

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Aplicación de la metodología DEA para el estudio del desempeño de futbolistas de La Liga

Autor: José Luis Velázquez Martínez

Tutor: Antonio Plácido Moreno Beltrán

**Dpto. Organización Industrial y Gestión de
Empresas I**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2019



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería de Organización Industrial

Aplicación de la metodología DEA para el estudio del desempeño de futbolistas de La Liga

Autor:

José Luis Velázquez Martínez

Tutor:

Antonio Plácido Moreno Beltrán

Profesor Contratado Doctor

Dpto. Organización Industrial y Gestión de empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Trabajo Fin de Grado: Aplicación de la metodología DEA para el estudio del desempeño de futbolistas de La Liga

Autor: José Luis Velázquez Martínez

Tutor: Antonio Plácido Moreno Beltrán

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis maestros

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer al tutor de este proyecto, Plácido, por su predisposición y confianza desde el primer día para llevarlo a cabo. Además de su disponibilidad, buen trato y sus consejos han sido esenciales a la hora de guiar este estudio hacia el éxito. Además, su polivalencia ha permitido adaptarlo a las ideas que tenía planteadas.

También me gustaría darles las gracias a mis amigos de siempre, con los que he compartido infinidad de horas de estudios además de todo tipo de momentos inolvidables que me han permitido, gracias a su saludable compañía, aprender, superarme, y crecer hasta convertirme en lo que soy hoy. También he de agradecer a los nuevos amigos que me ha brindado este grado por su apoyo y ayuda cuando más la he necesitado además de grandes momentos.

Agradecer a todos los profesores que me han permitido desarrollarme, adquirir conocimientos y prepararme para el futuro laboral.

Finalmente, y como no podía faltar, agradecer a mi familia a los cuales les debo tanto por su apoyo incondicional. Sin ellos no podría haber llegado hasta este momento. Especialmente tengo que darle las gracias a mi padre por su sacrificio, por darme siempre más de lo que ha podido superando los límites de su enfermedad. A mi madre por su fuerza sobrehumana para superar todas las adversidades que se nos presentan y a mi hermana melliza por acompañarme incluso desde antes de nacer, por sacarme constantemente una sonrisa y por poder contar con ella para todo.

Resumen

Con esta investigación se quiere medir un atributo muy subjetivo de los jugadores de fútbol, su eficiencia. Mediante la aplicación del modelo DEA denominado DDF o Directional Distance Function, se pretende medir cuantitativamente qué jugadores han sido eficientes y cuáles han resultado ineficientes a lo largo de una temporada.

Para ello se han aplicado dos modelos semejantes aplicados a dos posiciones que los jugadores pueden ocupar sobre el terreno de juego. El primero se ha realizado para el estudio de 29 centrocampistas que participaron en La Liga española de fútbol durante la temporada 2017/2018 y el otro para el estudio de 29 delanteros participantes en el mismo contexto.

Conocer mediante datos cuantitativos el rendimiento de jugadores es clave a la hora de afrontar la confección de las plantillas. Con estos conocimientos se podría optimizar el uso de los recursos financieros con los que cuentan los clubes, al utilizarlos de manera fundamentada en los jugadores más eficientes.

Abstract

This research is mented to measure a subjective attribute of football players, their efficiency. Using DEA model called DDF, Directional Distance Function, it is intended to measure quantitatively which player has been more efficient along the season.

In order to achieve the purpose of the End-of-Degree Project, two similar models has been implemented on two players positions in the field. The first one has been carried out on 29 mid-field players that participated on La Liga 2017/2018 season. The second model has been applied to 29 strikers within the same conditions.

Being aware of the quantitative efficiency data of players can play a key role in order to put together professional football teams. This knowledge could optymyze economic and financial resources of clubs by using them properly, grounding them on player efficiency.

Índice

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Abstract	xii
Índice	xiv
Índice de Tablas	xvi
Índice de Figuras	xviii
1 Introducción	1
1.1 <i>Introducción</i>	1
1.2 <i>Objetivos</i>	1
1.3 <i>Alcance del proyecto</i>	2
1.4 <i>Estructura del documento</i>	2
2 Situación de mercado	3
2.1 <i>Historia de La Liga y formato actual</i>	3
2.2 <i>Nivel deportivo</i>	3
2.3 <i>Nivel empresarial y económico</i>	4
2.4 <i>Nivel social</i>	8
3 Metodología DEA	9
3.1 <i>Introducción</i>	9
3.2 <i>Historia de la metodología</i>	9
3.3 <i>Conceptos básicos</i>	9
3.4 <i>Conceptos previos</i>	12
3.4.1 <i>Retorno de escala constante o CRS</i>	13
3.4.2 <i>Retorno de escala variable o VRS</i>	14
3.4.3 <i>Orientación de entrada</i>	15
3.4.4 <i>Orientación de salida</i>	15
3.5 <i>Desarrollo de modelos DEA</i>	15
3.5.1 <i>Modelo Ratio</i>	15
3.5.2 <i>Modelo CCR-Input</i>	16
3.5.3 <i>Modelo CCR-Output</i>	19
3.5.4 <i>Modelo BBC-Input</i>	21
3.5.5 <i>Modelo BBC-Output</i>	23
3.5.6 <i>Modelo DDF</i>	25
3.6 <i>Tratamiento de variables con datos negativos</i>	26
3.7 <i>Tratamiento de salidas no deseadas</i>	27
3.8 <i>Aplicaciones DEA</i>	28
4 Modelos implementados	31
4.1 <i>Introducción</i>	31
4.2 <i>Descripción del modelo</i>	31
4.2.1 <i>Unidades productivas</i>	31
4.2.2 <i>Variables de entrada</i>	34

4.2.3 Variables de salida	35
4.2.4 Descripción del modelo	37
4.2.5 Modelado matemático	38
5 Discusión de resultados	43
5.1 Introducción	43
5.2 Metodología de resolución	43
5.3 Resultados modelo centrocampistas	43
5.4 Resultados modelo delanteros	48
6 Conclusiones y líneas futuras	55
7 Referencias	57
ANEXO A- ENTRADAS Y SALIDAS	61
ANEXO B- PROGRAMACIÓN LINGO	71
ANEXO C- VALORES PARA LA EFICIENCIA DE VARIABLES INEFICIENTES	77
ANEXO D- MATRICES LAMBDA	81

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Reparto televisivo La Liga 2017/2018	4
Tabla 2.2 Límites salariales La Liga 2017/2018	6
Tabla 2.3 Valor de mercado de las plantillas de La Liga 2017/2018	7
Tabla 4.1 Unidades productivas: centrocampistas en estudio	31
Tabla 4.2 Unidades productivas: delanteros en estudio	32
Tabla 5.1 Eficiencias de los centrocampistas	43
Tabla 5.2 Desglose salidas centrocampistas ineficientes	44
Tabla 5.3 Sumatorio de jugadores que se proyectan sobre cada centrocampista	46
Tabla 5.4 Sumatorio de LAMBDA para cada centrocampista eficiente	47
Tabla 5.5 Eficiencias de los delanteros	49
Tabla 5.6 Desglose salidas delanteros ineficientes	50
Tabla 5.7 Sumatorio de jugadores que se proyectan sobre cada delantero	51
Tabla 5.8 Sumatorio de LAMBDA para cada delantero eficiente	52
Tabla 0.1 Anexo A - Datos de las entradas de los centrocampistas	62
Tabla 0.2 Anexo A - Datos de las entradas de los delanteros	63
Tabla 0.3 Anexo A - Datos de las salidas de los centrocampistas	64
Tabla 0.4 Anexo A - Datos de las salidas de los delanteros	67
Tabla 0.1 Anexo C - Holguras centrocampistas ineficientes	78
Tabla 0.2 Anexo C - Holguras delanteros ineficientes	79
Tabla 0.1 Anexo D - Matriz LAMBDA centrocampistas	82
Tabla 0.2 Anexo D - Matriz LAMBDA delanteros	84

Índice de Figuras

Ilustración 2.1 Diagrama de sectores del reparto televisivo porcentual La Liga 2017/2018	5
Ilustración 2.2 Asistencia anual total La Liga	8
Ilustración 3.1 Representación gráfica de la tecnología CRS	13
Ilustración 3.2 Representación gráfica de la tecnología VRS	14
Ilustración 3.3 Representación gráfica resolución CCR-INPUT	19
Ilustración 3.4 Representación gráfica resolución CCR-OUTPUT	21
Ilustración 3.5 Representación gráfica resolución BBC-INPUT	22
Ilustración 3.6 Representación gráfica resolución BBC-OUTPUT	24
Ilustración 3.7 Comparativa modelo CCR Y BBC (input)	24
Ilustración 4.1 Diagrama entradas y salidas para los delanteros	33
Ilustración 4.2 Diagrama entradas y salidas para centrocampistas	34
Ilustración 5.1 Grado de ineficiencia de los centrocampistas	46
Ilustración 5.2 Resumen de los centrocampistas eficientes	48
Ilustración 5.3 Grado de ineficiencia de los delanteros	51
Ilustración 5.4 Resumen de los delanteros eficientes	53

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Actualmente el fútbol está considerado el deporte rey al ser practicado y consumido en todos los lugares del mundo. Además, cada vez son más los países que aumentan las inversiones en sus competiciones futbolísticas como pueden ser los casos de EE.UU con la MLS (Mayor Soccer League) o de China con la Superleague.

La Liga española de fútbol, que siempre ha sido una de las competiciones futbolísticas más competitivas a nivel deportivo, registra un crecimiento y una expansión en todos los aspectos. Además, mi cercanía a esta competición, de la cual poseo amplios conocimientos, ha motivado su selección para este estudio.

Este crecimiento aumenta la importancia de realizar una buena confección de plantilla, entendiéndose como tal las inversiones y los movimientos que realizan los clubes en sus principales recursos deportivos, los futbolistas. Esto resulta necesario debido a que los rivales son cada vez más competitivos y es que, en el fútbol actual, gran parte de las ganancias de los clubes están directamente relacionadas con el rendimiento deportivo. Por ello la utilización de la metodología DEA como ayuda para confeccionar esas plantillas se convierte en una herramienta mucho más útil de lo cualquiera se pueda imaginar.

La utilización de la metodología DEA se ha realizado en varios deportes y existen varias aplicaciones asociadas al mundo del fútbol. Sin embargo, la gran mayoría de investigaciones en el fútbol se han centrado en el estudio de equipos tanto a nivel deportivo como económico por lo que me pareció novedoso y más que interesante analizar el desempeño de los integrantes básicos a nivel deportivo de los clubes, los jugadores. Realizar el estudio de los futbolistas en lugar de realizarlo del equipo como conjunto nos permite lograr un mayor grado de profundidad en las investigaciones sobre este deporte.

En definitiva, la realización de un análisis de eficiencia de los jugadores se antoja más que útil para conocer el rendimiento de los mismos, aspecto fundamental a la hora de abordar movimientos en el mercado de traspasos con la finalidad de elaborar la plantilla más competitiva posible.

1.2 Objetivos

El aumento de la competitividad ya comentado y las limitaciones económicas de los clubes a la hora de elaborar el primer equipo, aumenta la utilidad de este estudio ya que nos permitirá conocer qué futbolistas han cumplido sus objetivos de productividad y cuáles de ellos han sido ineficientes a lo largo de la temporada. De esta manera se podrá gestionar mejor los recursos económicos con los que cuenta el club.

Por lo tanto, el objetivo principal de este proyecto es la aplicación de la metodología DEA de tal manera que se logre conocer la eficiencia de cada jugador en estudio. Además de conocer esta eficiencia, se quiere obtener las proyecciones de los jugadores no eficientes sobre aquellos que sí lo son y las holguras de algunas variables de entrada o salida que nos indican los excesos o los defectos de cada jugador.

1.3 Alcance del proyecto

En este proyecto se quieren estudiar un total de 58 futbolistas, todos ellos participantes en La Liga española de fútbol durante la temporada 2017/2018. Estos futbolistas se clasifican, atendiendo a la posición que ocupa sobre el terreno de juego, en centrocampista o delanteros, creando dos grupos de igual tamaño que tendrán modelos acordes a sus características. Estas dos posiciones han sido seleccionadas ya que poseen muchas variables de estudio y son fundamentales en este deporte.

Para ambos grupos se consideran dos entradas, que además coinciden. Para los centrocampistas se estudiarán ocho variables de salida y para los delanteros siete.

1.4 Estructura del documento

Al ser un proyecto de investigación este trabajo comienza con una parte teórica de tal manera que se entiendan los conceptos necesarios que se van a utilizar a posteriori en la práctica. Se finalizará con la exposición y el análisis de los resultados para finalmente obtener las conclusiones de los mismos. En resumen, este estudio se dividirá en seis capítulos para facilitar la comprensión del mismo.

El primer punto es introductorio de lo que se va a llevar a cabo en este proyecto. En el segundo se realiza un breve estudio que nos permite conocer la situación de mercado de La Liga de fútbol española, competición que se va a estudiar, para destacar la importancia y la influencia que tiene en varios aspectos.

En el tercer apartado se explica teóricamente la historia de la metodología DEA, los conceptos básicos de la misma para una mejor comprensión del trabajo, los principales modelos que la componen y diversos estudios de aplicación relacionados con el mundo del fútbol.

En el cuarto capítulo se realizará el desarrollo de los modelos que vamos a implementar, comenzando con una explicación de cuales han sido elegidos y de todos los componentes que lo forman. Se exponen además las ecuaciones matemáticas equivalentes.

Una vez resueltos estos modelos se continúa con el punto cinco donde básicamente se exponen, se analizan y se tabulan los resultados obtenidos. Este capítulo es la base para que en el seis se desarrollen las conclusiones con respecto a los objetivos que nos planteamos y se expongan diversas líneas que pueda seguir este estudio en un futuro como pueden ser mejoras o ampliaciones.

Finalmente se han incluido cuatro anexos donde se exponen los datos con los que se ha trabajado en el modelo, la programación que se ha realizado en el software informático Lingo para la resolución de dichos modelos, los valores de cada variable de salida que tendrían que haber alcanzado las unidades ineficientes para alcanzar la eficiencia y las proyecciones de los jugadores sobre el resto.

2 SITUACIÓN DE MERCADO

2.1 Historia de La Liga y formato actual

Este proyecto está basado en el estudio de jugadores que participan en el Campeonato Nacional de Liga de Primera División de España, comúnmente conocida como La Liga, y como tal resulta interesante realizar una breve introducción explicando cómo ha evolucionado hasta la actualidad, además de una descripción de la misma a nivel económico, empresarial y social.

Para comenzar nos remontaremos al año 1928 donde, por primera vez, se celebraría esta competición. Esta primera edición contó con un total de 10 participantes, de los cuales el FC Barcelona resultó campeón. A partir del año 1934 esta liga pasaría a contar con 12 equipos para posteriormente registrar su único parón histórico desde el año 1936 al 1939, coincidiendo con la guerra civil española.

En la temporada 1984-85 se produjo la reestructuración más importante de la competición al ceder sus competencias la Real Federación Española de Fútbol (RFEF), encargada de la organización del torneo desde su creación, a la nueva Liga Nacional de Fútbol Profesional (LFP).

Dos años más tarde se introdujo un nuevo formato de competición basado en un sistema de play-off al finalizar la liga regular, donde los 18 clubes participantes se dividieron en tres grupos. Este sistema solo se implementó esa temporada y derivó, a partir del año siguiente, en el formato de competición que conocemos actualmente con 20 participantes. En la temporada 1995/96 las victorias pasaron a valer 3 puntos en vez de los 2 que valían hasta entonces, manteniéndose el empate en 1 y la derrota en 0.

En la actualidad, como ya hemos comentado, esta competición cuenta con 20 equipos que disputan 38 jornadas por temporada, jugando dos partidos con el resto de participantes, uno de ida y otro de vuelta. La clasificación final queda determinada por los puntos obtenidos por cada equipo durante estas 38 jornadas, siendo el ganador aquel equipo que más puntos consiga.

Las cuatro primeras posiciones a final de temporada dan derecho a una plaza en la Liga de Campeones (máxima competición continental de clubes de fútbol a nivel Europeo) de la próxima campaña, teniendo que jugar el cuarto clasificado una fase previa de la misma. A su vez el quinto y sexto clasificado logran clasificarse para la Liga Europa de la UEFA (segunda máxima competición continental de clubes de fútbol a nivel Europeo). Por último, los tres últimos clasificados descienden de categoría a la Segunda División de España.

2.2 Nivel deportivo

En lo deportivo, La Liga está considerada la mejor del mundo según la Federación Internacional de Historia y Estadística del Fútbol (IFFHS) desde el año 2010. Esta consideración queda reflejada en los resultados recientes de sus clubes en competiciones europeas (de los 27 últimos títulos europeos que se jugaron, 19 fueron ganados por clubes españoles) y en los reconocimientos individuales a los jugadores que participan en ella (desde el 2009 ganan el Balón de Oro o FIFA Balón de Oro, máximo premio a nivel individual, jugadores participantes en La Liga española).

2.3 Nivel empresarial y económico

Cabe destacar que de los 55 equipos que han participado en alguna ocasión en esta competición tan solo 4 de ellos se mantienen como entidades deportivas: Osasuna, Real Madrid, FC Barcelona y Athletic de Bilbao, convirtiéndose el resto en sociedades anónimas.

En términos económicos La Liga genera en la actualidad el 1,37% del PIB nacional, más de 4100 millones de euros en impuestos y un impacto tremendo en el mercado laboral del país al crear 184.626 puestos de trabajo. Además de todo ello produce unos ingresos adicionales de casi 4000 millones de euros en otros sectores como pueden ser el turismo, la restauración o la hotelería.

Como ya hemos comentando en lo deportivo La Liga no tiene rival, pero en lo financiero, la Premier League o primera división inglesa, está considerada la mejor del mundo si sólo tenemos en cuenta competiciones futbolísticas. Pese a ello la brecha entre ambas se está estrechando en estos últimos años gracias al crecimiento de la competición española.

Para entender la magnitud económica de esta competición se expone el reparto de ingresos por derechos televisivos durante La Liga 2017/2018:

Tabla 2.1 Reparto televisivo La Liga 2017/2018

	Ingresos (millones €)
Athletic club	73,2
CD Leganés S.A.D	43,3
Club Atlético de Madrid S.A.D	110,6
Deportivo Alavés S.A.D	46,1
FC Barcelona	154,0
Getafe CF S.A.D	44,5
Girona FC S.A.D	43,3
Levante UD S.A.D	45,1
Málaga CF S.A.D	53,5
RCD Espanyol de Barcelona S.A.D	52,4
Real Betis Balompié	52,9
Real Club Celta de Vigo S.A.D	52,9
Real Club Deportivo de la Coruña S.A.D	46,0
Real Madrid CF	148,0
Real Sociedad de Fútbol S.A.D	61,5
SC Éibar S.A.D	46,3
Sevilla FC S.A.D	74,0

UD Las Palmas S.A.D

Valencia CF S.A.D

Villarreal CF S.A.D

46,8
65,7
65,5
TOTAL = 1325,8 millones €

Durante esta temporada se repartieron la elevada cantidad de 1325,8 millones de euros solo en ingresos por los derechos televisivos, unos derechos que se reparten de manera desigual a los clubes que forman parte de la competición.

Para observar con más claridad esta desigualdad se expone el siguiente diagrama de sectores donde se recoge el porcentaje de los ingresos totales televisivos que se reparte cada equipo durante la temporada en estudio.

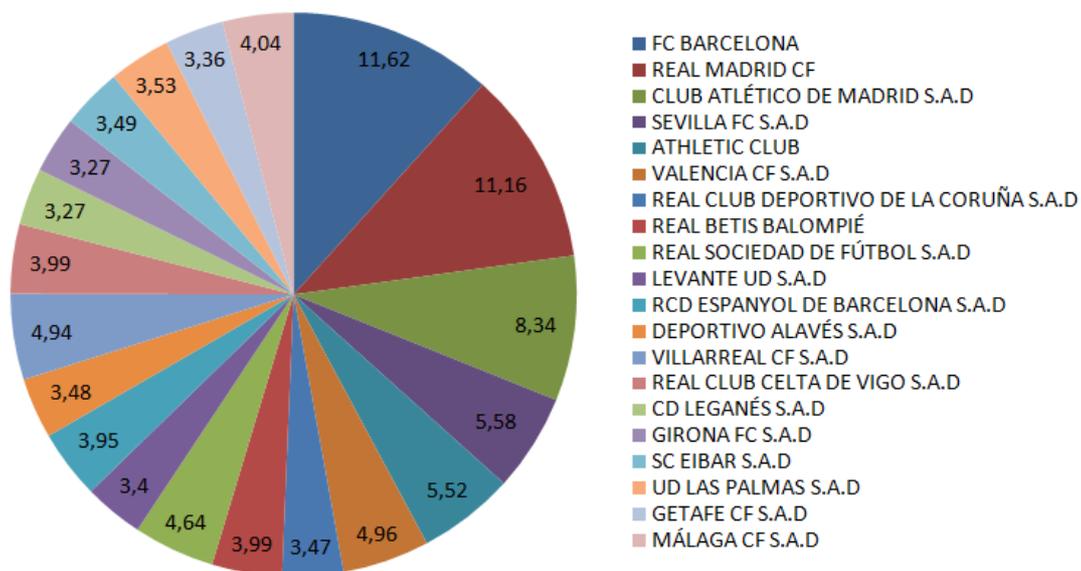


Ilustración 2.1 Diagrama de sectores del reparto televisivo porcentual La Liga 2017/2018

Se llega a la conclusión de que porcentualmente el Barcelona, el Real Madrid y el Atlético de Madrid se llevan más del 30% de los ingresos dejando apenas un 70 % para el resto de los 17 participantes.

En su máximo competidor a nivel de competición futbolística, la Premier League, estas desigualdades no existen debido a un reparto mucho más equitativo de estos ingresos. Esto hace que para muchos equipos de La Liga con menos recursos les sea mucho más difícil competir contra los grandes clubes de su misma competición e incluso con equipos peores clasificados en otras ligas que obtienen más ingresos por este reparto televisivo.

La Liga está considerada la quinta competición con un mayor coste de derechos de televisión a nivel deportivo mundial tras la Liga Nacional de Fútbol Americano (NFL), la Premier League, la Liga Profesional de Béisbol (MLB) y la Asociación Nacional de Baloncesto (NBA).

Además, resulta interesante reflejar los datos referidos a los límites salariales de los equipos (en millones de euros).

Tabla 2.2 Límites salariales La Liga 2017/2018

	Límite salarial (millones €)
Athletic club	68,576
CD Leganés S.A.D	34,686
Club Atlético de Madrid S.A.D	237,767
Deportivo Alavés S.A.D	37,875
FC Barcelona	507,239
Getafe CF S.A.D	28,918
Girona FC S.A.D	31,146
Levante UD S.A.D	32,299
Málaga CF S.A.D	53,559
RCD Espanyol de Barcelona S.A.D	60,965
Real Betis Balompíe	65,459
Real Club Celta de Vigo S.A.D	40,936
Real Club Deportivo de la Coruña S.A.D	40,743
Real Madrid CF	499,698
Real Sociedad de Fútbol S.A.D	64,835
SC Éibar S.A.D	33,212
Sevilla FC S.A.D	159,636
UD Las Palmas S.A.D	29,448
Valencia CF S.A.D	113,301
Villarreal CF S.A.D	87,922
	TOTAL = 2.228,220 millones €

Este límite salarial no tiene por qué ser utilizado por completo, aunque en la mayoría de casos se consume de manera íntegra. Engloba gastos del primer equipo, tanto jugadores como cuerpo técnico, y gastos en cantera y otras secciones.

Por último, expondremos el valor de mercado de las plantillas para conocer el valor económico de los activos deportivos de los clubes.

Tabla 2.3 Valor de mercado de las plantillas de La Liga 2017/2018

	Valor de mercado de la plantilla (millones €)
Athletic club	167,60
CD Leganés S.A.D	40,70
Club Atlético de Madrid S.A.D	511,00
Deportivo Alavés S.A.D	38,05
FC Barcelona	696,50
Getafe CF S.A.D	34,85
Girona FC S.A.D	28,50
Levante UD S.A.D	27,25
Málaga CF S.A.D	61,15
RCD Espanyol de Barcelona S.A.D	69,90
Real Betis Balompié	91,10
Real Club Celta de Vigo S.A.D	110,40
Real Club Deportivo de la Coruña S.A.D	66,70
Real Madrid CF	714,80
Real Sociedad de Fútbol S.A.D	154,70
SC Éibar S.A.D	64,60
Sevilla FC S.A.D	222,50
UD Las Palmas S.A.D	95,70
Valencia CF S.A.D	154,10
Villarreal CF S.A.D	172,20
	TOTAL = 3522,3 millones €

El crecimiento de esta competición está directamente relacionado con su expansión internacional. La audiencia global alcanza los 2600 millones de espectadores repartidos en 180 países. Además, gracias a estrategias digitales basadas principalmente en la difusión en redes sociales, junto con la apertura de oficinas comerciales en localizaciones como EE UU, China o la India hacen que cada vez más el producto de esta competición se consuma de manera global y en distintos formatos.

2.4 Nivel social

Atendiendo al impacto social de La Liga cabe destacar el crecimiento en la asistencia a los estadios de primera división en estos últimos años:

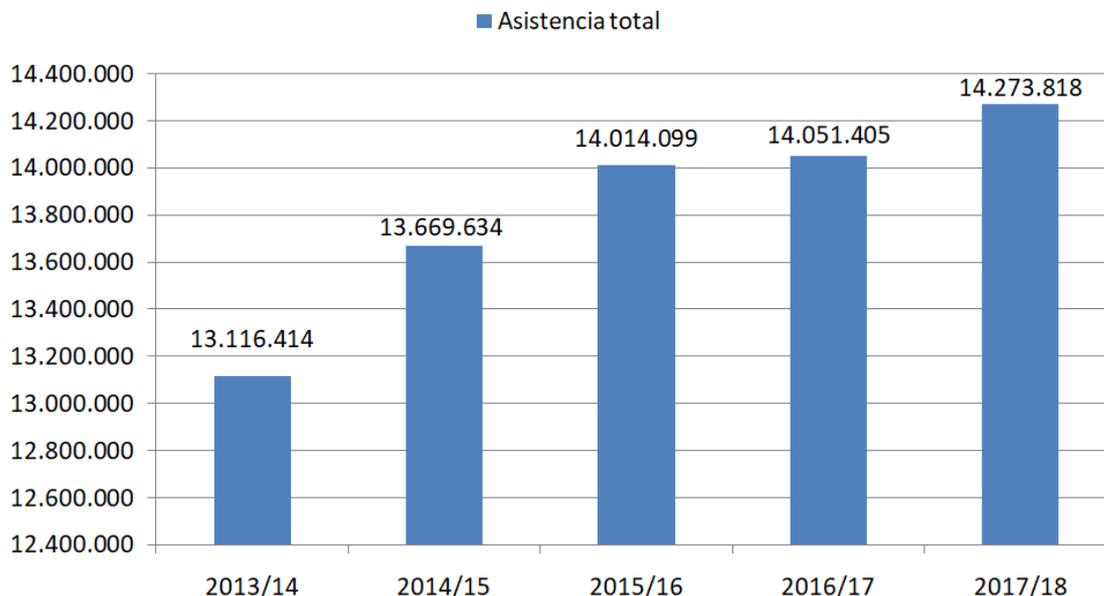


Ilustración 2.2 Asistencia anual total La Liga

Esta última temporada ha registrado el récord histórico de asistencia en los estadios de primera división, aumentando en un 1,58% los registros de la anterior y registrando un total de 14.273.818 espectadores.

Y es que además de la asistencia a los estadios la mayoría de los españoles (un 58% de los abonados a la TV de pago de un total de 6,6 millones) cuentan con paquetes que incluyen contenido de La Liga. En definitiva, el fútbol en España, y más concretamente La Liga, es el deporte rey teniendo un impacto social inmenso sobre sus ciudadanos.

Este estudio de la situación de mercado de La Liga española se ha realizado obteniendo información de sitios webs oficiales y contrastados: la página oficial de La Liga, la de BBC (servicio público de televisión y radio de Reino Unido) y la del diario español Expansión.

3 METODOLOGÍA DEA

3.1 Introducción

Este capítulo nos va a servir de base sobre la explicación de la metodología que vamos a implementar en este proyecto, el análisis por envoltura de datos o DEA. Comenzaremos con una breve reseña histórica de cómo surgió esta metodología. Posteriormente nos centraremos en los conceptos básicos necesarios para entenderla y en los modelos que la componen, con su correspondiente notación matemática. Por último, se finalizará con la exposición de ejemplos de la utilidad de su uso a lo largo de la historia.

3.2 Historia de la metodología

La finalidad que dio origen al análisis por envoltura de datos fue la necesidad de valorar o medir lo bien que está trabajando o funcionando una organización, de tal manera que se pueda obtener un valor que de una forma cuantitativa nos permita obtener dicha información.

Así los antecedentes sobre el origen de esta metodología datan de finales de los años setenta, más concretamente en el año 1978 cuando Charnes, Cooper y Rhodes, inspirados en la ideología de Farrel, publicaron Charnes et al. (1978) En este estudio evaluaron mediante una serie de modelos de programación lineal adaptados al escenario, los programas de educación de diversas escuelas públicas en EE.UU que funcionaban de manera similar atendiendo a diversos parámetros de entrada y salida. Para esta evaluación se hicieron valer del concepto de eficiencia como el cociente entre producción y recursos.

Este problema lo presentaron en la conferencia de Edward Rhodes “Data Envelopment Analysis and Approaches for Measuring the Efficiency of Decision-Education”, la cual se consideró la concepción de esta nueva metodología.

Este primer modelo de DEA se denominó DEA-CCR, en honor a las siglas de sus autores, y fue seguido en 1984 por el modelo DEA-BBC expuesto en la publicación Banker et al. (1984). Estas investigaciones dieron pie, gracias a la facilidad de resolución y la simplicidad de los modelos, a la aparición de nuevos modelos que trabajan distintos escenarios y a sus correspondientes estudios y aplicaciones.

3.3 Conceptos básicos

Para comenzar es necesario hablar del concepto de productividad que usaron Charnes, Cooper y Rhodes para evaluar las diversas organizaciones en el primer modelo DEA. Esta productividad fue introducida anteriormente por Farrell en su libro Farrell MJ. (1957) y se define con el siguiente cociente:

$$Productividad = \frac{Producción\ generada}{Recurso\ consumido} = \frac{Salida}{Entrada} \quad (3.1)$$

Cada organización que se va a estudiar se denomina DMU (Decision Making Unit) o unidad productiva y como se puede observar en la fórmula utiliza o consume uno o varios recursos para transformarlos y producir uno o varios productos.

A estas unidades productivas se les atribuye el atributo de decisorias ya que solo tiene sentido hablar de evaluación de la productividad si estas unidades productivas poseen la capacidad de poder variar la cantidad de recursos que se utilizan o la cantidad de resultados que se producen.

Esta fórmula se considera completa o suficiente cuando estamos hablando de una unidad productiva que trabaja con una sola entrada y una sola salida. En la realidad nos solemos encontrar con más de una entrada o salida lo que provoca que la evaluación de la productividad se torne más compleja.

Para estos casos se debe comenzar determinando los factores necesarios para la obtención de los objetivos de la DMU, es decir, los recursos y productos que son esenciales para su adecuado estudio. Una vez hecho esto se procede a realizar una medición de cada entrada elegida con la finalidad de conocer la utilización de dicho recurso. Este proceso no siempre es sencillo, ya que algunas de estas entradas pueden ser muy complejas de evaluar, por lo que es indispensable elaborar un estudio previo y meditado que nos ayude a que esta selección de recursos sea la correcta.

Una vez finalizado este análisis se pasa a la evaluación de la productividad. Esta evaluación debe determinar un escalar y por lo tanto se requiere de una única fórmula que reúna todas las entradas y todas las salidas de la DMU.

En esta etapa se han de agrupar recursos y resultados que pueden tener naturalezas muy distantes, teniendo unidades de medida distintas en la misma fórmula. Para corregir este problema se utilizan los conceptos de entrada y salida virtual, que consisten en la ponderación de las entradas y salidas para agregarlas de manera escalada a la expresión obteniendo un resultado adimensional.

$$Productividad = \frac{\text{suma ponderada de las salidas}}{\text{suma ponderada de los recursos}} \quad (3.2)$$

Así pues, teniendo en cuenta que x_{ij} expresa la cantidad de recurso 'i' consumido por la unidad productiva 'j' y de igual forma y_{kj} expresa la cantidad de producto 'k' que genera la unidad 'j', nos quedan las siguientes expresiones:

$$Entrada\ virtual\ _j = \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \quad (3.3)$$

$$Salida\ virtual\ _j = \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} \quad (3.4)$$

Donde 'm' hace referencia al número de entradas consideradas y 'p' al número de salidas. Además, tanto u_{ij} como v_{kj} representan los pesos correspondientes a cada entrada y salida respectivamente.

Utilizando estos nuevos conceptos se redefine el concepto de productividad como:

$$Productividad\ _j = \frac{Salida}{Entrada} = \frac{Producción\ generada}{Recurso\ consumido} = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \quad (3.5)$$

A la hora de medir esta productividad no es provechoso estudiar una sola DMU. Este dato solo, sin englobarlo ni compararlo con la productividad de otras DMUs, es un dato vacío de sentido. Por ello esta metodología no busca obtener la eficiencia de una unidad productiva, sino determinar cómo funciona con respecto al resto teniendo en cuenta las mismas entradas y salidas.

Para ello es necesario utilizar el concepto de eficiencia relativa que se define del siguiente modo:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_o} = \frac{Salida\ virtual_j / Entrada\ virtual_j}{Salida\ virtual_o / Entrada\ virtual_o} \quad (3.6)$$

Podemos observar que la 'j' indica la unidad productiva que estamos estudiando y 'o' aquella que se toma como referencia. Desarrollando esta expresión atendiendo a la definición de productividad anterior obtenemos la siguiente:

$$Eficiencia_j = \frac{\frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}}{\frac{\sum_{k=1}^s v_{ko} y_{ko}}{\sum_{i=1}^m u_{io} x_{io}}} \quad (3.7)$$

Al poder variar la unidad productiva que se toma como referencia podemos obtener varios tipos de eficiencias relativas:

- ❖ Eficiencia global: Cuando utilizamos como unidad de referencia la unidad de mayor valor de productividad entre todas las posibles.
- ❖ Eficiencia técnica: Se toma como referencia, al igual que la anterior la unidad que tenga mayor valor de productividad, pero en este caso teniendo en cuenta solo las que tengan el mismo tamaño que la que estamos evaluando.
- ❖ Eficiencia de escala: Es la relación existente entre las dos eficiencias anteriores:

$$Eficiencia\ de\ escala_j = \frac{Eficiencia\ global_j}{Eficiencia\ técnica_j} \quad (3.8)$$

Respecto a la eficiencia de escala cabe destacar que cuando una unidad productiva tiene un valor de 1, es decir cuando su eficiencia global y eficiencia técnica son iguales, quiere decir que la unidad evaluada es del mismo tamaño que la unidad de mayor productividad. Esta circunstancia se denota como MPSS (siglas de Most Productive Scale Size), confirmando que esta unidad tiene el conocido como Tamaño de Escala Más Productivo.

Además, es útil mencionar que la eficiencia relativa de cualquier DMU, por definición, siempre será menor o igual que uno. En el caso que una unidad productiva tenga una eficiencia relativa menor que uno se le denomina ineficiente, confirmándose que existe alguna otra unidad productiva que posee mayor eficiencia. Por tanto, si una DMU posee una eficiencia relativa igual a la unidad se denomina como eficiente atendiendo a la idea de Farrell.

Sea cual sea el tipo de eficiencia que estemos evaluando, la productividad de la DMU tomada como referencia es uno, ya que esta es eficiente. Simplificando la fórmula anterior, obtenemos finalmente la expresión de eficiencia que se utilizará de aquí en adelante:

$$Eficiencia_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \quad (3.9)$$

Por último, tras conocer todos estos conceptos básicos y como previo antes de profundizar en los diversos modelos que componen la metodología DEA, resulta interesante revisar las ventajas y desventajas más significativas que presenta dicha metodología.

En primer lugar, DEA cuenta con ventajas bastante interesantes como puede ser el carácter no paramétrico que implica su flexibilidad o utilización de manera muy genérica, es decir, su aplicación en multitud de casos, contextos y sectores. También nos proporciona una medida de eficiencia relativa, por lo que, al obtener información individual de cada unidad productiva nos ofrece la posibilidad de indagar en los orígenes de la eficiencia o ineficiencia de la misma. Conociendo esto es posible calcular targets u objetivos de mejora.

Frente a estas ventajas nos podemos encontrar con algunos puntos débiles tales como la necesidad de contar con un número de DMUs suficientes para que el estudio sea adecuado, el requisito de que los recursos sean cuantitativos y de que los modelos elegidos para un contexto específico sea el correcto para evitar la distorsión de resultados.

3.4 Conceptos previos

Como hemos citado con anterioridad la metodología DEA surgió como tal en 1978 y desde entonces se han realizado millares de publicaciones, introduciendo diversos modelos y diferentes aplicaciones de la misma. A continuación, se expondrán los modelos más significativos, teniendo en cuenta que previamente se hace necesario conocer unos conceptos que dan sentido a estos modelos.

Estos conceptos son los retornos de escala constantes, retornos de escala variables, orientación de entrada y orientación de salida. La comprensión de estas ideas es un requisito para llegar a entender los diversos modelos que se desarrollaran en este trabajo.

Podemos clasificar los modelos atendiendo por un lado el tipo de retorno que poseen y por otro su orientación, por lo que para explicarlos con mayor claridad los agruparemos según estos dos criterios sabiendo que están necesariamente relacionados. Veremos en primer lugar los retornos de escala.

3.4.1 Retorno de escala constante o CRS

Cuando hablamos retorno de escala constante tenemos en cuenta que cualquier unidad productiva, independientemente de su tamaño, puede funcionar con una productividad igual que las DMUs eficientes.

Las DMUs posibles en este tipo de retorno son aquellas pertenecientes al siguiente conjunto:

$$T_{CRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0, \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \vec{\lambda}Y \geq \vec{y}\} \quad (3.10)$$

Donde X e Y son las matrices de entradas y salidas, respectivamente, observadas en las unidades de nuestro problema y ambas poseen tantas filas como DMUs. La matriz X posee tantas columnas como entradas hayamos considerado en nuestro problema y análogamente la matriz Y posee tantas como salidas. Además λ hace referencia a un vector que está formando por tantas componentes como DMUs existan en el problema.

La eficiencia que se calcula en este tipo de modelos es la global y todas las DMUs toman como referencia a las de mayor productividad de entre todas las posibles que hemos mencionado anteriormente. A continuación, observamos la representación de esta tecnología CRS utilizando como ejemplo un problema conformado por una única entrada y una única salida.

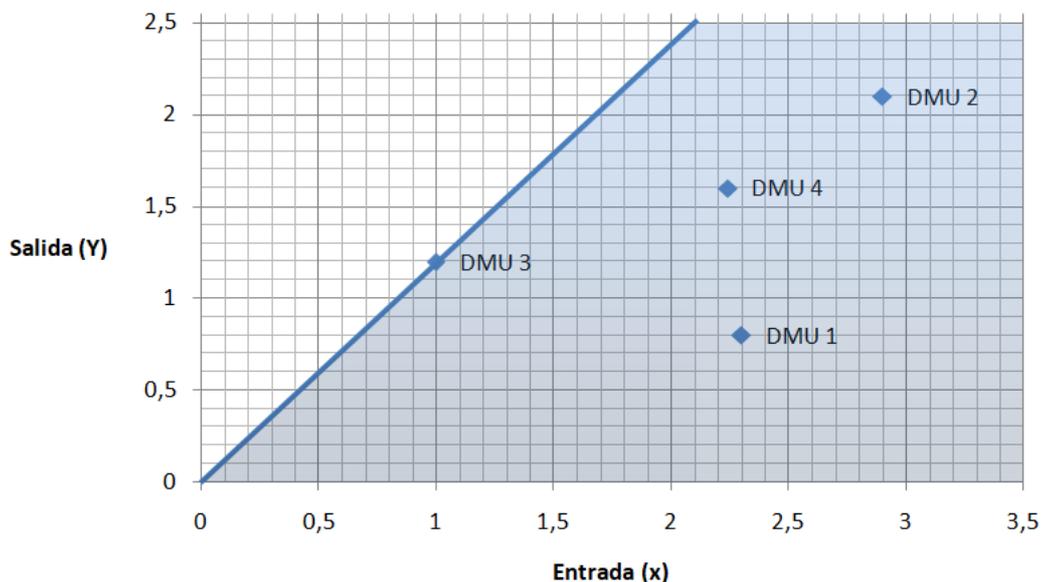


Ilustración 3.1 Representación gráfica de la tecnología CRS

En esta figura observamos la frontera eficiente representada como la línea azul, y el conjunto T_{CRS} que corresponde a la zona sombreada. Este conjunto se expande hasta al infinito. Los puntos azules se corresponden a las DMUs que estamos estudiando.

En este tipo de retorno de escalas la unidad productiva más eficiente será la que genere más productos consumiendo menos recursos. Se corresponde a la DMU cuya pendiente de la recta que une el punto que la representa y el origen de mayor valor. Por tanto, analizando la figura anterior se puede afirmar que la DMU más eficiente es la DMU 3.

3.4.2 Retorno de escala variable o VRS

A diferencia del retorno de escala constante, el variable supone que hay unidades productivas que, debido a que poseen un tamaño diferente, no pueden alcanzar la capacidad productiva de las unidades más grandes.

El conjunto de puntos posibles para este tipo de retorno de escala es:

$$T_{VRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}): \exists \vec{\lambda} \geq 0, \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \vec{\lambda}Y \geq \vec{y}; \vec{\lambda}\vec{e}^T = 1\} \quad (3.11)$$

En este caso la suma de las componentes del vector λ tiene que ser igual a la unidad y en vez de calcular la eficiencia global, se trabaja con la eficiencia técnica. Al utilizar la técnica se relaja las condiciones de eficiencia permitiendo que existan un mayor número de DMUs eficientes.

La siguiente figura representa un ejemplo de tecnología VRS para un problema que posee una única entrada y una única salida:

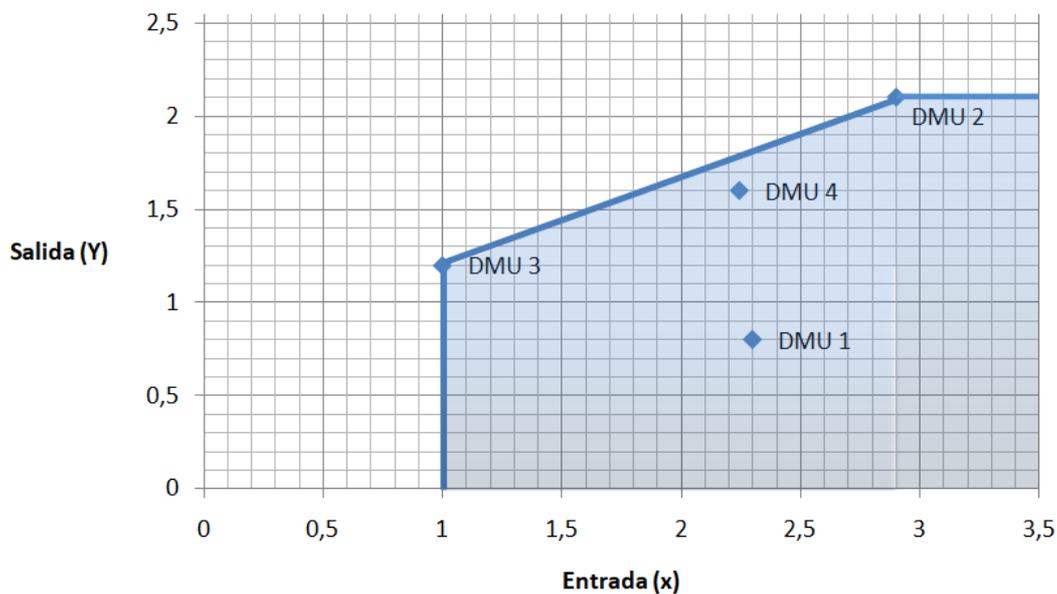


Ilustración 3.2 Representación gráfica de la tecnología VRS

La línea azul vuelve a representar la frontera eficiente, en este caso de la tecnología VRS. Para este retorno de escala vemos que existen dos unidades eficientes, frente a la única que existía en CRS, la DMU 3 y 2 que se encuentran en la frontera eficiente. La zona sombreada de nuevo delimita el conjunto de unidades admisibles, que también se expande hasta el infinito, y los puntos representan las DMUs estudiadas en este ejemplo.

Entendidos estos dos retornos de escala finalizaremos los conceptos previos definiendo las orientaciones de entrada y salida.

3.4.3 Orientación de entrada

Hace referencia al hecho de que una unidad productiva, gracias a la reducción de la cantidad de recurso que consume, alcance la productividad de aquella con la que se compara.

3.4.4 Orientación de salida

Hace referencia al hecho de que una unidad productiva, gracias al aumento de la cantidad de productos que genera, alcance la productividad de aquella con la que se compara.

3.5 Desarrollo de modelos DEA

Una vez comprendida la base de conceptos necesaria, comenzamos el desarrollo de los modelos de DEA más significativos. En primer lugar, se explicarán aquellos que utilizan el retorno de escala constante, conocidos como el modelo RATIO y el modelo CCR en sus dos orientaciones: CCR-INPUT u orientación de entrada y el CCR-OUTPUT u orientación de salida.

Estos modelos toman como DMU de referencia aquella que posee el mayor valor de productividad entre todas las observadas.

3.5.1 Modelo Ratio

Como vimos al inicio de este proyecto, la metodología DEA necesita de un valor como resultado del estudio de la eficiencia de una DMU y para ello es necesario el adimensionamiento del conjunto de entradas y de salidas utilizadas en el estudio. Además, comentamos que para ello se hacía obligatorio el uso de una ponderación para poder agregar entradas y salidas de distinta naturaleza, ofreciendo este modelo la libertad para elegir los pesos de cada una de ellas.

De esta manera, y teniendo en cuenta que una vez elegidos estos pesos serán utilizados por el resto de unidades, podemos elegir sus valores de tal forma que se optimice la eficiencia de cada unidad productiva.

En definitiva, este modelo pretende comparar la productividad de cada unidad con el resto que se encuentran dentro del estudio, eligiendo en cada comparación los pesos que beneficien en términos de eficiencia a cada unidad.

A nivel matemático este modelo consiste en la resolución de tantos problemas como unidades productivas estemos estudiando (n representa este valor) para obtener, como resultado, la eficiencia que se quiere calcular.

Este modelo se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \left[e_j = \frac{\sum_{k=1}^p v_{kJ} y_{kJ}}{\sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{iJ}} \right] \\ & \text{s.a.} \\ & \frac{\sum_{k=1}^p v_{kJ} y_{kJ}}{\sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{iJ}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & v_{kJ} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & u_{iJ} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \tag{3.12}$$

ε es un número real estrictamente positivo, que representa una constante no-arquimediana, y obliga a que ningún peso pueda ser nulo. La función objetivo es un cociente, no lineal, y es la encargada de elegir la ponderación de las entradas y salidas de tal manera que maximice la eficiencia de la DMU que está estudiando. La variable que está en estudio se denota como J .

Cabe destacar las restricciones que dan sentido a este modelo. Existe una restricción para cada unidad productiva y limita su eficiencia para que nunca sea mayor que uno. La razón por la que se tiene que tener en cuenta estas restricciones es el uso de la ponderación ya que, cuando los pesos intentan que una DMU tenga la mayor eficiencia posible, debemos de asegurarnos que esta eficiencia no sea inadmisibles (mayor que uno).

Por último y como traducción de los resultados obtenidos al resolver los n problemas planteados, nos encontramos con un subconjunto denominado E que contiene aquellas DMUs cuyas eficiencias tienen un valor igual a la unidad, cumpliendo la restricción que acabamos de analizar con signo de igualdad:

$$\frac{\sum_{k=1}^p v_{kr}^* y_{kr}}{\sum_{i=1}^m u_{ir}^* x_{ir}} = 1 \quad r \in K \tag{3.13}$$

El resto de DMU's que no pertenecen a este subconjunto se consideran ineficientes al tener su eficiencia un valor menor que uno, pudiéndose obtener dicha ineficiencia como la diferencia entre la unidad y su eficiencia: $(1-e_j)$. Esta ineficiencia de una unidad productiva se debe a que existe al menos otra DMU que, utilizando los mejores pesos posibles para primera, es más eficiente.

3.5.2 Modelo CCR-Input

Tras estudiar el modelo RATIO, se puede deducir su complejidad de resolución debido al cociente existente en su función objetivo, que convierte el modelo en un problema no lineal. Debido a esto aparece en escena el modelo CCR que pretende solucionar esta dificultad mediante la linealización equivalente del modelo anterior.

Así pues, se sustituyen los cocientes que forman el modelo por expresiones lineales teniendo en cuenta las siguientes consideraciones: maximizar un cociente, manteniendo su denominador constante, equivale a hacer máximo su numerador y que el tener un cociente cuyo valor es menor que uno se traduce el que el denominador es mayor que el numerador.

Sabiendo además que los vectores de pesos (v_{kr}^*, u_{ir}^*) es solución del modelo RATIO, también lo son los pesos (av_{kr}^*, au_{ir}^*) , obteniéndose infinitas soluciones óptimas alternativas. Para reducirlas a un par de vectores de pesos se incluye la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1$$

Con todo ello nos queda el siguiente modelo lineal:

$$\text{Max} \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj}$$

s.a.

$$\sum_{k=1}^p v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m \quad v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (3.14)$$

Este modelo es conocido como la forma multiplicadora, donde se obtiene un problema lineal con $n+1$ restricciones y $p+m$ cotas. Las primeras n restricciones representan la linealización de la condición anteriormente estudiada en el modelo RATIO que hacía referencia a que todas las DMUs tienen que tener una eficiencia menor o igual a uno. Además, se añade la restricción que acabamos de ver que se encarga de reducir el número de soluciones alternativas de los pesos.

Normalmente se utiliza la forma dual de este modelo para su resolución, conocida como la forma envolvente del modelo:

$$\text{MIN} \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{ij} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kj} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

(3.15)

En este modelo dual nos encontramos con n variables λ_j , que se corresponden con las restricciones del problema primal, otra variable θ_j que es la restricción adicional del mismo y las variables de holgura t_k y s_i correspondientes a las $p+m$ cotas existentes.

Para resolver este modelo dual se deben de realizar dos fases. En la primera se resuelve el siguiente modelo para obtener θ_j^* :

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN } \theta_j \\
 \text{s.a.} & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq \theta_j x_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j \geq y_{kj} \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & \lambda_j, \geq 0 \quad \forall j \\
 & \theta_j \text{ libre}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Conocido el valor de θ_j^* podemos resolver, para finalizar, la segunda fase:

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN } - \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\
 \text{s.a.} & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j^* x_{ij} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kj} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\
 & s_i, t_k \geq 0 \quad \forall i, k \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Lógicamente el valor de la función objetivo en el primal y en el dual es el mismo para el óptimo de tal manera que:

$$e_j^* = \theta_j^* - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k^* + \sum_{i=1}^m s_i^* \right] = \sum_{k=1}^p v_{kj}^* y_{kj} \tag{3.18}$$

Gráficamente la resolución de este modelo para un ejemplo de una única entrada y salida se representa en la siguiente figura:

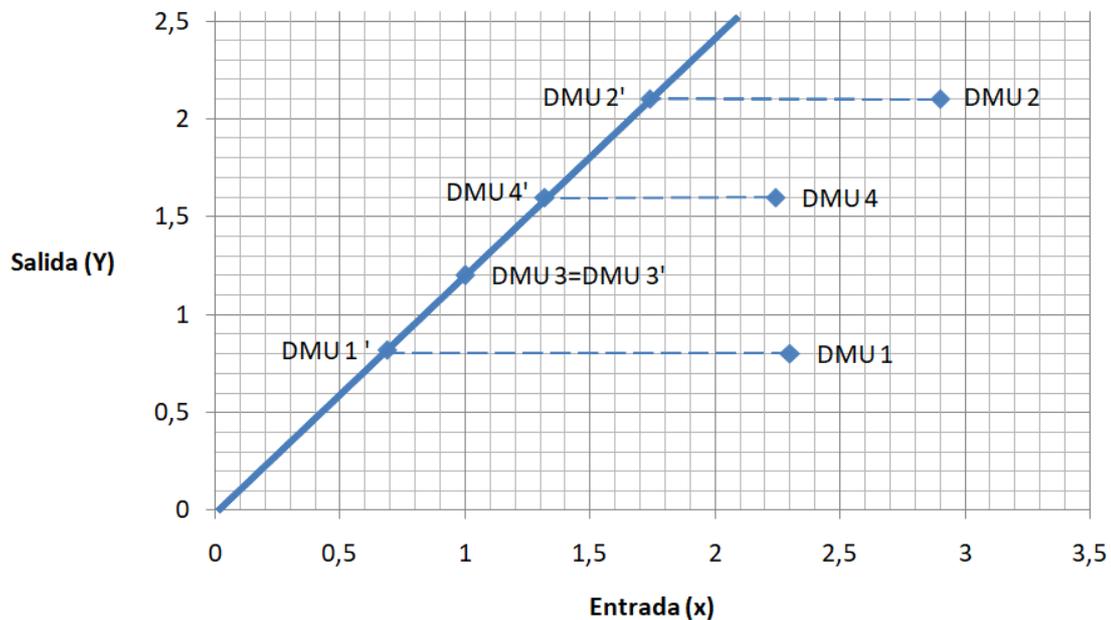


Ilustración 3.3 Representación gráfica resolución CCR-INPUT

Una vez resuelto el problema obtenemos las unidades virtuales de cada unidad productiva. Estas unidades virtuales están representadas con el superíndice prima y no se encuentran dentro de las unidades productivas observadas en el estudio, es decir, una unidad virtual es unidad productiva que realmente no existe pero que se utiliza en la tecnología considerada para representar aquella unidad en la que podría convertirse cualquier DMU si modifica sus entradas y salidas.

En este modelo las proyecciones o unidades virtuales en las que cada DMU debería convertirse para alcanzar la eficiencia se generan suponiendo una reducción de sus entradas, de ahí la denominación de este modelo como input u orientación de entrada.

En este ejemplo observamos que la DMU 3 es la única eficiente ya que se encuentra sobre la línea azul que une el origen con las coordenadas de la misma y que representa la frontera eficiente que envuelve a todas las unidades. De esta idea surge el nombre de esta metodología, Análisis por Envoltura de Datos, siendo la frontera eficiente el lugar geométrico de las unidades con eficiencia igual a uno. Además, podemos observar que es eficiente al ser la única donde coinciden las coordenadas de la unidad productiva con su unidad virtual.

En este modelo las proyecciones o unidades virtuales en las que cada DMU debería convertirse para alcanzar la eficiencia se generan suponiendo una reducción de sus entradas, de ahí la denominación de este modelo como input u orientación de entrada.

3.5.3 Modelo CCR-Output

En este modelo a la hora de realizar la linealización del modelo RATIO, y a la inversa del CCR-Input, se mantiene constante el numerador de la expresión y se minimiza el denominador.

El modelo resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a.} & \\ & \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{rj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \sum_{k=1}^p v_{kj} y_{rj} = 1 \\ & v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

(3.19)

Donde las eficiencias calculadas en esta ocasión siempre serán mayores o iguales que uno, debido a que la función objetivo representa el inverso de las eficiencias relativas de cada unidad productiva.

Las consideraciones del CCR-Input son análogas a la de este modelo, e igualmente se suele resolver el problema dual:

$$\text{MIN } \gamma_j + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j &= x_{ij} - s_i & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j &= \gamma_j y_{kj} + t_k & k = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i, t_k &\geq 0 \quad \forall i, k \\ \lambda_j &\geq 0 \quad \forall j \\ \gamma_j &\text{ libre} \end{aligned}$$

(3.20)

Igualmente, la resolución se realiza en dos fases, obteniendo primero γ_j^* para utilizarla en la segunda fase.

Utilizando los datos del mismo problema que en el modelo anterior podemos observar la representación gráfica de su resolución para este modelo:

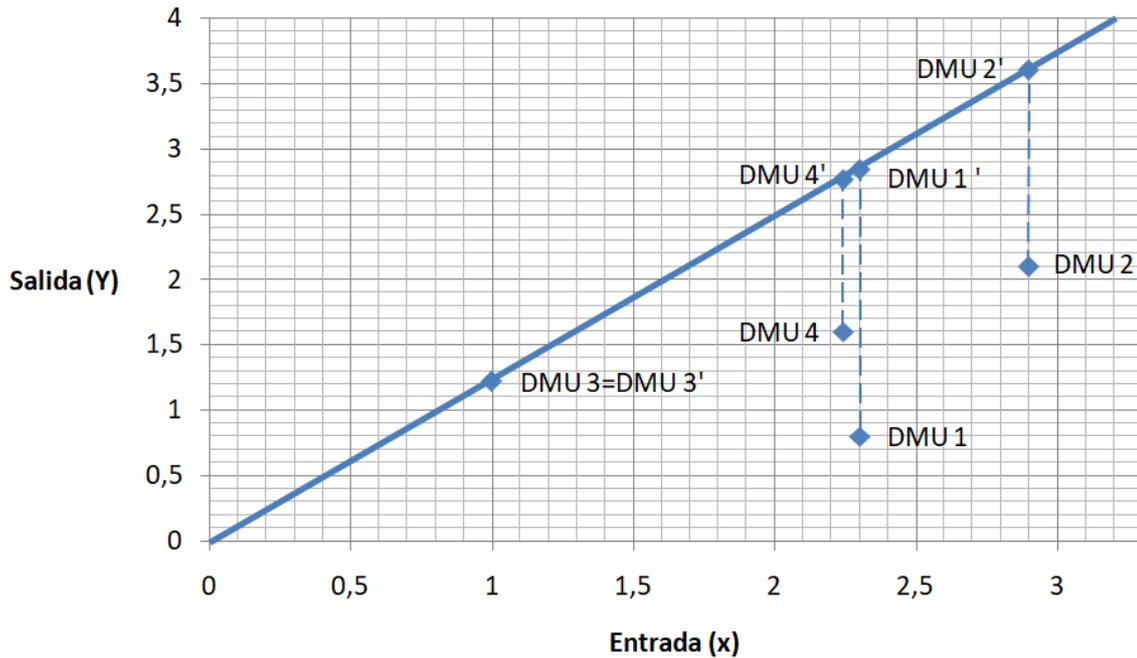


Ilustración 3.4 Representación gráfica resolución CCR-OUTPUT

A diferencia del modelo anterior, las unidades virtuales que se utilizan se generan suponiendo un aumento de sus salidas.

Una vez visto los casos con retornos de escala constante, continuamos analizando los modelos BBC-INPUT y BBC-OUTPUT, modelos planteados con retornos de escala variable.

3.5.4 Modelo BBC-Input

De nuevo tomamos como referencia el modelo RATIO linealizado, teniendo en cuenta que nos encontramos ante un modelo que está considerando los retornos de escala variables. Por ello se hace necesaria la existencia de una restricción que se encargue de que el modelo compare cada unidad productiva con aquellas que tengan su mismo tamaño, y no con todas las observadas.

Para ello se transforma la forma envolvente del modelo CCR-INPUT visto con anterioridad para obtener el siguiente modelo:

$$\text{MIN } \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right]$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{ij} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$s_i, \lambda_j, t_k \geq 0$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

(3.21)

La restricción encargada de ello es la que iguala el sumatorio de las componentes del vector λ_j a la unidad. Esto hace que la proyección de la unidad productiva en estudio quede efectuada sobre el hiperplano conformado por las unidades más productivas de su mismo tamaño.

Como consecuencia se obtienen más unidades productivas eficientes que en el modelo CCR, y por lo tanto su frontera eficiente cuenta con más unidades observadas que en los modelos de escala constante.

La representación gráfica de un ejemplo con una única entrada y salida nos ayuda a entender mejor esta idea:

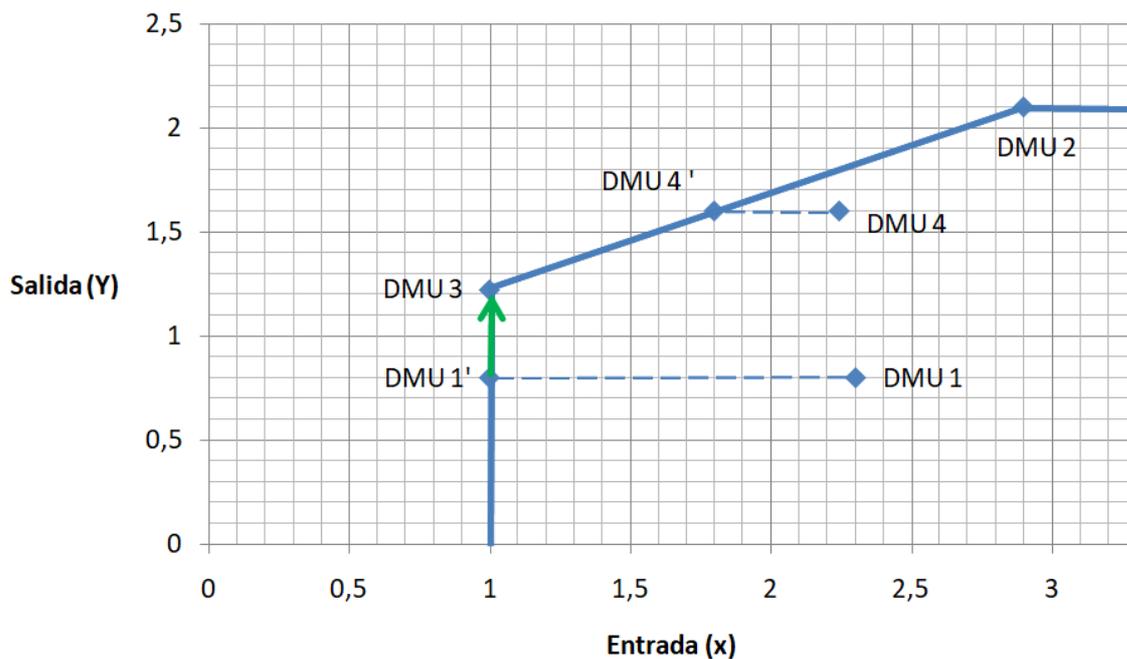


Ilustración 3.5 Representación gráfica resolución BBC-INPUT

Con los mismos datos del ejemplo del modelo CCR observamos que, además de la DMU 3, en este modelo la DMU 2 también es eficiente. La frontera eficiente queda representada por la línea quebrada azul que une estas dos unidades productivas.

Para las unidades no eficientes se representa su proyección según la orientación de entrada, DMU 1' Y DMU 4', siendo suficiente para la primera con la reducción radial de su entrada y siendo necesario para la segunda de una reducción rectangular adicional para conseguir alcanzar la frontera. Esta reducción adicional queda representada con la flecha verde.

Además, es importante conocer el concepto de “peer group” que engloba el conjunto de unidades productivas eficientes de las que la proyección de una unidad productiva es combinación lineal. En nuestro ejemplo el “peer group” de la DMU 4 está formado por las DMUs 2 y 3.

Para entender mejor la diferencia entre los modelos de retorno de escala variable y constante se observa que en este modelo BBC, de retorno variable y a diferencia del CCR, pueden existir DMUs que operen con escala de retorno creciente (IRS), constante (CRS) o decreciente (DRS). Esto quiere decir que existen unidades que se encuentran en una zona de la frontera eficiente constituida por unidades que, para lograr obtener el tamaño de la DMU con mayor productividad, deben aumentar su entrada (IRS), disminuir (DRS) o no modificarla al ser la unidad más productiva del problema (CRS).

3.5.5 Modelo BBC-Output

Con las mismas consideraciones del modelo anterior, pero aplicando la orientación de salida se obtiene el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} & \text{MIN } \gamma_j + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^p t_k + \sum_{i=1}^m s_i \right] \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{ij} - s_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \gamma_j y_{kj} + t_k \quad k = 1, 2, \dots, p \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & s_i, \lambda_j, t_k \geq 0 \\ & \gamma_j \text{ libre} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Gráficamente y para el ejemplo utilizado hasta el momento de una única entrada y salida queda representado de la siguiente manera:

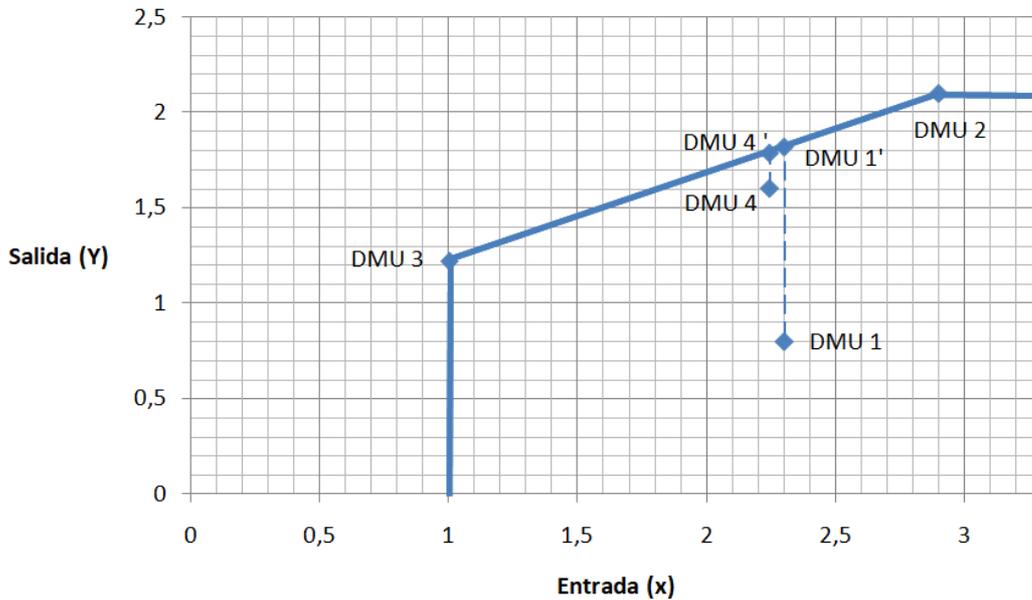


Ilustración 3.6 Representación gráfica resolución BBC-OUTPUT

La frontera eficiente se mantiene igual que el modelo anterior y las proyecciones de las DMUs 4 y 1 se obtienen mediante la amplificación de la forma radial de las salidas. En este ejemplo no es necesaria la proyección rectangular adicional de ninguna unidad productiva como vimos en el modelo anterior.

Para finalizar la explicación de los modelos CCR y BBC se exponen a modo de comparativa las representaciones gráficas sobrepuestas de sus fronteras eficientes para la orientación de entrada:

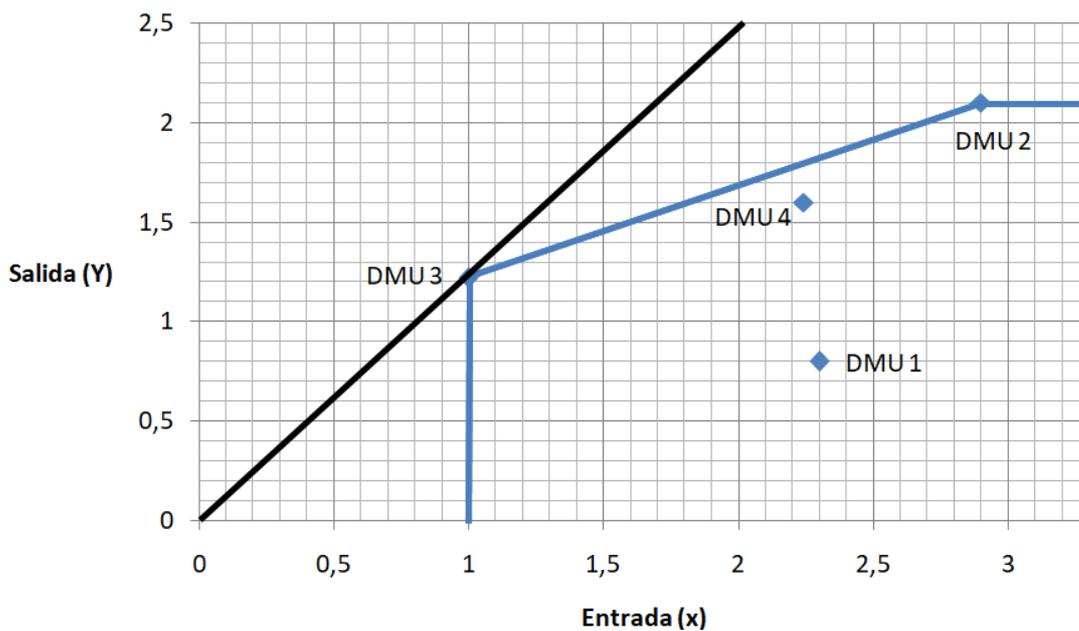


Ilustración 3.7 Comparativa modelo CCR Y BBC (input)

Comparando las gráficas obtenidas, podemos afirmar que únicamente existe un punto de la frontera eficiente que comparten los dos modelos para nuestro ejemplo, y corresponde a las coordenadas de la DMU 3, considerado como el MPSS. Para el resto de situaciones la eficiencia técnica calculada para el modelo BBC siempre será superior que la eficiencia global obtenida en el modelo CCR. Para la orientación de salida los aspectos son muy parecidos.

3.5.6 Modelo DDF

El modelo DDF, siglas de Directional Distance Function, es especialmente útil cuando existen variables de salida no deseadas en el modelo ya que nos permite aumentar las salidas deseadas a la vez que se disminuyen las indeseadas.

Este modelo fue introducido por Tone en su publicación Tone (2001) donde se asume que existen $j=1, \dots, n$ unidades productivas o DMUs con entradas $x_{ij}=1, \dots, m$ y $y_{rj}=1, \dots, s$ salidas. Posteriormente varios autores en Kemeny, J.G. et al. (1956) y Shephard en Shephard (1970) no asumieron que las entradas y salidas eran estrictamente positivas como hizo Tone suponiendo:

$$x_{ij} \geq 0, y_{jk} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} > 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} > 0, \quad r = 1, \dots, s$$

$$\sum_{r=1}^s y_{rj} > 0, \quad j = 1, \dots, n$$

(3.23)

Esto provoca que algunas entradas y salidas puedan ser cero. Además, tenemos que $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ definidas como las variables de intensidad siendo por lo tanto el conjunto de posibilidades de producción:

$$P = \{(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s):$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \leq y_r, \quad r = 1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$$

(3.24)

Por último, Charnes y otros autores introdujeron en Chambers et al. (1998) la función de distancia direccional insertando un vector direccional $g = (g_1, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_{m+s}) \neq 0$. De esta manera resolvió el problema de optimización para la DMU₀ en estudio con el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 & \max \beta_o \\
 \text{s.a:} & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{io} - \beta g_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{ro} - \beta g_r, \quad r = 1, \dots, s \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \beta \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.6 Tratamiento de variables con datos negativos

Para el tratamiento de variables que pueden adoptar valores negativos vamos a valernos de la publicación de Silva Portela et al. (2004), donde se expresa el cómo tratar este tipo de variables aplicando conceptos del IRDM (Inverse Range Directional Model) basados en DDF comentado anteriormente.

Para ello en primer lugar se definen dos vectores denominados R_{ro} y R_{io} que representan el posible rango de mejora de la unidad en estudio para cada variable que puede adoptar valores negativos para variables de entrada y salida respectivamente.

$$\begin{aligned}
 R_{ro} &= \max_j \{y_{rj}\} - y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\
 R_{io} &= x_{io} - \max_j \{x_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

El modelo IRDM basado en el modelo DDF y resultante al utilizar el inverso de este rango para tratar variables que pueden tomar valores negativos es el siguiente:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \beta_o \left[\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{ro} + \beta_o \cdot \frac{1}{R_{ro}}, \quad r = 1, \dots, s, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{io} - \beta_o \cdot \frac{1}{R_{io}}, \quad i = 1, \dots, m, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \right. \end{array} \right\} \tag{3.27}$$

3.7 Tratamiento de salidas no deseadas

Actualmente el tratamiento de las variables de salida no deseadas en el desarrollo de modelos DEA se ha convertido en un aspecto muy estudiado por los investigadores. Tanto es así que se han creado diversos métodos para tratarlas, generando cada uno de ellos distintos beneficios e inconvenientes que hacen que para cada investigación se tenga que valorar cuál de ellos es el más apropiado.

Para atender el problema que genera el cómo tener en cuenta estas variables podemos dividir los distintos enfoques en directos o indirectos, entendiendo directos aquellos que tratan la salida no deseada de manera original y por los indirectos aquellos que la tratan como una entrada clásica, que se debe minimizar, aplicando alguna transformación. Muchos investigadores no están de acuerdo con este segundo enfoque ya que opinan que se distorsiona el problema real.

Como último concepto previo de este apartado conviene comentar que las variables indeseables pueden desecharse de manera fuerte si se pueden desprestigiar libremente, y de manera débil si se muestra una alta conexión entre la producción de salidas deseables con las no deseables, es decir, si al reducir los contaminantes o variables no deseables también se reducen la producción de variables deseables.

A continuación, se expondrán los cuatro métodos más utilizados:

❖ 1. Ignorarlas directamente de la función de producción:

Esta opción puede generar resultados desvirtuados, ya que estas variables indeseadas carecen de valor en la evaluación final de la eficiencia de las unidades productivas. Varios autores han aplicado esta forma de tratar las variables indeseables como por ejemplo Hailu y Veeman (2001), Pathomsiri et al. (2008), Yang y Pollitt (2009) o He et al. (2013).

❖ 2. Tratarlas al igual que las entradas regulares:

Es lógico aplicar este método para variables no deseadas que se pueden desechar de manera fuerte donde se entiende que al igual que las entradas regulares, las variables no deseadas de salida deben disminuirse para mejorar la productividad. Este enfoque ha sido utilizado por Reinhard et al. (2000), Lansink y Bezlepkin (2003), Korhonen y Luptacik (2003), Gomes y Lins (2008) o Zhang et al. (2008).

❖ 3. Tratamiento de las salidas no deseables en modelos no lineales:

Este enfoque surgió en 1989 cuando se publicó Färe et al. (1989). Färe trató las salidas no deseables, en un estudio relacionado con la aplicación de un enfoque no paramétrico a un conjunto de datos procedente de diversas fábricas estadounidenses, como salidas en la propia función de producción. Demostró que el incluir o no las salidas no deseadas en el modelo provocaba una diferencia considerable en las eficiencias obtenidas de las unidades productivas en estudio. De esta manera se llegó a la conclusión de que para estas situaciones los modelos DEA conocidos hasta la fecha podrían no ser del todo completos. Además, otros autores alcanzaron resultados y conclusiones similares como en sus investigaciones como Pittman (1983) y Tyteca (1996, 1997).

Posteriormente Chung et al. (1997) y Ball et al. (2004) ampliaron la ideología planteada por Färe et al. (1989) de la función de distancia direccional, DDF, para modelos que incluían variables de salida indeseables. Para ello realizaron un enfoque basándose en el aumento de las salidas deseables y la disminución de las entradas regulares y las salidas indeseadas en función de un vector de dirección dado expuesto en Chung et al. (1997): $\vec{D}(x,y,b;g) = \sup\{ \rho : (x - \rho g_x, y + \rho g_y, b - \rho g_b) \in T \}$.

Por último, cabe mencionar que Lozano, S y Gutiérrez, E. (2011) propusieron este tratamiento mediante la inclusión de una variable que liga las variables de salida indeseadas a las deseadas.

❖ 4. Transformarlas de tal manera que puedan tenerse en cuenta:

A la hora de transformar estas variables de salida no deseadas se han trabajado con distintas formas de enfocar dicha transformación. El enfoque ADD propuesto por Koopmans en Koopmans, T.(1951) convierte las salidas (o entradas) no deseables en deseables según $(U) = -U$, teniendo en cuenta el inconveniente de que algunos datos pueden volverse negativos y de que se debe lidiar con ello a la hora de medir la eficiencia. Para ello cabe mencionar que se han desarrollado varias investigaciones recientes donde se tratan estos datos negativos (deseables) mediante la utilización de funciones de distancia direccional.

Por otro lado la transformación $(U) = -U + \beta$ es otra alternativa que puede llegar a depender de β y que ha sido utilizada por Ali y Seiford (1990), Scheel (2001) y Seiford y Zhu (2001).

Por último, Golany y Roll (1989) y Lovell et al.(1995) aplicaron la transformación denominada el inverso multiplicativo: $f(U) = 1/U$.

Los principales autores que han aplicado este método fueron Adler y Golany (2001), Kortelainen (2008), Amado et al. (2012) y Halkos y Papageorgiou (2014).

3.8 Aplicaciones DEA

Como ya hemos comentado con anterioridad la metodología DEA, desde su aparición, ha sido estudiada, investigada y aplicada en millares de publicaciones. Estas aplicaciones se han desarrollado en una gran variedad de sectores desde el sector empresarial tanto privado como público, en el sector sanitario, financiero, educativo, deportivo... En relación con este proyecto resulta interesante mencionar artículos recientes de los siguientes autores, donde se aplica esta metodología en el ámbito deportivo y más específicamente en el fútbol.

❖ **Haas:**

Entre 2003 y 2004 publicó tres artículos donde utilizaba la metodología CCR-Input y BBC-Input para obtener como resultado la eficiencia técnica y de escala de cada DMU. En agosto de 2003 publica los dos primeros.

En el primero Haas, D. J. (2003) utiliza como unidades productivas los equipos de la liga inglesa de fútbol, la Premier League, durante la temporada 2000/2001. Como entradas incluye los sueldos y salarios totales y como salidas los puntos obtenidos durante la temporada y los ingresos totales llegando a la conclusión de que la eficacia y la eficiencia de los clubes no estaban relacionadas.

En el segundo, publicado el mismo mes Haas, D. J. (2003), fueron estudiados los equipos de la liga de fútbol americana, la Major League Soccer de la temporada 2000/2001. Las entradas utilizadas son el sueldo de los jugadores y los salarios del cuerpo técnico y las salidas son los puntos obtenidos, los ingresos totales y el número de espectadores totales. Las conclusiones que se obtiene tras este estudio son que los niveles de eficiencia de los equipos están correlacionados con el rendimiento de la liga y que, en gran medida, la ineficiencia de los equipos se debe a la ineficiencia de escala.

Por último, en 2004 publica, juntos con otros autores Haas, D et al. (2004), con las mismas entradas y salidas que el artículo de la Major League y con la diferencia de que utiliza el número de espectadores promedio en vez del total. En este estudio las unidades productivas son los equipos de la Bundesliga, primera división alemana, que participaron en la temporada 1999/2000. El autor descompone los causantes de la ineficiencia en ineficiencia de escala e ineficiencia técnica. Además, observa que los niveles de eficiencia de los equipos no se corresponden con su rendimiento en liga y, de hecho, los equipos de pequeño y mediano tamaño tienden ser más eficientes que los de gran tamaño.

❖ Espitia-Escuer y García-Cebrián:

Entre 2004 y 2010 publican cuatro artículos utilizando diversos modelos de esta metodología.

El primero de ellos Espitia-Escuer, M., y García-Cebrián, L. I. (2004) fue publicado en 2004. Está aplicado a los equipos de la primera división española que participaron desde la temporada 1998/99 a la 2000/01, utilizando los modelos CCR y BBC de entrada para obtener las eficiencias técnica y la de escala. Las entradas empleadas son los movimientos ofensivos, los jugadores usados, los minutos de posesión, los tiros y los cabezazos. Por otro lado, las salidas fueron los puntos obtenidos y los goles anotados. Se llega a la conclusión que los equipos eficientes no tenían por qué encontrarse en lo alto de clasificación a final de temporada.

En 2006 realizaron otro artículo semejante sobre los equipos de primera división española ampliando el periodo, desde la temporada 1998/99 hasta la 2004/05 Espitia-Escuer, M., y García-Cebrián, L. I. (2006). *Management Decision*". Además, utilizaron el modelo CCR de salida para obtener la eficiencia técnica y una potencial clasificación final de la liga. Las entradas son las mismas que en el artículo anterior a excepción de los cabezazos, que se intercambia por tiros a puerta y como salida únicamente se maneja los puntos obtenidos durante la temporada. La principal conclusión que alcanzaron fue que la clasificación final de un equipo no depende en mayor medida de su potencial, si no del uso eficiente de los recursos con los que cuenta.

Dos años más tarde y de nuevo utilizando como unidades productivas los equipos de primera división española, en esta ocasión desde la temporada 1998/99 hasta la 2003/2004, se publicó Espitia-Escuer, M., y García-Cebrián, L. I. (2008). En este artículo además del modelo CCR de entrada se aplicó el índice de Malmquist para obtener el cambio técnico, el cambio eficiente y el índice de productividad.

Finalmente, en 2010 publicaron Espitia-Escuer, M., y García-Cebrián, L. I. (2010) cambiando de competición al utilizar como DMUs los equipos que participaron en la Champions League desde la 2003/04 a 2006/07. En este estudio no sólo se aplicaron los modelos BBC y CCR de entrada para obtener la eficiencia técnica y de escala, además se implementaron modelos para conseguir la supereficiencia.

❖ Barros y Leach:

Publicaron en 2006 el estudio Barros, C. P., y Leach, S. (2006) sobre los equipos participantes en la Premier League desde la temporada 1998/99 hasta la 2002/03. Aplicaron los modelos BBC y CCR de entrada y el índice de Malmquist utilizando cuatro entradas (número de jugadores, salario de los mismos, activos netos y gastos en el estadio) y tres entradas (puntos obtenidos, número de entradas vendidas y la facturación). Los resultados de aplicar estos modelos fueron las eficiencias técnica y de escala, el cambio técnico y eficiente y el índice de productividad. La principal conclusión obtenida fue que, aunque los equipos tengan habilidades en cuestión de gerencia equivalentes, sus eficiencias no lo son.

❖ García Sánchez:

García-Sánchez, I. M. (2007) es un enfoque en tres etapas de la metodología DEA. Para ello estudia los clubes españoles en la temporada 2004/2005 utilizando los modelos CCR y BBC (Network) de salida y el índice de Malmquist.

En la primera etapa se utiliza como entradas consideraciones ofensivas (jugadas ofensivas, centros al área y remates a puerta) y defensivas (recuperaciones de balón e intervenciones del portero). Como salida de esta primera etapa, que se convierten a su vez en las entradas de la segunda etapa, se utilizaron los goles anotados y la inversa de los goles recibidos. En esta segunda etapa se utiliza como salida la clasificación del equipo a final de temporada, que de nuevo será la entrada de la tercera y última etapa. Finalmente, como salida de la última etapa se añade el número de espectadores que asisten a los partidos como local.

Se obtienen las eficiencias ofensivas, defensivas, operacionales y sociales de los clubes, además de del cambio eficiente y técnico y del índice de productividad. Las conclusiones a las que llega el autor son que la ineficiencia técnica defensiva de los clubes es mayor que la ofensiva y que la eficiencia está directamente relacionada con la experiencia del club en la competición.

❖ Guzmán y Morrow:

En 2007 y aplicando el modelo CCR de entrada, el índice de Malmquist y un análisis de correlación canónico (CCA) sobre los equipos de la Premier League (1997/98 a 2002/03) publicaron Guzmán, I., y Morrow, S. (2007) Como entrada tomaron las remuneraciones de los directores y otros gastos generales y como salidas los puntos obtenidos en liga y la facturación. Llegaron a la conclusión de que, en términos de eficiencia, los equipos que obtienen mejores puntuaciones no tienen que ser los que mejor lo han hecho sobre el césped. También afirman que los clubes no mejoraron su productividad a lo largo del tiempo.

❖ Boscá, J. E., Liern, V., Martínez, A., y Sala, R:

Publicaron Boscá, J. E et al. (2009) donde se utilizó el modelo CCR de salida para obtener la eficiencia general, la eficiencia jugando como local y como visitante de los clubes participantes en la liga española e italiana desde la temporada 2000/01 a la 2002/03. Como salidas utilizó los goles a favor y la inversa de los goles recibidos y como entradas cuatro consideraciones ofensivas (minutos de posesión, tiros a puerta, pases en el interior del área contraria y jugadas ofensivas) y cuatro defensivas (las inversas de las entradas pero las recibidas por el equipo, es decir, en contra). Se llega a la conclusión de que la liga española es más competitiva y homogénea que la italiana y que para mejorar la competitividad de esta última es primordial mejorar la eficiencia defensiva, antes que la ofensiva.

❖ Picazo-Tadeo y González-Gómez:

De nuevo sobre los equipos de la primera división española, en esta ocasión desde la temporada 2001/02 a la 2007/08, estos dos autores publicaron en 2010 el artículo titulado Picazo-Tadeo, A., y González-Gómez, F. (2010). Para ello y aplicando un modelo VRS de salida se obtuvo el desempeño de los equipos y el impacto de jugar partidos extras de competiciones europeas o de Copa del Rey. Se tomaron como entradas el número de jugadores, el promedio de espectadores por partido, el número de temporadas jugadas en primera división y el número de partidos jugados en competición europea o Copa del Rey. Como salida se considera los puntos obtenidos durante la temporada.

❖ Fabiola Zambom-Ferraresi, Lucía Isabel García-Cebrián, Fernando Lera-López, and Belén Iraízoz:

En este estudio sobre los equipos participantes en la UEFA Champions League (desde la temporada 2004/05 a la 2013/14) Zambom-Ferraresi, F et al. (2017), además de implementar modelos ya conocidos de DEA se utilizaron un modelo de arranque DEA. Utilizando como entradas los tiros a puerta, las recuperaciones, la posesión y los pases y como salida los resultados deportivos llegaron a la conclusión de que existen un alto nivel de ineficiencia durante la etapa estudiada (el 90% de los clubes parecen ser ineficientes) y que el campeón siempre resulta ser eficiente.

❖ Gabriel Villa y Sebastián Lozano:

Publicaron Villa, G. y Lozano, S. (2016). Para calcular la eficiencia de cada equipo durante un partido toman como entradas la posesión, los tiros, los córners, los penaltis, las paradas, el número de cambios, las recuperaciones y el valor del equipo. Como salida eligieron el número de goles. Ambas entradas y salidas se estudian para el equipo local y visitante de un partido mediante un modelo Network DEA.

4 MODELOS IMPLEMENTADOS

4.1 Introducción

Una vez desarrollados los conceptos necesarios para entender los principales modelos de la metodología DEA, además del funcionamiento básico de la competición a la que pertenece los futbolistas que vamos a estudiar, se procede a plantear el modelo matemático del que nos valdremos para obtener nuestros objetivos, además de las entradas y salidas que vamos a utilizar.

4.2 Descripción del modelo

Antes de adentrarnos en la descripción de las variables elegidas y en la discusión del modelo aplicado conviene comentar brevemente los datos o recursos que hemos utilizado.

4.2.1 Unidades productivas

Las DMUs o unidades productivas que se han estudiado han sido un total de 58 futbolistas, más concretamente, 29 centrocampistas puros y 29 delanteros que participaron durante la temporada 2017/2018 en La Liga con al menos un futbolista de los 20 equipos en cada posición, utilizando en algunos casos dos del mismo club. Los centrocampistas y delanteros seleccionados fueron:

Tabla 4.1 Unidades productivas: centrocampistas en estudio

Jugador	Equipo	Jugador	Equipo	Jugador	Equipo
Mikel San José	Ath Bilbao	D. García	Éibar	Guardado	Real Betis
Saúl Ñíguez	At Madrid	Darder	Espanyol	Kroos	Real Madrid
Rakitic	Barcelona	Faycal Fajr	Getafe	Modric	Real Madrid
Busquets	Barcelona	Arambarri	Getafe	Illarramendi	Real Sociedad
Lobotka	Celta	Á.Granell	Girona	Banega	Sevilla
Wass	Celta	Etebo	Las Palmas	Parejo	Valencia
Manu García	Alavés	Rubén Pérez	Leganés	Kondogbia	Valencia
T. Pina	Alavés	Campaña	Levante	Rodri	Villarreal
Borges	Deportivo	Recio	Málaga	Trigueros	Villarreal
Joan Jordan	Éibar	Fabián Ruíz	Real Betis		

Tabla 4.2 Unidades productivas: delanteros en estudio

Jugador	Equipo	Jugador	Equipo	Jugador	Equipo
Aduriz	Ath Bilbao	G.Moreno	Espanyol	C.Ronaldo	Real Madrid
Griezmann	At Madrid	Ángel	Getafe	Bale	Real Madrid
Messi	Barcelona	Portu	Girona	W.José	Real Sociedad
Suárez	Barcelona	Stuani	Girona	M.Oyarzabal	Real Sociedad
Aspas	Celta	Calleri	Las Palmas	Ben Yedder	Sevilla
M.Gómez	Celta	Guerrero	Leganés	Rodrigo	Valencia
Munir	Alavés	Morales	Levante	Zaza	Valencia
Adrián	Deportivo	D.Rolan	Málaga	Bacca	Villarreal
Charles	Éibar	Sergio León	Real Betis	Bakambu	Villarreal
Kike	Éibar	Loren Morón	Real Betis		

Los motivos de selección de estos futbolistas fueron muy variados pero principalmente se seleccionaron los más destacados en sus respectivos equipos, los que a consiguieron mejores números o los que participaron más a lo largo de la temporada.

Una vez conocidas las unidades productivas que vamos a estudiar se procede a explicar las variables de entradas y salidas utilizadas, el motivo de su selección y una breve descripción de las mismas.

Para comenzar se expondrán dos diagramas que recogen estas variables y que nos ayudarán a entender mejor los modelos que vamos a aplicar. Hay que comentar además que se van a realizar dos modelos distintos, uno para los centrocampistas y otro para los delanteros ya que algunas de las variables varían con el fin de que la posición sea estudiada de forma más específica.

Estos diagramas siguen el modelo genérico de un problema DEA donde a una serie de unidades productivas se le consideran una serie de entradas y una serie de salidas.

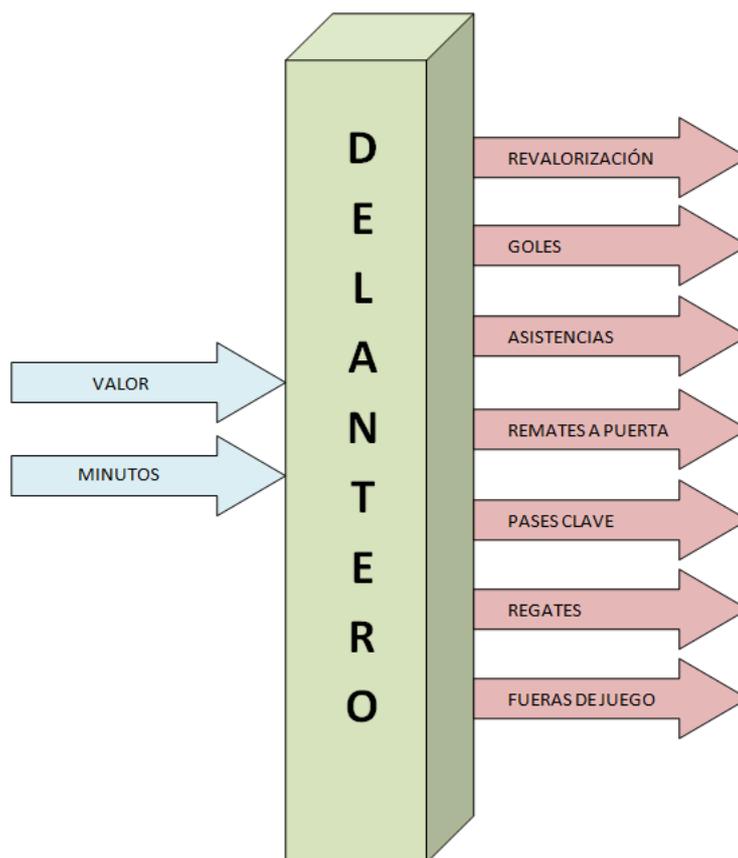


Ilustración 4.1 Diagrama entradas y salidas para los delanteros

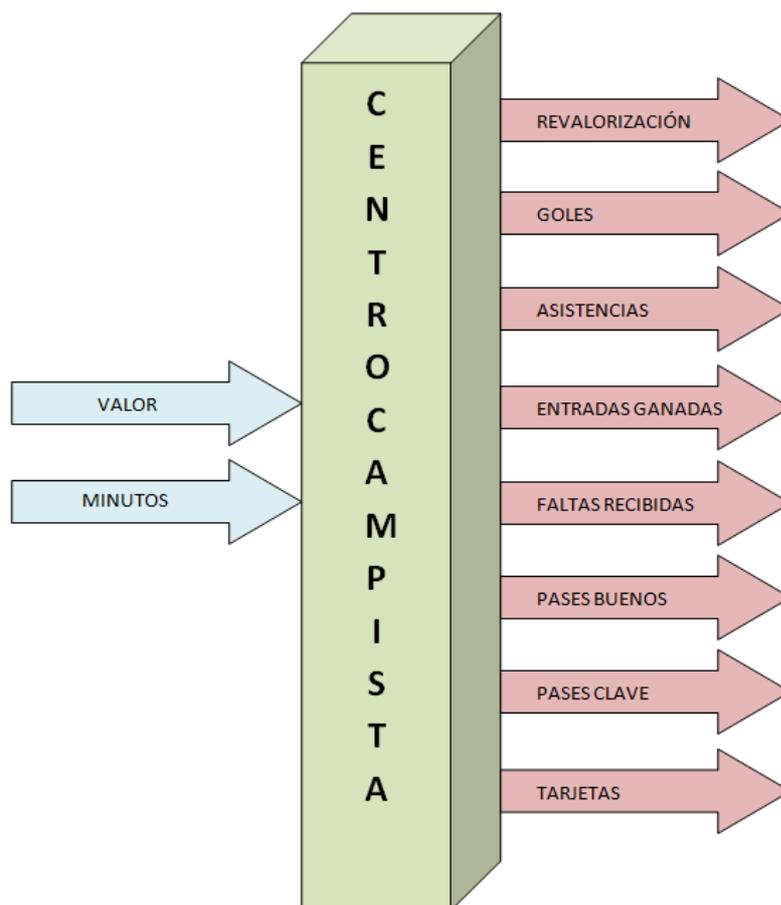


Ilustración 4.2 Diagrama entradas y salidas para centrocampistas

Antes de comenzar con la explicación de las distintas entradas y salidas que componen estos dos modelos cabe mencionar que todos los datos a excepción de valor y revalorización han sido extraídos del medio informativo AS. Los dos datos restantes han sido obtenidos del prestigioso sitio web *Transfermarkt*, especializado en información acerca del mundo del fútbol y más concretamente en los datos que hemos utilizado.

4.2.2 Variables de entrada

Las entradas seleccionadas para ambos modelos han sido las mismas ya que no dependen de la posición del jugador:

- ❖ **Valor:** Hace referencia al valor de mercado o valor económico del futbolista. Para los jugadores que iniciaron el curso en esta competición se ha tomado el último dato disponible previo al inicio de la temporada que estamos estudiando, la 2017/18. Para los jugadores que llegaron a la liga española en el mercado invernal, a mediados de curso, se ha tomado como referencia el valor del día 1 de enero de 2018, única información disponible durante el periodo de traspasos.

Este valor de mercado depende de la edad del futbolista ya que los jugadores jóvenes tienden a tener un mayor valor debido a que se tiene en cuenta la proyección que puede alcanzar, de lo que han invertido en él, de si el jugador es internacional con su país y obviamente del rendimiento del curso anterior además de

otro factores. Los datos se representan en millones de euros.

- ❖ **Minutos jugados:** Se ha seleccionado esta entrada por delante de otras como podía ser partidos jugados, que aparentemente parece lógica y completa, ya que la primera es más detallada. Si hubiéramos seleccionado partidos jugados como entrada, dos jugadores que hubiesen jugado un partido se considerarían que tendrían la misma entrada cuando uno de ellos ha podido partir de inicio y haber completado el partido mientras que el otro podría haber entrado en descuento y haber disputado tan solo unos pocos minutos.

Para evitar la sobredimensión de datos con respecto al resto de variables estos minutos totales se han dividido por el número de partidos jugados, considerando de tal manera esta variable como los minutos jugados de un jugador por cada partido jugado.

4.2.3 Variables de salida

En primer lugar se expondrán las salidas que son iguales para los dos modelos, es decir, que son válidas para los delanteros y los centrocampistas por igual:

- ❖ **Revalorización:** La revalorización consiste en la diferencia entre el valor de mercado que tuvo el jugador cuando concluyó la competición, o en enero en caso de que la abandonase en el mercado invernal, y el valor de mercado que tenía el jugador cuando comenzó a jugar en la temporada 2017/2018 (datos que coinciden con los de la variable de entrada valor).

Esta variable representa, a nivel económico, como ha evolucionado el futbolista durante la competición y se mide en millones de euros. Lógicamente, al ser una diferencia, esta variable puede adoptar valores negativos y hemos tenido que lidiar con ello en la implementación del modelo como se explicará posteriormente.

- ❖ **Goles:** En mayor medida para los delanteros pero también con una gran importancia para los centrocampistas, los goles son una de las salidas principales para un futbolista debido a que es uno de los dos objetivos de este deporte: anotar goles y que no te anoten a ti. Por ello esta salida no podía faltar en un análisis de eficiencia de futbolistas que estudia jugadores cuya posición se encuentra de medio campo hacia delante. Representa el número total de tantos anotados por un futbolista durante toda la temporada.
- ❖ **Asistencias:** En el mundo del fútbol no se puede hablar de goles sin mencionar las asistencias. Una asistencia consiste es un pase de un futbolista a un compañero previo a un gol, es decir, un jugador logra una asistencia si da un pase bueno a un compañero que acaba logrando anotar. Por tanto esta variable de salida es igual de importante para los delanteros que para los centrocampistas y representa el total de asistencias logradas por un futbolista durante el curso.
- ❖ **Pases claves:** Por último y como variable de salida válida para las dos posiciones en estudio hemos seleccionado el número de pases claves totales que ha dado un futbolista. Un pase clave, o también denominado peligroso, es un pase que conduce a un tiro a puerta de un compañero pero sin que este acabe en gol. Esta variable es necesaria para analizar a un futbolista ya que se traduce en la creación jugadas de peligro a favor, independientemente de que el compañero sea capaz de finalizarlas en gol o no, ya que esto no depende del jugador en estudio.

Las variables de salida específicas del modelo utilizado para el estudio de centrocampistas son:

- ❖ **Entradas ganadas:** Claramente los centrocampistas tienen una función más equilibrada entre las labores defensivas, de distribución y ofensivas que los delanteros que, básicamente, se centran en atacar. Por ello es importante incluir una variable que recoja el desempeño defensivo de un futbolista. La variable seleccionada ha sido las entradas ganadas que un futbolista ha completado durante el curso, teniendo en cuenta que consideramos que para que la entrada sea ganada debe implicar una recuperación de la posesión del balón.

En nuestro modelo hemos relacionado esta variable con una variable de salida indeseada denominada tarjetas amarillas. Hemos considerado esto debido a que cuando aumenta el número de entradas ganadas, por probabilidad aumentará el número de entradas fallidas que acaben en falta en contra, generando un aumento indeseable del número de tarjetas amarillas. El cómo se ha llevado a cabo esta relación se especificará posteriormente en la práctica se explicará a continuación.

- ❖ **Tarjetas:** Como acabamos de ver es una variable de salida indeseada del modelo, relacionada con las entradas ganadas y que representa el número total de tarjetas amarillas que ve un futbolista a lo largo del campeonato.

Se considera una variable indeseada ya que cuando un futbolista ve una tarjeta amarilla durante un encuentro no puede desempeñarse al máximo al estar condicionado por la posibilidad de ser expulsado, bajando generalmente el rendimiento defensivo y siendo todo ello un factor habitualmente determinante para que el jugador sea sustituido. Esto se debe a que la acumulación de dos tarjetas amarillas durante el mismo encuentro por un jugador acarrea la expulsión del mismo, dejando al equipo con un jugador menos y afectado de manera negativa a los intereses del equipo.

Además en la liga española la acumulación de cinco tarjetas amarillas o la expulsión por doble tarjeta amarilla supone un partido de sanción, no pudiendo participar en el próximo encuentro.

- ❖ **Pases buenos:** La labor de distribución de balón de los centrocampistas es una de sus funciones principales, ya que son los encargados de mover la pelota por todo el terreno de juego conectando a la defensa con la delantera. Cuando hablamos de pases buenos nos estamos refiriendo a pases que llegan con éxito a un compañero.

Debido a la sobredimensión sobre el resto de variables del modelo que generaría que esta variable representase el total de pases buenos por temporada, se considera que representa el número de pases buenos totales entre las 38 jornadas que conforman la competición.

- ❖ **Faltas recibidas:** La última variable de salida que compone el modelo para los centrocampistas es el número de faltas que recibe un jugador por temporada. Las faltas recibidas son un indicativo del desborde del futbolista, de la capacidad de desequilibrio y de la capacidad de retener el balón. Además las faltas suelen ser una baza ofensiva importante si se comenten cerca del área rival.

Para finalizar con el desarrollo de las variables que vamos a utilizar describiremos aquellas variables de salida que son específicas de los delanteros:

- ❖ **Remates a puerta:** La tarea principal de un delantero es de atacar, conseguir goles. Por ello es más que interesante incluir esta variable que representa el número de tiros a puerta que ha realizado un delantero durante toda la temporada. La selección de esta variable se debe a que recoge la participación en su objetivo, conociendo el número de veces que ha disparado, y la precisión de sus disparos ya que se consideran solo los tiros que van entre los tres palos.
- ❖ **Regates:** Esta variable nos ayuda a medir la capacidad de los delanteros para desbordar a los rivales y representa los regates totales realizados por los jugadores a lo largo del curso.
- ❖ **Fueras de juego:** Como variable indeseada se ha incluido las veces totales que un delantero cae en fuera de juego. El fuera de juego es una regla que sanciona a un futbolista que se encuentra más adelantado que todos los jugadores oponentes menos uno. Estar más adelantado se refiere a encontrarse más cerca de la línea de fondo de la portería rival. La sanción de esta infracción es una falta indirecta para el equipo rival, suponiendo la pérdida de posesión además de la privación de, habitualmente, una jugada de peligro a favor.

4.2.4 Descripción del modelo

Una vez expuestas las variables que forman parte de los modelos que vamos a implementar y antes de exponer las expresiones matemáticas de ambos modelos, se describirá las características de los mismos.

Hay que mencionar que estas propiedades se mantienen tanto para el modelo de los delanteros como para el de los centrocampistas, hablándose de dos modelos distintos al diferir las unidades productivas utilizadas y las variables de salida seleccionadas.

- ❖ **Tecnología CRS:** Se ha tenido en cuenta la tecnología CRS, explicada anteriormente en los conceptos de esta metodología. Se utiliza este tipo de retorno de escala ya que alcanzar la productividad de las DMUs eficientes es independientemente del tamaño de una DMU. Como ejemplo se considera que un jugador que valga un millón de euros y haya jugado mil minutos (variables de entradas) puede anotar los mismos o más goles (ejemplo de variable de salida) que otro que valga treinta millones y haya jugado dos mil minutos.

Este razonamiento se confirmó al llevarlo a la práctica ya que, implementado el modelo con tecnología VRS apenas se obtenían unidades productivas ineficientes, por lo que aplicar esta tecnología, no es útil para el objetivo que queremos estudiar.

- ❖ **Sin orientación:** Se considera un modelo no orientado debido a que no queremos reducir las entradas manteniendo las salidas constantes, ni viceversa. La idea es aumentar la productividad de las DMUs aumentando los valores de salida a la vez que se reducen aquellos relacionados con las variables de entradas.
- ❖ **Modelo DDF:** La elección de este modelo ha sido principalmente la existencia de variables indeseadas que tienen una fuerte relación con las variables deseadas como ya se ha comentado con anterioridad. Este modelo es uno de lo más novedosos y útiles para estos casos en la metodología DEA, buscando simultáneamente aumentar las variables de salida deseables y reducir las no deseadas.

- ❖ **Tratamiento de las variables negativas:** Para ambos modelos contamos con una variable de salida denominada revalorización que, como ya se explicó, puede tomar valores menores que cero.

Por ello ha sido necesaria la creación de una variable auxiliar denominada rango REVALORIZACION para cada DMU en estudio y que se define como la diferencia entre el valor de REVALORIZACION máximo de cualquier DMU menos el valor de REVALORIZACION de la propia unidad productiva. Para entenderlo, este rango se podría definir como el rango de posible mejora de la unidad o.

Para tratar esta variable negativa adaptamos el modelo IRDM comentado en la parte teórica de este estudio para nuestro DDF, de tal manera que solo afecta a la restricción de la variable de salida REVALORIZACION ya que es la única que posee datos negativos.

En esta restricción como podremos observar a continuación, la variable β_o queda multiplicada por la inversa del rango que acabamos de definir, sustituyéndose por la componente del vector $g_{REVALORIZACION}$ que nos marca la dirección en la que se proyecta esta variable.

4.2.5 Modelado matemático

A continuación se expondrán las ecuaciones equivalentes al modelo matemático para cada DMU_o en estudio, es decir $DMU_o=(o=1,\dots,n)$, teniendo en cuenta que n es el número de unidades productivas estudiadas por lo que en nuestro caso $n=29$. Comenzaremos con el modelo referente a los centrocampistas.

4.1.1.1 Modelo para centrocampistas

- **Definición de rango REVALORIZACION_o y función objetivo:**

$$\begin{aligned} rangoREVALORIZACION_o = \max_j \{rangoREVALORIZACION_j\} - REVALORIZACION_o \\ \max \beta_o \end{aligned}$$

sujeto a:

- **Restricciones de las variables de entrada:**

$$\sum_{j=1}^n VALOR_j \lambda_j \leq VALOR_o$$

$$\sum_{j=1}^n MINUTOS_j \lambda_j \leq MINUTOS_o$$

(4.1)

(4.2)

- **Restricciones de las variables de salida:**

$$\sum_{j=1}^n REVALORIZACION_j \lambda_j \geq REVALORIZACION_o + \beta_o \cdot (1/rango REVALORIZACION_o)$$

$$\sum_{j=1}^n GOLES_j \lambda_j \geq GOLES_o + \beta_o \cdot gGOLES$$

$$\sum_{j=1}^n ASISTENCIAS_j \lambda_j \geq ASISTENCIAS_o + \beta_o \cdot gASISTENCIAS$$

$$\theta_o \sum_{j=1}^n ENTRADASGANADAS_j \lambda_j \geq ENTRADASGANADAS_o + \beta_o \cdot gENTRADASGANADAS$$

$$\sum_{j=1}^n FALTASRECIBIDAS_j \lambda_j \geq FALTASRECIBIDAS_o + \beta_o \cdot gFALTAS_RECIBIDAS$$

$$\sum_{j=1}^n PASESBUENOS_j \lambda_j \geq PASESBUENOS_o + \beta_o \cdot gPASESBUENOS$$

$$\sum_{j=1}^n PASESCLAVES_j \lambda_j \geq PASESCLAVES_o + \beta_o \cdot gPASESCLAVES$$

$$\theta_o \sum_{j=1}^n TARJETAS_j \lambda_j = TARJETAS_o - \beta_o \cdot gTARJETAS$$

(4.3)

➤ **Restricciones auxiliares:**

$$\begin{aligned} \beta_o &\geq 0, o = 1, \dots, n \\ \lambda_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\ 0 &\leq \theta_o \leq 1, o = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$REVALORIZACION_j \text{ libre } , j = 1, \dots, n$$

$$VALOR_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$MINUTOS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$GOLES_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$ASISTENCIAS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$ENTRADASGANADAS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$FALTASRECIBIDAS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$PASESBUENOS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$PASESCLAVES_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$TARJETAS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$gGOLES = \{0,1\}$$

$$gASISTENCIAS = \{0,1\}$$

$$gENTRADASGANADAS = \{0,1\}$$

$$gFALTASRECIBIDAS = \{0,1\}$$

$$gPASESBUENOS = \{0,1\}$$

$$\begin{aligned} gPASESCLAVE &= \{0,1\} \\ gTARJETAS &= \{0,1\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

En ambos modelos la variable β_o , que se busca maximizar, representa la eficiencia que queremos obtener en este estudio. Hay que comentar que la hemos excluido, también en los dos modelos, de las restricciones asociadas a las variables de entrada (4.2 y 4.6) ya que, aunque permitimos que estas entradas se reduzcan al considerar los modelos como no orientados, no fomentamos esta reducción.

La variable λ_j por su parte, representa la medida de proyección de la DMU en estudio con respecto al resto de unidades productivas.

Para ambos modelos, todos los componentes de vector g , que nos marca la dirección en que se proyecta la DMU en estudio, se han considerado la unidad debido a que no se le ha dado más importancia a ninguna salida sobre otra.

Los signos en las restricciones de entrada y salida se consideran menores o iguales y mayores o iguales respectivamente ya que se permite que la proyección sea ligeramente superior. Como excepción las restricciones ligadas a las salidas indeseables se han considerado con el signo igual ya que buscamos la reducción de las mismas y no le permitimos esa holgura.

La principal diferencia entre ambos modelos, además de que difieren algunas salidas, es la manera de tratar las salidas indeseadas. En este modelo se ha tratado gracias a la inclusión de la variable θ_o . Esta variable liga las dos salidas que están fuertemente relacionadas, la variable de salida deseada ENTRADASGANADAS y la indeseada TARJETAS. Para ello se incluye como multiplicador en la parte izquierda de las restricciones asociadas a dichas entradas (4.3).

4.1.1.2 Modelo para los delanteros

➤ **Definición de rangoREVALORIZACION_o y función objetivo:**

$$\begin{aligned} rangoREVALORIZACION_o &= \max_j \{rangoREVALORIZACION_j\} - REVALORIZACION_o \\ &\max \beta_o \end{aligned}$$

sujeto a:

(4.5)

➤ **Restricciones de las variables de entrada:**

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n VALOR_j \lambda_j &\leq VALOR_o \\ \sum_{j=1}^n MINUTOS_j \lambda_j &\leq MINUTOS_o \end{aligned}$$

(4.6)

➤ **Restricciones de las variables de salida:**

$$\sum_{j=1}^n REVALORIZACION_j \lambda_j \geq REVALORIZACION_o + \beta_o \cdot (1/rango REVALORIZACION_o)$$

$$\sum_{j=1}^n GOLES_j \lambda_j \geq GOLES_o + \beta_o \cdot gGOLES$$

$$\sum_{j=1}^n ASISTENCIAS_j \lambda_j \geq ASISTENCIAS_o + \beta_o \cdot gASISTENCIAS$$

$$\sum_{j=1}^n REMATESAPUERTA_j \lambda_j \geq REMATESAPUERTA_o + \beta_o \cdot gREMATESAPUERTA$$

$$\sum_{j=1}^n REGATES_j \lambda_j \geq REGATES_o + \beta_o \cdot gREGATES$$

$$\sum_{j=1}^n PASESCLAVES_j \lambda_j \geq PASESCLAVES_o + \beta_o \cdot gPASESCLAVES$$

$$\sum_{j=1}^n FUERASDEJUEGO_j \lambda_j = TARJETAS_o - \beta_o \cdot gTARJETAS$$

(4.7)

➤ **Restricciones auxiliares:**

$$\begin{aligned} \beta_o &\geq 0, o = 1, \dots, n \\ \lambda_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \\ 0 &\leq \theta_o \leq 1, o = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$REVALORIZACION_j \text{ libre } , j = 1, \dots, n$$

$$VALOR_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$MINUTOS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$GOLES_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$ASISTENCIAS_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$REMATES A PUERTA_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$REGATES_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$PASESCLAVES_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$FUERASDEJUEGO_j \geq 0, j = 1, \dots, n$$

$$gGOLES = \{0,1\}$$

$$gASISTENCIAS = \{0,1\}$$

$$gREMATESAPUERTA = \{0,1\}$$

$$gPASESCLAVES = \{0,1\}$$

$$gTARJETAS = \{0,1\}$$

(4.8)

Este segundo modelo sigue basándose en el DDF y es muy similar al de los centrocampistas solo que en esta ocasión la variable indeseada FUERASDEJUEGO_j se trata de forma distinta al no estar fuertemente ligada a ninguna variable deseada como estaba la variable TARJETAS_j del anterior modelo, es decir, no aumenta si aumenta ninguna variable deseada.

Teniendo en cuenta lo anterior y como hemos estudiado en la bibliografía una de las opciones para tratar este tipo de variables no deseadas es la de tratarlas como si fuera una entrada regular. Por lo tanto podemos observar que hemos realizado un cambio en la restricción de salida correspondiente a la variable de FUERASDEJUEGO_j (4.7), de manera que pasa a tener el signo de menor o igual y se le resta, en vez de sumarle, la β_o quedando esta restricción como si fuese la de una de entrada.

5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1 Introducción

Tras haber decidido los modelos que vamos a implementar y haber explicado todas las consideraciones que poseen, se procede en este capítulo a la exposición y el análisis de los resultados obtenidos tras su resolución. También se explica el proceso o la metodología que se ha seguido para obtener dichos resultados.

5.2 Metodología de resolución

Lo primero que se ha realizado para implementar estos modelos ha sido la creación de dos hojas de cálculo, uno para cada modelo, donde se recogen los datos, para cada DMU, de las variables de entradas y salidas. Estas hojas se exponen en el ANEXO-A.

Una vez realizado esto se ha continuado con la programación de ambos modelos mediante la herramienta diseñada para la construcción y la resolución de modelos de optimización matemática llamado Lingo. Se han creado dos códigos que representan dos modelos lineales que se resuelven en cuestión de minutos. Estos códigos están recogidos en el ANEXO-B.

Tras resolver estos modelos obtenemos los resultados, que se vuelcan en una hoja de cálculo para poder realizar un análisis de los mismos.

5.3 Resultados modelo centrocampistas

El primer resultado que vamos a analizar y que representa el objetivo principal de este proyecto, es el valor de la variable β_o para cada DMU. Gracias a ello podemos conocer que centrocampistas de La Liga han sido eficientes durante la temporada y cuales han resultado ineficientes según este modelo.

Tabla 5.1 Eficiencias de los centrocampistas

Jugadores	Equipo	VALOR DE β_o	EFICIENTE
Mikel San José	Ath Bilbao	2,83	NO
Saúl Ñíguez	At Madrid	0	SI
Rakitic	Barcelona	1,47	NO
Busquets	Barcelona	0	SI
Lobotka	Celta	0	SI
Wass	Celta	0	SI
Manu García	Alavés	0	SI
T. Pina	Alavés	3,54	NO
Borges	Deportivo	1,63	NO
Joan Jordan	Éibar	0	SI
D. García	Éibar	2,95	NO

Darder	Espanyol	4,30	NO
Faycal Fajr	Getafe	1,18	NO
Arambarri	Getafe	2,46	NO
Á.Granell	Girona	0	SI
Etebo	Las Palmas	0	SI
Rubén Pérez	Leganés	0	SI
Campaña	Levante	3,33	NO
Recio	Málaga	0	SI
Fabián Ruíz	Real Betis	0	SI
Guardado	Real Betis	0	SI
Kroos	Real Madrid	0	SI
Modric	Real Madrid	0,09	NO
Illarramendi	Real Sociedad	0	SI
Banega	Sevilla	0	SI
Parejo	Valencia	0	SI
Kondogbia	Valencia	0	SI
Rodri	Villarreal	0	SI
Trigueros	Villarreal	3,39	NO

Como queda representado en la tabla aquellas unidades productivas cuyo valor de este variable sea igual a cero son eficientes, mientras que las que tengan un valor mayor son ineficientes. Cuanto mayor sea este valor más ineficiente será la unidad productiva.

Analizando los resultados observamos que para este modelo nos encontramos con 18 unidades eficientes y 11 ineficientes, siendo el más ineficiente Sergi Darder al tener el mayor valor de β_o , seguido de Tomás Pina y Manu Trigueros.

A continuación se muestra una tabla con aquellas unidades productivas que han resultado ineficientes y las holguras calculadas como la diferencia entre los valores de salida que tendrían que haber alcanzado para ser eficientes, expuestos en el ANEXO-C, y los que realmente obtuvieron.

Tabla 5.2 Desglose salidas centrocampistas ineficientes

Jugadores	Equipo	REVALORIZACION	GOLES	ASISTENCIAS	ENTRADASGANADAS
Mikel San José	Ath Bilbao	16,94	0,91	2,83	3,55
Rakitic	Barcelona	11,48	2,53	1,47	20,79
T. Pina	Alavés	12,71	1,73	3,85	3,54
Borges	Deportivo	16,09	0,00	2,02	3,97
D. García	Éibar	5,17	1,84	2,95	2,95
Darder	Espanyol	20,38	2,17	4,31	12,45
Faycal Fajr	Getafe	12,15	1,64	1,18	1,18

Arambarri	Getafe	2,01	0,67	2,46	2,46
Campaña	Levante	3,79	1,16	3,33	11,41
Modric	Real Madrid	22,26	2,46	0,09	7,96
Trigueros	Villarreal	2,69	0,30	3,39	3,39

Jugadores	Equipo	FALTASRECIBIDAS	PASESBUENOS	PASESCLAVE	TARJETAS
Mikel San José	Ath Bilbao	21,37	10,58	10,55	-2,79
Rakitic	Barcelona	1,47	3,14	14,14	0,03
T. Pina	Alavés	12,93	14,17	15,53	-3,54
Borges	Deportivo	15,51	13,86	4,70	-1,49
D. García	Éibar	30,13	2,95	25,00	-2,95
Darder	Espanyol	5,76	21,50	6,92	-3,84
Faycal Fajr	Getafe	1,18	23,94	1,18	-1,18
Arambarri	Getafe	2,46	16,71	24,34	-2,46
Campaña	Levante	8,60	10,47	4,27	-2,16
Modric	Real Madrid	1,48	0,09	9,01	0,95
Trigueros	Villarreal	3,39	8,21	5,32	-3,39

A continuación se muestra el grado de ineficiencia de los centrocampistas en la siguiente gráfica:

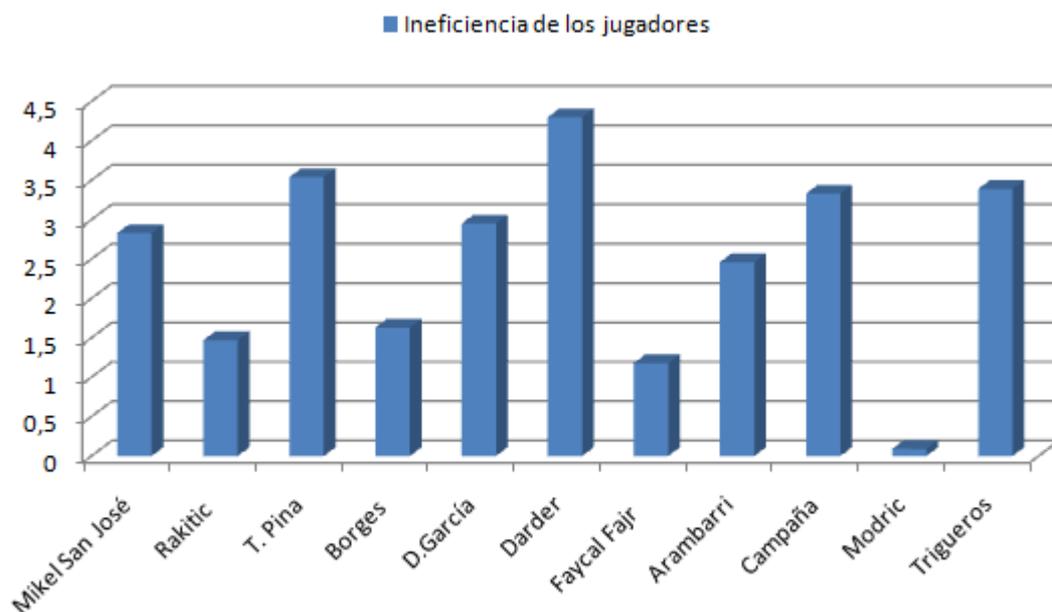


Ilustración 5.1 Grado de ineficiencia de los centrocampistas

Una vez representados y analizados los jugadores ineficientes continuamos con aquellas unidades eficientes. Dentro de las mismas vamos a utilizar dos criterios basados en las proyecciones de las DMUs para conocer cuáles de estos jugadores han sido más eficientes.

El primer criterio que seguiremos es la suma de jugadores que se proyectan sobre el jugador en estudio. Los que mayor valor obtengan de este sumatorio serán denominados jugadores modelos.

Para ello nos valdremos de una matriz de 29x29 jugadores, donde se representan las LAMBDA o el nivel de proyección de las filas sobre las columnas, sabiendo que un jugador se proyecta sobre otro cuando el valor de LAMBDA es mayor que cero. Hay que comentar que para los jugadores eficientes en esta matriz la proyección de ellos sobre ellos mismos tiene que ser uno, y que esta proyección no se tiene en cuenta en el sumatorio de jugadores proyectados por estar comparándose la misma unidad productiva. Tanto esta matriz de LAMBDA como la de los delanteros se encuentran expuestas en el ANEXO-C.

Como resumen de esta matriz según este primer criterio se expone la siguiente tabla:

Tabla 5.3 Sumatorio de jugadores que se proyectan sobre cada centrocampista

Jugadores	Equipo	Jugadores que se proyectan sobre él
Saúl Níguez	At Madrid	2
Busquets	Barcelona	0
Lobotka	Celta	1
Wass	Celta	0
Manu García	Alavés	5
Joan Jordán	Éibar	1
Á.Granell	Girona	4
Etebo	Las Palmas	4

Rubén Pérez	Leganés	0
Recio	Málaga	1
Fabián Ruíz	Real Betis	11
Guardado	Real Betis	5
Kroos	Real Madrid	4
Illarramendi	Real Sociedad	0
Banega	Sevilla	0
Parejo	Valencia	2
Kondogbia	Valencia	0
Rodri	Villarreal	0

Podemos observar que Fabián destaca sobre el resto ya que se le proyectan 11 jugadores, por lo que es considerado el jugador modelo de este estudio. Con menos de la mitad de jugadores proyectados le siguen Manu García y Guardado con 5 proyecciones, completando el top 3 de jugadores más eficientes de nuestro estudio. Además Granell, Etebo y Kroos cuentan con 4 jugadores proyectados por lo que se pueden considerar también de los más eficientes.

En cuanto al segundo criterio que hemos considerado también nos hacemos valer de la matriz anterior pero en esta ocasión en vez de reflejar la suma de los jugadores proyectados, realizaremos la suma de los valores de LAMBDA para cada jugador. En esta ocasión tampoco se ha tenido en cuenta, para este sumatorio, el valor de LAMBDA que representa la proyección de un jugador sobre sí mismo ya que para todos los jugadores eficientes va a ser uno. El resumen de este criterio se expone en la siguiente tabla:

Tabla 5.4 Sumatorio de LAMBDA para cada centrocampista eficiente

Jugadores	Equipo	Sumatorio de λ_j
Saúl Níguez	At Madrid	0,08
Busquets	Barcelona	0
Lobotka	Celta	0,85
Wass	Celta	0
Manu García	Alavés	0,85
Joan Jordán	Éibar	0,12
Á.Granell	Girona	0,98
Etebo	Las Palmas	0,50
Rubén Pérez	Leganés	0
Recio	Málaga	0,55
Fabián Ruíz	Real Betis	5,41
Guardado	Real Betis	1,16
Kroos	Real Madrid	1,01
Illarramendi	Real Sociedad	0
Banega	Sevilla	0
Parejo	Valencia	0,12
Kondogbia	Valencia	0
Rodri	Villarreal	0

De nuevo destaca de manera más que notable el desempeño de Fabián, corroborando su condición de jugador más eficiente del estudio. En esta ocasión Guardado vuelve a ocupar la segunda posición con el segundo mejor valor pero esta vez en solitario distanciado con el siguiente jugador. Le siguen Kroos y a poca distancia Granell. A diferencia del primer criterio Manu García cae hasta la quinta posición de este ranking empatado con Lobotka.

Como resumen del análisis de los centrocampistas eficientes se expone la siguiente gráfica:

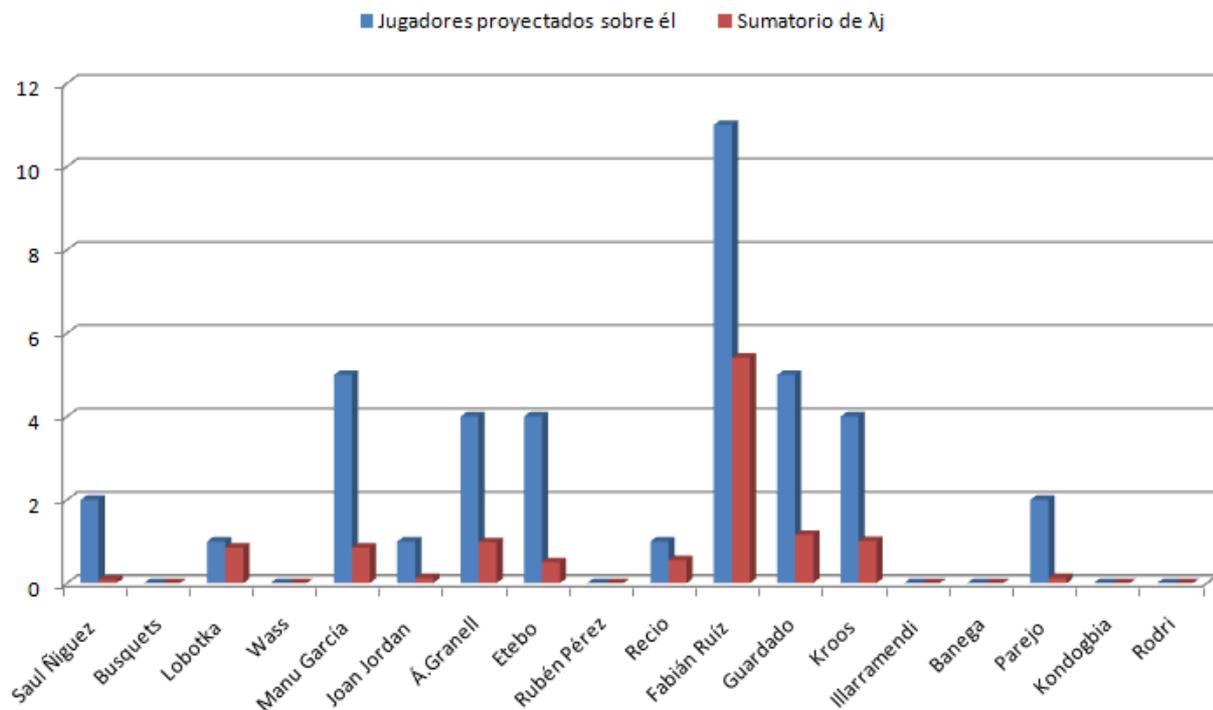


Ilustración 5.2 Resumen de los centrocampistas eficientes

Podemos afirmar que durante La Liga 2017/2018 el jugador más destacado en esta posición fue Fabián Ruiz, y además bastante distanciado de los demás jugadores eficientes. Por su parte Sergio Darder ha sido el jugador estudiado más ineficiente.

5.4 Resultados modelo delanteros

Análogamente al apartado anterior se realizará la exposición y el análisis de los resultados obtenidos del modelo para los delanteros comenzando con el análisis de los valores de β_o de cada jugador.

Tabla 5.5 Eficiencias de los delanteros

Jugadores	Equipo	VALOR DE β_o	EFICIENTE
Aduriz	Ath Bilbao	0	SI
Griezmann	At Madrid	0,76	NO
Messi	Barcelona	0	SI
Suárez	Barcelona	0	SI
Aspas	Celta	0	SI
M.Gómez	Celta	0	SI
Munir	Alavés	0	SI
Adrián	Deportivo	0	SI
Charles	Éibar	1,36	NO
Kike	Éibar	2,13	NO
G.Moreno	Espanyol	0	SI
Ángel	Getafe	0	SI
Portu	Girona	0	SI
Stuani	Girona	0	SI
Calleri	Las Palmas	3,33	NO
Guerrero	Leganés	0	SI
Morales	Levante	0	SI
D.Rolan	Málaga	4,85	NO
Sergio León	Real Betis	0	SI
Loren Morón	Real Betis	0	SI
C.Ronaldo	Real Madrid	0	SI
Bale	Real Madrid	5,2	NO
W.José	Real Sociedad	1,96	NO
M.Oyarzabal	Real Sociedad	1,38	NO
Ben Yedder	Sevilla	0	SI
Rodrigo	Valencia	0	SI
Zaza	Valencia	3,66	NO
Bacca	Villarreal	0	SI
Bakambu	Villarreal	3,09	NO

En esta ocasión hemos obtenido 19 jugadores o unidades productivas eficientes frente a los 10 que no lo han sido. El jugador con mayor valor de la variable β_o y por lo tanto el más ineficiente ha sido Gareth Bale seguido de cerca por Diego Rolan.

Procedemos ahora a exponer el mismo desglose de las variables de salida de las DMUs ineficientes realizado en el apartado anterior, donde se representa la diferencia entre los valores de las salidas tendrían que haber conseguido para ser eficientes y los que obtuvieron.

Tabla 5.6 Desglose salidas delanteros ineficientes

Jugadores	Equipo	REVALORIZACION	GOLES	ASISTENCIAS	REMATESAPUERTA
Griezmann	At Madrid	0,02	4,55	0,76	21,51
Charles	Éibar	3,57	0,00	1,36	1,43
Kike	Éibar	13,44	5,32	2,13	2,13
Calleri	Las Palmas	3,11	3,99	3,33	3,33
D.Rolan	D.Rolan	7,67	3,88	4,86	4,86
Bale	Real Madrid	26,00	4,40	5,20	24,60
W.José	Real Sociedad	0,04	0,00	1,96	6,21
M.Oyarzabal	Real Sociedad	0,03	2,27	1,38	4,30
Zaza	Valencia	0,07	0,00	3,67	5,27
Bakambu	Villarreal	0,06	0,00	3,10	6,47

Jugadores	Equipo	PASESCLAVE	FUERASDEJUEGO
Griezmann	At Madrid	16,41	-0,76
Charles	Éibar	1,36	-1,36
Kike	Éibar	15,58	-2,13
Calleri	Las Palmas	14,49	-3,33
D.Rolan	Málaga	8,34	-4,86
Bale	Real Madrid	11,20	-5,20
W.José	Real Sociedad	2,14	-1,96
M.Oyarzabal	Real Sociedad	1,38	-1,38
Zaza	Valencia	23,76	-3,67
Bakambu	Villarreal	9,03	-3,10

A continuación se muestra un gráfico de barras donde se representa el grado de ineficiencia de los delanteros:

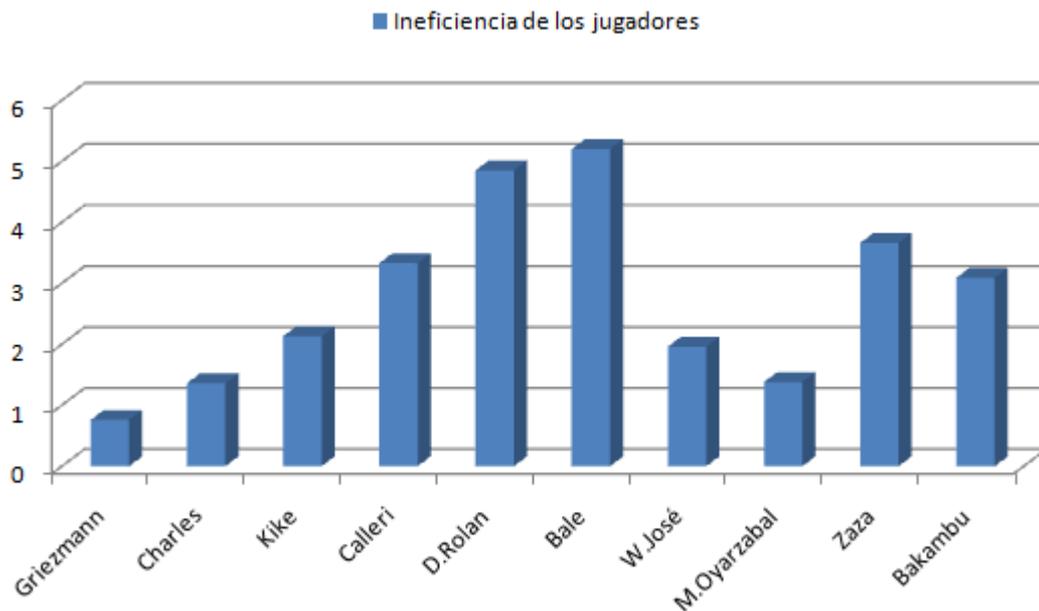


Ilustración 5.3 Grado de ineficiencia de los delanteros

Continuamos con el análisis de los delanteros eficiente y para ellos seguiremos los mismos criterios que utilizamos con los centrocampistas. Atendiendo al número de proyecciones que muestra cada futbolista obtenemos la siguiente tabla:

Tabla 5.7 Sumatorio de jugadores que se proyectan sobre cada delantero

Jugadores	Equipo	Jugadores que se proyectan sobre él
Aduriz	Ath Bilbao	0
Messi	Barcelona	6
Suárez	Barcelona	1
Aspas	Celta	6
M.Gómez	Celta	0
Munir	Alavés	3
Adrián	Deportivo	3
G.Moreno	Espanyol	0
Ángel	Getafe	2
Portu	Girona	0
Stuani	Girona	1
Guerrero	Leganés	1
Morales	Levante	6
Sergio León	Real Betis	0
Loren Morón	Real Betis	2
C.Ronaldo	Real Madrid	0

Ben Yedder	Sevilla	0
Rodrigo	Valencia	6
Bacca	Villarreal	4

Los jugadores modelo han resultado ser Lionel Messi, Iago Aspas, José Luis Morales y Rodrigo Moreno con un total de 6 delanteros proyectados sobre ellos.

Atendiendo al segundo criterio basado en el sumatorio de las intensidades con la que se proyectan sobre cada jugador la tabla resultante ha sido:

Tabla 5.8 Sumatorio de LAMBIDAS para cada delantero eficiente

Jugadores	Equipo	Jugadores que se proyectan sobre él
Aduriz	Ath Bilbao	0
Messi	Barcelona	1,33
Suárez	Barcelona	0,31
Aspas	Celta	1,55
M.Gómez	Celta	0
Munir	Alavés	0,51
Adrián	Deportivo	0,92
G.Moreno	Espanyol	0
Ángel	Getafe	0,51
Portu	Girona	0
Stuani	Girona	0,09
Guerrero	Leganés	0,13
Morales	Levante	1,73
Sergio León	Real Betis	0
Loren Morón	Real Betis	1,16
C.Ronaldo	Real Madrid	0
Ben Yedder	Sevilla	0
Rodrigo	Valencia	1,13
Bacca	Villarreal	0,48

En esta ocasión y según este criterio se reafirman como jugadores más eficientes Morales, Aspas y Messi pero esta vez Loren Morón adelanta a Rodrigo moreno y completan el top 5. Se incluye además el siguiente gráfico como resumen de los jugadores eficientes:

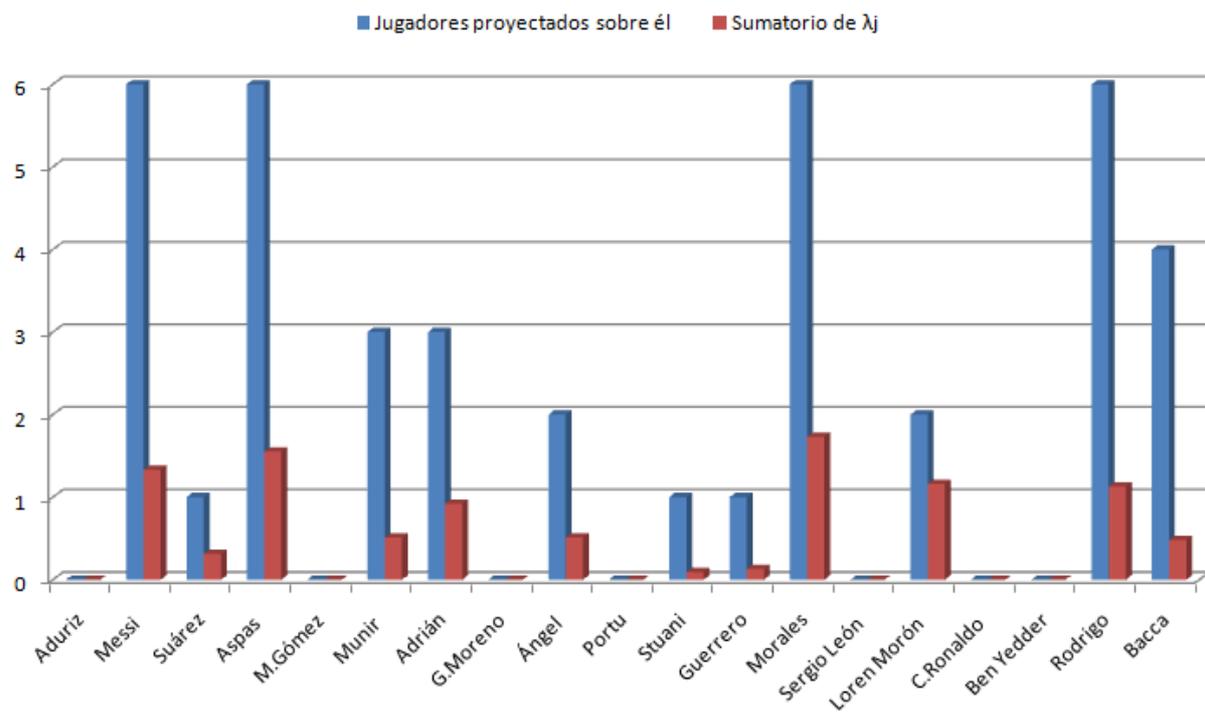


Ilustración 5.4 Resumen de los delanteros eficientes

6 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

Para llegar a una conclusión fundamentada de los resultados de este proyecto se ha estudiado la trayectoria de los jugadores más eficientes de este estudio desde el final de la temporada estudiada hasta el día de hoy.

Comenzando con los centrocampistas el jugador modelo, es decir, el más eficiente fue Fabián Ruiz. El canterano bético fue vendido nada más terminar esa temporada al Nápoles, uno de los equipos punteros en Italia, por 30 millones de euros convirtiéndose así en la venta más cara en la historia del club andaluz. Además de ser convocado con la selección absoluta de España, recientemente se ha convertido en campeón de Europa en el Europeo Sub21 disputado el anterior mes de junio de 2019 en Italia y San Marino, donde fue proclamado MVP del torneo. Actualmente su valor de mercado se ha disparado hasta los 50 millones y es que con tan solo 23 años es uno de los jugadores con más proyección en el mundo del fútbol.

El segundo centrocampista más eficiente fue el mexicano Andrés Guardado que pese a sus 33 años de edad mantiene un elevado valor de mercado, 5 millones de euros. Además acaba de levantar el trofeo de la Copa Oro 2019, la competición regional a nivel de selecciones más importante en Norteamérica, Centro y el Caribe, como capitán. Su desempeño en este torneo ha sido catalogado como excelente jugando todos los encuentros, anotando dos goles y dando asistencias.

Finalmente Manu García, tercer centrocampista más eficiente según nuestro estudio ha rallado a un gran nivel esta temporada aumentando incluso su valor de mercado hasta los 2 millones de euros. Ha sido pieza clave pese a su edad, también 33 años, para que un equipo de bajo presupuesto como el Deportivo Alavés haya peleado hasta final de temporada por alcanzar los puestos que otorgan una plaza europea.

Atendiendo a los delanteros más eficientes Lionel Messi sigue siendo, pese a sus 32 años, uno de los jugadores más valiosos a nivel global con un valor de mercado de 120 millones de euros y para muchos el mejor jugador del mundo. Esta última temporada se ha proclamado por tercera vez consecutiva Bota de Oro, premio otorgado al máximo goleador de las ligas europeas y principal reconocimiento para un delantero en Europa al conseguir nada más y nada menos que 36 goles solo en liga. Además también se ha proclamado campeón de La Liga con el FC Barcelona. Actualmente internacional con Argentina.

Iago Aspas por su parte ha mantenido el gran rendimiento que mostró en la temporada estudiada durante esta temporada obteniendo el premio Zarra, reconocimiento al máximo goleador de La Liga de nacionalidad española al anotar 20 goles. Además ha sido clave para que el RC Celta de Vigo haya mantenido la categoría y actualmente forma parte de la selección española de fútbol.

Por último Rodrigo Moreno se ha proclamado campeón de la Copa del Rey española con el Valencia siendo fundamental para el equipo. Además ha conseguido clasificarse para la próxima edición de la UEFA Champions League, máxima competición de clubes europea y es internacional con España.

Una vez desglosado este análisis podemos llegar a la conclusión de que los jugadores que resultaron más eficientes en nuestro estudio siguen desempeñando un nivel más que sobresaliente esta última temporada por lo que parece que fue una investigación útil y efectiva, por lo que nos podríamos haber valido de los resultados de este estudio para fichar o mantener a los jugadores eficientes y hubieran desempeñado un gran rendimiento.

Como se han ido detallando y exponiendo a lo largo del documento se ha cumplido todos los objetivos planteados en la introducción. El objetivo principal de este estudio lo hemos podido cumplir conociendo qué jugadores han sido eficientes y cuales han resultado ineficientes. Además hemos podido obtener la información de qué jugadores se proyectan sobre otros y las holguras de los futbolistas.

Cada temporada es diferente para cada jugador por lo que parece lógica la realización de este tipo de estudios de manera periódica de tal manera que podamos conocer cuál es la progresión o la trayectoria de un jugador.

También es importante mencionar que pese a que los resultados han sido los deseados, mediante la realización de otros modelos podemos perfeccionar esta investigación. Asimismo cabe mencionar lo novedoso de esta investigación al estudiar la eficiencia de futbolistas mediante esta metodología, pudiendo ser la base para una gran cantidad de estudios e investigaciones.

Relacionado con ello se expondrán las líneas futuras de este proyecto:

- El estudio de otras competiciones futbolísticas como pueden ser ligas domésticas de otros países, competiciones continentales de clubes como la Champions League, la Europa League o la Copa Libertadores; competiciones internacionales como la Nation League, La Eurocopa o el Mundial e incluso otras competiciones menores como las copas de cada país o torneos de categorías inferiores.
- La utilización de otro de los diversos modelos que componen la tecnología DEA como puede ser el SBM (Slack Based Measure) o los modelos básicos de CCR Y BCC, entre muchos de ellos.
- Aplicar estos modelos al resto de posiciones que existen en el fútbol como por ejemplo los porteros, defensas o incluso a posiciones más específicas como la de lateral, carrilero o centrocampista ofensivo.
- Aumentar el número de unidades productivas estudiadas, llegando pudiendo llegar incluso a estudiar todos los participantes de una competición.
- Realizar el estudio aplicando orientaciones de entrada y salida.
- Utilizar el retorno de escala variable en vez del constante de tal manera que se diferencie la capacidad de producción que puede alcanzar un jugador según su tamaño.
- Aumentar el número de variables de entradas y salidas y seleccionar otras diferentes que puedan medir mejor el rendimiento de las unidades productivas en estudio.
- Tratar las variables las variables de salida indeseables de otra de las formas que hemos explicado en la teoría.

7 REFERENCIAS

- Adler, N., Golany, B., (2001). Evaluation of deregulated airline networks using data envelopment analysis combined with principal component analysis with an application to Western Europe. *European J. Oper. Res.* 132 (2), 260–273.
- Ali, A.I., Seiford, L.M., (1990). Translation-invariance in data envelopment analysis. *Operat. Res. Lett.* 9 (6), 403–405.
- Amado, C.A.F., Santos, S.P., Marques, P.M., (2012). Integrating the Data Envelopment Analysis and the Balanced Scorecard approaches for enhanced performance assessment. *Omega* 40 (3), 390–403.
- Ball, V.E., Lovell, C.K., Luu, H., Nehring, R., (2004). Incorporating environmental impacts in the measurement of agricultural productivity growth. *J. Agric. Resour. Econ.* 29 (3), 436–460.
- Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). SOME MODELS FOR ESTIMATING TECHNICAL AND SCALE INEFFICIENCIES IN DATA ENVELOPMENT ANALYSIS. *Management Science*, 30(9), 1078-1092. doi:10.1287/mnsc.30.9.1078.
- Barros, C. P., & Leach, S. (2006). Performance evaluation of the English Premier Football League with data envelopment analysis. *Applied Economics*, 38, 1449–1458.
- Boscá, J. E., Liern, V., Martínez, A., & Sala, R. (2009). Increasing offensive or defensive efficiency? An analysis of Italian and Spanish football. *Omega*, 37, 63–78.
- Chambers, R.G., Chung, Y., Färe, R., (1998). Profit directional distance functions and Nerlovian efficiency. *Journal of Optimization Theory and Applications* 95, 351–354.
- Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2(6), 429-444. doi:10.1016/0377-2217(78)90138-8.
- Chung, Y. H., Färe, R., & Grosskopf, S. (1997). Productivity and undesirable outputs: A directional distance function approach. *Journal of Environmental Management*, 51(3), 229-240. doi:10.1006/jema.1997.0146.
- Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Zhu, J. (2011). Data envelopment analysis: History, models, and interpretations. doi:10.1007/978-1-4419-6151-8_1.
- Espitia-Escuer, M., & García-Cebrián, L. I. (2004). Measuring the efficiency of spanish first-division soccer teams. *Journal of Sports Economics*, 5(4), 329-346. doi:10.1177/1527002503258047.
- Espitia-Escuer, M., & García-Cebrián, L. I. (2006). Performance in sports teams: Results and potential in the professional soccer league in Spain. *Management Decision*, 44(8), 1020–1030.
- Espitia-Escuer, M., & García-Cebrián, L. I. (2008). Measuring the productivity of Spanish First division soccer teams. *European Sport Management Quarterly*, 8(3), 229–246.
- Espitia-Escuer, M., & García-Cebrián, L. I. (2010). Measurement of the efficiency of football teams in the champions league. *Managerial and Decision Economics*, 31(6), 373-386. doi:10.1002/mde.1491.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., Pasurka, C., (1989). Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach. *Rev. Econ. Stat.* 71, 90–98.

- Färe, R., & Grosskopf, S. (2010). Directional distance functions and slacks-based measures of efficiency. *European Journal of Operational Research*, 200(1), 320-322. doi:10.1016/j.ejor.2009.01.031.
- Farrell MJ.(1957) The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*. 120:253–81.
- García-Sánchez, I. M. (2007). Efficiency and effectiveness of Spanish football teams: A three-stage-DEA approach". *Central European Journal of Operations Research*, 15, 21–45.
- Gomes, E.G., Lins, M.P.E., (2008). Modelling undesirable outputs with zero sum gains data envelopment analysis models. *J. Oper. Res. Soc.* 59 (5), 616–623.
- Golany, B., Roll, Y., (1989). An application procedure for DEA. *Omega* 17 (3), 237–250
- Guzmán, I., & Morrow, S. (2007). Measuring efficiency and productivity in professional football teams: Evidence from the english premier league. *Central European Journal of Operations Research*, 15(4), 309-328. doi:10.1007/s10100-007-0034-y.
- Haas, D. J. (2003). Productive efficiency of english football teams - A data envelopment analysis approach. *Managerial and Decision Economics*, 24(5), 403-410. doi:10.1002/mde.1105.
- Haas, D. J. (2003). Technical efficiency in the major league soccer. *Journal of Sports Economics*, 4(3), 203-215. doi:10.1177/1527002503252144.
- Haas, D., Kocher, M. G., & Sutter, M. (2004). Measuring efficiency of German football teams by data envelopment analysis. *Central European Journal of Operations Research*, 12(3), 251–268.
- Hailu, A., Veeman, T.S., (2001). Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: An application to the Canadian pulp and paper industry. *Amer. J. Agric. Econ.* 83 (3), 605–616.
- Halkos, G., Papageorgiou, G., 2014. Spatial environmental efficiency indicators in regional waste generation: A nonparametric approach. MPRA Paper (53400).
- Halkos, G., & Petrou, K. N. (2019). Treating undesirable outputs in DEA: A critical review. *Economic Analysis and Policy*, 62, 97-104. doi:10.1016/j.eap.2019.01.005.
- He, F., Zhang, Q., Lei, J., Fu, W., Xu, X., (2013). Energy efficiency and productivity change of China's iron and steel industry: Accounting for undesirable outputs. *Energy Policy* 54, 204–213.
- Kemeny, J.G., Morgenstern, O., Thompson, G.L., (1956). A generalization of the von Neumann model of an expanding economy. *Econometrica* 24, 115–135.
- Koopmans, T., (1951). Analysis of production as an efficient combination of activities. In: *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley and Sons, New York, pp. 33–97.
- Korhonen, P., Luptacik, M., (2003). Eco-efficiency analysis of power plants: An extension of data envelopment analysis. *European J. Oper. Res.* 154, 437–446.
- Kortelainen, M., (2008). Dynamic environmental performance analysis: a Malmquist index approach. *Ecol. Econom.* 64, 701–715.
- Lansink, A.O., Bezlepkin, I.,(2003). The effect of heating technologies on CO2 and energy efficiency of Dutch greenhouse firms. *J. Environ. Manag.* 68, 73–82.

- Lovell, C.A.K., Pastor, J.T., Turner, J.A., (1995). Measuring macroeconomic performance in the OECD: A comparison of European and non-European countries. *European J. Oper. Res.* 87, 507–518.
- Lozano, S., & Gutiérrez, E. (2011). Slacks-based measure of efficiency of airports with airplanes delays as undesirable outputs. *Computers and Operations Research*, 38(1), 131-139. doi:10.1016/j.cor.2010.04.007.
- Pathomsiri, S., Haghani, A., Dresner, M., Windle, R.J., (2008). Impact of undesirable outputs on the productivity of US airports. *Transp. Res. E* 44, 235–259.
- Picazo-Tadeo, A., & González-Gómez, F. (2010). Does playing several competitions influence a team's league performance? Evidence from Spanish professional football. *Central European Journal of Operations Research*, 18, 413–432.
- Pittman, R., (1983). Multilateral productivity comparisons with undesirable outputs. *Econ. J.* 93, 883–891.
- Portela, M. C. A. S., Thanassoulis, E., & Simpson, G. (2004). Negative data in DEA: A directional distance approach applied to bank branches. *Journal of the Operational Research Society*, 55(10), 1111-1121. doi:10.1057/palgrave.jors.2601768.
- Reinhard, S., Lovell, C.A.K., Thijssen, G., (2000). Environmental efficiency with multiple environmentally detrimental variables estimated with SFA and DEA. *European J. Oper. Res.* 121, 287–303.
- Scheel, H., (2001). Undesirable outputs in efficiency evaluations. *European J. Oper. Res.* 132, 400–410.
- Seiford, L.M., Zhu, J., (2001). Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European J. Oper. Res.* 142, 16–20.
- Shephard, R.W., (1970). *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton University Press, Princeton.
- Tone, K. (2001). Slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130(3), 498-509. doi:10.1016/S0377-2217(99)00407-5.
- Tyteca, D., 1996. On the measurement of the environmental performance of firms—A literature review and a productivity efficiency perspective. *J. Environ. Manag.* 46, 281–308.
- Tyteca, D., 1997. Linear programming models for the measurement of environmental performance of firms – Concepts and empirical results. *J. Prod. Anal.* 8, 183–197.
- Villa, G. (2003) *Análisis por Envoltura de Datos (DEA): Nuevos modelos y aplicaciones (Tesis doctoral)*; Universidad de Sevilla; Sevilla, 559 pp.
- Villa, G., & Lozano, S. (2016). Assessing the scoring efficiency of a football match. *European Journal of Operational Research*, 255(2), 559-569. doi:10.1016/j.ejor.2016.05.024.
- Yang, H., & Pollitt, M., (2009). Incorporating both undesirable outputs and uncontrollable variables into DEA: The performance of Chinese coal-fired power plants. *European J. Oper. Res.* 197, 1095–1105.
- Zhang, N., Zhou, P., Choi, Y., (2013). Energy efficiency, CO2 emission performance and technology gaps in fossil fuel electricity generation in Korea: a metafrontier non-radial directional distance function analysis. *Energy Policy* 56, 653–662.

Zambom-Ferraresi, F., García-Cebrián, L. I., Lera-López, F., & Iráizoz, B. (2017). Performance evaluation in the UEFA champions league. *Journal of Sports Economics*, 18(5), 448-470
doi:10.1177/1527002515588135.

Sitios web:

<https://www.laliga.es/>

https://files.laliga.es/pdf-hd/informe-economico/informe-economico-2017_v3.pdf

<https://www.laliga.es/noticias/la-industria-del-futbol-profesional-genera-185-000-empleos-4-100-me-en-impuestos-y-una-facturacion-equivalente-al-137-del-pib-en-espana>

<https://www.transfermarkt.es/>

https://resultados.as.com/resultados/futbol/primera/2017_2018/ranking/

<https://www.expansion.com/directivos/deporte-negocio/2019/01/30/5c517ee9e2704e22598b45d6.html>

<https://www.bbc.com/mundo/deportes-42723710>

ANEXO A- ENTRADAS Y SALIDAS

Datos de entrada centrocampistas:

Tabla 0.1 Anexo A - Datos de las entradas de los centrocampistas

Jugadores	Equipo	VALOR	MINUTOS
Mikel San José	Ath Bilbao	12,00	56,76
Saúl Ñíguez	At Madrid	40,00	83,08
Rakitic	Barcelona	45,00	74,71
Busquets	Barcelona	60,00	68,42
Lobotka	Celta	5,00	80,55
Wass	Celta	10,00	77,39
Manu García	Alavés	1,50	64,18
T. Pina	Alavés	1,50	62,97
Borges	Deportivo	5,00	60,71
Joan Jordán	Éibar	1,00	63,76
D. García	Éibar	5,00	73,18
Darder	Espanyol	11,00	73,42
Faycal Fajr	Getafe	2,00	62,74
Arambarri	Getafe	1,50	56,18
Á.Granell	Girona	1,00	75,13
Etebo	Las Palmas	1,50	32,00
Rubén Pérez	Leganés	2,50	66,34
Campaña	Levante	2,50	72,24
Recio	Málaga	3,50	48,45
Fabián Ruíz	Real Betis	0,50	70,05
Guardado	Real Betis	6,00	59,66
Kroos	Real Madrid	70,00	59,68
Modric	Real Madrid	40,00	52,00
Illarramendi	Real Sociedad	15,00	83,29
Banega	Sevilla	16,00	63,08
Parejo	Valencia	15,00	79,08
Kondogbia	Valencia	18,00	68,89
Rodri	Villarreal	2,50	84,95
Trigueros	Villarreal	15,00	71,29

Datos de entrada delanteros:

Tabla 0.2 Anexo A - Datos de las entradas de los delanteros

Jugadores	Equipo	VALOR	MINUTOS
Aduriz	Ath Bilbao	1,00	56,55
Griezmann	At Madrid	80,00	66,55
Messi	Barcelona	120,00	78,84
Suárez	Barcelona	90,00	76,29
Aspas	Celta	18,00	77,29
M.Gómez	Celta	4,00	80,97
Munir	Alavés	9,00	64,63
Adrián	Deportivo	3,50	61,74
Charles	Éibar	1,50	41,58
Kike	Éibar	3,00	64,84
G.Moreno	Espanyol	8,00	89,82
Ángel	Getafe	1,00	60,47
Portu	Girona	1,80	79,21
Stuani	Girona	3,50	71,63
Calleri	Las Palmas	5,00	81,87
Guerrero	Leganés	1,50	37,84
Morales	Levante	2,00	80,66
D.Rolan	Málaga	8,00	51,16
Sergio León	Real Betis	3,50	52,13
Loren Morón	Real Betis	0,15	28,00
C.Ronaldo	Real Madrid	100,00	60,32
Bale	Real Madrid	80,00	47,45
W.José	Real Sociedad	12,00	73,16
M.Oyarzabal	Real Sociedad	15,00	73,13
Ben Yedder	Sevilla	15,00	44,71
Rodrigo	Valencia	7,50	70,92
Zaza	Valencia	15,00	54,68
Bacca	Villarreal	18,00	66,08
Bakambu	Villarreal	16,00	33,39

Datos de salida centrocampistas:

Tabla 0.3 Anexo A - Datos de las salidas de los centrocampistas

Jugadores	Equipo	REVALORIZACION	GOLES	ASISTENCIAS	ENTRADASGANADAS
Mikel San José	Ath Bilbao	-3,00	1,00	1,00	37,00
Saúl Ñíguez	At Madrid	30,00	2,00	3,00	90,00
Rakitic	Barcelona	5,00	1,00	5,00	31,00
Busquets	Barcelona	20,00	1,00	4,00	48,00
Lobotka	Celta	10,00	0,00	0,00	45,00
Wass	Celta	5,00	4,00	9,00	21,00
Manu García	Alavés	0,30	3,00	0,00	65,00
T. Pina	Alavés	0,30	1,00	0,00	49,00
Borges	Deportivo	-1,00	3,00	3,00	39,00
Joan Jordán	Éibar	3,00	6,00	4,00	24,00
D. García	Éibar	-1,00	0,00	1,00	59,00
Darder	Espanyol	0,00	1,00	2,00	43,00
Faycal Fajr	Getafe	0,50	1,00	4,00	45,00
Arambarri	Getafe	1,50	1,00	1,00	41,00
Á.Granell	Girona	4,00	1,00	7,00	53,00
Etebo	Las Palmas	-0,50	0,00	1,00	17,00
Rubén Pérez	Leganés	5,00	0,00	0,00	61,00
Campaña	Levante	5,00	1,00	4,00	36,00
Recio	Málaga	-1,50	1,00	2,00	42,00
Fabián Ruíz	Real Betis	19,50	3,00	6,00	53,00
Guardado	Real Betis	-0,50	2,00	8,00	27,00
Kroos	Real Madrid	10,00	5,00	7,00	35,00
Modric	Real Madrid	-15,00	1,00	6,00	22,00
Illarramendi	Real Sociedad	5,00	7,00	5,00	57,00
Banega	Sevilla	-4,00	3,00	3,00	53,00
Parejo	Valencia	5,00	7,00	7,00	57,00
Kondogbia	Valencia	12,00	4,00	4,00	57,00
Rodri	Villarreal	22,50	1,00	3,00	71,00
Trigueros	Villarreal	5,00	3,00	4,00	41,00

Jugadores	Equipo	FALTASRECIBIDAS	PASESBUENOS	PASESCLAVE
Mikel San José	Ath Bilbao	8,00	30,61	12,00
Saúl Ñíguez	At Madrid	35,00	38,69	21,00
Rakitic	Barcelona	46,00	64,37	29,00
Busquets	Barcelona	58,00	65,45	24,00
Lobotka	Celta	47,00	49,52	10,00
Wass	Celta	53,00	33,91	55,00
Manu García	Alavés	72,00	24,06	16,00
T. Pina	Alavés	29,00	26,46	10,00
Borges	Deportivo	13,00	29,56	25,00
Joan Jordán	Éibar	17,00	28,08	39,00
D. García	Éibar	25,00	40,72	18,00
Darder	Espanyol	31,00	34,23	28,00
Faycal Fajr	Getafe	37,00	22,58	34,00
Arambarri	Getafe	42,00	16,07	9,00
Á.Granell	Girona	39,00	39,09	75,00
Etebo	Las Palmas	46,00	38,29	7,00
Rubén Pérez	Leganés	47,00	36,74	14,00
Campaña	Levante	31,00	37,66	49,00
Recio	Málaga	44,00	35,95	24,00
Fabián Ruíz	Real Betis	35,00	52,94	33,00
Guardado	Real Betis	39,00	43,59	46,00
Kroos	Real Madrid	38,00	71,37	64,00
Modric	Real Madrid	31,00	53,46	39,00
Illarramendi	Real Sociedad	68,00	61,19	34,00
Banega	Sevilla	51,00	59,68	66,00
Parejo	Valencia	67,00	59,50	70,00
Kondogbia	Valencia	53,00	43,65	22,00
Rodri	Villarreal	35,00	60,19	23,00
Trigueros	Villarreal	43,00	46,73	43,00

Jugadores	Equipo	TARJETAS	rangoREVALORIZACION
Mikel San José	Ath Bilbao	5,00	33,00
Saúl Ñíguez	At Madrid	9,00	0,00
Rakitic	Barcelona	4,00	25,00
Busquets	Barcelona	8,00	10,00
Lobotka	Celta	2,00	20,00
Wass	Celta	4,00	25,00
Manu García	Alavés	9,00	29,70
T. Pina	Alavés	8,00	29,70
Borges	Deportivo	4,00	31,00
Joan Jordán	Éibar	2,00	27,00
D. García	Éibar	14,00	31,00
Darder	Espanyol	7,00	30,00
Faycal Fajr	Getafe	6,00	29,50
Arambarri	Getafe	9,00	28,50
Á.Granell	Girona	10,00	26,00
Etebo	Las Palmas	3,00	30,50
Rubén Pérez	Leganés	13,00	25,00
Campaña	Levante	9,00	25,00
Recio	Málaga	10,00	31,50
Fabián Ruíz	Real Betis	3,00	10,50
Guardado	Real Betis	7,00	30,50
Kroos	Real Madrid	4,00	20,00
Modric	Real Madrid	3,00	45,00
Illarramendi	Real Sociedad	9,00	25,00
Banega	Sevilla	10,00	34,00
Parejo	Valencia	16,00	25,00
Kondogbia	Valencia	12,00	18,00
Rodri	Villarreal	8,00	7,50
Trigueros	Villarreal	10,00	25,00

Datos de salida delanteros:

Tabla 0.4 Anexo A - Datos de las salidas de los delanteros

Jugadores	Equipo	REVALORIZACION	GOLES	ASISTENCIAS	REMATESAPUERTA
Aduriz	Ath Bilbao	0,00	9,00	1,00	28,00
Griezmann	At Madrid	20,00	19,00	9,00	40,00
Messi	Barcelona	60,00	34,00	12,00	96,00
Suárez	Barcelona	-20,00	25,00	12,00	56,00
Aspas	Celta	7,00	22,00	5,00	44,00
M.Gómez	Celta	21,00	17,00	4,00	38,00
Munir	Alavés	3,00	10,00	6,00	23,00
Adrián	Deportivo	0,50	9,00	6,00	20,00
Charles	Éibar	0,00	8,00	1,00	16,00
Kike	Éibar	0,00	8,00	1,00	27,00
G.Moreno	Espanyol	12,00	16,00	1,00	48,00
Ángel	Getafe	3,00	13,00	2,00	31,00
Portu	Girona	8,20	11,00	5,00	25,00
Stuani	Girona	4,00	21,00	0,00	37,00
Calleri	Las Palmas	1,00	9,00	3,00	28,00
Guerrero	Leganés	0,30	4,00	3,00	12,00
Morales	Levante	5,00	10,00	8,00	25,00
D.Rolan	Málaga	-4,50	5,00	0,00	17,00
Sergio León	Real Betis	1,50	11,00	1,00	28,00
Loren Morón	Real Betis	7,35	7,00	0,00	14,00
C.Ronaldo	Real Madrid	0,00	26,00	5,00	77,00
Bale	Real Madrid	10,00	16,00	2,00	33,00
W.José	Real Sociedad	13,00	15,00	4,00	29,00
M.Oyarzabal	Real Sociedad	20,00	12,00	5,00	32,00
Ben Yedder	Sevilla	13,00	9,00	3,00	28,00
Rodrigo	Valencia	32,50	16,00	4,00	40,00
Zaza	Valencia	7,00	13,00	1,00	24,00
Bacca	Villarreal	-8,00	15,00	6,00	35,00
Bakambu	Villarreal	11,00	9,00	0,00	16,00

Jugadores	Equipo	PASESCLAVE	REGATES
Aduriz	Ath Bilbao	11,00	19,00
Griezmann	At Madrid	44,00	28,00
Messi	Barcelona	87,00	185,00
Suárez	Barcelona	57,00	39,00
Aspas	Celta	69,00	58,00
M.Gómez	Celta	22,00	14,00
Munir	Alavés	41,00	28,00
Adrián	Deportivo	34,00	38,00
Charles	Éibar	17,00	4,00
Kike	Éibar	14,00	13,00
G.Moreno	Espanyol	44,00	63,00
Ángel	Getafe	18,00	22,00
Portu	Girona	40,00	50,00
Stuani	Girona	13,00	15,00
Calleri	Las Palmas	27,00	31,00
Guerrero	Leganés	14,00	9,00
Morales	Levante	47,00	91,00
D.Rolan	Málaga	20,00	42,00
Sergio León	Real Betis	10,00	20,00
Loren Morón	Real Betis	7,00	19,00
C.Ronaldo	Real Madrid	38,00	31,00
Bale	Real Madrid	41,00	31,00
W.José	Real Sociedad	40,00	18,00
M.Oyarzabal	Real Sociedad	43,00	40,00
Ben Yedder	Sevilla	28,00	16,00
Rodrigo	Valencia	35,00	44,00
Zaza	Valencia	15,00	13,00
Bacca	Villarreal	30,00	35,00
Bakambu	Villarreal	15,00	10,00

Jugadores	Equipo	FUERASDEJUEGO	rangoREVALORIZACION
Aduriz	Ath Bilbao	35,00	60,00
Griezmann	At Madrid	26,00	40,00
Messi	Barcelona	13,00	0,00
Suárez	Barcelona	56,00	80,00
Aspas	Celta	11,00	53,00
M.Gómez	Celta	32,00	39,00
Munir	Alavés	45,00	57,00
Adrián	Deportivo	12,00	59,50
Charles	Éibar	11,00	60,00
Kike	Éibar	13,00	60,00
G.Moreno	Espanyol	36,00	48,00
Ángel	Getafe	32,00	57,00
Portu	Girona	23,00	51,80
Stuani	Girona	22,00	56,00
Calleri	Las Palmas	39,00	59,00
Guerrero	Leganés	13,00	59,70
Morales	Levante	9,00	55,00
D.Rolan	Málaga	19,00	64,50
Sergio León	Real Betis	11,00	58,50
Loren Morón	Real Betis	5,00	52,65
C.Ronaldo	Real Madrid	40,00	60,00
Bale	Real Madrid	13,00	50,00
W.José	Real Sociedad	21,00	47,00
M.Oyarzabal	Real Sociedad	17,00	40,00
Ben Yedder	Sevilla	21,00	47,00
Rodrigo	Valencia	20,00	27,50
Zaza	Valencia	16,00	53,00
Bacca	Villarreal	40,00	68,00
Bakambu	Villarreal	11,00	49,00

ANEXO B- PROGRAMACIÓN LINGO

Programación Lingo modelo centrocampistas:

```

SETS: !Definimos conjuntos del modelo, en este caso interesa que sea una
matriz ;

        JUGADORES: BETA, THETA, VALOR, MINUTOS, REVALORIZACION, GOLES,
ASISTENCIAS, ENTRADASGANADAS, FALTASRECIBIDAS, PASESBUENOS, PASESCLAVE,
TARJETAS,
                rangoREVALORIZACION, REVALORIZACION1, GOLES1, ASISTENCIAS1,
ENTRADASGANADAS1, FALTASRECIBIDAS1, PASESBUENOS1, PASESCLAVE1, TARJETAS1;

        JJ(JUGADORES, JUGADORES): LAMBDA;

ENDSETS

DATA:
        JUGADORES = 1..29;

!Leemos datos desde EXCEL;

        VALOR, MINUTOS, REVALORIZACION, GOLES, ASISTENCIAS, ENTRADASGANADAS,
FALTASRECIBIDAS, PASESBUENOS, PASESCLAVE, TARJETAS =
@OLE('datosCentrocampistas.xls');
        rangoREVALORIZACION = @OLE('datosCentrocampistas.xls');

!Escribimos datos en EXCEL correspondientes a las holguras de las diferentes
variables del modelo;

        @OLE('datosCentrocampistas.xls')=REVALORIZACION1, GOLES1, ASISTENCIAS1,
ENTRADASGANADAS1, FALTASRECIBIDAS1, PASESBUENOS1, PASESCLAVE1, TARJETAS1;
        @OLE('datosCentrocampistas.xls')=BETA, THETA;
        @OLE('datosCentrocampistas.xls')=LAMBDA;

ENDDATA

MAX= TFO;
TFO=@SUM(JUGADORES(INDICEJ):BETA(INDICEJ));

! slackS RESTRICTIONS;

@FOR(JUGADORES(INDICEJ):

!entradas;

        @SUM(JUGADORES(INDICE2J):VALOR(INDICE2J)*LAMBDA(INDICEJ,INDICE2J))<=
VALOR(INDICEJ);
        @SUM(JUGADORES(INDICE2J):MINUTOS(INDICE2J)*LAMBDA(INDICEJ,INDICE2J))<=
MINUTOS(INDICEJ);

!salidas (una es no deseable);

        REVALORIZACION1(INDICEJ) =
@SUM(JUGADORES(INDICE2J):REVALORIZACION(INDICE2J)*LAMBDA(INDICEJ,INDICE2J));
        REVALORIZACION1(INDICEJ) >= REVALORIZACION(INDICEJ) +
@IF(rangoREVALORIZACION(INDICEJ) #GT# 0,
BETA(INDICEJ)*(1/rangoREVALORIZACION(INDICEJ)), 0);

```

```

@SUM(JUGADORES (INDICE2J) :REVALORIZACION (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE
2J)) >= REVALORIZACION (INDICEJ) + @IF (rangoREVALORIZACION (INDICEJ) #GT# 0,
BETA (INDICEJ) * (1/rangoREVALORIZACION (INDICEJ)), 0);

GOLES1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :GOLES (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
GOLES1 (INDICEJ) >= GOLES (INDICEJ);

ASISTENCIAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :ASISTENCIAS (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
ASISTENCIAS1 (INDICEJ) >= ASISTENCIAS (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

ENTRADASGANADAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :ENTRADASGANADAS (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
THETA (INDICEJ) *ENTRADASGANADAS1 (INDICEJ) >= ENTRADASGANADAS (INDICEJ) +
BETA (INDICEJ);

FALTASRECIBIDAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :FALTASRECIBIDAS (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
FALTASRECIBIDAS1 (INDICEJ) >= FALTASRECIBIDAS (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

PASESBUENOS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :PASESBUENOS (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
PASESBUENOS1 (INDICEJ) >= PASESBUENOS (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

PASESCLAVE1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :PASESCLAVE (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
PASESCLAVE1 (INDICEJ) >= PASESCLAVE (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

TARJETAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) :TARJETAS (INDICE2J) *LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
THETA (INDICEJ) *TARJETAS1 (INDICEJ) = TARJETAS (INDICEJ) - BETA (INDICEJ);

THETA (INDICEJ) <=1;

@FREE (REVALORIZACION1 (INDICEJ));

);

```

Programación Lingo modelo delanteros:

```

SETS: !Definimos conjuntos del modelo, en este caso interesa que sea una
matriz ;

        JUGADORES: BETA, THETA, VALOR, MINUTOS, REVALORIZACION, GOLES,
ASISTENCIAS, ENTRADASGANADAS, FALTASRECIBIDAS, PASESBUENOS, PASESCLAVE,
TARJETAS,
                rangoREVALORIZACION, REVALORIZACION1, GOLES1, ASISTENCIAS1,
ENTRADASGANADAS1, FALTASRECIBIDAS1, PASESBUENOS1, PASESCLAVE1, TARJETAS1;

        JJ(JUGADORES, JUGADORES): LAMBDA;

ENDSETS

DATA:
        JUGADORES = 1..29;

!Leemos datos desde EXCEL;

        VALOR, MINUTOS, REVALORIZACION, GOLES, ASISTENCIAS, ENTRADASGANADAS,
FALTASRECIBIDAS, PASESBUENOS, PASESCLAVE, TARJETAS =
@OLE('datosCentrocampistas.xls');
        rangoREVALORIZACION = @OLE('datosCentrocampistas.xls');

!Escribimos datos en EXCEL correspondientes a las holguras de las diferentes
variables del modelo;

        @OLE('datosCentrocampistas.xls')=REVALORIZACION1, GOLES1, ASISTENCIAS1,
ENTRADASGANADAS1, FALTASRECIBIDAS1, PASESBUENOS1, PASESCLAVE1, TARJETAS1;
        @OLE('datosCentrocampistas.xls')=BETA, THETA;
        @OLE('datosCentrocampistas.xls')=LAMBDA;

ENDDATA

MAX= TFO;
TFO=@SUM(JUGADORES(INDICEJ):BETA(INDICEJ));

! slackS RESTRICTIONS;

@FOR(JUGADORES(INDICEJ):

!entradas;

        @SUM(JUGADORES(INDICE2J):VALOR(INDICE2J)*LAMBDA(INDICEJ,INDICE2J))<=
VALOR(INDICEJ);
        @SUM(JUGADORES(INDICE2J):MINUTOS(INDICE2J)*LAMBDA(INDICEJ,INDICE2J))<=
MINUTOS(INDICEJ);

!salidas (una es no deseable);

        REVALORIZACION1(INDICEJ) =
@SUM(JUGADORES(INDICE2J):REVALORIZACION(INDICE2J)*LAMBDA(INDICEJ,INDICE2J));
        REVALORIZACION1(INDICEJ) >= REVALORIZACION(INDICEJ) +
@IF(rangoREVALORIZACION(INDICEJ) #GT# 0,
BETA(INDICEJ)*(1/rangoREVALORIZACION(INDICEJ)), 0);

```

```

GOLES1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : GOLES (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
GOLES1 (INDICEJ) >= GOLES (INDICEJ);

ASISTENCIAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : ASISTENCIAS (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
ASISTENCIAS1 (INDICEJ) >= ASISTENCIAS (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

ENTRADASGANADAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : ENTRADASGANADAS (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
THETA (INDICEJ) * ENTRADASGANADAS1 (INDICEJ) >= ENTRADASGANADAS (INDICEJ) +
BETA (INDICEJ);

FALTASRECIBIDAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : FALTASRECIBIDAS (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
FALTASRECIBIDAS1 (INDICEJ) >= FALTASRECIBIDAS (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

PASESBUENOS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : PASESBUENOS (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
PASESBUENOS1 (INDICEJ) >= PASESBUENOS (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

PASESCLAVE1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : PASESCLAVE (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
PASESCLAVE1 (INDICEJ) >= PASESCLAVE (INDICEJ) + BETA (INDICEJ);

TARJETAS1 (INDICEJ) =
@SUM (JUGADORES (INDICE2J) : TARJETAS (INDICE2J) * LAMBDA (INDICEJ, INDICE2J));
THETA (INDICEJ) * TARJETAS1 (INDICEJ) = TARJETAS (INDICEJ) - BETA (INDICEJ);

THETA (INDICEJ) <= 1;

@FREE (REVALORIZACION1 (INDICEJ));

);

```


ANEXO C- VALORES PARA LA EFICIENCIA DE VARIABLES INEFICIENTES

Para los centrocampistas:

Tabla 0.1 Anexo C - Holguras centrocampistas ineficientes

Jugadores	Equipo	REVALORIZACION	GOLES	ASISTENCIAS	ENTRADASGANADAS
Mikel San José	Ath Bilbao	13,93633368	1,913163253	3,826326506	40,55269389
Rakitic	Barcelona	16,48109397	3,526068782	6,472773269	51,79057425
T. Pina	Alavés	13,00512618	2,732899556	3,854686485	52,53811471
Borges	Deportivo	15,09462254	3	5,021027232	42,96552913
D. García	Éibar	4,168263005	1,836589526	3,954058416	61,95405842
Darder	Espanyol	20,37574528	3,167124912	6,306174271	55,45341917
Faycal Fajr	Getafe	12,64602615	2,643859874	5,18011303	46,18011303
Arambarri	Getafe	3,505104139	1,667717431	3,459377388	43,45937739
Campaña	Levante	8,788961432	2,16303681	7,32557601	47,40843169
Modric	Real Madrid	7,262195323	3,460425182	6,090047349	29,96382842
Trigueros	Villarreal	7,693941323	3,30102347	7,39064344	44,39064344

Jugadores	Equipo	FALTASRECIDIDAS	PASESBUENOS	PASESCLAVE	TARJETAS
Mikel San José	Ath Bilbao	29,37386887	41,19277981	22,54556832	2,21331776
Rakitic	Barcelona	47,47277327	67,51418109	43,14125061	4,030654314
T. Pina	Alavés	41,92707304	40,63303509	25,53309279	4,461885293
Borges	Deportivo	28,51430541	43,41948983	29,69596691	2,510513616
D. García	Éibar	55,13049835	43,67405842	43,00132115	11,04594158
Darder	Espanyol	36,75950078	55,73138181	34,92260068	3,157766394
Faycal Fajr	Getafe	38,18011303	46,52187213	35,18011303	4,81988697
Arambarri	Getafe	44,45937739	32,78469552	33,34028593	6,540622612
Campaña	Levante	39,59963395	48,12958123	53,2677377	6,840727318
Modric	Real Madrid	32,47879469	53,55004735	48,01364236	3,947176779
Trigueros	Villarreal	46,39064344	54,94122098	48,317489	6,60935656

Para los delanteros:

Tabla 0.2 Anexo C - Holguras delanteros ineficientes

Jugadores	Equipo	REVALORIZACION	GOLES	ASISTENCIAS	REMATESAPUERTA
Griezmann	At Madrid	20,01909537	23,553	9,763814658	61,50901514
Charles	Éibar	3,569128207	8	2,359165848	17,43031524
Kike	Éibar	13,44413511	13,325	3,133593276	29,13359328
Calleri	Las Palmas	4,107471476	12,991	6,326503646	31,32650365
D.Rolan	D.Rolan	3,17056631	8,882	4,85895389	21,85895389
Bale	Real Madrid	36	20,4	7,2	57,6
W.José	Real Sociedad	13,04169673	15	5,959746456	35,21483886
M.Oyarzabal	Real Sociedad	20,03458446	14,266	6,383378328	36,30064664
Zaza	Valencia	7,069194522	13	4,667309663	29,26559601
Bakambu	Villarreal	11,06317988	9	3,095814202	22,47130437

Jugadores	Equipo	PASESCLAVE	FUERASDEJUEGO
Griezmann	At Madrid	60,41039914	25,23618534
Charles	Éibar	18,35916585	9,640834152
Kike	Éibar	29,57938009	10,86640672
Calleri	Las Palmas	41,49114931	35,67349635
D.Rolan	Málaga	28,34415609	14,14104611
Bale	Real Madrid	52,2	7,8
W.José	Real Sociedad	42,14269924	19,04025354
M.Oyarzabal	Real Sociedad	44,38337833	15,61662167
Zaza	Valencia	38,7637003	12,33269034
Bakambu	Villarreal	24,03215321	7,904185798

ANEXO D- MATRICES LAMBDA

LAMBDA	Guardado	Kroos	Modric	Illarramendi	Banega	Parejo	Kondogbia	Rodri	Trigueros
Mikel San José	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Saul Ñíguez	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rakitic	0	0,280334803	0	0	0	0	0	0	0
Busquets	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lobotka	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wass	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Manu García	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T. Pina	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Borges	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Joan Jordan	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D.García	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Darder	0	0,009358517	0	0	0	0	0	0	0
Faycal Fajr	0,021183199	0	0	0	0	0,085373435	0	0	0
Arambarri	0,092996947	0	0	0	0	0	0	0	0
Á.Granell	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Etebo	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rubén Pérez	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Campaña	0,32791536	0	0	0	0	0	0	0	0
Recio	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fabián Ruíz	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Guardado	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Kroos	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Modric	0,206415014	0,553008217	0	0	0	0	0	0	0
Illarramendi	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Banega	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Parejo	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Kondogbia	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Rodri	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Trigueros	0,517839347	0,158204628	0	0	0	0,03459699	0	0	0

LAMBDA	C.Ronaldo	Bale	W.José	M.Oyarzabal	Ben Yedder	Rodrigo	Zaza	Bacca	Bakambu
Aduriz	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Griezmann	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Messi	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Suárez	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Aspas	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M.Gómez	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Munir	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Adrián	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Charles	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kike	0	0	0	0	0	0,135803312	0	0	0
G.Moreno	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ángel	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Portu	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Stuani	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Calleri	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Guerrero	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Morales	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D.Rolan	0	0	0	0	0	0,058103575	0	0,234135065	0
Sergio León	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Loren Morón	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C.Ronaldo	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Bale	0	0	0	0	0	0	0	0	0
W.José	0	0	0	0	0	0,342510101	0	0,116439572	0
M.Oyarzabal	0	0	0	0	0	0,382430772	0	0	0
Ben Yedder	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Rodrigo	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Zaza	0	0	0	0	0	0,070142911	0	0,090675329	0
Bacca	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Bakambu	0	0	0	0	0	0,139963207	0	0,039648046	0

