UNIVERSIDAD DE SEVILLA. FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS.

RELACIONES DE DUALIDAD ENTRE LAS ECUACIONES DE DEFINICION Y LAS DE EVOLUCION EN LA TEORIA ANALITICA DE CAMPOS.

Memoria presentada para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas, por el Licenciado Antonio Romero Soria.
Sevilla, Febrero de 1983.

Fdo.Antonio Romero Soria.

Vº Bº EL CATEDRATICO DIRECTOR.

Fdo.Pablo Hervás Burgos.

PONENTE:

Mi testimonio de reconocimiento y gratitud para el Profesor Dr. D. Pablo Hervás Burgos, por su constante estímulo y acertada dirección.

CAPITULO 1

TRANSFORMACIONES INVERTIBLES

Tal vez no sea posible establecer un principio de evolución esencialmente nuevo en la Teoría Analítica de los Campos; ello no excluye la posibilidad de encontrar nuevos puntos de vista desde los cuales se puedan abordar los problemas variacionales que surgen por la existencia de relaciones intrínsecas, finitas ó integrodiferenciales, entre las funciones que describen campos en interaccion.

En este capítulo vamos a intentar estudiar las transformaciones que dejan invariantes las variaciones de la integral del producto contraído de dos funciones tensoriales, extendidas al dominio de existencia del campo. Generalizando algunas nociones de la teoría de transformaciones de contacto, formulada por Sophus Lie (1922), vamos a establecer las siguientes proposiciones, que consideramos básicas para la elaboración de la Tesis.

DEFINICION

Sea τ una región simplemente conexa de R^3, con frontera regular $\partial\tau$ y A_{ij}, B_{ij}, $i,j \in \{1,2,3\}$ campos tensoriales de clase C^2 definidos en τ

Diremos que la función $V(A_{ij}, B_{ij})$ es una función generatriz de la funcional:

$$\int_{\tau} A_{ij} B_{ij} \, d\tau$$

Si cumple las siguientes condiciones:

1) $$\forall P \in \tau \quad A_{ij} = \frac{\partial V}{\partial B_{ij}}, \quad B_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial A_{ij}}$$

2) Existe una función $R(A_{ij}, B_{ij})$, que considerada como función de las X_k, $k \in \{1,2,3\}$ es de clase C^2 en τ, tal que

$$V(A_{ij}, B_{ij}) = \frac{\partial}{\partial X_k} R_k(A_{ij}, B_{ij}), \quad k \in \{1,2,3\}$$

y además, $\forall P \in \partial\tau \quad \delta R_k(A_{ij}, B_{ij}) = 0$

3) $\forall P \in \tau$: $\left| \dfrac{\partial^2 V}{\partial A_{ij} \partial B_{ij}} \right| \neq 0$.

PROPOSICION 1ª

Si la funcional $\int_\tau A_{ij} B_{ij} \, d\tau$ admite una función generatriz $V(A_{ij}, B_{ij})$, esta función define una transformación invertible, tal que

$$\int_\tau A_{ij} \, \delta B_{ij} \, d\tau = 0 \iff \int_\tau B_{ij} \, \delta A_{ij} \, d\tau = 0$$

Demostración:

En efecto, si $V(A_{ij} B_{ij})$ es una función generatriz:

$$\int_\tau \left[\left(A_{ij} - \frac{\partial V}{\partial B_{ij}} \right) \delta B_{ij} - \left(B_{ij} + \frac{\partial V}{\partial A_{ij}} \right) \delta A_{ij} \right] d\tau = 0$$

de donde

$$\int_\tau A_{ij} \, \delta B_{ij} \, d\tau - \int_\tau B_{ij} \, \delta A_{ij} \, d\tau = \int_\tau \left(\frac{\partial V}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} + \frac{\partial V}{\partial B_{ij}} \delta B_{ij} \right) d\tau =$$
$$= \delta \int_\tau V \, d\tau$$

y teniendo en cuenta la segunda condición que debe cumplir V, y el teorema de la divergencia:

$$\delta \int_\tau V(A_{ij}, B_{ij}) \, d\tau = \delta \int_\tau \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \, d\tau = \int_{\partial \tau} \delta R_k(A_{ij}, B_{ij}) \, dS_k = 0$$

En consecuencia: $\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\,d\tau - \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau = 0$

De donde $\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\,d\tau = 0 \iff \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau = 0$

Además, por la condición tercera de la definición,

$$A_{ij} = \frac{\partial V}{\partial B_{ij}} \quad y \quad B_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial A_{ij}}$$

definen una transformación.

PROPOSICION 2ª (RECIPROCIDAD)

Si la funcional $\int_\tau A_{ij}\,B_{ij}\,d\tau$ admite una función generatriz, entre ambas funciones campo se verifica la relación de reciprocidad:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{kr}} = \frac{\partial A_{kr}}{\partial B_{ij}} \quad \forall i,j,k,r \in \{1,2,3\}$$

Demostración:

En efecto, de $A_{ij} = \dfrac{\partial V}{\partial B_{ij}}$ $\quad A_{kr} = \dfrac{\partial V}{\partial B_{kr}}$ sigue:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{kr}} = \frac{\partial^2 V}{\partial B_{ij}\,\partial B_{kr}} \qquad \frac{\partial A_{kr}}{\partial B_{ij}} = \frac{\partial^2 V}{\partial B_{kr}\,\partial B_{ij}}$$

y en virtud de la igualdad entre las derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{kr}} = \frac{\partial A_{kr}}{\partial B_{ij}}$$

Es decir, la variación de la componente A_{ij} debida a la variación de la componente B_{kr}, es igual a la variación de la componente A_{kr}, debida a la variación de la componente B_{ij}.

PROPOSICION 3ª

Si entre las funciones campo existen K relaciones de la forma $\phi_r(A_{ij},B_{ij})=0$, siendo K menor o igual al número de componentes de un campo, la transformación invertible queda definida por:

$$A_{ij}=\frac{\partial V}{\partial B_{ij}}+\lambda_r\frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}}$$
$$B_{ij}=-\frac{\partial V}{\partial A_{ij}}-\lambda_r\frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}$$
$$\phi_r(A_{ij},B_{ij})=0$$

Donde las funciones $\lambda_r=\lambda_r(X_k)$, son multiplicadores de Lagrange.

Demostración:

En efecto, la existencia de la función generatriz permite escribir:

$$\int_\tau\left[\left(A_{ij}-\frac{\partial V}{\partial B_{ij}}\right)\delta B_{ij}-\left(B_{ij}+\frac{\partial V}{\partial A_{ij}}\right)\delta A_{ij}\right]d\tau=0$$

Y de la existencia de las relaciones $\phi_r (A_{ij}\ B_{ij}) = 0$ sigue:

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}} \delta A_{ij} + \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}} \delta B_{ij} = 0$$

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange λ_r, podemos escribir:

$$\int_{\tau} \left[\left(A_{ij} - \frac{\partial V}{\partial B_{ij}} - \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}} \right) \delta B_{ij} - \left(B_{ij} + \frac{\partial V}{\partial A_{ij}} + \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}} \right) \delta A_{ij} \right] d\tau = 0$$

La independencia de las variaciones $\delta B_{ij}, \delta A_{ij}$ exige:

$$A_{ij} = \frac{\partial V}{\partial B_{ij}} + \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial V}{\partial A_{ij}} - \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}$$

junto con $\phi_r (A_{ij}, B_{ij}) = 0$

PROPOSICION 4ª

Si existe una transformación homogénea e invertible, definida por K relaciones de la forma $\phi_r (A_{ij}, B_{ij}) = 0$ $1 \leq r \leq K$ (siendo K menor o igual al número de com ponentes de un campo), tales que:

$$\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\,d\tau = 0 \iff \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau = 0$$

Ambos campos están relacionados por:

$$A_{ij} = B_{kl}\,\frac{\partial A_{kl}}{\partial B_{ij}}\ , \quad B_{ij} = A_{kl}\,\frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}$$

Demostración:

Por hipótesis: $$\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\,d\tau - \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau = 0$$

y por existir las k relaciones de condición:

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}}\,\delta B_{ij} + \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}\,\delta A_{ij} = 0$$

Introduciendo los múltiplicadores de Lagrange λ_r

$$\int_\tau \left[\left(A_{ij} - \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}}\right)\delta B_{ij} - \left(B_{ij} + \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}\right)\delta A_{ij}\right] d\tau = 0$$

La independencia de las variaciones δB_{ij}, δA_{ij} exige:

$$A_{ij} = \lambda_r\,\frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}} \qquad B_{ij} = -\,\lambda_r\,\frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}} + \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{kl}}\,\frac{\partial A_{kl}}{\partial B_{ij}} = 0$$

Y eliminando λ_r, $\frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}$ y $\frac{\partial \phi_r}{\partial B_{kl}}$ entre las tres últimas expresiones resulta:

$$A_{ij} = B_{kl} \frac{\partial A_{kl}}{\partial B_{ij}}$$

Análogamente, eliminando λ_r, $\frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}$, $\frac{\partial \phi_r}{\partial B_{kl}}$ entre:

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}} + \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{kl}} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}} = 0$$

$$A_{kl} = \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{kl}}$$

$$B_{ij} = -\lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}}$$

queda

$$B_{ij} = A_{kl} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}$$

PROPOSICION 5º

Si se verifica la relación: $A_{ij} = B_{kl} \frac{\partial A_{kl}}{\partial B_{ij}} \quad \forall i,j,k,l \in \{1,2,3\}$

se tiene: $\int_\tau B_{ij}\, \delta A_{ij}\, d\tau = 0 \iff \int_\tau A_{ij}\, \delta B_{ij}\, d\tau = 0$

Demostración:

Sea $A_{ij} = A_{ij}(B_{mn})$, entonces $\delta A_{ij} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{mn}} \delta B_{mn}$

Por tanto: $\int_\tau B_{ij}\, \delta A_{ij}\, d\tau = \int_\tau B_{ij} \frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{mn}} \delta B_{mn}\, d\tau$

Ahora bien, por hipótesis, $B_{ij} \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial B_{mn}} = A_{mn}$

En consecuencia:

$$\int_{\tau} B_{ij}\, \delta A_{ij}\, d\tau = \int_{\tau} A_{mn}\, \delta B_{mn}\, d\tau$$

y de aquí la conclusión:

OBSERVACIONES

1) Por razones de simetría, es evidente que la hipótesis puede ser sustituída por:

$$B_{ij} = A_{kl} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}$$

2) La condición $A_{ij} = B_{kl} \dfrac{\partial A_{kl}}{\partial B_{ij}}$ implica que A_{ij} debe ser una función homogénea, de primer grado, en B_{ij}, no necesariamente lineal.

3) En particular, las relaciones $A_{ij} = C_{ijkl}\, B_{kl}$ con el determinante de la matriz de los coeficientes (constante) distinto de cero, define una transformación invertible.

PROPOSICION 6ª

Si se verifica $B_{ij} = A_{kl} \dfrac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}$, la funcional - $I = \int_{\tau} W d\tau$, donde $W = \frac{1}{2} B_{ij} A_{ij}$, es invariante a la transformación de Legendre.

Demostración:

El momento conjugado de W respecto a A_{ij} es:

$$\frac{\partial W}{\partial A_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial B_{kl}} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}} = \frac{1}{2} B_{ij} + \frac{1}{2} A_{kl} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}} = B_{ij}$$

Sea $\overline{W}$ la transformada de Legendre de W :

$$\overline{W} = A_{ij} B_{ij} - W = A_{ij} B_{ij} - \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij} = \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij} = W$$

y de aquí la conclusión.

PROPOSICION 7ª

La invariancia de la funcional $\int_{\tau} W d\tau$, $W = \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij}$ a la transformación de Legendre, implica que

$$B_{ij} = A_{kl} \frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}$$

Demostración:

Debe ser: $\overline{W} = A_{ij} \left(\dfrac{\partial W}{\partial A_{ij}} + \dfrac{\partial W}{\partial B_{kl}} \dfrac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}} \right) - \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij} = \frac{1}{2} A_{ij} B_{ij}$

de donde

$$A_{ij}\left(\frac{1}{2}B_{ij}+\frac{1}{2}A_{kl}\frac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}\right)-\frac{1}{2}A_{ij}B_{ij}=\frac{1}{2}A_{ij}B_{ij}$$

Lo que implica: $\quad B_{ij}=A_{kl}\dfrac{\partial B_{kl}}{\partial A_{ij}}$

PROPOSICION 8ª

Si existen relaciones de la forma:

$$\phi_r\left(A_{ij},B_{ij},\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j},\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)=0 \quad \forall P\in\tau \;\; y \;\; 1\leq r\leq K$$

la transformación invertible entre los principios variacionales

$$\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\,d\tau=0\ ,\quad \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau=0$$

Queda definida por:

$$A_{ij}=-\lambda_r\frac{\partial\phi_r}{\partial B_{ij}}+\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial(\lambda_r\phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)}$$

$$B_{ij}=\lambda_r\frac{\partial\phi_r}{\partial A_{ij}}-\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial(\lambda_r\phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}$$

$$\phi_r\left(A_{ij},B_{ij},\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j},\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)=0$$

Donde las funciones $\lambda_r=\lambda_r(x_k)$ son multiplicadores de Lagrange.

Demostración:

En efecto: $\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\,d\tau - \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau = 0$

bajo las condiciones:

$$\phi_r\left(A_{ij}, B_{ij}, \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)=0 \quad \forall P\in\tau \quad 1\leq r\leq K$$

se transforma en:

$$\int_\tau A_{ij}\delta B_{ij}\,d\tau - \int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\,d\tau + \int_\tau \lambda_r\,\delta\phi_r\,d\tau = 0$$

Ahora bien

$$\int_\tau \lambda_r\delta\phi_r\,d\tau = \int_\tau \left[\lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial A_{ij}}\delta A_{ij} + \lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\,\delta\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)\right]d\tau +$$
$$+ \int_\tau \left[\lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial B_{ij}}\delta B_{ij} + \lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)}\,\delta\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)\right]d\tau$$

Integrando por partes, y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_\tau \lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\,\delta\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)d\tau = \int_\tau \lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\,\frac{\partial(\delta A_{ij})}{\partial x_j}\,d\tau =$$
$$= -\int_\tau \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial(\lambda_r\phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\right]\delta A_{ij}\,d\tau + \int_{\partial\tau}\left[\frac{\partial(\lambda_r\phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\delta A_{ij}\right]dS$$

Como δB_{ij} debe ser nula en $\partial\tau$, la integral de superficie es nula, y queda:

$$\int_\tau \lambda_r \frac{\partial\phi_r}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\,\delta\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)d\tau = -\int_\tau \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial(\lambda_r\phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\right]\delta A_{ij}\,d\tau$$

y lo mismo ocurre permutando A_{ij} por B_{ij}

Resulta entonces: $\displaystyle\int_\tau \left\{A_{ij} + \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial B_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial(\lambda_r \phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}\right)}\right]\right\} \delta B_{ij}\, d\tau -$

$$- \int_\tau \left\{B_{ij} - \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial A_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial(\lambda_r \phi_r)}{\partial\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}\right)}\right]\right\} \delta A_{ij}\, d\tau = 0$$

que en virtud de la hipótesis se convierte en una identidad.

CONCLUSIONES

El planteamiento de este capítulo fué buscar las condiciones bajo las cuales el principio $\int_\tau A_{ij}\,\delta B_{ij}\, d\tau = 0$ implica el principio $\int_\tau B_{ij}\,\delta A_{ij}\, d\tau = 0$, y viceversa.

Los resultados que consideramos más importantes - los resumimos en los siguientes puntos:

1º) Campos independientes.

Si entre A_{ij} y B_{ij} no existe relación funcional alguna, la existencia de transformaciones invertibles, según la proposicion 1, va ligada a que la integral $\int_\tau A_{ij} B_{ij}\, d\tau$ admita una - función generatriz.

2º) Campos ligados

Si A_{ij} y B_{ij} están relacionados por ecuaciones de la forma: $\phi_r(A_{ij}, B_{ij}) = 0$, la función generatriz de las transformaciones invertibles queda definida por: $V(A_{ij}, B_{ij}) + \lambda_r \phi_r(A_{ij}, B_{ij})$, siendo $\lambda_r = \lambda_r(X_k)$ multiplicadores de Lagrange. (Proposición 3).

3º) Transformaciones invertibles homogéneas.

Si las relaciones funcionales $\phi_r(A_{ij}, B_{ij}) = 0$ son tales que general por si solas transformaciones invertibles, los campos en juego satisfacen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$A_{ij} = B_{mn} \frac{\partial A_{mn}}{\partial B_{ij}} \qquad \text{(Proposición 4 y 5)}$$

4º) Se discuten las formas funcionales de las relaciones: $\phi_r(A_{ij}, B_{ij}) = 0$ capaces de generar transformaciones invertibles, y se demuestra que tales transformaciones implican la invariancia de la funcional $\frac{1}{2}\int_z A_{ij} B_{ij}\, dz$ a las transformaciones de Legendre (Proposición 6 y 7).

5º) En el caso de que en las relaciones funcionales intervengan los gradientes de las funciones campo:

$$\phi_r \left(A_{ij}, B_{ij}, \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}, \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} \right) = 0$$

las leyes de generación de las transformaciones invertibles siguen siendo válidas, sustituyendo la derivada parcial por la variacional.

CAPITULO 2

MEDIOS CONTINUOS ELASTICOS

INTRODUCCION

Es bien sabido que, bajo las hipótesis de la teoría lineal, las ecuaciones de equilibrio interno para un medio elástico pueden considerarse como las ecuaciones de Euler-Lagrange para la funcional Energía Potencial, admitiendo las ecuaciones de Compatibilidad de Saint-Venant, ó sus soluciones como condiciones subsidiarias (Sokolnikoff [100]).

El problema inverso, de obtener las ecuaciones de Saint-Venant a partir de las de Equilibrio, y de un principio variacional, fué resuelto por vez primera en 1935 por R.V. Southwell (44) partiendo del principio de Castigliano. A nuestro juicio la idea central consiste en admitir que las fuerzas de volumen permanecen constantes en el proceso variacional. Esto implica que las variaciones del tensor esfuerzos verifican las ecuaciones homogéneas de equilibrio, y en consecuencia pueden expresarse mediante las variaciones de las funciones de Maxwell y Morera.

Compartiendo la idea fundamental de Southwell, Klysushnikov (29) dá en 1954 una nueva solución al problema, basada en la teoría de los multiplicadores de Lagrange, con las ecuaciones de equilibrio interno como ligaduras. Con posterioridad, el procedimiento es perfeccionado y ampliamente desarrollado por Fung (68) y sobre todo Washizu (104) , quienes también aplican el método de los multiplicadores al principio inicialmente considerado de la Energía Potencial.

Otro aspecto a tener en cuenta es la relación entre los principios de la Energía Potencial y de la Energía Complementaria (Castigliano):

a) La reciprocidad entre los mismos aparece tácitamente en su formulación: Las condiciones de admisibilidad para cada uno de ellos coinciden con las ecuaciones de Euler para el otro. Este sentido de reciprocidad ó dualidad corresponde al definido por Courant-Hilbert (61) para principios variacionales sobre funcionales cuadráticas.

b) Teniendo en cuenta que la densidad de Energía Complementaria es la transformada de Legendre de la densidad de Energía de Deformación, Washizu (55) señala que puede pasarse de un principio al recíproco mediante la transformación involutiva de Courant-Hilbert (61).

c) Otros puntos de vista sobre los aspectos anteriores han sido ampliamente tratados en la bibliografía sobre el tema :(Singe (49), Tonti (51,52), Ekeland-Teman (66), Nayroles - (35)) y corresponden a planteamientos y objetivos distintos al nuestro.

2. OBJETO DEL PRESENTE CAPITULO

Creemos que el anterior contexto de principios variacionales, desarrollado en el marco de la Elasticidad lineal, nos puede proporcionar un esquema válido dentro de la Teoría General de los Campos. Esquema que en el caso elástico es una perfecta simbiosis entre elementos de Geometría de lo contínuo, estructuras mecánicas y hasta ciertos elementos de caracter experimental.

Seguimos la idea de considerar el campo elástico como un conjunto de funciones de variable real, capaces de describir una situación física extendida a una región de espacio y a un intérvalo temporal. Renunciamos a priori a introducir las condiciones de frontera, por tratarse de un estudio local, donde las funciones campo se relacionan en un mismo punto por ecuaciones de tipo diferencial, cuya integración y separación de soluciones reales o supérfluas no entra en discusión.

Bajo las anteriores hipótesis de trabajo, el objeto de este capítulo puede formularse en los siguientes términos:

1) Aplicar la teoría de las transformaciones - invertibles desarrollada en el Capítulo Primero, a los principios variacionales de la Energía Potencial y la Energía Complementaria.
2) Demostrar que las ecuaciones de definición ó de evolución correspondientes a dichos principios, son condiciones que aseguran la existencia de una transformación invertible entre los mismos.
3) Probar que, en el caso de que el campo de interacción F_i derive de un potencial simple ó generalizado, es posible descartar la condición $\frac{\partial \delta P_{ij}}{\partial x_j} \neq 0 \quad \forall P \in \tau$, y mantener en su integridad las concepciones de dualidad e invertibilidad establecidas en los campos elásticos isótropos puros.
4) Aplicar lo indicado en el punto anterior a las ecuaciones fundamentales de la Termoelasticidad lineal.

3. APLICACION DE LAS TRANSFORMACIONES INVERTIBLES AL CAMPO ELASTICO LIBRE.

Consideremos un medio elástico deformable, que ocupa una región $\tau \in E_3$ referida a un sistema cartesiano $\{0; x_1, x_2, x_3\}$

Designaremos por $u_i(x_k)$ $\forall i,k \in \{1,2,3\}$ las componentes del vector desplazamiento, por

$$\varepsilon_{ij}(x_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \forall i,j \in \{1,2,3\} \qquad 3.1$$

a las componentes del tensor deformación, y por - $P_{ij}(x_k)$ $\forall i,k \in \{1,2,3\}$ a las componentes del tensor esfuerzos, ambos tensores simétricos.

Las siguientes suposiciones serán admitidas en lo que sigue:

1) Nos situaremos en la teoría de las pequeñas deformaciones y supondremos que la región τ de definición del campo es simplemente conexa.

2) Admitiremos que el medio es homogéneo e isótropo, siendo las ecuaciones constitutivas $\forall i,j \in \{1,2,3\}$:

$$P_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\theta\,\delta_{ij} \;,\quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \qquad 3.2$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)\,P_{ij} - \sigma P\,\delta_{ij}\right],\quad P = P_{11} + P_{22} + P_{33} \qquad 3.3$$

siendo λ, μ las constantes de Lamé, E el módulo de Young, σ el coeficiente de Poisson y δ_{ij} la delta de Kronecker.

3) Supondremos el campo elástico libre de interacciones con otros campos.

En estas condiciones se sabe que el principio variacional:

$$\int_{\tau} P_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, d\tau = 0 \qquad 3.4$$

con las ecuaciones de compatibilidad (ó sus soluciones 3.1) como ecuaciones de definición, implica las ecuaciones homogéneas de equilibrio. Y recíprocamente, que las segundas tomadas como ecuaciones de definición, y el principio:

$$\int_{\tau} \varepsilon_{ij}\, \delta P_{ij}\, d\tau = 0 \qquad 3.5$$

implica las primeras.

Las proposiciones que siguen tienen por objeto establecer las relaciones entre los dos principios -

NOTA: Todos los índices empleados en este Capítulo varían en el conjunto $\{1, 2, 3\}$

variacionales, que se derivan de la teoria desarrollada en el Capítulo Primero.

PROPOSICION 1ª

Las ecuaciones constitutivas definen una transformación invertible entre los principios variacionales:

$$\int_{\tau} P_{ij}\, \delta \varepsilon_{ij}\, d\tau = 0 \quad , \quad \int_{\tau} \varepsilon_{ij}\, \delta P_{ij}\, d\tau = 0$$

Demostración:

En efecto, según la Proposición 5 del Capítulo I, para que las ecuaciones constitutivas definan una transformación invertible, se debe verificar:

$$P_{ij} = \varepsilon_{mn} \frac{\partial P_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad 3.6 \qquad \varepsilon_{ij} = P_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial P_{ij}} \quad 3.7$$

Ahora bien, sustituyendo 3.2 en 3.6:

$$P_{ij} = \varepsilon_{mn} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(2\mu\, \varepsilon_{mn} + \lambda \theta\, \delta_{mn} \right) =$$

$$= \varepsilon_{mn}\, \delta_i^m \delta_j^n\, 2\mu + \lambda \theta\, \delta_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda \theta\, \delta_{ij}$$

Y analogamente, sustituyendo 3.3 en 3.7:

$$\varepsilon_{ij} = P_{mn} \frac{\partial}{\partial P_{ij}} \left\{ \frac{1}{E} \left[(1+\sigma) P_{mn} - \sigma P \delta_{mn} \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{E} \left[(1+\sigma) P_{ij} - \sigma P \delta_{ij} \right]$$

es decir, las ecuaciones 3.6 y 3.7. se convierten en identidades.

PROPOSICION 2ª

Si las ecuaciones constitutivas definen transformaciones invertibles homogéneas entre 3.4 y 3.5, P_{ij} debe ser una función homogénea de primer grado en ε_{ij}, y viceversa.

Demostración:

De acuerdo con la proposición 4 del Capítulo I, para que las ecuaciones constitutivas definan la transformación invertible, se debe verificar 3.6 y 3.7, ó lo que es lo mismo, que P_{ij} sea una función homogénea de primer grado de ε_{ij}, no necesariamente lineal, y viceversa.

Si añadimos la linealidad entre el tensor esfuerzos y el tensor deformación, dicha relación se convierte en lineal y homogénea. Si añadimos la isotropia del medio, obtenemos las relaciones 3.2 y 3.3.

PROPOSICION 3ª

Las ecuaciones constitutivas hacen invariante la funcional $\int_{\tau} W \, d\tau$, trabajo de deformación, respecto a la transformación de Legendre.

Demostración:

Al ser $W = \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij}$, y teniendo en cuenta 3.2, resulta:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} P_{ij} + \frac{1}{2} P_{ij} = P_{ij}$$

En consecuencia, P_{ij} es el momento conjugado de W respecto a ε_{ij} . Si $\overline{W}$ es la transformada de Legendre de W se tendra:

$$\overline{W} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial P_{mn}} \frac{\partial P_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij}$$

y por tanto $\overline{W} = W$

PROPOSICION 4ª

La invariancia de la funcional $\int_\tau W d\tau$ a la transformación de Legendre, exige que P_{ij} sea una función homogénea de primer grado de ε_{ij} y viceversa.

Demostración:

$\overline{W} = W = \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij}$ implica:

$$P_{ij} \left(\frac{\partial W}{\partial P_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial P_{ij}} \right) - \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij}$$

de donde:

$$P_{ij} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} + P_{ij} \frac{1}{2} P_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial P_{ij}} - \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} P_{ij} \varepsilon_{ij}$$

sigue que

$$P_{ij} P_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial P_{ij}} = P_{ij} \varepsilon_{ij}$$

y en consecuencia:

$$\varepsilon_{ij} = P_{mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial P_{ij}}$$

Además debe ser:

$$\varepsilon_{ij}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}+\frac{\partial W}{\partial P_{mn}}\frac{\partial P_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)-\frac{1}{2}P_{ij}\,\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}P_{ij}\,\varepsilon_{ij}$$

es decir:

$$\varepsilon_{ij}\left(P_{ij}+\frac{1}{2}\varepsilon_{mn}\frac{\partial P_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)-\frac{1}{2}P_{ij}\,\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}P_{ij}\,\varepsilon_{ij}$$

y de aquí, como antes, se obtiene:

$$P_{ij}=\varepsilon_{mn}\frac{\partial P_{mn}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

4. CAMPO ELASTICO EN INTERACCION

La existencia de un campo de interacción de intensidad $F_i \quad \forall i \in \{1,2,3\}$ conduce a añadir al primer principio la Lagrangiana de interacción: $-\int_\tau F_i\, u_i\, d\tau$, con lo cual la variación de la Lagrangiana total, será:

$$\int_\tau P_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau-\int_\tau F_i\,\delta u_i\,d\tau \qquad 4.1$$

mientras que el segundo principio no sufre transformación alguna:

$$\int_\tau \varepsilon_{ij}\,\delta P_{ij}\,d\tau=0 \qquad 4.2$$

Expuestas las cosas de esta forma, es evidente que el caracter invertible de la transformación desparece y con él la reciprocidad entre ambos principios, esto es, una parte de la coherencia dual establecida para los campos puros. Nuestro objetivo en lo que sigue, es mostrar que tomando como ecuación de condición para el primer principio una solución de las ecuaciones de compatibilidad, y como ecuación de condición del segundo, la ecuación de equilibrio interno, es posible mantener la invertibilidad entre ambos principios, estando las transformaciones invertibles definidas precisamente por las ecuaciones de equilibrio interno y las ecuaciones de compatibilidad.

PROPOSICION 5ª

Si el principio de los trabajos virtuales:

$$\int_\tau P_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau - \int_\tau F_i\,\delta u_i\,d\tau = 0$$

se verifica bajo la condición: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Y el principio complentario: $\int_\tau \varepsilon_{ij}\,\delta P_{ij}\,d\tau = 0$

bajo la condición $\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$

La transformación invertible homogénea queda definida por las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones de compatibilidad.

Demostración:

Debe ser:

$$\int_{\tau} P_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau - \int_{\tau} F_i\,\delta u_i\,d\tau - \int_{\tau} \varepsilon_{ij}\,\delta P_{ij}\,d\tau = 0 \qquad 4.3$$

Con las condiciones: $\delta\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right) = 0 \qquad \frac{\partial\delta P_{ij}}{\partial x_j} = 0$

Multiplicando por las funciones $\lambda_{ij}(x_1,x_2,x_3)$, $\lambda_i(x_1,x_2,x_3)$ (multiplicadores de Lagrange), e integrando:

$$\int_{\tau}\left(\lambda_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij} - \lambda_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} - \lambda_i\frac{\partial\delta P_{ij}}{\partial x_j}\right)d\tau = 0$$

integrando por partes, y aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_{\tau}\lambda_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau + \int_{\tau}\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x_j}\,\delta u_i\,d\tau + \int_{\tau}\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j}\,\delta P_{ij}\,d\tau -$$

Integrales de superficie extendidas a $\partial\tau = 0 \qquad 4.4$

Dada la simetría de P_{ij}, el integrando de la última integral puede sustituirse por:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}\right)\delta P_{ij}$$

Realizada esta sustitucion, y sumando miembro a miembro 4.3 y 4.4 queda:

$$\int_{\tau}\left\{(P_{ij}+\lambda_{ij})\,\delta\varepsilon_{ij}+\left(\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x_j}-F_i\right)\delta u_i+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}\right)-\varepsilon_{ij}\right]\delta P_{ij}\right\}d\tau +$$

términos de contorno $=0$

y dada la arbitrariedad de $\delta\varepsilon_{ij}$, δu_i, δP_{ij}, queda:

$$\left.\begin{array}{l} P_{ij}+\lambda_{ij}=0 \\ \dfrac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x_j}-F_i=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}+F_i=0$$

y

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}\right)$$

esto es, las ecuaciones de equilibrio interno, junto con:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_1} \qquad \varepsilon_{22}=\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_2} \qquad \varepsilon_{33}=\frac{\partial\lambda_3}{\partial x_3} \qquad 4.5$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_1}\right) \qquad \varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\lambda_3}{\partial x_1}\right) \qquad \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_3}+\frac{\partial\lambda_3}{\partial x_2}\right) \qquad 4.6$$

Utilizando la primera de las 4.6 y las dos primeras de 4.5:

$$2\,\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x_1\partial x_2^2}+\frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x_1^2\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x_1\partial x_2^2} \qquad \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x_2\partial x_1^2}$$

de donde:

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \qquad 4.7$$

Analogamente se obtendría:

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_2\partial x_3} = \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \qquad 4.8$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{1}}{\partial x_3^2} \qquad 4.9$$

Además, por las ecuaciones 4.6 :

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_3} = \frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x_1^2\partial x_3}$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^3\lambda_3}{\partial x_1^2\partial x_2}$$

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3\lambda_2}{\partial x_3\partial x_1^2} + \frac{\partial^3\lambda_3}{\partial x_2\partial x_1^2}$$

de donde:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2\varepsilon_{13}}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3\lambda_1}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}$$

y teniendo en cuenta la primera de las ecuaciones 4.5 :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial\varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial\varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^3\varepsilon_{11}}{\partial x_2\partial x_3} \qquad 4.10$$

y analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_1}+\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} \qquad 4.11$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1}-\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right)=\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad 4.12$$

4.7 - 4.12 son las ecuaciones de compatibilidad de Saint-Venant.

Se concluye pues, que las ecuaciones de equilibrio y las de compatibilidad determinan la invertibilidad entre ambos principios.

5. CASO DE QUE EL CAMPO DE INTERACCION DERIVE DE UN POTENCIAL GENERALIZADO. APLICACIONES

Tratamos ahora de establecer formulaciones variacionales duales para el campo elástico en interacción con un campo de intensidad F_i , que bajo hipótesis muy generales son formalmente idénticas a las desarrolladas en el parágrafo tercero para el campo elástico libre.

Junto con las notaciones y la suposición primera de dicho parágrafo, admitiremos aquí las siguientes hipótesis:

1) Existen funciones reales $G_i(X_k)$ $i,k \in \{1,2,3\}$ definidas en τ , a las que denominaremos - potenciales generalizados, tales que $\forall P \in \tau$ la intensidad del campo puede expresarse en la forma:

$$F_i = \frac{\partial G_i}{\partial X_i} \qquad \forall i \in \{1,2,3\}$$

2) La Acción total del campo viene dada por:

$$V = \int_\tau W(\varepsilon_{ij})\, d\tau - \int_\tau F_i\, u_i\, d\tau$$

siendo $W(\varepsilon_{ij})$ la densidad de energía de defor mación, que verifica:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = P_{ij}$$

Las ecuaciones de definición del campo son las de compatibilidad de Saint-Venant.

3) La Acción complementaria es la funcional:

$$V_c = \int_\tau W_c\,(P_{ij})\, d\tau - \int_\tau u_i\, F_i\, d\tau$$

siendo $W_c = \varepsilon_{ij} P_{ij} - W(\varepsilon_{ij})$, con lo que $\frac{\partial W_c}{\partial P_{ij}} = \varepsilon_{ij}$
Las ecuaciones de definición son las de equilibrio interno.

4) Como antes, consideremos como libres (sin condiciones de contorno) los problemas variacionales sobre las funcionales V y V_c. Además admitiremos que dos funcionales son equivalentes, si se diferencian en una integral de superficie extendida a $\partial\tau$, ya que la variación de dicho término no afecta a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Podemos entonces formular las siguientes proposiciones:

PROPOSICION 6ª

Las variaciones de la acción y de la acción complementaria pueden expresarse, respectivamente, en forma:

$$\delta V = \int_\tau M_{ij}\, \delta\varepsilon_{ij}\, d\tau \qquad \delta V_c = \int_\tau \varepsilon_{ij}\, \delta M_{ij}\, d\tau$$

siendo: $M_{ij} = P_{ij} + \delta_{ij} G_i \quad i \in \{1,2,3\}$ y δ_{ij} la Delta de Kronecker.

Demostración:

Aplicando el teorema de la divergencia:

$$\int_\tau F_i u_i \, d\tau = \int_\tau \frac{\partial G_i}{\partial x_i} u_i \, d\tau = \int_\tau \frac{\partial (u_i G_i)}{\partial x_i} d\tau - \int_\tau G_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} d\tau =$$

$$= \int_{\partial\tau} u_i G_i n_i \, d\sigma - \int_\tau G_i \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\tau$$

Además:

$$\delta_{ij} G_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \delta_{ij} G_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} G_i \varepsilon_{ij}$$

Por tanto:

$$\int_\tau F_i u_i \, d\tau = -\int_\tau \delta_{ij} G_i \varepsilon_{ij} \, d\tau + \int_{\partial\tau} u_i G_i n_i \, d\sigma \qquad 5.1$$

Y prescindiendo del término extendido a $\partial\tau$:

$$\delta V = \int_\tau \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} \, d\tau + \int_\tau \delta_{ij} G_i \delta\varepsilon_{ij} \, d\tau =$$

$$= \int_\tau (P_{ij} + \delta_{ij} G_i) \delta\varepsilon_{ij} \, d\tau = \int_\tau M_{ij} \delta\varepsilon_{ij} \, d\tau$$

$$\delta V_c = \int \frac{\partial W_c}{\partial P_{ij}} \delta P_{ij} \, d\tau + \int_\tau \delta_{ij} \delta G_i \varepsilon_{ij} \, d\tau =$$

$$= \int_\tau \varepsilon_{ij} (\delta P_{ij} + \delta_{ij} \delta G_i) \, d\tau = \int_\tau \varepsilon_{ij} \delta M_{ij} \, d\tau$$

<u>PROPOSICION 7ª</u>

Si las ecuaciones constitutivas del medio vienen dadas por:

$$M_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \theta \delta_{ij} \quad \text{con} \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$

Dichas ecuaciones definen una transformación invertible entre los principios variacionales:

$$\int_{\tau} M_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,d\tau = 0 \qquad \int_{\tau} \varepsilon_{ij}\,\delta M_{ij}\,d\tau = 0$$

Demostración:

La misma que la dada en la proposición primera, - sustituyendo P_{ij} por M_{ij} .

De igual forma, y con la hipótesis de la proposición anterior, es inmediato generalizar los resultados estaolecidos en las proposiciones 2ª, 3ª y 4ª.

PROPOSICION 8ª

Las ecuaciones de equilibrio interno son las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción V, con las ecuaciones de compatibilidad como ecuaciones de definición.

Demostración:

Teniendo en cuenta 5.1 puede hacerse:

$$V = \int_{\tau} \mathcal{L}\,d\tau \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = W(\varepsilon_{ij}) + \delta_{ij}\,G_i\,\varepsilon_{ij}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para V son:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(W + \delta_{ij}\, G_i\, \varepsilon_{ij}\right)\right] = 0$$

es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} + \delta_{ij}\, G_i\right) = 0$$

que implica

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

OBSERVACION:

Un procedimiento alternativo es utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange, con las ecuaciones de compatibilidad como ligaduras, como hace Washizu (104) para el campo elástico libre. Resultan entonces como ecuaciones de Euler-Lagrange las soluciones generales de las ecuaciones de equilibrio.

PROPOSICION 9ª

Las ecuaciones de compatibilidad son las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción complementaria V_c , con las ecuaciones de equilibrio interno como ecuaciones de definición.

Demostración:

Por la proposición 6, $\delta V = 0$

equivale a

$$\int_{\tau} \varepsilon_{ij}\, \delta M_{ij}\, d\tau = 0$$

Además:

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0$$

por tanto M_{ij} puede expresarse por medio de las funciones de Maxwell y Morera. En consecuencia es ya posible utilizar la demostración de Southwell (44) para obtener las ecuaciones de compatibilidad.

<u>OBSERVACION</u>:

Tambien es posible utilizar aquí el método de los multiplicadores de Lagrange, con las ecuaciones de equilibrio interno como ligaduras, obteniendose entonces las soluciones de las ecuaciones de compatibilidad.

De las dos últimas proposiciones resulta que las ecuaciones de equilibrio interno y las de compatibilidad, son duales respecto a los principios $\delta V = 0$ $\delta V_c = 0$, en el sentido de que las ecuaciones de definición para cada uno de los principios son las de evolución para el otro. Además en virtud de la Proposición 7ª, al igual que en el campo elástico puro, las ecuaciones constitutivas definen la transformación invertible entre ambos principios variacionales.

Como ejemplos de interés en que son aplicables los resultados obtenidos. tenemos :

1. CASO DE QUE EL CAMPO DE INTERACCION DERIVE DE UN POTENCIAL.

Es inmediato que la hipótesis 1) se verifica en esta caso, haciendo:

$$G_i = V \qquad \forall i \in \{1,2,3\}$$

siendo V la función potencial.

En consecuencia, son válidas las proposiciones 6, 7, 8 y 9, para este tipo de campos.

2. ECUACIONES DE LA TERMOELASTICIDAD LINEAL.

Como hipótesis simplificativas admitiremos las siguientes:

1) Las variaciones de temperatura del medio están limitadas por la condición de que el coeficiente de dilatación α y las constantes mecánicas del medio, permanecen constantes en cada punto, en la evolución.

2) En todo punto del medio, existen tensiones internas de origen térmico; es decir, se descarta la existencia de estados simultáneos de equilibrio isostático y distribución lineal de temperatura.

En estas condiciones las ecuaciones constitutivas son las de Duhamel-Neumann:

$$P_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij} + \lambda\, \theta\, \delta_{ij} - (2\mu + 3\lambda)\, \alpha\, (T - T_0)\, \delta_{ij}$$

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\ , \quad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

que se pueden invertir, para obtener:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(P_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\, \delta_{ij}\, P\right) + \alpha\, (T - T_0)\, \delta_{ij}$$

$$P = P_{11} + P_{22} + P_{33} \qquad \forall i,j \in \{1,2,3\}$$

Además, de acuerdo con la teoría de Duhamel, todo ocurre como si al campo elástico puro se superpusiera un campo de intensidad:

$$F_i = \alpha\,(3\lambda + 2\mu)\,\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Haciendo:

$$G_i = \alpha\,(3\lambda + 2\mu)\,(T - T_0)$$

Vemos que se cumplen las hipótesis de existencia de un potencial generalizado:

$$F_i = \frac{\partial G_i}{\partial x_i}$$

y además, que las ecuaciones constitutivas son de la forma:

$$M_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\theta\,\delta_{ij}$$

$$\text{con} \quad M_{ij} = P_{ij} + \delta_{ij}\,G_i$$

Se concluye en consecuencia, la validez de todos los resultados establecidos en este parágrafo, - existiendo entre los principios variacionales complementarios las mismas relaciones de dualidad e invertibilidad que en el caso del campo elástico puro.

6. CONCLUSIONES

Puede decirse que la mecánica de los medios contínuos trata principalmente dos problemas, aparentemente dispares: Uno encontrar las ecuaciones de equilibrio de un medio contínuo; otro buscar las condiciones bajo las cuales un medio, después de deformado, sigue siendo contínuo. El primero cae de lleno en la mecánica, y su síntesis más perfecta es el principio de los trabajos virtuales, ó sus derivados. El segundo pertenece a "la geometría de lo contínuo", y su expresión más depurada es el principio de acción complementaria. Fué una idea realmente notable la seguida por Southwell al mostrar la intima conexión entre ambos principios. A la sombra de dicha idea hemos intentado desarrollar este Capítulo, cuyos resultados, que creemos originales, establecemos en los siguientes puntos:

1º) Para campos puros, las ecuaciones constitutivas de un medio contínuo son el conjunto de transformaciones invertibles homogéneas entre el principio de los trabajos virtuales, y el principio de la acción complementaria.

2º) La existencia de transformaciones invertibles homogéneas entre los principios variacionales del campo elástico aseguran la invariancia de la energía elástica a las transformaciones de Legendre.

3º) Para campos en interación , la existencia de la función $G_i = G_i(x_k)$, tal que $F_i = \dfrac{\partial G_i}{\partial x_i}$, permite tratar el problema de invertibilidad incondicional como en el caso de campos puros. La metodología aquí desarrollada se aplica a la Termoelasticidad y a los campos en interación con el campo elástico que admiten un potencial.

4º) Tomando como ecuaciones de condición: una solución de las ecuaciones de compatibilidad, para el principio de la energía potencial, y las ecuaciones de equilibrio interno para el principio de la energía complementaria, se demuestra la invertibilidad entre ambos principios para campos en interación. Las transformaciones invertibles son, precisamente las ecuaciones de equilibrio en el primer caso, y las de compatibilidad en el segundo.

5º) Que es posible mantener los conceptos de invertibilidad y dualidad para campos en interación, desechando la condición $\frac{\partial}{\partial x_j}(\delta P_j)=0, \forall P \in \tau$ en el caso de que el campo de interación derive de un potencial simple ó generalizado.

CAPITULO 3

CAMPO ELECTROMAGNETICO

1. INTRODUCCION

En este capítulo intentamos mostrar, bajo condiciones suficientemente generales, y con la máxima naturalidad posible, la estructura variacional subyacente en el electromagnetismo clásico. Con ello pretendemos extender a las nociones electromagnéticas los conceptos de invertibilidad y dualidad adquiridos en la Teoría Lineal de la Elasticidad.

El sistema de ecuaciones postuladas por Maxwell en 1873, aparte de proporcionar un ejemplo de lo que sería el esquema fundamental de la física actual, resume casi todas las explicaciones de los fenómenos electromagnéticos, a escala macroscópica, hasta ahora conocidos. Por esta razón, nuestro estudio se centra en las propiedades variacionales complementarias de las ecuaciones de Maxwell y, por tanto, su dominio de existencia es el demarcado por los límites de aplicabilidad de tales ecuaciones.

El proceso seguido deriva de la teoría de transformaciones invertibles desarrolladas en el primer capítulo, el cual nos proporciona en una primera fase, la forma funcional de las ecuaciones constitutivas, y la invariancia de la expresión energia electromagnética a las transformaciones de Legendre. Para ello seguimos la vieja idea introducida por Lagrange, y ampliamente desarrollada en el pensamiento físico actual, de construir las nociones físicas a partir de principios variacionales. De esta forma, y en perfecta correspondencia con los resultados obtenidos en los campos elásticos, definimos como ecuaciones constitutivas electromagnéticas de un medio contínuo, el conjunto de transformaciones invertibles homogéneas entre los principios variacionales incondicionales que definen el estado de equilibrio del campo electromagnético.

La segunda fase se desarrolla en la electrodinámica relativista partiendo del principio variacional establecido en forma cuadridimensional por M. Born en 1909 (Pauli (92)). Siguiendo la idea de Maxwell de trasladar a la Teoría del Electromagnetismo conceptos adquiridos en la Teoría de la Elasticidad, pretendemos formular aquí resultados análogos a los obtenidos en el Capítulo II para el Campo Elástico. Esto nos conduce a estudiar las relaciones de invertibilidad y dualidad para el Campo Electromagnético puro, a tratar el caso del campo en presencia de cargas y corrientes de un modo formalmente análogo al del Campo Puro, y por último a establecer para el Campo Electromagnético una proposición análoga a la quinta del Capítulo II.

2. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Como es sabido, la energía electromagnética de un medio contínuo, donde existe un campo $\{\vec{E},\vec{D},\vec{H},\vec{B}\}$ viene definida por la expresión:

$$\frac{1}{2}\int_{\tau}\vec{E}.\vec{D}\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau}\vec{H}.\vec{B}\,d\tau$$

donde τ es el volumen ocupado por el medio.

Termodinamicamente tal cantidad representa sendos términos aditivos del potencial termodinámico del medio contínuo. Potencial que, en el estado de equilibrio, tiene la propiedad de alcanzar un mínimo con relación a cada uno de los parámetros que fijan el estado del medio. Bajo las condiciones de temperatura o entropía constantes, en virtud de las restricciones de equilibrio térmico, el estado de equilibrio del campo electromagnético puede expresarse de las siguientes formas:

1º) Para fuentes constantes y potenciales variables:

$$a)\ \int_{\tau}\vec{D}\,\delta\vec{E}\,d\tau = 0 \qquad b)\ \int_{\tau}\vec{H}.\delta\vec{B}\,d\tau = 0$$

2º) Para potenciales constantes y fuentes variables:

$$c)\ \int_{\tau} \vec{E}\,\delta\vec{D}\,d\tau = 0 \qquad d)\ \int \vec{B}\,\delta\vec{H}\,d\tau = 0$$

DEFINICION

LLamaremos ecuaciones constitutivas de un medio contínuo, al conjunto de transformaciones homogéneas invertibles entre los distintos principios variacionales, expresados por variables conjugadas, que definen el estado de equilibrio del campo electromagnético.

PROPOSICION 2.1

Las formas funcionales de las ecuaciones constitutivas electromagnéticas de un medio contínuo, son tales que definen las componentes D_i y B_i como funciones homogéneas de primer grado de las componentes E_i y H_i, respectivamente, no necesariamente lineales, y viceversa.

NOTA: Todos los índices que figuran en este parágrafo varían en el conjunto $\{1, 2, 3\}$

Demostración.

En efecto, sean $\phi_r(E_i, D_j) = 0 \quad \forall\, i,j \in \{1,2,3\}$ 2.1

Las ecuaciones constitutivas que relacionan los - vectores electricos conjugados. Por ser transformaciones homogéneas:

$$\int_{\tau} D_i\, \delta E_i\, d\tau - \int_{\tau} E_i\, \delta D_i\, d\tau = 0 \qquad 2.2$$

Por 2.1

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial E_i}\, \delta E_i + \frac{\partial \phi_r}{\partial D_i}\, \delta D_i = 0$$

Introduciendo los multiplicadores de Lagrange λ_r en 2.2:

$$\int_{\tau} \left(D_i - \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial E_i} \right) \delta E_i\, d\tau - \int_{\tau} \left(E_i + \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial D_i} \right) \delta D_i\, d\tau = 0$$

La independencia de las variaciones δE_i, δD_i exige:

$$D_i = \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial E_i}, \quad E_i = -\lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial D_i} \quad \forall\, i, r \in \{1,2,3\} \qquad 2.3$$

Por otra parte:

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial E_i} + \frac{\partial \phi_r}{\partial D_j}\, \frac{\partial D_j}{\partial E_i} = 0 \qquad 2.4$$

Eliminando λ_r y ϕ_r entre 2.3 y 2.4 resulta:

$$D_i = E_j \frac{\partial D_j}{\partial E_i} \quad \forall\, i,j \in \{1,2,3\} \qquad 2.5$$

Además, de 2.3 se sigue:

$$\frac{\partial D_i}{\partial E_j} = \lambda_r \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial E_i \partial E_j} \,, \quad \frac{\partial D_j}{\partial E_i} = \lambda_r \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial E_j \partial E_i}$$

de donde, admitiendo que las funciones 2.1 cumplen las condiciones del teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial D_i}{\partial E_j} = \frac{\partial D_j}{\partial E_i} \qquad 2.6$$

Sustituyendo 2.6 en 2.5:

$$D_i = E_j \frac{\partial D_i}{\partial E_j}$$

Es decir, D_i es una función homogénea de primer - grado, no necesariamente lineal de E_i (o viceversa).

De la misma forma se llega a:

$$B_i = H_j \frac{\partial B_j}{\partial H_i} \,, \quad \frac{\partial B_j}{\partial H_i} = \frac{\partial H_i}{\partial B_j} \quad \forall i,j \in \{1,2,3\} \qquad 2.7$$

<u>OBSERVACION</u>

Por se D_i función homogénea de primer grado de E_i, su forma funcional debe ser tal que permita segregar E_i fuera del signo funcional:

$$D_i = \varepsilon_{ij} (E_i, x_j) E_j \quad \text{con} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial D_j}{\partial E_i} \qquad 2.8$$

y analogamente:

$$B_i = \mu_{ij}(H_i, x_j) \quad \text{con} \quad \mu_{ij} = \frac{\partial B_j}{\partial H_i} \tag{2.9}$$

y como casos particulares de interés se tienen:

1º) Medios anisótropos:

$$\frac{\partial D_j}{\partial E_i} = \varepsilon_{ij} \text{ (constantes) y } D_i = \varepsilon_{ij} E_j$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial H_i} = \mu_{ij} \text{ (constantes) y } B_i = \mu_{ij} H_j$$

2º) Medios isótropos:

$$\frac{\partial D_j}{\partial E_i} = \delta_{ij}\, \varepsilon \text{ (constante) y } D_i = \varepsilon E_i$$

$$\frac{\partial B_j}{\partial H_i} = \delta_{ij}\, \mu \text{ (constante) y } B_i = \mu H_i$$

PROPOSICION 2.2

Los tensores ε_{ij} y μ_{ij} son simétricos.

Demostración:

La simetría de ε_{ij} se sigue de 2.6 y 2.8.

Analogamente para μ_{ij} .

PROPOSICION 2.3

Si las componentes D_i y E_j están ligadas por relaciones homogéneas de primer grado, la condición:

$$\int_{\tau} E_i \, \delta D_i \, d\tau = 0 \quad 2.10 \text{ implica } \int_{\tau} D_i \, \delta E_i \, d\tau = 0 \qquad 2.11$$

Demostración:

En efecto:

$$D_i = D_i(E_j) \quad \text{IMPLICA} \quad \delta D_i = \frac{\partial D_i}{\partial E_j} \delta E_j$$

Sustituyendo en 2.10:

$$\int_{\tau} E_i \frac{\partial D_i}{\partial E_j} \delta E_j \, d\tau = 0$$

y teniendo en cuenta que $D_j = E_i \dfrac{\partial D_i}{\partial E_j}$ resulta 2.11.

De la misma forma se llega a la proposición análoga para los campos magnéticos.

PROPOSICION 2.4

Las ecuaciones constitutivas electromagnéticas de los medios contínuos son tales que hacen a la energía electromagnética invariante a la transformación de Legendre.

Demostración:

La transformada de Legendre $\overline{\mathcal{U}}$, de la densidad de energía electromagnética $\mathcal{U} = \frac{1}{2}(E_i D_i + H_i B_i)$ viene dada por:

$$\overline{\mathcal{U}} = \frac{\nabla \mathcal{U}}{\nabla E_i} E_i + \frac{\nabla \mathcal{U}}{\nabla H_i} H_i - \mathcal{U} \qquad \text{con:}$$

$$\frac{\nabla \mathcal{U}}{\nabla E_i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial E_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial D_j}\frac{\partial D_j}{\partial E_i} = \frac{1}{2} D_i + \frac{1}{2} E_j \frac{\partial D_j}{\partial E_i} = D_i$$

$$\frac{\nabla \mathcal{U}}{\nabla H_i} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial H_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial B_j}\frac{\partial B_j}{\partial H_i} = \frac{1}{2} B_i + \frac{1}{2} H_j \frac{\partial B_j}{\partial H_i} = B_i$$

Sustituyendo resulta: $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$

PROPOSICION2.5 (RECIPROCA)

Si entre los vectores electromagnéticos es posible establecer relaciones: $\phi_r(E_i, D_j) = 0$ y $\psi_r(H_i, B_j) = 0$ tales que la energía electromagnética sea invariante a la transformación de Legendre, dichas funciones definen las ecuaciones constitutivas.

Demostración:

$$\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \Longrightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial E_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial D_j}\frac{\partial D_j}{\partial E_i}\right) E_i + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial H_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial B_j}\frac{\partial B_j}{\partial H_i}\right) H_i -$$

$$- \frac{1}{2}\left(E_i D_i + H_i B_i\right) = \frac{1}{2}\left(E_i D_i + H_i B_i\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow E_i E_j \frac{\partial D_j}{\partial E_i} + H_i H_j \frac{\partial B_j}{\partial H_i} = E_i D_i + H_i B_i \Longrightarrow$$

$$D_i = E_j \frac{\partial D_j}{\partial E_i} \qquad B_i = H_j \frac{\partial B_j}{\partial H_i} \qquad \blacksquare$$

Las ecuaciones de Maxwell para las distribuciones de la intensidad del campo eléctrico y densidad de corriente en los medios contínuos conductores, son las mismas que las ecuaciones que determinan las distribuciones de intensidad y desplazamiento eléctrico en los dieléctricos:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{D} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{j} = 0 \end{cases}$$

Luego los principios variacionales que determinan el estado de equilibrio térmico de la distribución de corrientes en un conductor se obtendrán de aquellas sustituyendo $\vec{D}$ por $\vec{j}$:

$$\frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{j}\, \delta\vec{E}\, d\tau = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2}\int_{\tau} \vec{E}\, \delta\vec{j}\, d\tau = 0$$

Expuestas las cosas de esta manera resultan las siguientes proposiciones:

PROPOSICION 2.6

Las formas funcionales de las ecuaciones constitutivas de un medio conductor son tales que definen las componentes j_k como funciones homogéneas de primer grado de las componentes E_k, no necesariamente lineales, y viceversa.

Demostración:

Igual que la de la proposicion 2.1, sustituyendo D_k por j_k . Se llega así a las relaciones:

$$j_i = E_k \frac{\partial j_k}{\partial E_i} , \quad \frac{\partial j_k}{\partial E_i} = \frac{\partial j_i}{\partial E_k}$$

que implican la conclusión.

En particular, si $\frac{\partial j_k}{\partial E_i} = \sigma_{ik}$ (constante) resultan las ecuaciones constitutivas para los medios conductores anisótropos:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k$$

Si $\frac{\partial j_k}{\partial E_i} = \sigma \delta_{ik}$ con σ constante, se obtienen las correspondientes a los medios isótropos:

$$j_i = \sigma E_i$$

De igual forma que las proposicones 2.2 y 2.3, se demuestran las dos que siguen:

PROPOSICION 2.7

El tensor σ_{ik} es simétrico.

PROPOSICION 2.8

Si las componentes j_k y E_k están ligadas por relaciones homogéneas de primer grado, la anulación de $\int_\tau E_k \delta j_k \, d\tau$ implica la de $\int_\tau j_k \delta E_k \, d\tau$

PROPOSICION 2.9

Las ecuaciones constitutivas: $j_i = E_k \dfrac{\partial j_k}{\partial E_i}$ hacen invariante la funcional $\int_\tau j_i E_i \, d\tau$ (Energía disipada por unidad de tiempo) a la transformación de Legendre.

Demostración:

La transformada de Legendre de $W = j_i E_i$ es:

$$\overline{W} = E_i \left(\frac{\partial W}{\partial E_i} + \frac{\partial W}{\partial j_k} \frac{\partial j_k}{\partial E_i} \right) - j_i E_i =$$

$$= E_i \left(j_i + E_k \frac{\partial j_k}{\partial E_i} \right) - j_i E_i = j_i E_i = W$$

PROPOSICON 2.10

Si entre las componentes j_i y E_i es posible establecer ecuaciones $\phi_r(j_i, E_i)=0$ $\forall i,r\in\{1,2,3\}$ tales que $\int_\tau j_i E_i \, d\tau$ sea invariante a la transformación de Legendre, dichas funciones definen las ecuaciones constitutivas.

Demostración:

$$\overline{W} = W \Longrightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial E_i} + \frac{\partial W}{\partial j_k}\frac{\partial j_k}{\partial E_i}\right) E_i - j_i E_i = j_i E_i$$

de donde

$$E_k \frac{\partial j_k}{\partial E_i} E_i = j_i E_i$$

y de aquí:

$$j_i = E_k \frac{\partial j_k}{\partial E_i}$$

3. COMPLEMENTARIEDAD E INVERTIBILIDAD ENTRE LAS ECUACIONES DE MAXWELL-LORENTZ

Supondremos en todo lo que sigue que el espacio-tiempo cuadridimensional es pseudoeuclídeo (Espacio de Lorentz-Minkowski) con métrica dada por:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \quad \text{con} \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Consideraremos el campo electromagnético en ausencia de medios materiales. Denotaremos por F_{ij} al tensor campo electromagnético, y por j_μ al cuadrivector densidad de corriente. Todas las integrales se suponen extendidas a la totalidad del espacio, admitiéndose que el campo es nulo en el infinito.

3.1 CAMPO ELECTROMAGNETICO LIBRE

En las tres primeras proposiciones se estudia la invertibilidad entre los principios variacionales:

$$\int F^{ij}\delta F_{ij}\,d\tau = 0 \; ; \qquad \int F_{ij}\,\delta F^{ij}\,d\tau = 0 \tag{3.1.1}$$

En las siguientes se trata la relación de complementariedad entre ambos principios, bajo condiciones subsidiarias que pueden consistir en uno de los grupos de ecuaciones de Maxwell, o bien en su solución.

De acuerdo con la proposicion 4 del Capítulo I, si existe una transformación invertible entre los principios variacionales 3.1.1, los tensores F_{ij} F^{ij} deben estar ligados por las relaciones:

$$F^{ij} = F_{mn}\,\frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}} \; ; \qquad F_{ij} = F^{mn}\,\frac{\partial F_{mn}}{\partial F^{ij}} \tag{3.1.2}$$

NOTA: En este parágrafo, todos los índices varían en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

La proposicion que sigue expresa el resultado recí proco, y tiene por objeto mostrar que las relaciones:

$$F^{ij} = g^{im} g^{jn} F_{mn} \qquad F_{ij} = g_{im} g_{jn} F^{mn} \tag{3.1.3}$$

pueden considerarse como "ecuaciones constitutivas" para el campo electromagnético en ausenci de cargas y corrientes.

PROPOSICION 3.1.1

Las ecuaciones 3.1.3. definen una transformación invertible entre los principios variacionales 3.1.1

Demostración:

Según la proposición 5 del capítulo I, bastará probar que las ecuaciones 3.1.3 verifican las 3.1.2.

Teniendo en cuenta la primera de las 3.1.3:

$$F^{mn} = g^{im} g^{jn} F_{ij} \quad y \quad \frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}} = g^{im} g^{jn}$$

y sustituyendo en la primera de las ecuaciones 3.1.2 resulta una identidad.

Análogamente se demuestra que la segunda de las - 3.1.3. verifica la segunda de las 3.1.2.

PROPOSICION 3.1.2

Las ecuaciones constitutivas $\dot{F}^{ij} = g^{im} g^{jn} F_{mn}$ hacen invariante la funcional $S(F_{ij}) = \int F_{ij} F^{ij} d\tau$ respecto a la transformación de Legendre.

Demostración:

El momento conjugado de $\mathcal{L} = F_{ij} F^{ij}$ respecto a F_{ij} es:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{mn}} \frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}} = F^{ij} + F_{mn} g^{im} g^{jn} = 2 F^{ij}$$

y la transformada de Legendre de $\mathcal{L}$:

$$\bar{\mathcal{L}} = 2 F^{ij} F_{ij} - F_{ij} F^{ij} = F_{ij} F^{ij} = \mathcal{L}$$

PROPOSICION 3.1.3

La invariancia de la funcional $S(F_{ij}) = \int F_{ij} F^{ij} d\tau$ a la transformación de Legendre, exige que la relación entre F^{ij} y F_{ij} sea:

$$F^{ij} = F_{mn} \frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}}$$

Demostración:

Por hipótesis debe ser:

$$F_{ij} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{mn}} \frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}} \right) - F_{ij} F^{ij} = F_{ij} F^{ij}$$

es decir:

$$F_{ij}F^{ij}+F_{ij}F_{mn}\frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}}-F_{ij}\dot{F}^{ij}=F_{ij}F^{ij}$$

de donde sigue: $$F^{ij}=F_{mn}\frac{\partial F^{mn}}{\partial F_{ij}}$$

Resultados análogos pueden establecerse para la - funcional:

$$S^{*}(F^{ij})=\int F_{ij}F^{ij}d\tau$$

<u>PROPOSICION 3.1.4</u>

Las extremales de la funcional:

$$S(F_{ij})=\int F_{ij}F^{ij}d\tau$$

con las condiciones subsidiarias:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^{k}}+\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial F_{ki}}{\partial x^{j}}=0 \qquad 3.1.4$$

son:

$$F^{ij}=\frac{1}{2}e^{krij}\frac{\partial\lambda_{k}}{\partial x^{r}}$$

soluciones de las ecuaciones: $$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^{j}}=0 \qquad 3.1.5$$

(e^{krij} indica la delta de Kronecker generalizada)

Demostración:

Las ecuaciones 3.1.4 se pueden escribir en la forma:

$$e^{krij}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}=0$$

El método de los multiplicadores de Lagrange conduce a la funcional:

$$S'=\int F^{ij}F_{ij}\,d\tau+\int\lambda_k e^{krij}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}\,d\tau$$

de donde:

$$\delta S'=\int(F^{ij}\delta F_{ij}+F_{ij}\delta F^{ij})d\tau+\int\lambda_k e^{krij}\frac{\partial\delta F_{ij}}{\partial x^r}\,d\tau+$$

$$+\int\delta\lambda_k\, e^{krij}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}\,d\tau=0$$

Ahora bien, $F_{ij}\delta F^{ij}=F^{ij}\delta F_{ij}$. Además, integrando por partes y aplicando el teorema de Gauss:

$$\int\lambda_k e^{krij}\frac{\partial\delta F_{ij}}{\partial x^r}\,d\tau=\int\frac{\partial}{\partial x^r}(\lambda_k e^{krij}\delta F_{ij})d\tau-$$

$$-\int e^{krij}\frac{\partial\lambda_k}{\partial x^r}\delta F_{ij}\,d\tau=$$

$$\int\lambda_k e^{krij}\delta F_{ij}\,dS_k-\int e^{krij}\frac{\partial\lambda_k}{\partial x^r}\delta F_{ij}\,d\tau$$

Por ser nulo el campo en el infinito la integral - de superficie es nula. Sigue que

$$\delta S' = \int \left(2F^{ij}\delta F_{ij} - e^{krij}\frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r}\delta F_{ij} + e^{krij}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}\delta\lambda_k\right)d\tau = 0$$

La anulación del coeficiente de δF_{ij} implica:

$$F^{ij} = \frac{1}{2}\, e^{krij}\frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r}$$

Veamos ahora que estas funciones verifican las - ecuaciones 3.1.5

Para $i=1$:

$$F^{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial x^4} - \frac{\partial \lambda_4}{\partial x^3}\right)$$

$$F^{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda_4}{\partial x^2} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial x^4}\right)$$

$$F^{14} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x^2}\right)$$

De donde:

$$\frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{14}}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x^4 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \lambda_4}{\partial x^3 \partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda_4}{\partial x^2 \partial x^3} - \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^4 \partial x^3} +$$

$$+ \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial x^3 \partial x^4} - \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial x^2 \partial x^4} = 0$$

y analogamente para $i = 2, 3, 4$

PROPOSICION 3.1.5

Las extremales de la funcional $S^*(F^{ij}) = \int F_{ij} F^{ij} d\tau$

con las condiciones subsidiarias:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 0 \qquad \text{son:}$$

$F_{ij} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}$ soluciones de $\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0$

Demostración:

$$S^{*\prime} = \int F_{ij} F^{ij} d\tau - \int 4\lambda_i \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} d\tau \qquad \text{implica:}$$

$$\delta S^{*\prime} = \int 2 F_{ij}\, \delta F^{ij} d\tau - \int 4\lambda_i \frac{\partial \delta F^{ij}}{\partial x^j} d\tau - 4\int \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} \delta\lambda_i d\tau = 0$$

Integrando por partes la segunda integral, y aplicando las condiciones de contorno:

$$\delta S^{*\prime} = \int 2F_{ij}\, \delta F^{ij} d\tau + \int 4\, \delta F^{ij} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} d\tau - \int 4 \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} \delta\lambda_i d\tau =$$

$$2\int F_{ij}\, \delta F^{ij} d\tau - 2\int \delta F^{ij} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}\right) d\tau + 4\int \delta\lambda_i \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} d\tau =$$

$$= 2\int \left(F_{ij} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}\right) \delta F^{ij} d\tau + 4\int \delta\lambda_i \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} d\tau = 0$$

y por la arbitrariedad de las δF^{ij} :

$$F_{ij} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}$$

PROPOSICION 3.1.6

Las extremales de la funcional $S(F_{ij}) = \int F_{ij} F^{ij} d\tau$

con las condiciones subsidiarias:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \qquad \text{son:} \qquad \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

Demostración:

$$S' = \int F_{ij} F^{ij} d\tau + \int \lambda_{ij} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - F_{ij} \right) d\tau$$

donde, por la antisimetria de F_{ij} puede suponerse $\lambda_{ij} = -\lambda_{ji}$.

Sigue que:

$$\delta S' = \int 2 F^{ij} \delta F_{ij} d\tau + \int \delta\lambda_{ij} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - F_{ij} \right) d\tau -$$

$$\int \lambda_{ij} \, \delta F_{ij} \, d\tau + \int \lambda_{ij} \left(\frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} \right) d\tau = 0$$

Permutando los indices mudos i, j , y sustituyendo λ_{ji} por $-\lambda_{ij}$:

$$\int \lambda_{ij} \left(\frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} \right) d\tau = -2 \int \lambda_{ij} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} d\tau$$

Integrando por partes:

$$\int \lambda_{ij} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x^j} (\lambda_{ij} \delta A_i) d\tau - \int \delta A_i \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^j} d\tau =$$

$$= \int \lambda_{ij} \delta A_i \, dS_j - \int \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^j} \delta A_i d\tau = - \int \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^j} \delta A_i d\tau$$

Sustituyendo en la expresión de $\delta S'$:

$$\int \left[(2F^{ij} - \lambda_{ij}) \delta F^{ij} + 2 \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^j} \delta A_i + \delta \lambda_{ij} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - F_{ij} \right) \right] d\tau = 0$$

de donde:

$$\lambda_{ij} = 2F^{ij} \quad ; \quad \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^j} = 0$$

y eliminando λ_{ij} :

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^j} = 0$$

PROPOSICION 3.1.7

Las extremales de la funcional $S^*(F^{ij}) = \int F_{ij} F^{ij} d\tau$ con las condiciones subsidiarias:

$$F^{ij} = \frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r}$$

son:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

Demostración:

$$S^{*\prime} = \int F_{ij} F^{ij} d\tau + \int \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r} - F^{ij} \right) d\tau = 0$$

implica:

$$\delta S^{*\prime} = \int 2 F_{ij} \, \delta F^{ij} d\tau + \int \delta \lambda_{ij} \left(\frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r} - F^{ij} \right) d\tau +$$

$$+ \int \frac{1}{2} \lambda_{ij} \, e^{krij} \frac{\partial \delta \lambda_k}{\partial x^r} d\tau - \int \lambda_{ij} \, \delta F^{ij} d\tau = 0$$

Integrando por partes:

$$\int \lambda_{ij} \, e^{krij} \frac{\partial \delta \lambda_k}{\partial x^r} d\tau = - \int \delta \lambda_k \, e^{krij} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^r} d\tau$$

sigue que:

$$\int \left[(2F_{ij} - \lambda_{ij}) \delta F^{ij} - \frac{1}{2} \delta \lambda_k \, e^{krij} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^r} + \left(\frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r} - F_{ij} \right) \delta \lambda_{ij} \right] d\tau = 0$$

y de aquí:

$$\lambda_{ij} = 2 F_{ij} \quad ; \quad \frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x^r} = 0$$

y eliminando λ_{ij} :

$$e^{krij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r} = 0$$

Que equivalen al primer grupo de ecuaciones de Maxwell.

3.2. CAMPO ELECTROMAGNETICO EN PRESENCIA DE CARGAS Y CORRIENTES: PRINCIPIOS VARIACIONALES COMPLEMENTARIOS.

Es sabido que si se considera el primer grupo de ecuaciones de Maxwell como ecuaciones de defini-- ción del campo, el principio variacional $\delta S = 0$, donde la acción S viene dada por:

$$S = \frac{\varepsilon_0}{4} \int F^{ij} F_{ij} \, d\tau + \int j^i A_i \, d\tau$$

Conduce al segundo grupo de ecuaciones de Maxwell, que por tanto constituyen las ecuaciones de evolución del campo.

El propósito del siguiente enunciado es formular - el principio variacional complementario del anterior.

PROPOSICION 3.2.1

Si la acción complementaria se define por:

$$S^* = \int F_{ij} F^{ij} \, d\tau$$

y se admiten como ecuaciones de definición el segundo grupo de ecuaciones de Maxwell:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{j^i}{\varepsilon_0} = 0$$

el principio variacional $\delta S^* = 0$ conduce al primer grupo de ecuaciones de Maxwell:

$$e^{krij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r} = 0$$

Demostración:

Supuesto que no cambian las cargas ni las corrientes en el proceso variacional, $\delta j^i = 0$, y se tiene:

$$\frac{\partial \delta F^{ij}}{\partial x^j} = 0 \qquad \text{de donde:} \qquad \delta F^{ij} = e^{krij} \delta \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r}$$

En consecuencia, $\delta S^* = 0$ implica:

$$\int F_{ij} \delta F^{ij} d\tau = \int e^{krij} F_{ij} \delta \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r} d\tau = 0$$

y aplicando el teorema de Gauss y las condiciones de contorno:

$$\int e^{krij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r} \delta \varphi_k d\tau = 0$$

y al ser arbitrarias las $\delta\varphi_k$ se concluye:

$$e^{krij}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}=0$$

NOTA:

También es posible utilizar el segundo grupo de ecuaciones de Maxwell como ligaduras, y aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. ■

Como consecuencia de la ecuación de continuidad: $\frac{\partial j^k}{\partial x^k}=0$, el cuadrivector j^i puede expresarse en la forma:

$$j^i=\frac{\partial G^{ij}}{\partial x^j}$$

siendo el tensor G^{ij} antisimétrico. El segundo grupo de ecuaciones de Maxwell puede entonces escribirse en la forma:

$$\frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j}+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial G^{ij}}{\partial x^j}=0$$

ó bien: $\frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j}=0$, siendo $M^{ij}=F^{ij}+\frac{1}{\varepsilon_0}G^{ij}$

Lo anterior nos va a permitir formular para el campo electromagnético en presencia de cargas y corrientes, principios variacionales complementarios formalmente análogos a los correspondientes al campo libre.

PROPOSICION 3.2.2

La variación de la acción del principio variacional clásico puede expresarse en la forma:

$$\delta S = \frac{\varepsilon_0}{2} \int M^{ij} \delta F_{ij} \, d\tau$$

Demostración:

De $$S = \frac{\varepsilon_0}{4} \int F^{ij} F_{ij} \, d\tau + \int j^i A_i \, d\tau$$

sigue: $$\delta S = \frac{\varepsilon_0}{4} \int 2F^{ij} \delta F_{ij} \, d\tau + \int j^i \delta A_i \, d\tau$$

Además, como consecuencia del teorema de Gauss y de las condiciones de contorno:

$$\int j^i \delta A_i \, d\tau = \int \frac{\partial G^{ij}}{\partial x^j} \delta A_i \, d\tau = - \int G^{ij} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} d\tau$$

y por ser G^{ij} antisimétrico:

$$- \int G^{ij} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} d\tau = \int \left(-\frac{1}{2} G^{ij} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} + \frac{1}{2} G^{ij} \frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} \right) d\tau =$$
$$= \frac{1}{2} \int G^{ij} \delta F_{ij} \, d\tau$$

En consecuencia:

$$\delta S = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(F^{ij} \delta F_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_0} G^{ij} \delta F_{ij} \right) d\tau =$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int \left(F^{ij} + \frac{1}{\varepsilon_0} G^{ij} \right) \delta F_{ij} \, d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} \int M^{ij} \delta F_{ij} \, d\tau$$

PROPOSICION 3.2.3

El principio variacional $\delta S \doteq \frac{\varepsilon_0}{2}\int M^{ij}\delta F_{ij}\,d\tau = 0$ con $e^{krij}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r} = 0$, primer grupo de ecuaciones de Maxwell, implica:

$$M^{ij} = \frac{1}{2}\, e^{krij}\,\frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r}$$

soluciones del segundo grupo de ecuaciones de Maxwell.

Demostración:

Utilizando los multiplicadores de Lagrange $\frac{\varepsilon_0 \lambda_k}{4}$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int M^{ij}\delta F_{ij}\,d\tau + \frac{\varepsilon_0}{4}\int \lambda_k\, e^{krij}\,\frac{\partial \delta F_{ij}}{\partial x^r}\,d\tau + \frac{\varepsilon_0}{4}\int e^{krij}\,\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}\,\delta\lambda_k\,d\tau = 0$$

y aplicando el teorema de Gauss:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int \left(M^{ij} - \frac{1}{2}\, e^{krij}\,\frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r}\right)\delta F_{ij}\,d\tau + \frac{\varepsilon_0}{4}\int e^{krij}\,\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r}\,\delta\lambda_k\,d\tau = 0$$

y por ser arbitrarias las δF_{ij} :

$$M^{ij} = \frac{1}{2}\, e^{krij}\,\frac{\partial \lambda_k}{\partial x^r}$$

PROPOSICION 3.2.4

El principio variacional $\delta S_1^* = \frac{\varepsilon_0}{2}\int F_{ij}\,\delta M^{ij}\,d\tau = 0$ junto con: $\frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j} = 0$, segundo grupo de ecuaciones de Maxwell, implica: $F_{ij} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}$,soluciones del 1er grupo de ecuaciones de Maxwell.

Demostración:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int F_{ij}\,\delta M^{ij}d\tau - \varepsilon_0\int \lambda_i \frac{\partial \delta M^{ij}}{\partial x^j}d\tau - \varepsilon_0\int \frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j}\delta\lambda_i d\tau = 0$$

siendo $-\varepsilon_0\lambda_i$ multiplicadores de Lagrange. Aplicando el teorema de Gauss:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int F_{ij}\,\delta M^{ij}d\tau + \varepsilon_0\int \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j}\delta M^{ij}d\tau - \varepsilon_0\int \frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j}\delta\lambda_i d\tau = 0$$

y siendo $\quad \dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x^j}\delta M^{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\lambda_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial\lambda_j}{\partial x^i}\right)\delta M^{ij}$

queda: $\quad \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int\left[F_{ij} - \left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial\lambda_i}{\partial x^j}\right)\right]\delta M^{ij}d\tau - \varepsilon_0\int\frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j}\delta\lambda_i d\tau = 0$

de donde: $$F_{ij} = -\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial\lambda_i}{\partial x^j}\right)$$

<u>PROPOSICION 3.2.5</u>

El principio variacional $\quad \delta S = \dfrac{\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int M^{ij}\delta F_{ij}\,d\tau = 0$

con $F_{ij} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$, implica el segundo grupo de ecuaciones de Maxwell.

Demostración:

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} \qquad \text{por tanto:}$$

$$\int M^{ij}\left(\frac{\partial\delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial\delta A_i}{\partial x^j}\right)d\tau = -2\int M^{ij}\frac{\partial\delta A_i}{\partial x^j}d\tau = 2\int\frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j}\delta A_i d\tau = 0$$

de donde

$$\frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

PROPOSICION 3.2.6

El principio variacional $\delta S_i^* = \int \frac{\varepsilon_0}{2} F_{ij}\, \delta M^{ij} d\tau = 0$ junto con: $M^{ij} = \frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r}$ implica el primer grupo de ecuaciones de Maxwell.

Demostración:

Sustituyendo $\delta M^{ij} = \frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^r}$ en la expresión de δS_i^*, y aplicando el teorema de Gauss:

$$\int F_{ij} \frac{1}{2} e^{krij} \frac{\partial \delta \varphi_k}{\partial x^r} d\tau = -\int e^{krij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r} \delta \varphi_k d\tau = 0$$

de donde

$$e^{krij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^r} = 0$$

3.3. CAMPO ELECTROMAGNETICO EN PRESENCIA DE CARGAS Y CORRIENTES: TRANSFORMACIONES INVERTIBLES

PROPOSICION 3.3.1

Si el principio variacional:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int F^{ij} \delta F_{ij}\, d\tau + \int j^i \delta A_i\, d\tau = 0$$

se verifica bajo la condición:

$$F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$$

y el principio complementario: $\int F_{ij}\,\delta F^{ij}\,d\tau = 0$

bajo la condición: $\dfrac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \dfrac{j^i}{\varepsilon_0} = 0$

La transformación invertible que permite obtener un principio a partir del otro, queda definida - por las ecuaciones de Maxwell.

Demostración:

Debe ser: $\dfrac{\varepsilon_0}{2}\int F^{ij}\delta F_{ij}\,d\tau + \int j^i \delta A_i\,d\tau - \int F_{ij}\,\delta F^{ij}\,d\tau = 0$ 3.3.1

con las condiciones:

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} \qquad ; \qquad \frac{\partial \delta F^{ij}}{\partial x^j} = 0$$

De donde:

$$\int \left[\lambda^{ij}\delta F_{ij} - \lambda^{ij}\left(\frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j}\right) + \lambda_i \frac{\partial \delta F^{ij}}{\partial x^j}\right] d\tau = 0 \qquad 3.3.2$$

siendo λ^{ij}, λ_i multiplicadores de Lagrange. Además por la antisimetría de F_{ij}, debe ser $\lambda^{ij} = -\lambda^{ji}$ y

$$-\lambda^{ij}\left(\frac{\partial \delta A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j}\right) = 2\,\lambda^{ij}\frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j}$$

Aplicando el teorema de Gauss:

$$\int \lambda^{ij} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^j} \, d\tau = -\int \frac{\partial \lambda^{ij}}{\partial x^j} \delta A_i \, d\tau$$

Analogamente:

$$\int \lambda_i \frac{\partial \delta F^{ij}}{\partial x^j} \, d\tau = -\int \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \delta F^{ij} d\tau \quad y$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \delta F^{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \right) \delta F^{ij}$$

Sustituyendo en 3.3.2:

$$\int \left[\lambda^{ij} \delta F_{ij} - 2 \frac{\partial \lambda^{ij}}{\partial x^j} \delta A_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \right) \delta F^{ij} \right] d\tau = 0 \qquad 3.3.3$$

De 3.3.1 y 3.3.3:

$$\int \left\{ \left(\frac{\varepsilon_0}{2} F^{ij} + \lambda^{ij} \right) \delta F_{ij} + \left(j^i - 2 \frac{\partial \lambda^{ij}}{\partial x^j} \right) \delta A_i + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \right) - F_{ij} \right] \delta F^{ij} \right\} d\tau = 0$$

y considerando como arbitrarias las variaciones

$\delta F_{ij}, \ \delta A_i, \ \delta F^{ij}$:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\varepsilon_0}{2} F^{ij} + \lambda^{ij} = 0 \\ &2 \frac{\partial \lambda^{ij}}{\partial x^j} - j^i = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{que implican} \quad \frac{\partial F^{ij}}{\partial x_j} + \frac{j^i}{\varepsilon_0} = 0$$

y además, $F_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} \right)$ que por derivación conducen al primer grupo de ecuaciones de Maxwell.

4. CONCLUSIONES

En este capítulo se ha intentado introducir las nociones de invertibilidad, dualidad y complementariedad en el campo electromagnético clásico, siguiendo un procedimiento equivalente en parte al utilizado en el campo elástico.

Trabajos con las perspectivas de complementariedad han sido realizados en los últimos años por P. Hammond (23) y también por N. Anderson y A.M. Arthurs (1) a (5). Estos autores abordan el problema de la complementariedad subyacente entre las clásicas definiciones operacionales de la divergencia y el rotacional. Ello les lleva a estudiar la complementariedad entre ecuaciones de Maxwell pertenecientes a un mismo grupo, esto es, entre las ecuaciones de definición entre sí, ó entre las ecuaciones de evolución entre sí. La idea aquí desarrollada ha sido establecer la complementariedad entre el primer grupo y el segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell, en otras palabras, entre las ecuaciones de definición y las ecuaciones de evolución del campo electromagnético. El método seguido tiene sus fundamentos en la Teoria de las transformaciones invertibles desarrollada en el primer capítulo, siendo sus resultados más importantes los siguientes:

1. Se demuestra que las llamadas ecuaciones constitutivas del electromagnetismo pueden considerarse como ecuaciones homogéneas invertibles entre los principios variacionales, sin condiciones, que definen los estados de equilibrio del campo electromagnético. Tal consideración nos lleva a la invariancia de la energía electromagnética a las trasnformaciones de Legendre, a la par que nos permite establecer las posibles formas funcionales de las ecuaciones constitutivas.

2) Con el fín de satisfacer a las exigencias de síntesis y generalidad, se formulan los resultados anteriores en el espacio-tiempo de Minkowki; donde, por otra parte, la covariància ó contravariancia de los tensores campo electrónico permite una fácil elaboración de las leyes duales. En este contexto se demuestra:

a) Que las prposiciones 3.1.4 y 3.1.7, así como las 3.1.5 y 3.1.6, definen principios variacionales complementarios, en el sentido de que las ecuaciones de defincién de cada principio son las extremales del otro. De esta forma, cada grupo de ecuaciones de Maxwell puede considerarse como dual del otro, respecto a los principios variacionales

b) Que tal dualidad se verifica si sustituimos uno de los grupos por soluciones particulares del mismo.

c) Que en el caso del campo electromagnético con fuentes, es posible formular un principio variacional complementario del clásico, que adopta el primer grupo de ecuaciones de Maxwell como ecuaciones de definición (Proposición 3.2.1)

d) Que son precisamente las ecuaciones de Maxwell, para el caso de cargas y corrientes, las que definen las transformaciones invertibles entre los principios complementarios anteriores (Proposición 3.3.1).

CAPITULO 4

CAMPO GRAVITATORIO

1. OBJETO DEL PRESENTE CAPITULO

Se intenta extender a la Relatividad General los conceptos de invertibilidad y dualidad desarrollados en capítulos anteriores. Con ello se pretende, además de mostrar la estructura variacional subyacente en los espacios de Riemann, establecer las conexiones entre los principios estacionarios del campo gravitatorio.

La invariancia de la acción del campo gravitatorio a las transformaciones infinitesimales induce a utilizar tales transformaciones para introducir en la teoría gravitatoria los conceptos de dualidad e invertibilidad. La invertibilidad se logra al demostrar que los sistemas de identidades:

$$\nabla_j g^{ik} = 0 \quad ; \quad \nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) = 0$$

definen transformaciones invertibles entre los principios variacionales de la Relatividad General. La dualidad es el resultado de dos proposiciones complementarias:

Una que establece que el principio:

$$\int_\tau R_{ik} \delta (\sqrt{-g}\, g^{ik}) d\tau = 0$$

bajo las condiciones $\nabla_j g^{ik} = 0$ conduce a la anulación de la divergencia del tensor de Einstein. La otra establece que el principio:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik} \delta R_{ik} d\tau = 0$$

bajo la condición $\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) = 0$ conduce al teorema de Ricci. Para demostrar la primera se toma como solución particular de las ecuaciones de definición: $-\delta g_{ik} = (\nabla_i S_k + \nabla_k S_i)$, y para demostrar la segunda se toma como solución la expresión del tensor de Ricci en función de los coeficientes de conexión afín Γ^k_{ij} . Con esto queda demostrada la complementariedad entre los principios variacionales del campo gravitatorio puro.

La extensión de los resultados anteriores al caso de la interacción campo gravitatorio-materia, aparece como una generalización natural, al superponer a la acción del campo gravitatorio la acción representativa de la materia. Aquí la teoría se desarrolla en perfecto paralelismo a la de los campos puros, y desde el punto de vista operacional todo se reduce a sustituir el tensor de Einstein, por el llamado tensor de inercia:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$$

PROPOSICION 1

En el dominio de las transformaciones infinitesimales, las identidades $\nabla_j g^{ik} = 0$ y $\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R\right) = 0$ definen transformaciones invertibles entre los principios variacionales de la Relatividad General.

Demostración:

En efecto, para una transformación infinitesimal definida por el vector ξ_j , las distintas variaciones vienen dadas por:

$$\delta R_{ik} = - R_{ij} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_k} - R_{jk} \frac{\partial \xi_j}{\partial q_i} - \frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j} \xi_j \qquad (1)$$

NOTA: Todos los índices discretos utilizados en el presente capítulo varían en el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\delta g_{ik} = - g_{ij}\frac{\partial s_j}{\partial q_k} - g_{jk}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} s_j \qquad (2)$$

$$\delta g^{ik} = g^{ij}\frac{\partial s_k}{\partial q_j} + g^{jk}\frac{\partial s_i}{\partial q_j} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} s_j \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en la integral que sigue, resulta:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\delta R_{ik}\, d\tau = -\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ij}\frac{\partial s_j}{\partial q_k} d\tau -$$

$$-\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik} R_{jk}\frac{\partial s_j}{\partial q_i} d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j} s_j\, d\tau$$

Integrando por partes las dos primeras integrales del segundo miembro, y admitiendo que las s_j se anulan en la frontera del dominio de integración, la expresión anterior se transforma en:

$$\int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial q_k}(\sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ij}) + \frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\, g^{ik} R_{jk})\right] s_j\, d\tau -$$

$$-\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j} s_j\, d\tau$$

que por la simetría de los tensores g^{ik}, R_{ik} se pueden escribir en la forma:

$$2\int_\tau s_j \frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\, g^{ri} R_{rj})\, d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j} s_j\, d\tau$$

En consecuencia:

$$\int_{\tau} \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta R_{ik}\, d\tau = 2\int_{\tau} s_j \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{-g}\, R_j^i\right) d\tau \,-$$

$$- \int_{\tau} \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j}\, s_j\, d\tau \qquad (4)$$

Siguiendo un procedimiento análogo se obtiene (NOTAS 1 y 2):

$$\int_{\tau} \sqrt{-g}\, R_{ik}\, \delta g^{ik}\, d\tau = -2\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{-g}\, R_j^i\right) s_j\, d\tau \,-$$

$$- \int_{\tau} \sqrt{-g}\, R_{ik}\, \frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}\, s_j\, d\tau \qquad (5)$$

$$\int_{\tau} \sqrt{-g}\, R\, g_{ik}\, \delta g^{ik}\, d\tau = -2\int_{\tau} \sqrt{-g}\, \frac{\partial R}{\partial q_j}\, s_j\, d\tau \qquad (6)$$

Por otra parte:

$$I = \int_{\tau} \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta R_{ik}\, d\tau - \int_{\tau} R_{ik}\, \delta\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\right) d\tau =$$

$$= \int_{\tau} \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta R_{ik}\, d\tau - \int_{\tau} \sqrt{-g}\, R_{ik}\, \delta g^{ik}\, d\tau - \int_{\tau} R_{ik}\, g^{ik}\, \delta\left(\sqrt{-g}\right) d\tau =$$

$$= \int_{\tau} \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta R_{ik}\, d\tau - \int_{\tau} \sqrt{-g}\, R_{ik}\, \delta g^{ik}\, d\tau + \frac{1}{2}\int_{\tau} \sqrt{-g}\, R\, g_{ik}\, \delta g^{ik}\, d\tau$$

y teniendo en cuenta (4), (5) y (6):

$$I = 2\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{-g}\, R_j^i\right) s_j\, d\tau - \int_{\tau} \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j}\, s_j\, d\tau \,+$$

$$+ 2\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{-g}\, R_j^i\right) s_j\, d\tau + \int_{\tau} \sqrt{-g}\, R_{ik}\, \frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}\, s_j\, d\tau - \int_{\tau} \sqrt{-g}\, \frac{\partial R}{\partial q_j}\, s_j\, d\tau$$

Como $\quad -g^{ik}\dfrac{\partial R_{ik}}{\partial q_j} = R_{ik}\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} - \dfrac{\partial R}{\partial q_j}$ resulta:

$$I = 4\int_\tau \frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\,R^i_j)\,s_j\,d\tau + 2\int_\tau \sqrt{-g}\,R_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}\,s_j\,d\tau -$$

$$- 2\int_\tau \sqrt{-g}\,\frac{\partial R}{\partial q_j}\,s_j\,d\tau =$$

$$= 4\int_\tau \left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\,R^i_j) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,R_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial R}{\partial q_j}\right] s_j\,d\tau$$

Ademas, como consecuencia del teorema de Ricci - (nota 3):

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\,R^i_j) + \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}R_{ik} = \sqrt{-g}\,\nabla_i R^i_j$$

con lo cual:

$$\frac{1}{4}I = \int_\tau \sqrt{-g}\,\left(\nabla_i R^i_j - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial q_j}\right) s_j\,d\tau \qquad (7)$$

Veamos ahora que, como consecuencia de la hipótesis:

$$\nabla_i\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = 0$$

La última integral es nula. Por el teorema de Ricci:

$$\nabla_s\left(R^{rs} - \frac{1}{2}g^{rs}R\right) = 0 \implies \nabla_s R^{rs} - \frac{1}{2}g^{rs}\nabla_s R = 0$$

Multiplicando por g_{rj} :

$$g_{rj}\nabla_s R^{rs} - \frac{1}{2} g_{rj}\, g^{rs}\nabla_s R = 0$$ de donde:

$$\nabla_i R^i_j - \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial q_j} = 0$$ y sustituyendo en (7) queda:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\delta R_{ik}\, d\tau - \int_\tau R_{ik}\,\delta(\sqrt{-g}\, g^{ik})\, d\tau = 0$$

NOTAS

1)

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\,\delta g^{ik} d\tau = \int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\, g^{jk}\frac{\partial s_i}{\partial q_j} d\tau +$$

$$+\int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\, g^{ij}\frac{\partial s_k}{\partial q_j} d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} s_j d\tau =$$

$$-\int_\tau \frac{\partial}{\partial q_j}[\sqrt{-g}\, R_{ik} g^{jk}] s_i d\tau - \int_\tau \frac{\partial}{\partial q_j}[\sqrt{-g}\, R_{ik} g^{ij}] s_k d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} s_j d\tau =$$

$$-2\int_\tau \frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\, R^i_j)\, s_j\, d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} s_j d\tau$$

2)

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, R\, g_{ik}\,\delta g^{ik} d\tau = \int_\tau \sqrt{-g}\, R\, g_{ik} g^{jk}\frac{\partial s_i}{\partial q_j} d\tau +$$

$$+\int_\tau \sqrt{-g}\, R\, g_{ik} g^{ij}\frac{\partial s_k}{\partial q_j} d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, R\, g_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} s_j\, d\tau =$$

$$2\int_{\tau}\sqrt{-g}\,R\,\frac{\partial s_i}{\partial q_j}\,d\tau-\int_{\tau}\sqrt{-g}\,R\,g_{ik}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}\,s_j\,d\tau=$$

$$=-2\int_{\tau}\frac{\partial}{\partial q_j}(\sqrt{-g}\,R)\,s_j\,d\tau-\int_{\tau}\sqrt{-g}\,R\,g_{ik}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}\,s_j\,d\tau$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial(\sqrt{-g})}{\partial q_j}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{ik}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}$$

la última expresión se reduce a

$$-2\int_{\tau}\sqrt{-g}\,\frac{\partial R}{\partial q_j}\,s_j\,d\tau$$

3) En efecto:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(\sqrt{-g}\,R^i_j)+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}R_{ik}=\sqrt{-g}\,\frac{\partial R^i_j}{\partial q_i}-$$

$$-\frac{1}{2}R^i_j\sqrt{-g}\,g_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_i}+\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,R_{ik}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}=$$

$$\sqrt{-g}\left[\frac{\partial R^i_j}{\partial q_i}-\frac{1}{2}R^i_j\,g_{rs}\frac{\partial g^{rs}}{\partial q_i}+\frac{1}{2}R_{ik}\,\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j}\right]$$

Por el teorema de Ricci:

$$\frac{\partial g^{rs}}{\partial q_i} = -\Gamma^{r}_{\alpha i}\, g^{\alpha s} - \Gamma^{s}_{\alpha i}\, g^{r\alpha}$$

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} = -\Gamma^{k}_{\alpha j}\, g^{i\alpha} - \Gamma^{i}_{\alpha j}\, g^{\alpha k}$$

y sustituyendo en la última expresión queda:

$$\sqrt{-g}\left[\frac{\partial R^{i}_{j}}{\partial q_i} + R^{\alpha}_{j}\,\Gamma^{i}_{i\alpha} - R^{i}_{\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{ij}\right] = \sqrt{-g}\,\nabla_i R^{i}_{j}$$

PROPOSICION 2

En el dominio de las transformaciones infinitesimales:

$$\delta\int_{\tau}\sqrt{-g}\; g^{ik}\, R_{ik}\, d\tau = 0$$

Demostración:

$$\delta\int_{\tau}\sqrt{-g}\, g^{ik} R_{ik}\, d\tau = \int_{\tau}\sqrt{-g}\, g^{ik}\,\delta R_{ik}\, d\tau + \int_{\tau}\sqrt{-g}\left(R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik}\right)\delta g^{ik}\, d\tau$$

y sustituyendo las integrales del segundo miembro por las expresiones (4), (5) y (6) se obtiene:

$$-\int_{\tau}\sqrt{-g}\left(g^{ik}\frac{\partial R_{ik}}{\partial q_j} + R_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j}\right) S_j\, d\tau = 0$$

en virtud de la identidad: $R = g^{ik} R_{ik}$

PROPOSICION 3

En el dominio de las transformaciones infinitesimales, $\int_{\tau} R_{ik}\, \delta(\sqrt{-g}\, g^{ik})\, d\tau = 0$ (8), bajo la condición:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} + \Gamma^{i}_{rj}\, g^{rk} + \Gamma^{k}_{rj}\, g^{ir} = 0 \qquad (9)$$

implica la ley de conservación:

$$\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = 0 \qquad (10)$$

Demostración:

En efecto, para una transformación infinitesimal - definida por un vector S^i, la variación:

$$\delta g_{ik} = - g_{ij} \frac{\partial S^j}{\partial q^k} - g_{jk} \frac{\partial S^j}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} S^j$$

en virtud de (9) puede escribirse:

$$- \delta g_{ik} = \nabla_k S_i + \nabla_i S_k$$

De donde

$$\delta g^{ik} = - g^{ip} g^{kq} \left(\nabla_p S_q + \nabla_q S_p \right) \qquad (11)$$

Además:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, R_{ik}\, \delta(\sqrt{-g}\, g^{ik})\, d\tau = \int_\tau \sqrt{-g}\,(R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik})\, \delta g^{ik}\, d\tau$$

y teniendo en cuenta (8) y (11):

$$\int_\tau \sqrt{-g}\,(R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik})\, g^{ip} g^{kq} (\nabla_p S_q + \nabla_q S_p)\, d\tau = 0$$

que, por la simetría del tensor curvatura, implica:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\,(R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik})\, g^{ip} g^{kq}\, \nabla_p S_q\, d\tau = 0$$

Integrando por partes, teniendo presente la anulación de S_q en $\partial\tau$:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\; \nabla_p \left[(R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik})\, g^{ip} g^{kq} \right] S_q\, d\tau = 0$$

y por la arbitrariedad de S_q :

$$\nabla_p \left(R^{pq} - \tfrac{1}{2} R^{pq} \right) = 0$$

y de aquí la conclusión.

<u>PROPOSICION 4</u>

En el dominio de las transformaciones infinitesimales:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta R_{ik}\, d\tau = 0 \quad (12)$$ bajo la condición:

$$\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} \right) = 0$$

implica el teorema de Ricci.

Demostración:

Es sabido que la condición del enunciado se satisface haciendo:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^j_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial \Gamma^j_{ij}}{\partial q_k} + \Gamma^j_{ik}\Gamma^r_{jr} - \Gamma^j_{ir}\Gamma^r_{kj}$$

donde los Γ^k_{ij} son los coeficientes de conexión afín. Sustituyendo en (12):

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \delta\Gamma^j_{ik}}{\partial q_j} d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \delta\Gamma^j_{ij}}{\partial q_k} d\tau +$$

$$+ \int \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \Gamma^r_{jr}\, \delta\Gamma^j_{ik}\, d\tau + \int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \Gamma^j_{ik}\, \delta\Gamma^r_{jr}\, d\tau - \int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta(\Gamma^j_{ir}\Gamma^r_{kj})\, d\tau = 0$$

e integrando por partes las dos primeras integrales queda:

$$\int_\tau \Big\{ - \Big[\frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial q_j} - \sqrt{-g}\, g^{ik}\Gamma^r_{jr} + \sqrt{-g}\, g^{rk}\Gamma^i_{rj} + \sqrt{-g}\, g^{ir}\Gamma^k_{rj} \Big] \delta\Gamma^j_{ik} +$$

$$+ \Big[\frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{ik})}{\partial q_k} + \sqrt{-g}\, g^{rk}\Gamma^i_{rk} \Big] \delta\Gamma^j_{ij} \Big\}\, d\tau = 0$$

que puede escribirse en la forma:

$$\int_\tau \left[-\nabla_j (\sqrt{-g}\, g^{ik}) \delta \Gamma^j_{ik} + \nabla_k (\sqrt{-g}\, g^{ik}) \delta \Gamma^j_{ij} \right] d\tau = 0$$

ó bien:

$$\int_\tau \left\{ -\nabla_j (\sqrt{-g}\, g^{ik}) + \frac{1}{2} \left[\delta^j_k \nabla_r (\sqrt{-g}\; g^{ir} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \delta^i_j \nabla_r (\sqrt{-g}\; g^{kr}) \right] \right\} \delta \Gamma^j_{ik}\, d\tau = 0$$

que por la arbitrariedad de las $\delta \Gamma^j_{ik}$ implica:

$$\nabla_j (\sqrt{-g}\; g^{ik}) - \frac{1}{2} \left[\delta^j_k \nabla_r (\sqrt{-g}\, g^{ir}) + \delta^i_j \nabla_r (\sqrt{-g}\, g^{kr}) \right] = 0$$

de donde $\nabla_j (\sqrt{-g}\; g^{ik}) = 0$, y de aquí la conclusión:

$$\nabla_j\, g_{ik} = 0$$

<u>PROPOSICION 5</u>

En el dominio de las transfomracioness infinitesimales,

$$\int_\tau \sqrt{-g}\, (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \chi\, T_{ik}) \,\delta g^{ik} d\tau = 0 \qquad (13)$$

bajo la condición:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial q_j} + \Gamma^i_{rj}\, g^{rk} + \Gamma^k_{rj}\, g^{ir} = 0$$

implica la ley de conservación

$$\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} - \chi\, T_{ik} \right) = 0$$

Demostración:

sustituyendo en (13) la expresión de δg^{ik} dada por (11) se obtiene:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\left[R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} - \chi\, T_{ik} \right] g^{ip} g^{kq} \left(\nabla_p S_q + \nabla_q S_p \right) d\tau = 0$$

Por la simetria del tensor entre corchetes:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\left[R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} - \chi\, T_{ik} \right] g^{ip} g^{kq}\, \nabla_q S_p\, d\tau = 0$$

Integrando por partes, y teniendo en cuenta la - anulación de S_p en $\partial\tau$:

$$\int_\tau \sqrt{-g}\; \nabla_q \left[\left(R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} - \chi\, T_{ik} \right) g^{ip} g^{kq} \right] S_p\, d\tau = 0$$

y por la arbitrariedad de S_p , resulta:

$$\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} - \chi\, T_{ik} \right) = 0$$

PROPOSICION 6 (Conservación del tensor energia-impulso)

Se verifica: $\nabla_i \dot{T}_{ik} = 0$

Demostración:

Por la proposición anterior: $\nabla_k \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \chi T_{ik} \right) = 0$

y por la proposición 3: $\nabla_k \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} \right) = 0$

lo que implica: $\nabla_k T_{ik} = 0$

De igual forma que la 4, se demuestra entonces la siguiente proposición.

PROPOSICION 7

En el dominio de las transformaciones infinitesimales,

$\int_\tau \sqrt{-g}\, g^{ik}\, \delta R_{ik}\, d\tau = 0$ bajo la concición:

$$\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \chi T_{ik} \right) = 0$$

implica el teorema de Ricci.

CONCLUSIONES

1) Las identidades $\nabla_j g^{ik} = 0$, $\nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = 0$ pueden considerarse como las ecuaciones constitutivas del campo gravitatorio, en el sentido de que

definen transformaciones invertibles entre los -- principios variacionales de la relatividad general.

2) En el dominio de las transformaciones infinitesimales ambos sistemas de ecuaciones:

$$\nabla_j g^{ik} = 0 \quad y \quad \nabla_i \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = 0$$

son duales en el sentido de que las ecuaciones de Euler de un principio son las ecuaciones de definición del complementario.

3) En el caso de interacción campo gravitatorio-materia, la dualidad se conserva sustituyendo la anulación de la divergencia del tensor de Einstein, - por la anulación de la divergencia del tensor de - inercia.

BIBLIOGRAFIA

B I B L I O G R A F I A

TRABAJOS CONSULTADOS

1. ANDERSON N.-ARTHURS A.M. A variational principle for Maxwell equations. International Journal of Electronic 45 (1978) 333-334.

2. ANDERSON N.-ARTHURS A.M. Complementary variational principles for Maxwell's equations. International Journal of Electronic. 47 (1979). 229-36.

3. ANDERSON N.-ARTHURS A.M. Complementary variational principles for Maxwell's equations II. International Journal of Electronic (1980)

4. ANDERSON N.-ARTHURS A.M. Variational principles for Maxwell equations. International Journal of electronic 48 (1980) 65-69

5. ANDERSON N.-ARTHURS A.M. Variational principles for Maxwell's equations II. International Journal of Electronic (1981).

6. BAKER W.M.-DAVIS W.R. On Duality invariance in simple gauge theories including Electromagnetic-Type Fields whith sources. Nuovo Cimento 54 A (1979) 63-80

7. BLOKH B.I. — On some consequences of two variational principles in - the mechanics of solids deformable bodies. Akad. Nank UKRRSR. Prinkl.- Meh. 8, (1962) 56-62

8. BREUER S. — Minimum Principles in linear viscoelasticity. Journal de Mécanique 9 (1970) 267-276

9. BUCHDAHL — Nom linear Lagrangians and Palatini's Device. Proc. Cambridge Philos. Soc. 56 (1960) 396-400.

10. CAIRO L. KAHANT — Caractére variationnel du - principe de réciprocité en electromagnétisme classique. Cahier de Phys, 18 (1964) - 405-407.

11. CHANDRASEKHARAIAH D.S. — Theorems of Minimum potencial energy and Minimum Complementary energy in Thermoelasticity. Vignana Bharath 3 (1977) 46-49.

12. DAVIS W.R. — The General formulation of the tetrad variational principle of Einstein's Gravitational Theory. Nuovo Cimento 5 B (1971) 153-164.

13. DIRAC P.A.M. — Generalized Hamiltonian Dynamics Canad. Jl Math. 2 -- (1950) 129-149.

14. DIRAC P.A.M. The Hamiltonian form of field Dynamics. Canad Jl Math. 3 - (1951)" 1-23.

15. DIRAC. P.A.M. Generalized Hamiltonian dynamics. Proc. Roy Soc. London 1246 (1958) 326-332.

16. DIRAC P.A.M. The Theory of gravitation in Hamiltonian form. Proc. Roy Soc (A) (1958) -- 333-343.

17. DORN W.S.-SCHILD A. A converse to the virtual - work theorem for deformable solid. Quarterly Applied Math July (1956) 209-213.

18. FOSTER K-ANDERSON R. Dual and Complementary variational principles for two dimensional Electrostatic problems. J. Inst. Maths. Applics. 8. (1971) 221-224.

19. FREMOND H. Formulations duales des énergies potentielles et complémentaires.C.R. Acad.Sc. Paris 273 (1971). 775-777

20. FRIEDRICHS. K. Ein verfahren der Variations rechnung, das Minimum eines integrals als das maximun - eines anderen ausdruckes -- darzustellen. Göttingen Nachrichten KI-II (1929) 13-20.

21. GOENNER H.I. — On the equivalence of the - Palatini and Hilbert methodes of variations. Tensor - N.S. 33 (1979) 307-312

22. GREENBERG H.J. — Complementary minimum principles for an elastic-plastic material. Quarterly of applied Mathematics. 7(1949) 85-95.

23. HAMMOND P. — Equilibrium and Duality in electromagnetic Field Problems. Journal of the Fran Klin Institute 306 (1978) 133-157.

24. HEHL F.W.-KERLICK G.D. — Metric-affine Variational - principles in General Relativity. General Relativity - and Gravitation 8 (1978) - 691-710.

25. HERRERA I.-BIELAK J. — Dual variational principles for Diffusion equations. - Quarterly of applied Math. Abril (1976) 85-102.

26. HILL J.M — On a duality of stress and - deformation fields in finite elasticity Journal of Elasticity 3 (1973) 51-56

27. HILL J.M.-SHIELD R.T. — Notes on a duality of stress and deformation fields in plane finite elasticity. Journal of Elasticity 4 (1974) 167-172.

28. KHOLY A.A.-SEXL R.U.- URBANTKE H.K. On the so-called "Palatini method" of variation in covariante gravitational theories. Ann. Inst. Henri Poincaré. 28 (1973) 121-136.

29. KLYSUSHNIKOV Obtención de las ecuaciones de Beltrami-Michell a partir de - un principio variacional (en ruso) Prinkl. Mat. Meh. 18 -- (1954) 250-254

30. KOBE D.H. Derivation of Maxwell's equations from the gauge invariance of classical mechanics. Ann. J. Phys. 48 (1980) 348-353

31. KONRAD A. Vector Variational formula-- tions of electromagnetic fiels in anisotropic media. I.E.E.E. Transactions on microwave theory an Techniques MTT-24 (1976) 553-559.

32. KUNSTATTER G. Palatini variation of a Generalized Einstein Lagrangian. General Relativity and Gravitation 12 (1980) 373-378

33. LEVONI S. Su un principio variazionale nell'elettrostatica dei dielettrici non lineari. Atti Sem. Fis Univ. Modena 19 (1970) - 259-266

34. MORIGUTI S. On Castigliano's Theorem in - Threedimensional Elastostatics J.Soc. Appl. Mech. Japan 1. - 1948. 175-180.

35. NAYROLES B. Quelques applications variationneles de la théorie des fonctions duales á la Mécanique des solides. Journal de - Mécanique 10 (1971) 263-289.

36. OGDEN R.W. A note on duality in finite elasticity Journal of elasticity 5 (1975) 83-88

37. OGDEN R.W. Dual reciprocal states in finite elasticity. Journal of - elasticity 5 (1975) 149-153.

38. PALATINI A. Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton. Rend. Circ. Mat. Palermo 43 (1919) 203-212

39. PRAGER W.-SYNGE J.L. Aproximations in elasticity - based on the concept of function space. Quarterly of applied Math. 5 (1947) 241-269.

40. RAY J.R. Palatini variational principle Nuovo Cimento 25 B (1975) 706 710.

41. RITTER M.J. New Lagrange expressions of - Einstein's fields equations in General Relativity. Nieuw Archief voor Wiskunde 28. (1970) 154-158.

42. ROCKAFELLAR R.T. Duality and stability in extremum problems involving - convex functions. Pacific - Journal of math. 21 (1967) 167-187.

43. SAFKO J.L.-ELSTON F. — Lagrange multipliers and gravitational theory. Journnal - of Math. Phy. 17 (1976) 1531-1537.

44. SOUTHWELL F.R.S. — Castigliano's Principle of - minimum strain energy Proc. Roy Soc. London A.154 (1937) 4-21.

45. STANYUKOVICH K.P. — Variational principle in General Relativity theory. Soviet Physics Doklady 8 (1964) 1064-1066.

46. STEPHENSON G. — Quadratic Lagrangians and General Relativity. Nuovo Cimento 9, (1958) 263-269.

47. STICKFORTH J. — Zur Anwendung der Castiglianoschen prinzips und der Beltramischen spannungs funktionen. Technische Mitteilungen Krupp. 22 (1964) 83-92.

48. STUMPF H. — Dual extremun principles and error bounds in non linear - elasticity theory. Journal of elasticity 8 (1978) 425-438.

49. SYNGE J.L. — The method of the hypercicle in elasticity when body forces are present. Quarterly - of applied Math. 6 (1948) 15-19.

50. TAO I.N — On Variational principles for electromagnetic theory. Journal of Math. Phys. 7 (1966) 526-530.

51. TONTI E. — Principi Variacionali nell'elastostatica. Lincei Rend. Sc Fis. Mat, e Nat 47 (1967) - 390-394.

52. TONTI E. — On the formal structure of - continuum mechanics. Mecanica. 5 (1970) 22-30.

53. TSAMPARLIS — On the Palatini method of variation. J. Math. Phys. 19 (1978) 555-557.

54. TWEED J. — Some dual equations with an - applications in the theory of elasticity. Journal of elasticity. 2 (1972) 351-355.

55. WASHIZU K. — A note on the conditions of - compatibility. J. Math Phys, 36 (1958) 306-312.

56. ZORSKI. H. — Variational principle for - compatibility equations. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences 7 (1959) -- 445-446.

OBRAS

57. ARNOLD V. — Methodes mathématiques de la Mécanique Classique. MIR 1976.

58. ARTHURS A.M. — Complementary variational principles. Clarendon Press. 1980.

59. BERGMANN P.G. — The special Theory of Relativity. Handbuch der Physik. - Bd. IV. Springer-Verlag 1962.

60. BERGMANN P.G. — The general Theory of Relativity. Handbuch der Physik. Bd. IV. Springer-Verlag. 1962.

61. COURANT-HILBERT — Methods of Mathematical Physics (dos volúmenes) Interscience. 1953.

62. CHOQUET-DEWITT-DILLARD — Analysis, Manifolds and Physics. North-Holland 1977.

63. DUVAUT-LIONS. — Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod 1972.

64. EINSTEIN A. — El significado de la Relatividad. Espasa Calpe. 1971.

65. EISENHART L.P. — Riemannian Geometry. Pricenton University Press. 1964.

66. EKELAND-TEMAN. — Convex Analysis and variational Problems. North-Holland. 1976

67. FAVARD. J. — Cours D'Analyse de L'Ecòle Polytechnique. Tome III. Fascicule II. Calcul des variations. Gauthier-Villars. 1963.

68. FUNG Y.C. — Foundations of solid mechanics Prentice-Hall. 1968.

69. GANTMACHER. F. — Lectures in Analytical Mechanics Mir. 1975.

70. GOLDSTEIN. H. — Mecánica Clásica. Aguilar. - 1966.

71. GURTIN M.E. — The linear theory of elasticity. Handbuch der Physik. Volumen VI. a/2. Springer-Verlag. 1972.

72. IÑIGUEZ-CID PALACIOS — Mećanica Teórica clásicayRelativista. Tomo II. Dossat, 1965.

73. LANCZOS C. — The variational Principles of Mechanics. University of Toronto Press. 1970.

74. LANDAU-LIFSHITZ. Curso abreviado de Física Teórica. Libro I. Mecánica y Electrodinámica. Mir. 1971.

75. LANDAU Y LIFSHTZ. Física Teórica. Volumen II. - Teória clásica de Campos. Reverté. 1966.

76. LANDAU Y LIFSHITZ. Física Teórica. Volumen 8. - Electrodinámica de los medios contínuos. Reverté. 1975.

77. LEECH J.W. Eléments de Mécanique Analytique. Dunod. 1961.

78. LEVI CIVITA T. The absolute differential calculus. Dover, 1977.

79. LEVICH B.G. Curso de Física Teórica. Volumen 1. Teoria del Campo Electromagnético. Teoria de la Relatividad. Reverté, 1974.

80. LEVICH B.G. Curso de Física Teórica. Volumen 2. Física Estadística.- Procesos electromagnéticos en la materia. Reverté. 1976.

81. LICHNEROWICZ. A. Elementos de cálculo Tensorial Aguilar. 1972.

82. MIKHLIN S.G. Mathematical Physics, an advanced Course. North-Holland. 1970.

83. MOISEIWITSCH B.L — Variational Principles. Jhon-Wiley. 1966.

84. MØLLER. C. — The Theory of Relativity. Oxford University Press. 1972.

85. MOREAU J.J. — Functionelles Convexes. Colége de France. 1967.

86. MORSE-FESHBACH — Methods of Theoretical Physics. Mc Graw Hill . 1962.

87. MORREY C.H.B. — Multiple integrals in the calculus of variations. Springer-Verlag. 1966.

88. MER CIER A. — Variational Principles of Physics. Dover. 1963.

89. NOVOZHILOV- YAPPA — Electrodynamics. Mir. 1981.

90. NOWACKI W. — Thermoelasticity. Pergamon Press 1962.

91. PANOFSKY-PHILLIPS — Classical Electricity and Magnetism. Addison-Wesley. 1977

92. PAULI W. — Theory of Relativity. Pergamon 1967.

93. PLANS J.M. — Cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones. 1924.

94. ROCKAFELLAR R.T. — Convex Analysis. Princeton University Press. 1972.

95. RUND H. — The Hamilton-Jacobi Theory in the calculus of variations. Vand Nostrand. 1966.

96. RZEWUSKI J. — Field Theory Volumen 1. Classical Theory. American Elsvier. Publishing. 1958.

97. SACHS R-WU H. — General Relativity for mathematicians. Springer Verlag. - 1977.

98. SANTALO L.A. — Vectores y Tensores con sus - aplicaciones. EUDEBA. 1969.

99. SOKOLNIKOFF I.S. — Analisis tensorial. INDEZ 1979.

100. SOKOLNIKOFF I.S. — Máthematical Theory of elasticity. Mc Graw Hill. 1956.

101. SPAIN B. — Cálculo Tensorial. Dossat. 1952.

102. TAMM I.E. — Fundamentos de la Teoría de la Electricidad. Mir. 1979.

103. TONNELAT M.A. — Les vérifications experimentales de la Relativité Générale. Masson . 1964.

104. WASHIZU K. — Variational Methods in Elasticity an plasticity. Pergamon. 1974.

105. WEINSTOCK. — Calculus of variations. Mc Graw-Hill. 1952.

106. WEYL H. — Space-Time-Matter. Dover. 1952.

INDICE

CAPITULO I

TRANSFORMACIONES INVERTIBLES.

CAPITULO II

MEDIOS ELASTICOS

CAPITULO III

CAMPO ELECTROMAGNETICO

CAPITULO IV

CAMPO GRAVITATORIO

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Antonio Romero Soria titulada "Relaciones de dualidad entre las ecuaciones de definición y las de evolución en la teoría analítica de campos".

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente "cum laude"

Sevilla, 24 de marzo 1.983

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente, El Secretario, El Doctorado,