

Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Análisis de la eficiencia aplicado a la Fórmula 1

Autor: Álvaro Amo Lledó

Tutor: Antonio Plácido Moreno Beltrán

Dpto. Organización Industrial y Gestión de empresas I
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Proyecto Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Análisis de la eficiencia aplicado a la Fórmula 1

Autor:

Álvaro Amo Lledó

Tutor:

Antonio Plácido Moreno Beltrán

Profesor titular

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Proyecto Fin de Grado: Análisis de la eficiencia aplicado a la Fórmula 1

Autor: Álvaro Amo Lledó

Tutor: Antonio Plácido Moreno Beltrán

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

*A todos aquellos que estuvieron presentes en
este largo camino*

Agradecimientos

A todas aquellas personas que han pasado por este largo camino, tanto familia, amigos y profesores que han aportado su granito de arena a hacer posible que alcance esta meta. El camino ha sido duro, y si no fuera por ellos y sus ánimos esto no sería posible y mucho menos alcanzable.

Resumen

La investigación que procede plantea diferentes propuestas de variación a las escuderías y pilotos que hoy en día participan en la Fórmula 1 con fin de mejorar la eficiencia de cada una de ellas. El Campeonato Mundial de Fórmula 1 de la FIA, más conocida como Fórmula 1 o F1 es la máxima competición de automovilismo internacional y campeonato de deporte motor más popular y prestigioso del mundo dirigido por la Federación Internacional del Automóvil.

Cada escudería y piloto que se estudie posee una serie de recursos que utiliza para obtener los mejores resultados tanto deportivos como económicos. Se considerará ineficiente aquella escudería que no genere los resultados suficientes según los recursos empleados por lo que será necesaria la búsqueda de soluciones.

Dentro del mundo de la Fórmula 1, las diferencias se encuentran entre segundos e incluso en unidades menores por lo que la competitividad entre escuderías y pilotos es muy latente. Así mismo, grandes ineficiencias de manera reiterada conllevan grandes gastos para las escuderías.

Para el análisis de la eficiencia, se enfocará en la metodología DEA (Data Envelopment Analysis), en concreto el modelo SBM y modelo sin entradas para analizar y comparar las diferentes escuderías y pilotos que hoy en día encontramos en los Grandes Premios de todo el mundo.

Abstract

The investigation that follows proposes different proposals for variation to the teams and drivers that are currently participating in Formula 1 in order to improve the efficiency of each of them. The FIA Formula 1 World Championship, better known as Formula 1 or F1, is the highest international and most popular motor racing competition in the world, run by the International Automobile Federation.

Each team and drivers studied has a series of resources that it uses to obtain the best sports and economic results. It will be considered inefficient that team that does not generate sufficient results according to the resources used so it will be necessary to find solutions.

Within the world of Formula 1, the differences are between seconds and even in smaller units so the competitiveness between teams and drivers is very latent. Likewise, great inefficiencies and repeatedly entails great expenses for the teams.

For the efficiency analysis, it will focus on the DEA (Data Envelopment Analysis) methodology, specifically the SBM model and model without inputs to analyze and compare the different teams and drivers that we find today in the Grand Prixes around the world .

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xiii
Índice	xv
Índice de Tablas	xvii
Índice de ilustraciones	xix
Índice de fórmulas	11
1 Objetivos y alcance de la investigación	13
1.1 <i>Introducción</i>	13
1.2 <i>Alcance de la investigación</i>	13
1.3 <i>Estructura final del documento</i>	13
2 Contexto de la fórmula 1	15
2.1 <i>Introducción</i>	15
2.2 <i>Influencia de la Fórmula 1 en la sociedad</i>	15
2.3 <i>La Fórmula 1</i>	16
2.3.1 <i>Antecedentes históricos de la Fórmula 1</i>	16
2.3.2 <i>Escuderías miembras</i>	17
2.3.3 <i>Circuitos en la Fórmula 1</i>	18
3 Metodología DEA	31
3.1 <i>Introducción</i>	31
3.2 <i>Orígenes de la metodología DEA</i>	31
3.3 <i>Conceptos básicos</i>	32
3.4 <i>Modelos DEA</i>	35
3.4.1 <i>Modelo RATIO</i>	36
3.4.2 <i>Modelo CCR-INPUT</i>	37
3.4.3 <i>Modelo CCR-OUTPUT</i>	38
3.4.4 <i>Modelo BBC-INPUT</i>	40
3.4.5 <i>Modelo BBC-OUTPUT</i>	41
3.4.6 <i>Comparativa modelos CCR y BCC</i>	42
3.4.7 <i>Modelos No Orientados</i>	42
3.4.8 <i>Modelo aditivo</i>	43
3.4.9 <i>Modelo SBM (Slack Based Measure)</i>	44
3.4.10 <i>DEA sin entradas</i>	46
3.5 <i>Aplicaciones de interés de la metodología DEA</i>	47
3.5.1 <i>Sector público o sector servicios</i>	47
3.5.2 <i>Sector industrial privado</i>	47
3.5.3 <i>Sector educativo</i>	47
3.5.4 <i>Sector Deportivo</i>	48
4 Implementación de los modelos	49
4.1 <i>Introducción</i>	49

4.2	<i>Descripción de los modelos</i>	49
4.2.1	Datos	49
4.2.2	Variables para SBM	50
4.2.3	Variables para DEA sin entradas	54
5	Estudio de los resultados	59
5.1	<i>Introducción</i>	59
5.2	<i>Resultados</i>	59
5.2.1	Modelo SBM	59
5.2.2	Modelo DEA sin entradas	62
6	CONCLUSIONES	67
	REFERENCIAS/BIBLIOGRAFÍA	69
	ANEXO DE PROGRAMACIÓN LINGO	71

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Comparativa metodologías paramétricas y DEA.	32
Tabla 2. Datos de las escuderías.	49
Tabla 3. Datos de los pilotos.	50
Tabla 4. Variables del modelo escuderías.	51
Tabla 5. Conversión salidas escuderías.	53
Tabla 6. Conversión resultante escuderías.	54
Tabla 7. Variables DEA sin entradas.	56
Tabla 8. Datos modelo SBM.	59
Tabla 9. Holguras modelo SBM con VRS.	60
Tabla 10. Holguras modelo SBM sin VRS.	60
Tabla 11. Comparativa escuderías con VRS.	60
Tabla 12. Comparativa escuderías sin VRS.	61
Tabla 13. Ranking escuderías con VRS.	62
Tabla 14. Ranking escuderías sin VRS.	62
Tabla 15. Datos de los pilotos.	63
Tabla 16. Ponderaciones pilotos mediante DEA sin entradas.	63
Tabla 17. FO para los pilotos.	64
Tabla 18. Ranking de los pilotos.	65

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Circuito de Albert Park	19
Ilustración 2. Circuito Internacional de Baréin	19
Ilustración 3. Circuito Internacional de Shanghái	20
Ilustración 4. Circuito callejero de Bakú	20
Ilustración 5. Circuito de Barcelona	21
Ilustración 6. Circuito de Mónaco	21
Ilustración 7. Circuito Gilles Villeneuve	22
Ilustración 8. Circuito Paul Ricard	22
Ilustración 9. Circuito Red Bull Ring	23
Ilustración 10. Circuito de Gran Bretaña	23
Ilustración 11. Circuito de Hockenheimring	24
Ilustración 12. Circuito de Hungaroring	24
Ilustración 13. Circuito de Spa-Francorchamps	25
Ilustración 14. Circuito Nazionale di Monza	25
Ilustración 15. Circuito callejero de Marina Bay	26
Ilustración 16. Circuito de Sochi	26
Ilustración 17. Circuito de Suzuka	27
Ilustración 18. Circuito Hermanos Rodríguez	27
Ilustración 19. Circuito de las Américas	28
Ilustración 20. Circuito José Carlos Pace	28
Ilustración 21. Circuito Yas Marina	29
Ilustración 22. Metodología DEA	33
Ilustración 23. CRS, VRS.	35
Ilustración 24. CCR-INPUT	38
Ilustración 25. CCR-OUTPUT	40
Ilustración 26. BBC-INPUT	41
Ilustración 27. BBC-OUTPUT	42

ÍNDICE DE FÓRMULAS

Fórmula 1. Productividad	32
Fórmula 2. Productividad DMUs	33
Fórmula 3. Entrada virtual	33
Fórmula 4. Salida virtual	34
Fórmula 5. Productividad múltiple	34
Fórmula 6. Eficiencia relativa	34
Fórmula 7. Eficiencia global	35
Fórmula 8. Conjunto de DMUs en CRS	36
Fórmula 9. Conjunto de DMUs en VRS	36
Fórmula 10. Modelo Ratio	37
Fórmula 11. Forma multiplicadora modelo CCR- INPUT	37
Fórmula 12. Modelo dual CCR-INPUT	38
Fórmula 13. Forma lineal CCR-OUTPUT	39
Fórmula 14. Modelo dual CCR-OUTPUT	39
Fórmula 15. Modelo BBC-INPUT	40
Fórmula 16. Modelo BBC-OUTPUT	41
Fórmula 17. Fase I modelo no orientado	43
Fórmula 18. Fase II modelo no orientado	43
Fórmula 19. Modelo aditivo	44
Fórmula 20. Modelo SBM	45
Fórmula 21. Restricción convexidad para VRS en SBM	45
Fórmula 22. Cambio de variable en SBM	45
Fórmula 23. Modelo SBM con cambio de variable	46
Fórmula 24. Modelo DEA sin entradas	46
Fórmula 25. Modelo DEA modificado	47
Fórmula 26. Función objetivo modelo SBM	52
Fórmula 27. Maximización suma total.	52
Fórmula 28. Restricciones SBM.	52
Fórmula 29. Restricción VRS.	53
Fórmula 30. Función objetivo actualizada escuderías.	54
Fórmula 31. Restricciones actualizadas escuderías.	54
Fórmula 32. Restricciones DEA sin entradas.	56
Fórmula 33. Función objetivo DEA sin entradas.	57

1 OBJETIVOS Y ALCANCE DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

La Fórmula 1, ha ganado un reconocimiento mundial en las últimas décadas, las carreras automovilísticas de F1 se consideran megaeventos deportivos que ofrecen un gran impacto positivo para las ciudades anfitrionas en diferentes campos, como el destino turístico, impacto sociocultural y por supuesto, impacto económico.

Así mismo, los medios de comunicación han tenido una importante contribución a su creciente expansión por todo el mundo, por ejemplo, en 2016 se capturaron 390 millones de espectadores en 185 países del mundo.

La temporada de F1, consiste en una serie de carreras al aire libre conocidas como Grandes Premios y que se celebran entre los meses de marzo y noviembre. Estos resultados, proporcionan clasificación tanto para conductores como para las escuderías en su respectivo campeonato de constructores. Dentro de la propia carrera, las estrategias de cada equipo juegan un papel fundamental a la hora de afrontar los diferentes factores que afectan al desarrollo del Gran Premio, como pueden ser, las características de la pista, el talento de los pilotos y la efectividad de las propias estrategias enfrentado a las condiciones climáticas, rendimientos de los neumáticos... Dichos circuitos, juegan un papel fundamental en la competición y son autorizados previamente por la FIA de acuerdo con el estilo de la pista y las clases de automóviles que compiten en ellas siendo estas muy duras y siempre mejoran la calidad de la seguridad. Todas estas características atraen una gran atención de los académicos en los últimos años debido a su entorno altamente competitivo.

El seguimiento de este deporte se encuentra en auge, debido al aumento de los seguidores en las redes sociales, que es superior al 200%. Además, la F1 genera 5.000 millones de euros al año, así como 400 millones de espectadores que hacen de la industria de este deporte un microcosmos de la economía mundial. Cada ciudad que alberga Gran Premio paga alrededor de 40 millones de euros de media, estando Rusia en cabeza con 54 millones y seguida de Abu Dhabi con 49. En el caso de España, se pagan 21 millones y así hasta completar las 21 carreras de hoy en día alrededor de los cinco continentes.

1.2 Alcance de la investigación

El objetivo de esta investigación será determinar que pilotos y escuderías que conforman el mundial de la Fórmula 1 a lo largo del último año, han administrado de manera eficiente y cuáles de ellos no, proponiendo decisiones para los ineficientes con el fin de mejorar sus resultados ya que si dicha ineficiencia es excesiva el impacto económico para la escudería será motivo de reajustar algunos factores que intervienen en los resultados negativos.

Para ello, se procederá a realizar mediante la metodología DEA (Data Envelopment Analysis) un análisis de la eficiencia, concretamente el método SBM y método sin entradas para poder analizar los resultados a lo largo del tiempo, en concreto los resultados del último año. Dichos resultados, mostrarán los defectos que poseen las diferentes escuderías, así como señalando los eficientes que tendrán como referencia aquellos que no gestionen de manera adecuada sus recursos.

1.3 Estructura final del documento

El trabajo que se presenta, estará compuesto por seis capítulos y diez anexos, desarrollados como se expone;

En el presente capítulo, se presentan los objetivos de la investigación y además, la estructura del documento.

En el posterior capítulo, el segundo, se describe el contexto económico de la Fórmula 1 en la actualidad así como la formación de la FIA y quienes la han integrado a lo largo de historia.

En el tercer capítulo, se desarrolla la teoría de la Metodología DEA. Así como los antecedentes históricos, conceptos básicos y los modelos sencillos más utilizados. Además se añadirá una recopilación de las

investigaciones en el campo de la Fórmula 1 aplicando la Metodología DEA.

Respecto al cuarto capítulo, se describirá el modelo matemático que se procede a utilizar para el cálculo de la eficiencia así como el modelo y la implementación del modelo informático.

En el quinto capítulo, junto con los datos obtenidos se analizará la eficiencia y las respectivas mejoras de las escuderías y pilotos no eficientes.

El sexto capítulo incluyen las conclusiones del proyecto y las posibles opciones a futuras investigaciones.

Los anexos contienen los datos recopilados para la investigación y los obtenidos para la medición de la eficiencia así como el código utilizado en el documento.

2 CONTEXTO DE LA FÓRMULA 1

2.1 Introducción

En este apartado, se procede a presentar las características y el contexto económico de la Fórmula 1, desde sus comienzos hasta hoy en día para poder apreciar su evolución a lo largo de los años, así como la influencia en la sociedad actual. Así mismo, se comentará como afecta la Fórmula 1 hoy en día a los innumerables seguidores que posee este deporte alrededor de todo el mundo. Por último, se comentará el desarrollo a lo largo de la historia de los Grandes Premios, así como su evolución y principales aportadores a uno de los deportes más conocidos en todo el mundo.

2.2 Influencia de la Fórmula 1 en la sociedad

El automovilismo es uno de los espectáculos más populares del mundo, cuentan con más seguidores que muchos otros deportes. Así mismo es el que mueve más dinero por lo que involucra a un gran número de empresas, fabricantes, deportistas, ingenieros y patrocinantes. Los ingenieros desarrollan las últimas tecnologías en motores, aerodinámica, suspensión y neumáticos para lograr el máximo rendimiento.

La Fórmula 1 se ha convertido en el paradigma de la profesionalización en el deporte. Todo está controlado y medido y los pilotos se han convertido en atletas con capacidad de lidiar con brillantez, no sólo ante el cronómetro, sino también ante los ingenieros, medios de comunicación y patrocinadores. Estos aspectos han sido perfeccionados hasta el límite.

La plena competitividad que genera la propia Fórmula 1 y la adrenalina son dos de los pilares fundamentales de la gran audiencia dentro de este deporte masivo. Dicha competencia deportiva, siempre ha estado presente en todas las culturas a lo largo de la historia, desde las antiguas carreras de caballos que generaban una gran audiencia en aquella época hasta nuestros días donde podemos disfrutar de los Grandes Premios desde el televisor.

Con el paso del tiempo y con el progreso tecnológico, la actividad física y los deportes son una actividad de ocio que genera una gran comunidad y de seguidores del deporte. Ya que el deporte cubre una necesidad esencial en las personas, siendo deportes de equipo, generalmente la mayoría, los más reconocidos mundialmente cubriendo la necesidad de formar parte de un grupo y la competitividad.

Es por todo ello que la Fórmula 1 a día de hoy, es uno de los deportes con más seguidores en todo el mundo. Dentro de cada escudería, junto con los pilotos de diferentes nacionalidades, no sentimos representados por el mismo y a su vez parte de él. A su vez, crea una rivalidad y competitividad entre las escuderías y pilotos que genera, quizás, su éxito mundial.

Todos estos factores, producen que la Fórmula 1 sea un negocio de millones de euros que mueve cada año a causa de los innumerables seguidores que están pendientes cada Gran Premio tanto de manera presencial como por retransmisión, a inversiones, publicidad, victorias y muchos más factores por los que compiten las diferentes escuderías.

2.3 La Fórmula 1

2.3.1 Antecedentes históricos de la Fórmula 1

El automovilismo es uno de los espectáculos más populares del mundo, cuentan con más seguidores que muchos otros deportes. Así mismo es el que mueve más dinero por lo que involucra a un gran número de empresas, fabricantes, deportistas, ingenieros y patrocinadores. Los ingenieros desarrollan las últimas tecnologías en motores, aerodinámica, suspensión y neumáticos para lograr el máximo rendimiento.

Si bien la pasión por las carreras automovilísticas nace prácticamente con los primeros automóviles, la Fórmula 1 encuentra raíces en el legendario 'Grand Prix motor racing'. Con sede central en París a finales de 1949, cuando todavía no existían circuitos preestablecidos y las carreteras daban espacio a los primeros desafíos del género, se anunció la unión para la siguiente temporada de varios Grandes Premios nacionales para crear un Campeonato Mundial de Pilotos. En 1950 se celebró el primer Campeonato de Fórmula 1, anteriormente denominada Fórmula A. Aun así, los primeros años, por motivos económicos se compitió con coches de Fórmula 2, pero se comenzaron a establecer sistemas de puntuaciones y el reconocimiento de siete carreras como aptas para el Campeonato del Mundo.

El primer Gran Premio de Fórmula 1 se realizó el 13 de mayo de 1950 en el circuito de Silverstone, en Reino Unido, el cual ganó el piloto Giuseppe Farina a bordo de un Alfa Romeo. Durante la primera década la dominancia estaba regida por las escuderías de Alfa Romeo, Ferrari, Maserati y Mercedes Benz, consiguiendo Fangio el primer gran récord en la categoría al ganar cinco campeonatos mundiales sobre la primera de las escuderías. Cuya marca sería batida por Michael Schumacher casi medio siglo más tarde junto con los grandes avances tecnológicos que empezaban a hacerse presentes en las escuderías, como son la distribución del motor en los vehículos pasando de la parte frontal a la parte trasera del piloto. A finales de los años 50, como incentivo adicional para los equipos, se introdujo el Campeonato de constructores en 1958.

Ya en la década de 1960, Lotus introdujo un gran avance presentando el primer automóvil monocasco de aluminio que junto con los grandes avances aerodinámicos en torno a 1970 provocarían que los bólidos alcanzaran velocidades impensables años anteriores. Es a mediados de la década de los 80 cuando el monopolio de Lotus se vio desbancado por McLaren que ganó el título 6 de los 8 años e incluso, ganando 15 de las 16 carreras del Campeonato.

Dichas velocidades eran un arma de doble filo, ya que no se disponía de medidas de seguridad adecuadas lo que produjo en 1990 la muerte de Ayrton Senna y Roland Ratzenberger que obligó a la FIA a introducir grandes cambios para mejorar la seguridad de los vehículos y, por tanto, la de los pilotos. Para combatir la fenomenal potencia de los coches, se prohibieron los turbocompresores y comenzaron a surgir las ayudas electrónicas para el conductor, estando Lotus a la cabeza de la vanguardia. Posteriormente aparecerían las cajas de cambios semiautomáticas y el control de tracción.

A finales de la década de los 90, los grandes costes de la Fórmula 1 separaron un gran espacio entre las escuderías más grandes, en este caso cuatro, y los más pequeños. Esto produjo que entre estos años hasta 28 equipos entraran y salieran del Campeonato.

En la entrada del nuevo siglo, el claro liderato estaba marcado por Ferrari conquistando en 10 temporadas 8 títulos de pilotos y 8 de constructores debido a la gran calidad y al presupuesto de la escudería. La figura más dominante durante el periodo fue Michael Schumacher que consiguió 5 títulos consecutivos y un total de 7 en su carrera.

La última década, los equipos líderes han sido Red Bull y Mercedes que se han repartido los campeonatos con 4 títulos cada uno y cuyos pilotos correspondientes eran el alemán Sebastian Vettel y el británico Lewis Hamilton. Aunque esta dominancia produjo una baja competitividad en las últimas temporadas con su consecuente caída de audiencia por parte de los seguidores del deporte por lo que la FIA y los equipos acordaron modificar el reglamento técnico en la temporada 2017.

Desde 2016, la empresa estadounidense Liberty Media controla el Formula One Group. Bernie Ecclestone continuó como director ejecutivo hasta el 23 de enero de 2017 ya que fue cesado como CEO de la empresa tras 39 años al mando del negocio de la Fórmula 1.

Respecto a los pilotos españoles que han destacado en el deporte, hay que destacar a Fernando Alonso, campeón

del mundo con Renault en 2005 y 2006, y subcampeón con Ferrari en 2010, 2012 y 2013.

Actualmente, Carlos Sainz, que debutó con la escudería Toro Rosso en el Gran Premio de Australia de 2015 tras ganar las World Series en 2014 y que hoy en día es una de las grandes promesas del mundo de la Fórmula 1.

Hoy en día, la Fórmula 1 es un espectáculo mundial al cual asisten más de 500 millones de personas generando que sea la categoría automovilística internacional más seguida por diferentes medios de todo el mundo y en continuo crecimiento.

2.3.2 Escuderías miembros

Como se dijo anteriormente, el objetivo de la Fórmula 1 y con ello ganar el Campeonato de Constructores es realizar la mejor gestión del capital en todos los aspectos del monoplaza.

Las escuderías de la Fórmula 1 es un selecto club de equipos de pilotos con licencia para disputar las carreras que componen el Mundial de F1. La mayoría de estas escuderías están asociadas a grandes marcas del automóvil, aunque cada vez más vinculadas a grandes patrocinadores que invierten fortunas para poder participar en ‘el gran circo’. Cada escudería compite en carrera con dos pilotos y disponen de otros pilotos probadores. A partir de ahí, cada escudería dispone de un organigrama distinto, aunque todas cuentan con multitud de ingenieros, que realizan un trabajo casi tan importante como el de los pilotos.

➤ Alpha Tauri

Alpha Tauri F1 es el nombre que debuta en la F1 este año 2020, sin embargo, no es un equipo nuevo. El equipo italiano de Faenza Toro Rosso de capital austriaco ha rebautizado su nombre, aunque la comparativa será con años anteriores, se nombrará con este nuevo nombre.

Nació como el equipo Minardi en 1985, posteriormente fue adquirido por la marca de bebida energética Red Bull y nombrada Toro Rosso hacia 2006.

➤ Red Bull

Red Bull proviene de Stewart Grand Prix nacida en 1997, posteriormente se convirtió en Jagua en el año 2000 y 5 años más tarde fue adquirida por Red Bull por 2005.

➤ Racing Point

Racing Point es la escudería con más cambios de nombre en la historia de la categoría. Recién se anunció que el consorcio encabezado por su propietario Lawrence Stroll adquirió un porcentaje de Aston Martin y a partir de 2021 llevará ese nombre.

Racing Point era Force India entre 2008 y 2018, antes, Spyker en 2007, Midland en 2006 y Jordan establecida en 1991. Como nuevo nombre, en 2021, pasará a ser Aston Martin como sexto nombre de la escudería.

➤ Haas

El equipo más nuevo que permanece sin cambio de nomenclatura. Fue creada por la familia de norteamericanos Haas en 2016.

➤ Alfa Romeo

Junto a la escuadra de Maranello son las escuderías más longevas en la F1, nacidas en 1950.

Alfa Romeo fue la primera escudería en ganar el Campeonato mundial de pilotos con Giuseppe Farina en 1950. Los italianos han tenido diferentes participaciones desde la creación de la F1 y se han retirado también en varias

ocasiones de la competencia.

Debutó en 1950 y se retiró en 1951. Posteriormente, reingresó en 1979 por un periodo de 7 años para retirarse de nuevo en 1985. En 1993 debutó la escudería Sauber que permaneció hasta el 2006.

A partir de ahí fue renombrada BMW Sauber hasta 2010 y a partir de 2011 regresó a ser Sauber hasta 2019 rebautizada por quinta vez con el nombre de Alfa Romeo.

➤ **Mercedes**

El equipo dominador de la era, también tiene sus antecedentes basados en otros equipos, aunque su aparición en F1 se remonta a 1954 y 1955 cuando ganaron el Campeonato mundial de pilotos con J.M. Fangio.

En su 2ª etapa, primero fue Tyrrell desde 1970 hasta 1998. En 1999 fue adquirido por BAR (British American Racing) quien permaneció como propietario hasta 2006 cuando su nombre cambió a Honda.

El Proyecto japonés terminó en 2009 cuando Ross Brawn adquirió el equipo y lo bautizó Brawn GP conquistando el Campeonato mundial de pilotos y constructores para retirarse al finalizar el año.

En 2010 el equipo fue adquirido por el actual Mercedes AMG Petronas F1 Team y así permanece hasta ahora con algunos rumores sobre su posible salida de la F1 para 2021.

➤ **Renault**

De origen francés, es un equipo que también ha entrado y salido de la categoría reina en varias ocasiones.

Su primera etapa fue de 1977 a 1985. Este equipo incluso coincidió corriendo de manera simultánea con Toleman durante 5 años de 1981 a 1985 quien serviría de base más adelante para la siguiente etapa de los franceses en F1.

Por ello, el actual Renault proviene de Toleman, escuadra inglesa que corrió entre 1981 y 1985 precisamente y que fue adquirida por Benetton Formula en 1986.

En 2002, volvió a aparecer en el escenario de la Fórmula 1 hasta el 2011 como Renault.

En 2012 la firma francesa fue comprada por Lotus quien compitió hasta 2015 y los galos regresaron con todo recomprando el equipo y compitiendo nuevamente con su nombre original hasta nuestros días.

2.3.3 Circuitos en la Fórmula 1

El mundial de Fórmula 1, contiene diferentes pruebas en circuitos donde se realizan diferentes clasificaciones por tiempo para una posterior colocación en la parrilla. Dentro de este punto, se mostrarán los diferentes circuitos pertenecientes al mundial en orden de participación durante toda la temporada.

1 Gran Premio de Australia.

Se realiza en el Circuito de Albert Park, es un circuito urbano de carreras que se monta en los alrededores del lago Albert Park, posee una longitud de 5'303km donde los pilotos realizan un total de 58 vueltas con una distancia total de Carrera de 307'574km.

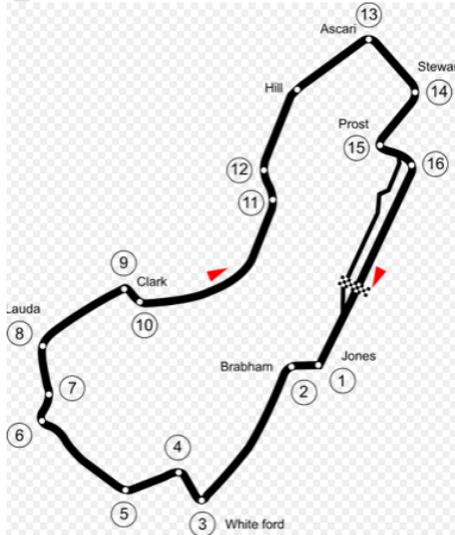


Ilustración 1. Circuito de Albert Park

Dicho GP, se realizó el 15, 16, 17 de Marzo cuyos resultados fueron, en orden, Valtteri Bottas, Lewis Hamilton y Max Verstappen.

2 Gran Premio de Baréin.

Se realiza en el Circuito Internacional de Baréin, un autódromo localizado en la ciudad de Manama, cuya longitud es de 5,412km donde los pilotos deben realizar un total de 57 vueltas completando una distancia total de 308,238km.

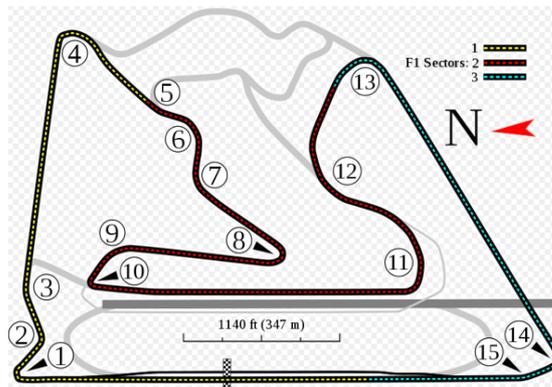


Ilustración 2. Circuito Internacional de Baréin

Durante el pasado 29, 30 y 31 de Marzo, se realizó el GP cuyos resultados fueron, en primer puesto Lewis Hamilton, seguido de Valtteri Bottas y tercer puesto para Charles Leclerc.

3 Gran Premio de China.

El Gran Premio de China se realiza en el Circuito Internacional de Shanghái, es un autódromo ubicado en Shanghái, construido en 2003, posee una distancia de 5'451km compuesta por 56 vueltas que completan una distancia de carrera de 305'066km.

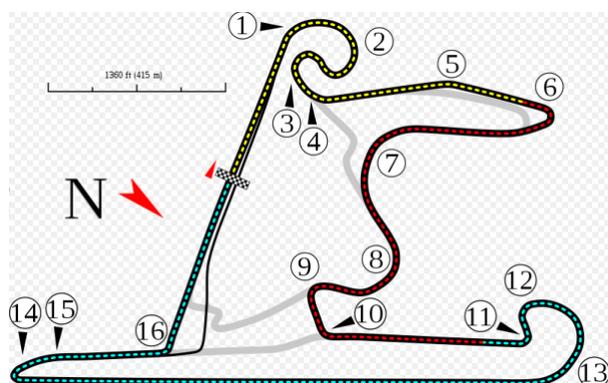


Ilustración 3. Circuito Internacional de Shanghái

El Gran Premio de China tuvo lugar el 12, 13 y 14 de Abril. La victoria fue para Lewis Hamilton, Segundo puesto para Valtteri Bottas y bronce para Sebastian Vettel.

4 Gran Premio de Azerbaiyán.

Se realiza en el Circuito callejero de Bakú, es un circuito urbano de carreras construido en la ciudad de Bakú. La longitud total del circuito es de 6'003km, realizándose 51 vueltas con un total de 306'049km.

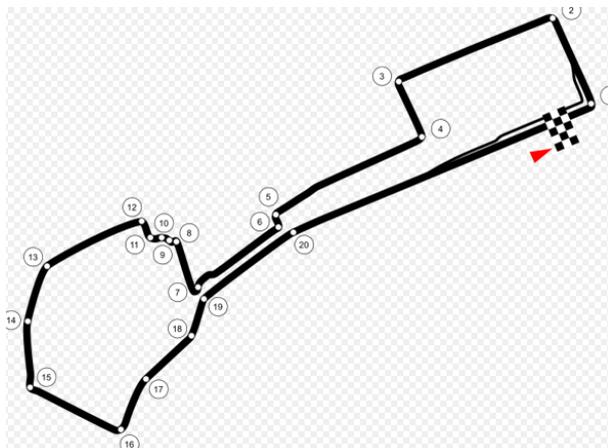


Ilustración 4. Circuito callejero de Bakú

Dicho Gran Premio, se realizó el 26, 27 y 28 de Abril. El ganador del Gran Premio fue Valtteri Bottas, seguido de Lewis Hamilton y tercer puesto para Sebastian Vettel.

5 Gran Premio de España.

El circuito de Barcelona en Cataluña alberga el Gran Premio también es conocido como Circuito de Montmeló, es un autódromo situado en la provincial de Barcelona. Su longitud es de 4'655km y se realizan un total de 66 vueltas que suman 307'104km en total.

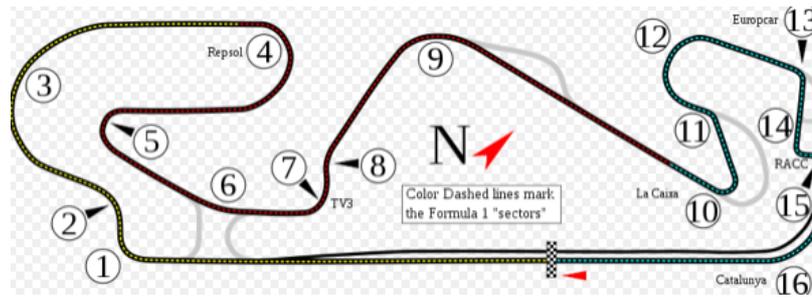


Ilustración 5. Circuito de Barcelona

El 10, 11 y 12 Mayo albergaron el Gran Premio en Barcelona. El primer puesto fue para Lewis Hamilton, Segundo puesto para Valtteri Bottas y tercer puesto para Max Verstappen.

6 Gran Premio de Mónaco.

Se realiza en el Circuito de Mónaco conocido también como Circuito de Monte Carlo, es un circuito urbano de carreras ubicado en el Principado de Mónaco. La longitud del circuito es de 3'337km a realizar 78 vueltas con una suma total de 260'286km.

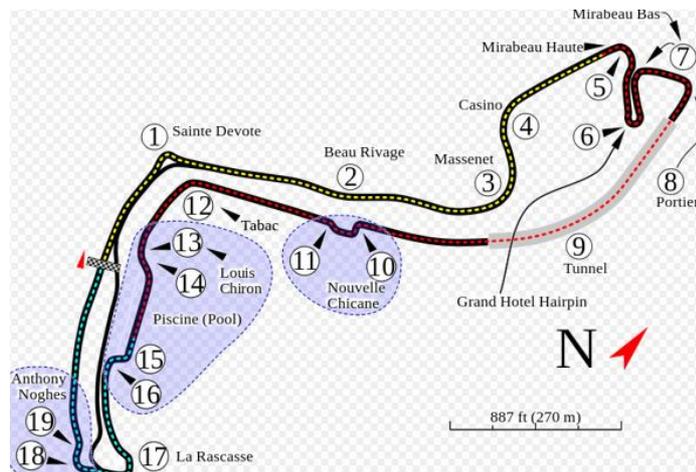


Ilustración 6. Circuito de Mónaco

El Gran Premio de Mónaco fue realizado el 23, 25 y 26 de Mayo. El ganador fue Lewis Hamilton, seguido de Sebastian Vettel y tercer puesto para Valtteri Bottas.

7 Gran Premio de Canadá.

Se realiza en el Circuito Gilles Villeneuve es un circuito urbano de carreras localizado en la Île Notre-Dame, una isla artificial situada en el río San Lorenzo, posee una longitud de 4'361 km, realizándose un total de 70 vueltas que dan lugar a 305'270km.

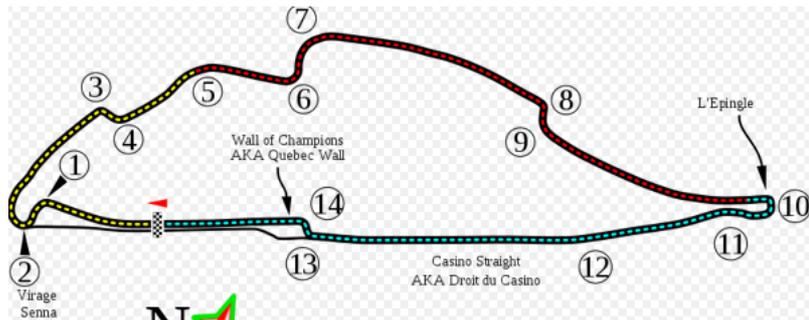


Ilustración 7. Circuito Gilles Villeneuve

El 7, 8 y 9 de Junio, el Circuito Gilles Villeneuve albergó el Gran Premio de Canadá. La victoria fue para el británico Lewis Hamilton, seguido de Sebastian Vettel y tercer puesto para Charles Leclerc.

8 Gran Premio de Francia.

La carrera se realiza en el Circuito Paul Ricard, es un autódromo situado en Le Castellet, región de Provenza-Alpes-Costa azul, Francia, considerado el circuito más seguro de su época. La longitud total del circuito es de 5'842km, cuyo recorrido total es de 309'626km divididos en 53 vueltas.

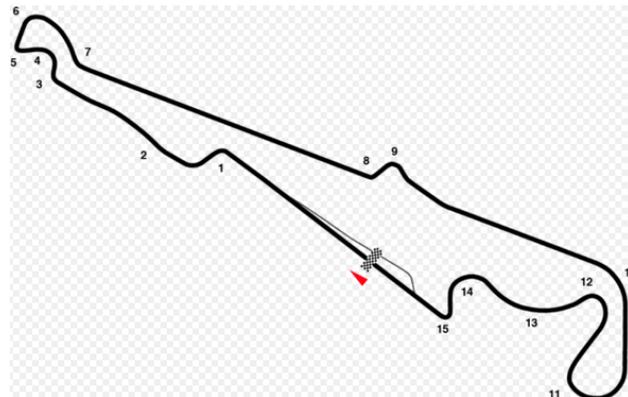


Ilustración 8. Circuito Paul Ricard

El Gran Premio se dispute el 21, 22 y 23 de Junio. El ganador fué Lewis Hamilton, seguido de Valtteri Bottas y tercer puesto para Charles Leclerc.

9 Gran Premio de Austria.

El Gran Premio de Austria tiene sede en el Red Bull Ring, un autódromo ubicado en la villa de Spielberg, cerca del poblado de Zeltweg, cuya longitud es de 4'326km, donde las 71 vueltas componen un total de 307'020km.

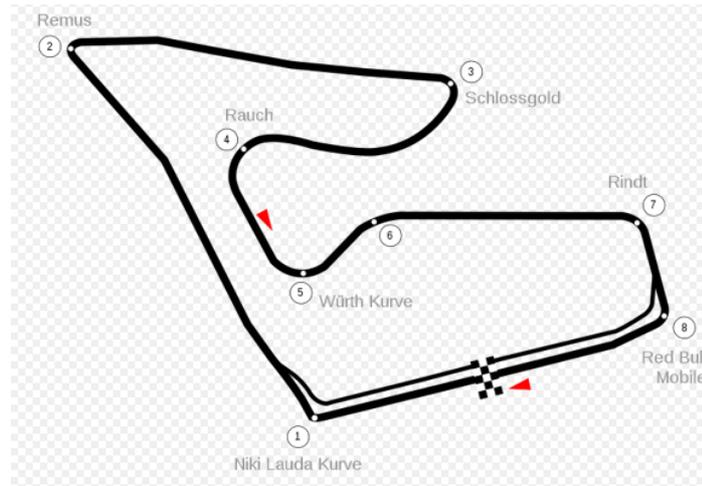


Ilustración 9. Circuito Red Bull Ring

Durante el 28, 29 y 30 de Junio se celebró el Gran Premio de Austria. El ganador del GP fue Max Verstappen, seguido de Charles Leclerc y Valtteri Bottas.

10 Gran Premio de Gran Bretaña.

El Gran Premio de Gran Bretaña se realiza en el Circuito de Silverstone, un autódromo localizado en Inglaterra. La longitud del circuito es de 5'891km en el que se completan 52 vueltas dando como resultado una distancia de carrera de 306'198km.

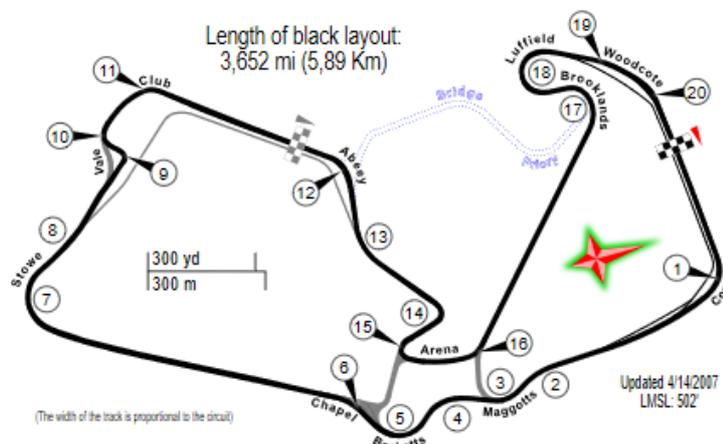


Ilustración 10. Circuito de Gran Bretaña

El Gran Premio se realiza el 12, 13 y 14 de Julio. La victoria fue para Lewis Hamilton, segundo puesto para Valtteri Bottas y tercer puesto para Charles Leclerc.

11 Gran Premio de Alemania.

El Gran Premio de Alemania se realiza en Hockenheimring, un autódromo localizado en las cercanías de Hockenheim, Alemania. El circuito posee 4'574km de longitud, un total de 64 vueltas y una distancia total de 306'458km.

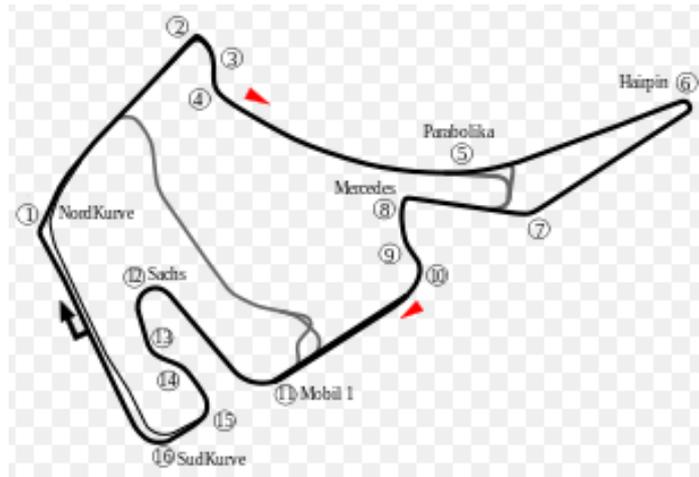


Ilustración 11. Circuito de Hockenheimring

Durante el 26, 27 y 28 de Julio tuvo lugar el Gran Premio de Alemania. La victoria fue para Max Verstappen seguido de Sebastian Vettel y Daniil Kvyat.

12 Gran Premio de Hungría.

El Gran Premio de Hungría se realiza en el circuito de Hungaroring, un autódromo localizado a 30 kilómetros del centro de la ciudad de Budapest. El circuito tiene un recorrido de 4'381km, donde se realizan 70 vueltas y posee un recorrido total de 306'630km.

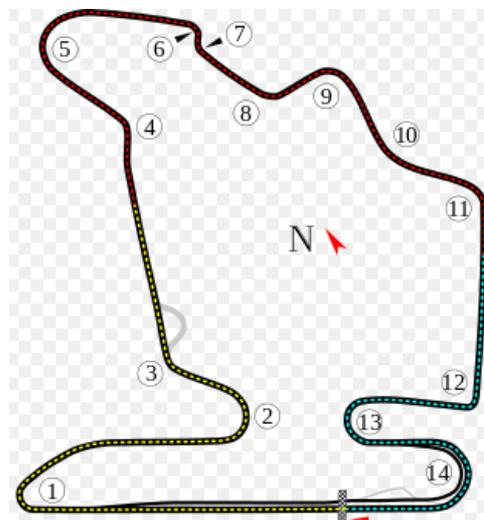


Ilustración 12. Circuito de Hungaroring

Lewis Hamilton quedó durante el 2, 3 y 4 de agosto líder del Gran Premio, en segundo puesto Max Verstappen y tercero para Sebastian Vettel.

13 Gran Premio de Bélgica.

El Circuito de Spa-Francorchamps alberga durante el 30, 31 de agosto y 1 de septiembre el Gran Premio de Bélgica. El circuito tiene una longitud de 7'004km donde se realizan 44 vueltas completando una distancia de carrera de 308'052km.

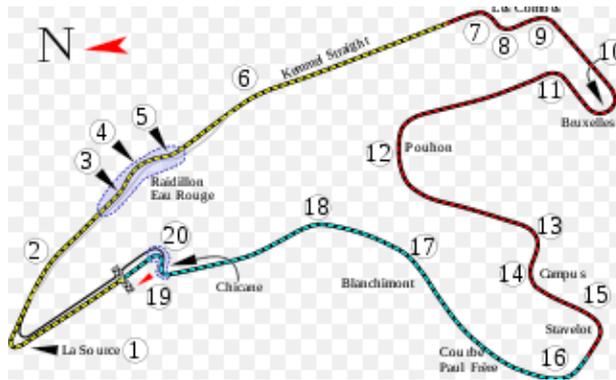


Ilustración 13. Circuito de Spa-Francorchamps

Durante la prueba de Bélgica el ganador fue Charles Leclerc, seguido de Lewis Hamilton y Valtteri Bottas.

14 Gran Premio de Italia.

El Autodromo Nazionale di Monza, alberga durante el 6, 7 y 8 de septiembre el Gran Premio. El circuito posee una longitud de 5'793km realizandose 53 vueltas seguidas que completan una distancia de carrera de 306'720km.

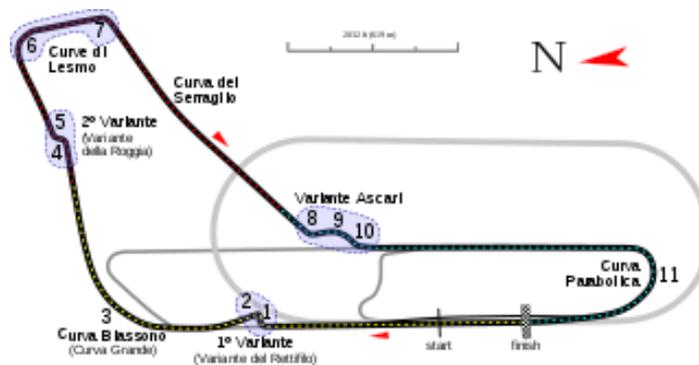


Ilustración 14. Circuito Naxionale di Monza

Los resultados del Gran Premio, fueron en primer puesto, Charles Leclerc, seguido de Valtteri Bottas y tercer puesto para Lewis Hamilton.

15 Gran Premio de Singapur.

El Gran Premio de Singapur se desarrolla en el Circuito callejero de Marina Bay durante los días 20, 21 y 22 de septiembre. La longitud de este circuito es de 5'065km que se desarrollan en 61 vueltas en un total de 308'828km.

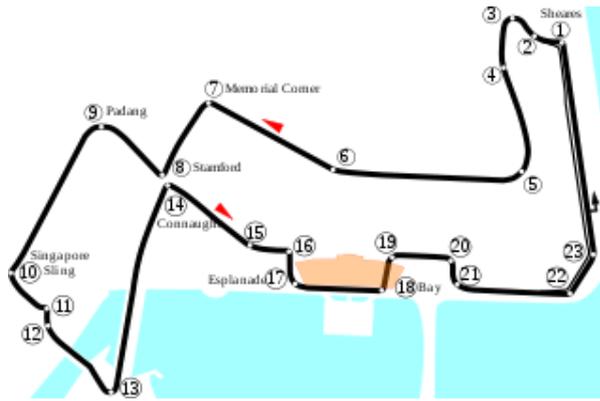


Ilustración 15. Circuito callejero de Marina Bay

El ganador del GP fue Sebastian Vettel, segundo puesto para Charles Leclerc y tercer puesto para Max Verstappen.

16 Gran Premio de Rusia.

El Autódromo de Sochi alberga durante el 27, 28 y 29 de septiembre el Gran Premio de Rusia. La longitud del circuito son 5'484km en el que se realizan 53 vueltas en un total de 309'745km.

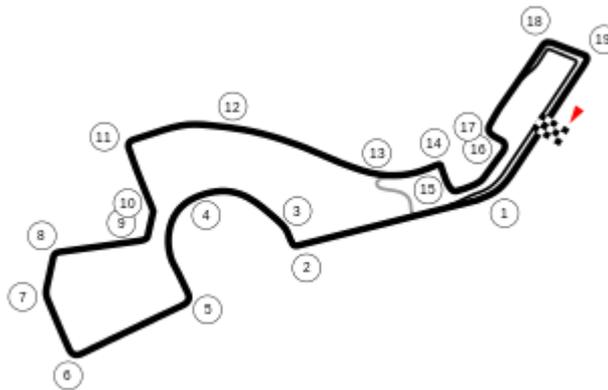


Ilustración 16. Circuito de Sochi

La victoria del Gran Premio de Rusia, fue para Lewis Hamilton, seguido de Valtteri Bottas y tercer puesto para Charles Leclerc.

17 Gran Premio de Japón.

La sede del Gran Premio tiene base en el Circuito de Suzuka durante el 11, 12 y 13 de octubre. El circuito consta de 5'807km, en el que se realizan 53 vueltas con una distancia total de 307'471km.

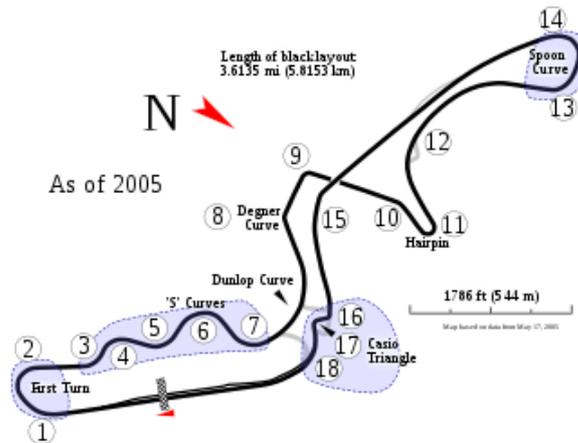


Ilustración 17. Circuito de Suzuka

La victoria fue para Valtteri Bottas, seguido de Sebastian Vettel y Lewis Hamilton.

18 Gran Premio de México.

El Autódromo Hermanos Rodríguez es la sede del Gran Premio de México. Durante el 25, 26 y 27 de octubre tiene lugar el Gran Premio. El circuito posee una longitud de 4'304km, realizandose 71 vueltas en un total de 305'354km.

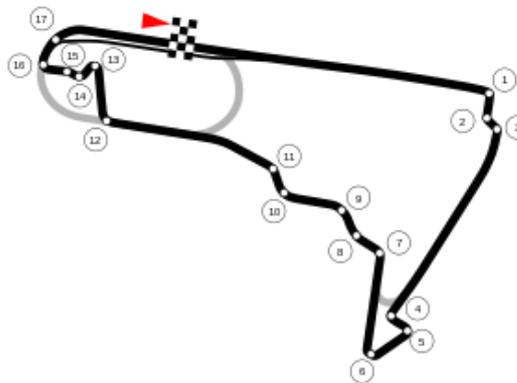


Ilustración 18. Circuito Hermanos Rodríguez

El ganador de la pasada temporada fue Lewis Hamilton, seguido de Sebastian Vettel y Valtteri Bottas.

19 Gran Premio de los Estados Unidos.

El Gran Premio de los Estados Unidos se desarrolla en el Circuito de las Américas, que cuenta con una longitud de 5'513km, donde se realizan 56 vueltas que completan una distancia de carrera de 308'405km.

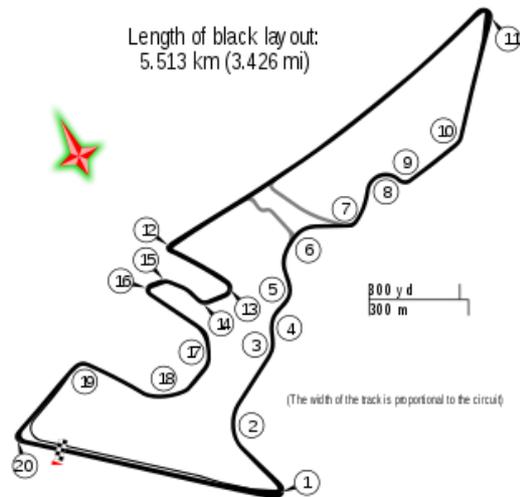


Ilustración 19. Circuito de las Américas

Valtteri Bottas se proclamó la pasada edición campeón del Gran Premio de los Estados Unidos. La segunda plaza fue para el británico Lewis Hamilton seguido de Max Verstappen.

20 Gran Premio de Brasil.

El Autódromo José Carlos Pace alberga durante el 15, 16 y 17 de noviembre la penúltima carrera del año. El circuito posee una longitud de 4'309km, donde se realizan 71 vueltas con una distancia total de carrera de 305'909km.

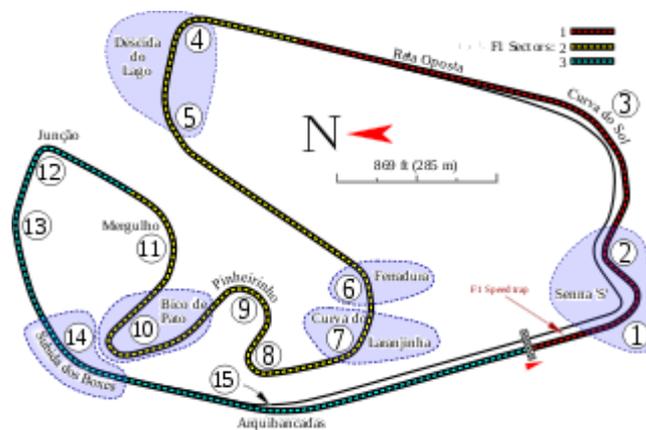


Ilustración 20. Circuito José Carlos Pace

Max Verstappen consiguió la primera plaza la pasada edición del Gran Premio de Brasil. Seguido de Pierre Gasly y el español Carlos Sainz Jr.

21 Gran Premio de Abu Dabi.

La última prueba del mundial de Fórmula 1 se desarrolla en el Circuito Yas Marina. El circuito consta de una longitud de 5'554km, con un total de 55 vueltas y una distancia total de carrera de 305'355km.

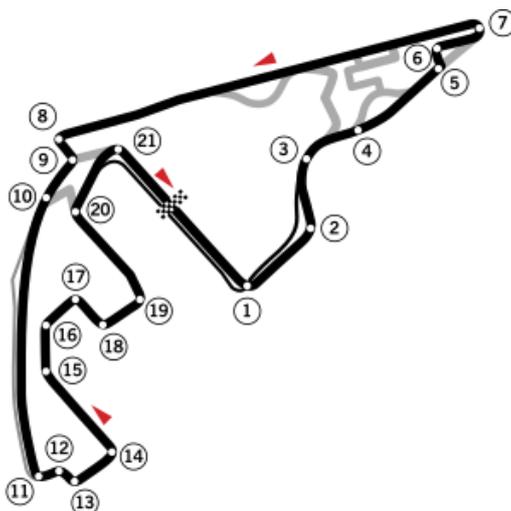


Ilustración 21. Circuito Yas Marina

La pasada edición se realizó el 29, 30 de noviembre y el 1 de diciembre. La victoria fue para Lewis Hamilton, seguido de Max Verstappen y Charles Leclerc.

3 METODOLOGÍA DEA

3.1 Introducción

Dentro de este capítulo, se desarrollarán los conceptos en relación con la metodología a utilizar en el documento. Se comenzarán por los conceptos básicos de DEA (Análisis por Envoltura de Datos) para crear un concepto inicial sobre la metodología, los modelos más utilizados y diferentes usos y aplicaciones que existen de este método en relación con el deporte en todo el mundo.

Seguidamente, se mostrará la teoría en relación a Dynamic DEA (DEA Dinámico) que será la metodología que se usará para el desarrollo del trabajo.

3.2 Orígenes de la metodología DEA

Dentro de la Industria mundial, se requiere la medición de la calidad del trabajo que se está realizando así como de las decisiones tomadas para contribuir al progreso cualitativo del servicio que se ofrece así como el rendimiento económico que genera.

El análisis DEA fue propuesta por primera vez por Farrell en 1957 como respuesta a la pregunta de cómo estudiar la eficiencia relativa de distintas Unidades de Toma de Decisiones (DMUs: Decision Making Units) manejándose una multitud de parámetros de entrada y salida y haciendo uso de modelos de programación lineal, algo totalmente innovador para la época. Mediante su trabajo 'Measuring the efficiency of decision making units', Farrell definió una frontera tecnológica empírica de producción.

Aún así, no es hasta 1978, cuando Charnes, Rhodes y Cooper asentaron las bases de los fundamentos de la teoría del método DEA. Dentro de dichas bases, se exponen las ventajas y desventajas de cada uno de los modelos:

COMPARATIVA	Metodologías paramétricas	DEA
Ventajas	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Interpretación de coeficientes y pruebas estadísticas. ➤ Representan el ruido aleatorio que captura los procesos aleatorios generadores de ineficiencias que no están bajo el control de la entidad y que son externos a esta. ➤ Provee medidas absolutas y no relativas. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Se focaliza en las unidades de análisis y no en medias poblacionales. ➤ Cada unidad tiene una función de producción diferente. ➤ Puede usar múltiples inputs y múltiples productos, en diferentes unidades. ➤ Es posible incorporar el juicio del investigador. ➤ Da respuestas sobre la ineficiencia y como superarla. ➤ Los resultados son óptimos de Pareto. ➤ Se focaliza en la frontera de mejores prácticas más que en las propiedades de tendencia central de la frontera.
Desventajas	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Se necesitan muchos datos para obtener resultados fiables. ➤ Se debe definir una forma funcional a priori. ➤ Sensible a datos atípicos. ➤ Fuertes supuestos para separar la ineficiencia del ruido aleatorio. ➤ No da respuestas sobre dónde nace la ineficiencia y cómo superarla. 	<ul style="list-style-type: none"> ➤ La medida no es robusta ante cambios en número de inputs o productos. ➤ No permite la inferencia estadística ni mecanismos como las pruebas de hipótesis. ➤ Es más susceptible a los errores de medición. ➤ Provee eficiencias relativas, más no absolutas. ➤ Tiene una demanda computacional intensiva.

Tabla 1. Comparativa metodologías paramétricas y DEA

3.3 Conceptos básicos

Una unidad productiva es cualquier organización que produzca, consumiendo ciertos recursos y que posea la capacidad tanto de modificar entradas (recursos) como las salidas (producto fabricado). Según la literatura anglosajona, la unidad productiva se le denomina '*Decision Making Unit (DMU)*'. El aprovechamiento de los recursos de dicha unidad productiva y el aprovechamiento que genera, define la productividad.

Farrel entorno a 1957 propone una definición de la productividad como la relación entre los resultados que se obtienen y los recursos invertidos para la generación de dichos resultados. En definitiva, la ecuación matemática que expresa Farrel viene dada por:

$$Productividad = \frac{Producción\ creada}{Producto\ consumido} = \frac{Salida\ (Output)}{Entrada\ (Input)}$$

Fórmula 1. Productividad

La metodología DEA se utiliza para el estudio de la eficiencia relativa de las distintas DMUs (Decision Making Unit) siendo estas la entidad que nos proponemos comparar en su desempeño con otras entidades de su tipo. Estas DMUs, son las propias entradas que utilizamos para obtener una serie de salidas. Es una manera de evaluar o medir cómo se están utilizando y aprovechando los recursos, en este caso entradas. Así mismo, es vital para la medida de la eficiencia que las DMUs tengan la opción de poder modificar la cantidad de producción.



Ilustración 22. Metodología DEA

Para el análisis de la eficiencia mediante DEA, el primer paso a realizar es siempre la definición correcta de las entradas y salidas del sistema. Es por ello, que el análisis previo de este método es una de las partes fundamentales de éste para determinar correctamente los factores que actúan en él y afectan a la eficiencia de las DMUs. La recopilación de datos debe ser numérica, es decir, medibles. Para los criterios cualitativos se desarrollaría un sistema estipulado de medición ponderando cada uno de los criterios.

Esta metodología, nos ofrece información sobre cada DMU, lo que nos permite la exploración de cada una de ellas y poder extraer conclusiones que permitan la mejoría de estas reduciendo o aumentando las entradas (DMUs).

Una vez definidas y ponderadas todas las DMUs, es decir, todas las entradas y salidas estén definidas, se prosigue mediante la medición de la productividad de cada DMU. Dicha productividad tendrá un valor numérico, y podrá ser definida según la expresión:

$$Productividad = \frac{Suma\ ponderada\ de\ salidas}{Suma\ ponderada\ de\ entradas}$$

Fórmula 2. Productividad DMUs

Dentro de la metodología DEA, a veces, surgen problemas a la hora de establecer los recursos y por lo tanto los resultados son de diferente índole. Es por ello, que se establecen los conceptos de entradas y salidas virtuales. Dichas entradas y salidas virtuales consisten en añadir un peso a cada entrada o salida de forma que el resultado obtenido sea adimensional. Tal expresión quedaría:

$$Entrada\ virtual_j = \sum_{i=1}^m u_{ij}x_{ij}$$

Fórmula 3. Entrada virtual

$$Salida\ virtual_j = \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}$$

Fórmula 4. Salida virtual

Siendo “ x_{ij} ” la cantidad de entrada i utilizado por la unidad j , “ y_{ij} ” la cantidad de salida k utilizado por la unidad j , “ u_{ij} ” y “ v_{kj} ” son los pesos de cada entrada y salida respectivamente, “ m ” el número total de entradas y “ p ” el número total de salidas. Unificando estas ecuaciones, la ecuación de la productividad resultaría:

$$Productividad_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

Fórmula 5. Productividad múltiple

Esta expresión permite calcular la productividad de cada unidad productiva considerando diferentes entradas y salidas. Así mismo, surge el concepto de eficiencia relativa, que será el término a utilizar en el documento y es definida por:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_0} = \frac{\frac{Salida\ virtual_j}{Entrada\ virtual_j}}{\frac{Salida\ virtual_0}{Entrada\ virtual_0}}$$

Fórmula 6. Eficiencia relativa

Donde la unidad j es el objetivo de estudio y la unidad con el subíndice 0 es aquella que es utilizada de referencia. Las unidades que posean un resultado igual a la unidad se encontrarán dentro del grupo de DMU’s eficientes, mientras que aquellas cuya eficiencia sea inferior a la unidad serán ineficientes.

Dentro de la definición de la eficiencia relativa, existen tres tipos que dependen directamente con la unidad de referencia que se utilice:

- Eficiencia global: cuando se toma como unidad de referencia aquella con mayor productividad de todas las DMU’s. Dicho resultado debe ser menor o igual a la unidad.
- Eficiencia técnica: cuando se toma de referencia aquella que tenga la mayor productividad entre las unidades de su tamaño teniendo las entradas y salidas del mismo orden de magnitud.
- Eficiencia de escala: es básicamente el cociente entre las dos anteriores. La eficiencia global entre la eficiencia técnica. Es decir, si una unidad tiene como valor igual a la unidad, implica que las anteriores eficiencias coinciden en su valor. Esto quiere decir que la DMU analizada tiene igual tamaño que aquella con mayor productividad, se dice que esta unidad tiene la característica de escala más productivo MPPS (Most Productive Scale Size).

En definitiva, la ecuación de eficiencia nos quedaría como:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

Fórmula 7. Eficiencia global

Dicha ecuación será la utilizada a partir de ahora para el desarrollo de los modelos DEA, que es resumidamente determinar si una unidad productiva es eficiente en comparación de otras similares. La metodología DEA, no posee la capacidad de encontrar soluciones o mejores para las DMU's que no resultan eficientes si no que se limita a determinar y evaluar la distancia de una unidad productiva a la frontera eficiente.

3.4 Modelos DEA

Los innumerables problemas que surgen a lo largo de la historia, impulsan la creación de diferentes modelos buscando solventar y solucionar con éxito estas trabas. Es por ello, que desde la exposición inicial de la metodología DEA a manos de Charnes, Rhodes y Cooper, gran número de investigadores propusieron ideas de aplicación del método hasta la actualidad.

Dentro de la metodología DEA, se deben conocer cuatro conceptos necesarios para su posterior análisis, como son, el retorno de escala constante, retorno de escala variable, orientación de entrada y orientación de salida.

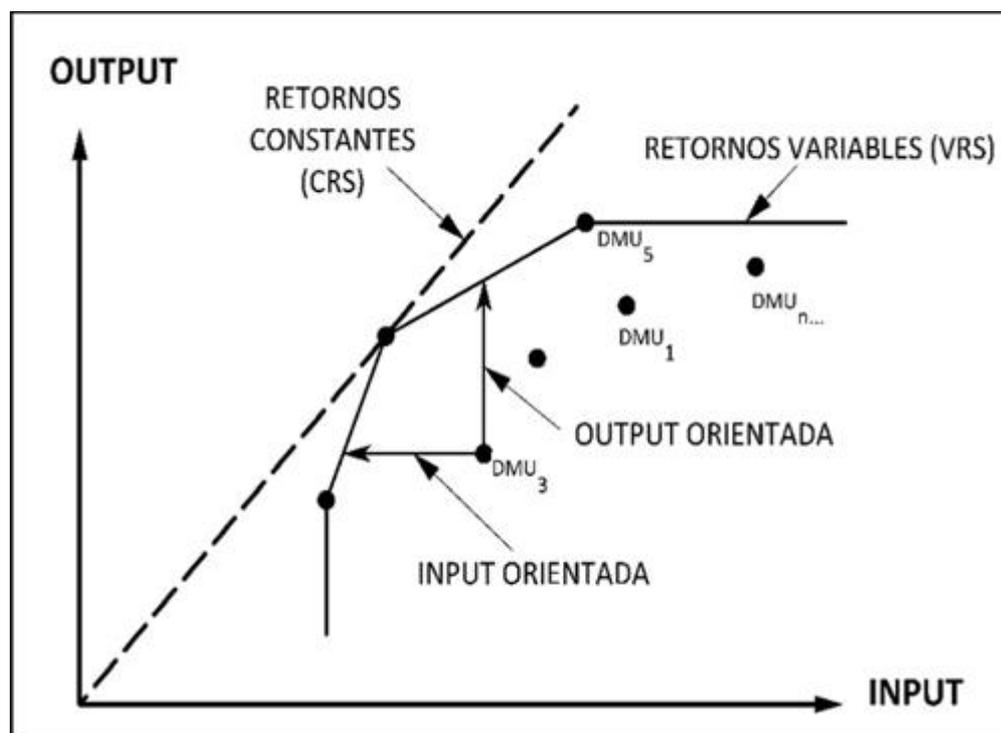


Ilustración 23. CRS, VRS.

- Orientación de entrada: Sí un modelo DEA posee orientación de entrada, se refiere a que cada DMU adquiere como objetivo, reducir los recursos consumidos manteniendo sus salidas constantes. Como se ve en el gráfico adjunto, DMU₃ debe reducir sus entradas (inputs) para conseguir el objetivo de la frontera eficiente.

- Orientación de salida: Si un modelo DEA posee orientación de salida, se refiere a que cada DMU adquiere como objetivo, aumentar sus salidas manteniendo constantes sus entradas, es decir, sus recursos. En este caso, DMU₃ aumentaría sus salidas (outputs) manteniendo constantes los recursos que consume.
- Retorno de escala constante (CRS): Viene referida a que cualquier unidad productiva bajo análisis podría ser eficiente independiente de su tamaño. Es por ello que se evalúa mediante la eficiencia global, utilizando aquella unidad productiva cuyo valor de la eficiencia es igual a 1. Así mismo, si se considera CRS, todas las DMUs deberán pertenecer al conjunto siguiente:

$$T_{CRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}): \exists \vec{\lambda} \geq 0, \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \vec{\lambda}Y \leq \vec{y}\}$$

Fórmula 8. Conjunto de DMUs en CRS

Donde $\vec{\lambda}$ es un vector con número de componentes igual al número de unidades productivas a estudiar y X e Y las matrices con los datos de entradas y salidas de las respectivas DMUs.

En la figura adjunta arriba, todos los puntos corresponden a las DMUs en análisis. Todas aquellas DMUs que se encuentran por debajo de la recta infinita CRS componen una region denominada tecnología y son puntos admisibles. El punto contenido en la recta frontera CRS, es una unidad con productividad eficiente.

- Retorno de escala variable (VRS): Algunas unidades productivas no pueden llegar a ser eficientes debido a su tamaño. Es por ello, que la eficiencia que se trabaja como referencia es la eficiencia técnica, ya que se compara la productividad de las DMUs entre las del mismo tamaño. El conjunto de puntos admisibles corresponde a:

$$T_{VRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}): \exists \vec{\lambda} \geq 0, \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \vec{\lambda}Y \leq \vec{y}; \vec{\lambda}e^T = 1\}$$

Fórmula 9. Conjunto de DMUs en VRS

La única diferencia que encontramos en esta ecuación respecto a la anterior es que el vector debe sumar 1.

Atendiendo a la figura de arriba, la línea marcada como VRS corresponde a la frontera eficiente. Los puntos que se situen por debajo de la frontera eficiente, formarán parte del conjunto de tecnologías admisibles. Así mismo, con esta tecnología aparecen más puntos eficientes respecto a CRS. Como definición, si una unidad productiva es eficiente en CRS también lo será en VRS.

3.4.1 Modelo RATIO

El modelo Ratio permite dotar a cada DMU de diferentes pesos a las entradas y salidas con el fin de adquirir una adimensionalización en el sistema para optimizar la eficiencia. Es lógico que las diferentes entradas de los sistemas poseerán pesos diferentes ya que algunos condicionarán más los resultados que otros.

El modelo, se formula mediante:

$$Max \left[e_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \right]$$

S.a.

$$\frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \leq 1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_{kj} \geq \varepsilon \quad \forall k = 1, 2, \dots, p$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

Fórmula 10. Modelo Ratio

Donde ε corresponde a un número real mayor que cero lo que permite que el modelo solo admita pesos mayores que cero y nunca nulos. La variable estudiada viene definida con el subíndice J, siempre maximizando la eficiencia de la función objetivo.

Atendiendo a las restricciones, la primera de ella permite limitar las eficiencias de las respectivas DMUs al valor unidad. Al resolverse los problemas, el primer conjunto formado será compuesto por las unidades eficientes. El siguiente subconjunto se compondrá de DMUs que poseen eficiencia relativa inferior a la unidad, es decir, un subgrupo ineficiente. Lo que nos permitirá saber la distancia a la frontera eficiente a la que se encuentran y de manera inversamente proporcional, es decir, a menor eficiencia, mayor distancia a dicha frontera.

3.4.2 Modelo CCR-INPUT

El modelo que se procede a describir es una solución al modelo anterior que poseía expresiones no lineales lo que dota a dicho modelo de una elevada complejidad a la hora de su resolución. El modelo CCR-INPUT permite transformar los cocientes en ecuaciones lineales, lo que permite optar a un problema con $n+1$ restricciones y un total de $s+m$ cotas.

El modelo, comúnmente se conoce como ‘forma multiplicadora’ y se formula mediante:

$$\text{Max} \quad \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}$$

S.a.

$$\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1$$

$$v_{kj} \geq \varepsilon \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, m$$

Fórmula 11. Forma multiplicadora modelo CCR- INPUT

Así mismo, también es común usar el modelo dual para la resolución del problema, conocido como ‘forma envolvente’:

$$\text{Min} \quad \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p$$

θ_j libre

Fórmula 12. Modelo dual CCR-INPUT

La forma envolvente, consta de dos fases, la primera, FASE I, tiene como objetivo únicamente minimizar θ_j , en la que obtendremos un multiplicador de entradas que lleva la frontera eficiente la DMU que se está analizando. En la fase posterior, FASE II, se busca minimizar el resto de la función objetivo. Si la suma de las holguras es igual a θ_j entonces esa DMU es eficiente. Si por el contrario alguna de las holguras es mayor que cero significa que la proyección a la frontera eficiente se puede mejorar sin empeorar el resto de variables.

Gráficamente, optando por una única entrada y salida, el modelo quedaría tal que:

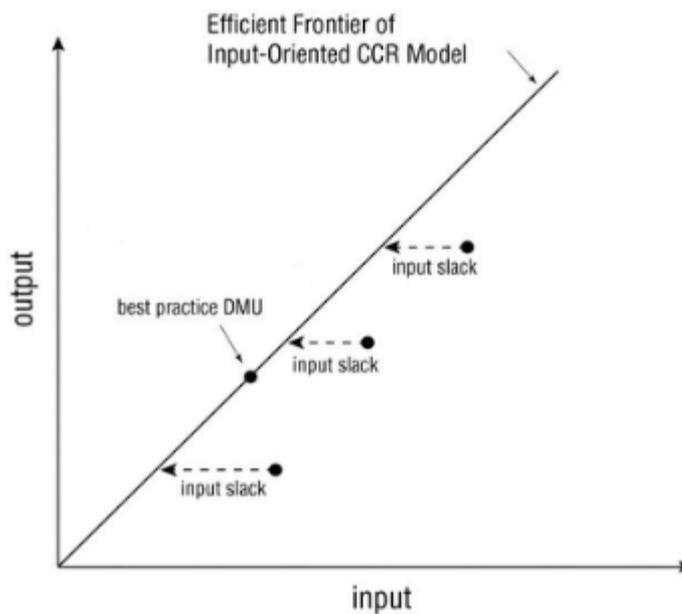


Ilustración 24. CCR-INPUT

En la ilustración anterior se aprecia la gráfica de CCR-INPUT con una entrada y una salida. Como vemos, existe una DMU eficiente que se encuentra en la recta. Dicha recta delimita los puntos que poseen eficiencia igual a 1 y se denomina frontera eficiente. Así mismo, las demás DMUs vienen señaladas con una línea discontinua que delimita el valor necesario para alcanzar el valor unidad en su eficiencia, reduciendo los recursos que se consumen.

3.4.3 Modelo CCR-OUTPUT

Al igual que el modelo anterior, el modelo se expresa tanto en forma lineal primal como dual. El modelo lineal es el siguiente:

$$\begin{aligned}
& \text{Min} \quad \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \\
& \text{S.a.} \\
& \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad \forall j=1, \dots, n \\
& \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1 \\
& v_{kj} \geq \varepsilon \quad \forall k=1, \dots, p \\
& u_{ij} \geq \varepsilon \quad \forall i=1, \dots, m
\end{aligned}$$

Fórmula 13. Forma lineal CCR-OUTPUT

Así mismo, por mayor comodidad, se recurre como el modelo anterior al modelo dual, descrito de la manera:

$$\text{Max} \quad \gamma_j + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a.

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_j y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p \\
& \lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n \\
& s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p \\
& \gamma_j \text{ libre}
\end{aligned}$$

Fórmula 14. Modelo dual CCR-OUTPUT

La optimización de este modelo es similar al anterior modelo. Posee dos fases, donde lógicamente se realizará la primera fase radial, maximizándose el primer término de la función objetivo γ_j y una vez obtenido se continúa con la fase rectangular del modelo optimizando los términos restantes de la FO. Si se obtienen valores para alguna unidad $\gamma_j^*=1$ y $t_k^*=s_i^*=0$ será eficiente.

Teniendo como datos los mismos que en el modelo anterior, la representación gráfica de CCR-OUTPUT sería:

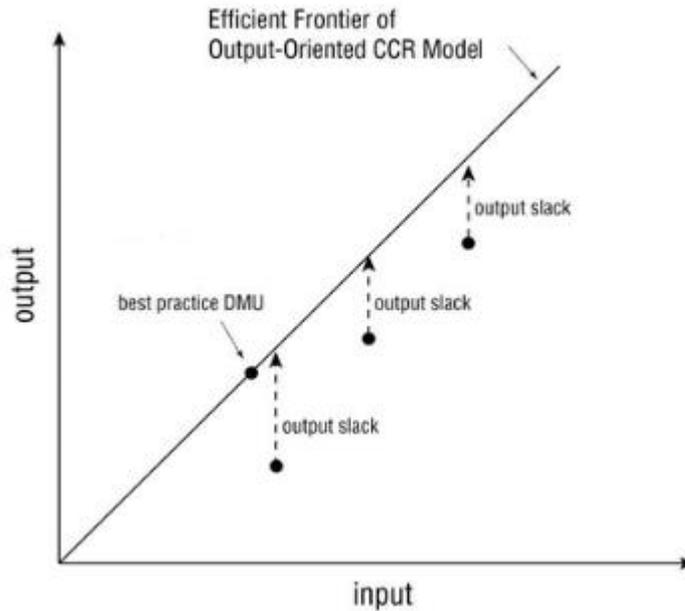


Ilustración 25. CCR-OUTPUT

Al igual que en el modelo anterior, se representa en la frontera eficiente la DMU como unidad de mayor productividad y máxima, esta recta representa todos los puntos que poseen la misma productividad y así mismo, la distancia de las restantes DMUs a dicha frontera que se acercará a medida que se aumentan las salidas y se mantienen constantes las entradas.

3.4.4 Modelo BBC-INPUT

Los modelos siguientes utilizan en su análisis la eficiencia técnica, comparan la productividad de las DMUs con el mismo tamaño. Como hace referencia el nombre, se trata de un modelo con orientación de entrada. Se parte del modelo CCR-INPUT al cual se le añade una restricción para variar la frontera eficiente y por tanto cambiar a retorno de escala variable.

Su formulación es la siguiente:

$$\text{Min } \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \theta_j x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p$$

θ_j libre

Fórmula 15. Modelo BBC-INPUT

Como se ve en el modelo, es similar a CCR-INPUT aunque se añade la tercera restricción, obligando a que la suma de las λ_j sea igual a uno. Gráficamente, este modelo atiende al siguiente gráfico:

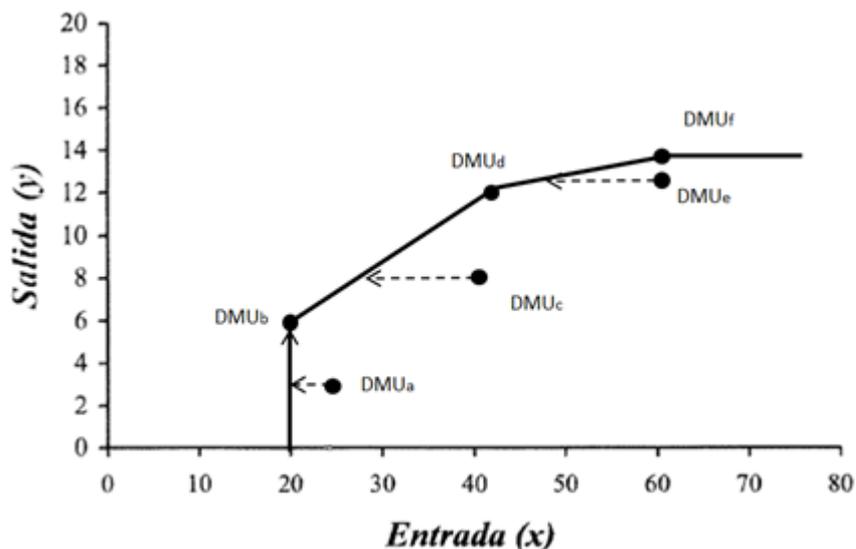


Ilustración 26. BBC-INPUT

Respecto a la figura, la frontera eficiente está compuesta por una serie de rectas que contienen a las DMU_b, DMU_d y DMU_f siendo el resto parte de la tecnología. Las unidades que se encuentran en la tecnología alcanzarían la eficiencia al reducir sus entradas.

3.4.5 Modelo BBC-OUTPUT

De forma similar a lo realizado anteriormente, se utilizará el modelo CCR-OUTPUT dual y se adjuntará la misma restricción añadida en el modelo anterior resultando un modelo de retorno de escala variable.

El modelo resultante será:

$$\text{Max } \gamma_j + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \gamma_j y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, m; \forall k=1, \dots, p$$

$$\gamma_j \text{ libre}$$

Fórmula 16. Modelo BBC-OUTPUT

A su vez, el modelo gráfico de este con una entrada y una salida será:

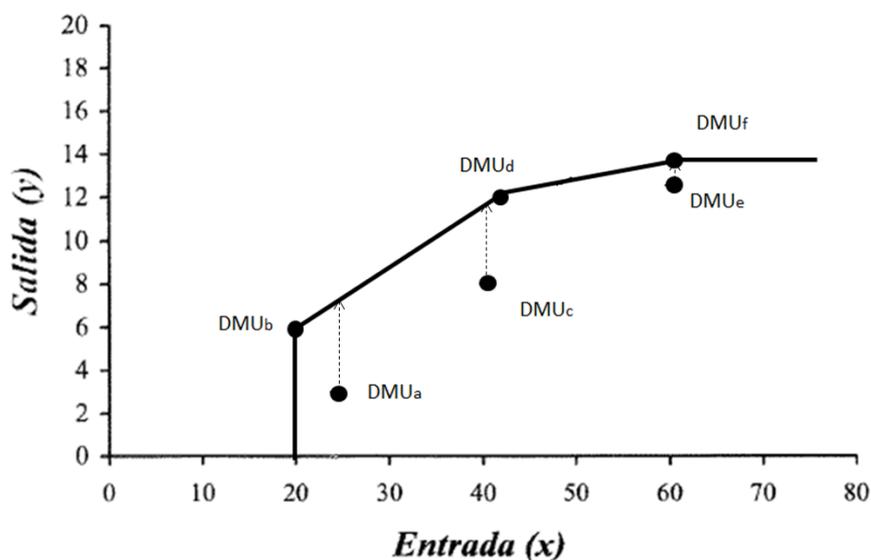


Ilustración 27. BBC-OUTPUT

La frontera eficiente del modelo, queda definida por las mismas DMUs que en el modelo BBC-INPUT, así mismo, las DMUs que pertenecen a la tecnología del modelo alcanzarían la eficiencia al aumentar las salidas que se generan y manteniendo constantes las respectivas entradas de cada DMU.

3.4.6 Comparativa modelos CCR y BCC

Siguiendo lo dicho en los modelos, una de las primeras diferencias entre ellos es la consideración de los retornos de escala. Así mismo, si se superponen ambas gráficas, la solución aportada por ambos modelos resulta ser la misma, ya que coincide la frontera. En cualquier otra situación, la eficiencia calculada con el modelo BCC (eficiencia técnica), siempre será mayor que la calculada con el modelo CCR (eficiencia global), ya que las unidades sobre las que se proyectan las DMUs analizadas son de menor o igual productividad.

En el caso de orientación de salida, el caso sería igual.

3.4.7 Modelos No Orientados

En DEA, existe una manera de no generar restricciones a las entradas ni a las salidas y trabajar mejorando ambas. Se basa en ir disminuyendo las entradas proporcionalmente al aumento de las salidas, controlando con un parámetro α y posteriormente ajustando las holguras.

$$Max \alpha$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha)x_{ij} \quad \forall i=1, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq (1 + \alpha)y_{kj} \quad \forall k=1, \dots, s;$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1;$$

$$\alpha, \lambda_j \geq 0$$

Fórmula 17. Fase I modelo no orientado

$$Max \sum_{k=1}^p h_k + \sum_{i=1}^m h_i$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha)x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq (1 + \alpha)y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, s;$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1;$$

$$\lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, m; \forall k=1, 2, \dots, p; \forall j=1, 2, \dots, n$$

Fórmula 18. Fase II modelo no orientado

Las DMUs eficientes serán aquellas en las que $\alpha, h_k, h_i=0$.

3.4.8 Modelo aditivo

Este modelo fue introducido por Charnes y más tarde elaborado por Banker, es utilizado únicamente para retornos de escala variables y además no posee orientación de entrada ni de salida ya que utiliza fase rectangular, eliminando la fase radial de un problema VRS.

En caso de que se desee usar un entorno CRS, el único procedimiento a seguir sería eliminar el sumando de las λ_j para que sea la unidad. La solución proporcionada por este modelo, minimiza la distancia Manhattan (distancia entre dos puntos es la suma de las diferencias absolutas de sus coordenadas) entre cada unidad productiva y la frontera eficiente.

El modelo matemático atiende a las siguientes formulas:

$$Max \sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{ij} - s_i \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = y_{kj} + t_k \quad \forall k=1, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 ;$$

$$\lambda_j, s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, m; \forall k=1, 2, \dots, p; \forall j=1, 2, \dots, n$$

Fórmula 19. Modelo aditivo

La eficiencia calculada en el modelo aditivo de las unidades del problema son medidas mediante las variables de holgura t_k y s_i . Las unidades eficientes que se obtienen con este modo aditivo y con el modelo BCC no varían por lo que se obtendrá la misma frontera eficiente. Aún así, las unidades ineficientes, poseen diferentes eficiencias ya que la métrica de cada modelo es diferente.

La restricción $[\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1]$, nos permite pasar de VRS a CRS. Si tenemos en cuenta la restricción, se trata de un modelo de retorno de escala variable y si se omite el modelo será de retornos de escala constantes.

3.4.9 Modelo SBM (Slack Based Measure)

Este modelo posee grandes similitudes con el modelo Rusell. Fue publicado por Tone en 2001. Este modelo escalar, trata directamente los excesos de entrada y las deficiencias de salida de las DMUs. Se trata de unidades invariantes y monótonas que disminuyen con respecto al exceso de entrada y el déficit de salida. Puede tomarse como una medida de maximización y basa su estructura en el CCR.

El modelo nos aporta una medida de las holguras que son necesarias para que las DMUs sean eficientes con las holguras que tenemos, es decir, la reducción que debemos tomar de entradas y salidas para alcanzar la eficiencia, de manera, como se ha dicho, no radial.

Los modelos, además, se configuran para cumplir con una serie de condiciones, unidades invariables y monotonía.

$$Min \left[\frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}}} \right]$$

sa:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} = x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

$$\begin{aligned}
s_{i0}^- &\geq 0 & i = 1, \dots, m \\
s_{r0}^+ &\geq 0 & r = 1, \dots, s \\
\lambda_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

Fórmula 20. Modelo SBM

La primera ecuación, corresponde a la función objetivo del modelo. Es básicamente un cociente de las holguras del modelo, cuyo objetivo es su mínimo. Como se dijo, es monótona ya que, si el valor de las holguras del modelo aumenta, el valor devuelto por la función objetivo disminuirá. Si las DMUs son eficientes, el resultado será de valor uno. Además, si se observa la expresión de la función objetivo del problema, Podemos comprobar que el índice de eficiencia que proporciona contiene todo tipo de ineficiencia, tanto radial como no radial. El valor de esta medida no orientada puede interpretarse como el ratio entre el promedio de la eficiencia de los inputs y el promedio de eficiencia en los outputs.

Así mismo, el modelo definido incorpora la restricción de convexidad para VRS,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

Fórmula 21. Restricción convexidad para VRS en SBM

Para el caso de considerar rendimientos constantes, basta con eliminar esta restricción del problema.

Tone, propone un cambio de variable para linealizar el modelo, añadiendo un parámetro 't' tal que:

$$1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}} = \frac{1}{t}$$

Fórmula 22. Cambio de variable en SBM

Dicho cambio, aplicado a la formula del modelo, quedaría:

$$\text{Min } t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{ts_{i0}^-}{x_{i0}}$$

Sa:

$$t + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \frac{ts_{r0}^+}{y_{r0}} = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} = x_{i0} - s_{i0}^- \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} = y_{r0} + s_{r0}^+ \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

$$s_{i0}^- \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$

$$s_{r0}^+ \geq 0 \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$t > 0$$

Fórmula 23. Modelo SBM con cambio de variable

Con este cambio, se consigue una medida orientada al input y de la misma manera se puede conseguir una medida orientada al output, sin más que maximizar el denominador del modelo original. Para el modelo resultante, obviamente debido al cambio es lineal, se realizaría el cambio inverso del parámetro t .

3.4.10 DEA sin entradas

El modelo DEA sin entradas ha sido recopilado en varios artículos adquiridos de Scopus, con gran fijación en el documento de Joao Carlos C.B Soares de Mellot, Lidia Angulo-Meza y Branza P. Branco da Silva (2008). Estos modelos han recibido alguna modificación para adaptarse a las necesidades del trabajo.

El modelo no utiliza entradas, aunque según Lovell y Pastor (1999) dicha decisión conduce a inconsistencias matemáticas por lo que se debe adoptar una entrada unitaria para cada DMU. Debido a esta decisión de una única entrada constante, el modelo DEA sin entradas utiliza el modelo CCR. Así mismo, al poseer entradas unitarias en todas las DMUs, no aparece en la formulación.

Además, el modelo permite otras interpretaciones debido a la ausencia de la restricción de igualdad. Si este modelo se usara con una interpretación orientada a la entrada, este modelo dejaría de tener sentido debido a la presencia de las entradas unitarias.

$$Max h_0 = \mu_g y_{g0} + \mu_s y_{s0} + \mu_b y_{b0}$$

Sa:

$$\mu_g y_{gk} + \mu_s y_{sk} + \mu_b y_{bk} \leq 1 \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\mu_g - \mu_s \geq \varepsilon,$$

$$\mu_s - \mu_b \geq \varepsilon,$$

$$\mu_g - 2\mu_s + \mu_b \geq \varepsilon,$$

$$\mu_j \geq 0, j = g, s, b.$$

Fórmula 24. Modelo DEA sin entradas

La constante ε no arquimedea es necesaria para evitar una distorsión crítica, es decir, en condiciones especiales, las tres posiciones pueden ser igualmente valoradas. Tal situación lleva a clasificaciones no adecuadas. Por ejemplo, si se aplicara un modelo con pesos homogéneos, todos serían iguales de eficientes en el caso que los resultados o número de puntajes fueran iguales. La constante ε debe ser lo suficientemente grande como para proporcionar discriminación entre las DMU y lo suficientemente pequeña como para evitar inviabilidades en el modelo de optimización.

Incluso con las restricciones impuestas en este modelo, existe un alto grado de libertad para los pesos. Para evitar esta libertad, utilizamos un modelo secundario inspirado en el modelo de evaluación cruzada. Utilizamos pesos promedio en lugar de eficiencias promedio.

$$Max \mu_g - \mu_s$$

Sa:

$$\mu_g y_{g0} + \mu_s y_{s0} + \mu_b y_{b0} = h_0$$

$$\mu_g y_{gk} + \mu_s y_{sk} + \mu_b y_{bk} \leq 1$$

$$\mu_g - \mu_s \geq \varepsilon$$

$$\mu_g - 2\mu_s + \mu_b \geq \varepsilon$$

$$\mu_j \geq 0, j = g, s, b.$$

Fórmula 25. Modelo DEA modificado

3.5 Aplicaciones de interés de la metodología DEA

Desde su aparición en 1978, el uso de esta metodología se ha extendido por todo el mundo abarcando tantos sectores sanitarios, deportivos, industrial, privado, público, educativo... Así como incontables sectores de todos los ámbitos.

La flexibilidad de la metodología DEA permite una versatilidad en todos los campos que proporciona unos resultados de interés en cualquier organización, así como analizar las causas de fallos en las mismas. Esto, permite obtener una visión global de las diferentes unidades productivas y analizar la trayectoria.

Seguidamente, se propondrán un par de aplicaciones por sector, de manera breve, de algunos de los sectores en los que se usa dicha metodología.

3.5.1 Sector público o sector servicios

Dentro de este sector, podemos encontrar infinidad de aplicaciones DEA, entre ellas:

- *Multi-Criteria Decision Making techniques for the management of public procurement tenders: A case study. Dotoli, Epicoco, Falagario (2020).*
- *The impact of the internal market on hospital efficiency, productivity and service quality. Maniadakis, Hollingsworth, Thanassoulis (1999).*

3.5.2 Sector industrial privado

Entre infinidad de aplicaciones, se encuentran las siguientes:

- *Comparing the productive efficiency of cooperatives and private enterprises: The Portuguese wine industry as a case study. Barros, Santos (2007).*
- *Efficiency, performance and regulation of the international gas industry-a bootstrap DEA approach. Hawdon (2003).*

3.5.3 Sector educativo

Dentro del campo de la enseñanza, entre otras muchas, se nombran dos aplicaciones:

- *Budgeting for efficiency? A case study of the public K-12 education system of Canada. Mou, Atkinson, Marshal (2019).*
- *An application of recent developments of Data Envelopment Analysis to the evaluation of secondary schools in Portugal. Santos, Themido (2001).*

3.5.4 Sector Deportivo

- *A DEA Model for selection of Indian Cricket team players. Chaudhary, Bhardwaj, Lakra (2019).*
- *Are football managers as efficient as coaches? Performance analysis with ex ante and ex post inputs in the Premier League. Zambom-Ferraresi, Iráizoz, Lera-López (2019).*

4 IMPLEMENTACIÓN DE LOS MODELOS

4.1 Introducción

En el primero de los apartados, se pretende mostrar los datos y las variables de los modelos matemáticos utilizados para la resolución del trabajo. Las opciones elegidas para la resolución son los modelos SBM y DEA sin entradas para escuderías y pilotos respectivamente. La elección para los pilotos ha sido DEA sin entradas ya que no podemos seleccionar claramente las entradas del modelo.

4.2 Descripción de los modelos

La recopilación de datos sobre la Fórmula 1 se ha realizado a través de las diferentes páginas oficiales del deporte. Para ello a través del buscador de información Scopus, la página oficial de la F1, Wikipedia y páginas varias.

Para la organización y claridad del trabajo, como se realizarán dos modelos diferentes según las escuderías y pilotos, en todos los apartados se comentarán los datos de interés de cada uno de ellos.

4.2.1 Datos

Como se dijo anteriormente, los datos se obtienen contrastando diferentes páginas sobre el mundial de Fórmula 1 en 2019. Para la construcción del modelo, se tomaron todos los pilotos que ocupaban la parrilla en 2019 de todas las escuderías.

Así mismo, se aplicarán dos modelos diferentes para pilotos y escuderías, incluyendo componentes que juegan un papel fundamental en los resultados.

➤ Escuderías

Constructor/Variables	Entradas		Salidas				
	PRESUPUESTO	TRABAJADORES	PRIMERO*	SEGUNDO*	TERCERO*	PUNTOS*	PUNTOSTOTALES
Toro Rosso-Honda	123,643	400	0	0	1	18	21
McLaren-Renault	193,705	690	0	0	1	23	26
Racing Point-BWT Mercedes	109,022	405	0	0	0	17	17
Alfa Romeo-Ferrari	118,031	360	0	0	0	13	13
Mercedes	325,997	905	15	11	6	7	159
Ferrari	393,426	1004	3	7	9	15	88
Haas-Ferrari	112,403	225	0	0	0	7	7
Williams-Mercedes	134,973	575	0	0	0	1	1
Red Bull-Honda	241,681	740	3	1	4	27	61
Renault	168,591	665	0	0	0	18	18

Tabla 2. Datos de las escuderías.

➤ Pilotos

Piloto	Entradas	Salidas/Puestos										
	Unitarias	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto	Séptimo	Octavo	Noveno	Décimo	Vueltas rápidas
Lando Norris		0	0	0	0	0	2	2	4	2	1	0
Kimi Räikkönen		0	0	0	1	0	0	3	2	2	1	0
Daniil Kvyat		0	0	1	0	0	0	2	0	3	4	0
Nico Hülkenberg		0	0	0	0	1	0	2	2	2	3	0
Lance Stroll		0	0	0	1	0	0	0	0	4	1	0
Kevin Magnussen		0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
Antonio Giovinazzi		0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0
Romain Grosjean		0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0
Lewis Hamilton		11	4	2	1	1	0	1	0	1	0	6
Max Verstappen		3	1	4	6	2	1	0	1	0	0	4
Sebastian Vettel		1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	0
Pierre Gasly		0	0	0	1	1	3	2	3	2	1	2
Daniel Ricciardo		0	0	0	1	0	3	2	1	1	0	0
Robert Kubica		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
George Russell		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Valteri Bottas		4	7	4	2	1	0	0	1	0	0	2
Charles Leclerc		2	2	6	3	4	1	0	0	0	0	4
Carlos Sain Jr.		0	0	1	0	3	4	1	3	0	1	0
Alexander Albon		0	0	0	1	4	4	0	1	1	2	0
Sergio Perez		0	0	0	0	0	2	4	2	1	2	0

Tabla 3. Datos de los pilotos.

4.2.2 Variables para SBM

Para la construcción del modelo de lingo, se analizaron los diferentes factores que intervienen en los resultados que se obtienen durante toda la temporada. De todos los factores, se clasificaron los más importantes y que poseen mayor importancia a la hora de decidir un resultado.

En la Fórmula 1 compiten hoy en día 10 escuderías, sin embargo, a lo largo de los más de 60 años de historia de la F1 ha habido muchas otras que han desaparecido con el paso del tiempo. De hecho, muchas de las principales escuderías de la Fórmula 1 ya han desaparecido o se han combinado con otras. Es curioso el hecho de que de las 20 que más títulos han ganado tan solo permanezcan 6 en competición.

También en la F1 han existido muchas compras, ventas, recompras, fusiones y todo tipo de operaciones entre marcas y escuderías. Al igual ocurre en la historia de las marcas de automóviles.

Las escuderías, poseen unas grandes diferencias en sus entradas, los constructores más conocidos y con mejores resultados poseen un número mucho mayor que el resto de escuderías. Para el análisis de las escuderías, como ya se dijo, se usará el modelo SBM. Para ello, las entradas del sistema serán el presupuesto y el número de trabajadores como se aprecia en la parte superior.

Así mismo, las salidas del sistema corresponden a los resultados obtenidos en cada carrera, realizando una suma de los resultados en primer puesto, segundo puesto, tercer puesto y la finalización en puntos.

- Variables de entrada:

- Presupuesto: Cada año, se suelen conocer los presupuestos de los equipos antes del verano, tras muchos comentarios e indiscreciones. Los recursos económicos asignados por los equipos siempre son objeto de comentarios ya que generalmente la inversión de capital se ve recompensada con puntos para el campeonato. No es matemático pero los números dicen que se aproxima bastante.
- Número de trabajadores: A veces, la Fórmula 1 parece reducir la composición de un equipo a sólo dos pilotos pero detrás de ellos existen cientos de personas que contribuyen al éxito o fracaso de las escuderías.

- Variables de salida:
 - Primer puesto: Resultados de las carreras durante toda la temporada, esta variable será la de mayor valor entre todas.
 - Segundo puesto: Al igual que el primer puesto, será la suma de todos los resultados durante la temporada.
 - Tercer puesto: Resultado durante la temporada en cada carrera de cada escudería.
 - Finalización en puntos: Se otorgará una ponderación extra ya que los diez primeros puestos en la Fórmula 1 puntúan.

4.2.2.1 Modelo matemático SBM

Para el modelo SBM, se ha optado por realizar dos simulaciones diferentes para comparar los resultados obtenidos con retorno de escala variable y otra sin retorno de escala.

Para el cálculo de resultados, se utilizará el programa Lingo, con sus respectivas variables, restricciones y función objetivo. Este software nos devolverá unos resultados con los que compararemos la eficiencia de cada una de las DMUs. Lingo, es una aplicación capaz de resolver modelos de programación matemática.

La programación que se realiza en Lingo, se adjuntará al final del documento en el apartado de anexos. Ya que el lenguaje de programación es algo denso, se refleja como información en caso de interés.

Lingo, es un software en el cual su primera fase es la definición de las distintas variables y slack, dichas variables serán las nombradas anteriormente, que se reflejarán con una notación para hacer referencia a las mismas.

Además, se definirá una variable lambda, cuya función es devolver una matriz de rango escudería por escudería. La diagonal de la matriz resultante, si la escudería es eficiente, tomará valor unidad. En caso contrario, la escudería se proyectará sobre el resto con un porcentaje de proyección sobre otros. En este caso, su diagonal poseerá valor cero y sus filas deben sumar la unidad. Al multiplicar los porcentajes con los que se reflejan en las otras escuderías por sus estadísticas y sumando los resultados se obtienen los datos que debería poseer la escudería para ser eficaz.

Escuderías		
Variable	Notación	Slack
Presupuesto	Presupuesto	slackPresupuesto
Número de trabajadores	Trabajadores	slackTrabajadores
Primeros puestos	Primero	slackPrimero
Segundos puestos	Segundo	slackSegundo
Terceros puestos	Tercero	slackTercero
Finalización en puntos	Puntos	slackPuntos
Escuderías/Escuderías		
Lambda		

Tabla 4. Variables del modelo escuderías.

Para el modelo lingo, los actores del modelo se dividirán en dos, los anteriormente mostrados en la tabla poseerán un tamaño de vector cuya dimensión será el número de escuderías. En el segundo, serán matrices cuyo tamaño será escudería por escudería.

- Función Objetivo del modelo

$$\frac{1}{\rho_0^*} = \max\left[1 + \frac{1}{4} x\left(\frac{slackPrimero_j}{Primero_0} + \frac{slackSegundo_j}{Segundo_0} + \frac{slackTercero_j}{Tercero_0} + \frac{slackPuntos_j}{Puntos_0}\right)\right]$$

Fórmula 26. Función objetivo modelo SBM

La función objetivo devolverá el inverso del valor por lo que en la hoja de excel, una vez obtenidos los resultados se deberá invertir el cambio. Además, la función objetivo proporciona el valor de una única escudería, por lo que se realizará para todas y cada una de ellas mediante la maximización de la suma total, es decir, tal que:

$$\max\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j^*}\right)$$

Fórmula 27. Maximización suma total.

- Restricciones

$$\begin{aligned} Presupuesto_o &\leq \sum_{j=1}^n Presupuesto_j \lambda_j \\ Trabajadores_o &\leq \sum_{j=1}^n Trabajadores_j \lambda_j \\ Primero_o &= \sum_{j=1}^n Primero_j \lambda_j - slackPrimero \\ Segundo_o &= \sum_{j=1}^n Segundo_j \lambda_j - slackSegundo \\ Tercero_o &= \sum_{j=1}^n Tercero_j \lambda_j - slackTercero \\ Puntos_o &= \sum_{j=1}^n Puntos_j \lambda_j - slackPuntos \end{aligned}$$

Fórmula 28. Restricciones SBM.

Así mismo, como se dijo anteriormente, se debe introducir la restricción que define el retorno de escala variable. Esta ecuación permitirá dividir las escuderías en diferentes tamaños y generar los mejores resultados posibles.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

Fórmula 29. Restricción VRS.

Debido a que se generan un gran número de ceros en las salidas, se decide cambiar las salidas y unificarlas en una única variable ya que provoca error al existir ceros en el denominador. Es por ello, que se decide valorar los podios de manera diferente, es decir:

- Primer puesto: 6 puntos.
- Segundo puesto: 4 puntos.
- Tercer puesto: 3 puntos.
- Puestos del 4 al 10: 1 punto.

Se le adjudica mayor valor al primer puesto ya que el objetivo de todo piloto es el primer puesto, todo esto, se muestra en la siguiente tabla.

Constructor	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO	PUNTOS
Toro Rosso-Honda	0	0	1	18
McLaren-Renault	0	0	1	23
Racing Point-BWT	0	0	0	17
Alfa Romeo-Ferrari	0	0	0	13
Mercedes	15	11	6	7
Ferrari	3	7	9	15
Haas-Ferrari	0	0	0	7
Williams-Mercedes	0	0	0	1
Red Bull-Honda	3	1	4	27
Renault	0	0	0	18

Tabla 5. Conversión salidas escuderías.

Esta tabla, aplicando la transformación expuesta anteriormente, quedaría:

Constructor	PUNTOSTOTALES
Toro Rosso-Honda	21
McLaren-Renault	26
Racing Point-BWT Mercedes	17
Alfa Romeo-Ferrari	13
Mercedes	159
Ferrari	88
Haas-Ferrari	7
Williams-Mercedes	1
Red Bull-Honda	61
Renault	18

Tabla 6. Conversión resultante escuderías.

Así mismo, se muestran los cambios aplicados a las fórmulas del modelo:

- Función Objetivo del modelo:

$$\frac{1}{\rho_0^*} = \max\left[1 + \left(\frac{\text{slackPuntos}T_j}{\text{Puntos}T_0}\right)\right]$$

Fórmula 30. Función objetivo actualizada escuderías.

- Restricciones:

$$\begin{aligned} \text{Presupuesto}_o &= \sum_{j=1}^n \text{Presupuesto}_j \lambda_j + \text{slackPresupuesto}_o \\ \text{Trabajadores}_o &= \sum_{j=1}^n \text{Trabajadores}_j \lambda_j + \text{slackTrabajadores}_o \\ \text{Puntos}T_o &= \sum_{j=1}^n \text{Puntos}T_j \lambda_j - \text{slackPuntos}T_o \end{aligned}$$

Fórmula 31. Restricciones actualizadas escuderías.

4.2.3 Variables para DEA sin entradas

Para la construcción del modelo Lingo, se tomaron en cuenta los resultados de la pasada temporada obtenidos por los pilotos de cada una de las escuderías. Cada escudería compite en carrera con dos pilotos y disponen de otros tantos pilotos probadores. A partir de ahí, cada escudería posee un organigrama distinto y lo gestionan de manera diferente.

Para el análisis de los pilotos que compiten en el mundial de Fórmula 1, como ya se dijo, se realizará un análisis mediante el modelo DEA sin entradas y recurriendo al software Lingo que nos ofrecerá unos resultados.

Los pilotos de Fórmula 1, como sabemos, están en un deporte altamente competitivo donde los segundos de diferencia marcan grandes distancias. Es por ello, que deben requerir de bastante talento y compromiso con el fin de tener éxito en el deporte. Dicha preparación, es el fruto de años de experiencia y gran cantidad de inversión

para llegar hasta la parrilla de la Fórmula 1.

- Variables de entrada:

Como se dijo durante el trabajo, todas las DMUs utilizadas en este modelo poseerán entradas unitarias y únicamente se trabajará con las variables de salida.

- Variables de salida:

- Resultados de final de carrera en cada Gran Premio:

- Primero.
- Segundo.
- Tercero.
- Cuarto.
- Quinto.
- Sexto.
- Séptimo.
- Octavo.
- Noveno.
- Décimo.

- Vueltas rápidas: En la Fórmula 1, los pilotos que realizan vueltas rápidas reciben un extra en su puntaje. Generalmente es un valor pequeño, pero se debe tener en cuenta.

4.2.3.1 Modelo matemático DEA sin entradas

Para el modelo DEA sin entradas, se ha optado por realizar una única simulación. Las variables del modelo aparecen en el punto anterior junto con su definición dentro del código.

Para el cálculo de resultados, se utilizará el programa Lingo, con sus respectivas variables, restricciones y función objetivo. Este software nos devolverá unos resultados con los que compararemos la eficiencia de cada una de las DMUs.

Como en el caso de SBM, el código Lingo se reflejará en los anexos al final del documento como referencia.

Variabes	Notación	Variabes	Notación
Primero	PRIMERO	Ponderación 1º	Pprimero
Segundo	SEGUNDO	Ponderación 2º	Psegundo
Tercero	TERCERO	Ponderación 3º	Ptercero
Cuarto	CUARTO	Ponderación 4º	Pcuarto

Quinto	QUINTO	Ponderación 5°	Pquinto
Sexto	SEXTO	Ponderación 6°	Psexto
Séptimo	SÉPTIMO	Ponderación 7°	Pseptimo
Octavo	OCTAVO	Ponderación 8°	Poctavo
Noveno	NOVENO	Ponderación 9°	Pnovenno
Décimo	DÉCIMO	Ponderación 10°	Pdecimo
Vueltas rápidas	VRAPIDAS	Ponderación vueltas rápidas	Pvr

Tabla 7. Variables DEA sin entradas.

- Restricciones:

$$\mu_1 y_{1k} + \mu_2 y_{2k} + \mu_3 y_{3k} + \mu_4 y_{4k} + \mu_5 y_{5k} + \mu_6 y_{6k} + \mu_7 y_{7k} + \mu_8 y_{8k} + \mu_9 y_{9k} + \mu_{10} y_{10k} + \mu_f y_{fk} \leq 1$$

$$k = 1, \dots, n,$$

$$\mu_1 - \mu_2 \geq \varepsilon$$

$$\mu_2 - \mu_3 \geq \varepsilon$$

$$\mu_3 - \mu_4 \geq \varepsilon$$

$$\mu_4 - \mu_5 \geq \varepsilon$$

$$\mu_5 - \mu_6 \geq \varepsilon$$

$$\mu_6 - \mu_7 \geq \varepsilon$$

$$\mu_7 - \mu_8 \geq \varepsilon$$

$$\mu_8 - \mu_9 \geq \varepsilon$$

$$\mu_9 - \mu_{10} \geq \varepsilon$$

$$\mu_1 - 2\mu_2 + \mu_3 \geq \varepsilon$$

$$\mu_2 - 2\mu_3 + \mu_4 \geq \varepsilon$$

$$\mu_3 - 2\mu_4 + \mu_5 \geq \varepsilon$$

$$\mu_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

Fórmula 32. Restricciones DEA sin entradas.

- Función objetivo:

$$\begin{aligned} \text{Max } h_0 = & \mu_1 y_{10} + \mu_2 y_{20} + \mu_3 y_{30} + \mu_4 y_{40} + \mu_5 y_{50} + \mu_6 y_{70} + \mu_8 y_{80} + \mu_9 y_{90} + \mu_{10} y_{100} \\ & + \mu_f y_{fk} \end{aligned}$$

Fórmula 33. Función objetivo DEA sin entradas.

5 ESTUDIO DE LOS RESULTADOS

5.1 Introducción

En este apartado se muestran los resultados de las simulaciones de Lingo así como el análisis de estos. Dentro del apartado se propondrán las posibles mejoras según los dos bloques de simulaciones que se realizan, escuderías y pilotos.

5.2 Resultados

5.2.1 Modelo SBM

Para la realización del análisis mediante SBM, se recurrió al uso de Excel para crear una tabla de datos, esta tabla contiene las escuderías así como las entradas y salidas del modelo. Dichos datos son los resultados del año 2019 y se reflejan en la siguiente tabla.

Constructor/Variabes	Entradas		Salidas				
	PRESUPUESTO	TRABAJADORES	PRIMERO*	SEGUNDO*	TERCERO*	PUNTOS*	PUNTOSTOTALES
Toro Rosso-Honda	123,643	400	0	0	1	18	21
McLaren-Renault	193,705	690	0	0	1	23	26
Racing Point-BWT Mercedes	109,022	405	0	0	0	17	17
Alfa Romeo-Ferrari	118,031	360	0	0	0	13	13
Mercedes	325,997	905	15	11	6	7	159
Ferrari	393,426	1004	3	7	9	15	88
Haas-Ferrari	112,403	225	0	0	0	7	7
Williams-Mercedes	134,973	575	0	0	0	1	1
Red Bull-Honda	241,681	740	3	1	4	27	61
Renault	168,591	665	0	0	0	18	18

Tabla 8. Datos modelo SBM.

La tabla refleja los datos de las escuderías en el año 2019, en las casillas de las variables de salida se reflejan los puestos junto con un asterisco, que serán unificadas en PUNTOSTOTALES como se expuso en el punto anterior.

A dicha tabla, mediante Lingo, se obtienen el conjunto de holguras para cada una de las variables de las DMUs no eficientes. Las holguras que se muestran en la siguiente tabla, representan la variación que debería adquirir la variable para conseguir la meta de la eficiencia.

	SlackPresupuesto	SlackTrabajadores	SlackPuntosT
Toro Rosso-Honda	0	0	3,052434595
McLaren-Renault	0	89,85539809	46,42106694
Racing Point-BWT Mercedes	0	0	0
Alfa Romeo-Ferrari	0	0	5,619341776
Mercedes	0	0	0
Ferrari	67,429	99	71
Haas-Ferrari	0	0	0
Williams-Mercedes	0	110,1981795	32,98371702
Red Bull-Honda	0	29,29888236	42,81911741
Renault	0	122,7284249	37,98512732

Tabla 9. Holguras modelo SBM con VRS.

Como se puede apreciar en la tabla, los valores cero en cada escudería muestra el valor eficiente, lo que implica que dichas DMUs no tienen que variar. Si los valores son distintos de cero, las escuderías deberían aumentar dicha variable para alcanzar la eficiencia.

Así mismo, se muestran los valores de las holguras sin VRS para la posterior comparación de ambos.

	SlackPresupuesto	SlackTrabajadores	SlackPuntosT
Toro Rosso-Honda	0	56,75477075	39,30496293
McLaren-Renault	0	152,2557109	68,47662095
Racing Point-BWT Mercedes	0	102,3441167	36,17379608
Alfa Romeo-Ferrari	0	32,33423927	44,56779664
Mercedes	0	0	0
Ferrari	31,76744972	0	88,39337017
Haas-Ferrari	31,3540221	0	32,53038674
Williams-Mercedes	0	200,3015672	64,83099538
Red Bull-Honda	0	69,06957733	56,87617371
Renault	0	196,9746654	64,22765547

Tabla 10. Holguras modelo SBM sin VRS.

Así mismo, se muestra una tabla comparativa de las holguras con las dos iteraciones que se realizaron, generando una media y un contador de las DMUs participantes.

VALORES CON VRS	Presupuesto	Trabajadores	Puntos Totales
Valor medio	67,429	90,21617698	34,26868644
Contador de escuderías	1	5	7

Tabla 11. Comparativa escuderías con VRS.

VALORES SIN VRS	Presupuesto	Trabajadores	Puntos Totales
Valor medio	31,56073591	115,7192354	55,04241756
Contador de escuderías	2	7	9

Tabla 12. Comparativa escuderías sin VRS.

Como se puede observar, en general los valores sin VRS son mayores a excepción del presupuesto. Esto se debe a la aparición de menos escuderías eficientes, a excepción del presupuesto. Esto es, por la existencia muy dispar del presupuesto entre las escuderías de diferentes tamaños. Aún así, la variable presupuesto posee la mayor tasa de escuderías eficientes de todas las analizadas a pesar de la diferencia de valores entre estas.

Otro enfoque que podemos aplicar es, como consecuencia de haber menos escuderías eficientes, existen menos escuderías que toman cero como valor en sus holguras. De este modo hay más escuderías en un valor medio, siendo así se reduce la diferencia entre las escuderías con holguras muy altas y aquellas que son eficientes, cuya consecuencia directa es reducir este valor.

Claramente, la disparidad que existe en los trabajadores es notable. La escudería eficiente en ambos análisis duplica o incluso triplica a muchas de las DMUs, lo que señala que deben aumentar en gran número sus trabajadores. Respecto al presupuesto, los valores son más igualados, por lo que aparecen una mayor cantidad de DMUs eficientes en esta variable.

En definitiva, el análisis con la presencia de Mercedes era un poco ilógica ya que una escudería que consigue esos resultados nos da una idea de los valores que vamos a obtener. Tanto con VRS como sin él, los resultados nos dicen que la escudería con eficiencia en ambos análisis es Mercedes, y esto es obvio, ya que observando los resultados obtenidos durante toda la temporada 2019, nos direccionaba hacia esta idea.

Aún así, Racing Point-BWT Mercedes y Haas Ferrari, encuentran la eficiencia al utilizar el análisis mediante VRS. Al eliminar esta restricción, ambas escuderías pierden la eficiencia, debiendo adquirir un mayor número de trabajadores y presupuesto respectivamente, lo que provocaría un mayor número de puntos.

5.2.1.1 Escuderías más eficientes

En este apartado, se analizarán las variables lambda para los modelos. El objetivo es obtener un top entre las escuderías participantes, tanto con VRS como sin VRS.

Para ello, se aportarán tablas que contienen resúmenes de las escuderías eficientes en las cuales se proyecta al menos una escudería no eficiente. La variable lambda nos da una cantidad de proyección sobre una escudería eficiente, sumadas todas ellas deben resultar el valor unidad. El porcentaje de la unidad lambda, se desglosa en un conjunto de valores por cada escudería no eficiente.

Se adjuntarán tablas para mostrar los datos obtenidos junto con el número de escuderías que se proyectan, sumatorio de escuderías proyectadas y la media de la propia proyección. La tabla compuesta por lambda, posee un tamaño DMUs x DMUs, es decir 10 x 10.

En dicha tabla, aparecerá escuderías en las que al menos se ha realizado una proyección cuyo orden será establecido como primer criterio la media de las proyecciones, seguido del número total de estas.

Posición	Escudería	Media	Proyecciones	Suma de proyecciones
1	Racing Point-BWT Mercedes	0,706814606	6	4,94770224
2	Haas-Ferrari	0,518740081	2	1,556220242
3	Mercedes	0,43700969	7	3,496077518

Tabla 13. Ranking escuderías con VRS.

La primera posición corresponde a Racing Point-BWT Mercedes, con un 60% de proyecciones de las escuderías ineficientes. En segundo lugar, existe controversia entre Haas-Ferrari y Mercedes, ya que según lo establecido anteriormente, cuyo primer criterio es la media de las proyecciones, existe una gran superioridad de Mercedes en el número total de proyecciones.

En el caso VRS, ofrecen oportunidad de eficiencia a las escuderías más pequeñas ya que la división se realiza por tamaños lo que brinda mas equilibrado entre ellas.

Si analizamos sin VRS, las pautas a seguir serán las mismas que las analizadas para VRS, seguiremos con los mismos criterios analizando la tabla resultante de este modelo.

Posición	Escudería	Media	Proyecciones	Suma de proyecciones
1	Mercedes	0,57005142	9	5,700514202

Tabla 14. Ranking escuderías sin VRS.

Como era de esperar, el dominio es absoluto por parte de Mercedes, ya que en el caso sin VRS la división no se realiza mediante tamaños. Es por ello, que todas las escuderías pretenden proyectarse a la mejor escudería.

La media posee un valor alto, lo que provoca que las escuderías proyectadas deberían adquirir los parámetros de la escudería Mercedes para llegar a la eficiencia aumentando todas las entradas y salidas.

En definitiva, en ambas tablas aparece la escudería Mercedes, en la primera de ellas debido al gran tamaño que posee los resultados de las proyecciones no llegan a ser decisivos como en el caso sin VRS.

5.2.2 Modelo DEA sin entradas

Para la realización de la simulación de este modelo, los datos fueron recopilados y plasmados en una hoja Excel. Dichos datos, se tomaron mediante búsqueda de información en internet durante la temporada 2019. Dichos datos son los resultados obtenidos por cada piloto en la temporada pasada y que serán analizados para mostrar qué piloto es el más eficiente entre todos los que ocupan la parrilla en los Grandes Premios de todo el mundo.

Piloto	Entradas	Salidas/Puestos										
	Unitarias	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto	Séptimo	Octavo	Noveno	Décimo	Vueltas rápidas
Lando Norris		0	0	0	0	0	2	2	4	2	1	0
Kimi Räikkönen		0	0	0	0	1	0	0	3	2	1	0
Daniil Kvyat		0	0	1	0	0	0	2	0	3	4	0
Nico Hülkenberg		0	0	0	0	1	0	2	2	2	3	0
Lance Stroll		0	0	0	1	0	0	0	0	4	1	0
Kevin Magnussen		0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
Antonio Giovinazzi		0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0
Romain Grosjean		0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0
Lewis Hamilton		11	4	2	1	1	0	1	0	1	0	6
Max Verstappen		3	1	4	6	2	1	0	1	0	0	4
Sebastian Vettel		1	5	3	4	3	0	0	0	0	0	0
Pierre Gasly		0	0	0	1	1	3	2	3	2	1	2
Daniel Ricciardo		0	0	0	1	0	3	2	1	1	0	0
Robert Kubica		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
George Russell		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Valtteri Bottas		4	7	4	2	1	0	0	1	0	0	2
Charles Leclerc		2	2	6	3	4	1	0	0	0	0	4
Carlos Sain Jr.		0	0	1	0	3	4	1	3	0	1	0
Alexander Albon		0	0	0	1	4	4	0	1	1	2	0
Sergio Perez		0	0	0	0	0	2	4	2	1	2	0

Tabla 15. Datos de los pilotos.

En la tabla, se muestran los resultados de todos los pilotos en los que aparece el número total de resultados en cada posición durante todo el 2019. Se tomaron los diez primeros puestos porque son los que generan puntaje a los pilotos, ya que, a partir del puesto once, el piloto no recibe ninguno de estos.

Así mismo, como se dijo durante todo el trabajo, en el modelo DEA sin entradas las entradas son unitarias por lo que no aparecerán en el modelo de este.

Piloto	PONDERACIONES										
	Pprimero	Psegundo	Ptercero	Pcuarto	Pquinto	Psexto	Pseptimo	Poctavo	Pnoveno	Pdecimo	Pvr
Lando Norris	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Kimi Räikkönen	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Daniil Kvyat	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Nico Hülkenberg	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Lance Stroll	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Kevin Magnussen	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Antonio Giovinazzi	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Romain Grosjean	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Lewis Hamilton	0,00015	0,00011	0,00008	0,00006	0,00005	0,00004	0,00003	0,00002	0,00001	0	0,166267
Max Verstappen	0,05003	0,04999	0,04996	0,04994	0,04993	0,04992	0,04991	0,0499	0,00001	0	0
Sebastian Vettel	0,052655	0,0526153	0,052585	0,052565	0,052555	0,00004	0,00003	0,00002	0,00001	0	0
Pierre Gasly	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Daniel Ricciardo	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0	0
Robert Kubica	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
George Russell	0,052655	0,0526153	0,052585	0,052565	0,052555	0,00004	0,00003	0,00002	0,00001	0	0
Valtteri Bottas	0,05003	0,04999	0,04996	0,04994	0,04993	0,04992	0,04991	0,0499	0,00001	0	0
Charles Leclerc	0,052655	0,0526153	0,052585	0,052565	0,052555	0,052545	0,00003	0,00002	0,00001	0	0
Carlos Sain Jr.	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Alexander Albon	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0
Sergio Perez	0,047655	0,0476148	0,047585	0,047565	0,047555	0,047545	0,047535	0,047525	0,047515	0,047505	0

Tabla 16. Ponderaciones pilotos mediante DEA sin entradas.

En esta tabla, se plasman las ponderaciones generadas por Lingo que establece automáticamente una serie de valores para cada una de las salidas del modelo que planteamos.

Como vemos, esta metodología DEA establece una clasificación para múltiples logros para cada uno de los pilotos, generando una jerarquía y orden para ellos.

Observando la tabla, todas las ponderaciones poseen una característica común: no sobrevaloran los primeros puestos, generando valores muy parejos en cada uno de los deportistas. Esto brinda oportunidad a los pilotos que no consiguen podios durante la temporada. Aun así, lógicamente resultados mejores en cada carrera poseen mayor valor según las ponderaciones obtenidas mediante Lingo.

Así mismo, muchas de las ponderaciones poseen diferencias mínimas, dicha diferencia la brinda la constante

arquimedea (€) por lo que es un valor muy importante para distinguir los valores de peso de las posiciones de los pilotos. Dicha diferencia, disminuye a partir de la cuarta posición, como se puede apreciar en la tabla.

En la siguiente tabla, aparecen las eficiencias obtenidas según los resultados alcanzados durante todo el año en cada una de las carreras disputadas en 2019.

Piloto	FO
Lando Norris	0,522792381
Kimi Räikkönen	0,427752857
Daniil Kvyat	0,475217619
Nico Hülkenberg	0,475217619
Lance Stroll	0,285128571
Kevin Magnussen	0,190119048
Antonio Giovinazzi	0,190079048
Romain Grosjean	0,142544286
Lewis Hamilton	1
Max Verstappen	0,89924
Sebastian Vettel	0,841414211
Pierre Gasly	0,617931905
Daniel Ricciardo	0,380308095
Robert Kubica	0,047504762
George Russell	0
Valtteri Bottas	0,9496
Charles Leclerc	0,946514737
Carlos Sain Jr.	0,618041905
Alexander Albon	0,618011905
Sergio Perez	0,522802381

Tabla 17. FO para los pilotos.

Como podemos apreciar en la tabla, existe una gran disparidad entre eficiencias de los pilotos. Estas diferencias se analizarán y compararán con los resultados y posiciones reales en el mundial de la Fórmula 1 publicado por la FIA en el siguiente punto del documento.

5.2.2.1 Pilotos más eficientes

Dentro de este punto, se mostrará el orden de puntuación obtenido por los pilotos, así como el valor de la eficiencia conseguida. Para ello se adjuntará una captura con la tabla de resultados generados por Lingo en Excel y ordenados de mayor a menor según los resultados.

Posición	Piloto	FO	FO (%)
1*	Lewis Hamilton	1	100
2*	Valtteri Bottas	0,9496	94,96
3*	Charles Leclerc	0,946515	94,65147
4*	Max Verstappen	0,89924	89,924
5*	Sebastian Vettel	0,841414	84,14142
6*	Carlos Sain Jr.	0,618042	61,80419
7*	Alexander Albon	0,618012	61,80119
8*	Pierre Gasly	0,617932	61,79319
9*	Sergio Perez	0,522802	52,28024
10*	Lando Norris	0,522792	52,27924
11*	Nico Hülkenberg	0,475218	47,52176
12*	Daniil Kvyat	0,475218	47,52176
13*	Kimi Räikkönen	0,427753	42,77529
14*	Daniel Ricciardo	0,380308	38,03081
15*	Lance Stroll	0,285129	28,51286
16*	Kevin Magnussen	0,190119	19,0119
17*	Antonio Giovinazzi	0,190079	19,0079
18*	Romain Grosjean	0,142544	14,25443
19*	Robert Kubica	0,047505	4,750476
20*	George Russell	0	0

Tabla 18. Ranking de los pilotos.

Analizando los resultados obtenidos, como era lógico, la primera posición está ocupada por Lewis Hamilton, piloto británico que lideró 11 de las 21 pruebas que componen el mundial de Fórmula 1 así como 17 podios en este número de pruebas. Dichos resultados, proveen al piloto de un monopolio en el año 2019 junto con el liderato durante 511 vueltas en el total de los circuitos, consiguiendo el mundial de este deporte.

Seguidamente, se encuentra Valtteri Bottas con un resultado de 94,96% de eficiencia, completando el año 2019 con grandes resultados.

El tercer puesto, seguido muy de cerca, Charles Leclerc que consigue un 94'65% de eficiencia, acercándose en gran medida al segundo puesto. En este puesto, según los valores reales de la FIA, se encuentra Max Verstappen pero que analizando la eficiencia de este método se encuentra 5 puntos por debajo del actual 3º piloto.

Si observamos el final de la tabla, George Russell consigue la última plaza, ya que en las 21 pruebas del circuito mundial no alcanza puntuación en ninguna de las carreras disputadas, con puestos que superan el décimo.

Pos.	N.º	Piloto
1	44	 Lewis Hamilton
2	77	 Valtteri Bottas
3	33	 Max Verstappen
4	16	 Charles Leclerc
5	5	 Sebastian Vettel
6	55	 Carlos Sainz Jr.
7	10	 Pierre Gasly
8	23	 Alexander Albon
9	3	 Daniel Ricciardo
10	11	 Sergio Pérez
11	4	 Lando Norris
12	7	 Kimi Räikkönen
13	26	 Daniil Kvyat
14	27	 Nico Hülkenberg
15	18	 Lance Stroll
16	20	 Kevin Magnussen
17	99	 Antonio Giovinazzi
18	8	 Romain Grosjean
19	88	 Robert Kubica
20	63	 George Russell

Tabla 19. Resultados reales temporada 2019.

Comparando los resultados reales con los obtenidos en el proyecto, se puede comprobar que son muy parejos, a excepción de la tercera posición que está permutada por la cuarta. Esto se debe a que el puntaje en la Fórmula 1 se realiza de forma diferente, ya que con el modelo que se ha creado, se utilizan ponderaciones que son obtenidas a través de Lingo indicando las restricciones que debe cumplir por lo que los valores no siempre van a ser exactos.

En definitiva, las dos primeras posiciones son para los pilotos de Mercedes, que completaron una temporada casi perfecta en la que la dominancia de esta escudería junto con sus pilotos fue claramente justa. Debido a los problemas de capital de las escuderías más pequeñas, que se encuentran a menos de la mitad de las más importantes, la FIA establece un límite para intentar compensar y equilibrar la competición ya que, como se ve en los resultados, a mayor capital, los resultados son siempre mayores en este deporte.

6 CONCLUSIONES

En resumen, en este documento se han realizado dos análisis de la Fórmula 1, tanto a escuderías como a pilotos usando los métodos SBM y DEA con entradas unitarias. Para ello, se han tomado la totalidad de las escuderías que componen el mundial, así como los pilotos que compiten en cada uno de los circuitos en todo el mundo.

Respecto a la división del documento, éste comienza con una introducción y alcance de este con motivo de orientar sobre el trabajo. Seguidamente de la introducción al contexto que engloba a toda la Fórmula 1. Dicha introducción explica brevemente el entorno del deporte para tener un conocimiento básico de éste y establecer cuáles son los factores más importantes.

En el siguiente punto, se comenta de manera general los métodos DEA más relevantes, así como una explicación de los términos más comunes y utilizados. Definiciones, modelos, variables, restricciones y funciones objetivo se encuentran en esta sección del trabajo.

Por último, se realiza el análisis mediante los dos métodos citados anteriormente, y clasificando las escuderías y pilotos que alcanzan mayor eficiencia.

En resumen, de los resultados, tanto escuderías como pilotos, están ligados a los resultados ya que, en el caso de Lewis Hamilton y Valtteri Bottas que consiguieron un dominio total de las pruebas disputadas dio lugar a unos resultados a la escudería Mercedes que la colocó en primera posición.

En definitiva, el año 2019, fue el año de monopolio de Mercedes tanto en el ámbito de constructores como de pilotos que les permitió alcanzar el dominio absoluto en el mundial de la Fórmula 1. Estos resultados nos dan una idea sobre la importancia que tiene en la F1 el capital, ya que a mayor presupuesto, los resultados son mayores, poseer más trabajadores y mayor inversión en el monoplaza resulta en mejores resultados para las escuderías y pilotos. Este factor, se verá modificado en 2020 ya que se limita el presupuesto de las escuderías para equilibrar la competición.

Como proposición de interés, se podría realizar otro análisis para el año 2020 o posterior para comparar los resultados añadiendo la restricción de capital para las escuderías más grandes.

REFERENCIAS/BIBLIOGRAFÍA

- 1) Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1979). Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research*, 3(4), 339.
- 2) Ruiz, J. L., Pastor, D., & Pastor, J. T. (2013). Assessing professional tennis players using data envelopment analysis (DEA). *Journal of Sports Economics*, 14(3), 276-302.
- 3) Villa, G., & Lozano, S. (2018). Dynamic network DEA approach to basketball games efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 69(11), 1738-1750.
- 4) Villa, G., & Lozano, S. (2016). Assessing the scoring efficiency of a football match. *European Journal of Operational Research*, 255(2), 559-569.
- 5) Gutiérrez, E., & Lozano, S. (2018). Benchmarking formula one auto racing circuits: A two stage DEA approach. *Operational Research*.
- 6) Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). *Data envelopment analysis: History, models, and interpretations*.
- 7) Gutiérrez, E., & Lozano, S. (2014). A DEA approach to performance-based budgeting of formula one constructors. *Journal of Sports Economics*, 15(2), 180-200.
- 8) Cooper, W. W., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (2009). Selecting non-zero weights to evaluate effectiveness of basketball players with DEA. *European Journal of Operational Research*, 195(2), 563-574.
- 9) De Mello, J. C. C. B. S., Angulo-Meza, L., & Branco Da Silva, B. P. (2009). A ranking for the olympic games with unitary input DEA models. *IMA Journal of Management Mathematics*, 20(2), 201-211.

ANEXO DE PROGRAMACIÓN LINGO

En esta sección se adjuntan los modelos matemáticos de lingo tanto para SBM como para el modelo de entradas unitarias.

- SBM:

```
SETS:
    ESCUDERIAS:    FO,    PRESUPUESTO,    TRABAJADORES,    PUNTOST,
    slackPresupuesto, slackTrabajadores, slackPuntosT;

    JJ(ESCUDERIAS,ESCUDERIAS): LAMBDA;

ENDSETS

DATA:
    ESCUDERIAS = 1..10;

    PRESUPUESTO, TRABAJADORES= @OLE('Escuderia.xls');
    PUNTOST= @OLE('Escuderia.xls');

    @OLE('Escuderia.xls')=slackPresupuesto, slackTrabajadores;
    @OLE('Escuderia.xls')=slackPuntosT;
    @OLE('Escuderia.xls')=FO,LAMBDA;

ENDDATA

MAX= TFO;
TFO=@SUM(ESCUDERIAS(INDICEJ):FO(INDICEJ));

@FOR(ESCUDERIAS(INDICEJ):

FO(INDICEJ)=1+(slackPuntosT(INDICEJ)/PUNTOST(INDICEJ));

);

!RESTRICCIONES;

@FOR(ESCUDERIAS(INDICEJ):

!entradas;

    @SUM(ESCUDERIAS(J):PRESUPUESTO(J)*LAMBDA(INDICEJ,J)) <=
PRESUPUESTO(INDICEJ) + slackPresupuesto;

    @SUM(ESCUDERIAS(J):TRABAJADORES(J)*LAMBDA(INDICEJ,J)) <=
TRABAJADORES(INDICEJ) + slackTrabajadores;

!salidas;
```

```

@SUM(ESCUDERIAS (J) : PUNTOST (J) * LAMBDA (INDICEJ, J) ) =
PUNTOST (INDICEJ) + slackPuntosT (INDICEJ);

);

!posibilidad de introducir retornos de escala variables;

@FOR(ESCUDERIAS (INDICEJ) :

@SUM(ESCUDERIAS (J) : LAMBDA (INDICEJ, J) ) = 1;

);

```

- DEA con entradas unitarias:

Sets:

```

PILOTOS: FO, PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO, CUARTO, QUINTO, SEXTO,
SEPTIMO, OCTAVO, NOVENO, DECIMO, VRAPIDAS, Pprimero, Psegundo,
Ptercero, Pcuarto, Pquinto, Psexto, Pseptimo, Poctavo, Pnovenos,
Pdecimo, Pvr;

```

ENDSETS

DATA:

```

EPSILON = 0.00001;

```

```

PILOTOS = 1..20;

```

```

PRIMERO, SEGUNDO, TERCERO, CUARTO, QUINTO, SEXTO, SEPTIMO,
OCTAVO, NOVENO, DECIMO, VRAPIDAS= @OLE('Pilotos.xls');

```

```

@OLE('Pilotos.xls')= Pprimero, Psegundo, Ptercero, Pcuarto,
Pquinto, Psexto, Pseptimo, Poctavo, Pnovenos, Pdecimo, Pvr;

```

```

@OLE('Pilotos.xls')= FO;

```

ENDDATA

```

MAX= TFO;

```

```

TFO=@SUM(PILOTOS (J) : FO (J) );

```

```

!Función objetivo;

```

```

@FOR(PILOTOS (J) :

```

```

FO (J) = Pprimero (J) * PRIMERO (J) + Psegundo (J) * SEGUNDO (J) +
Ptercero (J) * TERCERO (J) + Pcuarto (J) * CUARTO (J) + Pquinto (J) * QUINTO (J) +
Psexto (J) * SEXTO (J) + Pseptimo (J) * SEPTIMO (J) + Poctavo (J) * OCTAVO (J) +
Pnovenos (J) * NOVENO (J) + Pdecimo (J) * DECIMO (J) + Pvr (J) * VRAPIDAS (J);

```

!Restricciones;

@FOR (PILOTOS (INDICEJ) :

```
Pprimero (J) *PRIMERO (INDICEJ)      +      Psegundo (J) *SEGUNDO (INDICEJ)      +
Ptercero (J) *TERCERO (INDICEJ)      +      Pcuarto (J) *CUARTO (INDICEJ)      +
Pquinto (J) *QUINTO (INDICEJ)        +      Psexto (J) *SEXTO (INDICEJ)        +
Pseptimo (J) *SEPTIMO (INDICEJ)      +      Poctavo (J) *OCTAVO (INDICEJ)     +
Pnoveno (J) *NOVENO (INDICEJ)        +      Pdecimo (J) *DECIMO (INDICEJ)     +
Pvr (J) *VRAPIDAS (INDICEJ) <=1;

);
```

```
Pprimero (J) - Psegundo (J) >= EPSILON;
Psegundo (J) - Ptercero (J) >= EPSILON;
Ptercero (J) - Pcuarto (J) >= EPSILON;
Pcuarto (J) - Pquinto (J) >= EPSILON;
Pquinto (J) - Psexto (J) >= EPSILON;
Psexto (J) - Pseptimo (J) >= EPSILON;
Pseptimo (J) - Poctavo (J) >= EPSILON;
Poctavo (J) - Pnoveno (J) >= EPSILON;
Pnoveno (J) - Pdecimo (J) >= EPSILON;
Pprimero (J) - 2*Psegundo (J) + Ptercero (J) >= EPSILON;
Psegundo (J) - 2*Ptercero (J) + Pcuarto (J) >= EPSILON;
Ptercero (J) - 2*Pcuarto (J) + Pquinto (J) >= EPSILON;

);
```