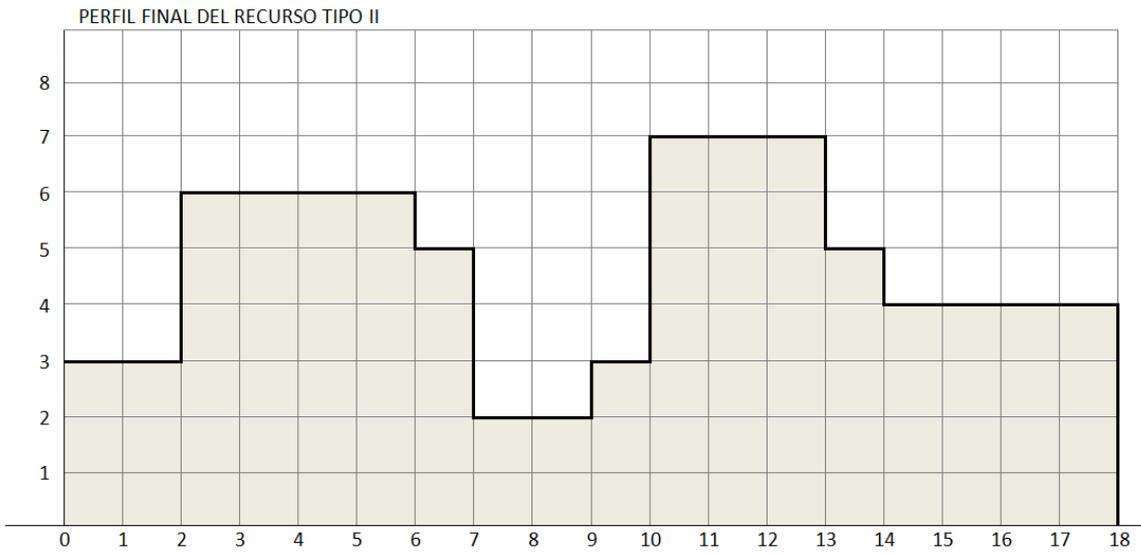


Figura 9.14

Ejemplo 2

Dada la red de la figura 9.15, ejecutar la nivelación de los recursos, sabiendo que la repercusión económica de los recursos tipo I y tipo II ascienden a 600.000 euros y 800.000 euros, respectivamente.

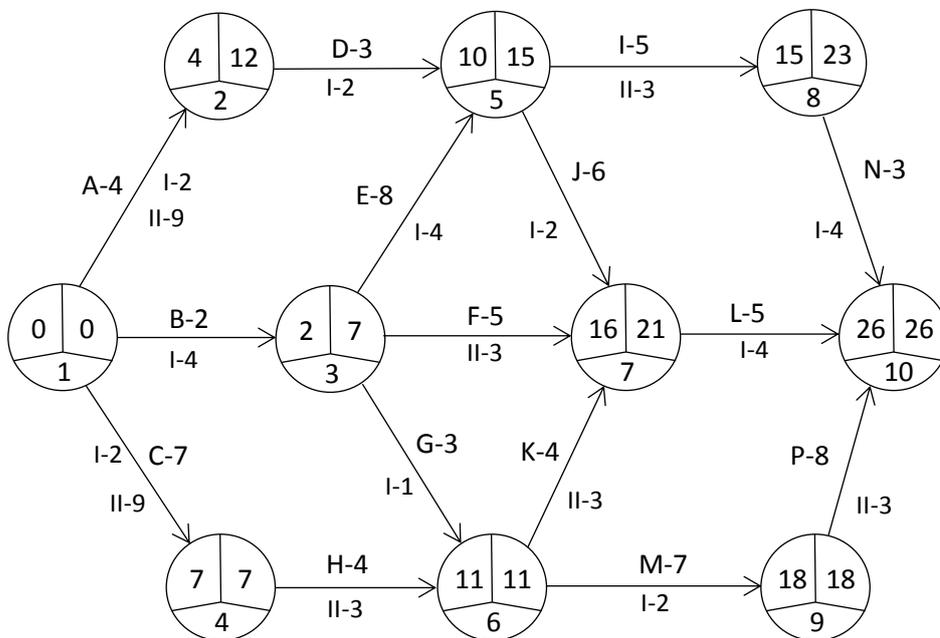


Figura 9.15

Para la resolución de este problema se siguen los mismos pasos que en el ejemplo anterior:

a) Traducir la red a una gráfica Gantt (Figura 9.16)

b) Calcular las cargas unitarias de cada uno de los recursos (Figura 9.16)

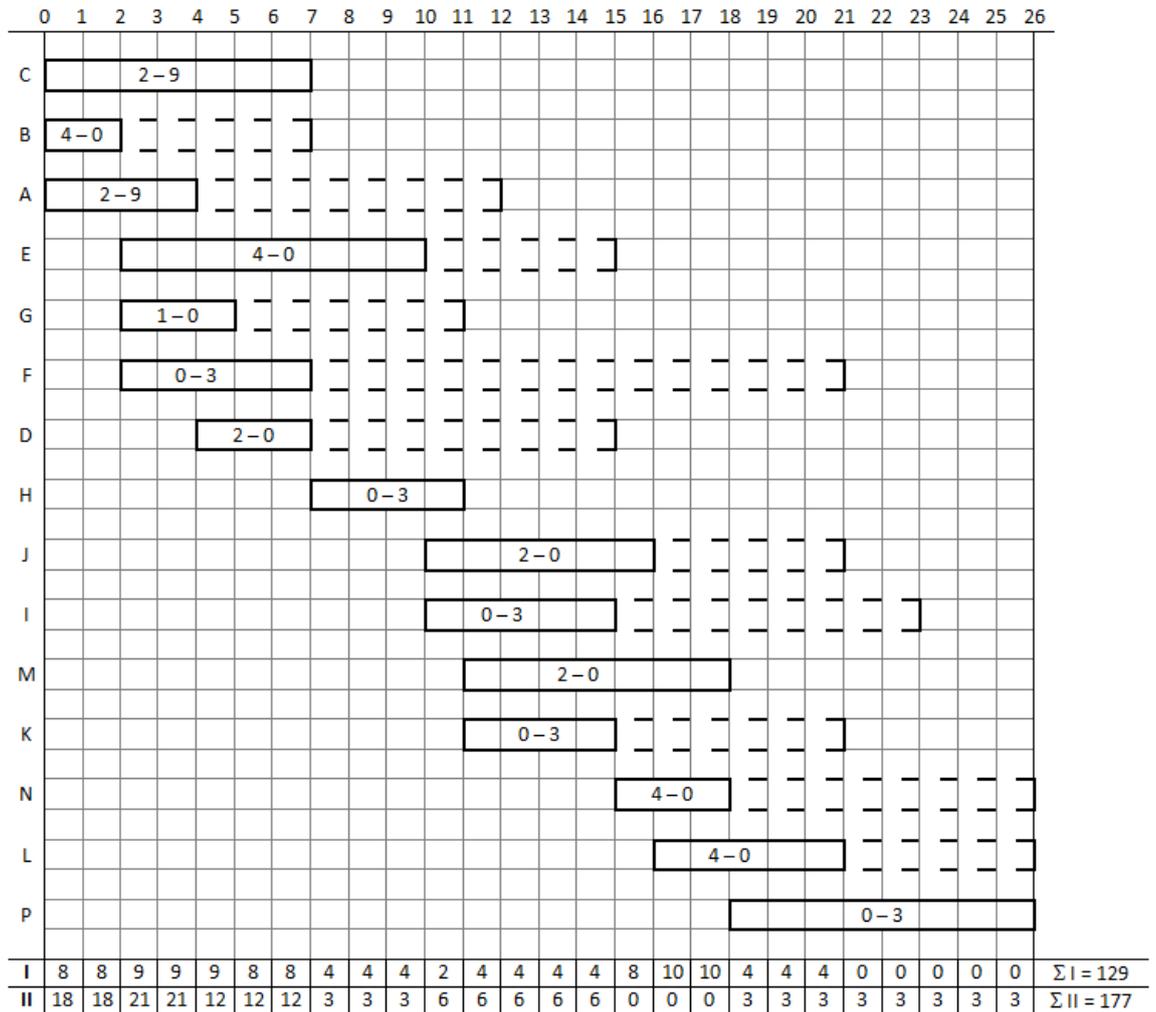


Figura 9.16

c) Dibujar los perfiles iniciales de los recursos (Figuras 9.17 y 9.18)

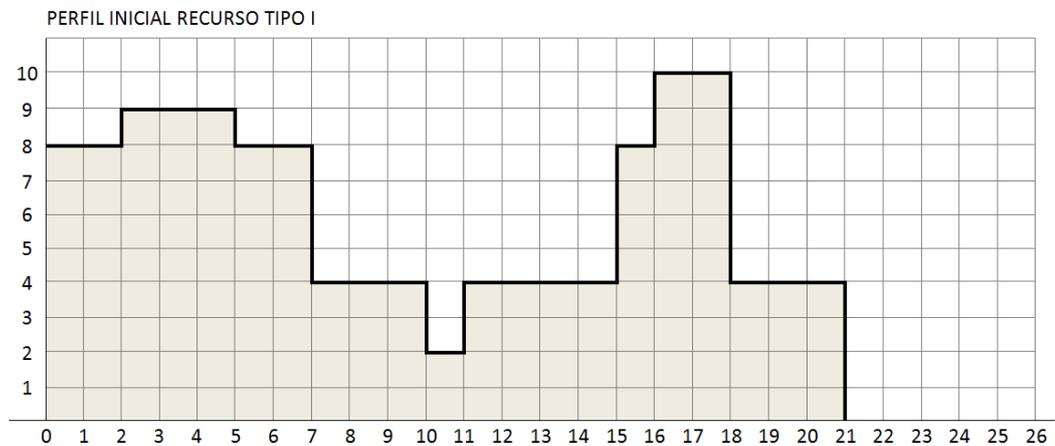


Figura 9.17

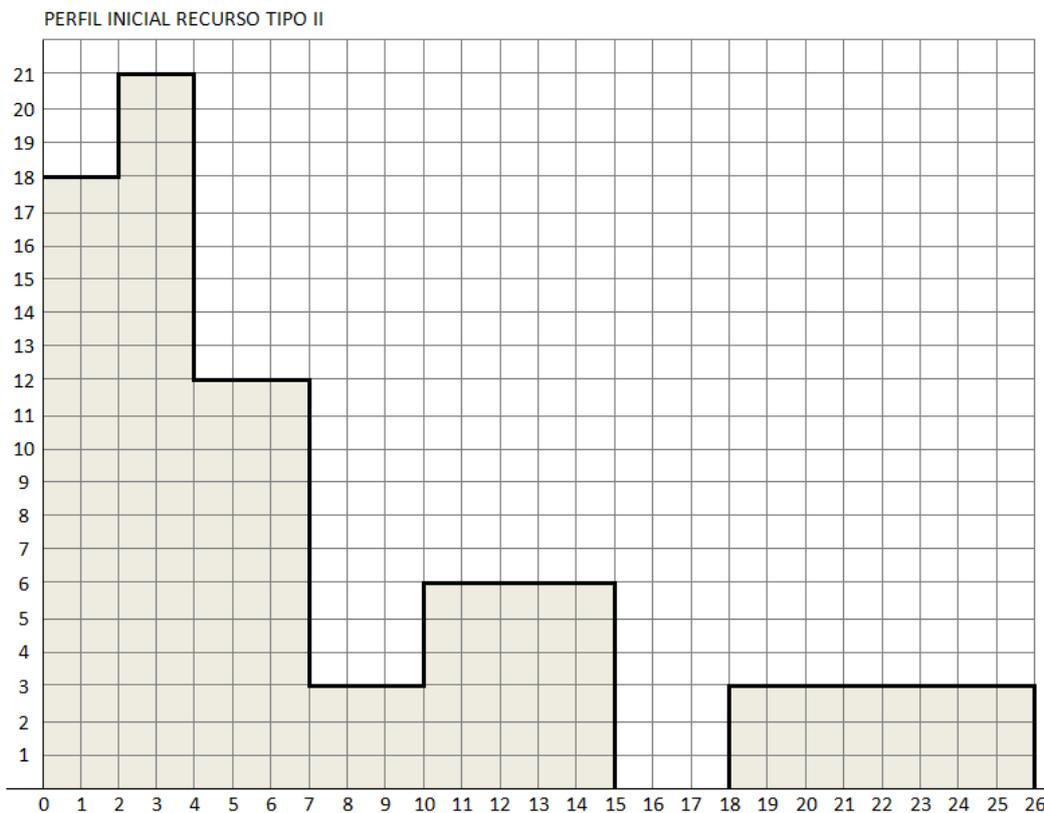


Figura 9.18

d) Calcular las Cargas Medias y el Σcarga^2 ideal

$$\bar{I} = \frac{\Sigma I}{\text{P.A.}} = \frac{129}{26} = 4,961538$$

$$\Sigma I^2 \text{ ideal} = (\bar{I})^2 \times \text{P.A.} = 4,961538^2 \times 26 = 640$$

$$\bar{II} = \frac{\Sigma II}{\text{P.A.}} = \frac{177}{26} = 6,807692$$

$$\Sigma II^2 \text{ ideal} = (\bar{II})^2 \times \text{P.A.} = 6,807692^2 \times 26 = 1205$$

e) Determinar la prioridad de los recursos

El recurso prioritario es el tipo II, dado que es el que tiene mayor repercusión económica.

f) Realizar el proceso de nivelación

Nivelación del recurso tipo II.

En la figura 9.19 se puede observar el resultado de la nivelación del recurso tipo II. En este caso, el proceso ha admitido tres iteraciones. En la primera, se han desplazado las actividades K (4 fechas), I (1 fecha), F (8 fechas) y A (4 fechas). Obsérvese que la actividad A todavía posee holgura y, sin embargo, se ha detenido el proceso de nivelación después del cuarto movimiento por motivos de precedencia con otras actividades, dado que la actividad A precede a la D, y ésta a la actividad I, la cual ya ha sido nivelada e impide más desplazamientos de la actividad A. En la segunda iteración, se han nivelado de nuevo las actividades K (1 fecha), I (2 fechas), F (1 fecha) y A (2 fechas). Otra vez, por motivos de precedencia, la actividad A solo se mueve dos fechas, las mismas que se ha movido la actividad I. En la tercera iteración, únicamente admite nivelación la actividad K en una fecha.

Nivelación del recurso tipo I.

Una vez nivelado el recurso tipo II, se obtiene la gráfica Gantt con la nueva posición de las actividades y se calculan las cargas unitarias del recurso tipo I y sus cuadrados respectivos. Seguidamente se efectúa el proceso de nivelación, dando como resultado la situación que se aprecia en la figura 9.20, donde se desplazan las actividades G (1 fecha) y E (1 fecha), no admitiendo segunda iteración.

g) Dibujar los perfiles definitivos de los recursos

Siguiendo las mismas indicaciones que en el anterior ejemplo, se obtiene la gráfica Gantt definitiva y los nuevos perfiles de los recursos, como aparece en la figuras 9.21, 9.22 y 9.23.

INVESTIGACIÓN OPERATIVA. TÉCNICAS Y MODELOS DE PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS COMPLEJOS

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------------|
| II | 18 | 18 | 21 | 21 | 12 | 12 | 12 | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | $\Sigma II^2 = 2241$ |
| II ² | 324 | 324 | 441 | 441 | 144 | 144 | 144 | 9 | 9 | 9 | 36 | 36 | 36 | 36 | 36 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | |
| K | | | | | | | | | | | | 3 | | | | 3 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2223$ |
| | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | 3 | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2205$ |
| | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | 3 | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2187$ |
| | | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | 6 | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2187$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | 6 | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2205$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | 6 | | | | | | | | NO VALE |
| I | | | | | | | | | | | 3 | | | | | 6 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2187$ |
| | | | | | | | | | | | | 0 | | | | | 6 | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2205$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | NO VALE |
| F | | | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2097$ |
| | | | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 2007$ |
| | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1971$ |
| | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1935$ |
| | | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | NO VALE |
| | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1917$ |
| A | 9 | | | | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | 9 | | | | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | 9 | | | 18 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1899$ |
| | | | 9 | | | | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1791$ |
| | | | 81 | | | | 144 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SEGUNDA ITERACIÓN | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | | | | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1791$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 9 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1809$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | | | | | | | | NO VALE |
| I | | | | | | | | | | | 3 | | | | | 6 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1791$ |
| | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1791$ |
| | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1809$ |
| | | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | NO VALE |
| F | | | | | | | | | | | 3 | | | | | 6 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1791$ |
| | | | | | | | | | | | | 0 | | | | | 9 | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1827$ |
| | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | 9 | | | | | | | | | | | NO VALE |
| A | | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1683$ |
| | | | | 81 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1575$ |
| | | | | | 9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | 81 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| TERCERA ITERACIÓN | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| K | | | | | | | | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1575$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | 9 | | | | | | | | | | | | |
| F | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | 6 | | | | | | | | | | | $\Sigma II^2 = 1593$ |
| | | | | | | | | | | | | | 0 | | | | 36 | | | | | | | | | | | NO VALE |

Figura 9.19

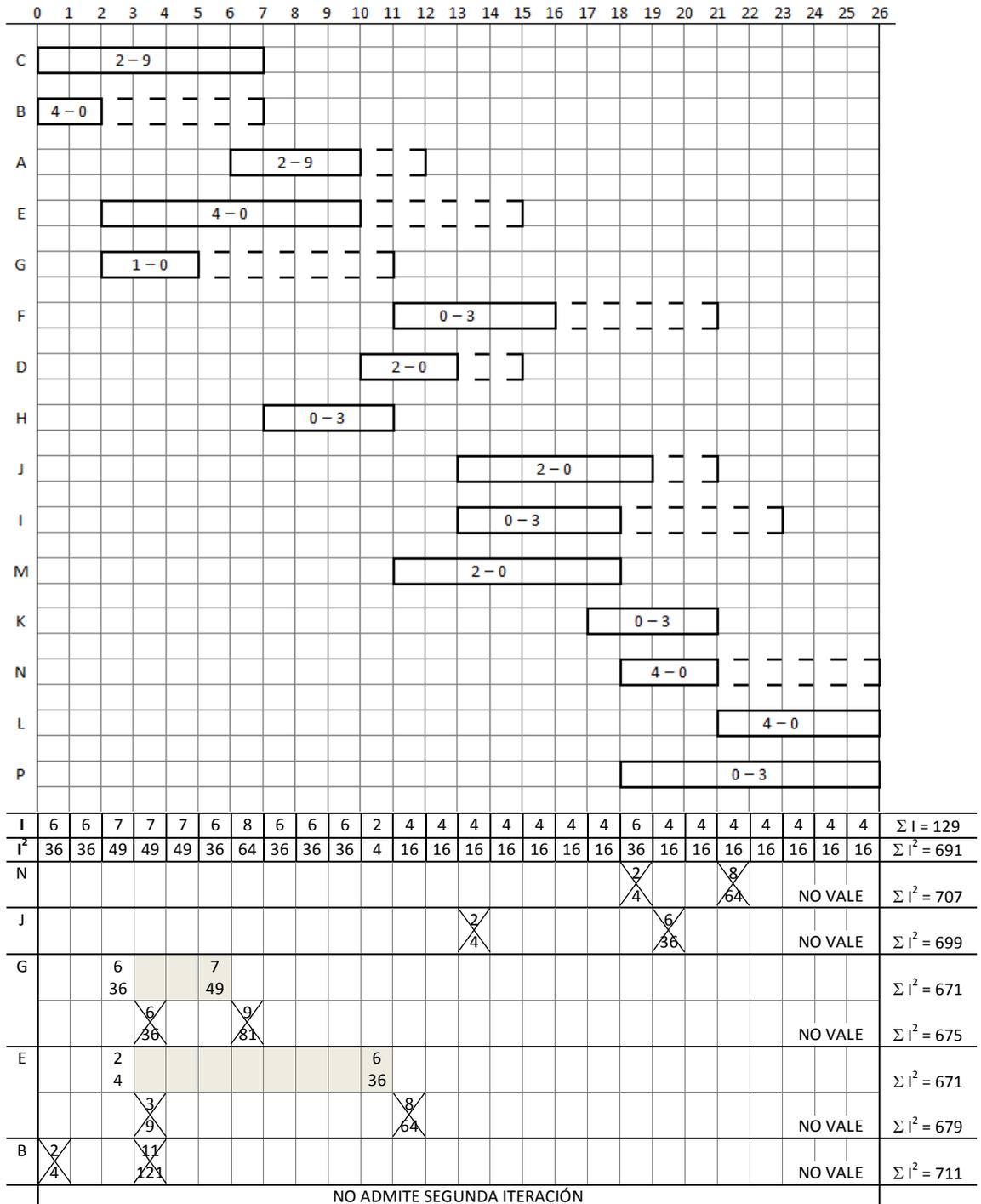


Figura 9.20

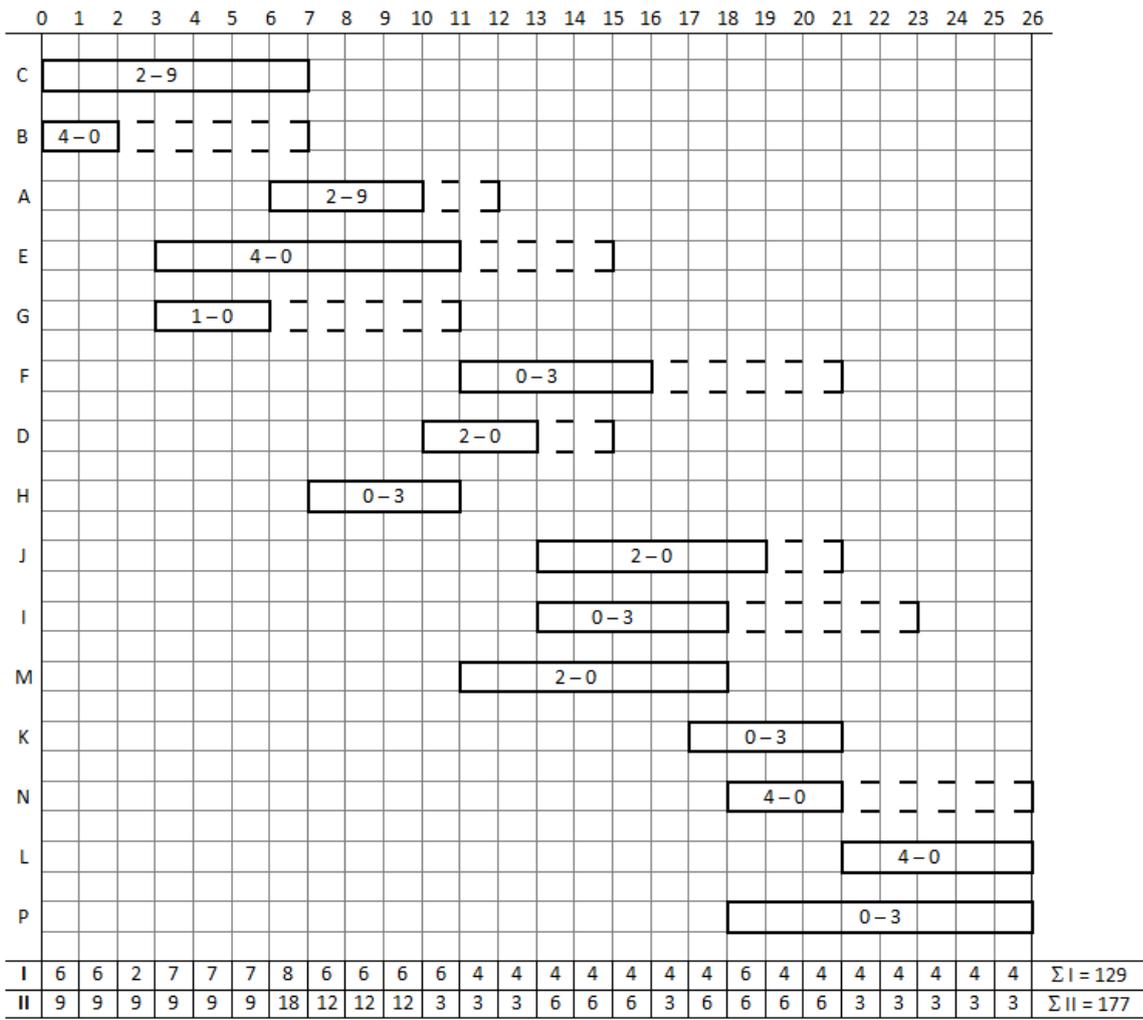


Figura 9.21

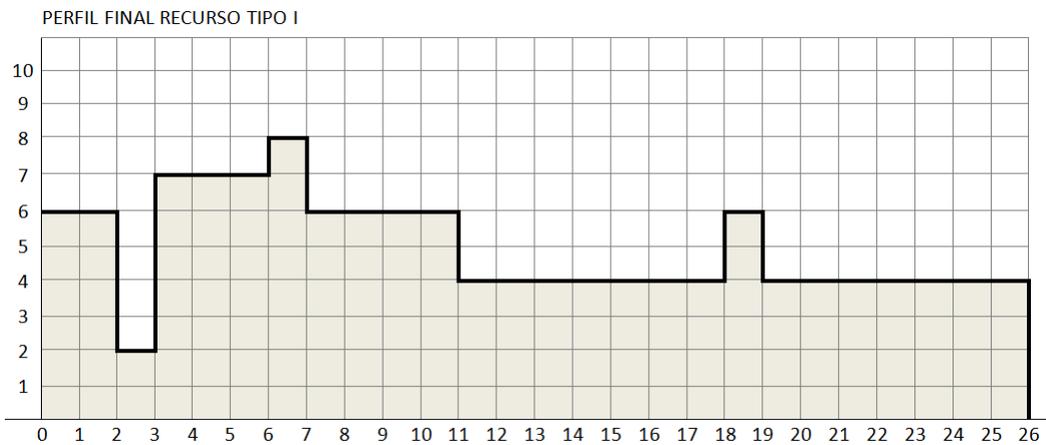


Figura 9.22

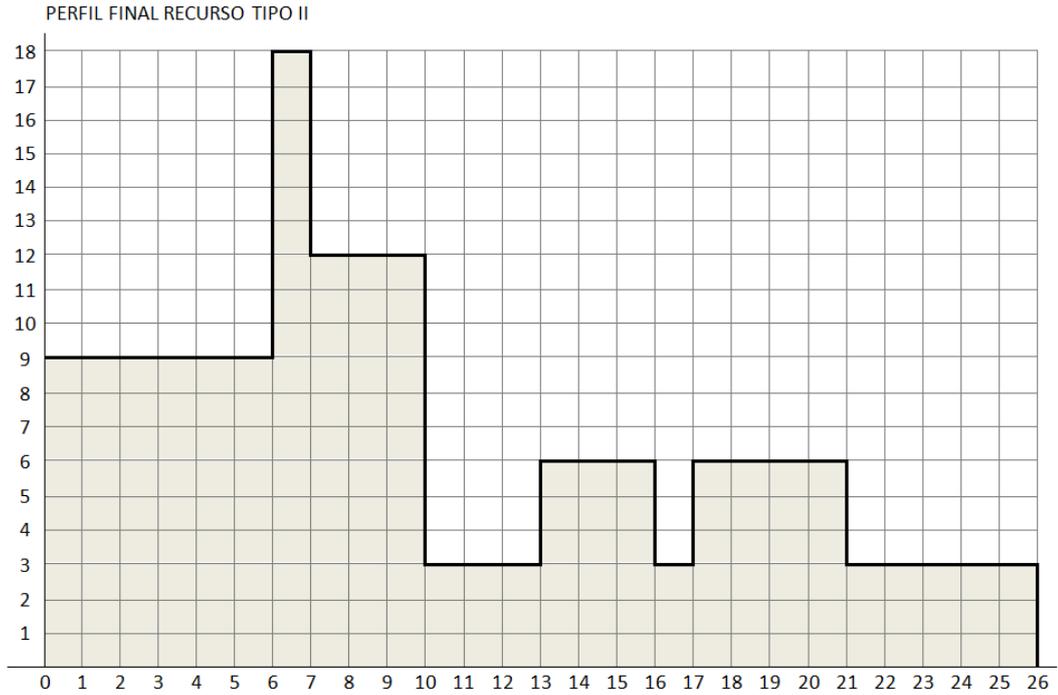


Figura 9.23

9.2. NIVELACIÓN DE RECURSOS CONSIDERANDO QUE LAS ACTIVIDADES COMIENZAN LO MÁS TARDE POSIBLE

El procedimiento de nivelación que se ha seguido en los ejemplos anteriores ha consistido, básicamente, en representar las actividades en su fecha más temprana de comienzo e ir desplazándolas hacia su fecha más tarde de comienzo. Pero, también se puede proceder al revés, mostrando las actividades en su fecha más tarde de comienzo e ir desplazándolas hacia la izquierda, es decir, hacia la fecha más temprana de comienzo. Para ello, la holgura de las actividades se traza en sentido contrario.

Ejemplo

Partiendo de la red de la figura 9.24, realizar la nivelación únicamente del

recurso prioritario (recurso tipo II) en el supuesto de que las actividades se estén ejecutando en su fecha más tarde de comienzo.

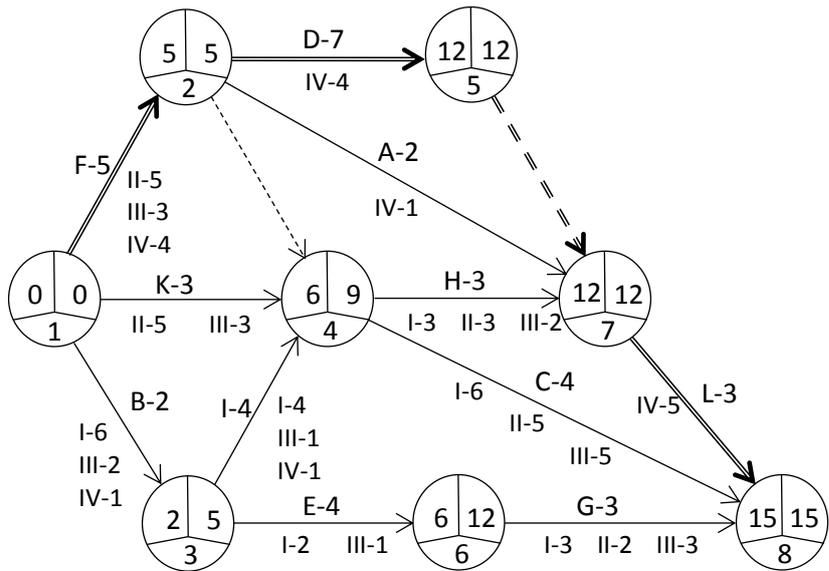


Figura 9.24

Resolución:

a) Traducir la red a una gráfica Gantt

Se procede igual que en los ejemplos anteriores, pero representando las actividades en sus fechas más tardías de comienzo y con la holgura hacia la izquierda, como aparece en la figura 9.25.

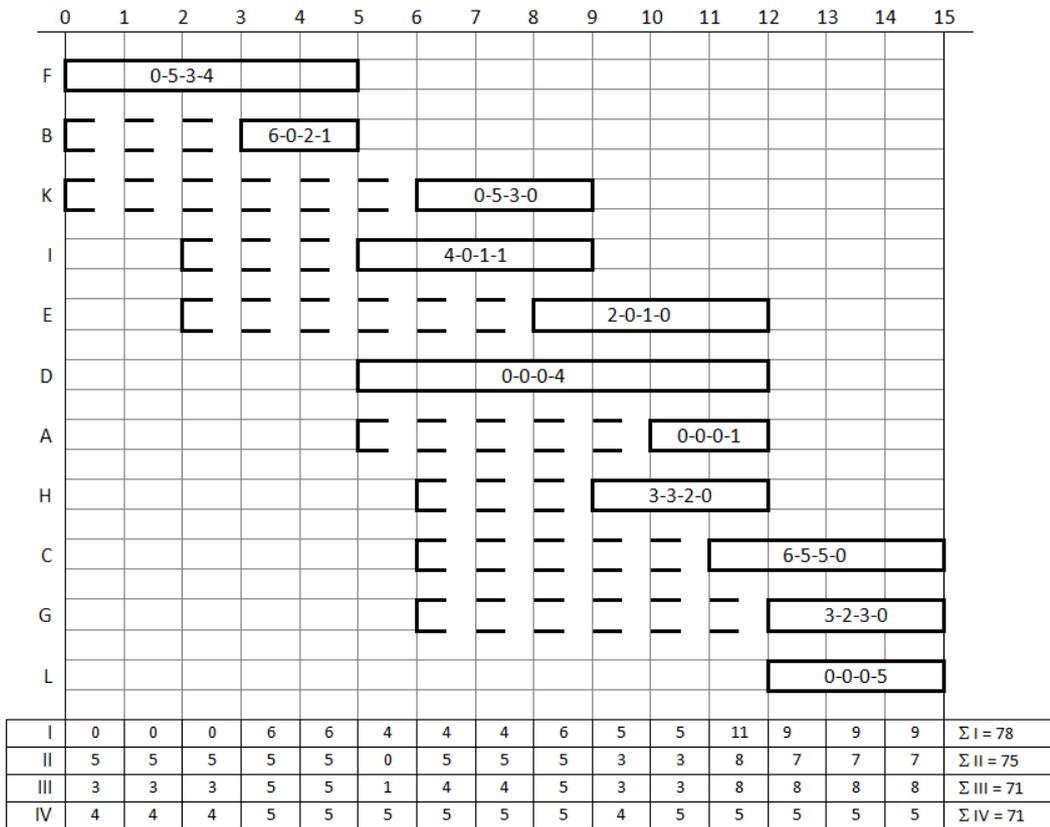


Figura 9.25

b) Calcular las cargas unitarias de cada uno de los recursos (Figura 9.25)

c) Dibujar los perfiles iniciales de los recursos (Figura 9.26, 9.27, 9.28 y 9.29)

d) Calcular las Cargas Medias y el Σcarga^2 ideal

Como el recurso tipo II es el prioritario, se realizan los cálculos solamente para este recurso que es el único que se va a nivelar.

$$\bar{\text{II}} = \frac{\Sigma \text{II}}{\text{P.A.}} = \frac{75}{15} = 5$$

$$\Sigma \text{II}^2 \text{ ideal} = (\bar{\text{II}})^2 \times \text{P.A.} = 5^2 \times 15 = 375$$

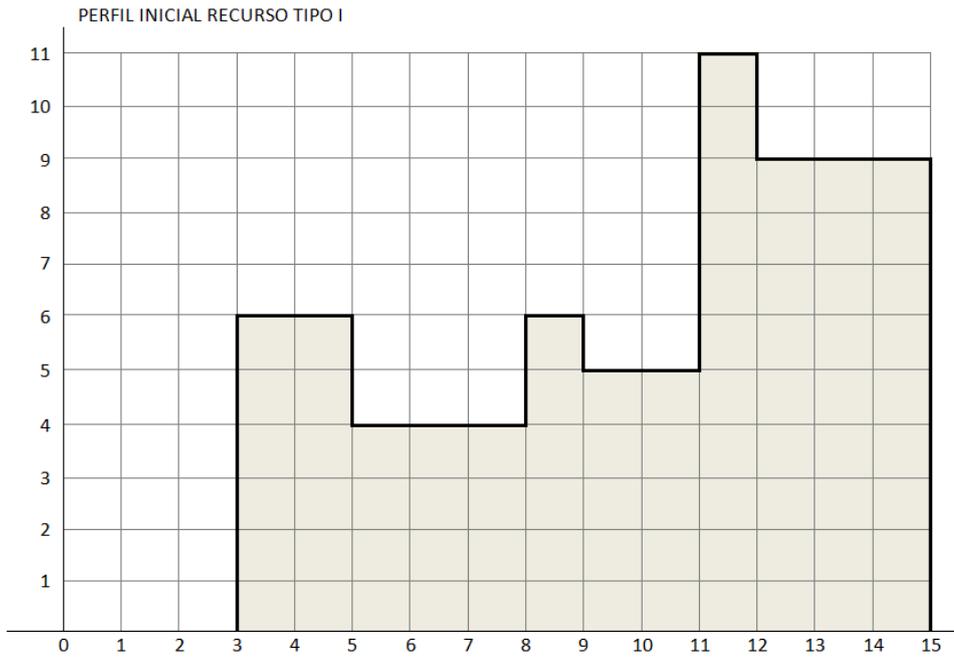


Figura 9.26

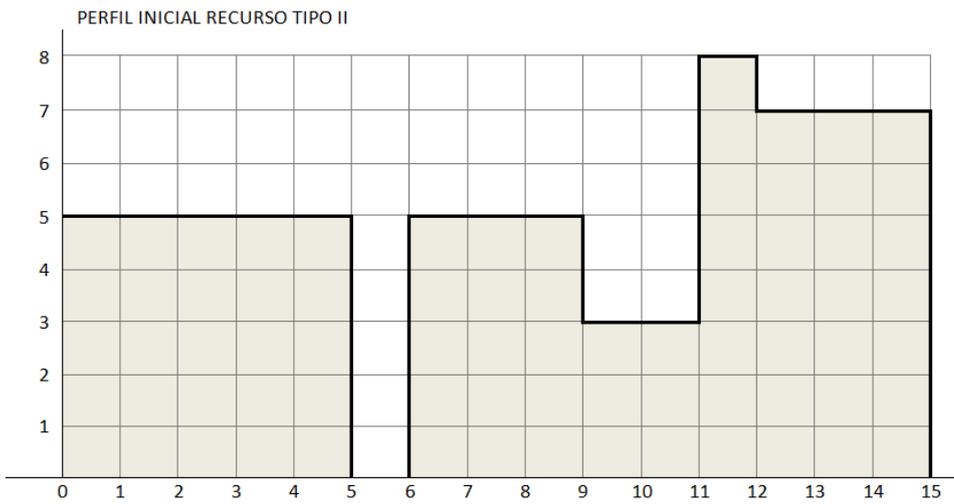


Figura 9.27

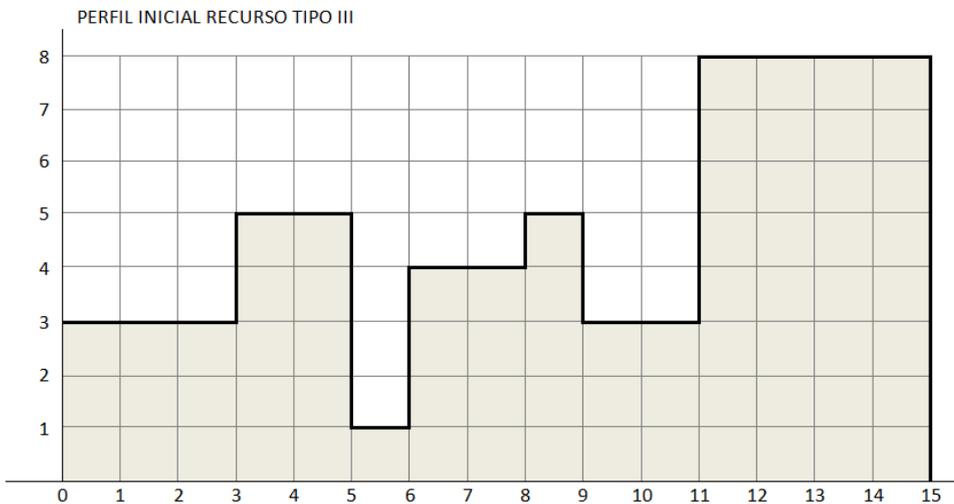


Figura 9.28

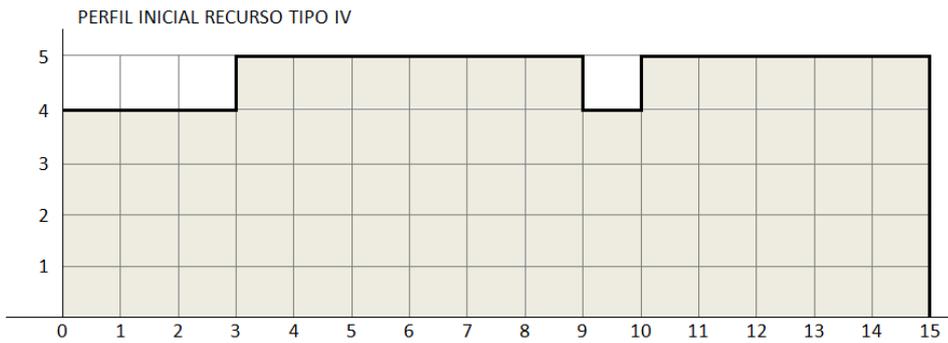


Figura 9.29

e) Realizar el proceso de nivelación

La metodología de nivelación es la misma que cuando las actividades se representan en sus fechas más tempranas de comienzo, con la diferencia de que se comienza a nivelar por la primera actividad que tenga recurso tipo II y posea holgura, siguiendo por las demás actividades en orden descendente. Además, las actividades se desplazan hacia la izquierda.

En la figura 9.30 se indican los pasos seguidos para la nivelación del recurso tipo II, donde se puede observar que las actividades niveladas son la actividad K (1 fecha), la actividad H (1 fecha) y la actividad G (4fechas). Nótese que el proceso de nivelación se ha detenido después del cuarto desplazamiento de la actividad G, sin comprobar si admite más desplazamientos (ya que todavía conserva holgura) y sin constatar si se pueden realizar más iteraciones. Ello es debido a que el perfil del recurso ya no se puede mejorar al haber alcanzado el ideal, dado que el sumatorio de la carga al cuadro coincide con el sumatorio de la carga al cuadrado ideal (375).

f) Dibujar los perfiles definitivos de los recursos

Para obtener los perfiles definitivos de los recursos se llevan a cabo los siguientes pasos:

Primero, se representa en la gráfica Gantt la posición definitiva de las actividades que se han desplazado en el proceso de nivelación: actividades K, H y G, como aparece en la figura 9.31.

Segundo, se comprueba si estas actividades desplazan a otras con las que mantienen relaciones de precedencia, evidenciándose que la actividad E precede a la actividad G y que la actividad I precede a la actividad H. Como consecuencia, las actividades I y E deben desplazarse hasta conseguir que cumplan dichas precedencias. A la vez, por el llamado “efecto dominó”, la actividad B precede a la actividad E y, por consiguiente, para que dicha precedencia se cumpla es necesario desplazar la actividad B. El resultado es el que se ve en la figura 9.32.

Tercero, se calculan las nuevas cargas unitarias de los recursos y a partir de ellas se dibujan los perfiles definitivos, representados en las figuras 9.33, 9.34, 9.35 y 9.36.

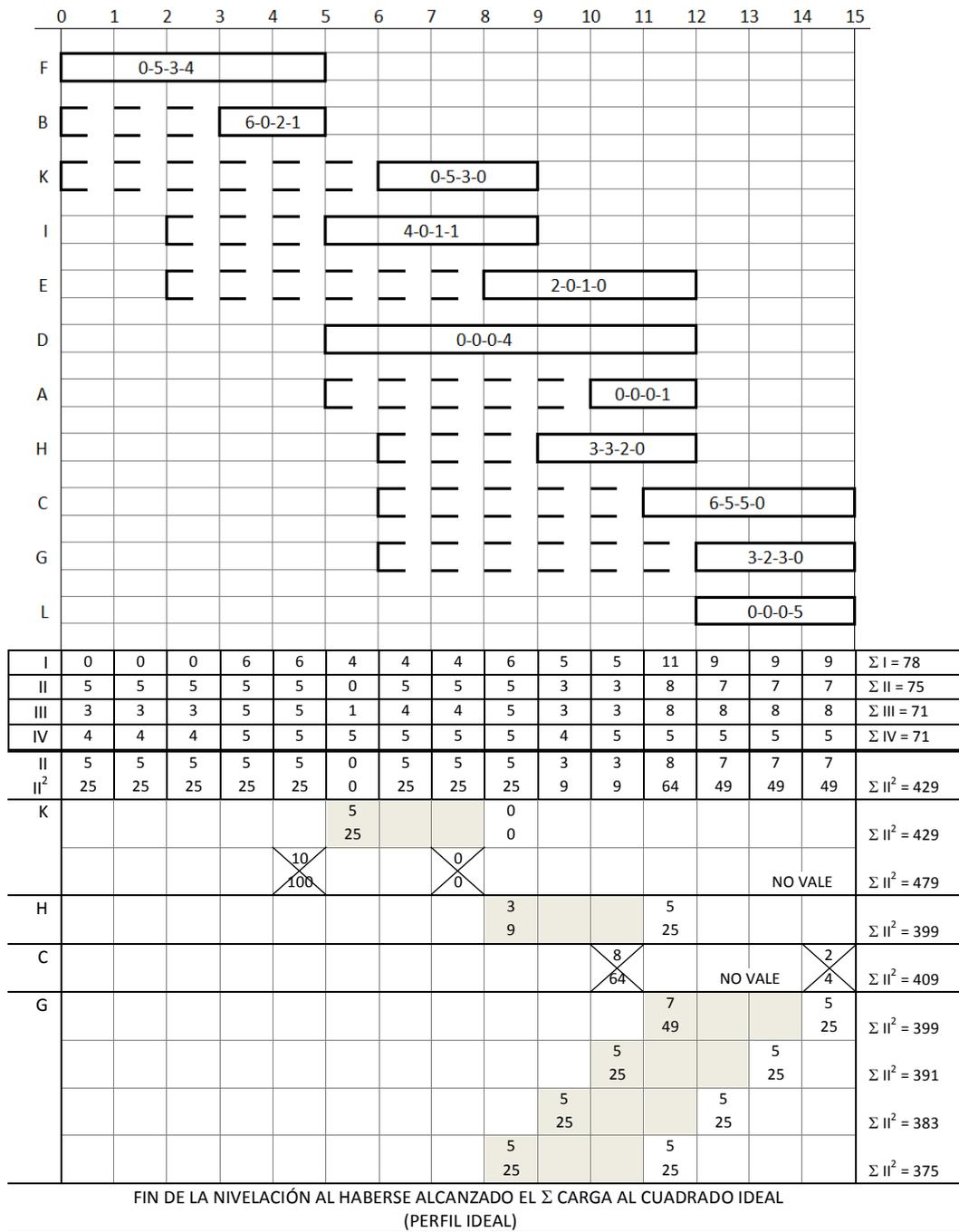


Figura 9.30

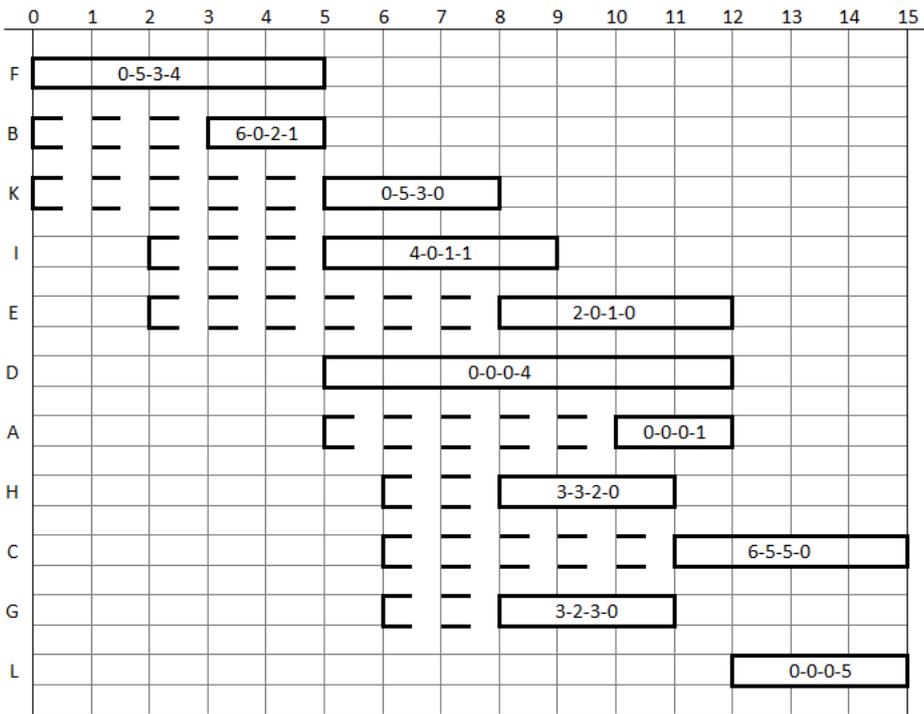


Figura 9.31

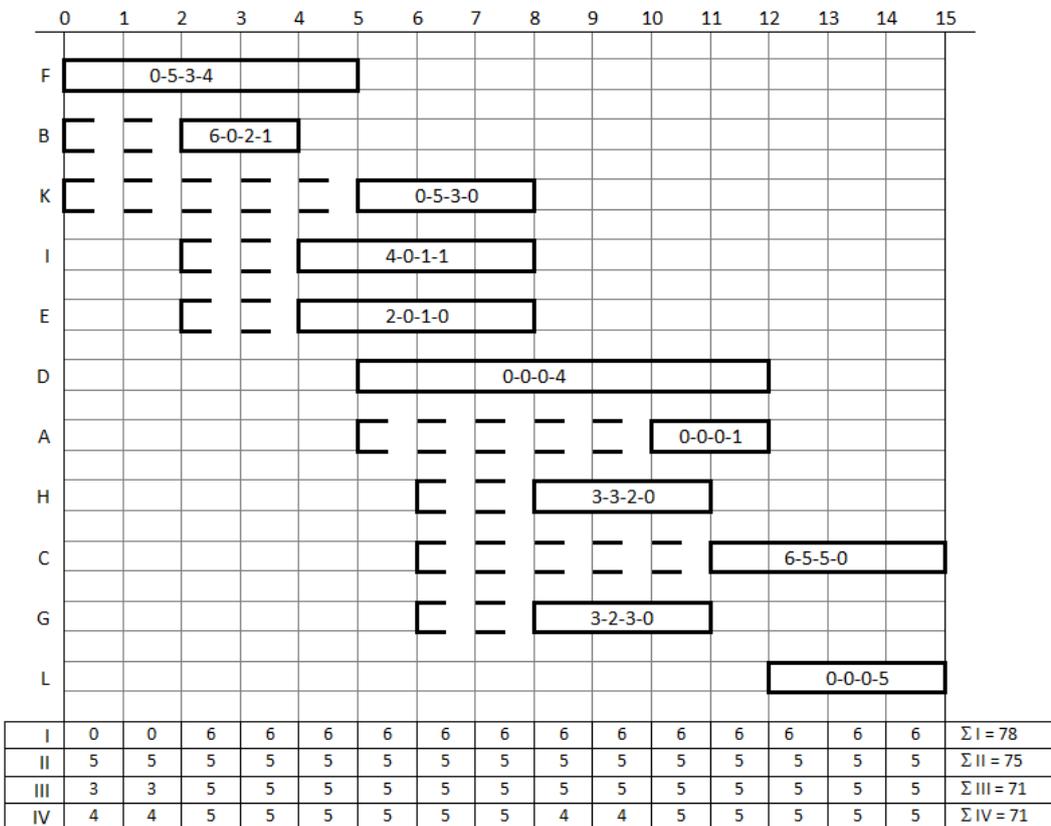


Figura 9.32

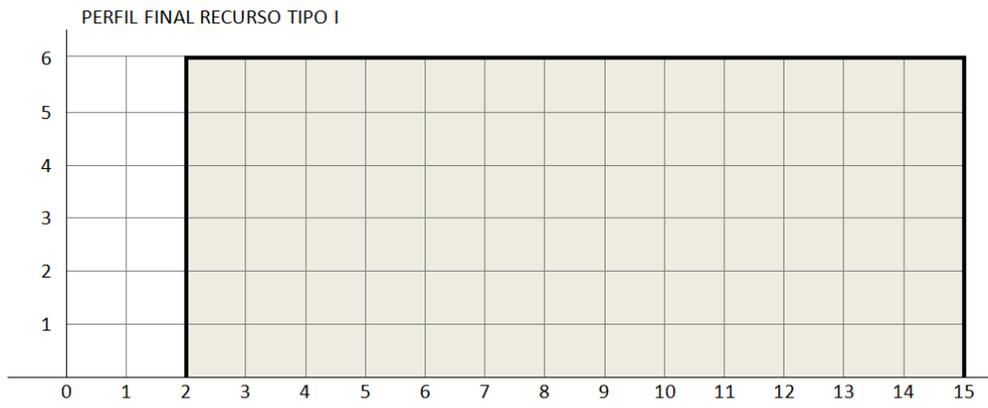


Figura 9.33

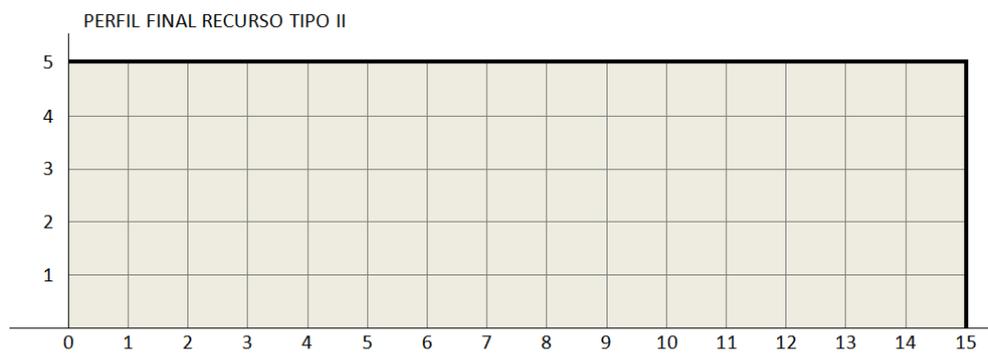


Figura 9.34

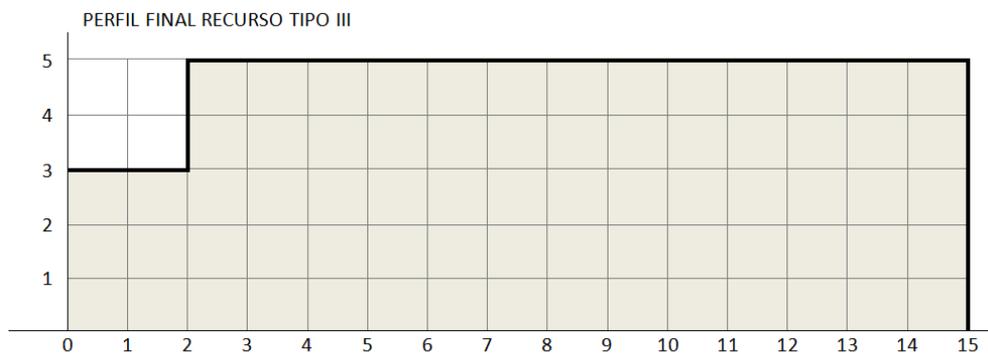


Figura 9.35

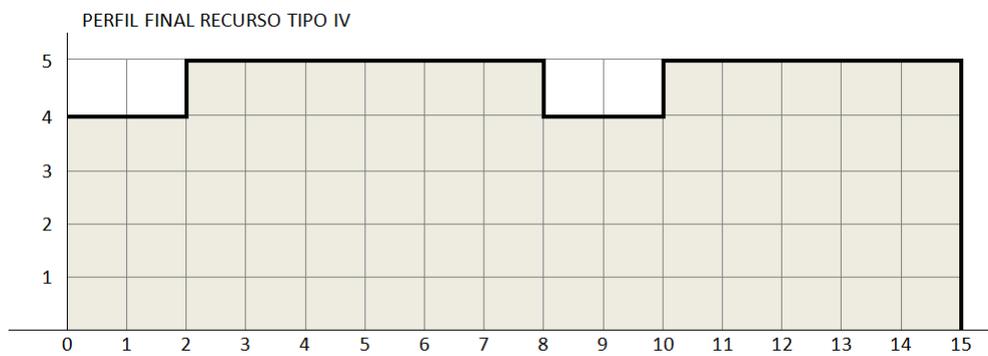


Figura 9.36

9.3. NIVELACIÓN DE RECURSOS EN UN CICLO REPETITIVO

Existen algunos proyectos singulares donde hay un grupo de actividades que se repite varias veces de manera consecutiva. Es lo que se ha dado en llamar “ciclo repetitivo”. El algoritmo de Burgess-Killebrew se aplica a la nivelación de este tipo de proyectos, con algunas variantes respecto al ciclo no repetitivo o ciclo normal.

Los pasos a seguir para resolver la nivelación de recursos de un ciclo repetitivo son los siguientes:

- a) Dibujar la gráfica Gantt de las actividades que conforman el ciclo que se repite.
- b) Determinar el tiempo que debe transcurrir entre dos ciclos consecutivos.
- c) Representar en la misma gráfica los ciclos anteriores y posteriores de cada una de las actividades.
- d) Tomar un trozo cualquiera de la gráfica Gantt que contenga un número de fechas igual a la duración de la actividad más larga.
- e) Dibujar los perfiles iniciales de los recursos.
- f) Determinar la prioridad de los recursos.
- g) Calcular carga media y sumatorio de la carga al cuadrado ideal de cada recurso.
- h) Sobre ese trozo de gráfica Gantt realizar el proceso de nivelación, representando las actividades con sus holguras libres.
- i) Obtener la gráfica Gantt definitiva.
- j) Dibujar los perfiles definitivos de los recursos.

Para una mejor comprensión de la metodología enunciada anteriormente se presenta un ejemplo práctico.

Ejemplo

La red de la figura 9.37 se corresponde con un ciclo repetitivo del que se desea realizar la nivelación de recursos por el método Burgess-Killebrew sabiendo que el recurso prioritario es el tipo II, siguiéndole el recurso tipo I y finalmente el recurso tipo III.

Aplicando la metodología expuesta anteriormente:

- a) *Gráfica Gantt de las actividades que conforman el ciclo que se repite. (Figura 9.38).*
- b) *Determinar el tiempo que debe transcurrir entre dos ciclos consecutivos.*

El tiempo mínimo que debe mediar entre el comienzo de dos ciclos inmediatos viene dado por la duración de la actividad más larga del proyecto. En nuestro caso, la actividad que tiene mayor duración es la B, con $t_e = 7$. Por lo tanto, entre dos ciclos consecutivos debe haber 7 fechas, como mínimo.

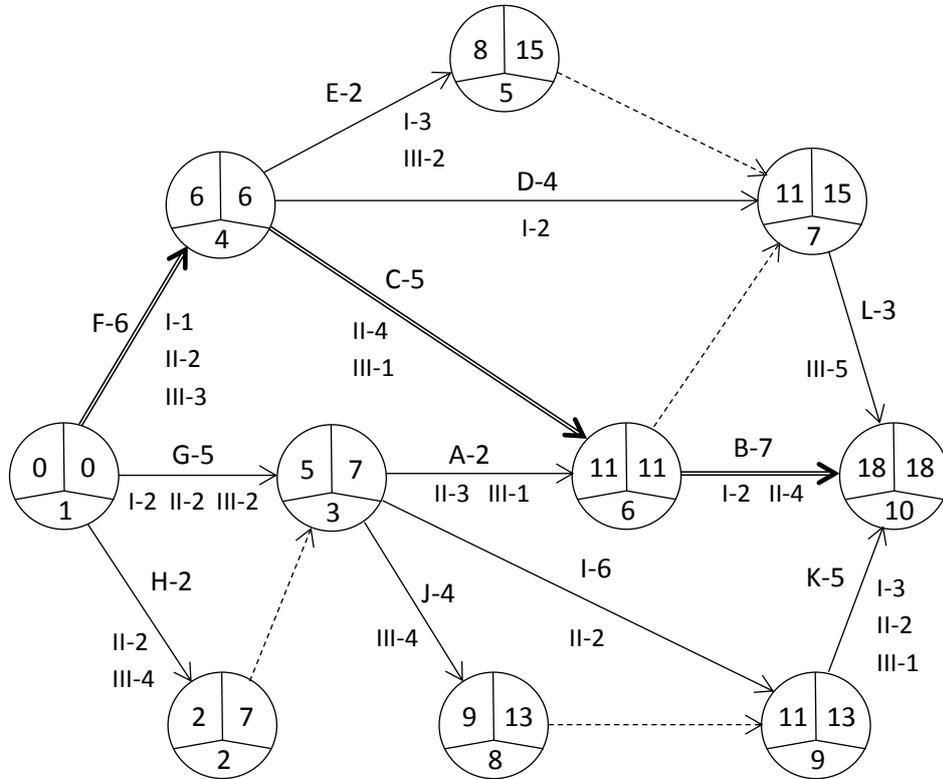


Figura 9.37

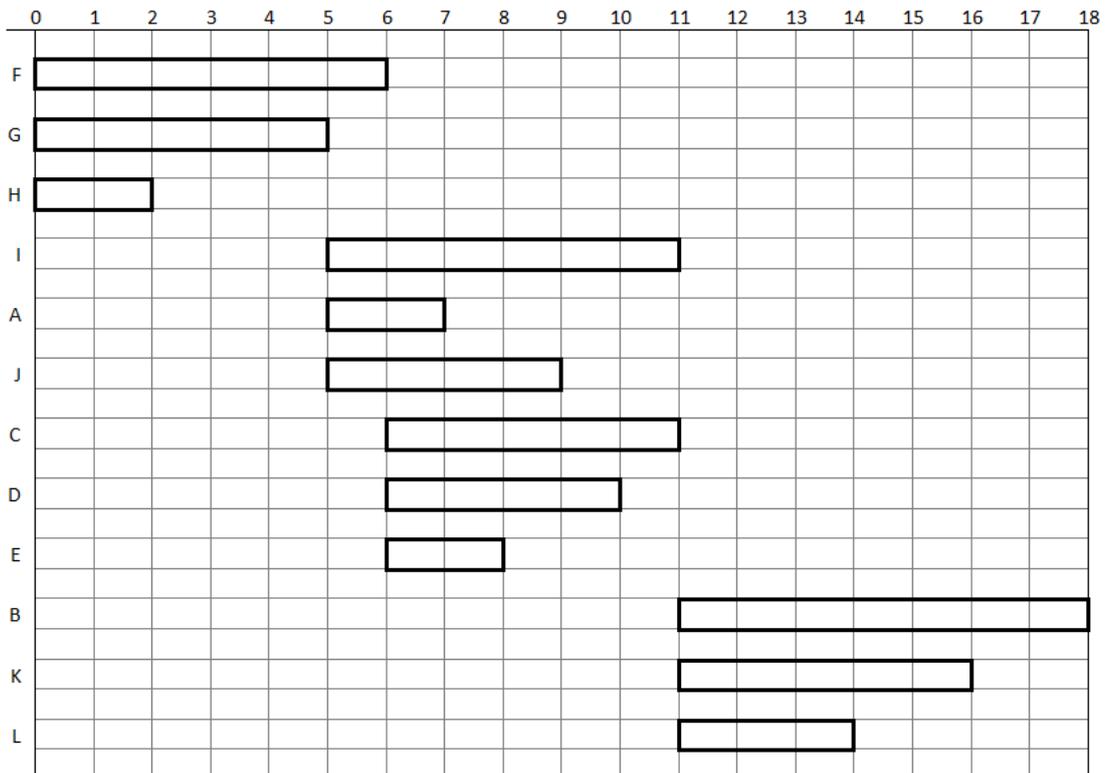


Figura 9.38

c) Representar en la misma gráfica los ciclos anteriores y posteriores de cada una de las actividades

Teniendo en cuenta lo anterior, y suponiendo que el ciclo de la figura 9.38 no es el primero ni el último, sino un ciclo intermedio, se procederá a dibujar los ciclos anteriores y posteriores de cada una de las actividades del proyecto. Así, como la actividad F comienza en fecha 0, significa que la actividad F del siguiente ciclo comenzará 7 fechas más tarde, es decir en fecha 7 y para el siguiente ciclo en fecha 14 y así sucesivamente. Repitiendo este mismo razonamiento para las demás actividades, se obtiene la gráfica Gantt de la figura 9.39.

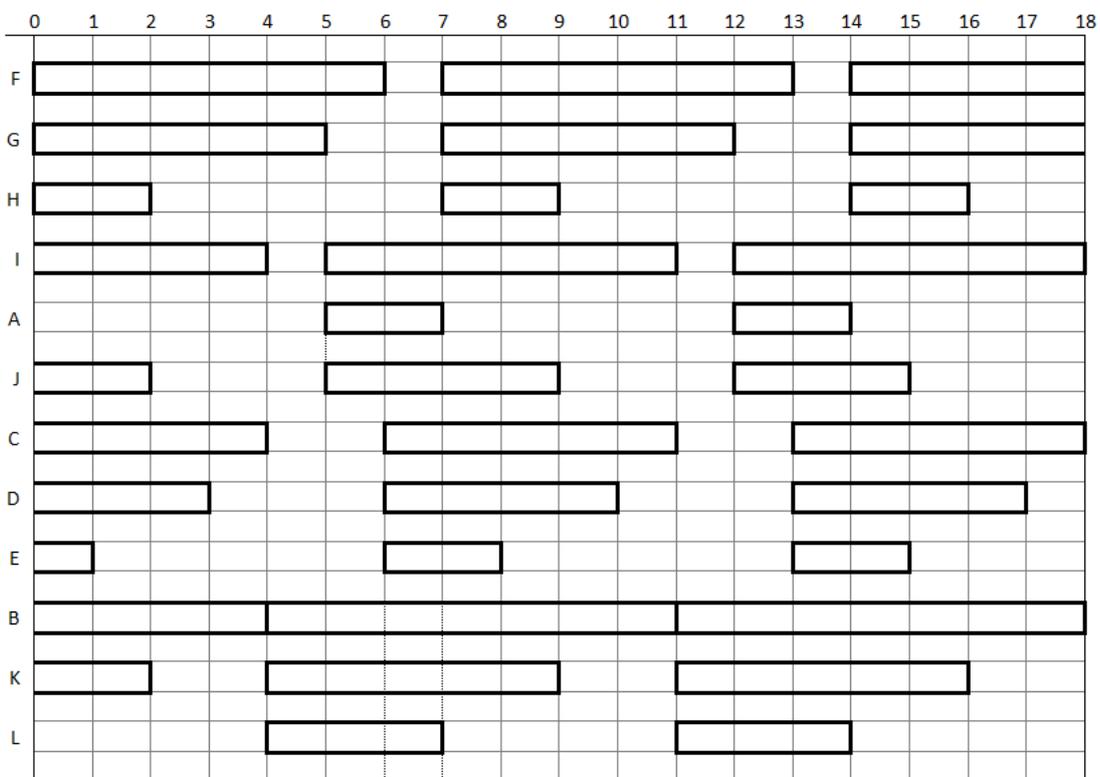


Figura 9.39

d) Tomar un trozo cualquiera de la gráfica Gantt que contenga un número de fechas igual a la duración de la actividad más larga

Como se puede observar en la figura 9.39, el trozo de gráfica que hay desde fecha 0 hasta fecha 7 es idéntica al que existe entre fecha 7 y fecha 14 y también será igual al que haya entre fecha 14 y 21, etc. Por ello, bastará con nivelar únicamente un trozo de gráfica de 7 fechas consecutivas, dado que el resto se comportará de la misma forma.

Si tomamos una tira de la gráfica Gantt que contenga las 7 primeras fechas y la enrollamos formando un cilindro, tendríamos una superficie continua donde la generatriz que contiene a fecha 0 es coincidente con la generatriz que contiene a fecha

7. Este cilindro se asemeja al tambor de una rotativa, de manera que a cada vuelta imprime el mismo ciclo que se repite. Pues bien, para realizar el proceso de nivelación se considera que las actividades están dibujadas en un cilindro de estas características de manera que, como se dicho anteriormente, fecha cero coincide con fecha 7 y fecha 14; fecha 1 con fecha 8 y 15; fecha 2 con fecha 9 y 16; etc., como se indica en la figura 9.40.

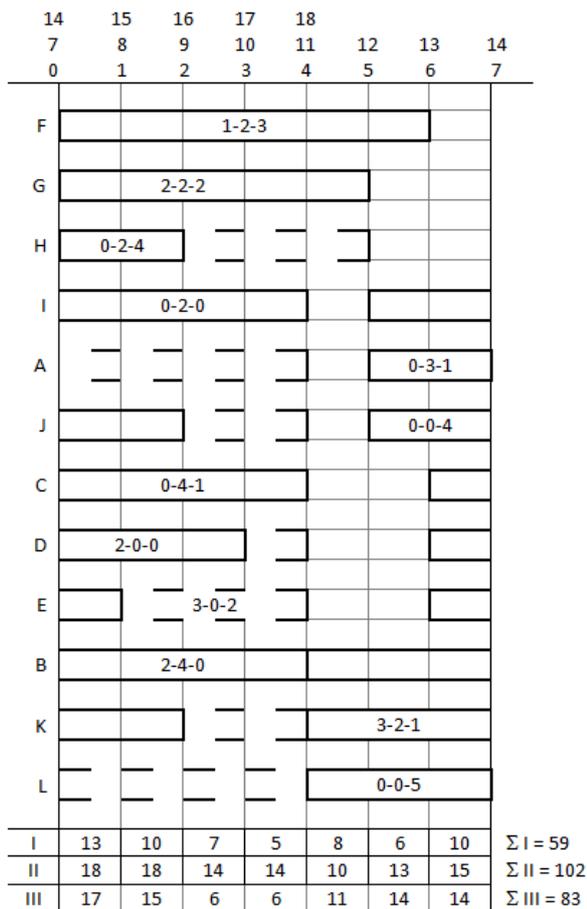


Figura 9.40

e) *Perfiles iniciales de los recursos* (Figuras 9.41, 9.42 y 9.43)

f) *Determinar la prioridad de los recursos*

Según el enunciado del problema la prioridad es:

Primero → Recurso tipo II

Segundo → Recurso tipo I

Tercero → Recurso tipo III

g) *Calcular carga media y sumatorio de la carga al cuadrado ideal de cada recurso*

$$\bar{I} = \frac{\Sigma I}{P.A.} = \frac{59}{7} = 8,428571$$

$$\Sigma I^2 \text{ ideal} = (\bar{I})^2 \times \text{P.A.} = 8,428571^2 \times 7 = 497$$

$$\bar{II} = \frac{\Sigma II}{\text{P.A.}} = \frac{102}{7} = 14,571428$$

$$\Sigma II^2 \text{ ideal} = (\bar{II})^2 \times \text{P.A.} = 14,571428^2 \times 7 = 1486$$

$$\bar{III} = \frac{\Sigma III}{\text{P.A.}} = \frac{83}{7} = 11,857142$$

$$\Sigma III^2 \text{ ideal} = (\bar{III})^2 \times \text{P.A.} = 11,857142^2 \times 7 = 984$$

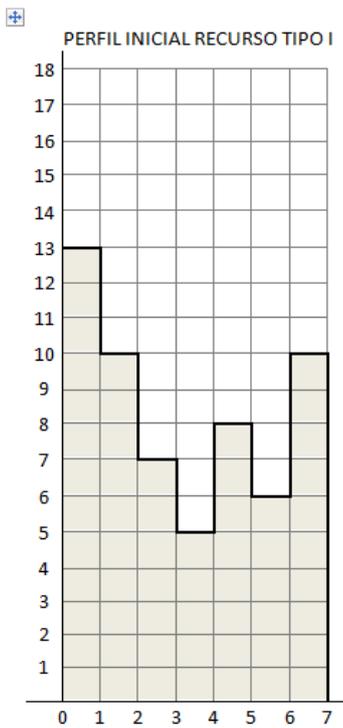


Figura 9.41

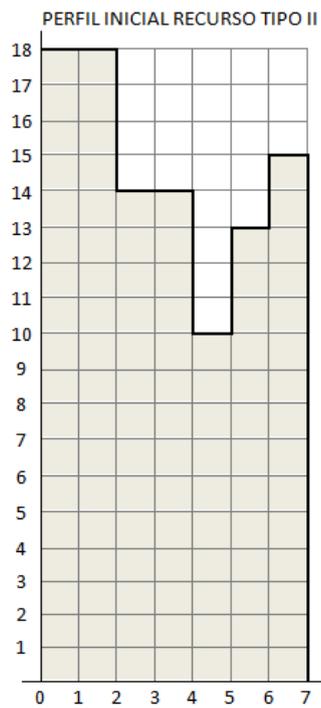


Figura 9.42

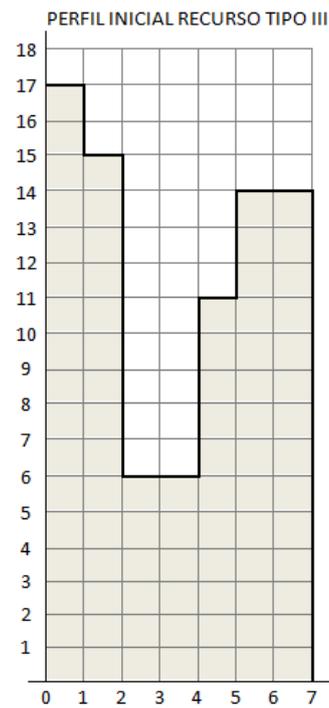


Figura 9.43

h) Proceso de nivelación, representando las actividades con sus holguras libres

Nivelación del recurso tipo II

Se comenzará nivelando por la última actividad de la gráfica Gantt que consuma recurso tipo II y que tenga holgura. En este caso es la actividad K, la cual comienza en

fecha 11 y finaliza en fecha 16, teniendo dos fechas de holgura libre. No obstante, la actividad K no admite nivelación, dado que aumenta el sumatorio de la carga al cuadrado. La siguiente actividad es la A, que tampoco se desplaza por la misma razón que la anterior. A continuación, la actividad H se desplaza tres fechas, consumiendo toda su holgura. En una segunda iteración, las actividades K y A siguen sin poder desplazarse, dando por finalizada la nivelación del recurso tipo II.

Nivelación del recurso tipo I

En el proceso de nivelación del recurso tipo I sólo se tendrá en cuenta aquellas actividades que consuman recurso tipo I, tengan holgura libre y no consuman recurso tipo II. En nuestro ejemplo son las actividades E y D, de las cuales únicamente admite nivelación la actividad D, desplazándose una fecha y consumiendo toda su holgura.

Nivelación del recurso tipo III

En este caso sólo se someten a nivelación las actividades que consumen recurso tipo III, tengan holgura libre y no consuman ni recurso tipo I ni tipo II. Las únicas actividades que cumplen con estos requisitos son las actividades L y J. La primera no se puede desplazar, mientras que la segunda lo hace dos fechas, concluyendo el proceso de nivelación.

En la figura 9.44 se da cuenta de todo el proceso de nivelación de los recursos.

i) Obtener la gráfica Gantt definitiva (Figura 9.45)

j) Dibujar los perfiles definitivos de los recursos (Figuras 9.46, 9.47 y 9.48)

INVESTIGACIÓN OPERATIVA. TÉCNICAS Y MODELOS DE PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS COMPLEJOS

| | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | | | |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------|----------------------|----------------------|--------------------|----------------------------------|
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| F | 1-2-3 | | | | | | | |
| G | 2-2-2 | | | | | | | |
| H | 0-2-4 | | | | | | | |
| I | 0-2-0 | | | | | | | |
| A | | | | | | | 0-3-1 | |
| J | | | | | | | 0-0-4 | |
| C | 0-4-1 | | | | | | | |
| D | 2-0-0 | | | | | | | |
| E | | | 3-0-2 | | | | | |
| B | 2-4-0 | | | | | | | |
| K | | | | | | | 3-2-1 | |
| L | | | | | 0-0-5 | | | |
| II | 18 | 18 | 14 | 14 | 10 | 13 | 15 | |
| II ² | 324 | 324 | 196 | 196 | 100 | 169 | 225 | $\Sigma II^2 = 1534$ |
| K | | | 16 256 | | 8 64 | | | NO VALE $\Sigma II^2 = 1558$ |
| A | 21 441 | | | | | 10 100 | | NO VALE $\Sigma II^2 = 1582$ |
| H | 16 256 | | 16 256 | | | | | $\Sigma II^2 = 1526$ |
| | | 16 256 | | 16 256 | | | | $\Sigma II^2 = 1518$ |
| | | | 14 196 | | 12 144 | | | $\Sigma II^2 = 1502$ |
| K | | | 16 256 | | 10 100 | | | NO VALE $\Sigma II^2 = 1518$ |
| A | 19 361 | | | | | 10 100 | | NO VALE $\Sigma II^2 = 1538$ |
| I | 13 169 | 10 100 | 7 49 | 5 25 | 8 64 | 6 36 | 10 100 | $\Sigma I^2 = 543$ |
| E | | 13 169 | | | | | 7 49 | NO VALE $\Sigma I^2 = 561$ |
| D | | | | 7 49 | | | 8 64 | $\Sigma I^2 = 531$ |
| E | | 13 169 | | | | | 5 25 | NO VALE $\Sigma I^2 = 561$ |
| III | 13 169 | 11 121 | 6 36 | 10 100 | 15 225 | 14 196 | 14 196 | $\Sigma III^2 = 1043$ |
| L | 18 324 | | | | 10 100 | | | NO VALE $\Sigma III^2 = 1073$ |
| J | | | 10 100 | | | 10 100 | | $\Sigma III^2 = 1011$ |
| | | | | 14 196 | | | 10 100 | $\Sigma III^2 = 1011$ |
| NO ADMITE SEGUNDA ITERACIÓN | | | | | | | | |

Figura 9.44

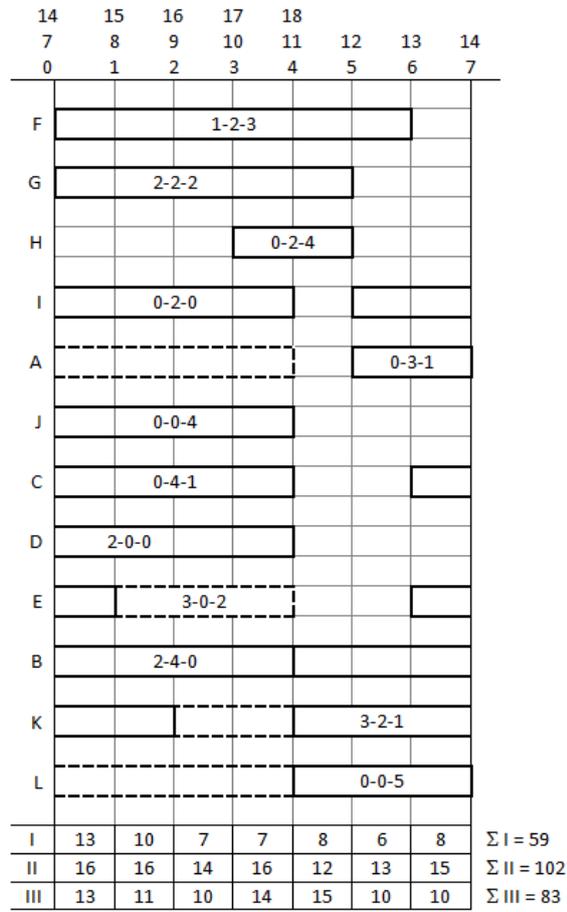


Figura 9.45

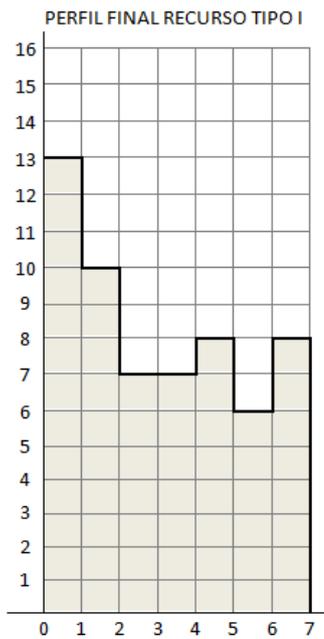


Figura 9.46

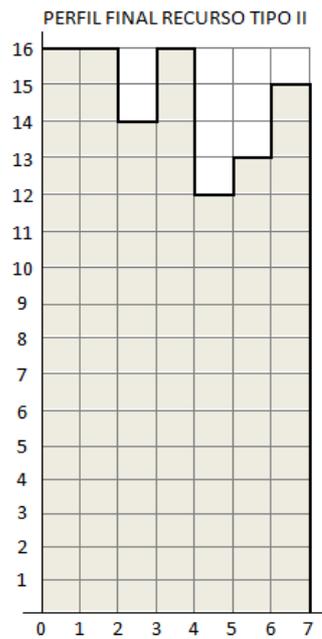


Figura 9.47

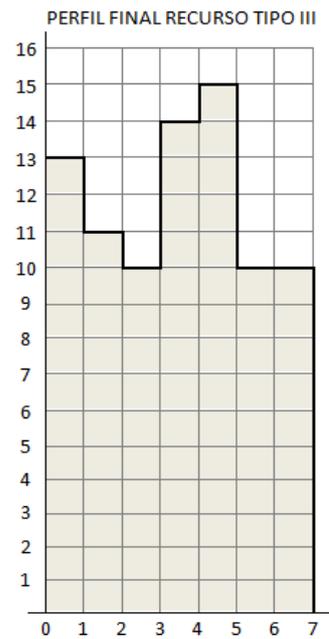


Figura 9.48

10. LA ASIGNACIÓN DE RECURSOS

Los métodos de asignación de recursos son de aplicación cuando la demanda de recursos del proyecto en determinadas fechas es superior a la disponibilidad de recursos de la empresa constructora. El objetivo de estos métodos es adecuar dicha demanda de recursos a la disponibilidad de los mismos, de manera que el proyecto finalice lo antes posible. Para ello, se retrasa el comienzo de las actividades no críticas y, si ello no fuese suficiente, se retrasan también algunas actividades críticas, lo que provocaría un retraso del proyecto. La metodología utilizada permite que dicho retraso, en el caso de que lo hubiere, se minimice.

Los métodos heurísticos más empleados para la asignación de recursos son el método ROC 8001 y la técnica ALTAI. El primero, ideado por la empresa norteamericana Richfield Oil Company, se utiliza para la asignación de recursos de un solo proyecto, mientras que la técnica Altai tiene su aplicación en la asignación de recursos de varios proyectos de manera simultánea. El sistema Altai (Analisi, Livellamento e Tempificazione Automatici e Integrati) que significa “análisis, nivelación y coordinación automática e integrada” fue ideado por IBM Italia.

10.1. EL MÉTODO ROC 8001

La asignación de recursos por el método Roc 8001 consiste en ir analizando todas las fechas del proyecto, verificando en cada una de ellas cuáles son los recursos que demandan las actividades en curso y cuáles los recursos disponibles. Si los recursos disponibles son suficientes, las actividades pasan a una Lista de Trabajo donde se le asignan los recursos necesarios para poder ejecutarse. Si con los recursos disponibles no se puedan acometer determinadas actividades, éstas pasan a una Lista de Espera, donde permanecerán hasta que se liberen los recursos necesarios para emprender dichas tareas. Una de las cuestiones fundamentales a tener en cuenta en la aplicación de este método es el orden en que se asignan los recursos a las actividades, es decir, decidir en cada fecha qué actividades pasan a lista de trabajo y cuáles a lista de espera, siendo el criterio general asignar recursos en primer lugar a aquellas actividades que forman parte del camino más largo del proyecto, con el objetivo de evitar el retraso del mismo. Así mismo, en la aplicación de este método se considera, salvo que expresamente se indique lo contrario, que las actividades pueden ser interrumpidas. Es decir, que una actividad puede entrar en lista de trabajo y comenzar a ejecutarse, llegada una determinada fecha interrumpir su ejecución y pasar a lista de espera y, más tarde, volver de nuevo a lista de trabajo.

En el desarrollo del método se observan los siguientes pasos:

a) Confeccionar un Cuadro de Prioridades en el que se relacionan todas las actividades del proyecto ordenadas de igual manera que en una gráfica Gantt. Esto es: en primer lugar aparecen las actividades con menor comienzo más pronto; a igual comienzo más pronto, se ordenarán según el menor comienzo más tarde; a igual comienzo más tarde, irán primero las que tengan menor duración.

b) Elaborar la gráfica Gantt, con indicación de las cargas unitarias de los recursos.

c) Dibujar el perfil de demanda y disponibilidad de cada uno de los recursos.

d) Asignar los recursos disponibles, en cada fecha, enviando las actividades a lista de trabajo o a lista de espera, hasta concluir el proceso. En la lista de espera las actividades aparecerán ordenadas según la menor holgura total, o lo que es lo mismo, según la menor fecha en la que se hagan críticas. En la lista de trabajo las actividades irán entrando en el siguiente orden:

1. Actividades que pertenecen al camino de mayor duración:

1.1. Actividades en lista de trabajo.

1.2. Actividad que le falte menos tiempo para finalizar.

2. Actividades que no pertenecen al camino de mayor duración:

2.1. Actividades en lista de trabajo.

2.2. Actividad con menor holgura total.

2.3. Actividad que le falte menos tiempo para finalizar.

e) Obtener la gráfica Gantt resultante después de la asignación de recursos.

f) Dibujar los perfiles definitivos de los recursos.

Ejemplo

Dada la red de la figura 10.1 se desea realizar la asignación de recursos idónea por el método Roc 8001, sabiendo que la disponibilidad de recursos de la empresa es la que aparece en el siguiente cuadro:

| Disponibilidad de recursos | Tipo de recurso | | |
|----------------------------|-----------------|----|-----|
| | I | II | III |
| Hasta fecha 7 | 2 | 3 | 3 |
| Desde fecha 7 en adelante | 4 | 2 | 3 |

Aplicando los pasos enunciados anteriormente a la resolución de este ejemplo se obtiene:

a) *Cuadro de Prioridades.* (Figura 10.2).

b) *Gráfica Gantt con indicación de las cargas unitarias de los recursos.* (Figura 10.3).

c) Perfil de demanda y disponibilidad de cada uno de los recursos. (Figuras 10.4, 10.5 y 10.6).

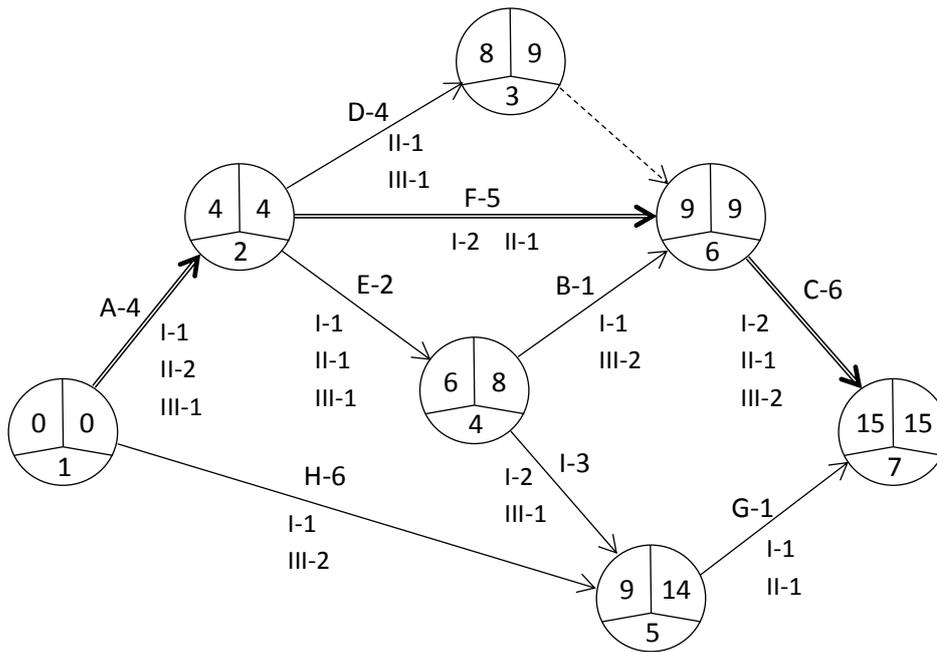


Figura 10.1

| ACTIVIDAD | DURACIÓN | COMIENZO | | RECURSOS | | | ACTIVIDADES PRECEDENTES |
|-----------|----------|------------|-----------|----------|----|-----|-------------------------|
| | | MÁS PRONTO | MÁS TARDE | I | II | III | |
| A | 4 | 0 | 0 | 1 | 2 | 1 | --- |
| H | 6 | 0 | 8 | 1 | 0 | 2 | --- |
| F | 5 | 4 | 4 | 2 | 1 | 0 | A |
| D | 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 1 | A |
| E | 2 | 4 | 6 | 1 | 1 | 1 | A |
| B | 1 | 6 | 8 | 1 | 0 | 2 | E |
| I | 3 | 6 | 11 | 2 | 0 | 1 | E |
| C | 6 | 9 | 9 | 2 | 1 | 2 | D - F - B |
| G | 1 | 9 | 14 | 1 | 1 | 0 | I - H |

Figura 10.2

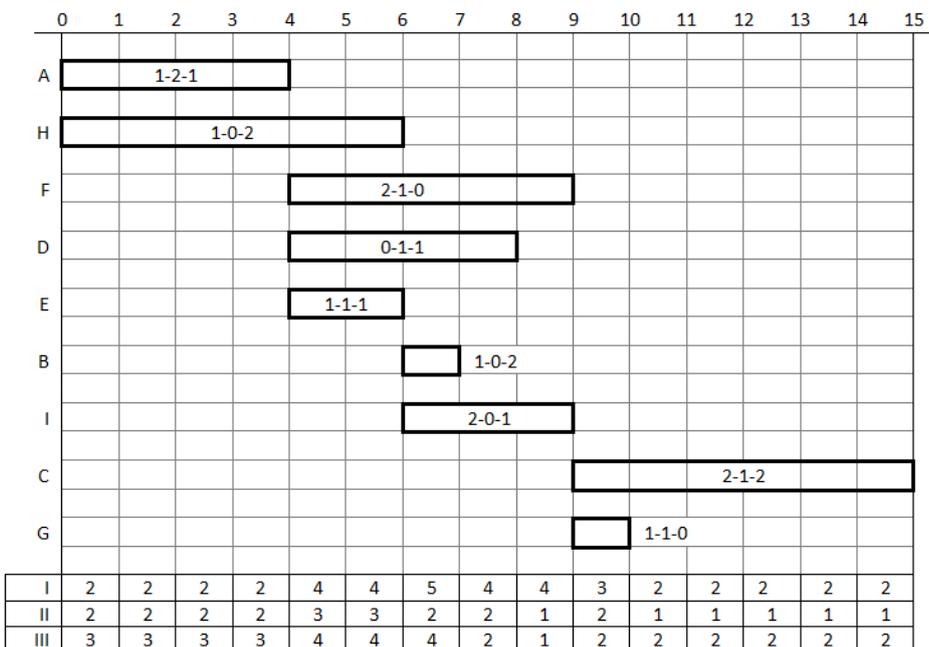


Figura 10.3

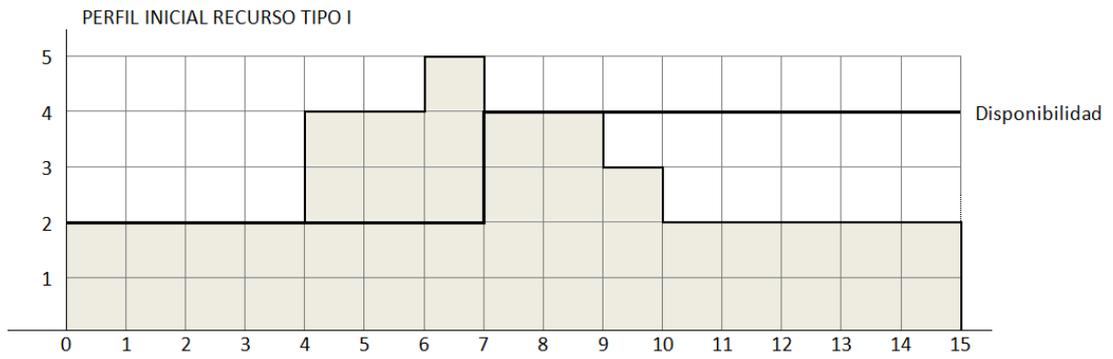


Figura 10.4

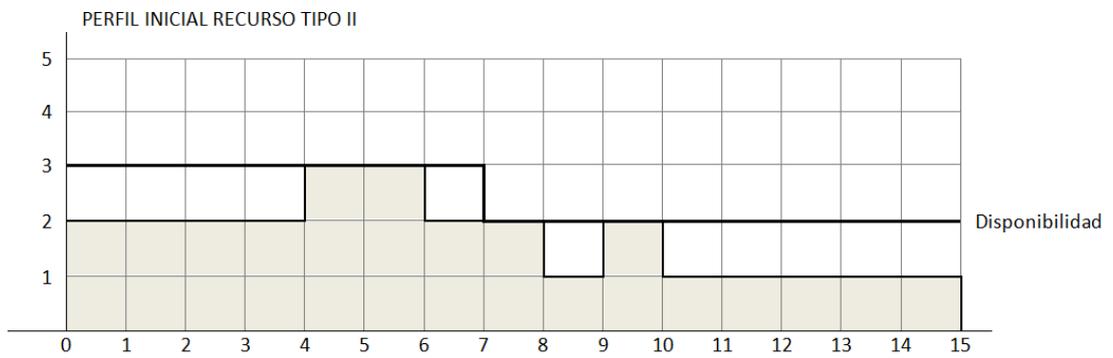


Figura 10.5

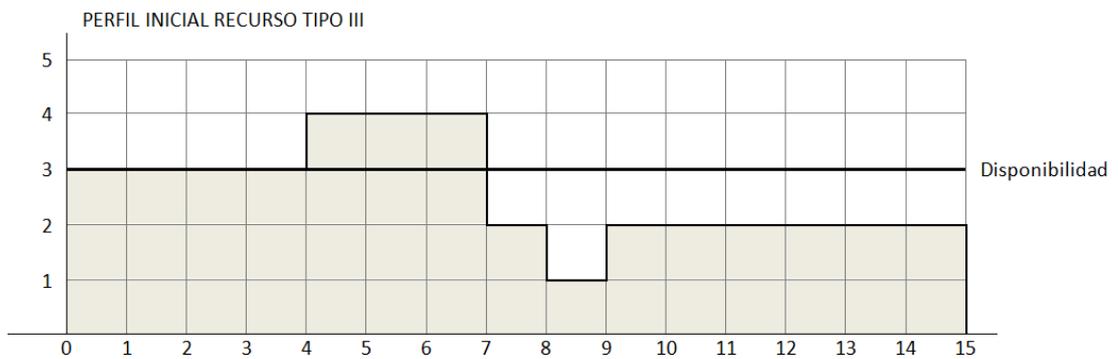


Figura 10.6

d) *Asignar los recursos disponibles, en el orden establecido*

Para ello se utiliza la tabla de la figura 10.7 que consta de una lista de espera, una lista de trabajo y otras columnas adicionales. Cada una de estas columnas representa lo siguiente:

Fecha = Es donde se anota la fecha que se está estudiando.

Activ. = Nombre de la actividad que se encuentra en lista de espera o en lista de trabajo.

te = Duración de las actividades.

Fc = Fecha en que se hace crítica la actividad.

fc = Fechas consumidas por la actividad, es decir fechas ya ejecutadas o de permanencia en lista de trabajo.

Activ. Preced. = Actividades precedentes.

Tmax.j = Fecha más tarde de finalización de la actividad.

Ft = Fecha de terminación de la actividad.

Stock Recursos = Cantidad de recursos que quedan disponibles.

Activ. Concluidas = Actividades que no demandan recursos por estar ya ejecutadas.

Holguras = Indica la holgura total de cada una de las actividades en la fecha en estudio.

El proceso de asignación de recursos se inicia estudiando la fecha de comienzo del proyecto, que es fecha 0 (en la columna "Fecha" se escribe "0"). A continuación, en la columna "Holguras" se indica la holgura total de aquellas actividades que, según el Cuadro de Prioridades, pueden comenzar en fecha 0 ($A = 0$ y $H = 8$). Como la actividad A tiene holgura total igual a cero, significa que pertenece al camino más largo y, por ello, tendrá prioridad para asignarle recursos. En consecuencia, en la columna "Activ." de la lista de trabajo aparecerá la actividad A. Como con los recursos que quedan disponibles, después de asignar recursos a la actividad A, se puede ejecutar la actividad H, entonces dicha actividad se incorpora a la lista de trabajo (en caso contrario, se hubiese incluido en la lista de espera).

A continuación se estudian las fechas sucesivas, pero no todas se anotan en la tabla, sino que sólo se registran aquellas fechas que resultan significativas, es decir aquellas fechas en las que:

- Comienzan nuevas actividades.
- Finalizan actividades que se encuentran en lista de trabajo.
- Cambia la disponibilidad de recursos.
- Se hacen críticas actividades que se encuentran en lista de espera. (Este criterio sólo es válido hasta aquellas fechas en las que aparecen actividades con holgura total negativa).

Atendiendo a lo anterior, las siguientes fechas a considerar son:

Fecha 4 → En esta fecha la actividad A finaliza y hay cuatro actividades que demandan recursos ($F = 0$; $D = 1$; $E = 2$ y $H = 8$). La actividad que tiene prioridad para entrar en lista de trabajo es la F, dado que pertenece al camino más largo, pero para que pueda incluirse en dicha lista tiene que cumplir con dos requisitos. A saber: primero que los recursos disponibles sean suficientes y, segundo, que las actividades precedentes hayan concluido. Como cumple con los dos requisitos, la actividad F pasa a lista de trabajo. La siguiente actividad en orden de prioridad es la actividad H (porque ya estaba en lista de trabajo en la fecha anterior), pero los recursos disponibles no son suficientes, por lo tanto se incorpora a lista de espera. La siguiente actividad en orden de prioridad es la actividad D, la cual cumple con las dos condiciones (disponibilidad de recursos y actividades precedentes finalizadas), así que se añade a lista de trabajo. Finalmente, la actividad E se situará en la lista de espera al no disponerse de los recursos necesarios para su ejecución.

Fecha 6 → En esta fecha no finaliza ninguna actividad, pero si pueden comenzar dos nuevas actividades ($B = 2$; $I = 5$) y además se hace crítica la actividad E que se encuentra en lista de espera. Las actividades que en la fecha anterior estaban en lista de trabajo, siguen manteniendo su holgura ($F = 0$; $D = 1$), pero aquellas que se encuentran en lista de espera, consumen su holgura en tantas fechas como hayan permanecido en dicha lista ($E = 0$; $H = 6$). Ahora hay dos actividades que pertenecen al camino más largo (F y E). Aplicando el criterio establecido, el orden de prioridad es F-E-D-B-I-H. La actividad F pasa a lista de trabajo, la actividad E pasa a lista de espera al no haber recursos suficientes, la actividad D pasa a lista de trabajo, las actividades B-I-H pasan a lista de espera al no haber recursos suficientes.

Fecha 7 → En esta fecha no termina ni comienza ninguna actividad, pero cambia la disponibilidad de recursos. Por lo tanto, las actividades que demandan recursos son las mismas que en la fecha anterior. Las actividades en lista de trabajo mantienen su holgura ($F = 0$; $D = 1$) y las actividades en lista de espera rebajan su holgura en una fecha ($E = -1$; $B = 1$; $I = 4$; $H = 5$). Como puede observarse, la actividad E tiene holgura total negativa, lo cual implica que el proyecto se retrasa y que aparecen caminos hipercríticos, siendo la actividad E la que ahora pertenece al camino más largo. El orden de prioridad será E-F-D-B-I-H. En consecuencia, la actividad E se incorpora a lista de trabajo, la actividad F a lista de trabajo, las actividades D-I-B a lista de espera, la actividad H a lista de trabajo.

Fecha 9 → En esta fecha finalizan las actividades E-F-H y pueden comenzar dos nuevas actividades ($C = 0$ y $G = 5$). Las tres actividades que permanecen en lista de espera consumen su holgura en dos fechas ($D = -1$; $B = -1$; $I = 2$). El orden de prioridad es B-D-C-I-G o también D-B-C-I-G, dado que las actividades B y D se encuentran en las mismas circunstancias y no es posible aplicando el criterio de prioridad establecer

ninguna discriminación entre ellas. Así, las actividades B y D aparecerán en lista de trabajo, y las demás en lista de espera.

Fecha 10 → En esta fecha concluyen las actividades B y D, quedando sólo tres actividades que requieren recursos ($C = -1$; $I = 1$ y $G = 4$). El orden de prioridad es C-I-G, resultando que las dos primeras estarán presentes en la lista de trabajo y la última permanece en lista de espera.

Fecha 13 → Finaliza la actividad I. Las dos actividades que quedan pasan a lista de trabajo.

Fecha 14 → La actividad G termina y la C permanece en lista de trabajo.

Fecha 16 → La actividad C concluye y se da por finalizado el proceso de asignación de recursos. El desarrollo de este procedimiento se puede ver en la figura 10.8.

e) Gráfica Gantt resultante después de la asignación de recursos. (Figura 10.9).

f) Perfiles definitivos de los recursos. (Figuras 10.10, 10.11 y 10.12).

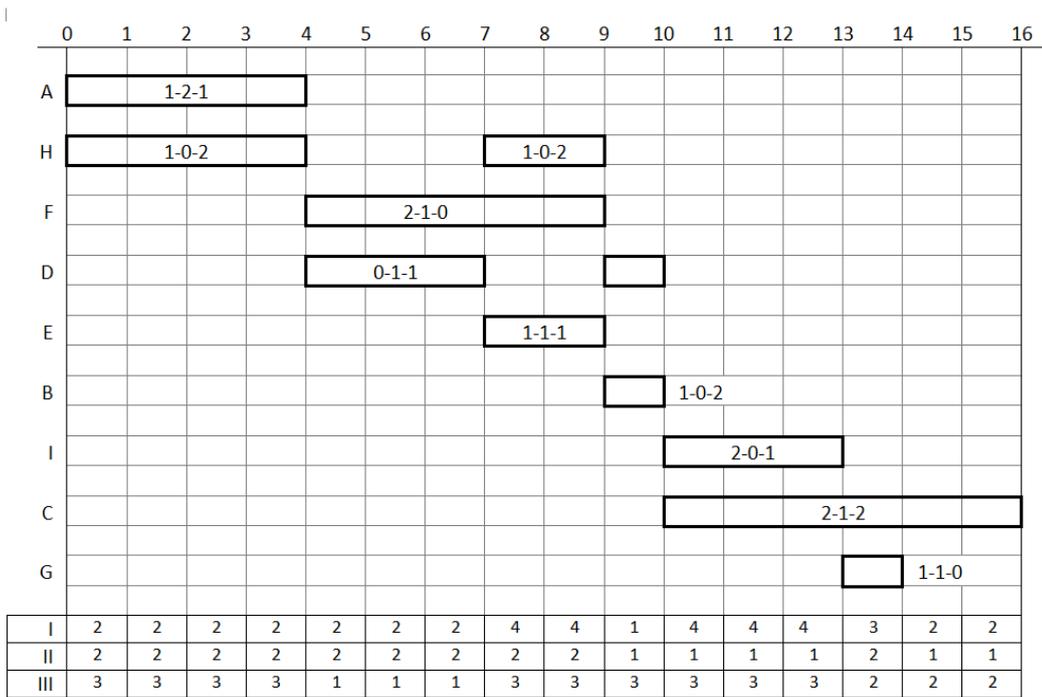


Figura 10.9

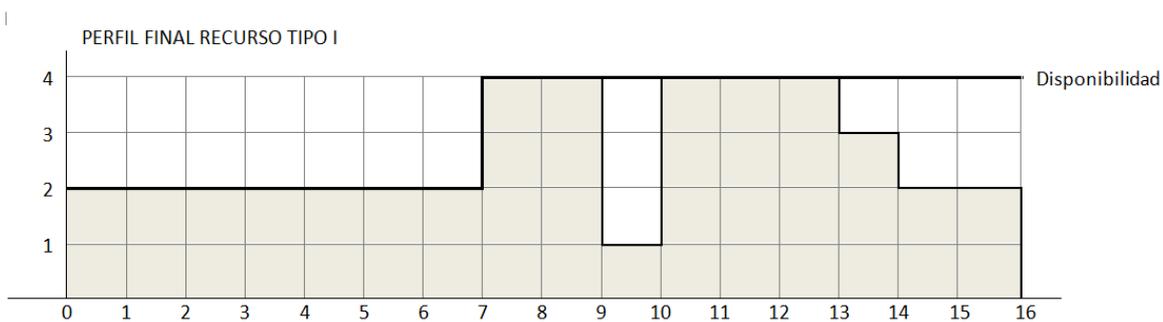


Figura 10.10

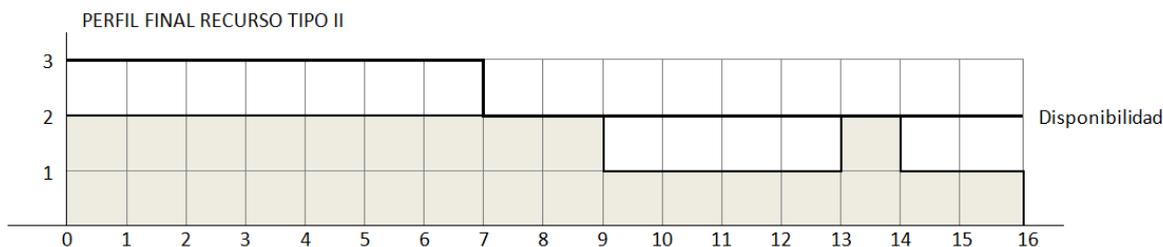


Figura 10.11

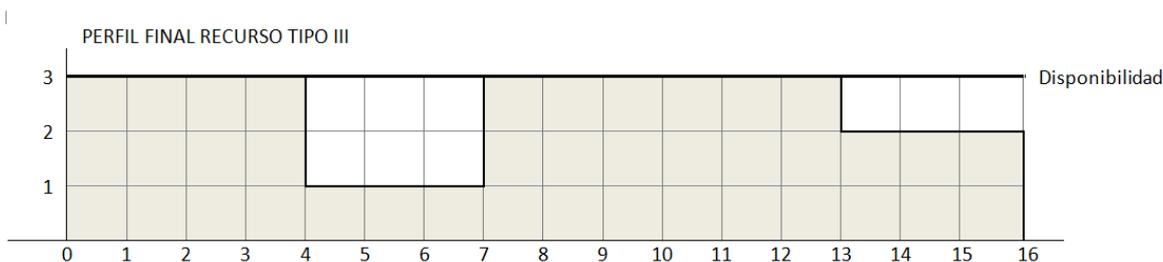


Figura 10.12

CAPÍTULO IV. OPTIMIZACIÓN

Optimizar supone buscar la mejor alternativa, de entre varias posibles, de acuerdo con un criterio específico y sujeto a las limitaciones existentes entre dichas alternativas. Dicho de otro modo, un problema de optimización se plantea cuando un individuo, o grupo, tiene que elegir entre varias alternativas, usualmente limitadas mediante algún tipo de condiciones, disponiendo para ello de un criterio de selección que permite ordenarlas, de modo que sea posible comparar cualquier par de alternativas y supuesto que no todas ellas son iguales respecto del criterio. Si no hay más que una alternativa, si no se dispone de una medida de comparación, o si todas las alternativas pueden considerarse equivalentes respecto del criterio, entonces no hay problema de óptimo. De acuerdo con la terminología clásicamente establecida, se habla de las variables que permiten definir cada una de las alternativas, de las restricciones que limitan la elección, y del objetivo, que permite establecer el criterio de comparación (RAMOS, 1993: 1).

11. LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Los modelos de optimización más utilizados son aquellos que simbolizan el sistema mediante elementos matemáticos tales como funciones, variables y ecuaciones, así como las relaciones entre ellos. Dentro de los modelos matemáticos, el más sencillo es el modelo de programación lineal, en el cual las funciones empleadas son todas lineales.

Para poder resolver un problema real de la vida cotidiana mediante un modelo de programación lineal, es preciso transformar dicho problema en un planteamiento lineal y, una vez planteado, resolverlo mediante un modelo matemático. El primer paso se conoce como *modelado del problema*. En cuanto a la resolución se puede abordar desde el punto de vista gráfico y desde el punto de vista analítico, siendo el método más utilizado el algoritmo del Simplex.

En la figura 11.1 se reproduce un esquema del tratamiento de un problema mediante la programación lineal.

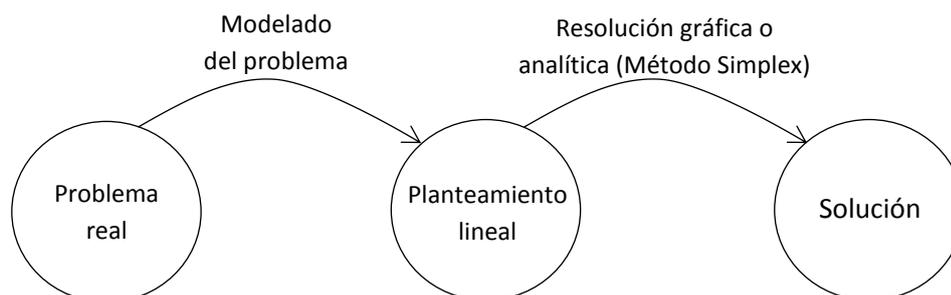


Figura 11.1

12. MODELADO DEL PROBLEMA

Modelar un problema es plantearlo de forma que se pueda resolver fácilmente por métodos conocidos. Para ello, se deben definir los siguientes elementos:

- Función objetivo.
- Variables.
- Restricciones.

12.1. LA FUNCIÓN OBJETIVO

Es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar). Así, si una empresa desea invertir en un activo sólido de alta, media o baja rentabilidad, el objetivo será maximizar los beneficios a obtener al invertir una determinada cantidad de dinero, o bien minimizar los costes de inversión para conseguir una determinada rentabilidad.

12.2. LAS VARIABLES

Las variables de un problema de optimización son una representación numérica de cada una de las alternativas del modelo. De manera que, en el ejemplo visto anteriormente, las variables vendrán representadas por las cantidades a invertir en cada tipo de activo (baja, media o alta rentabilidad).

12.3. LAS RESTRICCIONES

Constituyen el conjunto de relaciones que las variables deben cumplir. En nuestro ejemplo, podrían considerarse como restricciones las siguientes decisiones:

- Que el número de acciones a adquirir de activos de baja rentabilidad sea el doble que la de activos de media rentabilidad.
- Que el número de acciones a adquirir de activos de alta rentabilidad sea igual a un tercio de los activos de baja rentabilidad.

Para resolver un problema de optimización habrá de encontrarse el valor que debe tomar cada una de las variables para hacer óptima la función objetivo, satisfaciendo el conjunto de restricciones.

Ejemplo de modelado de un problema

Enunciado

Una empresa dispone de dos máquinas (M1 y M2) para fabricar dos tipos hormigones, el H1 y el H2. Para confeccionar 1 m³ de hormigón H1 se necesitan 5 ó 6 horas, según utilicemos la hormigonera M1 o M2, respectivamente. Para obtener 1 m³ de hormigón H2 se precisan de 6 ó 7 horas de la máquina M1 o M2, respectivamente. De la hormigonera M1 se puede disponer del número de horas que sea necesario, mientras que para la M2 sólo se podrá disponer de un máximo de 80 horas. Se desea fabricar 10 m³ de cada tipo de hormigón. El coste de fabricación es de 8 euros/hora para M1 y 11 euros/hora para M2. Se desea saber cuántos m³ de cada tipo de hormigón hay que fabricar en cada una de las hormigoneras, de manera que el costo sea mínimo.

Solución

Las *variables* responderán a la expresión

$$X_{ij} = \text{M}^3 \text{ de hormigón tipo } H_i \text{ fabricado en hormigonera } M_j$$

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2$$

Es decir, habrá 4 variables:

$$X_{11} = \text{M}^3 \text{ de hormigón H1 elaborado en hormigonera M1}$$

$$X_{12} = \text{M}^3 \text{ de hormigón H1 elaborado en hormigonera M2}$$

$$X_{21} = \text{M}^3 \text{ de hormigón H2 elaborado en hormigonera M1}$$

$$X_{22} = \text{M}^3 \text{ de hormigón H2 elaborado en hormigonera M2}$$

La *función objetivo*, generalmente denominada "Z", consistirá en minimizar los costes de fabricación, por lo tanto será:

$$\text{Min } Z = 8(5 X_{11} + 6 X_{21}) + 11(6 X_{12} + 7 X_{22})$$

Las *restricciones* a que están sometidas las variables vendrán determinadas por la disposición de la máquina M2 (máximo 80 horas) y por la cantidad de hormigón que se desea fabricar (10 m³ de cada tipo), además de la condición de no negatividad de las variables (no se pueden fabricar -4 m³ de hormigón), por ello:

$$6 X_{12} + 7 X_{22} \leq 80$$

$$X_{11} + X_{12} = 10$$

$$X_{21} + X_{22} = 10$$

$$\forall X_{ij} \geq 0$$

En resumen, se trata de optimizar la función:

$$\text{Min } Z = 8(5 X_{11} + 6 X_{21}) + 11(6 X_{12} + 7 X_{22})$$

Sujeta a

$$6 X_{12} + 7 X_{22} \leq 80$$

$$X_{11} + X_{12} = 10$$

$$X_{21} + X_{22} = 10$$

$$\forall X_{ij} \geq 0$$

13. FORMA GENERAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Como se ha visto en el apartado anterior, la forma general de la programación lineal consiste en encontrar el óptimo de una función lineal de “n” variables sometidas a un conjunto de restricciones lineales. Dichas restricciones pueden consistir en ecuaciones o inecuaciones, donde las variables pueden tomar cualquier valor.

La notación matemática sería:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeto a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \cong b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \cong b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \cong b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Siendo:

Z = función objetivo

x_1, x_2, \dots, x_n = variables

m = número de ecuaciones o restricciones

n = número de variables o incógnitas

c_j, a_{ij}, b_i = coeficientes, es decir, números conocidos

$x_j \geq 0$ = condición de no negatividad

El conjunto de restricciones a que se somete la función objetivo recibe el nombre de *sistema de ecuaciones estructurales*.

Las variables, generalmente, representan actividades (m^2 de alicatado, m^3 de hormigonado, etc.) por ello no pueden tener valores negativos.

Los coeficientes “ c_j ” que afectan a las variables en la función objetivo tienen la consideración de beneficios unitarios o costes unitarios.

Los coeficientes “ a_{ij} ” del sistema de restricciones son coeficientes técnicos de producción, es decir, cantidades de materias primas que se necesitan para obtener una unidad de producto.

Los coeficientes “ b_i ”, denominados términos independientes, son las disponibilidades de los distintos factores de producción que intervienen en el proceso productivo.

14. FORMA MATRICIAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

14.1. LA FUNCIÓN OBJETIVO

Si representamos la función objetivo como el producto de un vector fila por un vector columna:

$$Z = (c_1, c_2, \dots, c_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Si al vector fila lo llamamos “ C ” y al vector columna lo denominamos “ x ”, tendríamos:

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

La función objetivo quedaría:

$$Z = Cx$$

14.2. EL SISTEMA DE RESTRICCIONES

El conjunto de restricciones se puede representar como el producto de una matriz por el vector columna “ x ”:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si a la matriz la llamamos “A” y al vector de los términos independientes lo designamos por “b”, el sistema de restricciones queda:

$$Ax \geq b$$

Añadiendo la condición de no negatividad, la forma matricial de la programación lineal será:

$$Z = Cx$$

sujeto a

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

15. FORMA STANDAR DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Un planteamiento lineal está en forma standard cuando las restricciones están dispuestas en forma de igualdad, es decir, son ecuaciones (no inecuaciones) y los términos independientes (b_i) son positivos.

$$Z = Cx$$

sujeto a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

15.1. TRANSFORMACIONES PARA PASAR UN PLANTEAMIENTO LINEAL A FORMA STANDARD

Cuando algunas restricciones están formadas por inecuaciones o existen términos independientes negativos, es necesario realizar determinadas transformaciones para pasar el planteamiento lineal a forma standard.

a) Cuando el término independiente es negativo, se hace positivo multiplicando la restricción por -1 .

Por ejemplo, si la restricción es:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq -b_1$$

Multiplicando por -1 , quedaría:

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \leq b_1$$

b) Cuando una restricción viene en forma de inecuación, se transforma en ecuación introduciendo una *variable de holgura* (h_i). Si la desigualdad es de la forma " \leq ", la variable de holgura se introduce con signo positivo. Cuando es de la forma " \geq ", la variable de holgura llevará signo negativo.

Por ejemplo, si la restricción es:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

Se introduce la variable de holgura " h_1 " con signo positivo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + h_1 = b_1$$

Si la restricción fuese:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

Se introduce la variable de holgura " h_1 " con signo negativo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - h_1 = b_1$$

Las variables de holgura tienen el sentido económico de señalar la cantidad del factor de producción correspondiente que se deja sin utilizar.

Para que las variables de holgura no afecten al valor de la función objetivo, se le asigna en dicha función un coeficiente nulo.

Estas variables también cumplen la exigencia de no negatividad.

Ejemplo

Expresar el siguiente planteamiento lineal en forma standard:

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3$$

Sujeto a

$$4x_1 + 2x_2 - 6x_3 \leq -5$$

$$-2x_1 - 3x_2 - \frac{5}{3}x_3 \geq 6$$

$$x_1 - \frac{7}{2}x_2 + 8x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Forma standard:

$$\text{Max } Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3$$

Sujeto a

$$-4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - h_1 = 5$$

$$-2x_1 - 3x_2 - \frac{5}{3}x_3 - h_2 = 6$$

$$x_1 - \frac{7}{2}x_2 + 8x_3 + h_3 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$h_1, h_2, h_3 \geq 0$$

16. FORMA CANÓNICA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Un planteamiento lineal está en forma canónica cuando exista una solución básica aparente, es decir, cuando haya una submatriz unidad de orden “m x m” dentro del sistema.

Cuando en el sistema de ecuaciones no se encuentra dicha submatriz unidad, es preciso introducir *variables artificiales*. Se incorporarán tantas variables artificiales como sean necesarias hasta conseguir la submatriz unidad. Estas variables también deben cumplir la condición de no negatividad.

Ejemplo

Representar el siguiente planteamiento lineal en forma canónica:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En primer lugar, se pasan las restricciones a forma standard:

$$x_1 + 4x_2 + h_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 - h_2 = 2$$

En segundo lugar, se pasan a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como hay tres restricciones ($m = 3$), el sistema estaría en forma canónica si dentro de la matriz existiera una submatriz unidad de orden "3 x 3", es decir si se pudiera obtener la submatriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, no es posible obtener dicha submatriz, por lo que se puede concluir que el sistema no se encuentra en forma canónica. Dentro de la matriz sólo se encuentra una columna que pertenece a la mencionada submatriz, es decir, faltan otras dos columnas. Por ello, se hace preciso introducir dos variables artificiales que permitan obtener las columnas que faltan.

Las variables artificiales, que se denotan por " w_i ", se introducirán en la segunda y tercera restricción, dado que la variable de holgura " h_1 ", que se encuentra en la primera restricción, es la que da lugar a la única columna de la matriz que forma parte de la submatriz unidad. Se obtiene, por lo tanto, la forma canónica del siguiente modo:

$$x_1 + 4x_2 + h_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + w_1 = 5$$

$$x_1 + x_2 - h_2 + w_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$h_1, h_2 \geq 0$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Efectivamente, si ahora se representa el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ h_1 \\ h_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, la tercera, quinta y sexta columna de la matriz conforman una submatriz unidad de orden "3 x 3". Por lo tanto, se confirma que el sistema ahora se encuentra en forma canónica.

La función objetivo también se puede poner en forma canónica, añadiéndole las variables artificiales. Sin embargo, existen varios métodos para decidir cuáles serán los coeficientes de dichas variables. Estos métodos se verán más adelante cuando se estudie el método simplex.

17. SOLUCIONES BÁSICAS Y ÓPTIMAS

17.1. SOLUCIÓN BÁSICA

Se llama *solución básica* a aquella solución que satisface el sistema de restricciones

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

17.2. SOLUCIÓN BÁSICA NO DEGENERADA

Es aquella solución básica que tiene “m” valores positivos de las variables y los restantes valores son nulos.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, una solución básica no degenerada es aquella que tiene tantas variables con valores positivos, como número de restricciones o ecuaciones estructurales y el resto de variables nulas.

17.3. SOLUCIÓN BÁSICA DEGENERADA

Una solución básica degenerada es aquella que tiene menos variables con valores positivos que ecuaciones estructurales.

Será degenerada de primer orden, cuando tenga “m – 1” variables con valor positivo y el resto ceros; degenerada de segundo orden, cuando tenga “m – 2” variables con valor positivo y el resto ceros; etc.

Ejemplo

Dado un sistema de ecuaciones estructurales, con cuatro restricciones (m = 4) y 6 variables (n = 6), se podrían obtener, entre otras, las siguientes soluciones:

Solución básica no degenerada:

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 3$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = 0$$

$$h_1 = 2$$

$$h_2 = 5$$

Solución básica degenerada de primer orden:

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 3$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = 0$$

$$h_1 = 2$$

$$h_2 = 0$$

Solución básica degenerada de segundo orden:

$$X_1 = 2$$

$$X_2 = 3$$

$$X_3 = 0$$

$$X_4 = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 0$$

17.4. SOLUCIÓN ÓPTIMA

Es aquella solución básica que hace óptimo el problema lineal, ya sea maximizando o minimizando.

18. RESOLUCIÓN GRÁFICA

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones estructurales con sólo dos variables, es posible resolverlo gráficamente mediante unos ejes coordenados, donde en el eje de abscisas se representa la variable “ x_1 ” y en el eje de ordenadas a la variable “ x_2 ”.

Ejemplo 1

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

Sujeto a

$$0,80x_1 + x_2 \leq 600 \quad (1)$$

$$2,60x_1 + 2x_2 \leq 1560 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

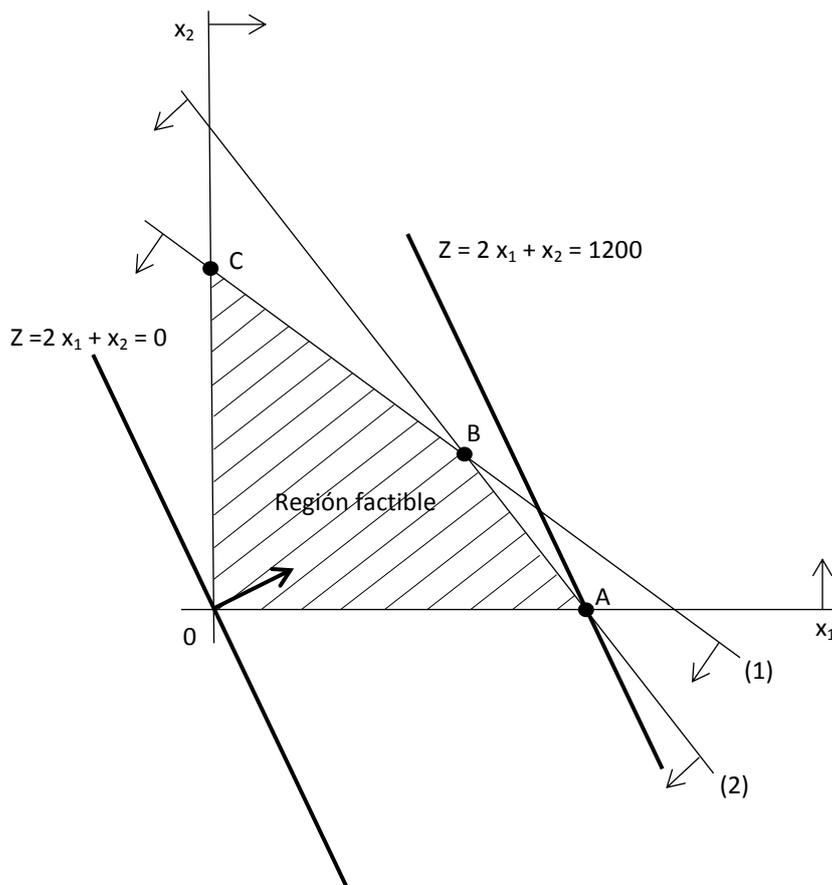


Figura 18.1

En la figura 18.1 se ha resuelto el problema de manera gráfica. La región factible muestra la zona que comprende todos los puntos que satisfacen el sistema de ecuaciones, la cuestión es saber cuál es el punto óptimo, en el cual la función objetivo obtiene un valor máximo. La recta que representa a la función $Z = 2x_1 + x_2 = 0$

simboliza el menor valor posible de la función objetivo. El óptimo se alcanzará en el punto más extremo sin abandonar la región factible que, en este caso, es el punto A.

Empero, cuando el dibujo no se hace a escala es difícil determinar si el punto óptimo es el A, el B o el C, todo dependerá de la inclinación que tenga la recta que representa a la función objetivo. Para saber con certeza cuál de los tres puntos es el óptimo, se procede de la siguiente forma:

a) Si el punto óptimo fuese el punto A, cuyas coordenadas son $(x_1 = 600, x_2 = 0)$, se tendría:

$$Z = 2x_1 + x_2 = 2 \times 600 + 0 = 1200$$

b) Si el punto óptimo fuese el punto B, sus coordenadas vendrán dadas por la intersección de las rectas (1) y (2). Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el resultado es $(x_1 = 360, x_2 = 312)$ y, por lo tanto:

$$Z = 2x_1 + x_2 = 2 \times 360 + 312 = 1032$$

c) Si el punto óptimo fuese el punto C, cuyas coordenadas son $(x_1 = 0, x_2 = 600)$, se tendría:

$$Z = 2x_1 + x_2 = 2 \times 0 + 600 = 600$$

De donde se puede comprobar que el óptimo se encuentra en el punto A.

En definitiva, la solución obtenida es REGIÓN FACTIBLE ACOTADA, CON UN VÉRTICE ÓPTIMO (EL VÉRTICE "A").

Ejemplo 2

$$\text{Max } Z = 5,20x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$0,80x_1 + x_2 \leq 600 \quad (1)$$

$$2,60x_1 + 2x_2 \leq 1560 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Como se puede observar, el problema es igual al anterior, pero con otra función objetivo. Por lo tanto, la representación gráfica es la misma, con la única diferencia de que la recta que representa a la función objetivo tiene distinta inclinación, como aparece en la figura 18.2.

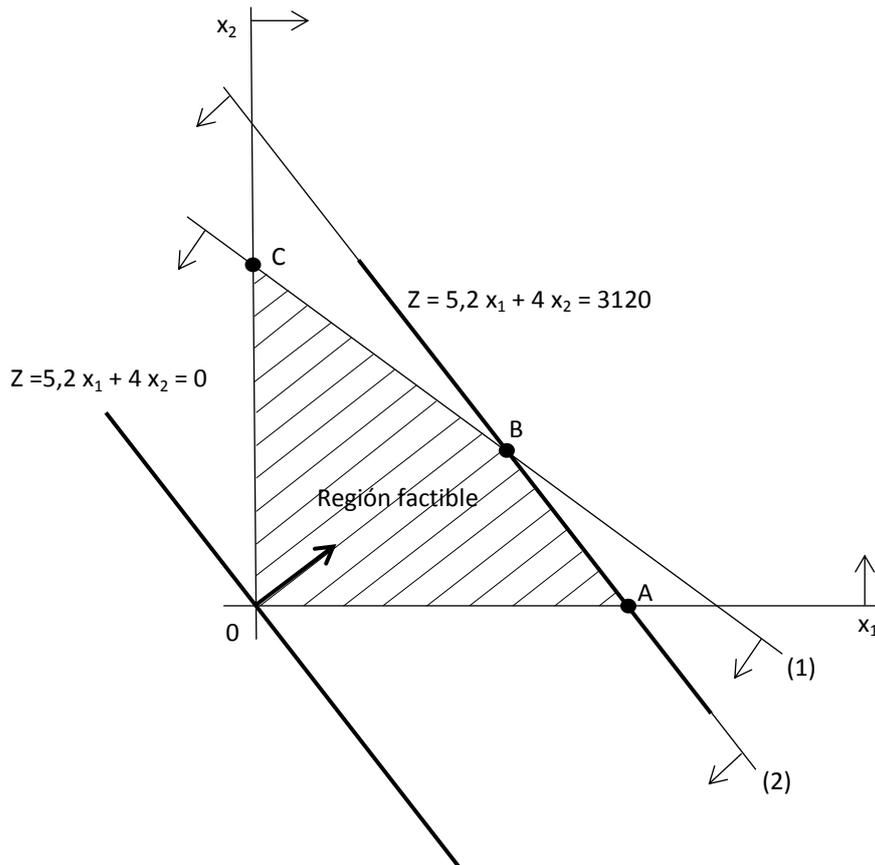


Figura 18.2

En este caso, si procedemos de manera análoga al ejemplo anterior:

a) Si el punto óptimo fuese el punto A, cuyas coordenadas son $(x_1 = 600, x_2 = 0)$, se tendría:

$$Z = 5,2 x_1 + 4 x_2 = 5,2 \times 600 + 4 \times 0 = 3120$$

b) Si el punto óptimo fuese el punto B, sus coordenadas vendrán dadas por la intersección de las rectas (1) y (2). Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el resultado es $(x_1 = 360, x_2 = 312)$ y, por lo tanto:

$$Z = 5,2 x_1 + 4 x_2 = 5,2 \times 360 + 4 \times 312 = 3120$$

c) Si el punto óptimo fuese el punto C, cuyas coordenadas son $(x_1 = 0, x_2 = 600)$, se tendría:

$$Z = 5,2 x_1 + 4 x_2 = 5,2 \times 0 + 4 \times 600 = 2400$$

De donde se puede comprobar que el óptimo lo comparten dos puntos, el punto A y el punto B. Es decir, la recta que representa a la función objetivo alcanza el máximo cuando coincide con la recta (2). Estamos pues, ante una solución que tiene múltiples óptimos, todos los puntos del segmento AB.

En definitiva, la solución obtenida es REGIÓN FACTIBLE ACOTADA, CON MÚLTIPLES ÓPTIMOS Y DOS VÉRTICES ÓPTIMOS (EL VÉRTICE "A" Y EL "B").

Ejemplo 3

$$\text{Min } Z = 6x_1 + 3x_2$$

Sujeto a

$$4x_1 + 5x_2 \geq 2000 \quad (1)$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 3000 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

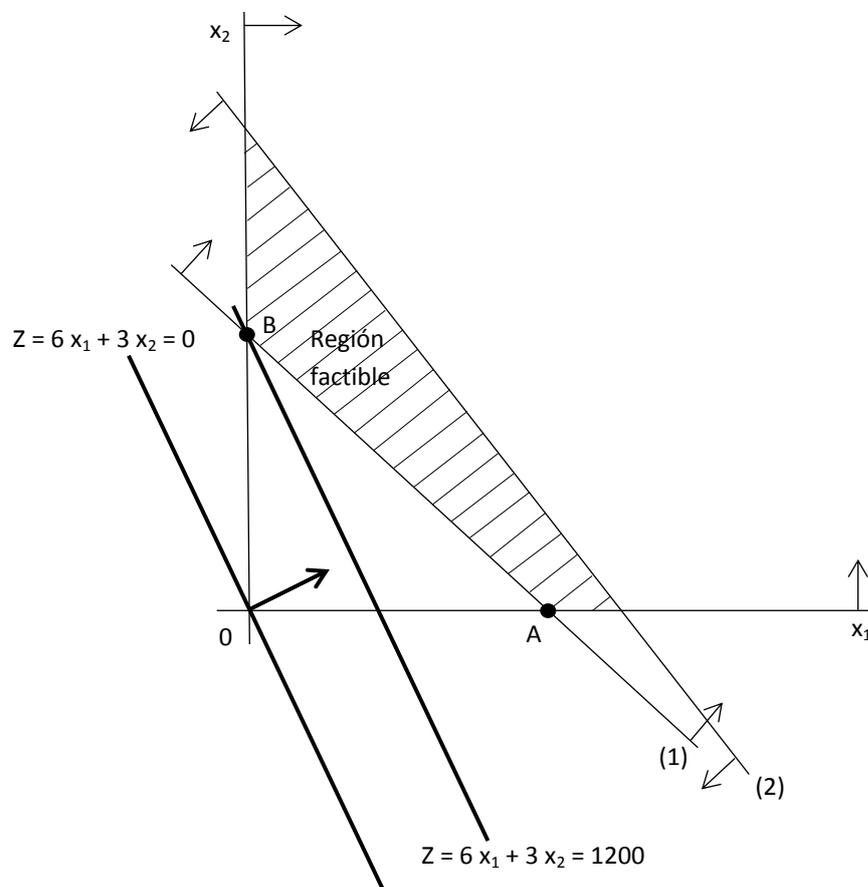


Figura 18.3

En esta ocasión, se trata de minimizar la función $Z = 6x_1 + 3x_2$. Por ello, el óptimo se alcanzará en aquel punto de la región factible que se encuentre más próximo a la recta que representa a la función $Z = 6x_1 + 3x_2 = 0$. En este caso, es el punto B.

En caso de duda entre el punto A y el punto B:

a) Si el punto óptimo fuese el punto A, cuyas coordenadas son $(x_1 = 500, x_2 = 0)$, se tendría:

$$Z = 6x_1 + 3x_2 = 6 \times 500 + 3 \times 0 = 3000$$

b) Si el punto óptimo fuese el punto B, cuyas coordenadas son $(x_1 = 0, x_2 = 400)$, se tendría:

$$Z = 6x_1 + 3x_2 = 6 \times 0 + 3 \times 400 = 1200$$

El menor valor de Z se obtiene en el punto B.

En definitiva, la solución obtenida es REGIÓN FACTIBLE ACOTADA, CON UN VÉRTICE ÓPTIMO (EL VÉRTICE "B").

Ejemplo 4. Otras soluciones

En las figuras 18.4, 18.5 y 18.6 se pueden observar algunas soluciones posibles de planteamientos lineales resueltos gráficamente.

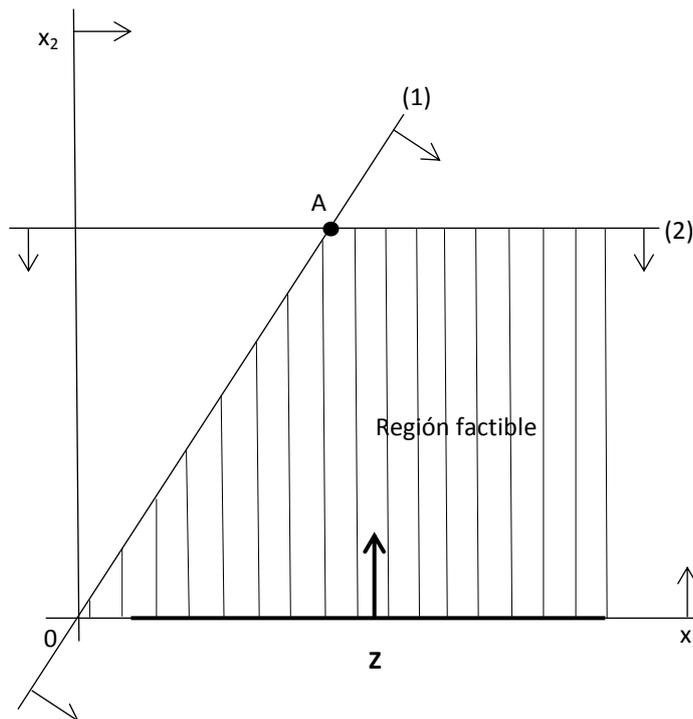
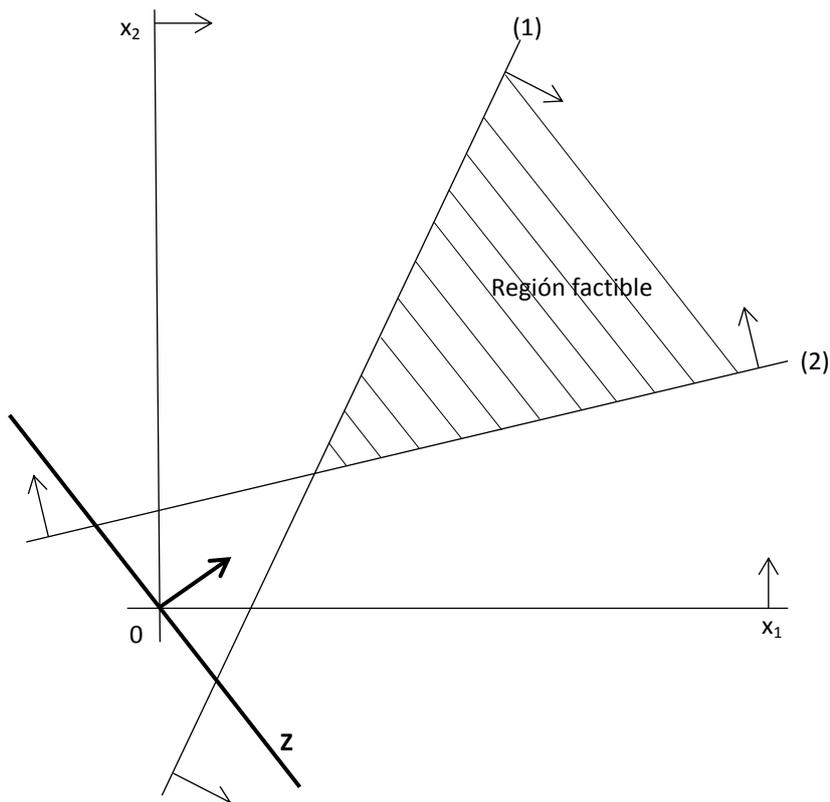


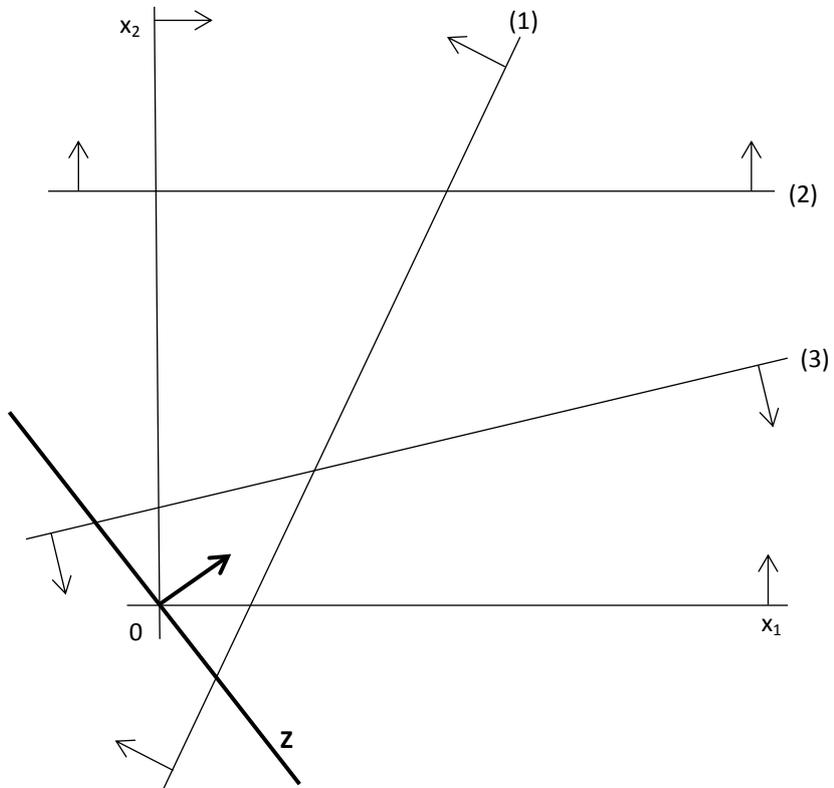
Figura 18.4

La figura 18.4 muestra una región factible no acotada, con un vértice óptimo (punto A) y múltiples óptimos. Todos los puntos de la recta (2), desde el punto A hacia la derecha, son óptimos.



REGIÓN FACTIBLE
NO ACOTADA
CON ÓPTIMO
INFINITO

Figura 18.5



REGIÓN FACTIBLE
VACÍA.
SOLUCIÓN NO
FACTIBLE.
SISTEMA DE
ECUACIONES
INCOMPATIBLE

Figura 18.6

19. RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO SIMPLEX

El algoritmo del Simplex es un método, ideado en 1951 por George Bernard Dantzig, para la resolución de problemas de programación lineal. El algoritmo parte de una solución básica inicial y, a partir de ella, se van obteniendo nuevas soluciones básicas, hasta conseguir la solución óptima.

Para obtener la solución básica inicial es necesario que el problema esté en forma canónica. Las variables que forman parte de dicha solución son aquellas que se corresponden con las columnas de la submatriz unidad.

La manera de obtener la solución básica inicial y las siguientes soluciones básicas es mediante una tabla en la que se efectúan determinadas transformaciones hasta conseguir la solución óptima.

Básicamente, existen dos métodos de resolución mediante el algoritmo del simplex: el método de la gran M y el método de las dos fases. En los supuestos que se estudian a continuación se aplicará el método de la gran M.

19.1. LA TABLA DEL SIMPLEX

En la figura 19.1 se reproduce esquemáticamente la tabla que se utiliza para la resolución de problemas de programación lineal por el método simplex.

| | | | |
|---|---|----------------------|--|
| Coeficiente de las variables en la F.O. (c_j) | | | |
| Variables (x_i, h_i, w_i) | b | Base | C |
| Matriz de los coeficientes de las variables en el sistema de restricciones (a_{ij}) | Término independ. de las restriccc. (b_i) | Variables de la Base | Coef. de las variables de la Base en la F.O. |
| Fila de los costes relativos (r_j) | Z = valor de la F.O. | | |

Figura 19.1

La fila de los costes relativos (r_j) se obtiene con la siguiente fórmula:

$$r_j = c_j - z_j$$

Siendo:

c_j = Coeficiente de las variables de la función objetivo

z_j = Σ Producto columna "j" de la matriz por columna "C"

19.2. EL MÉTODO DE LA GRAN "M" O DE LA "M" GRANDE

En este método, las variables artificiales se incorporan a la función objetivo (F.O.) afectadas por un coeficiente "M" muy grande, mayor que cualquier otro coeficiente de la función objetivo, con signo positivo si estamos minimizando y con signo negativo en el caso de estar maximizando. De esta forma, se trata de conseguir que las variables artificiales no formen parte de la solución óptima.

No obstante, si al finalizar el método simplex, en la solución óptima aparecen variables artificiales con valor no nulo, significaría que el problema original no tiene solución. Es decir, se trataría de un caso de región factible vacía.

Ejemplo

Resolver el siguiente planteamiento lineal:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

En primer lugar, se pasa a forma standard:

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2 + 0h_1 + 0h_2$$

Sujeto a

$$x_1 + 4x_2 + h_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 5$$

$$x_1 + x_2 - h_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$h_1, h_2 \geq 0$$

En segundo lugar, se pasa a forma canónica:

$$\text{Min } Z = 3 x_1 + 2 x_2 + 0 h_1 + 0 h_2 + M w_1 + M w_2$$

Sujeto a

$$x_1 + 4 x_2 + h_1 = 6$$

$$2 x_1 + x_2 + w_1 = 5$$

$$x_1 + x_2 - h_2 + w_2 = 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$h_1, h_2 \geq 0$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

A continuación, se confecciona la tabla del simplex:

| 3 | 2 | 0 | 0 | M | M | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|---|
| x_1 | x_2 | h_1 | h_2 | w_1 | w_2 | b | Base | C |
| 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | h_1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | w_1 | M |
| 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 | w_2 | M |
| 3-3M | 2-2M | 0 | M | 0 | 0 | Z = 7 M | | |

Los coeficientes " r_j " se han calculado de la siguiente forma:

$$r_j = c_j - z_j$$

Para ello, los coeficientes " c_j " serán:

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = 2$$

$$c_3 = 0$$

$$c_4 = 0$$

$$c_5 = M$$

$$c_6 = M$$

Y los elementos " z_j ":

$$z_1 = \text{producto columna de } x_1 \text{ por columna de } C = 3M$$

$$z_2 = \text{producto columna de } x_2 \text{ por columna de } C = 2M$$

$$z_3 = \text{producto columna de } h_1 \text{ por columna de } C = 0$$

$$z_4 = \text{producto columna de } h_2 \text{ por columna de } C = -M$$

$$z_5 = \text{producto columna de } w_1 \text{ por columna de } C = M$$

$$z_6 = \text{producto columna de } w_2 \text{ por columna de } C = M$$

Por lo tanto:

$$r_1 = c_1 - z_1 = 3 - 3M$$

$$r_2 = c_2 - z_2 = 2 - 2M$$

$$r_3 = c_3 - z_3 = 0 - 0 = 0$$

$$r_4 = c_4 - z_4 = 0 - (-M) = M$$

$$r_5 = c_5 - z_5 = M - M = 0$$

$$r_6 = c_6 - z_6 = M - M = 0$$

El valor de la función objetivo se calcula mediante la fórmula:

$$Z = \Sigma (\text{columna "b"} \times \text{columna "C"})$$

En nuestro caso:

$$Z = (6 \times 0) + (5 \times M) + (2 \times M) = 7M$$

La solución básica inicial se obtiene asignando a cada una de las variables que están en la base un valor igual al elemento correspondiente de la columna de "b" de los términos independientes. Al resto de variables se le asigna un valor nulo. Es decir:

$$\text{Solución básica inicial} \rightarrow h_1 = 6 ; w_1 = 5 ; w_2 = 2 ; x_1 = 0 ; x_2 = 0 ; h_2 = 0$$

Para que la solución sea válida es preciso que satisfaga al sistema de ecuaciones. Realizando las comprobaciones oportunas se verifica que la solución es válida.

La siguiente cuestión es saber si existe una solución básica mejor que la inicial. Para ello, se mira la fila de los costes relativos y se analizan los r_j de las variables que no forman parte de la base:

a) Si la F.O. es Maximizar Z:

- Si hay algún $r_j > 0 \rightarrow$ Existe mejor solución
- Si todos los $r_j < 0 \rightarrow$ No existe mejor solución (la solución actual es óptima)
- Si hay algún $r_j = 0 \rightarrow$ Existe solución alternativa

b) Si la F.O. es Minimizar Z:

- Si hay algún $r_j < 0 \rightarrow$ Existe mejor solución
- Si todos los $r_j > 0 \rightarrow$ No existe mejor solución (la solución actual es óptima)
- Si hay algún $r_j = 0 \rightarrow$ Existe solución alternativa

En el ejemplo objeto de estudio, como la F.O. es Minimizar Z, existe mejor solución dado que r_1 y r_2 son negativos, al ser M un número muy grande.

Para obtener una solución básica mejor que la inicial, debe salir una variable de la base y entrar otra en su lugar. Para ello, se establece un criterio de entrada y un criterio de salida.

Criterio de entrada

Si la función objetivo es Maximizar Z, entrará en la base aquella variable que tenga el mayor “ r_j ” positivo. Cuando la función objetivo es Minimizar Z, entrará en la base la variable que tenga el mayor “ r_j ” negativo, en valor absoluto.

Criterio de salida

Para saber que variable es la que sale de la base, es necesario añadir una nueva columna a la tabla en la que se representa el cociente entre la columna de los términos independientes “b” y la columna de la matriz de la variable que entra. El menor valor positivo (no se tienen en cuenta los valores negativos) obtenido en esta nueva columna, indicará la variable que sale de la base.

En nuestro ejemplo, la variable que entra es x_1 y la variable que sale es w_2 .

| 3 | 2 | 0 | 0 | M | M | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|---|--------------|
| x_1 | x_2 | h_1 | h_2 | w_1 | w_2 | b | Base | C | b_i/a_{ik} |
| 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 6 | h_1 | 0 | 6 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 | w_1 | M | 5/2 |
| 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 | w_2 | M | 2 |
| 3-3M | 2-2M | 0 | M | 0 | 0 | Z = 7 M | | | |

↑
entra

← sale

Para pasar a la siguiente tabla, donde en la base ya no aparece w_2 y, en su lugar, aparece x_1 , es necesario identificar el elemento PIVOTE y, posteriormente, realizar una serie de transformaciones.

Identificación del Pivote

El elemento de la tabla denominado “Pivote” es aquel que pertenece a la columna de la variable que entra (x_1), y a la fila de la variable que sale (w_2), identificado en la tabla mediante un círculo.

Transformaciones en la tabla del simplex

$$\text{Nueva fila del pivote} = \frac{\text{Vieja fila del pivote}}{\text{Pivote}}$$

$$\text{Nueva fila } k = \text{Vieja fila } k - (\text{Nueva fila pivote} \times \text{Elem. fila } k \text{ que } \in \text{ a columna del pivote})$$

Si se realizan estas transformaciones en la primera tabla, se obtiene la segunda tabla:

| 3 | 2 | 0 | 0 | M | M | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------|---|--------------|
| x_1 | x_2 | h_1 | h_2 | w_1 | w_2 | b | Base | C | b_i/a_{ik} |
| 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | -1 | 4 | h_1 | 0 | 4 |
| 0 | -1 | 0 | 2 | 1 | -2 | 1 | w_1 | M | 1/2 ← sale |
| 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 | x_1 | 3 | -- |
| 0 | M-1 | 0 | 3-2M | 0 | 3M-3 | $Z' = M + 6$ | | | |

↑
entra

La solución básica de la segunda tabla es:

$$h_1 = 4 ; w_1 = 1 ; x_1 = 2 ; x_2 = 0 ; h_2 = 0 ; w_2 = 0$$

Esta solución básica cumple con el sistema de ecuaciones, por lo tanto es válida.

Como " r_3 " es negativo, significa que existe mejor solución.

Efectuando sobre la segunda tabla las operaciones necesarias, análogas a las realizadas sobre la tabla 1, se obtiene la tercera tabla:

| 3 | 2 | 0 | 0 | M | M | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|-------|---|--------------|
| x_1 | x_2 | h_1 | h_2 | w_1 | w_2 | b | Base | C | b_i/a_{ik} |
| 0 | 7/2 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 7/2 | h_1 | 0 | |
| 0 | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | -1 | 1/2 | h_2 | 0 | |
| 1 | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 | 0 | 5/2 | x_1 | 3 | |
| 0 | 1/2 | 0 | 0 | M-3/2 | M | $Z'' = 15/2$ | | | |

La solución básica de la tercera tabla es:

$$h_1 = 7/2 ; h_2 = 1/2 ; x_1 = 5/2 ; x_2 = 0 ; w_1 = 0 ; w_2 = 0$$

Esta solución básica cumple con el sistema de ecuaciones, por lo tanto es válida.

Como los " r_j " de las variables que no forman parte de la base son todos > 0 , significa que no existe mejor solución. Es decir, la solución básica obtenida en la tercera tabla es la solución óptima.

Ahora bien, ¿qué tipo de solución es?

Al tener tres variables con valor positivo y el resto de variables con valor nulo, es una solución no degenerada.

Como no existe ningún " r_j ", de las variables que no forman parte de la base, con valor igual a cero, significa que no existe solución alternativa y, por lo tanto, existe un único punto óptimo.

No existen variables artificiales en la base.

En definitiva: REGIÓN FACTIBLE ACOTADA CON UN VÉRTICE ÓPTIMO.

19.3 SITUACIONES INDETERMINADAS

Al aplicar el criterio de entrada o el de salida, puede ocurrir que haya empate entre dos o más variables. En estos casos, se aplican los siguientes criterios:

19.3.1. Variable que entra

Cuando se produce un empate entre dos o más variables para entrar de la base, se elige aquella que produzca mayor efecto neto en la función objetivo. Es decir, aquella que haga a la función mínima, si estamos minimizando, o máxima, si estamos maximizando.

Para ello, se calcula la columna b_i/a_{ik} para cada una de las variables candidatas a entrar de la base. Seguidamente, para cada variable que entra se elige el menor valor de la columna b_i/a_{ik} . Y, entre estos valores, se elige el mayor, que corresponderá a una determinada variable. Esta variable será la que entre en la base.

19.3.2. Variable que sale

Cuando se produce un empate entre dos o más variables para salir de la base, tendrá prioridad para salir:

- 1º Las variables artificiales.
- 2º Las variables de holgura.
- 3º Las variables estructurales.
- 4º A igualdad en los puntos anteriores, la variable que se encuentre más abajo en la tabla.

Ejemplo

Supongamos que tenemos la siguiente tabla del simplex:

| | | | | | | | x_2 | x_4 | h_1 | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|--------------|--------------|--------------|
| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | h_1 | h_2 | h_3 | b | Base | C | b_i/a_{ik} | b_i/a_{ik} | b_i/a_{ik} |
| 4 | 6 | 2 | 10 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |
| 0 | 3 | 1 | 5 | 2 | 0 | 1 | 30 | x_3 | 2 | 10 | 6 | 15 |
| 0 | 3 | 0 | 6 | 1 | 1 | 2 | 36 | h_2 | 0 | 12 | 6 | 36 |
| 1 | 3 | 0 | 3 | 2 | 0 | 1 | 30 | x_1 | 4 | 10 | 10 | 15 |
| 0 | -12 | 0 | -12 | -12 | 0 | -6 | Z = 180 | | | | | |

Variable que entra:

Existe un triple empate entre las variables x_2 , x_4 y h_1 , las tres con $r_j = -12$.

Se calcula la columna b_i/a_{ik} para las tres variables:

En la columna de x_2 el menor valor es 10.

En la columna de x_4 el menor valor es 6.

En la columna de h_1 el menor valor es 15.

$\text{Max}(10, 6, 15) = 15$ (que corresponde a la variable h_1).

Por lo tanto, la variable que entra es h_1 .

Variable que sale:

Hay dos variables candidatas a salir, x_3 y x_1 , ambas con $b_i/a_{ik} = 15$. Como las dos son variables estructurales, saldrá la que ocupa un lugar más abajo en la tabla, o sea x_1 .

19.4. VARIABLES DE SIGNO LIBRE

Una variable de signo libre es aquella que puede tomar valores positivos o negativos:

$$x_k \geq 0$$

Como el método Simplex no permite trabajar directamente con este tipo de variables, lo que se hace es un cambio de variable:

$$x_k = x_p - x_q$$

$$\text{donde } x_p \geq 0, \quad x_q \geq 0$$

Ejemplo

Resolver el siguiente planteamiento lineal:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 20$$

$$3x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

Como la variable x_3 tiene signo libre, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x_3 = x_4 - x_5$$

$$\text{donde } x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0$$

El planteamiento lineal queda:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 + 4x_4 - 4x_5 \geq 20$$

$$3x_2 + x_4 - x_5 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_4, x_5 \geq 0$$

Una vez pasado el planteamiento a forma canónica y resuelto por el método Simplex, la solución óptima se alcanza en la séptima tabla. La solución alcanzada es:

$$x_1 = 100/3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_4 = 40$$

$$x_5 = 0$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 520/3$$

$$h_3 = 0$$

$$w_1 = 0$$

Realizando el cambio de base $x_3 = x_4 - x_5 = 40 - 0 = 40$, se obtiene:

$$x_1 = 100/3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 40$$

$$h_1 = 0$$

$$h_2 = 520/3$$

$$h_3 = 0$$

$$w_1 = 0$$

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0h_1 + 0h_2 + 0h_3 - M w_1$$

$$\text{Max } Z = 200/3 + 0 + 40 + 0 + 0 + 0 - 0 = 320/3$$

19.5. CASOS ESPECIALES DEL ALGORITMO DEL SIMPLEX

19.5.1. Múltiples óptimos

Si existe una variable que no forma parte de la base, con un coeficiente en la fila de los costes relativos igual a cero, ello quiere decir que es posible introducir esta variable en la base sin que se produzca ninguna modificación en la función objetivo. Es decir, existe una solución alternativa a la solución óptima obtenida. En este caso, pueden ocurrir dos cosas:

a) Si existe algún $a_{ik} > 0$ en la columna de la variable que entra, se llega a una nueva base, es decir a un nuevo vértice, en el cual la función objetivo toma el mismo valor que en el anterior. Resultando que hay dos vértices óptimos. Cualquier punto de la arista comprendida entre ambos vértices es también un punto óptimo. Estaríamos, por lo tanto, en una situación de múltiples óptimos con más de un vértice extremo, como se aprecia en la figura 18.2.

b) Si todos los $a_{ik} \leq 0$ en la columna de la variable que entra, estaríamos ante una región factible no acotada. O sea, la región factible posee una arista no acotada formada toda ella por puntos óptimos. En particular, esta arista tiene un vértice óptimo que es el punto óptimo del que se había partido. La figura 18.4 reproduce gráficamente esta situación.

19.5.2. Óptimo infinito

Cuando, siguiendo el criterio de entrada, hay variables que pueden entrar en la base, pero todos los a_{ik} de la columna de la variable que entra son ≤ 0 , es decir, no hay ninguna variable que deba salir de la base, indica que es posible aumentar indefinidamente la variable que entra sin salirse de la región factible, al tiempo que aumenta también indefinidamente la función objetivo. Estamos ante una solución no acotada con óptimo infinito, como se observa en el gráfico de la figura 18.5.

19.5.3. Región factible vacía.

Cuando se ha llegado a la solución óptima y en la base existen variables artificiales con valor no nulo, la solución del problema es "solución no factible". Dicho de otra forma, el sistema de ecuaciones es incompatible. La figura 18.6 muestra un sistema de ecuaciones con región factible vacía.

BIBLIOGRAFÍA

ACKOFF, RUSSEL LINCOLN y SASIENI, MAURICE W. *Fundamentos de investigación de operaciones*. México: Limusa, 1987.

ACKOFF, RUSSELL LINCOLN. *Un concepto de planificación de empresas*. México: Limusa-Wiley, 1972.

ARCHIBALD, RUSSELL D. *Network-based management systems : (PERT-CPM)*. New York: Wiley, 1967.

ARJONA CIRIA, ANTONIO. *Planificación y control de la producción*. Bilbao: Deusto, 1982.

BATTERSBY, ALBERT. *Planificación de proyectos complejos*. Barcelona: Ariel, 1973.

BENDICHO JOVEN, JOSÉ P. *Manual de planificación y programación para obras públicas y construcción*. Madrid: Rueda, 1983.

BENSON, BEN. *Método de la ruta crítica para construcción de edificios*. Barcelona: C.E.C.S.A., 1974.

BORRELL FONTELLES, JOSÉ. *Métodos matemáticos para la economía. Programación matemática*. Madrid: Pirámide, 1989.

CARVAJAL SALINAS, ENRIQUE. *Las funciones básicas de la producción en la construcción*. Sevilla: CICOP, 2001

CARVAJAL SALINAS, ENRIQUE. *Uniproducto o Multiproducto*. Sevilla: Colegio Oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos, 1992.

DOMÍNGUEZ MACHUCA, JOSÉ ANTONIO (Coord.). *Dirección de operaciones: aspectos tácticos y operativos en la producción y los servicios*. Madrid: McGraw-Hill, 1984.

DOMÍNGUEZ MACHUCA, JOSÉ ANTONIO. *El subsistema productivo de la empresa: problemas y fundamentos teóricos*. Madrid: Pirámide, 1981.

ESCUADERO, LAUREANO F. *Asignación óptima de recursos: análisis y solución de los problemas de reducción a costo mínimo de la duración de un proyecto*. Bilbao: Deusto, 1977.

EILON, SAMUEL. *La producción: planificación, organización y control*. Barcelona: Labor, 1976.

- FAURE, ROBERT. *Elementos de investigación operativa*. Madrid: ICE, 1975.
- FIGUERA ANDÚ, JULIO. *PERT-CPM-ROY : técnicas modernas de planificación, programación y control de proyectos*. Madrid: Sociedad Anónima Española de Traductores y Autores, 1969.
- KAUFFMANN, A. y DESBAZEILLE, GÉRARD. *Método del camino crítico: aplicación a los programas de ejecución de trabajos del método P.E.R.T. y a la optimación de sus costes*. Barcelona: Sagitario, 1971.
- LARRAÑETA ASTOLA, JUAN. *Programación lineal y grafos*. Sevilla: Secretariado de publicaciones de la Universidad de Sevilla, 1977.
- LEVIN, RICHARD I. *Planning and control with PERT-CPM*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- MATEOS PERERA, JESÚS. *La producción en la construcción*. Madrid: Bellisco, 1989.
- MODER, JOSEPH J. *Project management with CPM and PERT*. New York: Reinhold, 1967.
- ORTIGUEIRA BOUZADA, MANUEL. *Programación reticular: métodos y aplicaciones*. Madrid: ICE, 1976.
- PELEGRÍN PELEGRÍN, BLAS. *Algoritmos en grafos y redes*. Barcelona: P.P.U., 1992.
- POMARES MARTINEZ, JUAN. *Planificación gráfica de obras : Gantt-C.M.-P.E.R.T.-Roy...* Barcelona: Gustavo Gili, 1977.
- RAMOS MÉNDEZ, EDUARDO. *Programación lineal y métodos de optimización*. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 1993.
- ROBERTSON, D. C. *El pert : planificación y control de proyectos*. Madrid: Ibérico Europea de Ediciones, 1971
- ROMERO LOPEZ, CARLOS. *Técnicas de programación y control de proyectos*. Madrid: Pirámide, 1993.
- ROTHFELD, STUART M. *Le PERT COST: (élaboration des budgets et contrôle des dépenses): cours programmé*. París: Entreprise Moderne d'edition, D.L., 1966.
- SICARD, P. *Pratique du PERT : méthode de contrôle des délais et des coûts*. París: Dunod, 1967.
- STILIAN, GABRIEL N. *Pert: a new management planning and control technique*. New York: American Management Association, 1962.

SUÁREZ SUÁREZ, ANDRÉS SANTIAGO. *Curso de economía de la empresa*. Madrid: Pirámide, 2007.

WAGNER, GERHARD. *Los sistemas de planificación CPM y PERT aplicados a la construcción*. Barcelona: Gustavo Gili, 1979.

WIEST, JEROME. *A management guide to PERT/CPM : with GERT/PDM/DCPM and other networks*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1977.

YU CHUEN-TAO, LUIS. *Aplicaciones prácticas del PERT y CPM*. Bilbao: Deusto, 1984.

Este libro brinda la posibilidad de iniciarse en la investigación de operaciones y algunas de sus aplicaciones inmediatas: la programación lineal y los métodos de programación de proyectos complejos. Así, se estudian los métodos GANTT, PERT, CPM y ROY, como métodos directos de programación de proyectos; la correcta distribución de los recursos de un proyecto, mediante técnicas de nivelación (Burgess-Killebrek) y asignación de recursos (Roc 8001), y finalmente, mediante la Programación Lineal, se plantean problemas reales de la vida cotidiana que tienen por objetivo maximizar los beneficios de una determinada opción empresarial, o bien minimizar los costes de la misma.

Los conceptos aquí tratados son de aplicación a cualquier tipo de proyecto en el campo de la arquitectura y la ingeniería, aunque están especialmente dirigidos a los alumnos de Arquitectura Técnica, Ingeniería de Edificación y Ciencia y Tecnología de Edificación.

DOCENTIA

