



R. 10211676

T.S. - 800

**DINÁMICA NO LINEAL DE UNA BOLA
CONDUCTORA INMERSA EN UN LÍQUIDO
DIELÉCTRICO SOMETIDA A UN CAMPO
ELÉCTRICO**

Memoria presentada por:
Abdelmounim Khayari
para optar al grado de Doctor en Física

Sevilla, Diciembre de 2003

Director de la tesis

Alberto T. Pérez Izquierdo
Profesor Titular de Electromagnetismo



i 199162150

Abdelmounim Khayari
Doctorando

Departamento de Electrónica y Electromagnetismo
Facultad de Física
Universidad de Sevilla



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
SECRETARÍA DE ESTUDIOS

Queda registrada con el número de Expediente
al folio 094 número 2 del libro
Correspondencia.

Sevilla, 26 - 12 - 03

El Jefe del Negociado de Tesis

Alvaro Laffitte

*A la memoria de mi hermano Abdelfattah,
sin el apoyo material y moral de quien,
no hubiera habido más páginas
tras ésta, ni siquiera ésta.*

Agradecimientos

Hace cuatro años el profesor Alberto T. Pérez hizo una apuesta sobre mí para realizar esta tesis. Espero que considere su apuesta de algún modo acertada. Así, pues le agradezco su apoyo constante, ayuda y paciencia sin los cuales este trabajo no hubiera sido posible. Fue agradable trabajar con él, y espero que nuestra colaboración no termine aquí.

Agradezco al profesor Antonio Castellanos Mata, director del grupo de Electrohidrodinámica, y a todos los miembros del grupo por haberme aceptado en su grupo así como por su colaboración y simpatía. En particular dejo constancia de mi gratitud hacia el doctor Antonio Ramos por sus aclaraciones y consejos. En especial mi agradecimiento a Carlos Soria por su ayuda con el programa de Test-Point y por estar siempre dispuesto a resolver mis problemas con la informática, a Francisco Javier García por su ayuda con el tratamiento de imágenes, y a Miguel Angel Quintanilla, Francisco Vega y Francisco Gilabert por su colaboración y el buen ambiente que crean.

A mi familia por su apoyo constante. Hicieron todo lo posible para que yo pudiera llevar a cabo este trabajo.

Al final agradezco a Moundir Y. por haberme siempre animado y motivado, y a todos mis amigos que no dejaban de preguntar cómo iba mi trabajo.

Índice General

Agradecimientos	v
1 Introducción general	1
1.1 Motivación y antecedentes	1
1.1.1 Partícula sólida en campo estático	1
1.1.2 Dinámica e inestabilidades de gotas	6
1.2 Dinámica no lineal y caos	8
1.2.1 Caos, fractales y comportamientos al inicio del caos	10
1.2.2 Sistema de una bola que bota sobre una mesa oscilante	14
1.3 Organización del trabajo	17
I Partícula en campo estático	19
2 Dinámica de una bola en campo estático	21
2.1 Presentación	21
2.2 Modelo teórico	22
2.2.1 Fuerzas y carga de la bola	22
2.2.2 Botes regulares sobre un electrodo	30
2.2.3 Movimiento oscilatorio entre dos electrodos	33
2.3 Estudio experimental	34
2.3.1 Dispositivo	34
2.3.2 Tensión de despegue y tiempo del bote regular	37
2.3.3 Altura máxima del bote	41
2.3.4 Movimiento entre dos electrodos	43
2.4 Conclusión	46

3	Estudio de la carga	47
3.1	Análisis teórico	47
3.1.1	Coeficientes de capacidad del sistema	47
3.1.2	Relación entre cargas	49
3.1.3	Reforzamiento del campo local	50
3.1.4	Series S_1 y S_2	52
3.1.5	Resolución numérica	54
3.1.6	Valor asintótico para Q_a/Q_c y β	55
3.2	Estudio experimental de la carga	56
3.2.1	Pulsos de corriente	56
3.2.2	Carga transferida al circuito externo	58
3.2.3	Carga medida frente a carga efectiva	60
3.2.4	Distancia a la cual se produce la descarga	64
3.3	Conclusión	67
4	Dinámica y deformación de una gota	69
4.1	Introducción	69
4.2	Dispositivo experimental	70
4.3	Proceso de despegue de la gota	71
4.3.1	Caso de un electrodo poco mojado	73
4.3.2	Campo de despegue E_{des}	73
4.4	Deformación de la gota	75
4.4.1	Resultados experimentales	77
4.5	Dinámica de la gota	81
4.5.1	Tiempo de bote y campo umbral E_c	81
4.6	Efecto del material del electrodo	83
4.7	Influencia del tamaño y la densidad de la gota	86
4.8	Conclusión y perspectivas	87
II	Dinámica no lineal	89
5	Generalidades sobre dinámica no lineal	91
5.1	Teoría de bifurcaciones	92
5.1.1	Caos en sistemas discretos	92
5.1.2	Bifurcaciones en sistemas dinámicos	93

5.2	Caos determinista y herramientas de diagnóstico	102
5.2.1	Por qué el estudio del caos	102
5.2.2	Reconstrucción del espacio de fases	104
5.2.3	Exponentes de Lyapunov	107
5.2.4	Exponentes de Lyapunov a partir de series temporales	108
5.2.5	Dimensiones	111
5.2.6	La Teoría de la información y la entropía	115
6	Estudio del sistema en codimensión 1	119
6.1	Modelo teórico para la dinámica de la bola	120
6.1.1	Derivación del modelo	120
6.1.2	Mapa en codimensión uno	121
6.1.3	Caso de la frecuencia como parámetro de control	126
6.1.4	Estabilidad y bifurcaciones de los puntos de equilibrio	128
6.1.5	Medidas invariantes del atractor caótico	130
6.2	Estudio experimental	139
6.2.1	Montaje y adquisición de datos	139
6.2.2	Dinámica regular	139
6.2.3	Dinámica caótica	144
6.3	El modelo analítico revisado	152
6.4	Conclusión	156
7	Estudio del sistema en codimensión 2	159
7.1	Dinámica crítica en el inicio del caos	159
7.1.1	Ruta hacia el caos vía desdoblamiento de período	160
7.1.2	Análisis del Grupo de Renormalización	163
7.2	Tipos de comportamiento crítico	166
7.2.1	Comportamiento crítico del tipo Feigenbaum (F)	169
7.2.2	El comportamiento tricrítico (T)	169
7.2.3	Comportamiento crítico del tipo (GM)	171
7.3	Plano de parámetros: estudio numérico	175
7.4	Plano de parámetros: estudio experimental	180
7.5	Conclusión	182
	Conclusiones	185

A	Algoritmo de Levenberg-Marquardt	189
B	Valores asintóticos de S_1 y S_2	194
C	Pequeñas deformaciones de un gota	196
	Bibliografía	198
	Publicaciones relacionadas con la tesis	205

Capítulo 1

Introducción general

1.1 Motivación y antecedentes

1.1.1 Partícula sólida en campo estático

Muchas tecnologías electrostáticas como los precipitadores electrostáticos de polvo, la xerografía, la manipulación biológica de células y otras aplicaciones, utilizan las fuerzas eléctricas para inducir y controlar el movimiento de las partículas.

Por otra parte, las partículas conductoras libres tienen un papel importante en la disminución del campo de ruptura de los medios dieléctricos [Cooke, 1980, Tobazéon, 1993, Carraz et al., 1995]. En efecto, una de las mayores causas de fallos en mecanismos de aislamiento en los dispositivos de alta tensión es la existencia de partículas libres en el líquido. La presencia de partículas es inevitable por ejemplo, en aceite de transformador de pureza técnica. El valor del campo de ruptura obtenido en las mediciones rutinarias, puede proporcionar una indicación errónea de la condición verdadera del aceite. Debido a tales dificultades, un valor del campo de ruptura de 2MV/m para el aceite de transformador, por ejemplo, se considera como fiable comparándose con valores ≥ 100 MV/m en el caso de un aceite altamente purificado.

Algunos fenómenos se observan antes de la ruptura en el líquido, como de-

posiciones de partículas, formación y dispersión de nubes de partículas [Darveniza, 1969], microdescargas, y movimientos de partícula-fluido inducidos por el campo eléctrico [Sheshkamal et al., 1990]. Los diámetros observados de las partículas varían entre 0.1 y 15 μm en la industria. El estudio de los fenómenos de prerruptura está extensamente documentado. En experimentos de laboratorio controlados, se observa que la conductividad del fluido aumenta debido a la contaminación con partículas añadidas [Stannett, 1951, Pohl, 1967, Felsenthal, 1967]. También han sido estudiados, el comportamiento y el movimiento de partículas dentro del líquido y la formación y dispersión de nubes de partículas. Wilson y Wetherill [Wilson and Wetherill, 1951], usando cilindros concéntricos, observaron que las partículas, en campos AC débiles, se mueven según las líneas del campo y se pegan al electrodo central. En altas tensiones, observaron turbulencias aleatorias de nubes de partículas.

Un modelo experimental para la simulación del comportamiento de una partícula en sistemas reales es el de una esfera conductora entre dos electrodos planos inmersos en un líquido, y por ello ha sido objeto de varios estudios.

Denegri y coautores [Denegri et al., 1977], y Molinari y coautores [Molinari and Viviani, 1979] estudiaron numéricamente el movimiento y carga de impurezas en un fluido dieléctrico entre dos electrodos. Llevaron a cabo experimentos usando conjuntos de partículas del orden 150 μm de configuración esfera-plano. Chow y coautores [Chow et al., 1982], estudiaron el campo electrostático entre una esfera cargada y un electrodo cubierto con un dieléctrico sólido y propusieron un método numérico para su computación.

Lebedev y Skal'Skaya [Lebedev and SkalSkaya, 1962] computaron la fuerza que ejerce un campo eléctrico sobre una esfera conductora cerca de un plano cuando la esfera y el plano están en contacto. Felici [Felici, 1966] resolvió el problema para el caso de una esfera que se desconecta del electrodo después del contacto. Anis y Srivastava [Anis and Srivastava, 1981] también computaron la fuerza eléctrica y el campo al rededor de la esfera cerca de un electrodo.

Samuila y Dascalescu [Samuila and Dascalescu, 1998] consideraron la situación de una partícula cilíndrica no conductora entre dos electrodos planos, uno de ellos con puntas perpendiculares. Así estudiaron numérica y experimentalmente la carga de la partícula en un campo eléctrico monoionizado. Das-

calescu y coautores [Dascalescu et al., 2001] investigaron numéricamente el caso de una partícula cilíndrica conductora en un campo eléctrico no uniforme. Utilizaron una configuración de electrodos cilindro-plano, acercándose más a modelos reales de dispositivos industriales.

Melcher [Melcher, 1974] propuso un modelo para poner de manifiesto el papel crucial de la relajación de carga en líquidos poco conductores como el aceite de maíz. Una bola conductora macroscópica inicialmente en reposo sobre un electrodo adquiere una carga cuando se aplica un campo eléctrico entre los electrodos. El valor de esta carga depende de las dimensiones de la esfera, de la permitividad de la fase que la rodea y del campo aplicado. Por encima de un valor dado de la tensión, la bola se levanta y se mueve hacia el electrodo superior, bajo efecto de la fuerza eléctrica. Pero, debido al tiempo de relajación finito del líquido ($\tau = \epsilon/\sigma$, con ϵ la permitividad del líquido y σ su conductividad), la bola pierde carga, y vuelve a caer sobre el electrodo inferior. La bola vuelve a cargarse y el proceso se repite. En el caso de líquidos muy aislantes (con un tiempo de relajación relativamente grande), la pérdida de carga se hace más lenta y la bola llega al electrodo superior. Allí la carga de la bola cambia de signo y la bola resulta propulsada hacia la placa inferior.

El umbral del campo necesario para levantar la bola fue objeto de muchos estudios. Sin embargo los resultados presentan una discrepancia relevante entre las predicciones teóricas y los valores experimentales. Johnson [Johnson, 1973], llevó a cabo experimentos para comprobar la predicción teórica respecto a la carga y fuerza sobre una esfera en reposo sobre un plano conductor en presencia de un campo eléctrico uniforme. Estudió dos tipos de dieléctrico alrededor de la esfera: gases y líquidos. Utilizó como expresión teórica del campo mínimo necesario para levantar la bola, la fórmula derivada de la expresión de la fuerza eléctrica de Lebedev y Skal'Skaya

$$E_c = \sqrt{\frac{R(\rho_s - \rho_f)g}{3(1.37)\epsilon_f}} \quad (1.1)$$

con R : radio de la esfera, ρ_s su densidad, y ρ_f y ϵ_f respectivamente la densidad y permitividad del fluido que rodea la esfera.

Encontró que los campos necesarios para levantar esferas de radio 1.6 mm eran mayor que los predichos por la teoría. Así, en aceite de ricino y en gases

se necesitaba un campo más del doble del valor teórico; mientras en líquidos no polares como el aceite de transformador el valor experimental del campo era aproximadamente 20% mayor que el teórico. Johnson encontró también que el valor de este umbral del campo dependía de la conductividad del líquido. De otra parte, notó durante los experimentos que, a lo largo de los botes, la bola a veces vuelve a quedarse en reposo sobre el electrodo antes de despegar otra vez. Observó también que, para un valor fijo de la tensión aplicada, la altura máxima de la bola era diferente de un bote al otro (y así era pues el tiempo entre botes), lo que indicaba que la bola se carga de manera distinta de un bote al otro.

Johnson midió la carga en el despegue, mediante la medición del tiempo de bote y la altura máxima de la esfera en aceite de maíz. Sus medidas indicaban que la carga se desviaba del valor teórico en un 20%, no obstante, los errores experimentales eran del orden de 30%.

Estudió también el caso de varias esferas en un líquido. Resultó que una esfera despegaba a un valor del campo eléctrico de un 10 hasta 20% menos que lo predicho, seguida por una avalancha de las demás partículas.

Birlasekaran [Birlasekaran, 1991] también estudió la carga transferida a una partícula inmersa en aceite de transformador. Se basó en los estudios de Krasucki y Dakin (citados en su artículo mencionado arriba), que midieron el campo mínimo de despegue para determinar la carga adquirida por la partícula en contacto con el electrodo.

Krasucki encontró que el tiempo de vuelo experimental era dos veces mayor que lo que predice su modelo teórico. Para ajustar el modelo a los datos experimentales, Birlasekaran modificó la ecuación del modelo de Krasucki incorporando la caída de potencial debida a la carga espacial, en la fuerza eléctrica, el aumento en la fuerza de rozamiento para números de Reynolds > 1 , y la pérdida de masa de la partícula en aceite de transformador (utilizado como líquido de prueba). En cuanto al umbral del campo eléctrico necesario para levantar la bola, la expresión derivada del modelo propuesto por Birlasekaran es

$$E_c = \sqrt{\frac{2R\rho_s(\rho_s - \rho_f)g}{\pi^2\epsilon_f(\rho_s + 0.5\rho_f)}} \quad (1.2)$$

Sus datos experimentales presentan una desviación de los valores teó-

ricos, $(E^{exp} - E^{teor})/E^{teor}$, de 18% hasta 31% para una distancia entre electrodos igual a $8mm$. Esta desviación aumenta cuando disminuye el radio de la bola desde $1.6mm$ a $0.5mm$. Para una distancia entre electrodos igual a $12mm$ la desviación es entre $-3%$ y $6%$, menor para la bola de radio menor.

Uno de los objetos de nuestro estudio será reproducir estos experimentos para tratar de arrojar luz sobre estas discrepancias.

Carraz y Tobazéon [Carraz et al., 1995] mostraron cómo la presencia de partículas conductoras libres en aceite de transformador reducía el campo de ruptura del líquido. Tobazéon [Tobazéon, 1996] estudió teórica y experimentalmente los parámetros de que dependía la carga y descarga de partículas esféricas y cilíndricas en campo DC.

Cuando la bola se acerca a un electrodo, se produce una descarga que transmite al circuito externo un pulso de corriente. El estudio de estos pulsos permite evaluar las cargas en juego. Estas cargas son: la carga transferida al circuito externo, la carga de la bola y la carga del electrodo. La carga transferida al circuito externo Q_a es una pequeña parte de la carga total que lleva la bola. Al acercarse al electrodo, la bola está sometida a un campo mayor que el campo uniforme que existe entre las dos placas. En efecto, entre la bola y electrodo cercano el campo local está reforzado, de modo que cuando supera al campo de ruptura del fluido, ocurre una descarga que le transmite a la bola la carga Q_a que aparece en el circuito externo. El reforzamiento del campo local depende de la forma y de la carga de la partícula. Los trabajos de Tobazéon dilucidan parcialmente estos aspectos.

Como veremos a lo largo de nuestro trabajo, la medida de la carga transferida al circuito externo y el cálculo analítico de las otras cargas permite hallar las dependencias de los factores que rigen el proceso de la descarga. La simulación numérica del sistema de la bola entre electrodos da la posibilidad de comprobar los resultados analíticos y experimentales. El estudio permite también hallar los valores del campo de ruptura del líquido y la altura de la bola a la cual se produce la descarga.

1.1.2 Dinámica e inestabilidades de gotas

La investigación de la dinámica de gotas trata con el comportamiento de gotas líquidas y burbujas de gas bajo la influencia de fuerzas externas y efectos químicos. Esta investigación proporciona los fundamentos para entender áreas científicas y tecnológicas en las cuales las gotas y burbujas tienen un papel, desde la lluvia en la atmósfera hasta los reactores químicos industriales.

El estudio de burbujas y gotas solas es también de interés porque sirven como modelo para otros sistemas naturales. Las esferas perfectas formadas por burbujas y gotas en microgravedad, debido al predominio de fuerzas de tensión superficial, se ajustan mucho a los modelos teóricos. Las gotas esféricas pueden ser manipuladas mediante el sonido, el campo eléctrico y otras excitaciones, creando un modelo fácilmente manipulable para varios procesos.

La forma que un líquido toma en un sistema líquido-líquido o líquido-gas está controlada por fuerzas de tensión superficial en la interfase. Pequeñas perturbaciones en el equilibrio de energías moleculares en estas fronteras o dentro del volumen del líquido pueden causar cambios en la posición y forma del líquido dentro de un contenedor como un depósito de combustible por ejemplo. Estos cambios, o efectos capilares, a menudo ocurren en líquidos en la naturaleza (sobre la Tierra), pero están enmascarados o reducidos al mínimo por la fuerza de gravedad, más fuerte. En microgravedad, sin embargo, los efectos capilares se hacen prominentes. El estudio de fenómenos capilares en microgravedad permite entender y predecir mejor los cambios configuracionales de un fluido tanto sobre la Tierra como en ambientes de baja gravedad.

Las moléculas de agua son naturalmente eléctricamente polarizadas y se atraen mutuamente. A aquellas moléculas localizadas sobre la superficie (interfase con el aire por ejemplo), les faltan moléculas a las cuales se adherirían si estuvieran en medio del líquido. Así estas moléculas de la superficie tienen una energía más alta que las otras moléculas dentro del líquido. Las cosas en general tienden hacia los estados de baja energía (por eso los objetos caen, los resortes empujan o tienden hacia sus longitudes de baja energía, etc.). Así los líquidos tienden hacia una forma que reduce el número de moléculas sobre la superficie libre, esto es hacia la forma esférica.

Benjamin Franklin y luego Lord Rayleigh fueron pioneros en este campo, y llevaron a cabo experimentos fundamentales sobre el efecto de campos eléctricos y cargas sobre gotas líquidas [Rayleigh, 1879]. El análisis teórico precursor de Rayleigh [Rayleigh, 1882] sobre el límite de estabilidad de una esfera líquida cargada, abrió el camino para la investigación, durante un siglo, sobre la estabilidad de gotas líquidas electrificadas y superficies electrificadas en general. Su trabajo marcó el nacimiento de la electrohidrodinámica.

Una gota fluida en suspensión en otro fluido inmiscible puede estar influenciada por un campo eléctrico de muchas maneras. Aparte de su interés científico básico, el entendimiento del comportamiento de las gotas en presencia de un campo eléctrico desempeña un papel cada vez más importante en aplicaciones prácticas. Por ejemplo, los primeros estudios de la dinámica de una gota en un campo eléctrico estaban motivados por su significación práctica en birrefringencia, difusión de la luz, y otras mediciones ópticas en emulsiones. Otra parte del interés proviene de las aplicaciones que incluyen la deformación y la ruptura de las gotas de lluvia en las tormentas, así como la ruptura de líquidos dieléctricos debido a la presencia de contaminantes como gotitas de agua con una conductividad sustancial [Sartor, 1969, Beard et al., 1989].

La deformación de una gota en un campo eléctrico se estudió extensivamente y mucho esfuerzo teórico y experimental ha sido enfocado sobre las pequeñas deformaciones observadas en campos eléctricos relativamente débiles [Taylor, 1964, Taylor, 1966, Vizika and Saville, 1992, Ha and Yang, 2000]. Así, muchos autores han encontrado experimentalmente que, en un campo eléctrico débil, una gota conductora se deforma en la dirección del campo produciendo una forma *prolata*.

Los perfiles de las gotas se utilizan comúnmente para la determinación de la tensión superficial y del ángulo de contacto. En estos métodos la forma de la gota viene dada por el equilibrio de tensiones sobre la superficie.

Las gotas de agua no sólo saltan de las plumas del pato, hojas de loto, y otras superficies impermeables, sino que lo hacen de un modo sorprendente. Cuando una gota de agua golpea una superficie, generalmente una parte de ella se esparce lejos. El resto se queda y se extiende lateralmente. Pero una gotita que aterriza sobre una superficie *hidrófoba* (no mojadora), como la cera, se resiste a

la extensión. Como la gotita no puede penetrar en la estructura microscópica de la superficie, adquiere, en reposo sobre la superficie, una forma esférica. Cuando una gota cae sobre una superficie hidrófoba se deforma espectacularmente y resulta después completamente lanzada hacia fuera. El tiempo que tarda el contacto no depende de la velocidad de acercamiento, sólo depende del peso de la gota [Richard et al., 2002]. La gota en este caso se comporta más bien como una pelota que como una gota líquida. La clave es la naturaleza peculiar de la superficie, vital porque obliga a que la gota se retraiga sobre sí.

El metal normalmente no es hidrófobo. Sin embargo si la superficie metálica está inmersa en una fase líquida, un comportamiento similar al anterior puede tener lugar en ciertas condiciones. Además, la presencia del líquido alrededor de la gota compensa parcialmente la gravedad, dando a la gota una forma más o menos esférica. Todo ello depende del tipo de metal así como del volumen de la gota.

Mostraremos más adelante que, bajo ciertas condiciones, se puede conseguir una dinámica, para gotas inmersas en un aceite poco conductor, similar a la obtenida para partículas sólidas.

1.2 Dinámica no lineal y caos

El estudio de sistemas no lineales es realmente interdisciplinario, y va desde los análisis experimentales de los ritmos del corazón y del cerebro humano hasta tentativas de predicción del clima. Asimismo las herramientas necesarias para el análisis de sistemas no lineales son también interdisciplinarias e incluyen técnicas y metodologías de todas las ciencias.

Un sistema dinámico consiste en dos ingredientes: una regla o *dinámica*, que especifica como un sistema evoluciona en el tiempo, y una condición o *estado* inicial a partir del cual el sistema empieza. La clase más habitual de reglas para describir fenómenos naturales son las ecuaciones diferenciales. Todas las teorías importantes de la física están formuladas en términos de ecuaciones diferenciales. Esta observación condujo al matemático V. I. Arnold a comentar que las ecuaciones diferenciales están en la base de la filosofía científica matemática,

nuestro punto de vista científico del mundo. Esta filosofía científica comenzó con el descubrimiento del cálculo por Newton y Leibniz y sigue hasta hoy en día.

La teoría de sistemas dinámicos y la dinámica no lineal superaron el estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales, que comenzaron a su vez como un intento de entender y predecir los movimientos que nos rodean: las órbitas de los planetas, las ondulaciones sobre la superficie de una charca, los patrones siempre en evolución del clima. Los primeros doscientos años de esta filosofía científica, desde Newton y Euler pasando por Hamilton y Maxwell, produjeron muchos éxitos en la formulación de las *reglas de la naturaleza*, pero sólo dio resultados limitados en cuanto a encontrarles soluciones. Algunos movimientos que nos rodean, son regulares y fácilmente explicados, mientras otros son irregulares, y parecen en principio desafiar cualquier regla.

En el año 1776, Pierre-Simon de Laplace proclamó una total dependencia y determinismo en el Universo. Según Laplace, si conocemos las condiciones iniciales de cualquier situación, podemos determinar el futuro por adelantado: *“una inteligencia que, por un instante dado, conociera todas las fuerzas que animan a la Naturaleza y la situación respectiva de los seres que la componen, si por otra parte (esta inteligencia) fuera lo bastante vasta para someter estos datos al análisis, abrazaría en la misma fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del Universo y los del átomo más ligero: nada sería incierto para ella, y el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos.”* (Essai philosophique sur les probabilités).

La confianza de de Laplace en su capacidad (o la de su “Inteligencia”) de predecir el futuro era completamente consistente con las ecuaciones y el punto de vista de la mecánica clásica. De Laplace no se había encontrado con la física cuántica o el caos. Hoy en día no hay justificación para el punto de vista de de Laplace.

En el principio del siglo XX, el matemático Jules-Henri Poincaré, que estaba estudiando el movimiento de las planetas, empezaba a tener una indicación del problema básico: *“puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan mayores diferencias en el fenómeno final. Un error pequeño en el primero puede producir un error enorme en el segundo. La predicción se hace imposible.”* (Sciences et méthodes, 1903).

En otros términos, Poincaré empezaba a darse cuenta de que *determinista* no es lo que se solía entender, aún si se deja de lado las posibilidades de otros sistemas no deterministas.

1.2.1 Caos, fractales y comportamientos al inicio del caos

1.2.1.1 Caos determinista

El caos determinista, a menudo solamente llamado caos, se refiere en el mundo de la dinámica a la generación de comportamientos arbitrarios, imprevisibles a partir de una regla simple pero no lineal. La regla no tiene ningún ruido, aleatoriedad o probabilidades en sí. En cambio, por la aplicación repetida de la regla, el comportamiento a largo plazo se hace bastante complicado. En este sentido, la imprevisibilidad surge con el tiempo.

Hay un número de características que uno observa en un sistema caótico determinista:

- El comportamiento a largo plazo es difícil o imposible de predecir: incluso medidas muy exactas del estado actual de un sistema caótico no pueden indicar donde estará el sistema en el futuro. Uno tiene que medir el sistema otra vez para averiguar donde está.
- Dependencia sensible en las condiciones iniciales: empezando con condiciones iniciales muy próximas, el sistema caótico se mueve rápidamente hacia estados diferentes. Lorenz, un meteorólogo, descubrió este fenómeno en 1963 en el MIT [Lorenz, 1963]. Se dio cuenta de que comenzando con dos puntos cercanos, las trayectorias divergían rápidamente la una de la otra. Esto implicaba que la predicción meteorológica a largo plazo era imposible. Estaba tratando con ecuaciones con un comportamiento caótico. Para medir la tasa de divergencia exponencial de trayectorias vecinas se recurre al cálculo del *exponente de Lyapunov*, que caracteriza esta sensibilidad a las condiciones iniciales.
- Un espectro de frecuencias de banda ancha: es decir la salida de un sistema caótico parece *ruidosa*. Muchas frecuencias están excitadas.

- Amplificación exponencial de errores: pequeñas cantidades de ruido externo crecen rápidamente hasta dominar el comportamiento del sistema. Aunque el nivel de ruido esté por debajo de la precisión de la medida, de modo que sea incontrolable por el experimentador, determinará el comportamiento impredecible de la dinámica.
- Inestabilidad local frente a estabilidad global: para tener amplificación de pequeños errores y ruido, el comportamiento debe ser localmente inestable: sobre pequeños intervalos de tiempo, estados cercanos se alejan el uno del otro. Pero para que el sistema produzca un comportamiento coherentemente estable, el conjunto de comportamientos debe recaer sobre sí mismo a largo plazo. La tensión entre estas dos propiedades conduce a patrones muy elegantemente estructurados, y que reciben el nombre de *atractores extraños*. Otros nombres que el de atractor extraño pueden ser usados en las diferentes áreas de ciencia. En biología (o sociobiología) se refiere a estos patrones como patrones colectivos del comportamiento animal (o social). En la psicología, pueden llamarse arquetipos [Rossi, 1989].

La palabra *caos* en sí es un poco confusa, si uno la interpreta en el sentido no técnico del lenguaje común: “la carencia de orden”. De hecho, los sistemas caóticos deterministas están bastante ordenados e incluso son predecibles a corto plazo. Los científicos estudian sistemas caóticos deterministas para entender la interacción entre orden y “caos completo”. El objetivo es encontrar el orden oculto en el caos aparente.

El comportamiento caótico determinista ha sido descubierto en numerosos fenómenos naturales, y analizado detalladamente en docenas de experimentos. De péndulos compuestos a grifos que gotean, de ecologías de presa-depredador a epidemias, de reacciones químicas oscilantes a latidos irregulares del corazón. Los mecanismos subyacentes se han descubierto. Sin embargo, a pesar de los éxitos científicos, es importante subrayar el hecho de que el caos determinista, y los distintos mecanismos que están en su base, no son las únicas explicaciones de los comportamientos arbitrarios e impredecibles que existen en la naturaleza. Muchos procesos son conocidos, e indudablemente muchos esperan para ser descubiertos, que pueden producir comportamientos impredecibles. Así, siempre queda la pregunta, ¿cómo descubrimos cuál de los muchos mecanismos posibles

produce el desorden aparente?

1.2.1.2 Fractales y dimensiones fraccionarias

La naturaleza abunda en formas y estructuras intrincadamente fragmentadas, incluyendo líneas de la costa, nubes, culebrinas de relámpago, y copos de nieve (véase figura 1.1). En 1975 Benoit Mandelbrot acuñó el término de *fractal* para describir tales formas irregulares. El rasgo esencial de un fractal es la existencia de una estructura similar en toda escala de longitud. Los fractales son auto-similares. Esta característica de autosemejanza está teóricamente descrita en términos de una relación de escalamiento. En los sistemas dinámicos caóticos casi inevitablemente surgen fractales. Y el análisis fractal es a menudo útil en la descripción de la estructura geométrica de un sistema caótico dinámico. En particular, una o varias dimensiones fractales pueden ser asignadas a los objetos fractales. Estas dimensiones son a menudo fraccionarias, es decir no son dimensiones enteras.

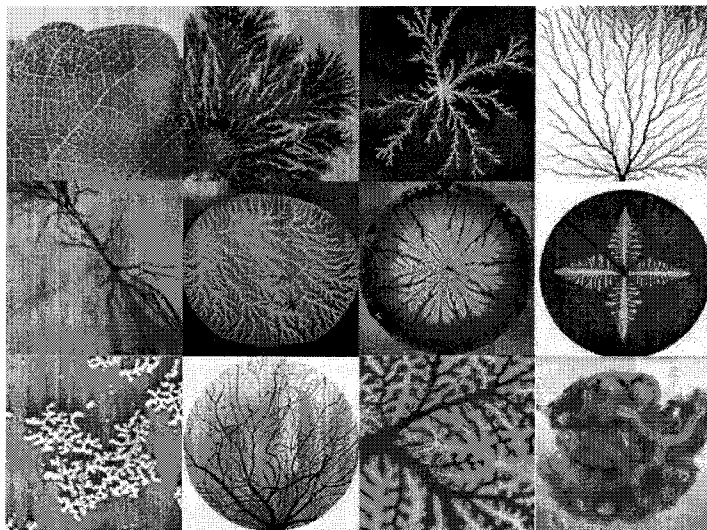


Figura 1.1: Algunos fractales que se encuentran en la naturaleza.

Las soluciones de sistemas dinámicos disipativos no pueden llenar el volumen del espacio de fases, ya que la disipación es sinónima de una contracción de

los elementos del volumen bajo la acción de las ecuaciones de movimiento. En cambio, las trayectorias están confinadas en subconjuntos de baja dimensión que tienen una medida cero en el espacio de fases. Estos subconjuntos pueden ser sumamente complicados, y poseen frecuentemente una estructura fractal. Las dimensiones generalizadas son una clase de cantidades que caracteriza esta fractalidad. La dimensión de Hausdorff es, del punto de vista matemático, el concepto más natural para caracterizar conjuntos fractales, mientras que la dimensión de información tiene en cuenta las frecuencias relativas de visita de la trayectoria a un punto del conjunto, y es por lo tanto más atractiva para describir sistemas físicos. Finalmente, para la caracterización de datos medidos, otros conceptos similares, como la dimensión de correlación, son más útiles.

Por ejemplo en el caso del clima, la dimensión de correlación permite cuantizar el caos. De modo que numerosos autores califican el caos en el clima como caos de baja dimensión. Así, Nicolis y Nicolis [Nicolis and Nicolis, 1984] adelantaron resultados para la dimensión de correlación para la temperatura: $D_2 = 3.1$; Sivakumar y coautores [Sivakumar et al., 2000] una dimensión para la lluvia: $D_2 = 6.4$.

1.2.1.3 Estudio multiparamétrico

El primer paso en el estudio de oscilaciones complejas y caos en un sistema dado es la selección de la clase de modelo que debe ser usado. Dependiendo del objetivo del estudio, esto puede ser un sistema de ecuaciones diferenciales, un mapa 2D o un mapa 1D (no invertible).

El entendimiento de la transición al caos empezó con el descubrimiento de Feigenbaum [Feigenbaum, 1979] de la universalidad del desdoblamiento de período y de la *teoría del grupo de renormalización*. La clase de mapas que exhiben este comportamiento (tipo Feigenbaum) son los mapas unidimensionales no invertibles. El mismo tipo de desdoblamiento de período ocurre en mapas multidimensionales. Se pensaba que los sistemas realistas y los modelos matemáticos complicados manifiestan en la mayor parte las mismas regularidades que el modelo abstracto más simple, como el mapa logístico. Es decir que el esquema de la transición al caos vía desdoblamiento de período y las propiedades de escala en

el umbral del caos sería similar para todos los modelos. Sin embargo, debería ser acentuado que la universalidad de Feigenbaum no es el único comportamiento que caracteriza la transición al caso vía desdoblamiento de período. Hay varios tipos de comportamientos críticos a la transición al caos cada uno relacionado con una clase específica de mapas multidimensionales. La investigación de estos comportamientos requiere el análisis multiparamétrico. Un sujeto muy conveniente para la investigación sobre el problema del análisis multiparamétrico de la transición al caos lo proporcionan los *sistemas de dinámica impulsiva*. Estos sistemas permiten investigaciones analíticas avanzadas. El sistema de una bola que bota sobre una mesa oscilante, pertenece a esta clase de sistemas.

1.2.2 Sistema de una bola que bota sobre una mesa oscilante

El sistema de la bola que bota sobre una mesa oscilante es un problema clásico de dinámica. Este sistema desempeña un papel importante como modelo para sistemas no lineales. Es un ejemplo bastante sencillo de un sistema dinámico no lineal que exhibe un desdoblamiento de período. El desdoblamiento de período es una de las *rutas al caos* que caracteriza un gran número de sistemas dinámicos. Así, se puede crear el caos en el sistema de la bola ajustando adecuadamente los parámetros de control del sistema (la amplitud y la frecuencia de la mesa en movimiento en este caso).

Este sistema ha sido objeto de varios estudios teóricos y experimentales. Guckenheimer y Holmes [Guckenheimer and Holmes, 1983] mostraron que tal sistema puede exhibir un movimiento periódico de todos los períodos, y también caos, poniendo de manifiesto la existencia de la estructura llamada *herradura de Smale*. Ha sido también de especial interés desde que Fermi propuso un modelo simplificado para la aceleración de rayos cósmicos por las oscilaciones aleatorias de campos magnéticos [Lichtenberg and Liberman, 1983].

El sistema mecánico consiste en una bola rígida en movimiento sobre una mesa oscilante. Este sistema aparece naturalmente como un problema modelo en muchas aplicaciones en ingeniería: el control de ruido en maquinarias como los martillos neumáticos, el transporte y la separación de sólidos granulares como el arroz, y el transporte de componentes en dispositivos de ensamblaje automático,

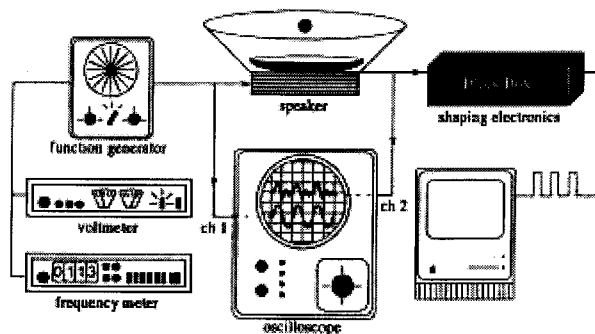


Figura 1.2: Dispositivo experimental de la bola utilizado por Tufillaro [Tufillaro and Albano, 1986]. Un altavoz sirve como mesa oscilante.

que utilizan habitualmente bandas de rodamiento oscilatorias.

Tufillaro y Albano [Tufillaro and Albano, 1986] estudiaron el sistema utilizando un dispositivo que incorpora un altavoz como mesa oscilante. Las oscilaciones del altavoz están controladas mediante una señal sonora (véase el dispositivo en la figura 1.2).

Supongamos que el movimiento de la bola está confinado en la dirección vertical y que, entre impactos, la altura de la bola está determinada por las leyes de Newton para el movimiento de una partícula en un campo de gravedad constante. Una fuerza no lineal se aplica a la bola cuando entra en contacto con la mesa. En el instante de impacto, la velocidad de la bola cambia bruscamente de sentido.

La velocidad de la bola está relacionada con la de la mesa según la relación

$$V(t_i) - W(t_i) = -\alpha(U(t_i) - W(t_i)), \quad (1.3)$$

donde U es la velocidad de la bola acercándose a la mesa, V la de la bola después del rebote, y W la de la mesa oscilante; $0 < \alpha \leq 1$ es el coeficiente de restitución, y $t = t_i$ es el tiempo del i -ésimo impacto. Si asumimos que la altura del bote de la bola es grande respecto al desplazamiento de la mesa, podemos aproximar el tiempo entre impactos como

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2V(t_i)}{g} \quad (1.4)$$

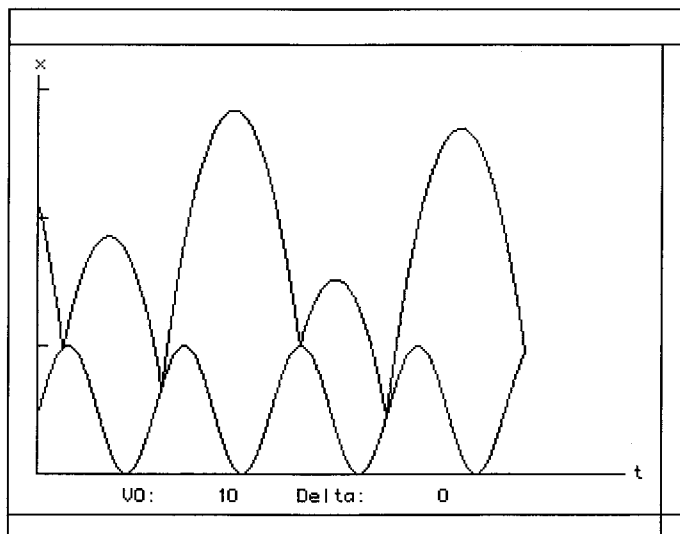


Figura 1.3: Trayectoria de una bola que bota sobre una mesa oscilante

g es la aceleración debida a la gravedad. La velocidad con la que se acerca la bola a la mesa al $(i + 1)$ -ésimo impacto viene dada por

$$U(t_{i+1}) = -V(t_i). \quad (1.5)$$

Así se obtiene un mapa no lineal que relaciona el estado del sistema al $(i+1)$ -ésimo impacto con el del i -ésimo. Si suponemos que el movimiento de la mesa es sinusoidal, de la forma $-\beta \sin(\omega t)$, este mapa tiene la forma

$$\phi_{i+1} = \phi_i + v_i, \quad (1.6)$$

$$v_{i+1} = \alpha v_i - \gamma \cos(\phi_i + v_i), \quad (1.7)$$

con $\phi = \omega t$, $v = 2\omega V/g$ y $\gamma = 2\omega^2(1 + \alpha)\beta/g$. Aquí γ desempeña el papel de la amplitud de la excitación y α el de la disipación.

El movimiento de la bola puede ser descrito de varios modos. La representación más simple es dibujar la altura de la bola y la altura de la tabla, medidas desde el origen tomado en el nivel del suelo, como función del tiempo. Entre impactos la gráfica del desplazamiento vertical de la bola sigue una trayectoria parabólica como se muestra en la figura 1.3.

El problema de la bola que bota sobre una mesa oscilante es un ejemplo de un sistema físico cuyo análisis proporciona directamente un sistema discreto, sin necesidad de pasar por las ecuaciones diferenciales y las secciones de superficie (*mapas de Poincaré*).

Los mismos comportamientos exhibidos por el sistema mecánico como los desdoblamientos de período y el caos, pueden surgir en el sistema de la bola que bota sobre un electrodo bajo efecto de fuerzas eléctricas [Soria et al., 1997]. En efecto, si se aplica un campo eléctrico alterno entre los electrodos, el tiempo de bote de la bola experimenta un desdoblamiento de período al variar la amplitud del campo eléctrico, y luego caos.

Es también un modelo adecuado para estudiar la dinámica no lineal y la transición al caos en sistemas caóticos multiparamétricos. En efecto, una multitud de comportamientos dinámicos surge cuando se considera el sistema con dos parámetros variables: la amplitud y la frecuencia del campo aplicado. El análisis multiparamétrico del sistema revela comportamientos críticos a la transición del caos de otros tipos que el de Feigenbaum. De este modo este sistema se vuelve como un ejemplo de un sistema real que pone de manifiesto comportamientos predichos por el análisis multiparamétrico en modelos matemáticos, (véase [Kuznetsov et al., 1997] y las referencias allí citadas).

1.3 Organización del trabajo

Como primera parte del trabajo, estudiaremos la dinámica y carga de la bola en campo estático. Así, en el capítulo 2 estudiaremos la dinámica de la bola, el campo umbral para el vuelo y propondremos un modelo teórico para la dinámica que será contrastado con los resultados experimentales. En el tercer capítulo, estudiaremos el fenómeno de transferencia de carga entre la bola y los electrodos que acompaña al movimiento. Intentaremos, a partir de los resultados experimentales, dar una interpretación del mecanismo de descarga que la bola induce en el seno del líquido en cada bote. En el capítulo 4 estudiaremos la deformación de una gota en presencia de un campo eléctrico. Extenderemos el estudio hecho para la partícula sólida sobre la tensión de despegue y la dinámica de botes al caso de una partícula fluida.

En la segunda parte del trabajo, pasaremos a estudiar la dinámica no lineal de la bola inducida por la aplicación de un campo eléctrico alterno. Dedicaremos el capítulo 5 a la teoría del caos y de los sistemas dinámicos, a los métodos, herramientas de diagnóstico y algoritmos que utilizaremos para estudiar la dinámica y las bifurcaciones y para identificar y cuantizar el caos en el sistema de la bola. En el capítulo 6 presentaremos y estudiaremos el modelo numérico en codimensión 1, y computaremos las características del atractor caótico. Luego presentaremos los resultados experimentales que compararemos con el modelo teórico. Motivados por los resultados experimentales, vamos a reconsiderar las aproximaciones en el modelo teórico para adecuarlo más al sistema real. El séptimo capítulo se dedicará al estudio del plano de parámetros cuando se considera el caso de codimensión 2, y discutiremos los comportamientos críticos en la transición al caos del tipo *no Feigenbaum*.

Parte I

Partícula en campo estático

Capítulo 2

Dinámica de una bola en campo estático

2.1 Presentación

En este capítulo vamos a abordar el estudio de la dinámica de una bola conductora en un campo eléctrico estático entre dos electrodos e inmersa en un líquido. Se investigará el proceso de despegue de la bola inicialmente en reposo sobre el electrodo y la tensión umbral necesaria para levantarla. Presentaremos un modelo teórico para la dinámica de la bola en campo eléctrico estático. Luego expondremos los resultados experimentales para comprobar la validez de este modelo.

Para entender el proceso de levitación y vuelo de la bola vamos a volver primero al fenómeno de carga y descarga de la bola en cada contacto con el electrodo. J.C Maxwell, en 1892 [Maxwell, 1892], fue el primero en calcular la carga que adquiere una esfera conductora en contacto con otra esfera de radio mayor. En 1962, Lebedev y Skal'skaya [Lebedev and SkalSkaya, 1962], aparentemente basándose en los cálculos de Maxwell, calcularon la carga de una esfera conductora de radio R en contacto con un plano, y sujeta a un campo eléctrico E_0 , como

$$Q = \frac{\pi^2}{6} 4\pi\epsilon R^2 E_0, \quad (2.1)$$

y la fuerza eléctrica que actúa sobre la esfera

$$F_e = (1.37)4\pi\epsilon R^2 E_0^2 = 0.832QE_0, \quad (2.2)$$

siendo ϵ la permitividad del medio.

La fórmula de Lebedev y Skal'skaya para la fuerza eléctrica difiere de la de Maxwell (QE_0), por el factor 0.832. Tal diferencia, aunque pequeña, es relevante respecto a la predicción del campo eléctrico mínimo necesario para levantar la bola contra el efecto de la gravedad.

2.2 Modelo teórico para la dinámica de la bola

Consideremos una bola conductora de radio R y densidad ρ_s inmersa en un líquido de densidad ρ_l y viscosidad ν , y sujeta a un campo eléctrico uniforme E_0 . La ecuación del movimiento viene dada por

$$m_e \frac{dv}{dt} = F_e + F_g + F_d, \quad (2.3)$$

donde $m_e = (\rho_s + 0.5\rho_l)\frac{4}{3}\pi R^3$ representa la masa efectiva de la bola [Clift et al., 1978], que incluye la inercia del líquido alrededor de la bola, v es la velocidad en la dirección vertical y los tres términos: F_e , F_g y F_d representan sucesivamente, la fuerza eléctrica, la fuerza de la gravedad y la fuerza de rozamiento debida a la viscosidad del líquido. (Véase figura 2.1.)

2.2.1 Fuerzas y carga de la bola

2.2.1.1 La fuerza eléctrica

Una esfera conductora sometida a un campo eléctrico y en presencia de un electrodo está sujeta a la acción de una fuerza eléctrica. Esta fuerza ha sido tratada por Félici [Félici, 1966] quien estableció cómo calcularla en el caso general.

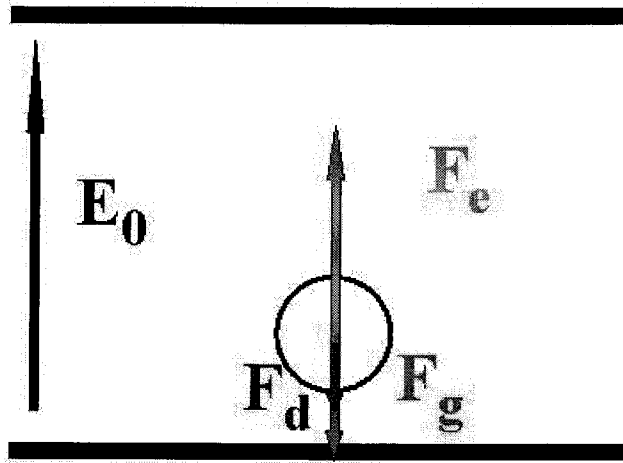


Figura 2.1: Fuerzas que actúan sobre una bola cargada en vuelo dentro de un fluido.

Félici consideró dos casos, el caso de una partícula conductora puesta al mismo potencial que el plano conductor, y el caso en que la partícula, después del contacto con el electrodo, queda aislada.

Pérez [Perez, 2002] generalizó el estudio hecho por Félici de la fuerza eléctrica ejercida sobre una esfera conductora cerca de un electrodo plano y sujeta a un campo eléctrico externo. La esfera está cargada, y su carga Q o su potencial V_b son conocidos. Un campo eléctrico externo se aplica de modo que el campo E_0 muy lejos del plano sea constante. El plano y la esfera están inmersos en un medio de permitividad ϵ .

Félici resolvió el problema electrostático usando la técnica de las imágenes electrostáticas. La imagen de una carga q por una esfera es

$$q' = -\frac{R}{d}q \quad \text{en} \quad d' = \frac{R^2}{d}, \quad (2.4)$$

donde d es la distancia entre la carga y el centro de la esfera, y d' es la distancia a la cual la carga debe colocarse. La imagen de un dipolo p por una es-

fera se obtiene a partir de la imagen de dos cargas vecinas y de signo contrario. Está compuesta de un dipolo y de una carga puntual

$$p' = p\left(\frac{R}{d}\right)^3 \quad \text{y} \quad q' = -p\frac{R}{d^2} \quad \text{en} \quad d' = \frac{R^2}{d}. \quad (2.5)$$

Además la imagen de una carga por un plano es una carga de signo contrario localizada simétricamente respecto al plano. La imagen de un dipolo por un plano es un dipolo del mismo signo. (Véase figura 2.2).

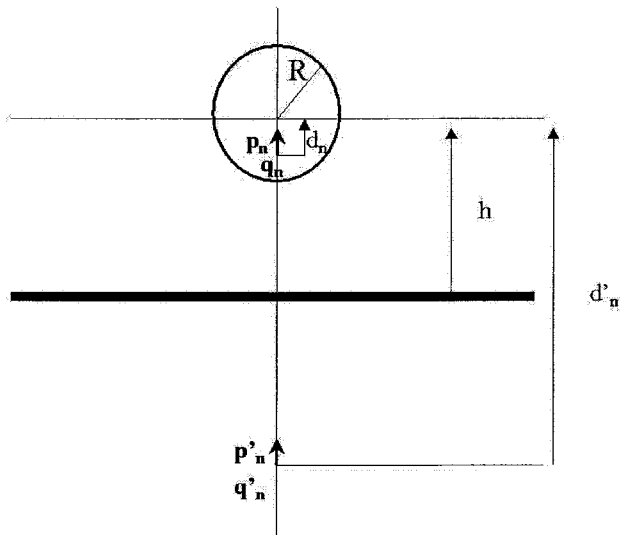


Figura 2.2: Imágenes electrostáticas por una esfera y un plano.

Consideremos el caso de una esfera conductora de radio R cuyo centro está localizado a una distancia h de un plano conductor puesto a tierra en un medio de permitividad ϵ_l . Un campo eléctrico externo se aplica, perpendicular al plano y es constante e igual a E_0 . La superficie de la esfera conductora es equipotencial si colocamos en su centro un dipolo y una carga

$$p_1 = 4\pi\epsilon R^3 E_0, \quad q_1 = 4\pi\epsilon R(E_0 h + V_b), \quad (2.6)$$

V_b es el potencial de la esfera conductora. Para mantener el plano a tierra hay que introducir cargas imágenes y dipolos en el plano, lo que a su vez, genera imágenes en la esfera. Así tenemos una secuencia de cargas q_n y dipolos p_n en la esfera y q'_n y p'_n en el plano.

El potencial de la esfera V_b está relacionado con la carga q_1 , las cargas imágenes sucesivas no contribuyen al potencial de la superficie: están elegidas de modo que la carga exterior y su imagen den un potencial nulo en la superficie de la esfera.

Así, y definiendo $\cosh\alpha = h/R$, la carga de la esfera conductora se expresa como [Perez, 2002]

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n \\ &= 4\pi\epsilon R^2 \left(\frac{V_b}{h} \sinh\alpha \cosh\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\alpha)} + E_0 \sinh^2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\alpha)}{\sinh^2(n\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

La fuerza eléctrica está constituida de cuatro términos distintos:

1. La fuerza ejercida por el campo externo

$$QE_0. \quad (2.8)$$

2. La fuerza entre las cargas en la esfera y las cargas en el plano

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_n q_m}{d_{n,m}^2}. \quad (2.9)$$

3. La fuerza entre dipolos y cargas

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_m p_n + 2q_n p_m}{d_{n,m}^3}. \quad (2.10)$$

4. La fuerza entre dipolos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{6p_n p_m}{d_{n,m}^4}. \quad (2.11)$$

La fuerza eléctrica total sobre la esfera, después de cálculos y simplificaciones, resulta ser

$$F_e(h/R) = 4\pi\epsilon R^2 E_0^2 F_0(h/R) + QE_0 F_1(h/R) + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon R^2} F_2(h/R), \quad (2.12)$$

F_0 , F_1 y F_2 son funciones adimensionales únicamente de (h/R) .

Para valores de $(h/R) > 4$, las tres funciones F_0 , F_1 y F_2 pueden ser muy bien aproximadas por

$$F_0 = -\frac{3R^4}{8h^4}, \quad (2.13)$$

$$F_1 = 1 + \frac{R^3}{2h^3}, \quad (2.14)$$

$$F_2 = -\frac{R^2}{4h^2}. \quad (2.15)$$

Para $(h/R) < 4$, estas funciones divergen de esta aproximación por razón del tamaño finito de la esfera, lo que requiere una distribución de dipolo y de carga para resolver el problema.

Cuando los botes de la bola superan 2 ó 3 veces el radio de la bola, la fuerza eléctrica puede aproximarse como QE_0 sin error apreciable [Soria et al., 1997], (siendo Q la carga de la bola), mientras que cerca del electrodo y por razón de la carga imagen, la fuerza eléctrica se ve disminuida y viene dada por: $F_e = 0.832QE_0$. Esta última expresión es la que se debe utilizar para calcular el campo eléctrico mínimo necesario para levantar la bola.

2.2.1.2 La fuerza de la gravedad

El peso de la bola se compensa parcialmente con la fuerza de flotación ejercida por el líquido. La fuerza de la gravedad que actúa sobre la bola se formula como el peso $m \cdot g$ menos la fuerza de flotación $m_l \cdot g$, siendo m_l la masa que corresponde al volumen del líquido desalojado, o sea

$$F_g = (m - m_l)g. \quad (2.16)$$

2.2.1.3 La fuerza de rozamiento

Esta fuerza es debida a la viscosidad ν del líquido y sólo entra en juego cuando hay movimiento. La fuerza de rozamiento pone de manifiesto la resistencia que opone un fluido al movimiento de un cuerpo sólido en su seno. Es la misma fuerza que uno debe ejercer para mantener quieto a un cuerpo en un fluido que esté en movimiento. Esta fuerza se expresa en el caso de la bola de radio R como

$$F_d = 6\pi\rho_l\nu RvC_f, \quad (2.17)$$

donde C_f es un coeficiente de corrección a la fuerza de rozamiento, y que depende del número de Reynolds, $Re = 2Rv/\nu$, siendo v la velocidad de la bola y ν la viscosidad del líquido. El coeficiente de corrección varía en función del número de Reynolds como: $C_f = a + b\ln(Re)$ con $a = 1.673$ y $b = 0.7198$ [Birlasekaran, 1991]. Si el número de Reynolds es ≤ 2 , lo que corresponde a un movimiento lento, el coeficiente C_f se toma igual a 1, y entonces la fuerza del rozamiento F_d sigue la ley de Stokes:

$$F_d = 6\pi\rho_l\nu Rv. \quad (2.18)$$

Sustituyendo todas las fuerzas por sus expresiones respectivas en la ecuación (2.3), esa queda como

$$m_e \frac{dv}{dt} = F_e - (m - m_l)g - 6\pi\rho_l\nu RvC_f. \quad (2.19)$$

2.2.1.4 Carga de la bola

Cada vez que la esfera conductora entra en contacto con un electrodo, adquiere una carga cuyo valor depende del tamaño de la esfera, de la permitividad del medio y de la magnitud del campo eléctrico. Esta carga se expresa como

$$Q_0 = 4\pi\epsilon_l R^2 \left(\frac{\pi^2}{6}\right) E_0. \quad (2.20)$$

Cuando la bola sube bajo el efecto de la fuerza eléctrica, su carga empieza a decaer debido al tiempo de relajación finito del líquido. De hecho el decaimiento de la carga puede ser determinado, cualquiera que sea la geometría de la partícula, aplicando la ley de Gauss en forma integral con una superficie S que la encierre. La carga entonces viene dada por

$$Q = \int_S \epsilon_l \vec{E}_0 \cdot \vec{n} \, ds. \quad (2.21)$$

La forma integral de la expresión de la conservación de carga junto con la ley de Ohm y la aproximación que ϵ_l y σ son constantes en el líquido, nos lleva a

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \sigma \vec{E}_0 \cdot \vec{n} \, ds = - \frac{\sigma}{\epsilon_l} Q. \quad (2.22)$$

Así, durante el vuelo eléctricamente inducido de la bola, Q decae exponencialmente, y en cada instante t es

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad (2.23)$$

donde $\tau = \epsilon_l/\sigma$ representa el tiempo de relajación del líquido que rodea la bola.

Para líquidos bastante conductores, como el aceite de maíz, el tiempo de relajación es suficientemente corto de modo que la bola pierde bastante carga durante el vuelo y vuelve a caer sin tocar el electrodo superior. En este caso se generan botes regulares sobre el electrodo con un tiempo de vuelo bien definido.

Si el líquido es muy aislante, lo que implica un tiempo de relajación muy grande, la bola vuela, alcanza el electrodo superior y adquiere una carga de signo contrario. Luego emprende un movimiento mucho más rápido hacia el electrodo inferior, pues ahora tanto la fuerza eléctrica como la fuerza gravitatoria actúan en este sentido: de arriba abajo. Este proceso se repite indefinidamente en la ausencia de factores que puedan alterar el movimiento. Por ejemplo, la presencia de impurezas que afectan mucho el proceso de transferencia de carga puede alterar la regularidad de los botes.

2.2.1.5 Aproximaciones

Durante el vuelo de la bola el movimiento está gobernado por la fuerza eléctrica, la gravedad y el rozamiento. Otra fuerza que pudiera afectar el movimiento es la inducida por el movimiento del líquido debido a al movimiento mismo de la bola durante los botes anteriores. Pero el tiempo característico de este movimiento es bastante superior al tiempo de bote, además vamos a suponer que el tamaño de la bola es bastante pequeño frente a la distancia entre las paredes. Con lo cual el movimiento del líquido es lo bastante débil en principio, como para no afectar al movimiento de la bola.

Otro parámetro interesante que describe las colisiones en general, es el *coeficiente de restitución*. Este coeficiente, que se denota e , se define como la razón entre la velocidad justo antes del impacto y la velocidad justo después. Una colisión elástica corresponde a un coeficiente de restitución igual a 1, es decir, que las velocidades antes y después de la colisión son iguales. Para una colisión inelástica, este coeficiente es menor que 1 debido a las pérdidas de energía. Davis y coautores [Davis et al., 1986] mostraron que el número pertinente de la colisión no es el número de Reynolds Re , sino el número de Stokes

$$S_t = \frac{2 \rho_s v R}{9 \mu} = \frac{1 \rho_s}{9 \rho_f} Re \quad (2.24)$$

donde ρ_s es la densidad de la partícula que entra en colisión, R su radio y v su velocidad. μ es la viscosidad dinámica del fluido que rodea la partícula.

El número de Stokes S_t , compara la inercia de la partícula a las fuerzas viscosas. Para S_t pequeño, la partícula no rebota. Zenit y Hunt [Zenit and Hunt, 1999], Joseph y coautores [Joseph et al., 2001] y Gondret y coautores [Gondret et al., 2002] mostraron usando distintas técnicas experimentales, que el número de Stokes mínimo para tener rebotes ($e > 0$) es $S_{t_c} \simeq 10$. En nuestro caso este número es bastante menor que 10. Además hemos comprobado experimentalmente que cuando se corta la tensión durante el vuelo, la bola cae y se queda quieta sin rebote. La bola en nuestro estudio sólo rebota bajo efecto de la fuerza eléctrica que se renueva con cada impacto.

Por consiguiente en lo que sigue vamos a considerar las aproximaciones

siguientes:

- El campo eléctrico es uniforme entre los electrodos.
- La permitividad y la conductividad son constantes en todo el volumen del líquido.
- Las paredes están bastante lejos, frente al radio de la bola, como para no afectar al movimiento.
- La fuerza de rozamiento no se ve afectada por el movimiento del bote anterior.
- No hay rebote bajo efecto de la inercia (coeficiente de restitución $e = 0$).

2.2.2 Botes regulares sobre un electrodo

La comparación del término de inercia $m_e \frac{dv}{dt}$ frente a la fuerza de rozamiento da una escala de tiempo para el término de inercia aproximada por

$$t_i = \frac{m_e}{6\pi\rho_l\nu RC_f}, \quad (2.25)$$

t_i es del orden de 0.09 (s) para la bola de radio 3.25 mm en aceite de maíz, mientras el tiempo de vuelo Δt_0 varía entre 0.9 y 1.5 (s); para la bola de radio 5 mm en aceite de girasol, t_i es del orden de 0.2 (s) y Δt_0 varía entre 0.6 ~ 1.8 (s).

Así, podemos despreciar el término de inercia. De otro lado, al ser el movimiento bastante lento, aplicaremos la ley de Stokes (2.18) para la fuerza de rozamiento (es decir con $C_f = 1$). Con lo cual la ecuación (2.19) se reduce a

$$6\pi\rho_l\nu Rv = F_e - (m - m_l)g. \quad (2.26)$$

Tomando $F_e = Q_0 E_0 e^{-t/\tau}$, la integración de esta ecuación sobre un intervalo de tiempo correspondiente a un bote, conduce a una relación entre el tiempo de vuelo Δt_0 y el campo aplicado E_0 de la forma

$$1 - e^{-\Delta t_0/\tau} = \frac{(m - m_l)g \Delta t_0}{Q_0 E_0 \tau}. \quad (2.27)$$

Si consideramos el instante cuando se establece el equilibrio entre la fuerza eléctrica y la fuerza de la gravedad, podemos escribir

$$(m - m_l)g = Q_0 E_c, \quad (2.28)$$

lo que define el campo crítico $E_c = V_c/d$. Es el campo externo de equilibrio entre las fuerzas que actúan sobre la bola, y es el umbral para levantar la bola. Así, sustituyendo la expresión de la carga, obtenemos

$$\begin{aligned} (m - m_l)g &= \frac{2}{3}\pi^3 \epsilon_l R^2 E_c^2 \\ &= \frac{2}{3}\pi^3 \epsilon_l R^2 E_0^2 \frac{E_c^2}{E_0^2}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

por tanto

$$\frac{3(m - m_l)g}{2\pi^3 \epsilon_l R^2 E_0^2} = \frac{E_c^2}{E_0^2} = \frac{V_c^2}{V_0^2}, \quad (2.30)$$

El campo umbral E_c tendrá entonces la forma siguiente

$$E_c = \sqrt{\frac{3(m - m_l)g}{2\pi^3 \epsilon_l R^2}}, \quad (2.31)$$

siendo d la distancia entre los electrodos.

Con esta formulación, la ecuación (2.27) se escribiría de la manera siguiente

$$1 - e^{-\Delta t_0/\tau} = \frac{V_c^2 \Delta t_0}{V_0^2 \tau}. \quad (2.32)$$

Lo que nos da V_0^2 en función del tiempo de vuelo Δt_0

$$V_0^2 = \frac{V_c^2}{(1 - e^{-\Delta t_0/\tau})} \frac{\Delta t_0}{\tau}. \quad (2.33)$$

De esta fórmula deducimos que el tiempo de vuelo de la bola sólo depende del valor de la tensión aplicada y del tiempo de relajación del líquido. Se ve también que la viscosidad del líquido no interviene, aunque sí es relevante respecto a la altura máxima del bote.

Para calcular el campo eléctrico mínimo para levantar la bola, es necesario tener en cuenta el hecho de que la fuerza eléctrica cerca del plano conductor no es QE_0 sino $0.832QE_0$. Por consiguiente, la aproximación adecuada para calcular E_c es

$$E_c = \sqrt{\frac{3(m - m_l)g}{0.832 \times 2\pi^3 \epsilon_l R^2}}. \quad (2.34)$$

Para una partícula pequeña, la adhesión entre la partícula y el electrodo tiene que ser superada antes de que el despegue sea posible. En este caso, la ecuación (2.28) debe escribirse

$$(m - m_l)g + F_a = Q_0 E_c, \quad (2.35)$$

donde F_a es la fuerza de adhesión entre el electrodo y la partícula. La adhesión puede ser estimada a partir de la fuerza de atracción de van der Waals entre dos esferas [Israelachveli, 2000]

$$F_a = \frac{A}{6z^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (2.36)$$

donde A es la constante de Hamaker (su valor es alrededor de 10^{-19} J para los metales), z es la distancia intermolecular mínima ($z \sim 0.4$ nm), R_1 y R_2 son los radios de las superficies en contacto. Salvo en caso de que las superficies sean extremadamente pulidas, esta distancia corresponde al radio típico de las imperfecciones de la superficie. Tomando $R_1 = R_2 \sim 10^{-7}$ m encontramos $F_a \sim 5$ nN. La fuerza eléctrica es $(2/3)\pi^3 \epsilon_l R^2 E_0^2 \sim 40R^2$ N para un campo eléctrico típico $E_0 = 5 \times 10^5$ V/m. Por consiguiente, sólo en las partículas con un radio $R \sim 10$ μ m, la adhesión es comparable a la fuerza eléctrica. Debemos notar que la gravedad depende de R^3 , la fuerza eléctrica de R^2 y la adhesión no

depende de R sino del radio de la superficie en el punto de contacto. Con lo cual cuando la adhesión es relevante, la gravedad es despreciable.

Una vez la bola está en vuelo, la adhesión no juega ningún papel en la dinámica, aún durante los rebotes ya que, como veremos más adelante, la bola se carga a una distancia muy pequeña pero finita del electrodo y luego rebota. El electrodo y la partícula ya no vuelven a estar pegados.

2.2.3 Movimiento oscilatorio entre dos electrodos

Otro tipo de movimiento puede ocurrir en el caso de líquidos muy aislantes o para tensiones bastante altas. De hecho, para un líquido muy aislante como el aceite de transformador o de silicona, el tiempo de relajación es muy grande (~ 8 s). Por lo tanto la pérdida de carga durante el vuelo se hace pequeña y la bola alcanza el electrodo superior. Allí la bola adquiere una carga de signo contrario y se ve propulsada hacia el electrodo de abajo. El proceso se repite y da lugar a un movimiento oscilatorio entre los dos electrodos.

En estudios anteriores con líquidos muy aislantes [Birlasekaran, 1991] [Krasucki, 1968], se considera que la pérdida de carga durante el movimiento de la bola no es significativa, por lo tanto la carga es constante durante el movimiento. Nosotros vamos a considerar la forma general de la variación de la carga en función del tiempo de la ecuación (2.23), con lo cual el resultado sería válido también para líquidos menos aislantes como el aceite de maíz.

Reconsideremos la ecuación del movimiento (2.19), pero ahora integrándola sobre el intervalo de tiempo Δt que tarda la bola en atravesar la distancia entre los dos electrodos. Esta distancia es la distancia recorrida por el centro de gravedad de la bola, y es igual a $D = d - 2R$. Tenemos

$$6\pi\rho_l\nu C_f D = -\tau Q_0 E_0 (e^{-\Delta t/\tau} - 1) - (m - m_l)g\Delta t. \quad (2.37)$$

El coeficiente C_f se toma como constante durante el vuelo de la bola entre los electrodos y se calcula tomando para la velocidad el valor medio entre dos impactos consecutivos. Sustituyendo Q_0 por su valor teórico y aproximando

el término $(m - m_l)g/(Q_0 E_0)$ como V_c^2/V_0^2 , obtenemos una relación entre el tiempo de subida y el cuadrado de la tensión aplicada

$$V_0^2 = \frac{NC_f + V_c^2 \Delta t}{\tau(1 - e^{-\Delta t/\tau})}, \quad (2.38)$$

donde

$$N = \frac{9\rho_l \nu D d^2}{\pi^2 \epsilon_l R}. \quad (2.39)$$

Respecto al movimiento contrario, la contribución de la fuerza de la gravedad cuenta positivamente y por consiguiente cambia de signo en la ecuación (2.38). Luego, la representación de la tensión en función del tiempo tiene la forma

$$V_0^2 = \frac{NC_f - V_c^2 \Delta t}{\tau(1 - e^{-\Delta t/\tau})}. \quad (2.40)$$

2.3 Estudio experimental

Para comprobar experimentalmente los modelos dinámicos propuestos en la sección anterior, hemos llevado a cabo una serie de experimentos probando distintos líquidos y bolas y utilizando dos celdas de prueba. Todos los experimentos se han hecho en el laboratorio de Electrohidrodinámica de la Facultad de Física.

2.3.1 Dispositivo

El dispositivo experimental utilizado para la serie de experimentos realizados consiste en una celda de prueba, cuyas paredes superior e inferior soportan dos electrodos horizontales. El electrodo superior está conectado a una fuente de alta tensión continua, y el de abajo está conectado, vía un amplificador y una tarjeta de adquisición a un ordenador. Un osciloscopio está conectado en paralelo con el electrodo inferior de la celda de prueba para visualizar los picos al mismo tiempo que los registra la tarjeta. (Véase la figura 2.3).

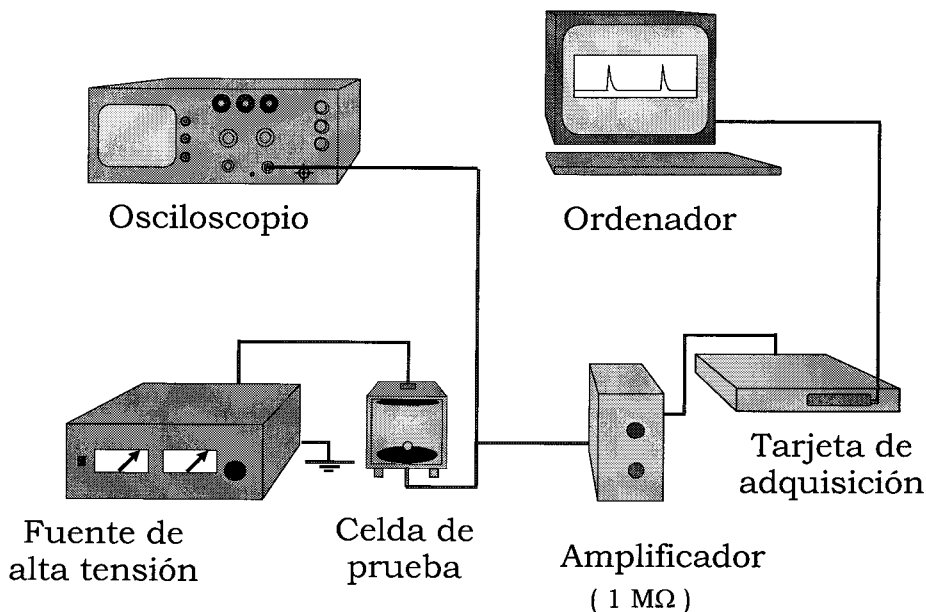


Figura 2.3: Dispositivo experimental.

La celda experimental está hecha con plexiglás y tiene una forma casi cúbica. Sobre las paredes superior e inferior están pegados dos electrodos de aluminio de forma circular.

Se han utilizado dos celdas distintas. La primera tiene las dimensiones siguientes: $(70 \times 70 \times 55 \text{ mm})$, los dos electrodos tienen un diámetro de 62 mm, y la distancia entre ellos es $d = 40 \text{ mm}$. La segunda tiene las dimensiones: $(60 \times 60 \times 36 \text{ mm})$, el diámetro de los electrodos es de 40 mm y la distancia entre ellos es igual a 20 mm.

Sobre el electrodo inferior de cada celda se coloca un anillo metálico de diámetro ligeramente inferior al del electrodo. Su utilidad es la de compensar la pequeña divergencia del campo eléctrico en el centro de los electrodos y así mantener la bola en movimiento según un eje vertical fijo. En la ausencia de este anillo la bola acaba por abandonar el electrodo después de unos pocos botes.

La Fuente de alta tensión, modelo *Spellman*, puede suministrar una tensión continua de hasta 20 kV. El electrodo inferior está conectado a un amplificador,

modelo *Tektronix* TM502A, con una resistencia de entrada igual a $1\text{ M}\Omega$, y una capacidad de entrada de 47 pF . Tiene un filtro incorporado, y se usa para amplificar la señal cuando es más baja que la sensibilidad de la tarjeta de adquisición.

La salida del amplificador está conectada con la entrada de la tarjeta de adquisición que es un convertidor Analógico-Digital modelo *Metabyte* DAS-16 de resistencia de entrada del orden de $20\text{ M}\Omega$. Al electrodo inferior se conecta también un osciloscopio para visualizar los picos no amplificados. El osciloscopio es un modelo *Textronix* 2221, y tiene una resistencia de entrada igual a $1\text{ M}\Omega$ y una capacidad de entrada igual a 20 pF .

Varios líquidos han sido probados para las diferentes series de experimentos; tres entre ellos, esencialmente por no ser muy aislantes. Para estudiar los botes regulares sobre un electrodo, hemos utilizado: aceite de maíz y aceite de girasol de la misma densidad: $\rho = 916.0\text{ kg/m}^3$ e Isopar-L de densidad: $\rho = 767.0\text{ kg/m}^3$. El último líquido es una mezcla de hidrocarburos y ha sido suministrado por *Exxon*. Otros dos líquidos, muy aislantes, han sido utilizados para estudiar el movimiento oscilatorio entre los dos electrodos: el aceite de transformador y el aceite de silicona. Para investigar el efecto de la conductividad sobre la tensión umbral necesaria para levantar la bola, hemos probado una misma bola con el mismo líquido (Isopar-L) variando la conductividad. Para eso hemos añadido cada vez una cantidad de surfactante Aerosil OT, suministrado por *Fluka*.

Las características de los líquidos aparecen en la tabla 2.3.1. Para algunas muestras de líquidos, cuyas conductividades habían cambiado considerablemente durante el tiempo que tardaba el experimento, se muestra el valor de la conductividad antes y después del experimento. La conductividad de todos los líquidos así como la permitividad, han sido medidas con un conductímetro modelo *LDTRP-2* suministrado por *IRLAB*.

Hemos utilizado cuatro bolas. La primera, bola número (1), es una bola de plástico cubierta de papel de aluminio para hacerla conductora, tiene un radio $R = 5.00 \pm 0.05\text{ mm}$ y una masa $m = 647.7\text{ mg}$. Dos están hechas a mano con papel de aluminio y cuidadosamente redondeadas para aproximar una forma esférica y disminuir el tamaño de las arrugas en la superficie. Tienen respectivamente los radios y masas siguientes: la bola número (2) tiene un radio $R = 3.25 \pm 0.08\text{ mm}$. Su masa varía dependiendo de la densidad del líquido en

Líquido	ϵ_r	σ (10^{-12} S/m)	ν (10^{-5} m ² /s)
aceite de maíz (a)	3.1	48 - 61	5.00
aceite de maíz (b)	3.1	11	5.00
aceite de girasol	3.1	11	5.00
Isopar-L (a)	2.0	89 - 118	0.20
Isopar-L (b)	2.0	71 - 318	0.20
Isopar-L (c)	2.0	115 - 150	0.20
aceite de transformador	2.14	2.6	2.66
aceite de silicona	2.64	0.11	5.00

Tabla 2.1: Propiedades físicas de los líquidos utilizados. Las letras *a*, *b* y *c* se refieren a muestras con distintas conductividades.

el cual está inmersa ya que el líquido entra en sus huecos. Así su masa medida cuando se usa con Isopar-L es $m = 172$ mg y en aceite de maíz es $m = 186$ mg. La bola número (3) tiene un radio $R = 2.33 \pm 0.08$ mm y una masa $m = 66$ mg, después de estar inmersa en Isopar-L con que ha sido experimentada. La cuarta bola, número (4), es una bola de plástico con superficie conductora, tiene un radio $R = 3.0$ mm y una masa $m = 211$ mg.

La medida del tiempo de botes se ha hecho mediante el osciloscopio. Mientras que, para medir la carga transferida al circuito, hemos desarrollado un programa mediante el software comercial "TestPoint".

2.3.2 Tensión de despegue y tiempo del bote regular

Cuando la tensión aplicada entre los electrodos supera ligeramente al umbral necesario para levantar la bola, ésta empieza a moverse dando botes pequeños. En el osciloscopio se registran, entonces, picos de altura muy variable y con un intervalo de tiempo pequeño e irregular. Esta irregularidad en la altura del pico y en el tiempo de bote es debida al hecho de que la bola se carga distintamente de un bote al otro. A veces, la bola vuelve a quedarse en reposo después de algunos pocos botes aunque la tensión sea superior al umbral por casi unos 500 voltios. Así para conseguir botes regulares, hay que aumentar la tensión por

Líquido	ϵ_l/σ (s)	V_c^t (kV)	E_c^t (kV/m)	Q_0 (nC)
a. de maíz (1)	0.5	15.1 ± 0.6	376 ± 15	5.3 ± 0.2
a. de girasol (1)	2.45	15.1 ± 0.6	378 ± 15	5.3 ± 0.2
a. de girasol (1)(*)	2.45	07.5 ± 0.3	376 ± 15	5.3 ± 0.2
a. de maíz (2)	1.00	13.5 ± 1.2	337 ± 31	2.0 ± 0.2
Isopar(2)	0.15 - 0.20	17.4 ± 1.5	434 ± 37	1.67 ± 0.14
Isopar (3)	0.06 - 0.25	14.4 ± 1.4	364 ± 36	0.75 ± 0.07
Isopar (3)	0.12 - 0.15	14.4 ± 1.4	364 ± 36	0.75 ± 0.07

Tabla 2.2: Valores teóricos del umbral del campo (y de tensión) calculados a partir de (2.34), y del tiempo de relajación (a partir de los valores medidos de ϵ_l y σ). (1): $R = 5$ mm, (2): $R = 3.25$ mm, (3): $R = 2.33$ mm. En todos los casos, $d = 4$ cm excepto en (*): $d = 2$ cm.

encima del umbral V_c , a veces, de 1 hasta 3 kV. El valor máximo de la tensión está limitado a 20 kV que puede suministrar la fuente. A veces la bola llega a tocar el electrodo de arriba para tensiones menores que los 20 kV aun para líquidos no muy aislantes. Las medidas del tiempo de bote y de la carga se hacen a pasos incrementando cada vez la tensión en 0.2 kV.

Para estudiar la dinámica de la bola en el caso de botes regulares, hemos utilizado líquidos que tienen un tiempo de relajación bastante corto para no permitir que la bola llegue al electrodo opuesto. Así hemos utilizado el aceite de maíz, el aceite de girasol, e Isopar-L, cuyos tiempos de relajación no superan a los 3 segundos.

La figura 2.4 representa una de las curvas obtenidas del tiempo de vuelo de la bola Δt_0 frente a la tensión aplicada. La curva en este caso corresponde a las medidas hechas para la bola de radio $R = 2.33$ mm en Isopar-L. Curvas similares se consiguen para los distintos líquidos y bolas.

La línea continua en la figura 2.4 corresponde al ajuste de los datos experimentales, según el modelo teórico de la ecuación (2.33).

El ajuste al modelo teórico se consigue hallando los valores de V_c^e y τ^e basándose en los valores experimentales medidos para el tiempo de vuelo y la

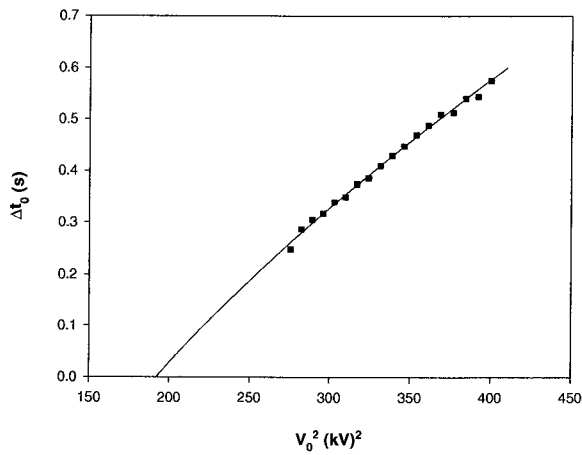


Figura 2.4: Tiempo de vuelo frente a la tensión aplicada. La línea continua es el mejor ajuste al modelo teórico (2.33); (bola de radio $R = 2.33$ mm en Isopar-L.)

Líquido	τ^e (s)	V_c^e (kV)	E_c^e (kV/m)	Q_0^e (nC)
a. de maíz (1)	0.86	16.1	402	5.6
a. de girasol (1)	4.74	16.1	402	5.6
a. de girasol (1)(*)	4.00	07.1	357	5.0
a. de maíz (2)	1.12	14.4	359	2.1
Isopar(2)	0.48	15.3	383	1.47
Isopar (3)	0.64	13.8	344	0.71
Isopar (3)	0.34	13.9	346	0.71

Tabla 2.3: Valores experimentales, (obtenidos a partir del ajuste), del umbral de tensión y del tiempo de relajación. (1): $R = 5$ mm, (2): $R = 3.25$ mm, (3): $R = 2.33$ mm. En todos los casos $d = 4$ cm, excepto en (*): $d = 2$ cm.

tensión correspondiente. Siendo la dependencia del tiempo de vuelo en la tensión aplicada no lineal, es entonces, más apropiado ajustar los datos experimentales según el método de los mínimos cuadrados no lineal. Para eso hemos desarrollado un programa en C⁺⁺ basado en el algoritmo de Levenberg-Marquardt [Press et al., 1990].

Se introducen en el programa los N valores medidos del tiempo y de la tensión, y una aproximación inicial para los parámetros V_c y τ . El ajuste de estos parámetros se hace de manera iterativa, minimizando la función χ^2 , que representa la dispersión entre los valores medidos y los teóricos que corresponden a la función del modelo (véase el apéndice A). Cuando se estima la convergencia de la función χ^2 satisfactoria, el programa proporciona los valores de V_c^e y τ^e correspondientes. Al sustituir estos valores en la ecuación (2.33) del modelo se consigue el ajuste representado en la figura 2.4.

En la tabla 2.2 se ven los valores de V_c^t calculados a partir de la fórmula (2.34) y de $\tau^t = \epsilon_l/\sigma$, así como la carga inicial de la bola calculada a partir de la ecuación (2.20). Mientras que la tabla 2.3 representa los valores del umbral de la tensión y del tiempo de relajación conseguidos con el ajuste.

Los valores de V_c^e son razonablemente comparables con los valores calculados V_c^t . Pero los valores de τ^e son mayores, para todos los líquidos, que los valores teóricos. Eso puede justificarse por las simplificaciones realizadas en el modelo.

Las bolas no son perfectamente esféricas. Por consiguiente, los errores en la medida del radio de las bolas (y así, en la masa del líquido desalojado), implican un error en el cálculo del umbral de la tensión teórico. Este error varía entre 0.6 kV, para la bola de radio 5 mm en aceite de maíz y de girasol, y 1.4 – 1.5 kV para las bolas de radio 2.33 y 3.25 mm en Isopar-L.

Johnson [Johnson, 1973], en un trabajo anterior, encontró que el umbral de tensión era sensible a la variación de la conductividad del líquido experimentado. Sin embargo, a partir de las tablas 2.2 y 2.3, deducimos que este umbral no depende de la conductividad del líquido dentro del cual está inmersa la bola, en acuerdo con la expresión (2.34) en la que no interviene la conductividad.

El valor de la carga que aparece en la tabla 2.3 proviene del cálculo directo

a partir de la fórmula

$$Q = \frac{(m - m_l)g}{E_c} \quad (2.41)$$

con $E_c = V_c/d$. Estos valores concuerdan razonablemente con los valores calculados de la ecuación (2.20).

2.3.3 Altura máxima del bote

La altura máxima del bote puede hallarse de la ecuación (2.26). El movimiento de la bola cuando bota sobre un electrodo sin tocar el de arriba, es bastante lento. Luego la fuerza de rozamiento puede aproximarse según la ley de Stokes: $F_d = 6\pi\rho\nu Rv$. Con esta aproximación, y sustituyendo la fuerza eléctrica por su expresión, la ecuación (2.26) se escribe

$$6\pi\rho\nu R \frac{dX}{dt} = Q_0 E_0 e^{-t/\tau} - (m - m_l)g, \quad (2.42)$$

siendo X la coordenada del centro de gravedad de la bola según el eje vertical, tomando origen en el plano del electrodo.

La integración de esta ecuación conduce a

$$X(t) = \frac{1}{6\pi\rho\nu R} \left[\tau Q_0 E_0 (1 - e^{-t/\tau}) - (m - m_l)gt \right]. \quad (2.43)$$

La altura máxima del bote, X_{max} , corresponde al punto en el cual la velocidad de la bola es cero, lo que se traduce por un equilibrio entre las fuerzas de la gravedad y eléctrica

$$Q_0 E_0 e^{-t/\tau} = (m - m_l)g. \quad (2.44)$$

Por lo que el tiempo correspondiente t_{max} es

$$t_{max} = -\tau \ln \left(\frac{(m - m_l)g}{Q_0 E_0} \right), \quad (2.45)$$

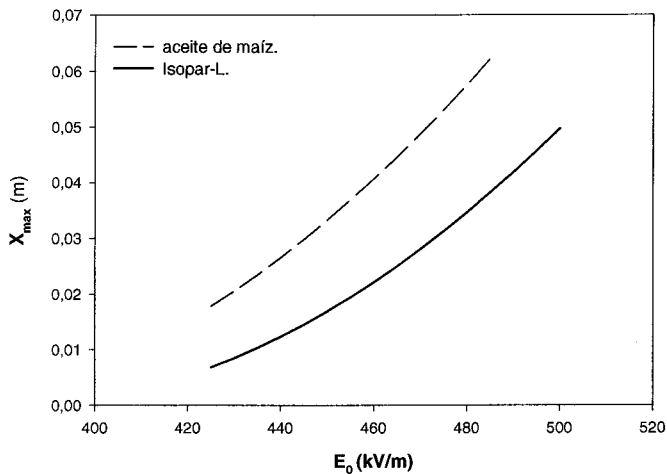


Figura 2.5: Valores teóricos de la altura máxima del bote frente al campo aplicado en aceite de maíz e Isopar-L. El radio de la bola es de 3.25 mm

y sustituyendo el tiempo en la ecuación (2.43), X_{max} viene dada por

$$X_{max} = \frac{\tau}{6\pi\rho_l\nu R} \left[Q_0 E_0 \left(1 - \frac{(m - m_l)g}{Q_0 E_0} \right) + (m - m_l) \ln \left(\frac{(m - m_l)g}{Q_0 E_0} \right) \right]. \quad (2.46)$$

Utilizando la aproximación de que $[(m - m_l)g]/[Q_0 E_0] \approx E_c^2/E_0^2$, obtenemos una representación de X_{max} en función del campo aplicado de la forma

$$X_{max} = P\tau \left[E_0^2 + E_c^2 \left(\ln \left(\frac{E_c^2}{E_0^2} \right) - 1 \right) \right] \quad (2.47)$$

con

$$P = \frac{\pi^2 \epsilon_l R}{9\rho_l \nu}. \quad (2.48)$$

La figura 2.5 ilustra la variación de los valores teóricos de X_{max} en función de la tensión aplicada para la bola de radio $R = 3.25$ mm en aceite de maíz e Isopar-L.

Con los valores de la tensión para los cuales la bola llega a tocar la placa de

arriba, lo que corresponde a un valor de $X_{max} = d - 2R$, permiten hacer una comparación con el valor teórico. Así, para la bola de radio $R = 3.25$ mm y con los valores de ϵ_l , R , ρ_l y ν que tenemos, resulta que el valor teórico de X_{max} supera al valor experimental por un factor del orden de 1.86 para el aceite de maíz y 1.41 para el Isopar.

2.3.4 Movimiento entre dos electrodos

En el caso del movimiento oscilatorio de la bola entre los dos electrodos, se registran dos tiempos: el tiempo de subida que tarda la bola en llegar al electrodo superior, y el tiempo de bajada, que corresponde al movimiento contrario. El segundo tiempo es mucho más corto que el primero.

La figura (2.6) representa el tiempo de subida frente a la tensión aplicada medido para la bola de radio $R = 3.25$ mm en aceite de transformador. La figura (2.7) representa los tiempos en el caso de la bola de radio $R = 3$ mm en aceite de maíz. La línea continua en las dos gráficas corresponde al ajuste teórico según la ecuación (2.38). Para conseguir el ajuste hemos utilizado el mismo método que en el caso de los botes regulares. Además de los valores de la tensión y del tiempo de vuelo, se introduce en el programa los valores calculados del coeficiente de corrección para la fuerza de rozamiento C_f .

Para el cálculo del coeficiente de corrección C_f hemos utilizado la formulación de Birlasekaran [Birlasekaran, 1991], que encontró que este coeficiente, para valores del número de Reynolds mayor que 2, se expresa como: $C_f = a + b \ln(R_e)$. Trabajando siempre con aceite de transformador aproximó las constantes a y b como: $a = 1.673$ y $b = 0.7198$. Los valores del número de Reynolds se calculan aproximando la velocidad media como: $v = D/\Delta t$, siendo D la distancia recorrida por el centro de gravedad de la bola y Δt el tiempo entre el impacto abajo y arriba.

El aceite de transformador utilizado tiene una viscosidad $\nu = 2.66 \times 10^{-5}$ m²/s y un tiempo de relajación teórico $\epsilon_l/\sigma = 7.37$ s. Los valores del número de Reynolds varían entre 13.2 y 22.3 lo que implica valores para el coeficiente C_f que varían entre 3.5 y 3.9. El valor teórico del umbral de tensión es $V_c^t = 14.76$ kV, mientras el ajuste proporciona un valor de $V_c^e = 12.8$ kV y un tiempo de

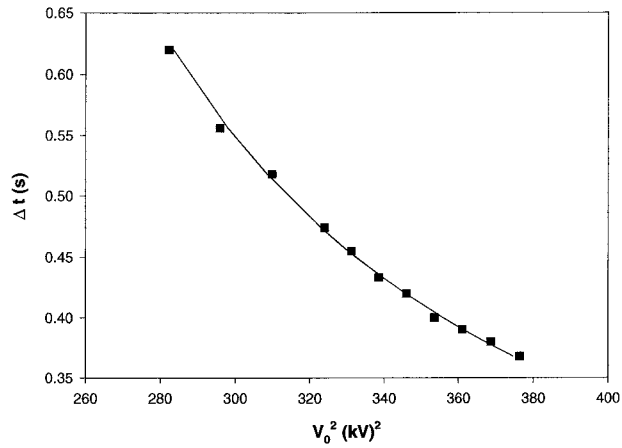


Figura 2.6: Tiempo de subida de la bola frente al cuadrado de la tensión aplicada. Bola de radio $R = 3.25$ mm en aceite de Transformador. Distancia entre electrodos: $d = 4$ cm. La línea continua representa el ajuste teórico.

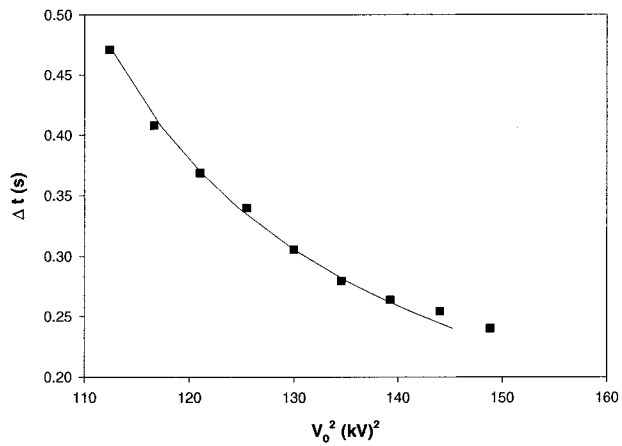


Figura 2.7: Tiempo de subida de la bola frente al cuadrado de la tensión aplicada. Bola de radio $R = 3.0$ mm en aceite de maíz, $d = 2$ cm.

Líquido	ϵ_l/σ (s)	τ^e (s)	V_c^t (kV)	V_c^e (kV)	E_c^t (kV/m)	E_c^e (kV/m)
a. transfor. (1)	7.37	7.30	14.76	12.8	369	320
a. maíz (2)	2.16	3.70	10.0	9.0	500	450

Tabla 2.4: Valores teóricos y experimentales de τ , V_c y E_c en el caso de un movimiento oscilatorio. (1): $R = 3.25$ mm y $d = 4$ cm, (2): $R = 3$ mm y $d = 2$ cm.

relajación $\tau^e = 7.3$ s. Los valores del tiempo de relajación, teóricos y los conseguidos por el ajuste son comparables, mientras el umbral de tensión experimental está un poco por debajo de lo predicho.

Para el aceite de maíz, los valores teóricos del umbral de tensión y del tiempo de relajación son: $V_c^t = 10.0$ kV y $\epsilon_l/\sigma = 2.16$ s. Los valores experimentales obtenidos por el ajuste son: $V_c^e = 9.0$ kV, y $\tau^e = 3.7$ s. El número de Reynolds varía en el intervalo: $3.57 - 7.00$, lo que implica un rango para C_f entre: 2.59 y 3.07 .

Para conseguir el ajuste que se ve en la figura 2.6, hay que ajustar el término NC_f multiplicándolo por un factor igual a 1.05, lo que corresponde a un error de 5%. Este error puede resultar del error en el cálculo de la constante

$$N = \frac{9\rho_l\nu Dd^2}{\pi^2\epsilon_l R} \quad (2.49)$$

de que depende el modelo (2.38).

En el caso del aceite de maíz, un líquido más conductor, y utilizando la celda de prueba pequeña, $d = 2$ cm, la discrepancia se hace mucho mayor. Las medidas se han hecho con la bola de radio $R = 3$ mm y el ajuste en este caso se consigue ajustando el término NC_f por un factor ~ 1.64 (véase la figura 2.7). En la tabla 2.4 se dan los valores teóricos y experimentales obtenidos.

El tiempo correspondiente al movimiento de bajada, es tan corto que el error cometido en las medidas no permite hacer un ajuste conveniente según la ecuación (2.40). Ilustramos en la figura 2.8 una representación de este tiempo junto al tiempo de subida para la bola de radio $R = 3.25$ mm en aceite de transformador.

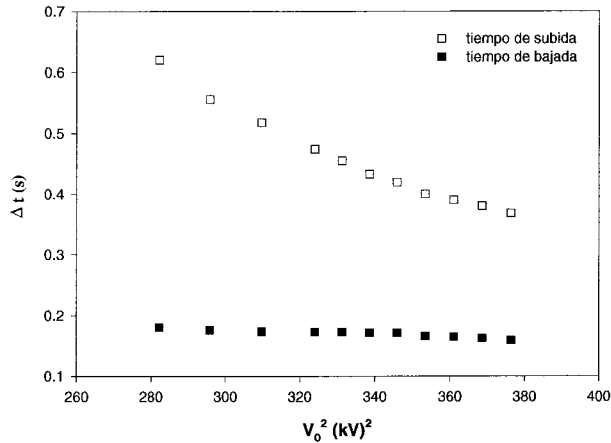


Figura 2.8: Tiempos, de subida y de bajada, de la bola frente al cuadrado de la tensión aplicada. Bola de radio $R = 3.25$ mm en aceite de transformador.

2.4 Conclusión

Como conclusión general podemos decir que los modelos teóricos simplificados que hemos usado dan cuenta de las características esenciales del movimiento, así como del umbral de tensión para el despegue. Las discrepancias encontradas entre los valores teóricos y experimentales para el tiempo de relajación no tienen un origen claro y pueden deberse a diferentes causas: como la variación de la conductividad del líquido durante el experimento, o las arrugas en la superficie de las bolas utilizadas, que afectan tanto la medida del radio como el proceso de carga de la bola en cada bote. También la presencia de impurezas en el líquido afectan el proceso de carga de la bola y por consiguiente la dinámica y el tiempo de bote.

Capítulo 3

Estudio de la carga

Cuando la bola se acerca al electrodo inferior, después de un bote, tiene lugar una transferencia de carga entre ambos conductores. Al mismo tiempo, una parte de esta carga se transfiere al circuito externo. Esta transferencia de carga se traduce en un pico de corriente que atraviesa el circuito y que corresponde a la fracción de la carga que el electrodo debe intercambiar para conservar su potencial inicial (nulo), ahora que está en contacto con la bola. Las dos cargas, la transferida a la bola y la transferida al circuito, están relacionadas con los coeficientes de capacidad del sistema electrodo-bola-electrodo.

3.1 Análisis teórico

3.1.1 Coeficientes de capacidad del sistema

Consideremos el sistema constituido por los tres conductores en la configuración siguiente (véase figura 3.1). Mientras que el electrodo superior está puesto al potencial V_0 , el de abajo está puesto a tierra y la bola, en este caso, tiene un potencial V_b . Así podemos expresar las cargas de cada conductor del sistema como sigue

$$Q_1 = C_{11}V_0 + C_{13}V_b, \quad (3.1)$$

$$Q_2 = C_{12}V_0 + C_{23}V_b, \quad (3.2)$$

$$Q_3 = C_{13}V_0 + C_{33}V_b; \quad (3.3)$$

donde 1 se refiere al electrodo superior, 2 al inferior y 3 a la bola.

Podemos calcular la carga adquirida por la bola en función de los coeficientes de capacidad del sistema retomando la expresión de la carga establecida en el capítulo anterior (2.7). Esta expresión se puede reescribir como

$$Q = 4\pi\epsilon_l \frac{R^2}{h} \sinh(\alpha) \cosh(\alpha) S_1 V_b + 4\pi\epsilon_l E_0 R^2 \sinh^2(\alpha) S_2 \quad (3.4)$$

con

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\alpha)}, \quad (3.5)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\alpha)}{\sinh^2(n\alpha)}. \quad (3.6)$$

donde

$$\sinh(\alpha) = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}, \quad (3.7)$$

siendo h la distancia entre el centro de la bola y el electrodo inferior.

Si consideramos el electrodo superior lo suficientemente lejos, podemos tomar: $-V_0 = E_0 d$. Con lo cual tenemos

$$Q = 4\pi\epsilon_l R \sinh(\alpha) S_1 V_b - 4\pi\epsilon_l \frac{R^2}{d} \sinh^2(\alpha) S_2 V_0. \quad (3.8)$$

Un desarrollo de la expresión (3.4) conduce a la expresión siguiente para la carga de la bola, en función de su potencial y el del electrodo superior, estando el inferior a tierra, o sea

$$Q = 4\pi\epsilon_l R \sqrt{\left(\frac{h^2}{R^2} - 1\right)} S_1 V_b - 4\pi\epsilon_l \frac{h^2 - R^2}{d} S_2 V_0. \quad (3.9)$$

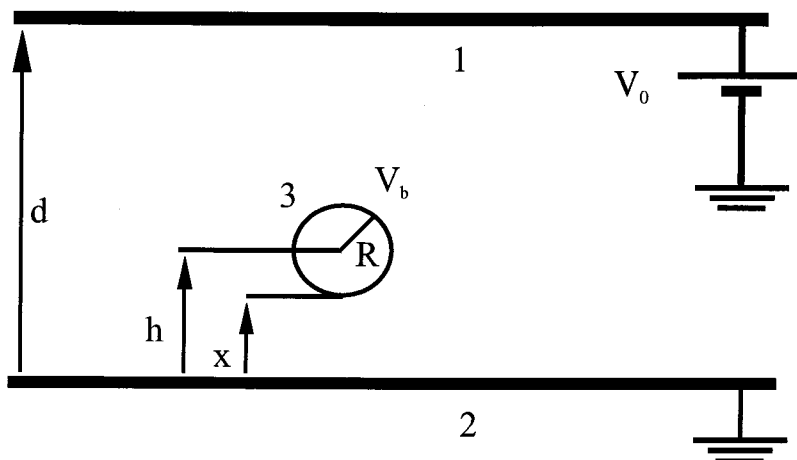


Figura 3.1: Configuración del sistema de la bola entre dos electrodos.

3.1.2 Relación entre cargas

La identificación de la ecuación (3.4) con la ecuación (3.3), que son dos formulaciones para la misma carga, la de la bola, nos proporciona las expresiones de los coeficientes de capacidad C_{13} y C_{33}

$$C_{13} = -4\pi\epsilon_l \frac{h^2 - R^2}{d} S_2, \quad (3.10)$$

y

$$C_{33} = 4\pi\epsilon_l \sqrt{h^2 - R^2} S_1. \quad (3.11)$$

Con lo cual la razón de ambos coeficientes se escribirá

$$-\frac{C_{13}}{C_{33}} = \frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{d} \frac{S_2}{S_1}. \quad (3.12)$$

Llamemos Q_c a la carga transferida por el electrodo a la bola, y Q_a a la carga transferida al circuito externo durante la descarga. Cuando la bola se acerca al electrodo y antes de que la descarga tenga lugar, su potencial es $V_b \neq 0$; justo después, este potencial cae a 0 porque debe ser igual al potencial de la placa que está puesta a tierra. De este modo, las ecuaciones (3.1) y (3.3) permiten calcular las cargas respectivas Q_c y Q_a como sigue

$$Q_c = Q_3^{\text{antes}} - Q_3^{\text{después}} = C_{33} V_b, \quad (3.13)$$

y

$$Q_a = Q_1^{\text{antes}} - Q_1^{\text{después}} = -C_{13}V_b. \quad (3.14)$$

Por último la razón entre Q_a y Q_c viene como

$$\frac{Q_a}{Q_c} = -\frac{C_{13}}{C_{33}} = \frac{\sqrt{h^2 - R^2}}{d} \frac{S_2}{S_1}. \quad (3.15)$$

Esta expresión será de utilidad más adelante para comprender el proceso de carga de la bola.

3.1.3 Reforzamiento del campo local

Cuando la bola se acerca al electrodo, el campo entre ella y la placa ya no es igual al campo global E_0 sino a un campo local más grande E_r (véase figura 3.2). Cuando este campo local supera al campo de ruptura del líquido, sea E_B , se produce una descarga, pues el líquido se vuelve conductor. De ese modo la bola se pone al potencial del electrodo. Para tener en cuenta cómo varía el campo local en función del campo global y de la distancia entre los dos conductores vamos a calcular el coeficiente de reforzamiento del campo que definimos como

$$\beta = E_r/E_0. \quad (3.16)$$

La descarga ocurre a una distancia x pequeña entre la bola y el electrodo. Con lo cual podemos aproximar el campo local como: $E_r = V_b/x$, siendo V_b el potencial de la bola. Consideramos que la bola cuando llega al electrodo inferior está casi descargada o sea, que $Q_3 = 0$. La ecuación (3.3) permite entonces escribir

$$V_b = \frac{C_{13}}{C_{33}}V_0. \quad (3.17)$$

Considerando que el campo local E_r es uniforme: $E_r = V_b/x$, el factor de reforzamiento del campo entre la bola y la placa viene dado por

$$\beta_{(Q=0)} = \frac{E_r}{E_0} = \frac{d}{x} \frac{C_{13}}{C_{33}}, \quad (3.18)$$

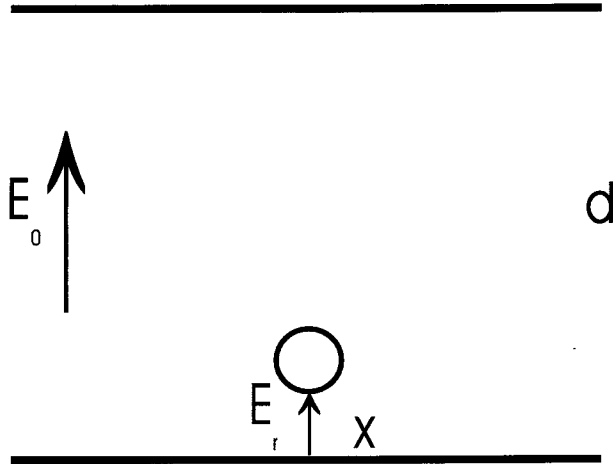


Figura 3.2: El campo local E_r entre la bola y el electrodo es mucho mayor que el campo aplicado E_0 .

y sustituyendo C_{13}/C_{33} por su expresión obtenemos

$$\beta_{(Q=0)} = \sqrt{\frac{R}{x}} \sqrt{2 + \frac{x}{R} \frac{S_2}{S_1}}. \quad (3.19)$$

Hemos computado el factor β en el caso de la bola descargada para un intervalo de x/R variando entre 10^{-8} y 10^{+1} . La figura 3.3 representa $\beta_{(Q=0)}$ en función de x/R en coordenadas logarítmicas. Se nota que β aumenta de manera progresiva para $x/R \leq 1$ después la variación se hace lineal en coordenadas logarítmicas con una pendiente ~ -0.91 . Este valor para la pendiente es muy comparable con el valor: ~ -0.85 obtenido por Tobazéon [Tobazéon, 1993, Tobazéon, 1996], cuyos cálculos se hicieron con un programa de simulación de carga (*CSP: Charge Simulation Program* [Levin et al., 1993]).

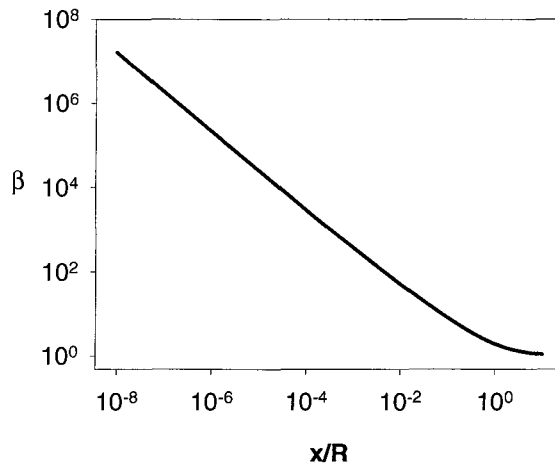


Figura 3.3: Representación en coordenadas logarítmicas del factor β de reforzamiento del campo local frente a x/R . Pendiente de la parte lineal ~ -0.905

3.1.4 Series S_1 y S_2

Haciendo uso de las ecuaciones (3.5) y (3.6), el cálculo numérico directo de las series S_1 y S_2 proporciona la razón de las cargas Q_a/Q_c .

Las series S_1 y S_2 son funciones únicamente de x/R . Por consiguiente se hace el cálculo de estas series para un rango de valores discretos de x/R entre 10^{-8} y 10^{+1} con un paso igual a $0.01 \times (x/R)$. Este intervalo de x/R implica un rango de valores para S_2/S_1 y de Q_a/Q_c que cubren ampliamente los valores experimentales que tenemos.

La figura 3.4 ilustra la variación de la razón S_2/S_1 en función de x/R . Se ve que S_2/S_1 decrece linealmente en coordenadas logarítmicas para valores de $x/R \leq 10^{-1}$, luego la dependencia se hace de forma no lineal para $x/R > 10^{-1}$.

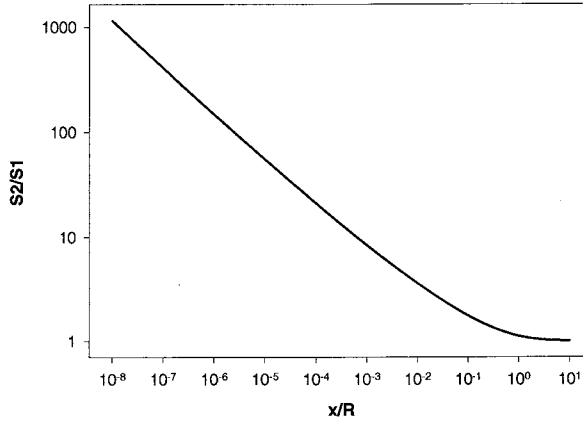


Figura 3.4: Representación en coordenadas logarítmicas de la razón S_2/S_1 frente a x/R . Pendiente de la parte lineal ≈ -0.5

Para la parte lineal, la dependencia es de la forma

$$\frac{S_2}{S_1} \propto \left(\frac{x}{R}\right)^{-k}, \quad (3.20)$$

donde k es la pendiente de esta parte lineal, y es ≈ -0.5 , luego nos queda que

$$\frac{S_2}{S_1} \propto \frac{1}{\sqrt{x/R}}. \quad (3.21)$$

El cociente entre cargas Q_a y Q_c de la expresión (3.15) se escribe entonces en función de x/R de la forma

$$\frac{Q_a}{Q_c} = \frac{R}{d} \sqrt{\frac{x}{R} \left(2 + \frac{x}{R}\right)} \frac{S_2}{S_1}. \quad (3.22)$$

Despreciando el término x/R frente a 2 en la ecuación (3.22), y teniendo cuenta de la proporcionalidad de S_1/S_2 a x/R (ecuación 3.21) llegamos al resultado que

$$\frac{Q_a}{Q_c} \propto \frac{R}{d}. \quad (3.23)$$

Así pues la carga transferida al circuito externo durante la descarga es sólo una fracción pequeña (del orden de un 10% en nuestro caso) de la carga transferida a la bola.

3.1.5 Resolución numérica del problema

Para comprobar los resultados obtenidos a partir de las expresiones analíticas de Q_a/Q_c , hemos desarrollado un programa de simulación de una bola entre dos electrodos. El programa utiliza un algoritmo comercial "FlexPDE" basado en el método de los elementos finitos. Así, se determinan numéricamente los distintos parámetros del problema: las cargas respectivas de los tres conductores, la razón de los coeficientes de capacidad C_{13}/C_{33} , el campo eléctrico general y el campo entre la bola y el electrodo.

La configuración del problema sometido al programa se presenta como sigue:

- **Simetría:** Como es obvio que el sistema presenta una simetría axial, entonces sólo se considera la mitad de la configuración real del problema (véase figura 3.5).
- **Dimensiones del sistema:** Se atribuye al sistema las dimensiones siguientes: Radio de las placas $R_{pl} = 2$, Radio de la bola $R = 0.125$, Distancia entre los electrodos $d = 1$, Razón de x/R varía en el intervalo $(10^{-3}, 10^{-1})$.
- **Condiciones de contorno:** El potencial del electrodo superior $V_1 = -1$. El potencial del electrodo inferior $V_2 = 0$. El potencial en la pared y en el eje de simetría cumple la condición: $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$.

Los valores de Q_a/Q_c conseguidos tanto por el programa de simulación de la bola entre placas como por el cálculo directo de las series S_1 y S_2 , para un mismo intervalo de x/R , se identifican hasta la tercera cifra, en el intervalo de x/R considerado.

El programa de simulación de la bola proporciona también valores del coeficiente de reforzamiento del campo entre la bola y el electrodo, β , que son comparables con los valores calculados.

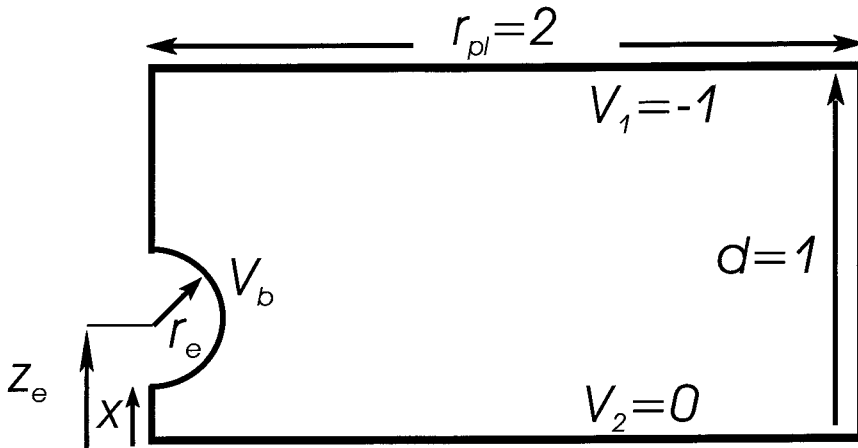


Figura 3.5: Configuración del modelo sometido al programa de simulación de la bola entre electrodos.

3.1.6 Valor asintótico para Q_a/Q_c y β

Con las expresiones asintóticas de S_1 y S_2 (véase apéndice B)

$$S_1 \rightarrow \frac{-\ln(\alpha/2)}{\alpha} \quad (3.24)$$

y

$$\frac{S_2}{S_1} \rightarrow \frac{-\pi^2}{3\sqrt{\frac{2x}{R}} \ln\left(\frac{x}{2R}\right)} \quad (3.25)$$

la razón Q_a/Q_c tendrá, para valores de x pequeños la forma siguiente

$$\frac{Q_a}{Q_c} = \frac{C_{13}}{C_{33}} = \frac{R}{d} \frac{-\pi^2}{3 \ln\left(\frac{x}{2R}\right)}. \quad (3.26)$$

La dependencia logarítmica en x y R es menos significativa que la dependencia en R y en d^{-1} que se espera sea dominante.

En cuanto al factor de reforzamiento del campo local, β , se expresará, para el caso en que la bola llega descargada al electrodo, de la forma

$$\beta_{(Q=0)} = \frac{\pi^2}{3\left(\frac{x}{R}\right) \ln\left(\frac{x}{2R}\right)}, \quad (3.27)$$

3.2 Estudio experimental de la carga

3.2.1 Pulsos de corriente

Cada vez que la bola entra en contacto con el electrodo, la transferencia de carga entre los dos conductores genera un pulso de corriente que se transfiere al circuito externo. Este pulso genera una caída de tensión a través de una resistencia puesta en serie con la celda. La caída de potencial está registrada mediante un ordenador a través de la tarjeta de adquisición. Los pulsos así obtenidos tienen la forma ilustrada en la figura 3.6. La forma de un pico con más detalle se ve en la figura 3.7. Se caracteriza por un tiempo de subida muy corto y exhibe un decaimiento exponencial según la forma

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}, \quad (3.28)$$

donde RC es una constante que depende del circuito externo. En efecto RC depende a la vez de las resistencias y capacidades de entrada del amplificador y del osciloscopio y, curiosamente, también de la capacidad de los cables de conexión¹. La anchura de los picos es del orden de 0.4 ms y 0.6 ms, según la celda utilizada.

La adquisición y análisis de estos pulsos se hace mediante un programa desarrollado en TestPoint. Primero se convierte la señal analógica en una señal discreta mediante el convertidor A/D , a la frecuencia máxima del convertidor que es de 100 kHz. Estando la señal muy afectada por el ruido, hemos intentado filtrarla usando el filtro incorporado en el amplificador. Pero, al operar de este modo resulta que la forma del pico se altera mucho y una parte del pico queda por debajo del eje del tiempo. Llevando a cabo una serie de medidas de la carga del pulso utilizando este filtro, resulta que esta carga es menor de lo esperado. Con lo cual hemos optado por filtrar la señal numéricamente con el programa de TestPoint.

¹Gracias a Dr. Francisco Medina por aclarar este punto.

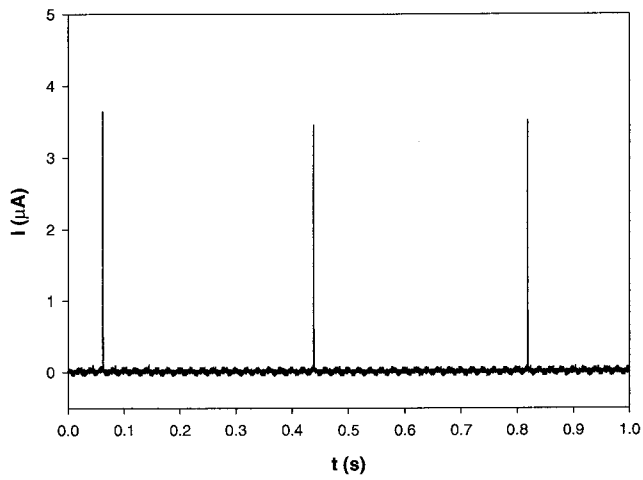


Figura 3.6: Pulsos de corriente registrados en el circuito.

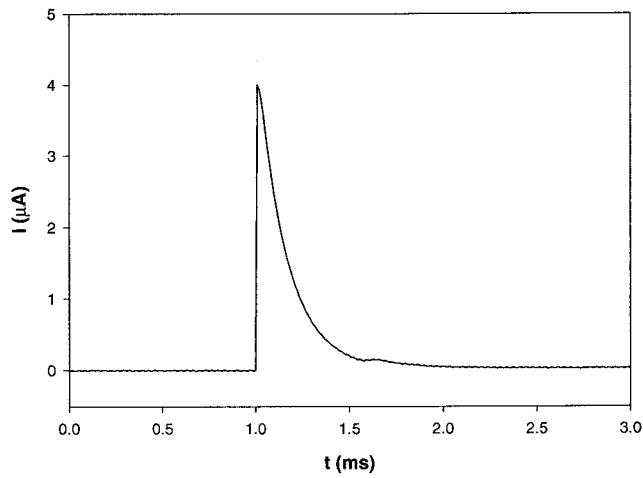


Figura 3.7: Forma de un pico de corriente que acompaña el rebote de la bola.

3.2.2 Carga transferida al circuito externo

Aunque el estudio de los picos registrados en el osciloscopio no puede proporcionar una medida precisa de la carga, es posible evaluar su orden de magnitud. De cierto, siendo el decaimiento de la corriente exponencial, uno puede obtener una aproximación de la carga integrando analíticamente la ecuación (3.28) sobre el intervalo Δt que corresponde a la anchura del pico. Para eso se calculan las constantes I_0 y RC como sigue.

Si denominamos V_{max} la tensión máxima del pico, podemos escribir

$$I_0 = \frac{V_{max}}{R_e}, \quad (3.29)$$

siendo $R_e = 1 \text{ M}\Omega$, la resistencia de entrada del osciloscopio. En cuanto a la constante RC , se deduce a partir del tiempo correspondiente al valor de la corriente: $I_{RC} = I_0/e \approx 0.37I_0$.

En el caso de la celda de 4 cm entre placas, RC es del orden 0.15 ms. Este valor cambia al cambiar de celda de prueba. La carga estimada a partir de la señal registrada en el osciloscopio viene entonces dada por

$$Q_{osc} = \frac{V_{max}}{R_e} RC. \quad (3.30)$$

Por otro lado, la adquisición de la señal en el ordenador se hace sobre un intervalo de 300 puntos a una frecuencia de 100 kHz, lo que corresponde a un intervalo de tiempo igual a 3 ms. Este tiempo es mucho menor que el tiempo de bote, por consiguiente, hay que registrar sólo el intervalo de tiempo en torno del pico. Para seleccionar los picos, se inicia la adquisición cuando la señal supera al nivel del ruido que modula la señal. Sin embargo, a veces, se inicia la adquisición con un pequeño retraso y se pierde una parte del pico, debido al hecho de que el tiempo de subida del pico es muy corto y la frecuencia de adquisición limitada. Por consiguiente, hay que buscar un máximo para la carga sobre muchos picos. Para comprobar que la carga medida corresponde a la que realmente lleva el pulso de corriente, hemos estimado también la integral del pico registrado en el osciloscopio según la fórmula (3.30).

Para cada valor de la tensión aplicada, el programa hace un promedio de 10

hasta 20 series de medidas de 300 picos cada una, según se tarda o no en lograr la carga máxima. La salida del programa proporciona los valores, para cada pico registrado, de: Q_a como la integral numérica del pico, Q_{osc} como la carga estimada a partir de la fórmula (3.30), RC la constante de decaimiento, y I_{max} el valor máximo de la corriente. Al final de cada serie de medidas se proporcionan los máximos, sobre todos los picos, de Q_a , Q_{osc} y I_{max} , y el promedio sobre RC . Además, una representación gráfica de los picos se proporciona a medida que se adquieren.

Otro problema surge al estudiar los picos. Se nota, a veces, que la bola no se carga de manera idéntica en cada bote. Esta discrepancia varía también de un valor de la tensión a otro. Esto puede ser debido a las arrugas que existen en la superficie de la bola y que son un factor predominante en la iniciación de la descarga entre la bola y el electrodo. Por lo que, si la bola presenta al electrodo un elemento de superficie menos uniforme que otro, el campo local crece más y la descarga se inicia a una distancia mayor, y por consiguiente provoca una carga mayor. Por otro lado, mayor es la tensión aplicada, más tiene la bola oportunidad de engendrar giros sobre sí misma presentando cada vez un lado distinto al acercarse al electrodo y así cada pico lleva una carga ligeramente distinta de los demás picos. Tal movimiento ha sido observado en el caso de la bola de radio $R = 2.33$ mm en Isopar-L. Los giros de la bola sobre sí misma tenían una frecuencia grande y estaban acompañados de un desplazamiento relativamente lento sobre la placa. En este caso la conductividad del líquido es tan grande que la bola no puede botar y sólo puede moverse sobre la placa.

Todos estos factores obligan a que el tiempo del experimento sea bastante largo, lo que es causa de una variación apreciable en la conductividad del líquido en muchos casos. En esos casos, las tablas 2.3.1 y 2.2 muestran los valores de la conductividad y del tiempo de relajación medidos antes y después del experimento. Para los cálculos de la carga que desarrollamos después y que se relacionan con el tiempo de relajación, tomamos el promedio de estos valores.

Para eliminar el ruido que afecta la señal en la carga medida, se filtra el pico numéricamente mediante el programa desarrollado en TestPoint, y después se integra sobre un intervalo igual a la anchura invariable del pico registrada por el osciloscopio. En la mayoría de los casos hemos encontrado que la carga estimada

Q_{osc} (ecuación (3.30)), y la medida Q_a por la integral numérica, coinciden en el máximo sobre las series de picos registrados. Sin embargo los valores estimados tienen más dispersión que los medidos, por consiguiente, sólo tendremos cuenta de la carga medida.

La carga Q_a representa la carga transferida al circuito externo, que es precisamente la variación en la carga del electrodo antes y después del impacto de la bola. En la figura 3.8 se ven ilustradas las cargas medidas para distintas bolas y líquidos. El error cometido en la medida es del orden de $2 \sim 3$ pC.

Antes que la bola llegue a tocar el electrodo, se produce una descarga a una distancia x pequeña, debida al reforzamiento del campo local entre ambos conductores. La descarga vuelve conductor al líquido localmente y pone la bola al mismo potencial que el electrodo suministrando a la bola una carga Q_c , que le falta para recobrar su carga inicial Q_0 . El cociente viene dado por la ecuación (3.15).

3.2.3 Carga medida frente a carga efectiva

La carga que lleva la bola en un instante t está dada por: $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$. Cuando se produce la descarga, la bola recibe una carga $Q_c = Q_0(1 - e^{-\Delta t_0/\tau})$. Sustituyendo Q_0 por su expresión (2.20), esta carga queda como

$$Q_c = 4\pi\epsilon_l R^2 \left(\frac{\pi^2}{6}\right) E_0 (1 - e^{-\Delta t_0/\tau}) \quad (3.31)$$

La carga que se transmite al circuito externo es sólo una fracción de esta carga.

Durante el movimiento de la bola hacia el electrodo, una carga imagen se induce por la bola en éste. Esta carga inducida es función de la distancia entre la bola y la placa conductora (véase figura 3.9). Estando sometido a un potencial constante, el electrodo saca del circuito externo la carga necesaria para mantener su potencial. Este proceso se hace de manera continua mientras la bola se está moviendo. Y dado que el tiempo de vuelo es mucho mayor que el de la descarga, esta variación de carga es despreciable frente a la transferencia de carga que tiene lugar durante el tiempo muy corto de la descarga. Así, cuando la bola se acerca al electrodo, éste tiene casi toda la carga necesaria para que la car-

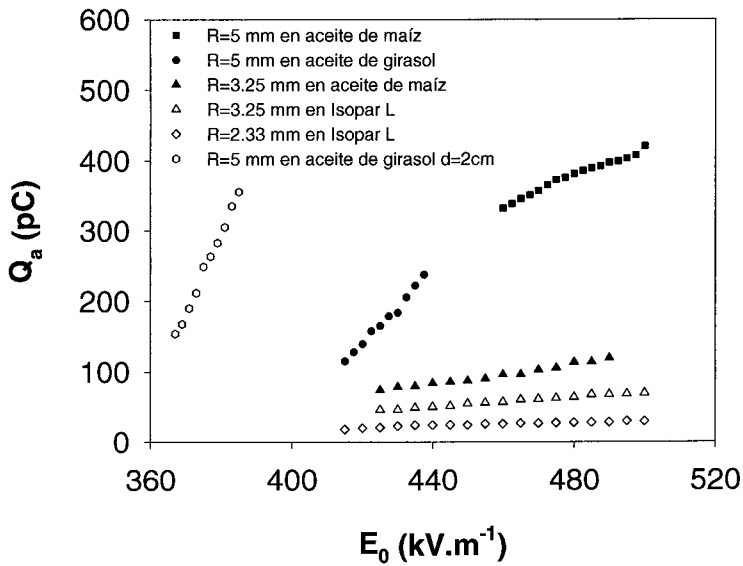


Figura 3.8: Carga medida Q_a frente al campo eléctrico, para distintas bolas y líquidos. En todos los casos: $d = 4$ cm, salvo cuando está indicado.

ga total del conjunto electrodo+bola sea tal que el potencial correspondiente sea nulo. Resulta, entonces, que la carga que se mide Q_a sólo representa un factor pequeño ($< 10\%$) de la carga necesaria a la bola Q_c . Este resultado concuerda con lo obtenido por Tobazéon [Tobazéon, 1996].

De otro lado, siendo la carga inicial de la bola Q_0 proporcional a ϵ_l y a R^2 y que $Q_a/Q_c \propto R/d$ (3.23), se espera que la carga medida Q_a sea proporcional a ϵ_l , R^3 y d . Nuestros datos concuerdan con este resultado. De cierto, la figura 3.8 muestra claramente, siendo la permitividad del aceite de maíz 1.5 veces mayor que la del Isopar-L, que una misma bola en aceite de maíz produce un pulso de corriente ~ 1.5 veces mayor que lo que produce en Isopar-L.

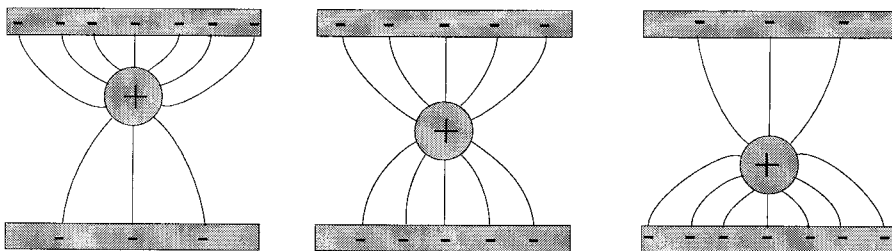


Figura 3.9: Inducción de carga en los electrodos debido al movimiento de una bola cargada.

En cuanto a la dependencia en la distancia entre electrodos, se comprueba bien el hecho de que Q_a varía como el inverso de la distancia entre los electrodos. De cierto, la carga Q_a medida para la distancia entre electrodos $d = 2$ cm y la bola de radio $R = 5$ mm es tal que la razón Q_a/Q_c es casi el doble de aquella que corresponde a la misma bola, el mismo líquido y una distancia entre electrodos igual a $d = 4$ cm (véase figura 3.10). Este resultado confirma la predicción de que Q_a/Q_c es proporcional a R/d .

A partir de la expresión de Q_c (3.31) y de la expresión de Q_a/Q_c (3.22) tenemos la expresión de la carga Q_a transferida al circuito externo como

$$Q_a = \frac{2\pi^3\epsilon_l R^3}{3d} E_0 (1 - e^{-\Delta t/\tau}) \sqrt{\frac{x}{R} \left(2 + \frac{x}{R}\right)} \frac{S_2}{S_1} \quad (3.32)$$

Sólo botes bastante grandes dan pulsos medibles, con lo cual podemos despreciar el término $e^{-\Delta t/\tau}$. Por consiguiente tendremos

$$Q_a = \frac{\epsilon_l R^3}{d} E_0 f\left(\frac{x}{R}\right) \quad (3.33)$$

donde

$$f\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{2}{3}\pi^3 \sqrt{\frac{x}{R} \left(2 + \frac{x}{R}\right)} \frac{S_2}{S_1} \quad (3.34)$$

es una función de x/R pero con dependencia más bien débil. Hemos representado en la figura 3.11, la cantidad $Q_a d / (R^3 \epsilon_l)$ en función de E_0 para distintas bo-

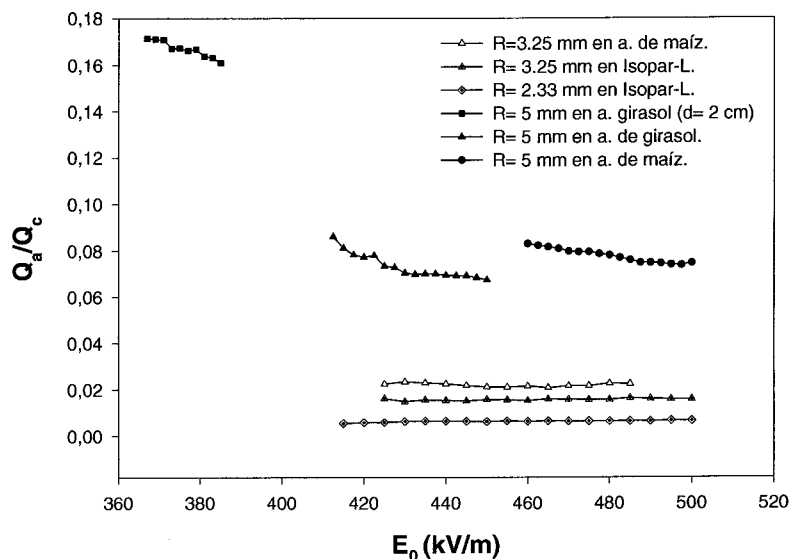


Figura 3.10: Razón Q_a/Q_c frente al campo eléctrico. En todos los casos: $d = 4$ cm, salvo cuando está indicado.

las y líquidos. Comparando con la figura 3.8 se ve que las curvas obtenidas para distintas bolas y líquidos se superponen. Para dar una idea de cómo la dependencia en x afecta esta representación, podemos usar las expresiones asintóticas de S_1 y S_2 para $x/R \rightarrow 0$. En esta límite $f(x/R)$ se comporta como

$$f\left(\frac{x}{R}\right) = \frac{2\pi^5}{9} \frac{1}{\ln(2R/x)}. \quad (3.35)$$

Con lo cual obtenemos $f(0.001) = 8.95$, $f(0.01) = 12.84$ y $f(0.01) = 22.7$. La pendiente de la línea que hemos dibujado en la gráfica 3.11 está entre 20 y 30, indicando un valor para x/R entre 0.01 y 0.1. Concluimos que $Q_a d / (R^3 \epsilon_l)$ es proporcional al campo aplicado independientemente del radio de la bola, de las propiedades del líquido o de la distancia entre electrodos. La única dependencia que queda es la dependencia en x , distancia entre la bola y el electrodo a la cual

se produce la descarga.

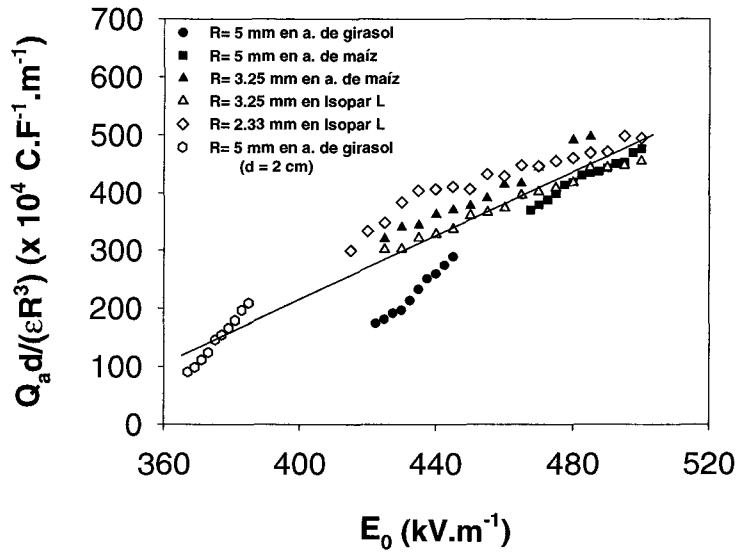


Figura 3.11: La representación del término $Q_a d / \epsilon_l R^3$ frente al campo aplicado muestra que Q_a sólo depende de d , ϵ_l y R^3 .

3.2.4 Distancia a la cual se produce la descarga

La distancia x a la cual se induce la descarga se calcula del modo siguiente. Para cada valor del campo aplicado E_0 se calcula la razón Q_a/Q_c de la carga medida del pico y de

$$Q_c = (1 - e^{-t/\tau}) 4\pi\epsilon_l R^2 \frac{\pi^2}{6} E_0. \quad (3.36)$$

Luego la ecuación (3.22) permite, una vez conocidas las series S_1 y S_2 , obtener una representación gráfica de Q_a/Q_c en función de x/R . La interpo-

lación de los valores experimentales de Q_a/Q_c en esta gráfica permite obtener los valores de x/R , y luego de x para cada valor de la tensión.

La figura 3.12 ilustra la variación del parámetro x en función del campo eléctrico. Los valores así obtenidos tienen mucha dispersión, primero debido al error cometido al interpolar los valores de Q_a/Q_c , luego, al hecho que el parámetro x es muy sensible a las arrugas en la superficie de la bola. Estas arrugas juegan un papel importante respecto a la inducción de la descarga, puesto que el campo eléctrico se ve intensificado en sus extremidades. Junto a esto hay que tener cuenta del efecto de las impurezas y burbujas de aire que se pueden formar dentro del líquido, y que intervienen también en el proceso.

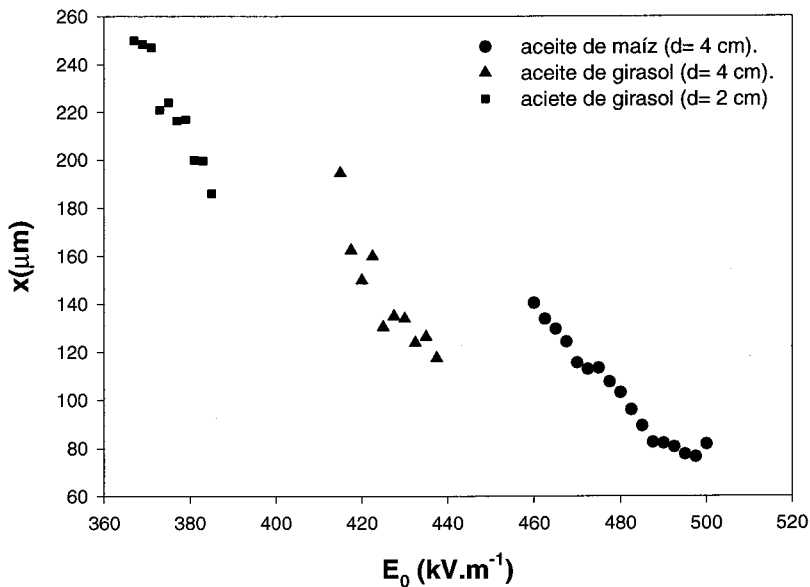


Figura 3.12: Distancia x , a la cual se inicia la descarga entre la bola y el electrodo frente a E_0 . Aquí se representan los valores calculados para la bola de radio $R = 5$ mm para la cual se nota más el decrecimiento de x al aumentar E_0 .

No obstante, los resultados obtenidos permiten dar un orden de magnitud de esta distancia. La tabla 3.1 da cuenta de los intervalos en que varía x para cada bola y líquido, así como del orden de magnitud del campo de ruptura E_r calculado a partir de los valores de β correspondientes a estos valores de x .

En la representación de x frente al campo aplicado, se ve que x decrece al aumentar el campo, especialmente para la bola de radio $R = 5$ mm. Sin embargo, uno esperaría lo contrario. Cuanto mayor es E_0 menor ha de ser el reforzamiento β necesario para obtener la ruptura y por tanto, mayor sería el valor de x al que se produce.

Una posible explicación del resultado experimental puede ser la posibilidad de que haya inyección de carga desde el electrodo inferior. Una inyección que sea cada vez más fuerte mientras aumente el campo eléctrico. Con lo cual la bola, al acercarse del electrodo, recibiría una fracción de carga antes de que se produzca la descarga. De este modo el valor real de Q_c sería menor que aquel que nosotros calculamos.

Los resultados obtenidos muestran que para una misma bola, sea la de radio $R = 3.25$ mm, los valores de x son mayores en el Isopar-L que en el aceite de maíz. De otro lado, para un mismo líquido, el aceite de maíz, mayor es x cuando mayor es el radio de la bola. Con lo que x tiene tendencia a aumentar al bajar la permitividad del líquido o al aumentar el radio de la bola.

Después de hallar los valores de x , hemos evaluado el tiempo que tardaría la bola en recorrer esta distancia después de iniciar la descarga. Este tiempo resulta comparable con el tiempo de inercia $t_i = m_e / (6\pi\rho_l\nu R)$, por lo que la bola prosigue su movimiento hacia el electrodo, después de la descarga, antes de volver a subir. Sin embargo, para algunas muestras de líquidos, posiblemente muy afectados por las impurezas, y para un movimiento de la bola bastante lento, hemos notado que la bola se mueve sin tocar el electrodo. A veces, cuando se alcanza el equilibrio entre las fuerzas, la bola queda quieta a una distancia de $0.5 \sim 1$ mm.

Líquido	R (mm)	d (cm)	β	E_r (MV/m)	x (μ m)
a. maíz	5.00	4	15.5 – 25.5	7.1 – 12.5	80 – 140
a. girasol	5.00	2	13.7 – 17	5.1 – 6.6	190 – 250
a. maíz	3.25	4	4117 – 16900	1750 – 8281	0.05 – 0.02

Tabla 3.1: Algunos valores de β , x y del campo local E_r entre la bola y el electrodo.

3.3 Conclusión

El estudio experimental de la carga revela que la carga transferida al circuito en cada impacto de la bola con el electrodo, representa sólo una pequeña parte de la carga que debe ser transferida a la bola durante la descarga. Esta carga presenta una dependencia en ϵ , d y en R^3 . Los datos experimentales, para distintos líquidos y para bolas de radios diferentes, apoyan este resultado.

Hemos evaluado también el orden de magnitud de la distancia x , a la cual se inicia la descarga entre la bola y el electrodo, así como el campo de ruptura del líquido. El parámetro x es muy sensible tanto a la forma de la partícula en movimiento como a la existencia de impurezas, inevitables, en el seno del líquido. El dispositivo experimental utilizado en nuestro caso no está dotado de sistema de filtración de líquido. Para mejorar las medidas de este parámetro hay que utilizar un dispositivo de filtración del líquido durante el experimento, y usar bolas con superficie más lisa.

Capítulo 4

Dinámica y deformación de una gota en un campo eléctrico estático

4.1 Introducción

En el capítulo 2 hemos considerado la dinámica de una partícula sólida entre dos electrodos bajo efecto del campo eléctrico. La dinámica resultó depender de muchos parámetros. Los más importantes eran esencialmente el tamaño de la partícula y las características del líquido de la fase continua. Dos cantidades destacables surgían en ese estudio: el umbral de tensión necesario para levantar la partícula contra la fuerza de la gravedad y el tiempo de relajación del líquido.

El caso de una partícula fluida (una gota o una burbuja), muestra un comportamiento mucho más complejo, debido a su deformación y posible ruptura. De hecho, una gota de líquido rodeada de otro líquido está sujeta a una deformación cuando se le aplica un campo eléctrico. Taylor [Taylor, 1966] estudió la deformación de una gota en un campo eléctrico y dio una descripción de la relación entre la pequeña deformación de la gota y el campo aplicado. La teoría de pequeñas deformaciones permite así la determinación de la tensión superficial γ .

En este capítulo vamos a estudiar la deformación y la dinámica de una gota de agua sometida a un campo eléctrico estático. Investigaremos la deformación de la gota en contacto con el electrodo (antes del despegue) y durante el vuelo, y el umbral de tensión necesaria para el despegue de la gota. Luego estudiaremos la dinámica de los botes comprobando la validez del modelo teórico propuesto en el capítulo 2 para el tiempo de botes, en el caso de pequeñas deformaciones. Al final estudiaremos el efecto del material de que están hechos los electrodos, sobre la deformación y el proceso de despegue de la gota.

4.2 Dispositivo experimental

El dispositivo experimental utilizado es el descrito en el capítulo 2, mejorado para permitir las tomas de imágenes y la grabación vídeo. Hemos utilizado la celda de dimensiones $70 \times 70 \times 50$ mm y de 2 cm entre electrodos. Siempre con el dispositivo para registrar los pulsos eléctricos.

La partícula fluida bajo estudio es una gota de agua destilada. El volumen de la gota está controlado con una micropipeta, y se pone directamente sobre el electrodo inmerso en la fase continua. Hemos trabajado en la mayoría de los casos con una gota de volumen $10 \mu\text{l}$, pues era el volumen más adecuado para tener botes sin ruptura de la gota. Este volumen corresponde a un radio de la gota $R = 1.337$ mm. Como fase continua hemos usado un aceite de maíz de densidad $\rho = 916 \text{ kg/m}^3$, permitividad $\epsilon_l = 26.9 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ y conductividad $\sigma \simeq 19 \times 10^{-12} \text{ S/m}$.

Para la grabación vídeo, hemos utilizado una cámara rápida VDS modelo HCC1000, lo que permite sacar imágenes o secuencias de imágenes, en formato mapa de bits (*.bmp*) con una resolución de 1024×1024 píxeles. Hemos hecho uso de un software, “ImageJ”, y programas desarrollados en “Matlab” para procesar las imágenes y trazar los perfiles de la gota.

Para aclarar el efecto del tipo de material del electrodo, hemos utilizado, además del electrodo de aluminio original de la celda, otros tres electrodos. Estos electrodos son de cobre, acero y titanio. Son discos del mismo radio que el del electrodo de aluminio fijo en la celda. Así se pueden poner sobre el electrodo de

la celda. Los electrodos de cobre y acero tienen un espesor de 1 mm, mientras el de titanio un espesor de 3 mm.

La cámara está colocado a un nivel ligeramente superior al del electrodo sobre el cual está colocada la gota (unos 3° por encima del plano horizontal del electrodo). Así, se puede distinguir la línea de contacto de la gota con la superficie del electrodo con nitidez. Si no se hiciera así la línea de contacto quedaría tapada por el borde del electrodo que aparece en el primer plano, con lo cual la estimación de la línea y el ángulo de contacto podrían resultar erróneos.

4.3 Proceso de despegue de la gota

El movimiento de una partícula sólida (una esfera metálica) está inducido por la fuerza eléctrica que depende de la carga que adquiere por contacto con el electrodo sobre el cual está inicialmente en reposo. El movimiento no es posible hasta que el campo aplicado supere un umbral en el cual la fuerza eléctrica supera la gravedad. Así para una partícula sólida la fuerza eléctrica sólo actúa contra la gravedad tanto en el proceso del primer despegue como durante los botes de la partícula.

En el caso de una gota, el proceso de despegue es un poco distinto debido a la entrada en juego de la fuerza de adhesión, que es más importante en este caso. Con lo que la diferencia entre partículas sólidas y líquidas, estriba en el proceso del primer despegue. Mientras que para una partícula sólida la adhesión es despreciable.¹ En el caso de una gota, la adhesión impide el despegue. Para conseguir que la gota vuele, hay que aplicar una fuerza eléctrica capaz de superar a la vez, la gravedad y la adhesión. Esto significa que el despegue de la gota se produce para una fuerza eléctrica mayor que en el caso de una partícula sólida. Por otra parte, el hecho de que la gota sea deformable hace que, al aumentar la tensión, la gota se deforme cada vez más antes de alcanzar el umbral para el despegue.

La energía de adhesión es proporcional al área de contacto entre la gota y el

¹Para partículas microscópicas la fuerza de adhesión entre la partícula y el electrodo debe ser tomada en cuenta.

electrodo. Mayor es el área de contacto mayor es la adhesión. Para áreas de contacto pequeñas, es posible levantar la gota contra la gravedad y la adhesión con la aplicación de una tensión adecuada. En el caso de áreas de contacto bastante grandes, la fuerza de adhesión puede llegar a impedir totalmente el despegue de la gota. El aumento de la tensión sólo conduce entonces a la ruptura de la gota. En este caso la gota empieza a eyectar un choro por la parte de arriba. El área de contacto depende del material con el cual está hecho el electrodo.

Cuando está colocada sobre el electrodo, la gota se reúne con el metal con un ángulo de contacto que depende de los valores de las distintas tensiones de superficie en juego. En efecto cada una de estas tensiones tira de la línea de contacto, línea de coexistencia de las tres fases (metal-agua-aceite) para reducir el área de la interfase que le esté asociada. El ángulo de contacto es pues una propiedad local, que deducimos del equilibrio de estas tensiones (ley de Young).

El ángulo de contacto se expresa en función de las tensiones interfaciales entre los distintos medios: agua-aceite, agua-metal y aceite-metal como sigue

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{23} - \gamma_{13}}{\gamma_{12}} \quad (4.1)$$

siendo γ_{ij} la tensión interfacial entre dos medios i e j ; 1 corresponde al agua, 2 al aceite y 3 al metal. (ver figura 4.1). Una superficie *hidrófoba* (o *no mojadora*) es por definición una superficie por la cual el ángulo de contacto (respecto al agua, y en aire) es mayor que 90° . En este caso la gota toma una forma esférica. El metal en aire es normalmente mojado, por ejemplo el acero tiene un ángulo de contacto $\theta = 34.5^\circ$ y el titanio 21.0° . La presencia del aceite disminuye mucho la mojabilidad de la superficie. Así se pueden conseguir formas casi esféricas para la gota con algunos tipos de metales como por ejemplo el acero y el cobre.

Un punto importante es que aún con una superficie puramente hidrófoba (ángulo de contacto de 180°) existe siempre una pequeña zona de contacto entre el sólido y la gota. En efecto, la gota se deforma un poco debido a su peso de manera que su centro de gravedad se ve un poco bajado. La tensión superficial del líquido se opone a esta deformación.

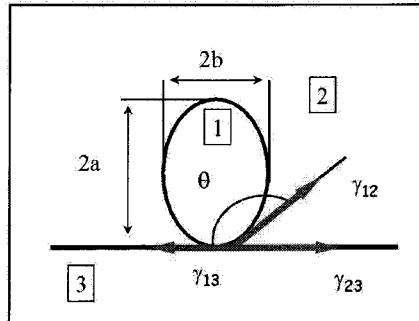


Figura 4.1: Una gota en reposo sobre un electrodo y sujeta a un campo eléctrico adquiere una forma *prolata*. Se aproxima a una elipse de semiejes a y b , y forma un ángulo de contacto θ con el electrodo. Los números 1, 2 y 3 se refieren a los distintos medios: respectivamente agua, aceite y metal.

4.3.1 Caso de un electrodo poco mojado

Primero vamos a estudiar el caso de una gota sobre un electrodo muy poco mojado, que permita el despegue de la gota. Esto es posible con un electrodo de acero o de cobre. El proceso de despegue de la gota inicialmente en contacto con el electrodo se ilustra en la figura 4.2. Se ve como la gota sigue deformándose mientras se aumenta la tensión aplicada (primeras fotos). Al alcanzar la tensión de despegue V_{des} , la gota vuela y recupera una forma elipsoidal con menos deformación que antes del despegue (última foto).

4.3.2 Campo de despegue E_{des}

Para hallar el campo E_{des} mínimo para el cual la gota puede despegar, tenemos que considerar la fuerza de adhesión de la gota al electrodo. Esta fuerza se expresa como

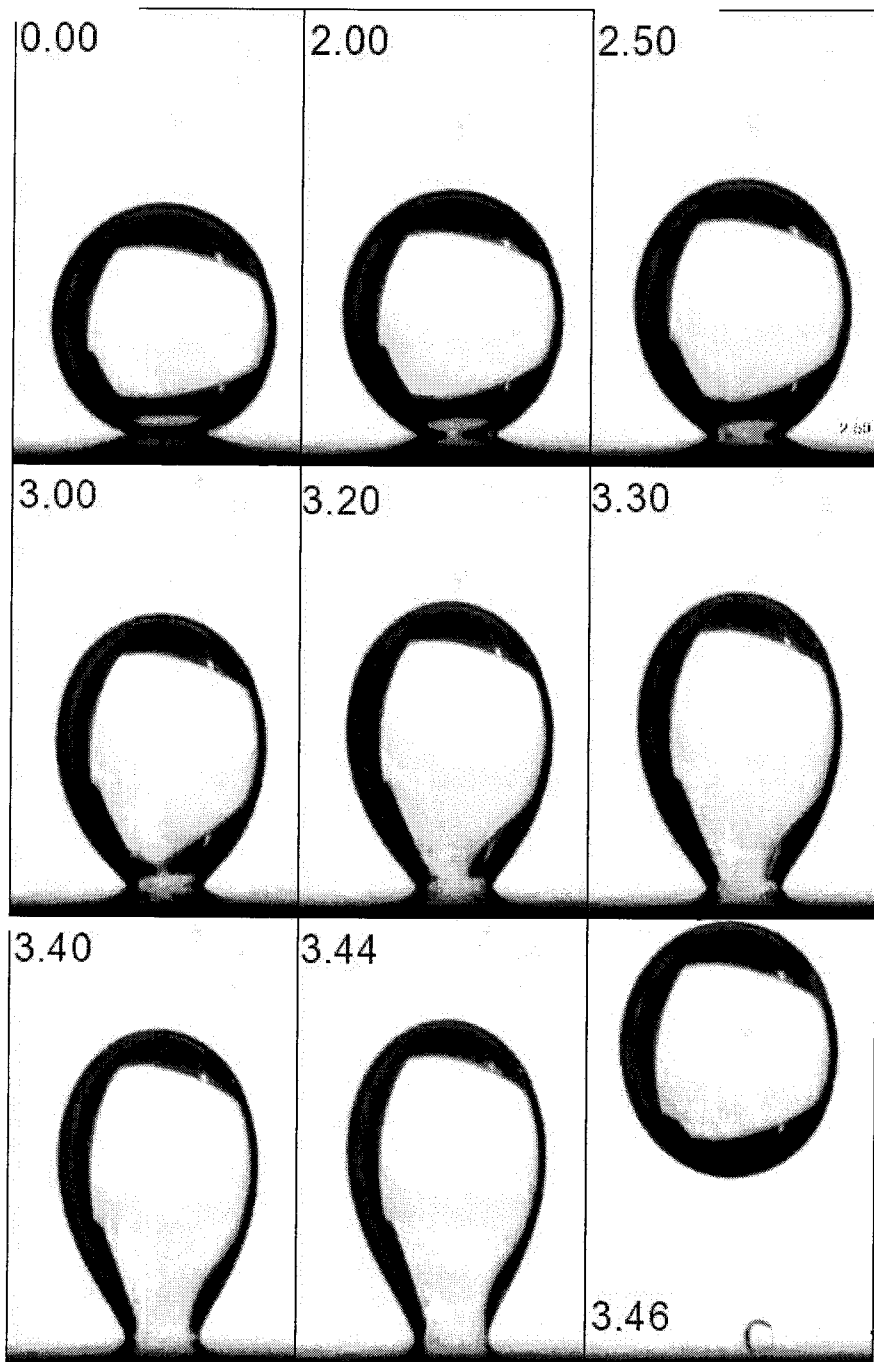


Figura 4.2: Una gota de radio 1.34 mm en reposo sobre un electrodo de acero y sujeta a un campo eléctrico. La tensión aplicada se indica en cada foto (en kV). En la última foto se ve la gota justo después del primer despegue.

$$F_a = 2\pi\gamma_{12}r\text{sen}\theta \quad (4.2)$$

donde θ es el ángulo de contacto, γ_{12} la tensión superficial entre el aceite y el agua, y r el radio del área de contacto, que es circular evidentemente.

El despegue de la gota requiere una fuerza eléctrica igual a la suma de las fuerzas de adhesión y de la gravedad, es decir

$$Q_0 E_{des} = 2\pi\gamma_{12}r\text{sen}\theta + (m - m_l)g. \quad (4.3)$$

Supongamos que la carga inicial de la gota es aquella de la gota esférica

$$Q_0 = \frac{2}{3}\pi^3\epsilon_l R^2 E_0 \quad (4.4)$$

La estimación del campo E_{des} necesario para despegar la gota puede, en este caso, ser expresada como sigue

$$E_{des}^2 = \frac{\pi^2 r \gamma_{12} \text{sen}\theta + (m - m_l)g}{\frac{2}{3}\pi^3 \epsilon_l R^2}. \quad (4.5)$$

El estudio de la deformación de la gota en vuelo (ver sección 4.4.1.2), permite estimar la tensión superficial que es del orden de 1.0 mN/m. Con lo cual tenemos una estimación del campo mínimo de despegue: $E_{des} = 1.63 \times 10^5$ V/m. El valor encontrado experimentalmente es $E_{des}^{exp} = 1.71 \times 10^5$ V/m, que es próximo al valor teórico estimado.

De todos modos, la deformación y el despegue de una gota pegada al electrodo es un proceso más complicado que el modelo simplificado propuesto arriba. A pesar de ello la estimación obtenida es bastante satisfactoria.

4.4 Deformación de la gota

Taylor [Taylor, 1964] estudió la deformación de una gota conductora libre en presencia de un campo eléctrico. La expresión encontrada por Taylor (véase el apéndice C) es

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{9}{4}N_e \quad (4.6)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente, de la elipse que aproxima la gota deformada; y N_e representa el número de Bond eléctrico, y se define como

$$N_e = \frac{\epsilon_l R E_0^2}{2\gamma_{12}} \quad (4.7)$$

El caso de una gota en reposo sobre un electrodo es más complejo. En ausencia del campo eléctrico y cuando la fuerza de la gravedad es pequeña frente a la tensión superficial, las formas de equilibrio de la gota en reposo sobre el electrodo, son partes de esferas. Estas formas están parametrizadas con un sólo parámetro d , o mejor con su razón, $D=d/R$, al radio de la esfera. Siendo d la distancia entre el centro de la esfera y el electrodo. (Véase figura 4.4). El volumen de la gota se expresa en función de D como

$$V_0 = \frac{\pi}{3}(1 + D)^2(2 - D). \quad (4.8)$$

Así, cuando $D = 0$ la gota es una hemiesfera, cuando $D = 1$ la esfera toca el electrodo en un punto, y $D = -1$ corresponde a un volumen nulo.

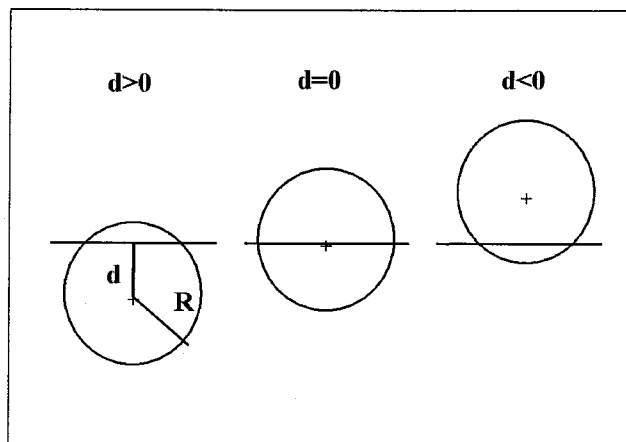


Figura 4.3: Formas de equilibrio de una gota en reposo sobre un electrodo en ausencia del campo y cuando el efecto de la gravedad es pequeño respecto a la tensión superficial.

El caso $d = 0$, debido a la simetría del problema eléctrico, es idéntico al de la gota libre estudiada por Taylor. Para $d \neq 0$ la forma de la gota debe determinarse numéricamente [Basaran and Scriven, 1990], a partir del equilibrio

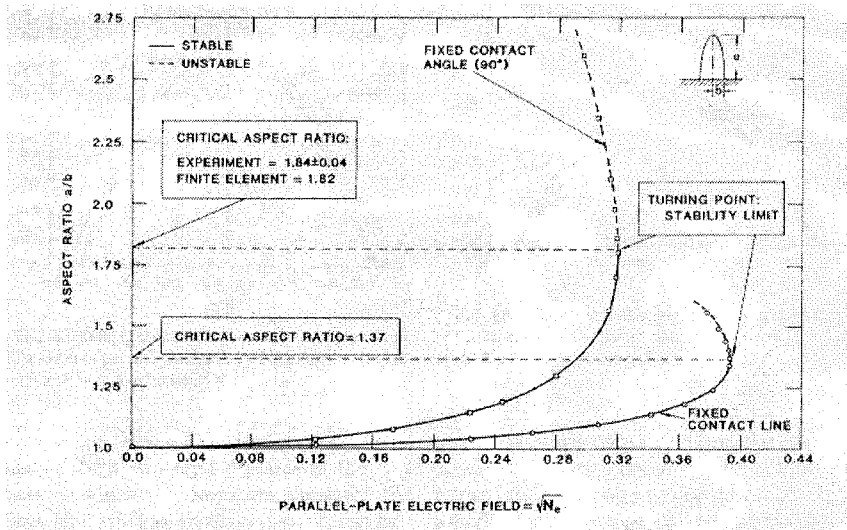


Figura 4.4: Variación de la razón a/b en función del campo entre electrodos, en forma de la raíz cuadrada del número de Bond. Se desprecia aquí el efecto de la gravedad.

de las tensiones que actúan sobre la superficie: eléctricas, capilares y, en su caso, gravitatorias.

En general la razón a/b aumenta de manera no lineal en función de N_e , y tiene un punto de retorno para un valor crítico de N_e . En este punto la solución de la forma de equilibrio de la gota se hace inestable, y la gota se rompe, bien eyectando un chorro por la parte de arriba hacia el electrodo superior, o bien despegando como en el caso de la figura 4.2. La ruptura de la gota ocurre para $a/b=1.37$ para una línea de contacto fija ($b=$ constante), y 1.82 para un ángulo de contacto fijo ($\theta = 90^\circ$). (Véase figura 4.4 sacada del artículo de Basaran [Basaran and Scriven, 1990]).

4.4.1 Resultados experimentales

4.4.1.1 Deformación antes del despegue

Como hemos mencionado al principio, cuando la gota está en contacto con el electrodo, su deformación bajo efecto del campo eléctrico depende mucho del la

magnitud de la fuerza de adhesión. Así el primer parámetro crucial que gobierna el proceso es el área de contacto. Para que el despegue de la gota sea posible, el área de contacto debe de ser pequeña. Esto involucra otro parámetro también de interés que es el ángulo de contacto. Un área de contacto pequeño es equivalente a un ángulo de contacto grande.

Consideremos el caso de un electrodo, el de acero por ejemplo, que permite un área de contacto inicial suficientemente pequeña para que se produzca el despegue de la gota para una tensión aplicada adecuada. Surge entonces un problema de interés: La deformación se produce ¿a ángulo de contacto constante? o ¿con la línea de contacto constante? En principio cabe esperar que si los valores de γ_{ij} no varían y el electrodo es muy liso, sea el ángulo de contacto el que no varíe.

Hemos grabado los perfiles de la gota para varios valores de la tensión con ayuda del microscopio. Las imágenes están luego procesadas con algoritmos de detección de bordes (del tipo *Canny* por ejemplo). Después se calculan, el área y el ángulo de contacto. Los resultados se ven en la figura 4.5 que representa la variación del diámetro de contacto y en la figura 4.6 que representa la variación del ángulo de contacto. Tanto el área como el ángulo de contacto disminuyen cuando el campo eléctrico aplicado aumenta. La variación del ángulo es, en principio, sorprendente. Si la tensión superficial disminuyera con la tensión eléctrica se esperaría que el ángulo de contacto aumentase.

Los resultados experimentales para la deformación de la gota en reposo sobre un electrodo de acero están representados en la figura 4.7. Se ve que la variación de la deformación con el cuadrado del campo no es lineal, y tiene una forma cualitativamente comparable a la de la figura 4.4. La comparación cuantitativa no es posible debido a la falta de constancia del ángulo de contacto o de la línea de contacto.

4.4.1.2 Deformación en vuelo

Cuando despega la gota al aumentar la tensión, dos escenarios son posibles. Uno es que la gota logra, para una tensión suficiente, despegar entera. Es decir que la gota despega con todo su volumen. El segundo es que la gota despega con la

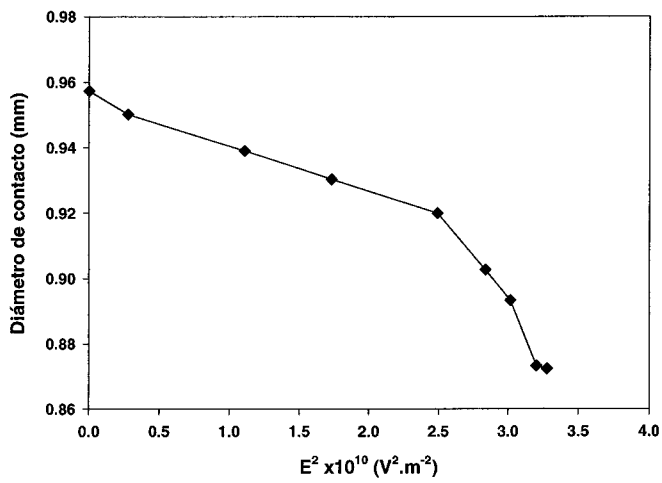


Figura 4.5: Variación del diámetro de contacto de una gota de agua ($R = 1.34 \text{ mm}$) inicialmente en reposo sobre un electrodo de acero, en función de E_0^2 .

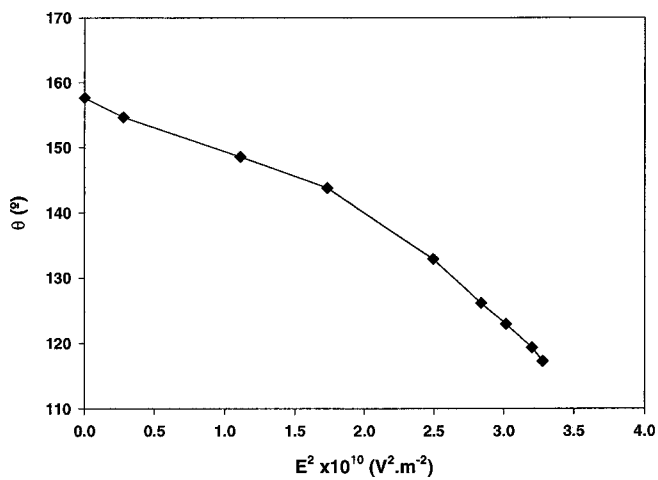


Figura 4.6: Variación del ángulo de contacto de la gota en función de E_0^2 .

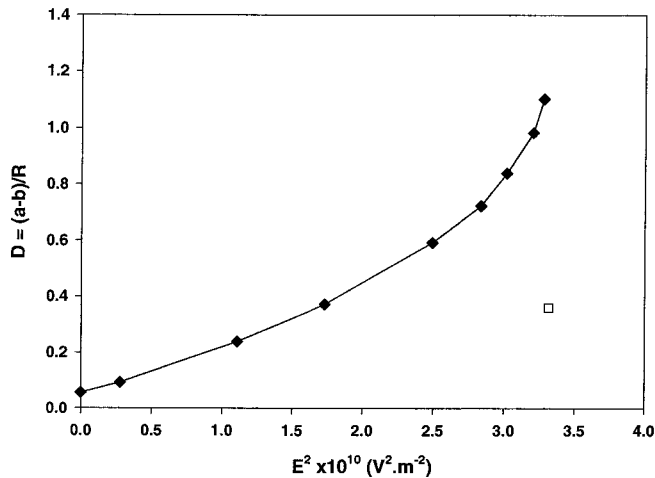


Figura 4.7: Deformación de la gota en función de E_0^2 . La variación es no lineal. El cuadrado vacío corresponde a la deformación justo después del despegue.

mayor parte de su volumen, dejando una gotita pegada al electrodo. Los botes de la gota se hacen sobre la extremidad superior de esta gotita. Después de cuatro o cinco botes la gota recupera esta cantidad de líquido recobrando así la totalidad de su volumen inicial. En ambos casos la gota emprende un movimiento de botes regular sobre el electrodo.

Conseguir que la gota bote no es siempre posible. En efecto esto depende del volumen de la gota y del material de que está constituido el electrodo. Cuando la gota despegue recupera una forma elipsoidal menos deformada. En efecto la gota ahora sólo se deforma debido a la presencia del campo eléctrico pues la adhesión ya no actúa. En este caso estamos en una situación en la que se aplica la teoría de pequeñas deformaciones debida a Taylor (véase el apéndice C). La figura 4.8 muestra como varía la deformación D de la gota en función del cuadrado del campo aplicado. Contrariamente al caso de la gota en contacto con el electrodo, la variación es lineal. El ajuste de los datos a la expresión teórica (4.6) permite estimar la tensión interfacial γ_{12} entre el agua y el aceite que resulta ser ~ 1 mN.

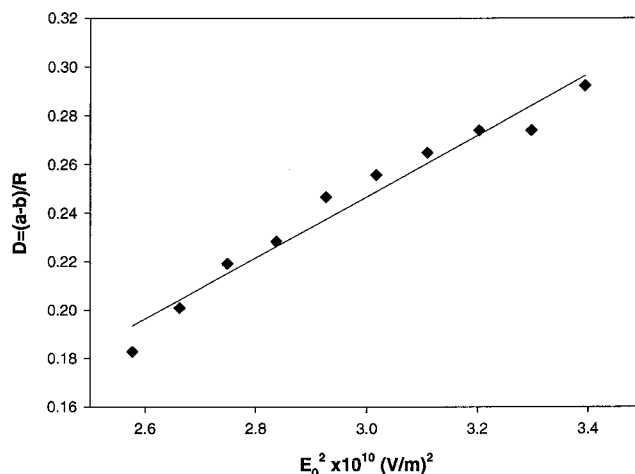


Figura 4.8: Deformación de una gota que bota sobre un electrodo de acero, en función de E_0^2 .

Se ve que la deformación en vuelo es menor que antes del despegue. La deformación de la gota en contacto es más que el doble de aquella en vuelo.

4.5 Dinámica de la gota

4.5.1 Tiempo de bote y campo umbral E_c

Cuando la gota bota sobre el electrodo inferior, se registran pulsos eléctricos en el circuito externo, como en el caso de la bola. Sin embargo estos pulsos son de menor intensidad (~ 2 veces el nivel del ruido), debido a que el radio de la gota es pequeño. En efecto esta carga depende del radio R (ver la expresión de la carga medida (3.32) del capítulo 3). Tomamos aquí también el tiempo entre pulsos como medida del tiempo de bote de la gota. Cuando la tensión es mayor que el umbral necesario para el despegue E_{des} , se consiguen botes regulares sobre el electrodo inferior, e incluso un movimiento oscilatorio entre los dos electrodos

sin que la gota se rompa.

Hemos desarrollado en el capítulo 2 un modelo para el bote de la bola y una relación entre el tiempo de bote y el campo aplicado. Esta relación, recordamos, se escribe como

$$E_0 = E_c \sqrt{\frac{\Delta t / \tau}{1 - e^{-\Delta t / \tau}}}. \quad (4.9)$$

Esta relación involucra el tiempo de relajación del líquido τ y el campo umbral E_c que se deduce a partir del equilibrio entre el campo eléctrico y la fuerza de la gravedad. Es decir $Q_0 E_c = (m - m_l)g$.

En el caso de una gota, la fuerza de adhesión es importante antes del primer despegue. Es decir cuando la gota está en contacto con el electrodo. Sin embargo, durante el vuelo no influye. En efecto, hemos notado durante el experimento que el proceso de carga de la gota, cuando entra en contacto con el electrodo², es un proceso extremadamente rápido. La fuerza eléctrica domina y el rebote es muy rápido, como en el caso de la partícula sólida. Siendo el tiempo de carga muy corto, la adhesión no afecta el movimiento. Sin embargo, hemos notado que la gota se deforma más durante el contacto que en vuelo. Esta deformación se hace en la dirección transversal de la gota y no en la dirección del campo. Esto es debido al cambio brusco del sentido de movimiento, y no al campo. Así pues podemos aproximar la forma de la gota durante el vuelo, que dura algunos segundos (4-6 s), a una esfera.

En estas condiciones podemos presumir que el modelo de la partícula sólida es válido para la gota. Debemos subrayar un hecho importante, es que el umbral de campo E_c determinado por el equilibrio entre la fuerza eléctrica y la gravedad es diferente del campo mínimo E_{des} , necesario para el primer despegue en el caso de la gota. En efecto, E_{des} debe ser mayor que E_c . El valor experimental de E_c se determina bajando la tensión lentamente para una gota que está botando, hasta que se quede en reposo sobre el electrodo. Actuando como tal, hemos notado que el campo para el cual ocurre el primer despegue es claramente mayor

²Aquí realmente no hay contacto físico. La gota adquiere su carga a una distancia muy pequeña del electrodo por medio de una descarga, y luego rebota (ver capítulo 3).

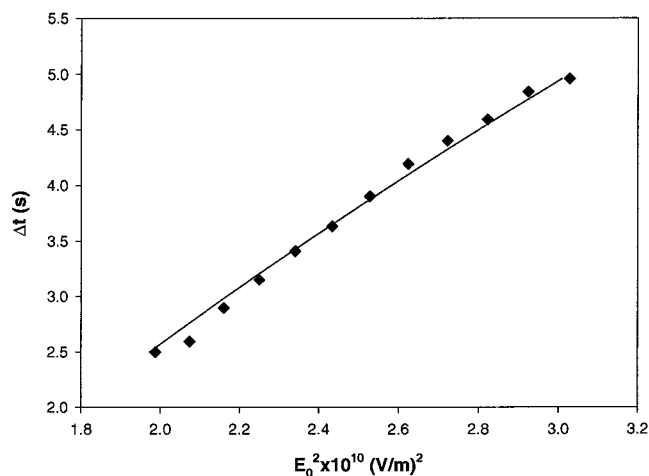


Figura 4.9: Tiempo de botes para una gota de agua de radio 1.34 mm en función de E_0^2 . La línea continua representa el mejor ajuste al modelo (4.9).

que el valor al cual la gota vuelve al reposo sobre el electrodo.

El tiempo de bote experimental registrado para una gota de radio $R = 1.34$ mm está representado en la figura 4.9. El ajuste del tiempo al modelo teórico (4.9) está dibujado con una línea continua en la figura. A partir de este ajuste hemos hallado un valor para el umbral de tensión $E_c = 1.1 \times 10^5$ V/m, y un tiempo de relajación $\tau = 2.0$ s. Los valores experimentales son: $E_c^{exp} = 1.6 \times 10^5$ V/m y $\tau^{exp} = \epsilon_l / \sigma = 1.4$ s. Se compruebe siempre que $E_{des} > E_c$ teórica y experimentalmente.

4.6 Efecto del material del electrodo

En el caso del electrodo de acero, hemos visto, el área de contacto es pequeño, y la gota toma una forma de esfera. Cuando se le aplica un campo eléctrico la gota se deforma en el sentido del campo, teniendo una forma aproximada a una elipse. Lo mismo ocurre con un electrodo de cobre. Esto favorece el despegue

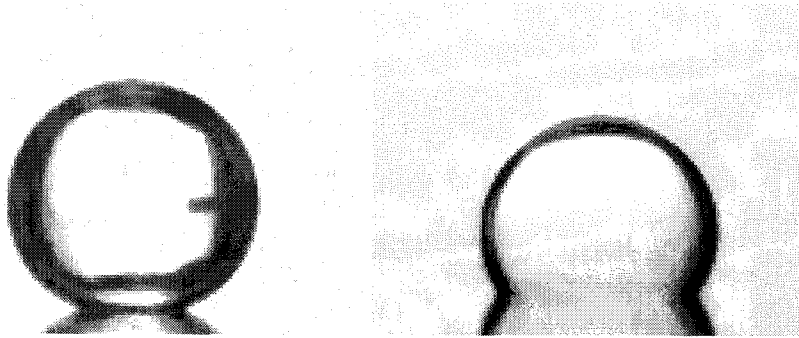


Figura 4.10: Forma de dos gotas de agua del mismo radio, a la izquierda: sobre un electrodo de acero, a la derecha: sobre un electrodo de titanio.

sin desintegración de la gota bajo efecto del campo.

Con los electrodos de titanio y de aluminio, la forma que toma la gota es bastante distinta. Es una parte de esfera. La figura 4.10 muestra una comparación entre el caso del acero y del titanio. El área de contacto de la gota con el titanio es bastante grande. En presencia del campo eléctrico, la gota se deforma formando una parte de elipse (una forma de “campana”).

El radio de contacto en el caso del electrodo de acero es alrededor de 0.44 mm. Mientras el ángulo de contacto es $\sim 160^\circ$. Este ángulo se acerca a un valor de aproximadamente 115° justo antes del despegue.

La figura 4.11 muestra la variación del aspecto de la gota sobre electrodo de titanio para algunos valores del campo, antes de la rotura. Para el electrodo de titanio, el radio de contacto estimado es ~ 1.1 mm, que es aproximadamente 2 veces y medio mayor que en el caso del acero. Esto implica un área de contacto más de seis veces mayor que en el caso del acero. Para el titanio, el ángulo de contacto sin campo se estima en $\sim 110^\circ$; y se acerca a un valor de 90° , para $E_0 = 2.71 \times 10^5$ V/m, cerca del valor para el cual empieza la rotura de la gota por la parte superior (véase figura 4.11).

En la figura 4.12 se ve una gota justo antes de la rotura debido al campo eléctrico. La parte superior de la gota forma un cono. Este cono corresponde a

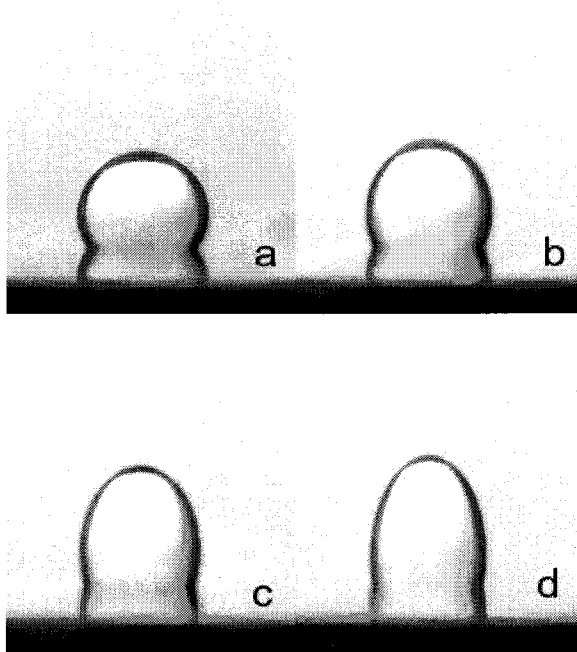


Figura 4.11: Una gota de agua de radio 1.34 mm en reposo sobre un electrodo de titanio. La forma de la gota es distinta del caso del electrodo de acero. Se ven aquí tomas: a) sin campo aplicado, b) con valor del campo $E_0 = 1.18 \times 10^5$ V/m, c) $E_0 = 1.77 \times 10^5$ V/m, d) $E_0 = 2.71 \times 10^5$ V/m.

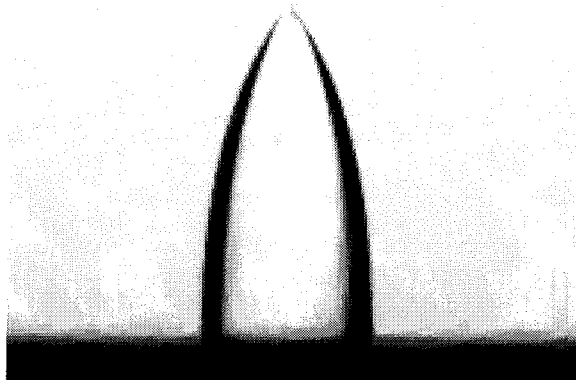


Figura 4.12: Una gota de agua ($R \simeq 2.2$ mm) sobre un electrodo de titanio justo antes de la rotura.

la configuración del conocido cono de Taylor que tiene un ángulo muy particular ($49^\circ 3$). Como es sabido, en la punta del cono se puede observar un chorro fino de agua que se dirige hacia el electrodo superior.

4.7 Influencia del tamaño y la densidad de la gota

En este estudio hemos usado una gota de agua de radio relativamente pequeño (~ 1.34 mm) para poder tener botes bajo efecto del campo eléctrico. Para gotas de mayor radio, el área de contacto es relativamente grande. Por consiguiente, aumentar el volumen de la gota puede impedir el despegue de la gota aun con electrodos de acero o de cobre. El efecto de la gravedad se hace más notable y la forma adquirida por la gota, sin campo, esta bastante deformada. Tiene así, una forma elipsoidal con semieje mayor en la dirección horizontal. Para remediar esto, hemos probado a cambiar la densidad de la gota. Es decir probar una mezcla de agua y otro líquido que sea menos denso que el aceite ($\rho_{aceite} = 916 \text{ kg/m}^3$). Añadiendo al agua, por ejemplo *Metanol* con una densidad $\rho_{metanol} = 790 \text{ kg/m}^3$, hemos conseguido acercar la densidad de la gota a la del aceite. Con tal mezcla hemos podido tener gotas con formas casi esféricas en ausencia del campo, y minimizar así el área de contacto. Actuando de este modo hemos podido con-

seguir que gotas de radios hasta 4 mm despeguen y boten bajo efecto del campo eléctrico.

4.8 Conclusión y perspectivas

Hemos llevado a cabo un estudio experimental de la gota que bota sobre un electrodo bajo efecto de un campo eléctrico. Hemos mostrado que el modelo propuesto anteriormente para una partícula sólida, puede ser aplicado al caso de la gota en el caso de pequeñas deformaciones. La diferencia es que en el caso de una gota dos valores críticos del campo eléctrico entran en juego. El primero corresponde al valor para el cual el primer despegue de la gota tiene lugar. El segundo corresponde al campo mínimo por debajo del cual la gota, ya en movimiento, vuelve al reposo. Este último es siempre menor que el primero debido al hecho de que la fuerza de adhesión entra en juego antes del primer despegue, pero no durante el movimiento de la gota.

La deformación de la gota en movimiento es bastante menor que la de antes del despegue. En efecto hemos encontrado que la deformación de una gota de radio 1.34 mm todavía en contacto con el electrodo puede llegar hasta 0.65, mientras durante el vuelo la deformación no supera 0.3.

Hemos mostrado también que el material de que están hechos los electrodos afecta mucho el proceso de despegue y el grado de deformación de la gota antes del despegue. Como consecuencia de esto, algunos materiales como el acero y el cobre permiten el despegue y luego el movimiento de botes de la gota. Otros, como el titanio y el aluminio, impiden totalmente el despegue de la gota, pues el área de contacto y por consiguiente la adhesión, son bastante grandes. Con lo cual la gota, al aumentar el campo, se deforma en una forma de campana y luego se rompe eyectando un choro por la cima hacia el electrodo superior.

Durante el vuelo, la gota es objeto de oscilaciones capilares debido a la presencia del campo. En el caso de una gota de tamaño relativamente grande (por ejemplo $R \sim 4\text{mm}$), estas oscilaciones son perceptibles al ojo. El tiempo capilar que caracteriza estas oscilaciones es $t_c = \sqrt{\rho_{gota} R^3 / \gamma_{12}}$. Cuando la gota entra en contacto con el electrodo, su deformación es mucho más importante que en el

caso de la gota pequeña estudiada antes. En este caso el tiempo capilar es menor que el tiempo de bote que es del orden de 4-6 segundos. Así, la dinámica del bote sigue siendo regular y no hay acoplamiento entre el bote y las oscilaciones de la gota. Para tener un tiempo capilar del mismo orden que el del bote hace falta usar gotas de un radio del orden de 1 cm. En este caso el tamaño de la gota resulta comparable con las dimensiones de la celda (2 cm entre electrodos). La aplicación del campo causa una elongación de la gota y rápidamente se forma un puente que une los dos electrodos. A pesar de ello pensamos que en una celda mayor sería posible tener botes para una gota de este tamaño.

Es previsible que la cercanía del tiempo capilar y del tiempo entre botes dé lugar a una dinámica no lineal más rica que la encontrada aquí, al ser posible la coincidencia de ambos tiempos para una tensión eléctrica dada. Esta es una de las posibles líneas futuras de trabajo.

Parte II

Dinámica no lineal

Capítulo 5

Generalidades sobre dinámica no lineal

La popularidad de los fractales ha explotado en los últimos años. Esta popularidad se debe probablemente a la belleza de los fractales, y a la no necesidad de tener extensos conocimientos de matemáticas para entender cómo se construyen. Sin embargo, el estudio de los sistemas caóticos abarca mucho más que el fenómeno de la existencia de los objetos fractales. Los fractales son sólo una pequeña parte de lo que ha sido descubierto en el estudio del caos, enmarcado en una área de la ciencia conocida como dinámica no lineal.

El estudio de los sistemas caóticos es un tema de gran interés actual para muchos científicos e ingenieros. Un sistema que exhiba caos puede ser muy importante e incluso útil, pero también peligroso en muchos casos. Históricamente, las oscilaciones caóticas han sido algo a evitar en el diseño de cualquier tipo de dispositivo. Sin embargo, desde que los ordenadores han hecho posible simular numéricamente estos sistemas, se viene observando que el comportamiento caótico es una propiedad muy extendida en la naturaleza.

5.1 Teoría de bifurcaciones

Los sistemas no lineales pueden dividirse de forma simple en dos grupos, los *discretos* y los *continuos*, según la naturaleza de su variable independiente, que normalmente es el tiempo. En los sistemas discretos el tiempo evoluciona de forma discontinua, a saltos. En los sistemas continuos, por otra parte, el tiempo evoluciona de forma continua. Estos sistemas se representan mediante una o varias ecuaciones diferenciales, y su estado cambia en cada instante de tiempo.

5.1.1 Caos en sistemas discretos

Comenzaremos introduciendo los primeros conceptos de la teoría del caos analizando el comportamiento de sistemas discretos mediante *aplicaciones iteradas* o *mapas*.¹ Las aplicaciones iteradas son probablemente el ejemplo más simple de un sistema no lineal. Se construyen eligiendo un número cualquiera como dato de entrada de una función, utilizando el resultado como nuevo dato de entrada de la misma función, y repitiendo el proceso sucesivamente. La serie de valores tomados por la función recibe el nombre de *órbita*, y el punto final (hacia el cual converge esta serie, si existe) se llama *punto fijo estable*.

5.1.1.1 La aplicación logística

Una aplicación iterada particularmente interesante es la aplicación *logística*. Esta aplicación muestra muchas de las propiedades que aparecen en sistemas continuos. La ecuación logística es un modelo simple de población para una especie que no tenga depredadores, pero sí un suministro de alimentos limitado [May, 1976]. Viene dado por la siguiente ecuación

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \tag{5.1}$$

donde μ es un parámetro que varía entre 0 y 4, que representa el suministro de alimento. El valor inicial de x tiene que encontrarse entre 0 y 1.

¹Aunque la palabra apropiada es aplicación, el uso de *mapa* se ha extendido entre los científicos, con lo que usaremos las dos palabras indistintamente

Si elegimos un valor de μ igual a 2.9 e iteramos la función, el estado del sistema tiende a un valor fijo estable. Si incrementamos μ por encima de 3.0, el punto fijo que existía anteriormente pierde estabilidad, y el sistema oscila ahora entre dos puntos. Esto recibe el nombre de *ciclo estable*, en este caso es un ciclo estable de período 2. Si seguimos aumentando μ , este ciclo de período 2 se convierte en un ciclo de período 4, después en uno de período 8, y así sucesivamente.

Estos cambios reciben el nombre de *bifurcaciones*. En cada bifurcación, el sistema sufre un cambio drástico en su comportamiento a largo plazo. A medida que μ aumenta, las bifurcaciones ocurren cada vez más rápido, hasta que finalmente, para μ aproximadamente igual a 3.5699, el período del ciclo se hace infinito. Si μ crece por encima de este valor crítico (manteniéndolo por debajo de 4), el sistema ya no sigue un ciclo periódico, sino que siempre varía sin repetirse a sí mismo.

Este comportamiento recibe el nombre de *caos*. Hay otra manera de ver todas estas bifurcaciones a la vez. Si representamos los puntos fijos estables, o los puntos pertenecientes a ciclos estables, en función de μ , se puede ver que cada uno de los ciclos se bifurca en otro de período doble que el original. Por encima de $\mu = 3.5699$ el comportamiento es caótico. La gráfica 5.1 corresponde al *diagrama de bifurcación* de la aplicación logística. Como puede observarse, hay ventanas de comportamiento periódico en la zona caótica.

Esta ruta al caos recibe el nombre de *cascada de desdoblamiento de período, cascada subarmónica o cascada de Feigenbaum*. Aparece en muchos sistemas reales y modelos matemáticos que exhiben caos, hecho que se conoce con el nombre de *universalidad*.

5.1.2 Bifurcaciones en sistemas dinámicos

Antes de estudiar con detalle los sistemas dinámicos, debemos desarrollar algunas técnicas para tratar con ellos. Para ello hemos de entender claramente los principales tipos de bifurcaciones.

Las bifurcaciones no están siempre asociadas con puntos fijos; también los

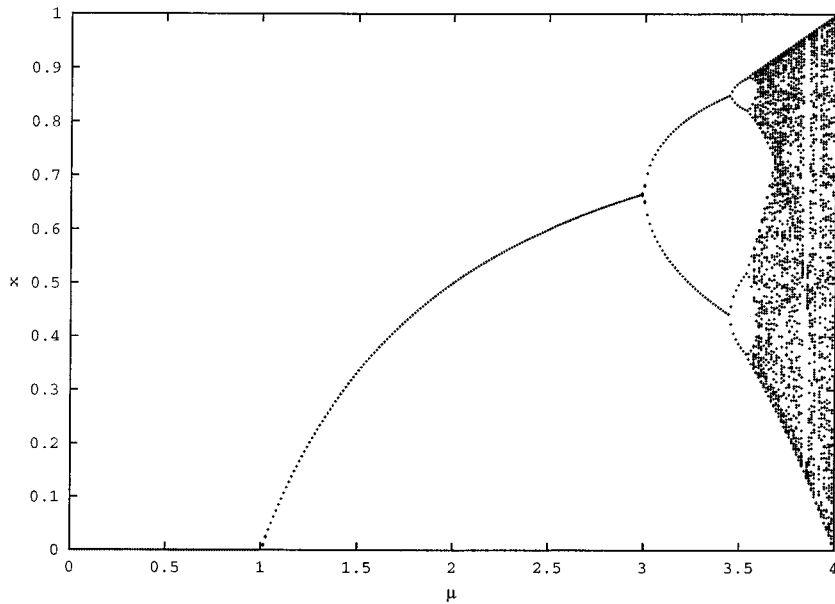


Figura 5.1: Diagrama de bifurcación del mapa logístico.

ciclos pueden sufrir bifurcaciones. Hay docenas de bifurcaciones, muchas no descubiertas aún. La terminología no es precisa ni universal (todavía en evolución). Sin embargo podemos clasificar las bifurcaciones más comunes en unos pocos tipos. Se ha de decir que esta clasificación se aplica tanto a los sistemas continuos como a los discretos.

5.1.2.1 Espacio de fases

El *espacio de fases* constituye una manera muy eficaz de observar toda la dinámica de un sistema de una vez. Está constituido por todas las coordenadas que determinan el estado del sistema. Por ejemplo, si el sistema está representado por una ecuación de diferencial de orden n , la dimensión del espacio de fases será n . Dicho de manera muy simple, es un espacio que tiene todos los aspectos de la dinámica del sistema en sus ejes. Frecuentemente se trata de un espacio de más de tres dimensiones, pero en muchos casos simples sólo consta de dos o tres dimensiones.

Así pues, en los sistemas de segundo orden, el espacio de fases es el que tiene como ejes la posición y la velocidad. En el caso de sistemas descritos por una ecuación diferencial de primer orden, el estado del sistema queda descrito únicamente por una variable x y el espacio de las fases es unidimensional (línea de fases).

5.1.2.2 Puntos y diagramas de bifurcación

Poincaré introdujo el término *bifurcación* para describir las transformaciones (en número y en género) de los puntos de equilibrio de una familia de sistemas, que ocurren al variar un parámetro. Una bifurcación ocurre cuando una variación infinitesimal de un parámetro del sistema introduce una transformación cualitativa del *retrato de fases* del sistema [Andronov et al., 1971].

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = F(x, \mu) \quad (5.2)$$

con $x \in \mathbf{R}^n$, $\mu \in \mathbf{R}^m$ y su punto de equilibrio E cuya coordenada x_E dependerá del valor de μ : $x_E(\mu)$. Si la naturaleza del punto de equilibrio experimenta un cambio súbito cuando μ varía ligeramente alrededor de μ_0 , entonces diremos que el sistema experimenta una bifurcación. Definamos los *valores de bifurcación* de μ como los valores tales que el sistema (5.2) no es estructuralmente estable. Son valores tales que $D_x F(x, \mu)^2$, calculado en el punto de equilibrio E , tiene un valor propio nulo. Si $n = 1$ y $m = 1$, encontramos estos valores de bifurcación resolviendo el sistema

$$F(x, \mu) = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \mu) = 0. \quad (5.4)$$

La ecuación (5.3) que permite hallar las coordenadas de los puntos de equilibrio, define entonces una curva en el plano (x, μ) : el diagrama de bifurcación. Cuando $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \mu) \neq 0$, tenemos una o varias ramas de puntos de equilibrio que se

²El jacobiano del campo de vectores F : $(D_x F)_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$

juntan o se cruzan en los puntos donde se satisface la ecuación (5.4). Llamamos a estos puntos, los *puntos de bifurcación*. Sus coordenadas son soluciones a las ecuaciones (5.3) y (5.4). Estas definiciones están ilustradas en la figura 5.2, que presenta el diagrama de bifurcación del sistema

$$F(x, \mu) = x^3 - \mu x + 1 \tag{5.5}$$

que tiene varios comportamientos posibles:

- Para valores de μ inferiores al valor de bifurcación μ_0 , el sistema sólo tiene un punto de equilibrio B .
- Cuando $\mu = \mu_0$, el sistema tiene además del punto B un punto no *hiperbólico*³ $A(x_A^0)$.
- Cuando $\mu > \mu_0$, el sistema tiene 3 puntos de equilibrio: A_1, A_2, B .

Si ahora nos olvidamos de la coordenada del (o de los) punto(s) de equilibrio, podemos trazar la *curva de bifurcación* en el espacio de parámetros. Para el ejemplo (5.5), el espacio de parámetros es una simple recta (el eje μ). Representamos así los distintos comportamientos posibles del sistema en función de los valores de los parámetros (véase figura 5.3).

5.1.2.3 Codimensión de un punto de bifurcación

En un espacio de dimensión n , la *codimensión* de una *subvariedad* de dimensión m es $n - m$. La codimensión tiene la propiedad de la aditividad: si dos subvariedades de dimensión m_1 y m_2 se cruzan, lo hacen en general en una *variedad* de dimensión⁴: $m_1 + m_2 - n$. De modo que la codimensión de la intersección

³Un punto fijo hiperbólico de una ecuación diferencial es un punto fijo para el cual la matriz de estabilidad tiene dos autovalores $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, se llama también punto de silla. Cuando una variedad invariante estable y una inestable intersectan, lo hacen en un punto fijo hiperbólico.

⁴Por ejemplo si dos esferas huecas ($m_1 = m_2 = 2$) se cruzan en el espacio $n = 3$, su intersección es en general un círculo de dimensión $2 + 2 - 3 = 1$. El término en 'general' significa que las esferas se cruzan de manera transversal.

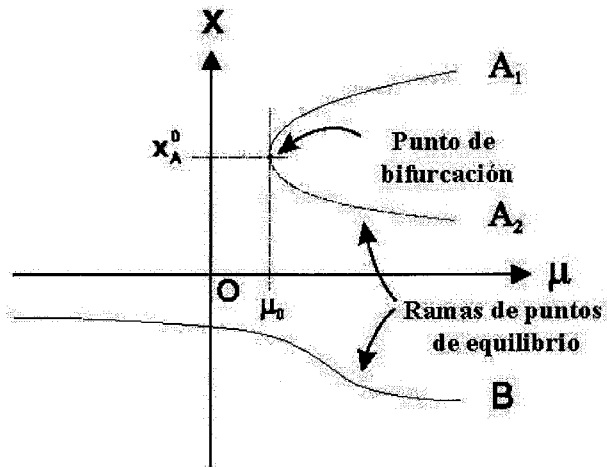


Figura 5.2: Diagrama de bifurcación del sistema (5.5).



Figura 5.3: Curva de bifurcación (aquí el punto μ_0) en el espacio de parámetros (aquí el eje μ).

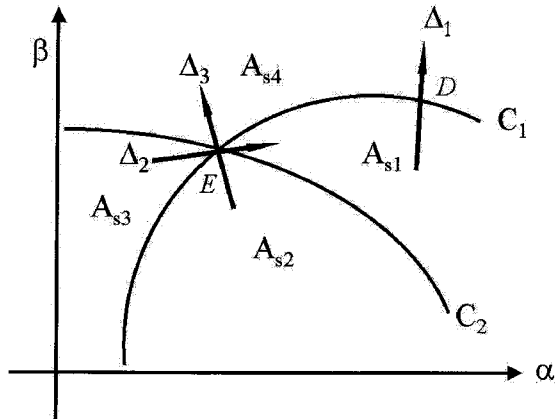


Figura 5.4: Dos curvas de bifurcación en un espacio de parámetros de dimensión 2. La codimensión del punto E es 2, mientras la del punto D es 1.

será $n - (m_1 + m_2 - n) = 2n - m_1 - m_2$. Así la codimensión de la intersección es la suma de las codimensiones de las dos variedades.

Imaginemos ahora un sistema a dos parámetros α y β . Supongamos que una primera curva de bifurcación $C_1(\alpha, \beta) = 0$ en el espacio de parámetros separa dos regiones donde el comportamiento (estado) asintótico del sistema es diferente. Admitamos que un estudio más detallado del sistema muestra que otra curva de bifurcación $C_2(\alpha, \beta) = 0$ existe. El sistema tiene entonces 4 estados asintóticos diferentes (véase figura 5.4). Los estados asintóticos pueden ser constituidos de uno o varios puntos de equilibrio, de trayectorias periódicas, o de ciclos de *separatrices*⁵.

La codimensión de un punto de bifurcación es el número de direcciones necesarias para pasar por todos los estados posibles del sistema alrededor de

⁵Una separatriz es una curva de fases (variedad invariante) que se encuentra con un punto fijo (una intersección entre una variedad invariante estable y una inestable). Una separatriz marca el límite entre curvas de fases con distintas propiedades.

este punto en el espacio de parámetros. Si tomamos por ejemplo un punto D de la curva C_1 , vemos que sólo necesitamos un vector transversal a la curva C_1 : este vector define una dirección. Si el sistema está originalmente en la zona asintótica 1 y si seguimos la dirección Δ_1 (en el sentido del vector), el sistema cruza la curva C_1 y entra en la zona de comportamiento asintótico 4. Así que un solo vector permite viajar en todas las zonas (distintas) al rededor del punto D . Este punto es, por consiguiente, de codimensión 1. Esto viene dado por el hecho de que la curva C_1 es ella misma de codimensión 1 en el plano (α, β) .

La curva C_2 es también de codimensión 1 en el plano (α, β) , con lo que la intersección de las dos curvas será de codimensión 2 en el plano (α, β) . Esta intersección es el punto E . ¿Cuál será la codimensión de este punto de bifurcación? Es el número de direcciones (no colineales) necesarias para pasar por todos los estados posibles del sistema al rededor del punto E en el plano (α, β) . Se ve que si utilizamos sólo una dirección Δ_2 , sólo podemos pasar de la zona A_{s_3} hacia la zona A_{s_1} . Para describir todos los estados alrededor del punto de bifurcación E , es necesario utilizar una segunda dirección Δ_3 . Por consiguiente el punto de bifurcación E es de codimensión 2.

5.1.2.4 Clasificación de las bifurcaciones de los puntos de equilibrio

Bifurcación punto de silla La bifurcación de *punto de silla* (saddle-node) es el tipo más simple de bifurcación. Con ella se crean y destruyen puntos fijos. Una bifurcación de punto de silla puede ocurrir en sistemas que, en principio, no tienen puntos fijos. A medida que un parámetro del sistema varía, dos puntos fijos aparecen tras la bifurcación, uno estable y el otro inestable.

Su nombre (saddle-node) viene del hecho de que cuando esta bifurcación tiene lugar, para un sistema donde $n = 2$, un punto de silla (saddle) y un nodo (node) fusionan y desaparecen. Para $n = 1$, la función $F(x, \mu)$ más simple para tener una bifurcación es

$$\dot{x} = -\mu + x^2 \quad (5.6)$$

El diagrama de bifurcación del sistema 5.6 se muestra en la figura 5.5.

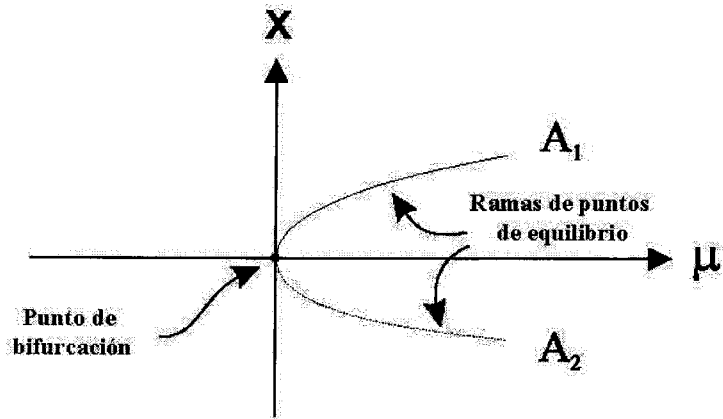


Figura 5.5: Diagrama de la bifurcación de punto de silla (saddle-node) del sistema (5.6).

El sistema (5.6) es la forma normal de la bifurcación punto de silla [Chows and Li, 1994]. Se ve que en el punto de bifurcación $(x, \mu) = (x^0, \mu_0) = (0, 0)$, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial \mu}(x^0, \mu_0) \neq 0. \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^0, \mu_0) \neq 0. \quad (5.8)$$

La condición (5.7) indica que no hay degeneración en μ y la condición (5.8) indica que es el término en x^2 que domina en $F(x, \mu)$.

Veremos que todas las otras bifurcaciones de codimensión 1 de un punto de equilibrio no hiperbólico (con un valor propio nulo) sólo son perturbaciones de la bifurcación punto de silla.

Bifurcación transcítica Una bifurcación *transcítica* no crea ni destruye puntos fijos. Por el contrario, a medida que varía el parámetro μ , dos puntos fijos se encuentran e intercambian su estabilidad. Es decir, el punto fijo estable se hace inestable en el punto de bifurcación, y el punto inestable se hace estable.

Este es un caso donde la condición (5.7) no se cumple. Bastaría estudiar el campo de vectores $F(x, \mu)$ tal que $F(0, \mu) = 0$ cualquiera que sea μ . Cambiemos la restricción (5.7) pidiendo que sólo la derivada compuesta sea no nula

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x^0, \mu_0) \neq 0 \quad (5.9)$$

La función $F(x, \mu)$ más simple que podemos escribir y que satisfase las restricciones (5.4), (5.8) y (5.9) es

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^2 \quad (5.10)$$

cuyo diagrama de bifurcación se muestra en la figura 5.6. Como en la bifurcación punto de silla, los dos puntos de equilibrio van aproximándose en el espacio de fases cuando el parámetro tiende a su valor de bifurcación. Pero a diferencia de la bifurcación punto de silla, los puntos no desaparecen después de la bifurcación: se cruzan e intercambian su estabilidad.

Bifurcación tridente La bifurcación de *tridente* (pitchfork, también recibe el nombre de *tenedor* o *horca*), es una bifurcación simétrica, y por ello se observa en muchos sistemas que tienen simetría entre una parte positiva y otra negativa. Las bifurcaciones de horca consisten en que un único punto fijo se bifurca en tres, dos de los cuales tienen la misma estabilidad que el original y el tercero la contraria.

En este caso ni la condición (5.7) ni la condición (5.8) se cumplen. Este es el caso cuando la función F es impar en x . La no paridad implica la presencia de un punto de equilibrio en $x = 0$ cualquiera que sea μ e impide cumplir las dos condiciones. La forma normal de un sistema que experimenta una bifurcación horca es

$$\dot{x} = F(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (5.11)$$

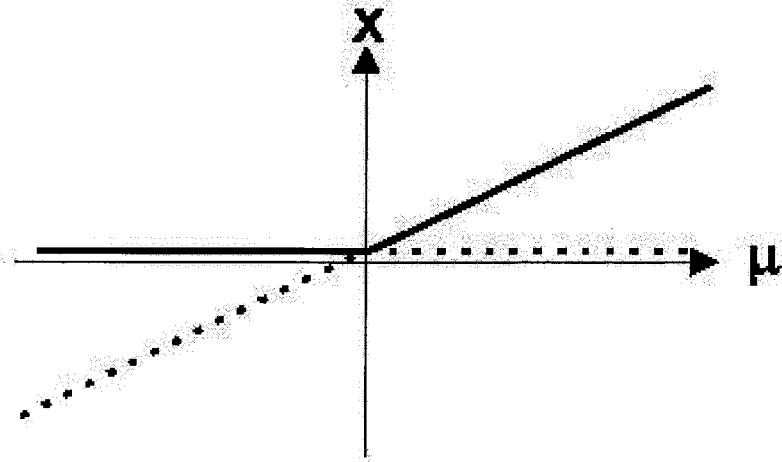


Figura 5.6: Diagrama de la bifurcación transcritical del sistema (5.10).

El diagrama de bifurcación se muestra en la figura 5.7. Este diagrama se parece al de la bifurcación punto de silla.

Bifurcación de Hopf Las bifurcaciones de *Hopf* sólo existen en sistemas de orden mayor o igual a dos. En ellas, un punto fijo se bifurca en un ciclo, o bien un ciclo colapsa en un punto fijo. Estas bifurcaciones constituyen un tema más avanzado. La figura 5.8 ilustra el caso de la bifurcación del tipo Hopf.

5.2 Caos determinista y herramientas de diagnóstico

5.2.1 Por qué el estudio del caos

Muchas ecuaciones no lineales son modelos matemáticos de sistemas físicos que son muy difíciles de analizar: sistemas muy inestables, o de comportamiento muy complejo. El modelo matemático suele ser muy complicado, a veces imposible de resolver de forma exacta. El estudio de estos sistemas se realiza mediante un nuevo campo de las matemáticas, llamado *teoría del caos*.

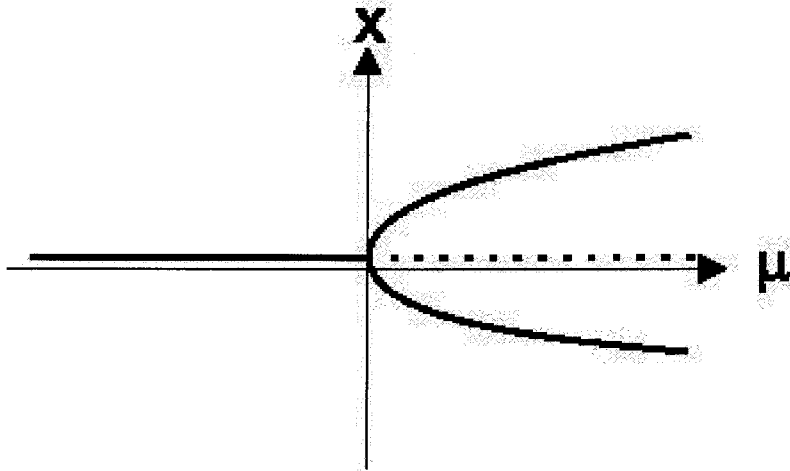


Figura 5.7: Diagrama de la bifurcación tridente del sistema (5.11).

La idea del caos fue introducida al descubrir que sistemas regidos por reglas deterministas tienen sin embargo comportamientos imprevisibles a largo plazo. En particular, Lorenz se dio cuenta en los años 1960 de que su modelo meteorológico daba resultados divergentes debido a un cambio muy pequeño en las condiciones iniciales [Lorenz, 1963], lo que luego se denominó *efecto mariposa*. Luego otros estudios mostraron que sistemas aún más simples, como el mapa logístico, presentan este tipo de comportamiento.

La noción de caos comprende las ideas de impredecibilidad, de fuerte divergencia debido a errores de medida, de multiplicidad de comportamientos ... La sensibilidad a las condiciones iniciales es una característica principal de los sistemas caóticos. Sin embargo, esto no significa por sí sólo que un sistema sea caótico, pero todos los sistemas caóticos tienen esta propiedad. Considere por ejemplo un péndulo simple. Para oscilaciones pequeñas, el movimiento del péndulo puede determinarse de manera muy simple mediante una función seno. Si el péndulo empezara su movimiento desde un conjunto de condiciones iniciales muchas veces, su comportamiento sería a grandes rasgos el mismo para todas las pruebas.

Los sistemas caóticos no tienen este comportamiento. Cualquier pequeño

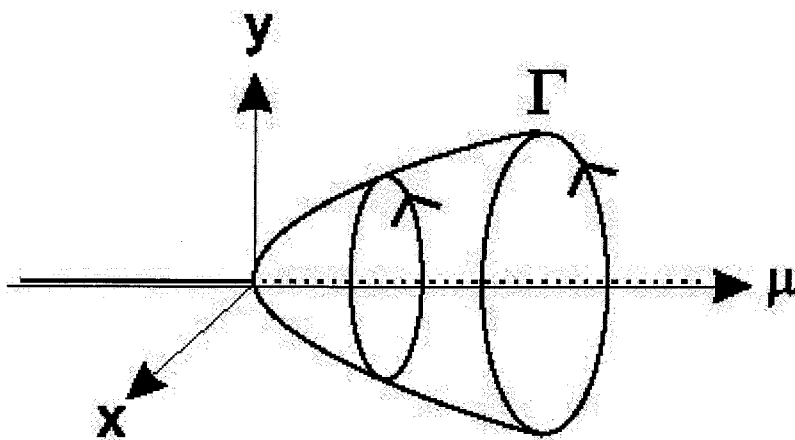


Figura 5.8: Bifurcación de Hopf

cambio en las condiciones iniciales puede provocar en ellos un comportamiento completamente diferente. Parecen evolucionar de forma errática, y cualquier pequeña perturbación puede cambiar el sistema entero drásticamente. Sin embargo, estos sistemas tienen un orden interno. Encontrar y estudiar ese orden constituye una parte importante del estudio del caos.

5.2.2 Reconstrucción del espacio de fases

Muchos de los diagnósticos del caos en un sistema dinámico dependen del conocimiento de la dinámica del espacio de fases. Esto, a primera vista, parece limitar sus aplicaciones a sistemas numéricos es decir con un modelo que describe la dinámica. Sin embargo, resulta posible la *reconstrucción* de un espacio de fases *equivalente* a partir de una *única* variable dinámica u observable del sistema. Esta reconstrucción permite, usando el método de reconstrucción por *retrasos*, hallar la dimensión del sistema (es decir el número de grados de libertad: por ejemplo el desplazamiento, la velocidad, la temperatura...). De este modo es posible que los sistemas experimentales, al menos los que tienen atractores de baja dimensión, sean accesibles a tales diagnósticos a la hora de caracterizar el caos.

Un resultado importante aquí es el hecho de que el atractor reconstruido y el atractor real son *topológicamente equivalentes* [Abarbanel, 1995]. Esta propiedad implica que todas sus características (exponentes de Lyapunov, dimensiones, entropías...) son idénticas. Así estaremos en lo cierto calculando estas medidas para el atractor reconstruido.

Habitualmente, los vectores que describen la posición de una solución del sistema en el espacio de fases equivalente, están reconstruidos a partir de una serie temporal escalar $\{x_n\}$ a la cual se aplica el método de retrasos para obtener vectores

$$s_n = (x_{n-(m-1)\nu}, x_{n-(m-2)\nu}, \dots, x_n) \quad (5.12)$$

siendo m la dimensión de *inmersión* (embedding) y ν el *retraso* de tiempo (time delay). Si $m \geq 2D_C + 1$ (con D_C la dimensión de capacidad del atractor (véase sec. 5.2.5.1)), la trayectoria da una reproducción fiel del mapa en el espacio de fases físico, pues el atractor está totalmente desdoblado en el espacio reconstruido.

Técnicamente, esto significa que las distancias $\delta s_n^{\vec{}}$ en el espacio reconstruido y las distancias que les corresponden en el espacio de fases físico (real) tienen una razón que es uniformemente acotada y acotada lejos de cero.

En la práctica D_C es desconocida *a priori*, así, habitualmente se procede con valores de m creciendo hasta alcanzar una saturación para la estimación de la dimensión. El factor 2 que multiplica D_C en la dimensión de inmersión está tomado para eliminar los cruzamientos falsos. Por ejemplo, un círculo que corresponde a un ciclo límite ($D_C = 1$) puede ser reconstruido como una figura parecida a un "8" si se considera un espacio de inmersión bidimensional, y esto no satisface los requisitos de los límites de distancia en la condición de fidelidad arriba mencionada. En tres dimensiones sin embargo, típicamente la línea no se cruzará consigo misma.

Un método práctico para calcular la dimensión mínima de inmersión, m_0 , es el método de *los falsos vecinos* (false nearest neighbours) propuesto por Kennel y coautores [Kennel et al., 1992]. El método está basado en la idea de que, si el atractor está reconstruido en un espacio con una dimensión demasiado pequeña,

la equivalencia entre los dos atractores, el real y el reconstruido, no es completa. De hecho, si consideramos un punto x_i del espacio de fases original, una vecindad V_i de x_i ya no se transforma en una vecindad de la imagen de x_i . Así, la vecindad de la imagen de x_i contiene puntos que no son imágenes de los puntos de la vecindad V_i de x_i sino de otros puntos del atractor. La cantidad de estos “falsos vecinos” sólo tiende a cero cuando la dimensión de inmersión está por encima de un mínimo m_0 necesario para que el atractor esté totalmente desdoblado. Por ejemplo, puntos distribuidos en una hélice en 3 dimensiones se proyectan en una circunferencia en 2 dimensiones, apareciendo como vecinos puntos que no lo son en realidad.

El retraso de tiempo ν también debe ser cuidadosamente elegido. Sabemos que las variables de la serie temporal están correlacionados. De modo que si se toma un valor pequeño para el retraso, quedarían puntos en el atractor demasiado próximos (vecinos) debido a la correlación temporal y no por razón de la dinámica. Para remediar esto hay que escoger un valor mayor para el retraso. No obstante, un valor demasiado grande para el retraso causaría la destrucción de la estructura del atractor.

Utilizaremos el método, propuesto por Fraser y Swinney [Fraser and Swinney, 1986], para buscar un valor adecuado para el retraso ν . El método utiliza una función llamada *Función de Información Mutua* (Mutual Information Function) para determinar el valor óptimo del retraso.

La idea es que un retraso temporal adecuado es tal que, dado un estado del sistema $x(n)$, proporcionaría una máxima información nueva al medir $x(n + \nu)$. La función de información mutua, que definimos como $I(\nu)$, empieza con un máximo en $x(n)$ ($\nu=0$) ya que tenemos la información máxima sobre $x(n)$, y decae a medida que aumenta ν para volver a crecer luego. El valor de ν que corresponde al primer mínimo está escogido como retraso temporal para la reconstrucción del espacio de fases.

Hay otro método que se basa en el estudio de la función de correlación. En este caso se elige el retraso óptimo como el que corresponde al primer cero de la función de correlación. De cualquier modo tanto estos métodos como otros dan sólo una indicación útil. La elección del valor óptimo para el retraso temporal depende de la naturaleza del problema bajo estudio y ha de ser considerada por

el investigador.

5.2.3 Exponentes de Lyapunov

En un sistema dinámico la sensibilidad a las condiciones iniciales la vamos a medir con un exponente que nos determine la tasa de divergencia exponencial de órbitas adyacentes infinitamente próximas. Consideremos el caso simple de un sistema dinámico unidimensional

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (5.13)$$

y supongamos que F es derivable salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos. Imaginemos dos puntos próximos x_0 y $x_0 + \epsilon$, después de N iteraciones se han convertido en $F^N(x_0)$ y $F^N(x_0 + \epsilon)$ respectivamente. Supongamos que ambos puntos están a una distancia

$$|F^N(x_0 + \epsilon) - F^N(x_0)| = \epsilon e^{N \cdot \lambda(x_0)} \quad (5.14)$$

es decir, que la separación inicial ϵ se ha multiplicado por un número que crece exponencialmente con el número de iteraciones N . Este número viene caracterizado por un exponente $\lambda(x_0)$ que se denomina *exponente de Lyapunov*, y que depende del punto x_0 en el que estamos analizando la sensibilidad a las condiciones iniciales. Tomando logaritmos y límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$ en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{F^N(x_0 + \epsilon) - F^N(x_0)}{\epsilon} \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{dF^N(x_0)}{dx_0} \right| \end{aligned} \quad (5.15)$$

siendo $\frac{dF^N(x_0)}{dx_0}$ la derivada de la función $F^N(x)$ evaluada en $x = x_0$. La regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas nos da

$$\frac{d}{dx} F^2(x)_{x_0} = \left. \frac{d}{dx} F(F(x)) \right|_{x_0}$$

$$\begin{aligned}
&= F'(F(x_0)).F'(x_0) \\
&= F'(x_1).F'(x_0) \quad \text{siendo } x_1 = F(x_0)
\end{aligned}$$

Así pues, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lambda(x_0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d}{dx_0} F^N(x_0) \right| \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(x_i) \right| \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |F'(x_i)| \tag{5.16}
\end{aligned}$$

En un sistema dinámico bidimensional se define el primer exponente de Lyapunov mediante

$$\lambda_1(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log |DF^N(x_0)| \tag{5.17}$$

siendo $DF^N(x_0)$ el determinante de la matriz jacobiana de F^N evaluada en el punto x_0 . Este exponente representa la máxima tasa de divergencia media de las órbitas de puntos infinitesimales próximos a x_0 . Tal divergencia tiene lugar en las direcciones tangenciales al atractor. En general, un sistema dinámico n -dimensional tiene n exponentes de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Para $n = 3$, como hemos dicho, e^{λ_1} da el máximo factor (en promedio sobre sucesivas iteraciones) por el cual un error es amplificado, $e^{\lambda_1 + \lambda_2}$ nos da el máximo factor (en promedio) por el cual se produce el cambio de área y, $e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$ el máximo factor por el cual se produce el cambio de volumen.

5.2.4 Exponentes de Lyapunov a partir de series temporales

El problema mayor en el análisis de las series temporales es que la dimensión del espacio de fases físico es *a priori* desconocida, y el espectro de exponentes de Lyapunov se calcula en un espacio de inmersión en vez del espacio real (físico). Con lo que el número de exponentes depende de la reconstrucción y puede ser mayor que en el espacio de fases físico.

A parte de estas dificultades, hay una cosa relevante positiva: los exponentes de

Lyapunov son invariantes bajo transformaciones continuas y así son independientes de la función de medida o del procedimiento de inmersión. Los exponentes tienen la dimensión inversa del tiempo.

Como hemos visto, hay tantos exponentes de Lyapunov como hay dimensiones del espacio de fases. Aquí vamos a concentrar el estudio en el exponente más importante que es el exponente *máximo de Lyapunov* que llamaremos simplemente λ . Sean β_{n_1} y β_{n_2} dos puntos en el espacio de fases con una distancia $\|\beta_{n_1} - \beta_{n_2}\| = \delta_0 \ll 1$. Llamemos $\delta_{\Delta n}$ a la distancia en el instante Δn entre las dos trayectorias resultantes de estos dos puntos, $\delta_{\Delta n} = \|\beta_{n_1+\Delta n} - \beta_{n_2+\Delta n}\|$. Luego, λ está determinado por

$$\delta_{\Delta n} \simeq \delta_0 e^{\lambda \Delta n}, \quad \delta_{\Delta n} \ll 1, \quad \Delta n \gg 1. \quad (5.18)$$

Tipo de movimiento	Exponente Máximo de Lyapunov
Punto fijo estable	$\lambda < 0$
Punto fijo superestable	$\lambda = -\infty$
Ciclo límite estable	$\lambda = 0$
Caos	$0 < \lambda < \infty$
Ruido	$\lambda = \infty$

Si λ es positivo esto significa una divergencia exponencial de las trayectorias inicialmente próximas, es decir caos. Naturalmente, dos trayectorias no pueden separarse más allá del tamaño del atractor. Así, la ecuación (5.18) es válida sólo para tiempos Δn para los cuales $\delta_{\Delta n}$ es pequeño. En el caso contrario, una definición matemática más rigurosa ha de involucrar un primer límite $\delta_0 \rightarrow 0$ de modo que un segundo límite $\Delta n \rightarrow \infty$ pueda ser efectuado sin que haya efecto de saturación.

Sólo en el segundo límite el exponente λ está bien definido y es una cantidad invariante.

5.2.4.1 Algoritmo para la computación del exponente de Lyapunov

El exponente máximo de Lyapunov puede determinarse sin la construcción explícita de un modelo para la serie temporal. Una caracterización fiable requiere que la independencia de los parámetros de inmersión y las leyes de crecimiento exponencial de distancias esté comprobada explícitamente [Kantz, 1994].

Consideremos la representación de la serie temporal como una trayectoria en el espacio de inmersión. Luego supongamos que estamos observando un punto de retorno s'_n muy próximo a un punto s_n previamente visitado. Podemos considerar la distancia $\Delta_0 = s_n - s'_n$ como una pequeña perturbación, que debe crecer de manera exponencial en el tiempo. Su futuro puede ser obtenido a partir de la serie temporal como: $\Delta_l = s_{n+l} - s'_{n'+l}$. Si encontramos que $|\Delta_l| \simeq \Delta_0 \epsilon^{\lambda l}$ luego λ es (con probabilidad uno) el exponente máximo de Lyapunov. Basándonos en este entendimiento, podemos establecer un estimador robusto y sin sesgo del exponente de Lyapunov máximo.

Tenemos que computar

$$S(\epsilon, m, t) = \left\langle \ln \left(\frac{1}{|U_n|} \sum_{s_n \in U_n} |s_{n+t} - s'_{n'+t}| \right) \right\rangle_n \quad (5.19)$$

U_n representa una vecindad del punto de referencia s_n de radio ϵ . Si $S(\epsilon, m, t)$ exhibe un crecimiento lineal con una pendiente idéntica para todos los m mayores que un m_0 dado y para un rango razonable de ϵ , esta pendiente se toma como una estimación para el exponente máximo de Lyapunov.

A parte de los parámetros de inmersión, el radio ϵ de la vecindad de los puntos de referencia para los cuales se computa S es de relevancia: cuanto más pequeño sea ϵ mayor será el rango en que S es lineal, si existe. Obviamente, el ruido y el número finito de puntos en la serie temporal hacen que ϵ esté limitado por debajo. No es necesario extender el promedio en la ecuación (5.19) a toda la serie, pues se puede obtener promedios razonables con unas centenas de puntos referencia s_n . Si algunos puntos referencia tienen pocos vecinos, la suma en la ecuación (5.19) está dominada por las fluctuaciones, con lo que tenemos que excluir los puntos de referencia que tienen, por ejemplo, menos de diez vecinos. De forma parecida a otras cantidades, la estimación del exponente de Lyapunov

puede verse afectada por las correlaciones temporales entre los puntos referencia y los vecinos. Por lo consiguiente, un tiempo mínimo entre pares $|n - n'|$ tiene que ser especificado también.

5.2.5 Dimensiones

Antiguamente la dimensión era o bien la altura, la longitud o la profundidad de un objeto. En el siglo XVII, Descartes dio una definición más general: una dimensión es una coordenada en un conjunto de ejes ortogonales. La altura, longitud y distancia, pasan a ser sólo casos especiales de coordenadas. Estas coordenadas suelen llamarse coordenadas del espacio Euclídeo. Esta definición resulta conveniente para describir el movimiento mecánico de un punto en el espacio.

En la mitad del siglo XIX, el matemático Riemann dio aún más generalidad a la noción de dimensión. Los fenómenos físicos evolucionan involucrando varios parámetros. Desde Reimann, cada parámetro involucrado en un proceso se llama *grado de libertad*, y cada coordenada representa un grado de libertad. El punto clave es que nada nos impide dar más de tres coordenadas espaciales a un punto. Sin embargo, la geometría pasa a ser más complicada cada vez que la dimensión del espacio aumenta.

En consecuencia, la dimensión era al principio una parte concreta del objeto, luego la dimensión pasa a ser una coordenada de un punto en movimiento en un espacio tridimensional, luego una coordenada pasa a ser un grado de libertad en un espacio n -dimensional, siendo n tan grande como se quiera.

En estos últimos años, la definición de las dimensiones como coordenadas no ha sido cuestionada, pero ha sido seriamente golpeada con la noción de *dimensión fractal*. Esta dimensión es más útil en ciertos casos, especialmente en el estudio de los sistemas caóticos y los objetos fractales. Pues un atractor caótico no es una estructura que llena el espacio (de fases) ni tampoco parece ser una curva (una línea). Esta geometría compleja puede ser caracterizada con una dimensión no entera (fraccionaria), y así la estructura se llama *fractal*. Mandelbrot [Mandelbrot, 1989] define un fractal de la manera siguiente:

“Una figura o un objeto natural se dice fractal si combina las siguientes carac-

terísticas: (a) sus partes tienen la misma forma o estructura que la del objeto entero, excepto que están a distinta escala y pueden ser ligeramente deformadas; (b) su forma es extremadamente irregular, o extremadamente interrumpida o fragmentada, y queda así, cualquier sea la escala a la cual se examina; (c) contiene distintos elementos cuyas escalas son muy variadas y cubren un largo rango”.

Las dimensiones generalizadas son una clase de cantidades con que se puede caracterizar esta fractalidad. La dimensión de *Hausdorff* es, desde el punto de vista matemático, el concepto más natural para caracterizar un conjunto fractal. De otro lado, la dimensión de *información* tiene en cuenta las frecuencias relativas de visita de la trayectoria a un punto del conjunto, con lo que resulta más atractiva para sistemas físicos. Finalmente, para caracterizar los datos medidos, otros conceptos similares, como la dimensión de *correlación*, son más útiles.

Una aclaración general es muy relevante para entender las limitaciones de cualquier aproximación numérica: las dimensiones caracterizan un conjunto o una medida invariante que tiene como soporte el conjunto. Sin embargo cualquier conjunto de datos sólo contiene un número finito de puntos que representan el conjunto o la medida. Por definición, la dimensión de un conjunto finito de puntos es cero. Cuando determinamos la dimensión de un atractor numéricamente, estamos extrapolando a partir de un orden de escalas, hacia un orden de escalas infinitesimal donde el concepto de la dimensión está definido.

Por último hay que señalar que las dimensiones son invariantes bajo transformaciones continuas y por ello son computables en espacios de inmersión.

5.2.5.1 Dimensión de capacidad y de Hausdorff

La dimensión de *capacidad* o de *recuento de cajas* es una manera simple de definir una dimensión fractal. Está relacionada con la dimensión de Hausdorff, y en la mayoría de los casos son iguales (y a menudo se tratan como tal en el contexto de los sistemas dinámicos) aunque hay excepciones. La construcción es la siguiente.

Supongamos que tenemos un conjunto en un espacio m -dimensional. Imag-

inemos un recubrimiento del espacio con cajas m -dimensionales del mismo tamaño y de lado igual a ϵ ; luego contemos las cajas que contienen puntos del conjunto, digamos $N(\epsilon)$. La dimensión de capacidad está definida como

$$D_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\epsilon^{-1})} \quad (5.20)$$

Es decir que $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-D_C}$. Esta definición da resultados consistentes con la dimensión usual en el caso de geometrías normales. Por ejemplo en el caso de una línea recta de longitud L necesitamos $N(\epsilon) = L/\epsilon$ cajas para cubrir la línea, así tenemos

$$D_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log L + \log \epsilon^{-1}}{\log \epsilon^{-1}} = 1 \quad (5.21)$$

Para conjuntos generados por iteración de sistemas dinámicos hay, por supuesto, una limitación en la aplicación de esta idea. Por ejemplo, debido a que la serie de datos $N(\epsilon)$ va a quedar saturada cuando haya una caja por cada punto de datos. De otra parte los datos están perturbados por errores de medición o por el ruido durante el experimento. Por consiguiente, la distribución de puntos a escalas finas va a estar perturbada, y podría haber entonces desviaciones del comportamiento esperado. Así en la práctica $\log N(\epsilon)$ no será proporcional a $\log \epsilon^{-1}$ para todo ϵ . En vez de eso, la representación de $\log N(\epsilon)$ en función de $\log \epsilon^{-1}$ sólo exhibirá una línea recta sobre una región intermedia del rango de ϵ donde la dependencia asintótica es una aproximación razonable. La pendiente de este rango intermedio se toma como una estimación de la dimensión de capacidad D_C . Esto pone grandes limitaciones a la hora de calcular la dimensión de manera precisa a partir de datos reales, en particular cuando la dimensión es grande. Aún para series generadas numéricamente como el mapa de Hénon, es difícil estimar la dimensión: la estimación de la dimensión oscila cuando varía la escala de longitud sobre la cual se hace el ajuste.

5.2.5.2 Dimensión generalizada

La dimensión de capacidad y de Hausdorff son puramente geométricas, y no hacen ninguna referencia a la medida del atractor, es decir al número de veces que la dinámica visita las distintas regiones del espacio de fases. Esto puede hacer que sea difícil calcularlas, pues regiones raramente visitadas pueden contribuir de manera significativa a la dimensión. Además un solo número es una caracterización incompleta de los conjuntos resultantes de sistemas dinámicos, que no son típicamente autosimilares como en el caso del conjunto de Cantor. Las dimensiones generalizadas son un intento de abordar esta cuestión.

Cubramos el atractor con cajas de tamaño ϵ y definamos la probabilidad de encontrar un punto en la i -ésima caja como $p_i = N_i/N$ con N_i el número de puntos en la i -ésima caja. Las p_i son estimaciones de la medida asociada con la caja $\int_{V_i} \rho(x) dV$. La dimensión generalizada de orden q se define como

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_i p_i^q}{\log \epsilon}. \quad (5.22)$$

Se puede demostrar que $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ para $q_1 > q_2$. Los conjuntos para los cuales D_q depende de q se llaman *multifractales*.

- **Dimensión de capacidad y de Hausdorff, $q = 0$:**

$$D_0 = D_C.$$

- **Dimensión de Información, $q = 1$:**

Para D_1 , se calcula D_q para $q \rightarrow 1$ (dado que $\sum_i p_i$ es 1 y el logaritmo es cero):

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_i p_i p_i^{q-1}}{\log \epsilon} \quad (5.23)$$

$$\simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_i p_i [1 + (q-1) \log p_i]}{\log \epsilon} \quad (5.24)$$

de modo que

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_i p_i \log p_i}{-\log \epsilon}. \quad (5.25)$$

Esta expresión nos dice cómo la información se escala con el radio de la caja, pues $\sum_i p_i \log p_i$ representa la información media. Por esto D_1 se llama la dimensión de *información*.

- **Dimensión de Correlación, $q = 2$:**

Para D_2 tenemos

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_i p_i^2}{\log \epsilon}. \quad (5.26)$$

Pero vemos que $\sum_i p_i^2$ es la probabilidad de que dos puntos se encuentren en una caja de lado (o radio) ϵ . Esta probabilidad es equivalente a la probabilidad de que dos puntos en la serie de datos estén separados con una distancia menor que ϵ . Esto se determina con la función de correlación. Así D_2 se llama la dimensión de *correlación*, y puede ser estimada a partir de una manipulación adecuada de los datos. Es una tarea más simple que el recuento de cajas. Definamos

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(\epsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (5.27)$$

Θ es la función escalon de Heaviside.

Luego

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon}. \quad (5.28)$$

5.2.6 La Teoría de la información y la entropía

Las entropías son un concepto teórico que caracteriza la cantidad de información necesaria para predecir la medida siguiente con una cierta precisión. La más conocida es la entropía de Kolmogorov-Sinai. Sin embargo, la entropía de correlación, pues está computada de una manera mucho más robusta, resulta más cómoda de utilizar.

5.2.6.1 Definiciones

Una secuencia de N lanzamientos (cara o cruz) de moneda tiene 2^N estados (resultados) posibles: hay una incertidumbre en la salida que medimos con la *entropía*, que es el logaritmo del número de los estados equiprobables posibles

$$S = \log 2^N = N \log 2. \quad (5.29)$$

Podemos utilizar las secuencias de resultados, por ejemplo: cara, cara, cruz ... cara, para mandar un mensaje, y podemos mandar hasta 2^N mensajes distintos. La *capacidad de información* de este esquema está medida aquí también con el logaritmo del número de mensajes posibles

$$I = \log 2^N = N \log 2. \quad (5.30)$$

En este contexto podremos (y vamos) a utilizar la base 2 par el logaritmo y decir entonces que hay N bits de información. Un punto de vista alternativo es que la medición de un resultado particular: por ejemplo una secuencia de caras y cruces nos ha enseñado algo sobre el sistema, y hemos aprendido $N \log 2$ bits de información. Las ideas de incertidumbre en el resultado (entropía) y lo que hemos aprendido de la medida (información) son complementarias.

Generalizando estas ideas a un sistema de N resultados posibles con probabilidades independientes p_i (que pueden ser diferentes) nos da la expresión de la entropía S del sistema o la información obtenida al encontrar un resultado particular

$$I = S = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i. \quad (5.31)$$

Este resultado es familiar en la termodinámica, y es debido a Shannon [Shannon and Weaver, 1963] en el contexto de la información.

5.2.6.2 Entropía de correlación

Hemos visto que la dimensión de correlación caracteriza la dependencia de la suma de correlación (5.27) en ϵ , dentro del rango de escalamiento. Es natural que nos preguntemos qué podemos aprender de su dependencia en m , una vez m es mayor que D_0 . El número de vecindades de radio ϵ de un vector de inmersión es una estimación de la densidad de probabilidad local.

Todas las m -componentes del vecino tienen que ser similares a las del vector elegido simultáneamente. Así cuando m aumenta, entran en juego probabilidades que cubren extensiones en el tiempo más largas. El escalado de estas probabilidades está relacionado con la entropía de correlación h_2 de un modo tal que

$$C(m, \epsilon) \simeq \epsilon^{D_2} \epsilon^{-mh_2}, \quad (5.32)$$

Como para el escalado en ϵ , la dependencia en m también es válida sólo asintóticamente para m grande, y que uno nunca alcanzará debido a la carencia de puntos en los datos. De modo que uno debe estudiar $h_2(m)$ frente a m e intentar una extrapolación para m grande.

Capítulo 6

Estudio del sistema en codimensión 1

En este capítulo y los que siguen, vamos a estudiar la aplicación unidimensional relacionada con el sistema de la bola y la dinámica que yace detrás del sistema. El estudio se hará en dos fases. Primero en codimensión 1 (considerando un único parámetro de control, la amplitud del campo eléctrico en este caso). Luego se considerará el sistema en codimensión 2, para investigar el comportamiento del sistema cuando los dos parámetros (la amplitud y la frecuencia) varían simultáneamente.

Recordemos el modelo experimental ya descrito en el capítulo 2. El sistema consiste en una bola conductora inmersa en un líquido poco conductor confinado entre dos electrodos horizontales. Ahora consideramos el caso en que el campo aplicado es alterno (un campo estático más una componente sinusoidal). El tiempo transcurrido entre los impactos sucesivos de la bola con el electrodo se toma como medida principal (observable) para describir la dinámica del sistema.

En el capítulo 2 hemos visto que, a campo constante, el bote de la bola es regular. Sin embargo, cuando se superpone una componente sinusoidal al campo estático, la dinámica cambia. Al variar la amplitud de la componente alterna del campo, el tiempo de bote experimenta un desdoblamiento de período que lo lleva a un movimiento caótico. Basándonos en las ecuaciones de movimiento

de la bola deducimos una aplicación no lineal que relaciona el $(n + 1)$ -ésimo impacto con el n -ésimo. La iteración de esta aplicación nos permite estudiar las órbitas, el comportamiento asintótico y la dinámica caótica del sistema.

Para identificar y estudiar el movimiento caótico del sistema haremos uso de un conjunto de programas, TISEAN, implementados por Kantz y Schreiber [Kantz and Schreiber, 1997]. Así, vamos a calcular las medidas invariantes características de los atractores caóticos como las dimensiones, los exponentes de Lyapunov y las entropías.

El sistema depende normalmente de dos parámetros de control. Pues, además de la amplitud, la frecuencia del campo aplicado es relevante en la dinámica del sistema. La variación de los dos parámetros conduce a un sistema de codimensión 2. El estudio de tal sistema necesita investigar la topología del plano de parámetros. De hecho, este plano exhibe distintas zonas que corresponden a varios tipos de movimiento: periódico de todos los períodos, cuasiperiódico, y por supuesto caótico. Se detectan estructuras típicas como las estructuras llamadas *Crossroad-area*, *Spring-area* y los puntos y singularidades del tipo *Cusp* (véase referencias [Carcasses et al., 1991] y [Kuznetsov et al., 2001]).

6.1 Modelo teórico para la dinámica de la bola

6.1.1 Derivación del modelo

Reconsideramos la ecuación de movimiento de la bola conductora

$$m_e \frac{dv}{dt} = F_e + F_g + F_d, \quad (6.1)$$

con las expresiones de las fuerzas detalladas en el capítulo 2, a partir de la cual dedujimos la expresión del tiempo de bote. La relación entre el tiempo de bote Δt y el campo aplicado E_0 en el caso estático es (véase sec. 2.2.2)

$$E_0 = E_c \sqrt{\frac{\Delta t / \tau}{1 - e^{-\Delta t / \tau}}} \quad (6.2)$$

Ahora suponemos que el campo aplicado es una superposición de una componente continua E_0 y una componente alterna de amplitud aE_0 y de frecuencia

ω tal que el campo total sea: $E(t) = E_0(1 + a\text{sen}(\omega t))$. El parámetro G se define como $G = (E_c/E_0)^2$.

Pongamos $\Omega = \omega\tau$ y hagamos un cambio de variables $s = t/\tau$, para adimensionalizar el tiempo. Con estas formulaciones, la ecuación de movimiento después del n -ésimo impacto se escribe, en forma adimensional, como

$$r \frac{d\chi}{ds} = \frac{(1 + a\text{sen}(\Omega s_n))(1 + a\text{sen}(\Omega s))}{G} e^{-(s-s_n)} - 1 \quad (6.3)$$

con $r = 6\pi\rho_l\nu R^2/(m - m_l)g\tau$, y $\chi = z/R$.

La integración de esta ecuación entre s_n y s_{n+1} nos da

$$\begin{aligned} \Delta s_{n+1} = & \frac{1 + a\text{sen}(\Omega s_n)}{G} \left[1 - e^{-(s_{n+1}-s_n)} \right. \\ & + \frac{a}{1 + \Omega^2} ((\text{sen}(\Omega s_n) + \Omega \cos(\Omega s_n)) \\ & \left. - (\text{sen}(\Omega s_{n+1}) + \Omega \cos(\Omega s_{n+1})) e^{-(s_{n+1}-s_n)} \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

$\Delta s_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ es el tiempo que dura el $(n + 1)$ -ésimo bote. Esta ecuación define implícitamente un mapa no lineal unidimensional. El tiempo desde el primer impacto, s_{n+1} , se presenta como una función del anterior, s_n , de la forma

$$s_{n+1} = F(s_n, a, G, \Omega). \quad (6.5)$$

Cuando el factor $G \rightarrow 0$, es decir que E_0 es mucho mayor que el campo umbral E_c , el mapa se reduce a

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{G} + \frac{2a}{G} \text{sen}(\Omega s_n) + \frac{a^2}{G} \text{sen}^2(\Omega s_n). \quad (6.6)$$

6.1.2 Mapa en codimensión uno

Primero vamos a estudiar el mapa (6.4) cuando la amplitud a varía mientras la frecuencia Ω está mantenida constante e igual a la frecuencia del bote regular Ω_0 . Para $a \neq 0$ pero aún pequeño, la bola sigue botando con un tiempo de bote constante como en el caso del campo estático. Así, el atractor del sistema sigue siendo un punto fijo. Cuando a aumenta por encima de un cierto valor, el sistema

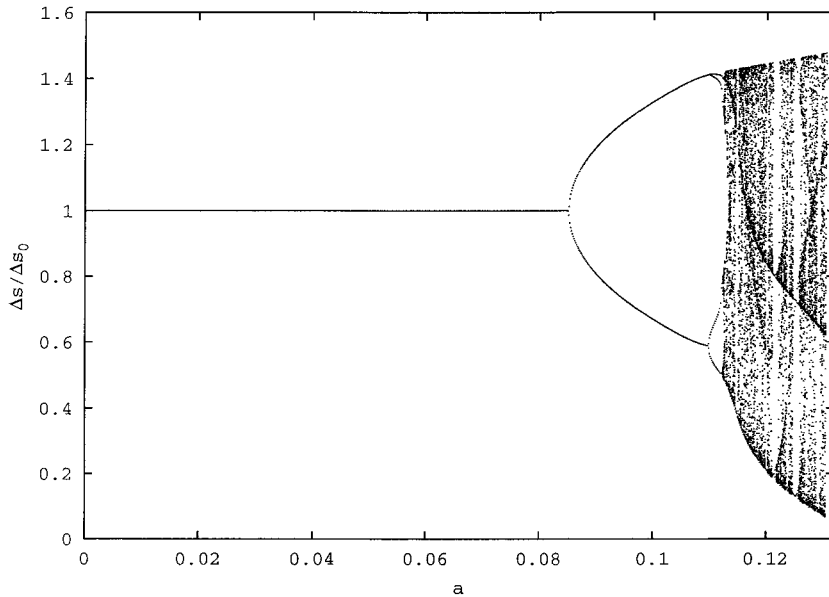


Figura 6.1: Diagrama de bifurcación del sistema (6.4) para una frecuencia igual a la frecuencia del bote regular, $\Omega = 10$ ($G = 0.7425$). La amplitud a varía en el intervalo $[0.0, 0.13]$.

experimenta una primera bifurcación. El movimiento es entonces periódico de período 2 y la órbita es un conjunto de dos puntos fijos. Más aumento en la amplitud conduce a nuevas bifurcaciones y períodos 2^k (con $k = 1, 2, 3, \dots$) vía desdoblamiento de período. El período tiende a infinito cuando la amplitud tiende a un valor crítico a_c , para el cual el sistema se vuelve caótico.

La figura 6.1 muestra el diagrama de bifurcación obtenido iterando el mapa numérico (6.4), para $G = 0.7425$ lo que corresponde a una frecuencia $\Omega_0 = 10$ y variando a en el intervalo $[0.0, 0.13]$. La cascada de desdoblamiento de período es parecida a la de Feigenbaum (por ejemplo el caso del mapa logístico), pero los factores de escalado son distintos. En concreto, el desdoblamiento de período y la transición al caos están caracterizados con un comportamiento crítico del tipo *Tricrítico* (T) [Kuznetsov et al., 1997]. Volveremos a esto en detalle en el capítulo 7 donde estudiaremos la estructura del plano de parámetros.

Si sintonizamos la frecuencia de la señal de modo que sea un múltiplo de la

frecuencia regular del bote, es decir para $\Omega = n\Omega_0$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ obtendremos un diagrama de bifurcación similar al diagrama 6.1 con el mismo tiempo de bote regular. Sin embargo, los valores de bifurcación a lo largo del eje a disminuyen a medida que aumenta n .

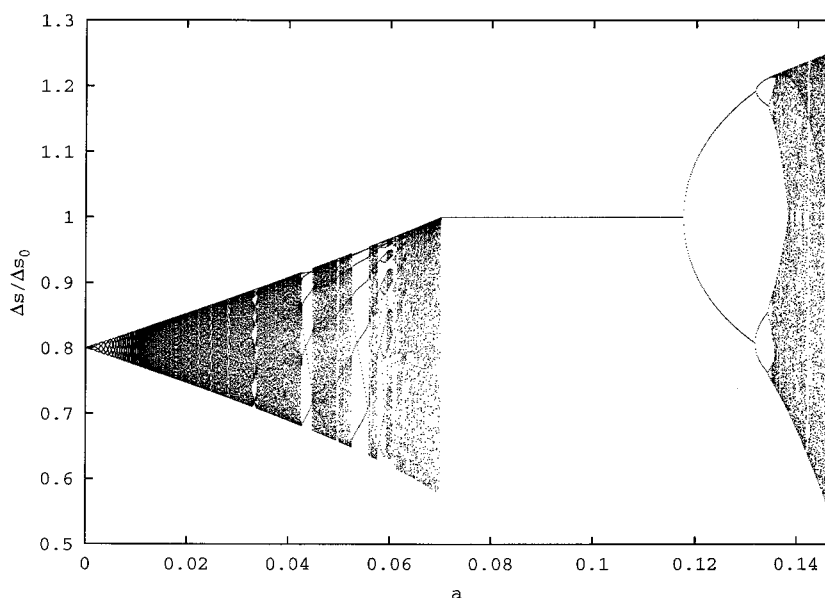


Figura 6.2: Diagrama de bifurcación del sistema (6.4) para $\Omega = 0.8\Omega_0$. La frecuencia del bote regular es $\Omega_0 = 10$.

Para valores de $\Omega \neq n\Omega_0$, el comportamiento del sistema es bastante distinto. En este caso, los botes sólo son regulares para $a = 0$, y es cuasiperiódico para $a \neq 0$. El movimiento vuelve a ser periódico cuando el parámetro a traspasa un cierto valor crítico. Luego el sistema emprende un desdoblamiento de período conduciendo al caos. La figura 6.2 muestra el diagrama de bifurcación del modelo numérico (6.4) para $\Omega = 0.8\Omega_0$. La trayectoria cuasiperiódica (para un valor de a dado) representa un patrón cerrado, que es un *2-toro* (toro en 2D). Sobre este toro, el sentido de rotación de las sucesivas soluciones s_i está preservado. Así, dada una secuencia de condiciones iniciales, el orden de los puntos en la secuencia no está alterado por la iteración. Este hecho puede ser utilizado para mostrar que no hay caos en este caso.

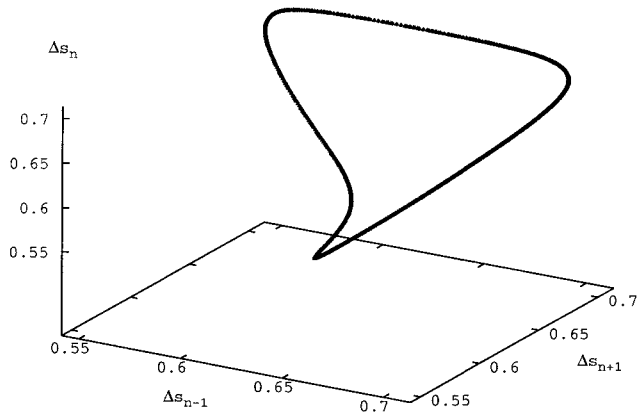


Figura 6.3: Representación en 3D de una trayectoria cuasiperiódica.

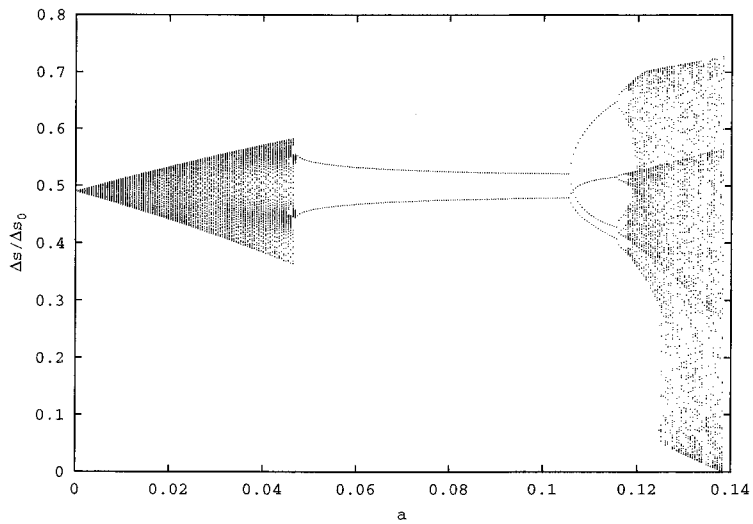


Figura 6.4: Diagrama de bifurcación del sistema (6.4) para $\Omega = 0.49\Omega_0$. El sistema pasa directamente del régimen cuasiperiódico al periódico de período 2.

En la figura 6.3 se muestra un ejemplo de la trayectoria cuasiperiódica en tres dimensiones como Δs_{n+1} vs Δs_n vs Δs_{n-1} .

Al aumentar a la trayectoria está atraída por un número determinado de puntos. Este número de puntos define el número de períodos que tendrá el sistema al dejar la zona cuasiperiódica y pasar a un movimiento periódico. Este paso de movimiento cuasiperiódico a periódico se conoce como *sincronización de fase* (phase locking). Esto viene del hecho de que, durante el movimiento cuasiperiódico, el sistema está estimulado por dos frecuencias *no commensurables*. Estas dos frecuencias son la frecuencia propia del sistema y la frecuencia de la fuerza de forzamiento. Cuando estas frecuencias tienden a tener una razón racional (p/q), ocurre el fenómeno de sincronización de fase.

En la figura 6.2 el sistema pasa, al aumentar a , de un movimiento cuasiperiódico a un movimiento periódico de período 1. Hay otros casos en que el sistema pasa inmediatamente a movimientos de período 2, 3, 5 ... Por ejemplo en la figura 6.4 se ve el caso en que el movimiento pasa de cuasiperiódico a periódico con período 2. En la figura se representa el caso para $\Omega = 0.45\Omega_0$.

Un análisis más detallado del diagrama de bifurcación del mapa, cerca de la zona caótica, muestra la existencia de cascadas de Feigenbaum incompletas o lo que se llama *bubbling*. Este fenómeno se ha puesto de manifiesto en ciertos sistemas dinámicos iterados [Thompson and Stewart, 2002]. Thamilmaran y Lakshmanan [Thamilmaran and Lakshmanan, 2002], por ejemplo, han mostrado la existencia de este fenómeno como una de las rutas al caos en el sistema del circuito de Murali-Lakshmanan-Chua. Una razón importante del desdoblamiento de período incompleto es que la dinámica no puede ser descrita localmente por ningún mapa unidimensional. La dinámica es esencialmente multidimensional. En tal caso, es muy probable observar otros tipos de bifurcación hacia el caos.

Las cascadas incompletas de Feigenbaum representan bifurcaciones múltiples hacia el caos, y luego un desdoblamiento inverso. Surgen también formas de *anillos* que corresponden a la bifurcación de un período 1 en período 2 y luego una vuelta al período 1. En la figura 6.5 se ve una ampliación de una parte del diagrama de bifurcación cerca de zona caótica que muestra este tipo de fenómeno para el mapa (6.6).

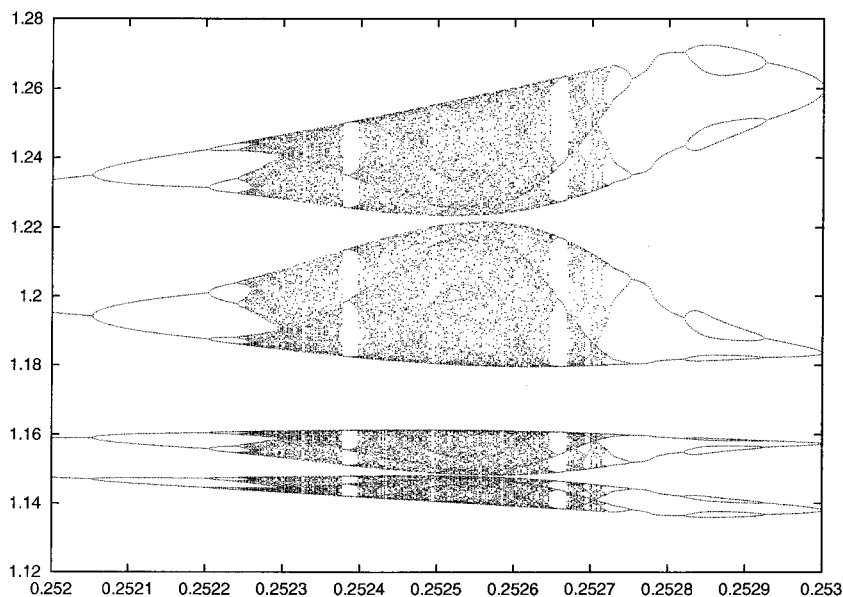


Figura 6.5: Una parte del diagrama de bifurcación del mapa (6.6) que muestra las cascadas incompletas de Feigenbaum o *Bubbling*. Se nota también que hay un doblamiento de las trayectorias en el espacio, lo que muestra que se necesita mayor dimensión para representar la dinámica del sistema.

6.1.3 Caso de la frecuencia como parámetro de control

Un caso interesante también es fijar la amplitud a y tomar la frecuencia Ω como parámetro de control. Esto pone de manifiesto la riqueza de comportamientos del sistema. Como ejemplo sencillo hemos tomado el sistema (6.6) que corresponde al mapa límite del sistema de la bola. Para una amplitud pequeña ($a = 0.04$), la variación de Ω nos proporciona el diagrama de bifurcación representado en la figura 6.6. Se ve un desdoblamiento de período inverso, también se ven zonas cuasiperiódicas y caóticas. Se distingue el caos del comportamiento cuasiperiódico a base del criterio del exponente de Lyapunov cuya representación se ve en la figura 6.7.

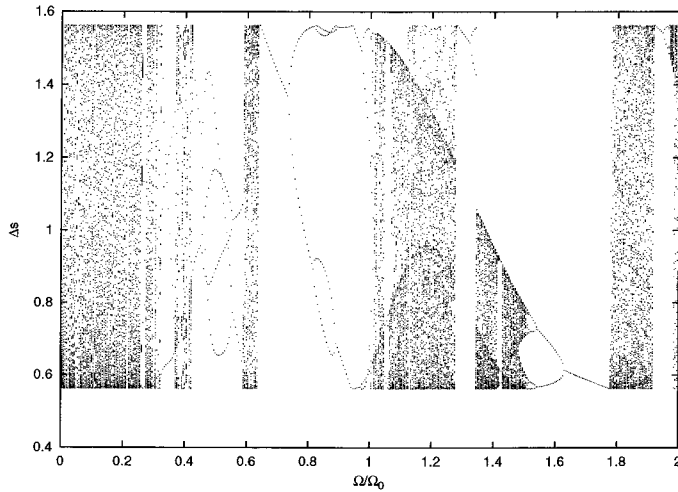


Figura 6.6: Una multitud de comportamientos surge en el caso en que se toma la frecuencia Ω como parámetro de control fijando la amplitud. Aquí se considera el sistema (6.6) para $a = 0.04$. Aparecen, así, desdoblamientos de período inversos, caos y anillos que corresponden al fenómeno llamado cascadas de Feigenbaum incompletas.

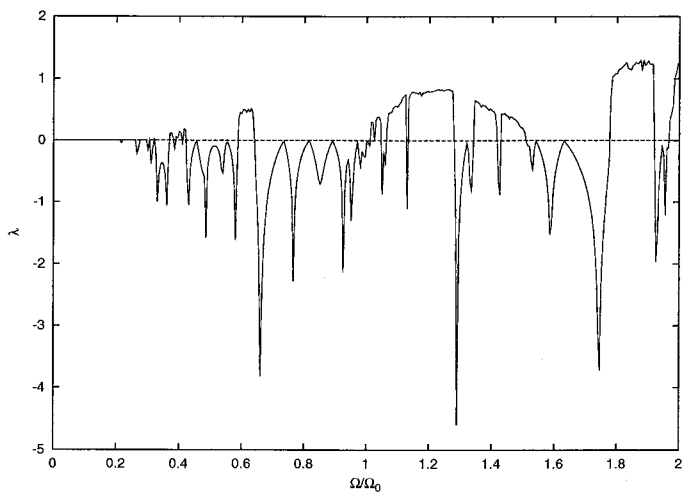


Figura 6.7: Exponente de Lyapunov correspondiente al diagrama de bifurcación de la figura 6.6. El exponente λ es cero para valores pequeños de Ω/Ω_0 (lo que pone de manifiesto la existencia también de zonas cuasiperiódicas no distinguidas en el diagrama de bifurcación). λ tiende a $-\infty$ cuando el período se hace superestable.

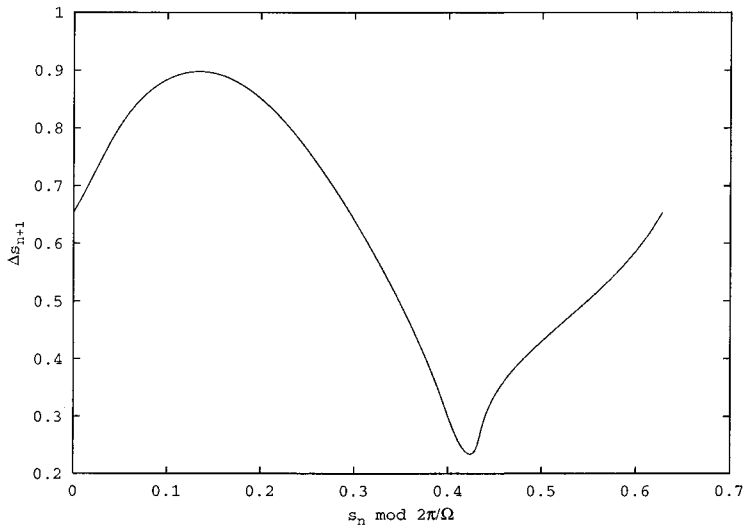


Figura 6.8: Representación del tiempo de bote Δs_{n+1} como función del tiempo desde el primer impacto $s_n \bmod 2\pi/\Omega$.

6.1.4 Estabilidad y bifurcaciones de los puntos de equilibrio

Se nota que el mapa (6.4) es invariante bajo el cambio de coordenadas $s \rightarrow s + k\frac{2\pi}{\Omega}$ con $k = 1, 2, \dots$. Con lo que será más sensato representar Δs_{n+1} como función de s_n módulo $2\pi/\Omega$ para ver cómo varía el tiempo de bote con el tiempo total desde el primer impacto. Esta representación se muestra en la figura 6.8.

Ahora vamos a estudiar la estabilidad de los puntos fijos del sistema en el caso $\Omega = \Omega_0$ y por qué no hay ningún punto fijo en el caso de $\Omega \neq \Omega_0$ hasta que cierto valor del parámetro a se alcance.

Para $\Omega = \Omega_0$ el mapa $s_{n+1} = F(s_n)$ tiene un punto fijo estable s^f para valores pequeños de a , es decir $|F'(s^f)| < 1$. Cuando a aumenta por encima de un valor crítico, la pendiente cruza el umbral $F'(s^f) = -1$, y la bifurcación de desdoblamiento de período tiene lugar cuando el punto fijo pierde su estabilidad (ver figura 6.9).

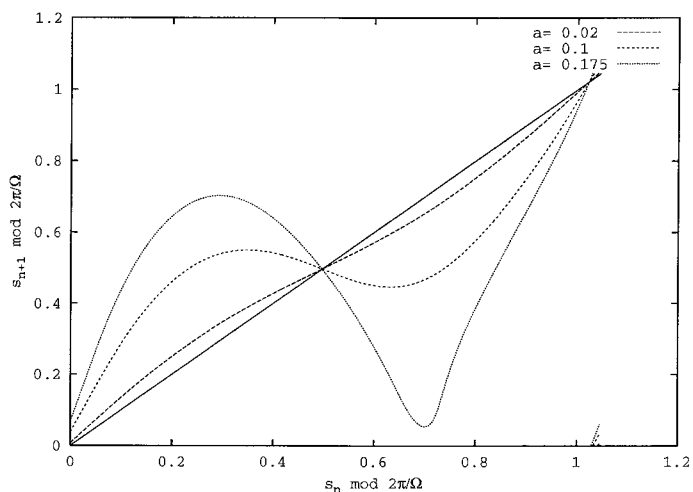


Figura 6.9: Representación del tiempo desde el primer impacto, s_{n+1} frente a s_n (ambos modulo $2\pi/\Omega$) para $\Omega = \Omega_0$ y distintos valores de a . La intersección de la función con la diagonal revela la existencia de un punto fijo para cualquier valor de a pequeño. Cuando la pendiente de la función supera 1 en valor absoluto, ocurre el primer desdoblamiento de período.

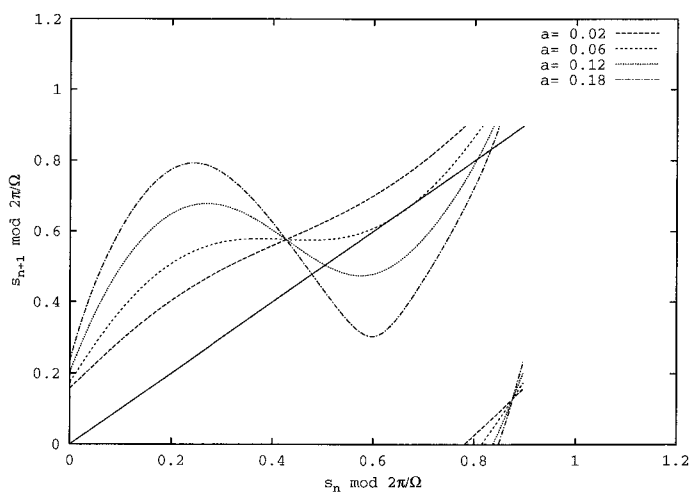


Figura 6.10: La misma representación que la de la figura 6.9, aquí $\Omega \neq \Omega_0$. No hay puntos fijos para a pequeño. Un punto fijo nace cuando a supera un valor crítico donde el sistema experimenta una bifurcación saddle-node.

En la figura 6.10 representamos s_{n+1} como función de $s_n \bmod (2\pi/\Omega)$ en el caso de $\Omega \neq \Omega_0$. El mapa no tiene ningún punto fijo para valores pequeños de a y el movimiento es cuasiperiódico. Un punto fijo aparece cuando a alcanza el valor para el cual la función $F(s_n)$ entrecruza la diagonal $s_{n+1} = s_n$. En este punto el sistema experimenta una bifurcación del tipo punto de silla que se traduce con una transición al movimiento periódico de período uno. Más aumento en a conduce a una nueva bifurcación cuando el punto fijo pierde su estabilidad. Esta bifurcación da lugar a un movimiento de período 2.

6.1.5 Medidas invariantes del atractor caótico

Haciendo uso de la teoría descrita en la sección 5.2, vamos a estudiar y caracterizar el caos en el sistema numérico presentado. Lo haremos considerando solamente las series temporales generadas con el sistema (6.4) sin considerar las expresiones analíticas. Así podemos comparar con las series temporales experimentales.

Primero hay que reconstruir el espacio de fases que, al ser el mapa unidimensional, requiere una dimensión de inmersión mínima $m_0=3$. La figura 6.11 muestra la reconstrucción del atractor en tres dimensiones como Δs_{n+1} vs Δs_n vs Δs_{n-1} . Se representan aquí 30 000 puntos de la serie temporal obtenida iterando el sistema (6.4) para $\Omega_0 = 10$ y $a = 0.1162$. La intersección de la diagonal principal $\Delta s_{n+1} = \Delta s_n = \Delta s_{n-1}$ con el atractor localiza los puntos fijos inestables incrustados en el atractor.

6.1.5.1 El exponente máximo de Lyapunov

Como hemos visto en la sección anterior, el exponente de Lyapunov es una medida de la divergencia de dos trayectorias inicialmente próximas mientras evolucionan en el tiempo. Tomamos dos puntos s_{n_1} y s_{n_2} que están inicialmente a una distancia $\delta(0)$. Después de un tiempo Δn esta distancia diverge exponencialmente hacia un valor $\delta(\Delta n) \simeq \delta(0)e^{\lambda\Delta n}$. El coeficiente λ es el exponente de Lyapunov.

Para obtener λ a partir de una serie temporal escalar (en ausencia de las

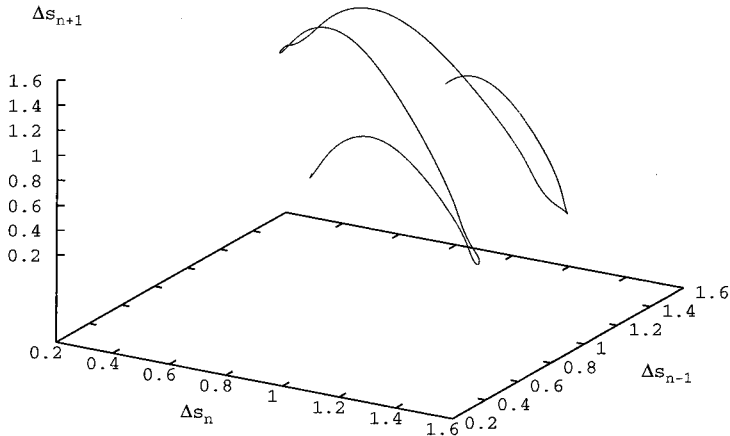


Figura 6.11: Representación tridimensional del atractor numérico reconstruido a partir de 30 000 iteraciones del sistema (6.4), para $\Omega_0 = 10$ y $a = 0.1162$.

ecuaciones que describen la dinámica), usamos el algoritmo propuesto por Kantz y Schreiber, que calcula la función

$$S(\Delta n) = \frac{1}{N} \sum_{n_0=1}^N \ln \left(\frac{1}{N_{n_0}} \sum_{s_n \in U(s_{n_0})} |s_{n_0+\Delta n} - s_{n+\Delta n}| \right) \quad (6.7)$$

donde $U(s_{n_0})$ representa una vecindad del punto de referencia s_{n_0} de radio ϵ , y N_{n_0} es el número de puntos en esta vecindad. Dos promedios se toman en esta función, uno sobre la vecindad del punto de referencia s_{n_0} y el otro sobre N puntos de referencia a lo largo de todo el atractor. Si la distancia entre dos puntos próximos diverge exponencialmente en el tiempo, $S(\Delta n)$ exhibirá un crecimiento lineal con una misma pendiente, para todas las dimensiones de inmersión m superiores a m_0 , y para un rango razonable de radio de vecindad ϵ . Con lo cual la pendiente de la parte lineal de las curvas dará una estimación del exponente máximo de Lyapunov.

Hemos aplicado este algoritmo a la serie temporal generada por el mapa (6.4). El resultado se muestra en la figura 6.12. Se observa un aumento lineal en

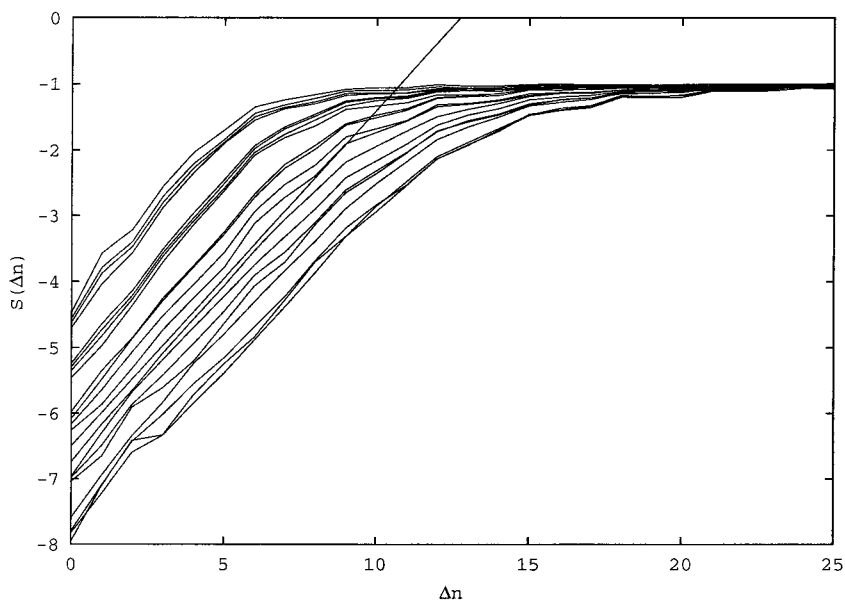


Figura 6.12: Representación de la función $S(\Delta n)$ frente a Δn para distintos radios de vecindad ϵ . Una estimación del exponente máximo de Lyapunov, que es la pendiente del ajuste a la parte lineal de todas las curvas, nos da $\lambda = 0.51 \pm 0.04$.

la representación de la función $S(\Delta n)$ para Δn pequeño. Esto se traduce en una divergencia exponencial de las trayectorias. El exponente de Lyapunov estimado para esta serie es $\lambda = 0.51 \pm 0.04$.

6.1.5.2 Dimensión de correlación

Los conjuntos invariantes que surgen en sistemas dinámicos con atractores caóticos, tienen habitualmente una estructura a cualquier escala (tan pequeña como sea), y la determinación de la dimensión de tales conjuntos (estructuras) no es nada trivial. En este caso la asignación de un valor a la dimensión provee una caracterización cuantitativa de la estructura geométrica del atractor. Para calcular la dimensión de correlación D_2 del atractor, hemos hecho uso del algoritmo propuesto por Grassberger y Procaccia [Grasseberger and Procaccia, 1982].

Primero calculamos la suma de correlación

$$C(m, \epsilon) = \frac{1}{N_{pairs}} \sum_{j=m}^N \sum_{k < j-w} \Theta(\epsilon - |s_j - s_k|), \quad (6.8)$$

donde s_i representa vectores de dimensión m reconstruidos a partir de la serie escalar con el método de retraso, $N_{pairs} = (N - m + 1)(N - m - w + 1)/2$ es el número de pares de puntos sobre los cuales se hace la suma; Θ es la función escalón de Heaviside y w , es un parámetro introducido para excluir los puntos en correlación temporal del recuento de pares. A una escala bastante pequeña y cuando la dimensión de inmersión m supera la dimensión por recuento de cajas (dimensión de capacidad), tenemos

$$C(m, \epsilon) \propto \epsilon^{D_2}. \quad (6.9)$$

La dimensión de correlación es una característica del atractor. Sin embargo su computación está afectada por dos limitaciones. Primero, a grandes escalas la autosimilaridad se rompe debido a la extensión finita del atractor. Segundo, a pequeñas escalas los datos están contaminados por el ruido. Con lo que sólo se espera encontrar un rango de valores de ϵ intermedio por el cual la dimensión de correlación estimada es independiente de m y de ϵ . En la práctica no se espera encontrar un rango de ϵ mayor que la quinta parte del tamaño global del atractor [Kantz and Schreiber, 1997].

En la figura 6.13 se ve una representación en escala semi-logarítmica de la dimensión de correlación D_2 frente a ϵ para la serie numérica representada en la figura 6.11. Se representan los resultados obtenidos para la dimensión de inmersión entre 2 y 10.

La dimensión de correlación está estimada a partir del *plató* observado entre $\epsilon \sim 10^{-5}$ y $\epsilon \sim 10^{-1}$. El ajuste a una recta en esta región (*plató*) sugiere una dimensión $D_2 \sim 0.95$. Es obvio que la dimensión tiene que ser menor que 1, ya que la serie temporal está obtenida a partir de un mapa unidimensional. Este no es necesariamente el caso para las series experimentales, cosa que comprobaremos más adelante.

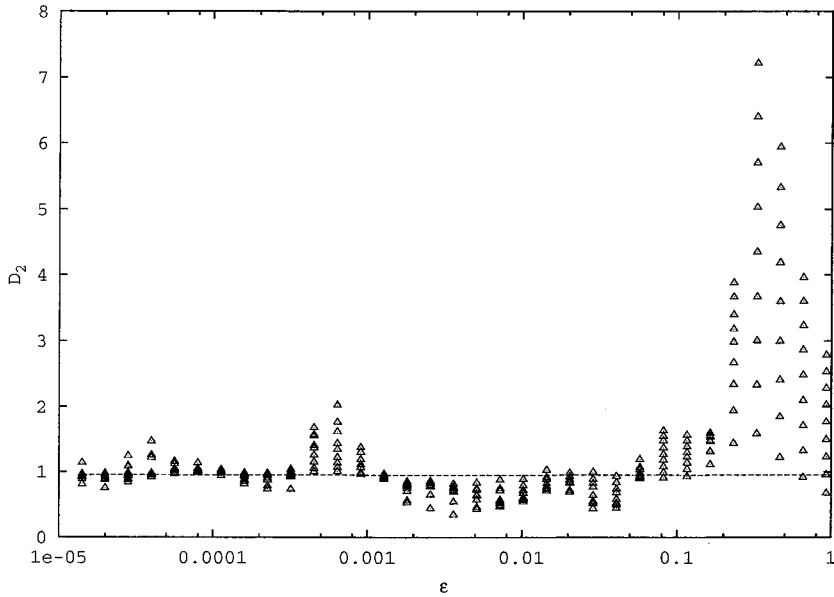


Figura 6.13: Representación en coordenadas semi-logarímicas de la dimensión de correlación D_2 del atractor numérico de la figura 6.11. Un ajuste lineal al plató entre $\epsilon = 10^{-5}$ y $\epsilon = 10^{-1}$ proporciona una estimación de $D_2 \simeq 0.95$. La dimensión de inmersión toma valores desde $m = 2$ hasta 10.

6.1.5.3 Entropía de correlación

Para medir, de cierto modo, la aleatoridad o el desorden que caracteriza la serie de datos, tenemos que calcular la entropía de correlación h_2 . Lo cual se hace también a partir de la suma de correlación (??). Pero en vez de buscar una dependencia en ϵ a un valor fijo de m , estudiamos ahora cómo la suma de correlación depende de la dimensión de inmersión m . La entropía de correlación está relacionada con la suma de correlación de tal modo que, para m grande, tenemos

$$C(m, \epsilon) \simeq \epsilon^{D_2} \epsilon^{-mh_2} \quad (6.10)$$

Así uno busca un rango de escalamiento de h_2 para valores crecientes de m . La limitación más importante para el cálculo de h_2 es la necesidad de grandes

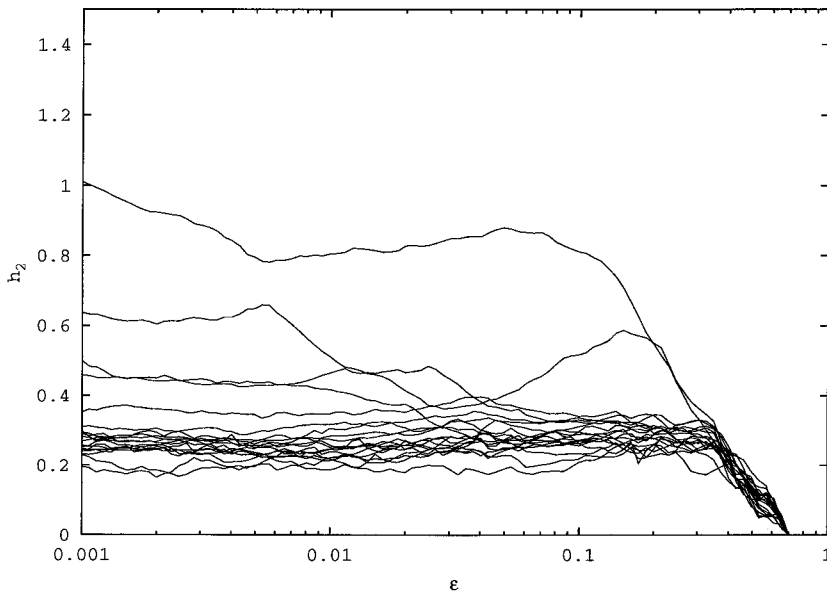


Figura 6.14: Representación en coordenadas semi-logarítmicas de la entropía de correlación h_2 del atractor numérico de la figura 6.11. Un ajuste lineal al “plató” entre $\epsilon = 10^{-3}$ y $\epsilon = 10^{-1}$ proporciona una estimación de $h_2 \simeq 0.27$. La dimensión de inmersión varía entre 2 (curva de arriba) y 20 (abajo).

valores de m para observar el comportamiento asintótico (6.10). La carencia de vecinos suficientes para m grande hace que las estadísticas en la suma de correlación sean cada vez menos significativas.

Una representación de la entropía $h_2(m)$ calculada para la serie temporal considerada anteriormente, para valores de $m = 2, 3, \dots, 20$, muestra un plató alrededor de $h_2 \simeq 0.27$ para $m > 5$ (Ver figura 6.14).

La entropía de correlación h_2 es un límite inferior de la entropía de Kolmogorov-Sinai, que es a su vez igual a la suma de todos los exponentes de Lyapunov positivos. En consecuencia de lo cual, para un sistema 1D, h_2 tiene que ser menor que el exponente máximo de Lyapunov. Este resultado se da en nuestro caso.

6.1.5.4 Control del caos

En los últimos años las áreas de investigación relativas al control del caos han recibido un gran interés. Hay razones prácticas para controlar el caos porque, en algunos sistemas, el caos puede causar problemas o más aún situaciones catastróficas. Por ejemplo el caos en el corazón puede resultar en un daño del tejido o aún más en un ataque cardiaco. El control del caos puede llevar toda la riqueza del caos al uso.

Ott, Grebogi y York [Ott et al., 1990] han hecho la importante observación de que el atractor caótico está compuesto de un conjunto extremadamente denso de órbitas periódicas inestables. Si alguna de estas órbitas puede ser estabilizada, entonces uno puede desear controlar las órbitas de modo que sean más adecuadas a un criterio de funcionamiento dado. La clave es que en una situación donde el sistema ha de servir para múltiples propósitos, uno puede simplemente elegir entre las distintas órbitas para que el sistema ejecute una tarea u otra. De otro lado, si el sistema no fuera caótico habría sido necesario rediseñar el sistema original para acomodarlo a los distintos propósitos.

Trabajos anteriores han mostrado que la manipulación de los sistemas caóticos puede aportar una mejoría en el funcionamiento de los sistemas tal como la conversión de un latido caótico del corazón en un latido rítmico, o convertir un láser caótico en una salida de pulsos regulares. Estos provechos vienen sin rediseñar un nuevo láser o instalar un nuevo corazón, sino simplemente inyectando una pequeña señal en el sistema en un instante apropiado.

El método OGY supone sólo los cuatro puntos siguientes. Primero, la dinámica del sistema puede ser representada como resultado de un mapa no lineal n -dimensional (como por una sección de superficie por ejemplo), de la forma $x_{n+1} = \mathbf{f}(x_n, a)$, donde a es un parámetro asequible del sistema. Segundo, hay una órbita específica del mapa que existe dentro del atractor, alrededor de la cual uno quiere estabilizar la dinámica. Tercero, hay una perturbación máxima δa_* del parámetro a por la cual es aceptable variar a respecto a su valor nominal a_0 . Finalmente, uno supone que la órbita periódica es una función de a , pero que la dinámica local cerca de ello no varía mucho con las pequeñas variaciones permitidas en a . Se hace notar que mientras se supone que la dinámica emerge

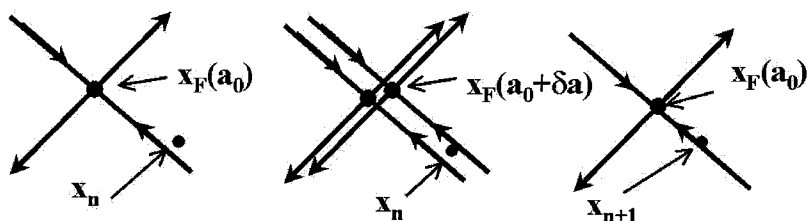


Figura 6.15: Esquema del algoritmo de control de OGY para un punto fijo del tipo punto de silla: 1) la n -ésima iteración x_n cae cerca del punto fijo $x_F(a_0)$. 2) Se introduce una perturbación de a para mover el punto fijo. 3) La iteración siguiente está forzada a caer en la variedad estable del punto fijo $x_F(a_0)$. Luego cesa la perturbación.

de un mapa, no se necesita un modelo teórico para la dinámica global.

Entonces si tenemos pleno caos, la idea OGY no es cambiar drásticamente la amplitud a hasta la zona periódica, ni siquiera hasta una ventana periódica cercana. Tratamos de controlar el caos con variaciones muy pequeñas de a en plena zona caótica. La clave del método consiste en estabilizar la órbita x_n en alguna de las infinitas órbitas inestables que hay dentro del atractor caótico. Veremos luego una representación de estos períodos para el atractor experimental del sistema de la bola (véase página. 6.2.3.4).

La figura 6.15 explica esquemáticamente el método OGY. Por ejemplo para estabilizar el sistema en la órbita inestable de período 2, procederíamos así:

1. Fijar el parámetro a en un valor a_0 que corresponde a un movimiento caótico,
2. Calcular x_n ,
3. Calcular x_{n+1} ,
4. Calcular el valor del parámetro a_p que correspondería a un período 2, es decir el valor de a que satisface la condición: $x_{n+2} = x_n$ y $x_{n+3} = x_{n+1}$,
5. Si $|a_p - a_0| < 0.01$ entonces $a = a_p$,
6. Si no, volver a 2).

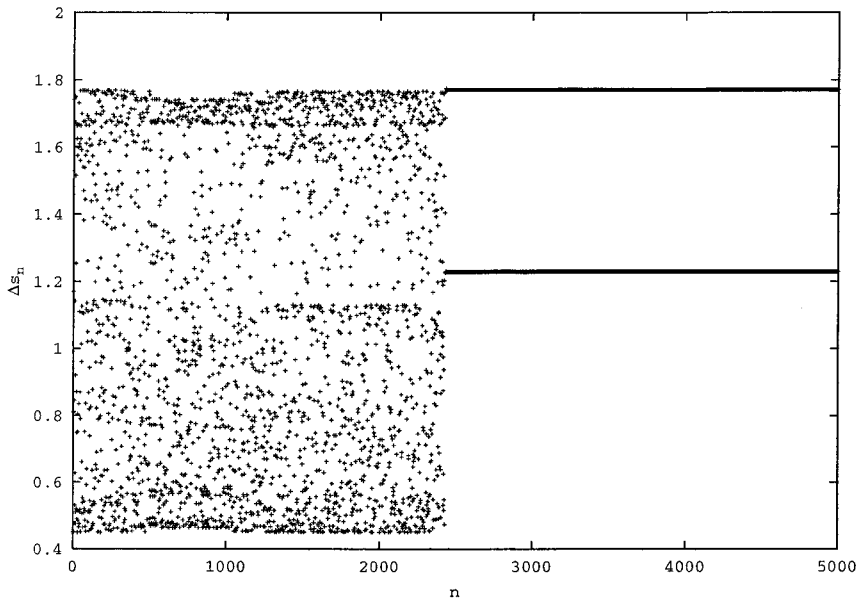


Figura 6.16: Control del período 2 en el mapa límite (6.6). Al instante $n = 2432$ la trayectoria se acerca a la órbita de período 2, se inyecta una perturbación pequeña en el parámetro a y el sistema se estabiliza en un ciclo de período 2.

Este esquema representa el método OGY simplificado por Flynn y Wilson [Flynn and Wilson, 1998].

Hemos aplicado el método al mapa límite del sistema de la bola (6.6). Así, hemos podido controlar la órbita de período 1 y la órbita de período 2. Mostramos el resultado, por ejemplo, del control del período 2 en la figura 6.16. Para el control hemos usado el método OGY simplificado por Flynn y Wilson [Flynn and Wilson, 1998].

El método OGY permite así, en principio, estabilizar el caos en cualquier órbita periódica inestable elegida, con un leve cambio del parámetro.

6.2 Estudio experimental

6.2.1 Montaje y adquisición de datos

Para estudiar la dinámica no lineal de la bola entre electrodos hemos utilizado el dispositivo experimental ya descrito en el capítulo uno. Todos los experimentos se han llevado a cabo con una celda con un volumen útil de 200 ml de líquido. La distancia entre los electrodos es de 2 cm.

Para proporcionar un campo alterno hemos utilizado un amplificador de alta tensión modelo *Trek 20/20A Amplifier* con una tensión máxima de 20 kV. La amplitud y la frecuencia de la tensión están controladas mediante la aplicación a la entrada del amplificador de tensión de una señal digital controlada por ordenador, a través de un conversor D/A. El electrodo inferior está conectado al ordenador a través de una tarjeta de adquisición para registrar el tiempo de bote de la bola. Se utiliza un programa desarrollado en TestPoint para controlar las características de la tensión aplicada así como los detalles relativos a la adquisición, visualización y análisis en tiempo real de los datos.

Como líquido, hemos utilizado aceite de maíz con una permitividad $\epsilon_l = 26.9 \times 10^{-12}$ F/m, una conductividad σ entre 20 y 30×10^{-12} S/m y una viscosidad $\nu = 5 \times 10^{-5}$ m²/s. La bola es una esfera de plástico cubierta con papel de aluminio y tiene un radio $R = 3.3$ mm y una masa $m = 233$ mg.

6.2.2 Dinámica regular

Para comprobar el modelo teórico propuesto en la sección anterior, para la dinámica de la bola, hemos llevado a cabo varios experimentos y registrado el tiempo de bote de la bola para varias amplitudes y frecuencias de la tensión alterna aplicada.

Por ejemplo mostramos en la figura 6.17 uno de los diagramas de bifurcación obtenidos para el tiempo de bote experimental.¹ Este diagrama muestra

¹Nos referimos al tiempo de bote experimental con la letra Δt_n pues se trata del tiempo real medido en segundos. Recordemos que Δs_n es el tiempo adimensional $\Delta s_n = \Delta t_n / \tau$ (con τ el tiempo de relajación del líquido que varía entre 0.5 y 1 s).

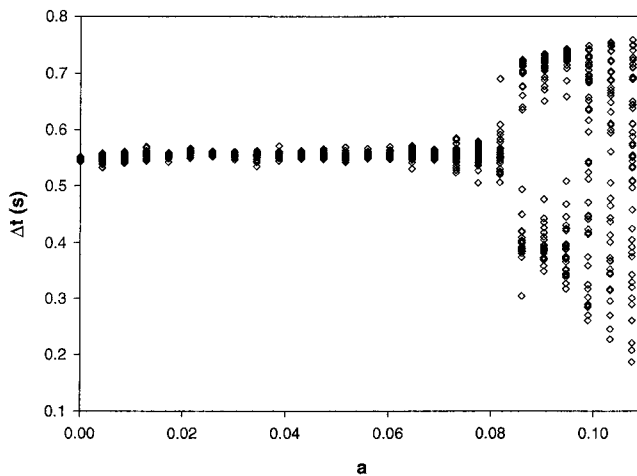


Figura 6.17: Diagrama de bifurcación experimental del sistema para una frecuencia Ω igual a la frecuencia del bote regular Ω_0 . El sistema exhibe un desdoblamiento de período y luego caos.

una cascada similar a la de Feigenbaum, como predice el modelo numérico. En esta gráfica se representa el resultado correspondiente a un valor de la frecuencia de la señal aplicada igual a la frecuencia del bote regular (en este caso: $\Omega_0 \simeq 10$). Se registran los tiempos de bote para un valor de la amplitud $a = 0.0$, y se determina la frecuencia del bote (regular en este caso) después de descartar los primeros 100 botes. Luego se incrementa la amplitud a con pequeños pasos. Para cada valor de la amplitud se registran los botes descartando los 100-300 primeros botes transitorios. El paso de amplitud se escoge de modo que el incremento sucesivo de la amplitud pueda cubrir un intervalo que va desde cero hasta un valor correspondiente al pleno caos en un tiempo no muy largo. Un tiempo demasiado largo puede afectar la frecuencia del bote regular, pues las características del líquido (esencialmente la conductividad) pueden variar notablemente entre el comienzo y el fin del experimento. Así el tiempo dedicado a cada experimento queda limitado. La duración de un experimento no supera 2 horas, salvo en el caso del estudio en codimensión dos (véase sec. 7.4), en que

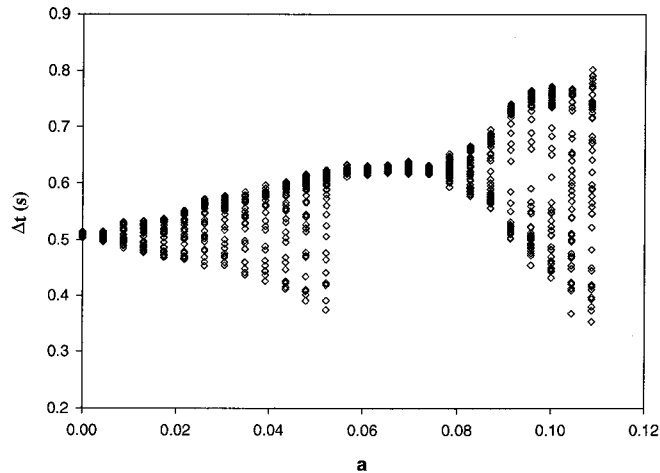


Figura 6.18: Diagrama de bifurcación para $\Omega = 0.8\Omega_0$. El sistema exhibe un comportamiento cuasiperiódico para bajas amplitudes antes de bifurcar hacia un punto fijo y luego emprender un desdoblamiento de período.

se necesitaba más tiempo para obtener resultados fiables. De otro lado, el ruido electrónico que proviene de la fuente de tensión y los amplificadores junto con las fluctuaciones experimentales, impiden una alta resolución a la hora de variar la amplitud a .

Aún en estas condiciones, se pueden distinguir las dos primeras bifurcaciones en el diagrama de bifurcación experimental 6.17. Los puntos de bifurcación subsiguientes se producen a intervalos del parámetro a cada vez más pequeños. Así, su determinación de manera experimental resulta una tarea muy difícil. No obstante se constata que el escalado no sigue la universalidad del tipo Feigenbaum.

En la figura 6.18 se muestra el diagrama de bifurcación para $\Omega = 0.8\Omega_0$. Es decir para una frecuencia de la señal aplicada distinta de la frecuencia del bote regular. Si recordamos el modelo numérico, esto corresponde a una situación en la que el comportamiento del sistema no es regular (periódico de período 1)

al imponer una señal de amplitud a pequeña. En este caso el sistema exhibe primero un comportamiento cuasiperiódico para pequeñas amplitudes. Luego, al cruzar la amplitud un valor crítico, el sistema experimenta una bifurcación punto de silla que estabiliza la dinámica en un punto fijo. Al aumentar más la amplitud, el sistema emprende una cascada de desdoblamiento de período. Se ve a partir de esta gráfica también que la dinámica que surge del modelo real es similar a aquella predicha por el modelo teórico propuesto.

Un examen detallado de los retratos de fases (Δt_{n+1} frente a Δt_n) para algunos valores determinados de la amplitud da más información sobre la dinámica, especialmente en el caso cuasiperiódico. De este modo se ha puesto de manifiesto experimentalmente la existencia, además del período 2, de períodos 3, 4 y 5. Esto muestra que el sistema no sólo puede exhibir un desdoblamiento de período (con períodos 2^k), sino también períodos de todos los valores enteros. Estos períodos, como veremos en la sección 7.2.3, son debidos al fenómeno llamado *sincronización de fase*. Este fenómeno surge esencialmente en zonas dentro del regimen cuasiperiódico. Así, mostraremos en lo que sigue algunas gráficas que representan los retratos de fase para distintos períodos que el sistema experimental exhibe (véase figuras 6.19 y 6.20).

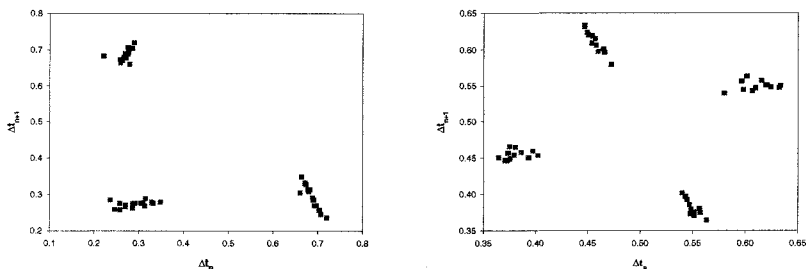


Figura 6.19: Períodos: 3 y 4.

Representamos en la figura 6.21 el diagrama de bifurcación experimental para un valor de la frecuencia cerca de la frecuencia mitad: ($\Omega = 0.56\Omega_0$). En este caso el diagrama de bifurcación empieza con un movimiento cuasiperiódico y pasa directamente a un movimiento periódico de período 2. Se ve que el

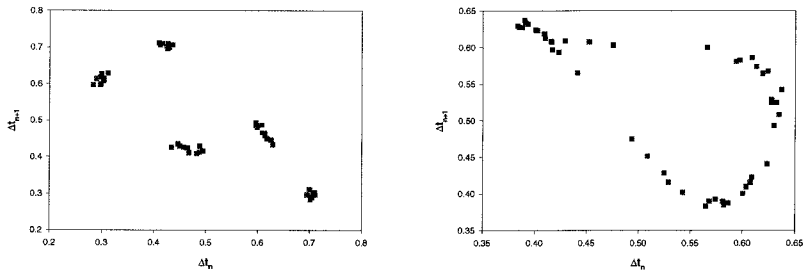


Figura 6.20: Izquierda: período 5, y derecha: ruptura de un ciclo cuasiperiódico.

diagrama de bifurcación experimental para esta frecuencia muestra un comportamiento semejante al comportamiento predicho por el modelo numérico que hemos visto en la figura 6.4.

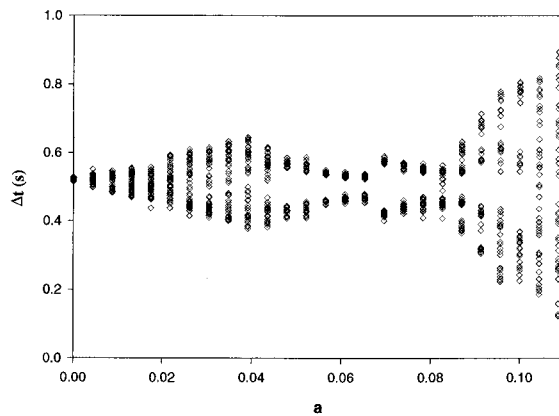


Figura 6.21: Diagrama de bifurcación experimental del sistema, para $\Omega = 0.56\Omega_0$. El comportamiento es bastante similar al del modelo numérico.

6.2.3 Dinámica caótica

Otra prueba necesaria para comprobar la validez del modelo teórico es la comparación del atractor caótico que surge de los datos experimentales con el del modelo numérico. Por eso, hemos registrado 15 000 puntos del tiempo de bote Δt_n en el régimen caótico.

Dibujamos en la figura 6.22 el tiempo reducido del $(n + 1)$ -er impacto $\Delta s_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\tau$ como función del tiempo desde el primer impacto $s_n \bmod 2\pi/\Omega$. Cuando el movimiento es caótico, hay contactos entre la bola y el electrodo para casi todas las fases posibles Ωs_n de la tensión aplicada, y es posible recubrir experimentalmente la función $\Delta s_{n+1} = F(s_n)$. Por consecuencia la figura 6.22 es la correspondencia experimental de la función adimensional representada en la figura 6.8.

Se nota una mayor dispersión en los datos cuando el tiempo de bote es muy pequeño. Esto es debido al hecho de que cuando la amplitud a es suficientemente alta, el campo eléctrico está en algunos momentos por debajo de la tensión umbral, con lo que la bola permanece sobre el electrodo inferior. La bola se queda quieta sobre la placa inferior durante una fracción de tiempo hasta que adquiera la carga suficiente para emprender un nuevo bote. Puesto que nosotros sólo medimos el tiempo entre pulsos, que corresponden a contactos eléctricos, el tiempo registrado para el bote siguiente es mayor que lo que tarda en realidad. Es decir medimos el tiempo de bote más el retraso.

6.2.3.1 Atractor caótico

Los datos experimentales están muy contaminados por el ruido, por consiguiente es necesario filtrarlos antes de someterlos a cualquier estudio. Hay varios métodos para eliminar el ruido de las series temporales no lineales. Hemos utilizado el método descrito en [Kantz and Schreiber, 1997] (*nonlinear projective filtering*) que nos proporciona el mejor resultado.

En la figura 6.23 se ve una reconstrucción en tres dimensiones del atractor experimental previamente filtrado. Siendo la dimensión de inmersión del atractor igual a 3 se ve bien que la estructura está totalmente desdoblada en esta

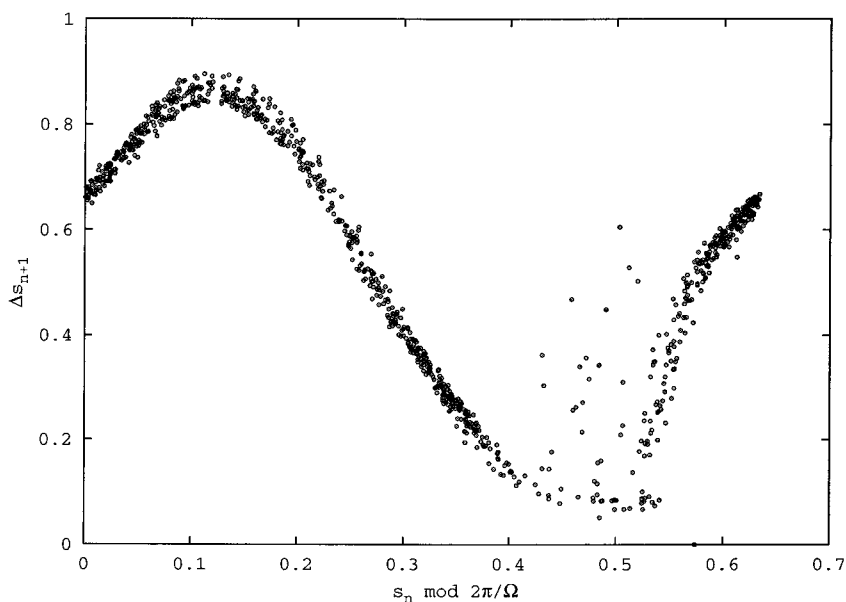


Figura 6.22: Representación del tiempo de bote reducido $\Delta s_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\tau$ como función del tiempo desde el primer impacto $s_n \bmod 2\pi/\Omega$. Es una reconstrucción experimental de la función adimensional teórica representada en la figura 6.8.

representación tridimensional.

Contrariamente a lo que el modelo numérico predice, el atractor experimental desarrolla dos ramas principales que se dividen a su vez en sucesivas ramas cuando se ven de cerca. De hecho, una ampliación de una parte del atractor de la figura 6.23 se muestra en la figura 6.24 donde se distingue la estructura fractal del atractor en una dirección transversal a la dirección principal. Este resultado sugiere que, contrariamente al modelo teórico unidimensional, el sistema real podría tener una dimensión mayor que 1.

6.2.3.2 Medidas invariantes del atractor experimental

Aplicando aquí también los resultados de la sección 5.2, hemos evaluado las características del atractor experimental.

La computación del exponente máximo de Lyapunov para valores de $m =$

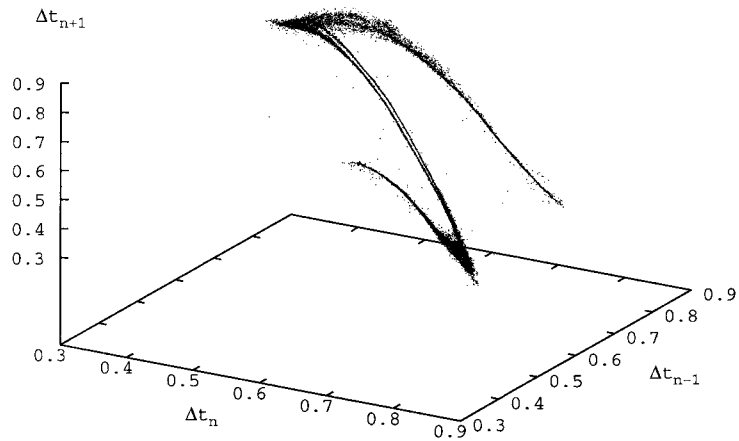


Figura 6.23: Representación tridimensional del atractor experimental después de quitar el ruido.

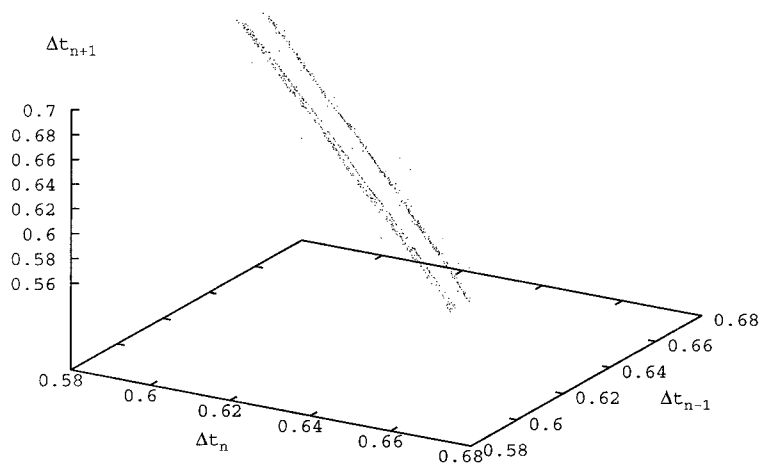


Figura 6.24: La ampliación de una parte del atractor experimental pone de manifiesto la estructura fractal del atractor.

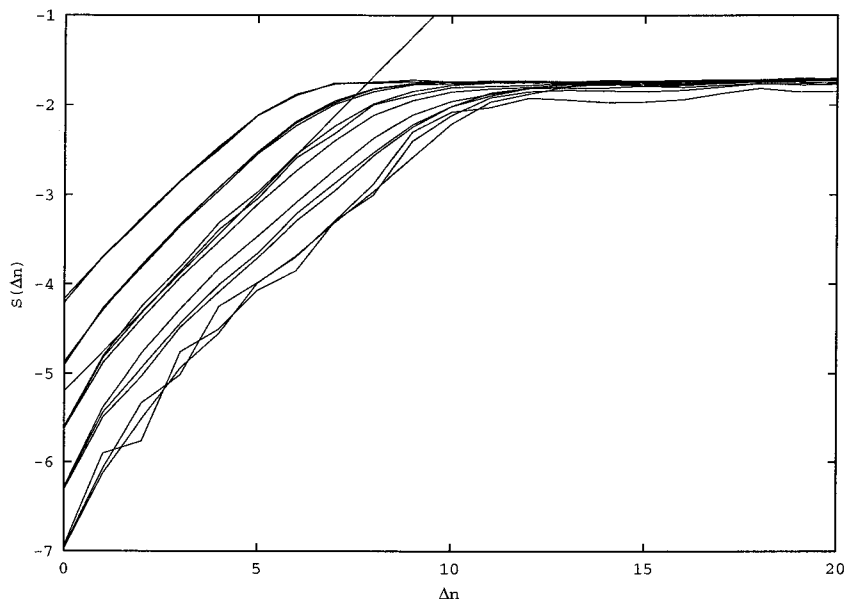


Figura 6.25: Estimación del exponente máximo de Lyapunov del atractor de la figura 6.23. La pendiente de la parte lineal de la función $S(\Delta n)$ sugiere un valor $\lambda \simeq 0.44 \pm 0.03$. En este caso la dimensión de inmersión m varía entre 2 y 6, mientras ϵ toma valores: 0.002, 0.004, 0.008, 0.016, y 0.032

3, 4, 5, 6 y ϵ 0.002, 0.004, 0.008, 0.016, y 0.032, da una estimación para el exponente de $\lambda \simeq 0.44 \pm 0.03$ (ver figura 6.25).

Una estimación de la dimensión de correlación D_2 del atractor experimental se deduce de la figura 6.26. El cálculo de D_2 está hecho para valores de la dimensión de inmersión $m = 2, 3, \dots, 10$ y un rango de radio ϵ que varía desde 0.001 hasta 1. A partir del “plató” que aparece entre 0.01 y 0.1 podemos estimar el valor de la dimensión a $D_2 \simeq 1.13$. Un valor próximo a 1 pero claramente superior.

La representación de la entropía de correlación $h_2(m)$ frente al radio ϵ proporciona valores compatibles con el modelo teórico. En la región de ϵ entre 0.01 y 0.1, $h_2(m)$ alcanza un plató alrededor de 0.3 (véase figura 6.27).

Aunque el modelo teórico unidimensional reproduce bien el comportamiento de la función $\Delta s_{n+1} = F(s_n)$ y los parámetros involucrados, la dimensión

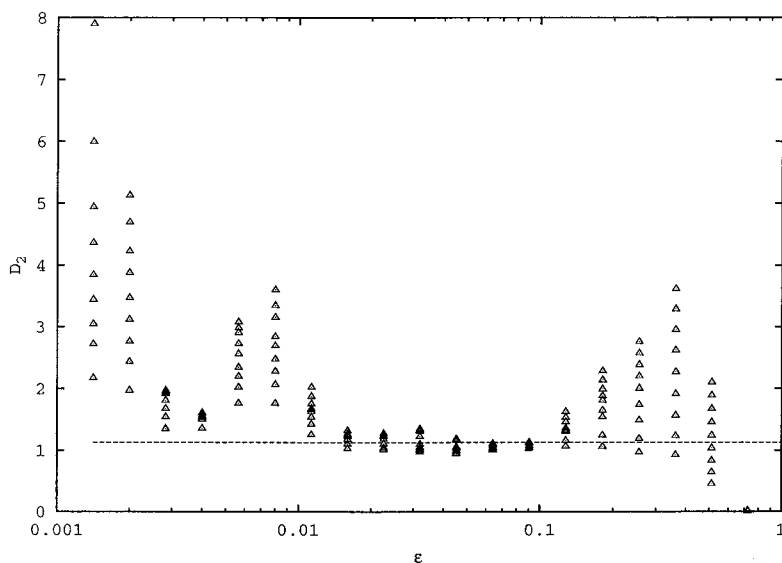


Figura 6.26: Estimación de la dimensión de correlación D_2 del atractor experimental de la figura 6.23. Un ajuste lineal al “plató” entre $\epsilon = 0.01$ y $\epsilon = 0.1$ proporciona una estimación de $D_2 \simeq 1.13$. La dimensión de inmersión toma valores desde $m = 2$ hasta 10.

de correlación de las series experimentales se ha revelado mayor que 1. Por otra parte el atractor experimental exhibe una estructura fractal ausente en el numérico. Esto sugiere que el modelo teórico presentado aún necesita refinarse. Volveremos a esto en la sección 6.3.

6.2.3.3 Predicción en la serie experimental

La predicción en las series temporales no es el objetivo de nuestro estudio. No obstante es de gran utilidad aplicar este análisis a las series de datos. Esto puede considerarse como última prueba para comprobar si las técnicas de reducción de ruido nos proporcionan una mejora de la predicción, y si los parámetros de inmersión tomados son óptimos. En este contexto, el modelo de predicción correspondiente minimizaría el error en la predicción.

Aquí en vez de considerar un modelo global específico y calcular sus coeficientes, podemos ajustar varios modelos simples a pequeñas porciones de la

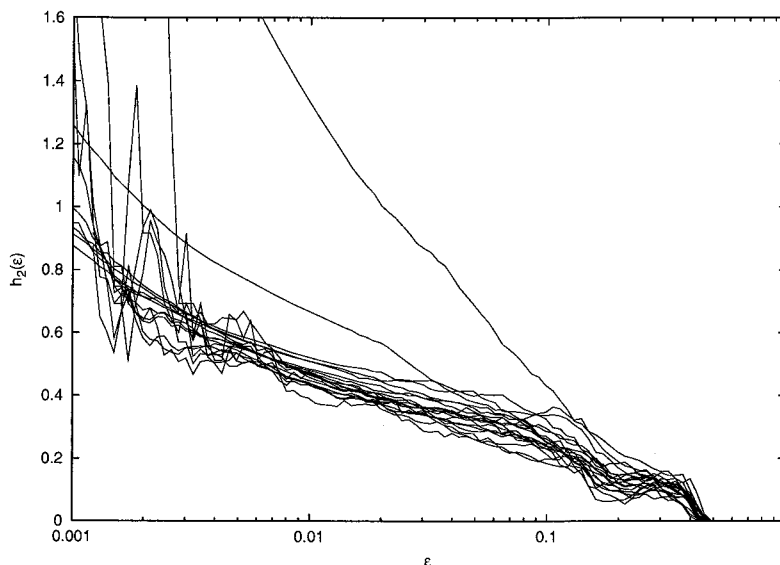


Figura 6.27: Entropía de correlación $h_2(m)$ frente al radio de vecindad ϵ . En la región de interés ϵ entre 0.01 y 0.1, $h_2(m)$ tiene un promedio de 0.3.

serie de datos. En efecto, tendremos un modelo que cambia sus parámetros de manera adaptativa dependiendo de la geometría de la vecindad local del sistema dinámico. Otra manera de ver un modelo así es como un modelo de regresión cuyos parámetros cambian mientras el modelo evoluciona en el tiempo.

Para predecir el punto $x(n+1)$, determinamos el último estado conocido del sistema como representado por el vector $s = (x(n), x(n-\tau), x(n-2\tau), \dots, x(n-(m-1)\tau))$, donde m es la dimensión de inmersión y τ es el retraso. Luego buscamos a lo largo de la serie temporal k estados similares que han ocurrido en el pasado, donde la *semejanza* está determinada evaluando la distancia entre el vector s y su vecino s'_n en el espacio de estados m -dimensional. La idea es que, si los datos observados están generados por una aplicación determinista $M(x(n), x(n-\tau), x(n-2\tau), \dots, x(n-(m-1)\tau)) = x(n+1)$, esta aplicación podrá ser reconstruida a partir de los datos contemplando su comportamiento en la vecindad de s . Encontramos la aproximación de M haciendo un ajuste a un polinomio de bajo orden que transforma los k vecinos más próximos (estados similares) de s en sus valores siguientes inmediatos. Ahora podemos utilizar este mapa para predecir $x(n+1)$. Dicho de otro modo,

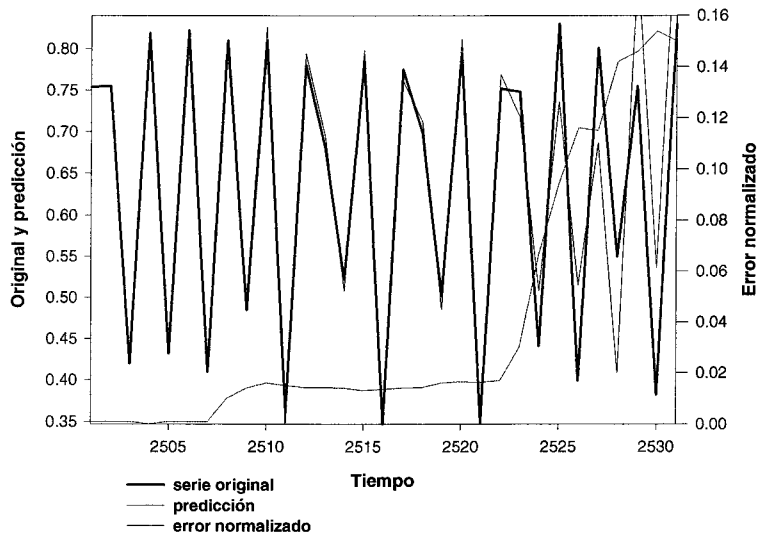


Figura 6.28: Predicción en la serie temporal del atractor experimental de la figura 6.23. El sistema es caótico pero aún predecible a corto plazo.

suponemos que M es bastante suave alrededor de s . Con lo cual, si un estado $s = x'(n), x'(n - \tau), x'(n - 2\tau), \dots, x'(n - (m - \tau))$ en la vecindad de s ha resultado en la observación $x'(n + 1)$ en el pasado, el punto $x(n + 1)$ que queremos predecir debe estar en alguna parte cerca de $x'(n + 1)$.

Hemos aplicado el método al atractor experimental de la figura 6.23. El resultado se ve en la gráfica 6.28 que muestra que el sistema siendo caótico, no es impredecible, al menos a corto plazo. El método más fácil y que da mejor predicción es la predicción 1 paso adelante. Aquí hemos hecho una predicción varios pasos adelante (7 pasos). Aún así, el resultado es bastante bueno.

6.2.3.4 Órbitas periódicas inestables

Como hemos visto en la sección 6.1.5.4, el control del caos se basa esencialmente en el hecho de que hay una infinidad de órbitas periódicas inestables (UP-

Os) en el seno del atractor. Buscar estas órbitas y estabilizarlas es un tema de gran utilidad práctica. Hemos visto como, basándonos en el modelo teórico, hemos podido estabilizar los períodos 1 y 2 en plena zona caótica. Sin embargo, el control del caos no está restringido a sistemas con modelos conocidos. En principio, el caos se puede controlar con sólo tratar con las series temporales experimentales. Ditto y coautores [Ditto et al., 1990] consiguieron controlar en tiempo real los períodos 1 y 2 del sistema de una cinta magnetoelástica.

Mostramos en la figura 6.29 el resultado del algoritmo de búsqueda de los primeros períodos inestables dentro del atractor experimental. Creemos que el control del sistema en tiempo real es, en principio, posible. Sin embargo no es un tema que entre en el objetivo del trabajo actual.

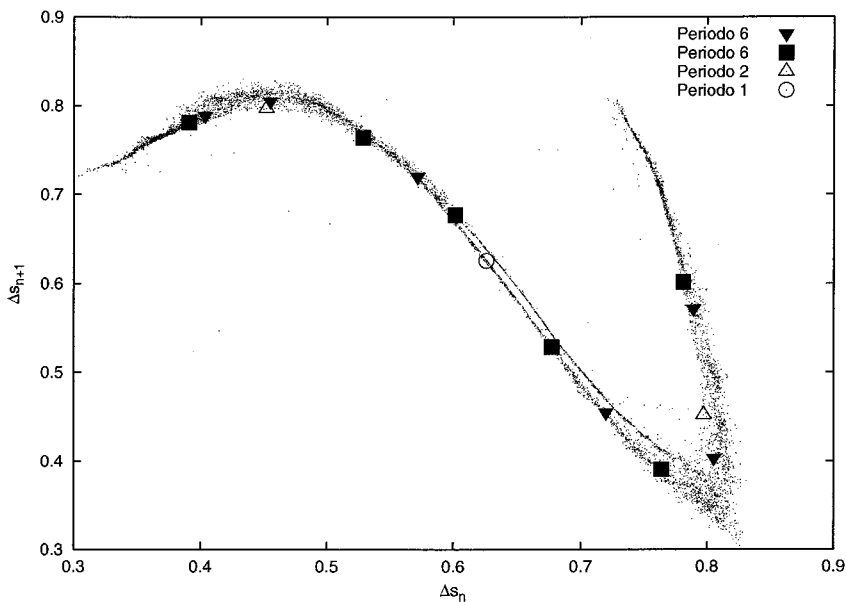


Figura 6.29: Búsqueda de los primeros períodos inestables del atractor experimental.

6.3 El modelo analítico revisado

El modelo numérico que hemos propuesto reproduce los comportamientos principales de la dinámica del sistema real de la bola. También predice las bifurcaciones y algunas características del atractor caótico. Sin embargo, el atractor que surge de los datos experimentales revela una estructura fractal ausente en el numérico. La dimensión de correlación D_2 del atractor tampoco es consistente, $D_2 > 1$ para el experimental mientras es < 1 para el atractor numérico. Esta discrepancia sugiere que el modelo propuesto tiene que ser refinado.

La primera idea es reconsiderar las aproximaciones hechas en la ecuación original. Por ejemplo, nos preguntamos si el modelo mejoraría al incluir el coeficiente de rozamiento que depende del número de Reynolds. O bien, si no despreciamos el término de inercia $m_e dv/dt$ en la ecuación (6.1) (véase también capítulo 2). ¿eso cambiaría la dimensión del atractor? Otra posibilidad es incluir la variación de la fuerza eléctrica con la altura z de la bola cerca del electrodo, debido a la carga imagen.

Hemos comprobado todas estas correcciones al modelo, y esto resulta en un mapa más o menos complicado pero siempre unidimensional, con lo que la dimensión nunca superará 1.

Para tener un mapa 2D tenemos que introducir un acoplamiento entre s_{n+1} , el tiempo del bote ($n + 1$), y los dos precedentes s_n y s_{n-1} . Podemos pensar en dos mecanismos que puedan inducir este acoplamiento. El primero sería incluir el coeficiente de restitución. Es una manera usual de incluir un acoplamiento entre un bote y el precedente en el modelo clásico de la bola que bota sobre una tabla en movimiento. Sin embargo, en nuestro caso no tiene sentido introducir el coeficiente de restitución si despreciamos el término de inercia. Además, hemos comprobado experimentalmente que la bola no rebota cuando se corta la tensión súbitamente durante el bote. Esto también está de acuerdo con el conocido hecho, ya mencionado en el capítulo 2, de que para un número de Stokes < 10 , el coeficiente de restitución es estrictamente cero.

Así pues estamos conducidos a considerar el movimiento del líquido inducido por la propia bola durante su movimiento. Cuando la bola se mueve hacia

el electrodo inferior, antes de impactar con el, causa un movimiento del líquido. El líquido se mueve en el mismo sentido (hacia abajo) en el centro de la celda, y hacia arriba en los bordes. Este movimiento está caracterizado con una escala de tiempo del orden de $d^2/\nu \sim 10$ s, donde d es la distancia entre electrodos y ν la viscosidad del líquido.

Así, cuando la bola toca el electrodo y vuelve a subir, el líquido que todavía está en movimiento hacia el electrodo ejerce una fuerza sobre la bola en contra de su movimiento. El análisis detallado del movimiento del líquido causado por el movimiento de la bola es muy complicado y fuera del propósito de este estudio. Para considerar, de manera empírica, este efecto añadimos a la ecuación (6.1) una fuerza $\vec{F}_h = -6\pi\mu\gamma R\vec{v}$ que es proporcional a la velocidad de la bola \vec{v} y de dirección opuesta. El factor que multiplica la velocidad es muy pequeño y es del orden de (~ 0.1) pues el movimiento del líquido es bastante débil. Este término corresponde a la fuerza de historia (fuerza de Basset) que está siempre presente en el movimiento no estacionario de una partícula en un fluido [Gondret et al., 2002].

Con estas consideraciones la ecuación de movimiento vuelve a escribirse en la forma

$$m_e \frac{dv}{dt} = F_e + F_g + F_d + F_h. \quad (6.11)$$

Y siguiendo el mismo razonamiento de la sección 6.1 tenemos una aplicación en 2D para el sistema

$$\begin{aligned} v_n &= (1 + a \sin(\Omega s_{n-1}))(1 + a \sin(\Omega s_n))e^{-(s_n - s_{n-1})} \\ &\quad - G + \gamma v_{n-1} \quad (6.12) \\ s_{n+1} - s_n &= \frac{1}{(G - \gamma v_n)}(1 - e^{-(s_{n+1} - s_n)})(1 + a \sin(\Omega s_n)) \\ &\quad + \frac{a(1 + a \sin(\Omega s_n))}{1 + \Omega^2} \times \left[(\sin(\Omega s_n) + \Omega \cos(\Omega s_n)) \right. \\ &\quad \left. - e^{-(s_{n+1} - s_n)}(\sin(\Omega s_{n+1}) + \Omega \cos(\Omega s_{n+1})) \right] \quad (6.13) \end{aligned}$$

El atractor resultante de una serie temporal de 30 000 puntos generada a

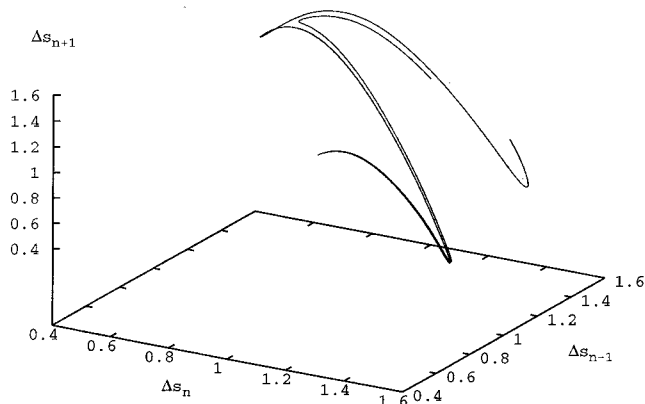


Figura 6.30: Representación tridimensional del atractor numérico reconstruido a partir de 30 000 iteraciones del sistema 6.13. Ahora la estructura fractal del atractor está puesta de manifiesto.

partir del mapa iterativo (6.13) está representado en la figura 6.30 como Δs_{n+1} vs Δs_n vs Δs_{n-1} . Podemos ver ahora una nueva rama que nace cerca de la rama principal. Ampliaciones sucesivas de partes del atractor revelan una estructura fractal a cualquier escala.

Así, la estructura fractal que surge en el atractor experimental está bien reproducida por el modelo numérico cuando se toma en consideración el movimiento del líquido inducido por los botes anteriores de la bola.

El exponente máximo de Lyapunov calculado para esta serie es $\lambda = 0.49 \pm 0.01$ (véase figura 6.31).

La dimensión de correlación estimada del plató que se muestra ahora sobre un rango amplio del radio ϵ en la figura 6.32 es $D_2 = 1.056$. Lo que es más consistente con los datos experimentales. En la figura 6.33 se muestra una representación de la entropía de correlación frente al radio de vecindad ϵ . Se ve un plató claro alrededor del valor de entropía $h_2 = 0.35$.

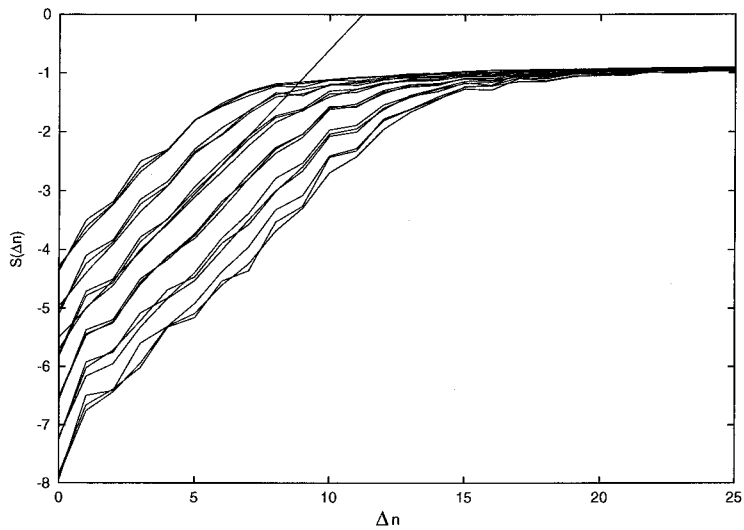


Figura 6.31: Representación de la función $S(\Delta n)$ frente a Δn para distintos radios de vecindad ϵ . Una estimación del exponente máximo de Lyapunov que es la pendiente del ajuste a la parte lineal de todas las curvas, nos da $\lambda = 0.49 \pm 0.01$.

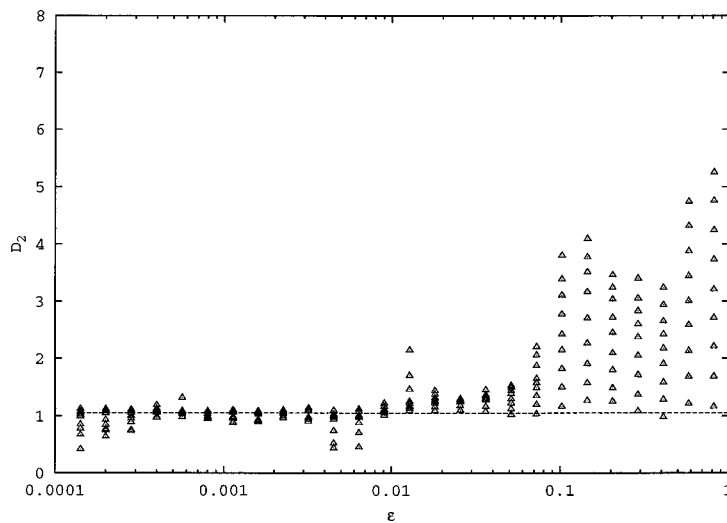


Figura 6.32: Representación en coordenadas semi-logarítmicas de la dimensión de correlación D_2 del atractor numérico de la figura 6.11. Un ajuste lineal al plató entre $\epsilon = 10^{-4}$ y $\epsilon = 10^{-2}$ proporciona una estimación de $D_2 \simeq 1.056$. La dimensión de inmersión varía entre 2 y 10.

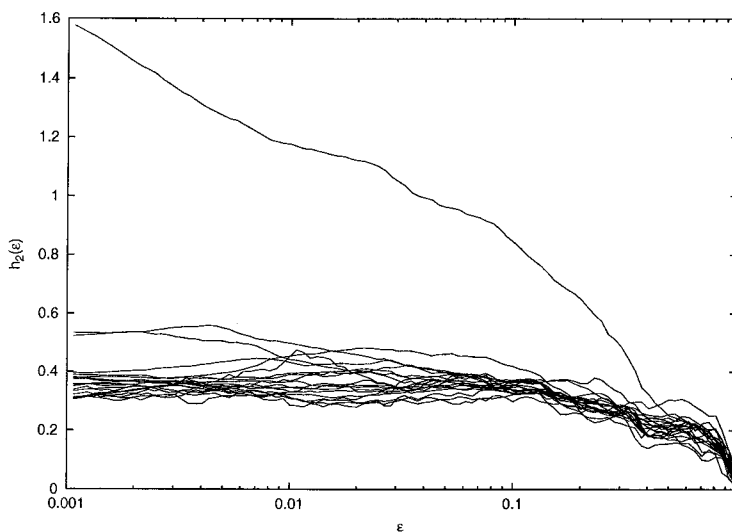


Figura 6.33: Representación en coordenadas semi-logarítmicas de la entropía de correlación h_2 del atractor numérico. El plató entre $\epsilon = 10^{-3}$ y $\epsilon = 10^{-1}$ proporciona una estimación de $h_2 \simeq 0.35$. La dimensión de inmersión varía entre 2 y 20.

6.4 Conclusión

En este capítulo hemos abordado el estudio de la dinámica no lineal de la bola que bota sobre un electrodo bajo efecto de un campo eléctrico alterno. Hemos propuesto un modelo teórico unidimensional que reproduce casi todos los comportamientos dinámicos observados experimentalmente. De hecho, los diagramas de bifurcación, la reproducción de la función que yace detrás de la dinámica del sistema, así como las medidas invariantes del atractor caótico, son consistentes con los resultados experimentales.

Hemos encontrado, sin embargo, que el modelo unidimensional es incapaz de reproducir todas las características del atractor que surge de los datos experimentales. Especialmente la dimensión de correlación y la estructura fractal. Por eso hemos refinado el modelo introduciendo en la ecuación del movimiento el efecto del movimiento del líquido inducido por los botes anteriores de la bola. Por consiguiente, nos hemos dado cuenta de que el movimiento del líquido, aunque débil, afecta a la dinámica de la bola en el régimen caótico. No ob-

stante, el régimen no caótico y las bifurcaciones que conducen al caos parecen lo bastante insensible a este efecto. En todos los casos, hemos encontrado que el hecho de no tener en cuenta el movimiento del líquido no afecta dramáticamente las medidas invariantes del atractor que son consistentes con aquellos hallados a partir de los datos experimentales.

Capítulo 7

Estudio del sistema en codimensión 2

La aplicación del sistema como está definida por el modelo (6.4) es esencialmente de codimensión 2. Es decir que depende de 2 parámetros de control. Con lo que es imprescindible estudiar la dinámica en el plano de parámetros. Sólo así pueden revelarse la multitud de comportamientos y la riqueza de la dinámica del sistema. En este capítulo expondremos la teoría necesaria para estudiar el plano de parámetros y el comportamiento *universal* de los sistemas dinámicos en la transición al caos.

7.1 Dinámica crítica en el inicio del caos y teoría del grupo de renormalización

La transición al caos en un sistema dinámico se hace siguiendo una secuencia de bifurcaciones al variar un parámetro de control. El comportamiento del sistema pasa entonces de regular a caótico. Esta transición puede hacerse de tres formas posibles: vía desdoblamiento de período, cuasiperiodicidad o *intermitencia*. Desde del trabajo de Feigenbaum, está claro que la dinámica al borde del caos muestra habitualmente regularidades de escalado asociadas con *clases de universalidad*, o *tipos de comportamiento crítico*. La primera clase de universalidad

conocida fue descubierta por Feigenbaum, luego otros tipos de comportamiento crítico han sido encontrados y estudiados.

El entendimiento de la iniciación del caos en sistemas de baja dimensión está conectado con el descubrimiento de la universalidad de desdoblamiento de período de Feigenbaum y el método de *la teoría del Grupo de Renormalización (GR)* [Feigenbaum, 1978, Feigenbaum, 1979].

En el análisis de la transición al caos en el caso multiparamétrico, puede ocurrir un comportamiento de desdoblamiento de período con escalamiento de tipo *no Feigenbaum*. Esto puede ocurrir en ciertas direcciones (camino) en el espacio de parámetros. Hay dos posibilidades [Kuznetsov et al., 1997]:

1. La dinámica a la iniciación del caos sigue siendo unidimensional, pero el mapa unidimensional está deformado de tal modo que se sale de la clase de universalidad de Feigenbaum.
2. Un nuevo modo entra en el umbral de inestabilidad y aumenta la dimensión efectiva de la dinámica.

7.1.1 Ruta hacia el caos vía desdoblamiento de período

Los rasgos universales del escenario de la transición al caos vía desdoblamiento de período fueron descubiertos por Feigenbaum, y luego demostrados por Collet [Collet et al., 1980] y Lanford [Lanford, 1982].

Para entender este comportamiento vamos a reconsiderar la aplicación logística ya introducida en la sección 5.1.1.1. Otras aplicaciones con forma “similar”¹ exhiben un comportamiento cuantitativamente similar. A partir de esta formulación general vamos a argumentar que la universalidad va más allá de la iteración de mapas unidimensionales en el intervalo unidad, y que se aplica también a aplicaciones iteradas multidimensionales, y sistemas dinámicos continuos (descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias).

Para la aplicación logística $f(x) = \mu x(1 - x)$ el diagrama de bifurcación

¹Es decir aplicaciones con un máximo cuadrático y derivada de Schwarz negativa para todo el intervalo unidad.

muestra que, entre el valor de $\mu = 3.0$ y 3.57 , hay una secuencia infinita de bifurcaciones. Las bifurcaciones ocurren con desdoblamiento de período. Es decir que para un valor del parámetro de control pequeño, la órbita es un solo punto; pero a medida que aumenta el parámetro, la órbita consiste en 2 puntos, luego 4, 8 ... 2^k ... puntos. En cada bifurcación el período se dobla.

Nos proponemos examinar cuantitativamente la estructura de estas secuencias de bifurcaciones. Podemos analizar los patrones en los puntos mismos de bifurcación, es decir los puntos μ_n para los cuales ocurre la transición de un ciclo 2^n a un ciclo 2^{n+1} . Sin embargo la dinámica se vuelve muy lenta cerca del punto de bifurcación (el exponente de Lyapunov tiende a cero), y así las trayectorias transitorias tardan mucho en desvanecerse. Por ello vamos a considerar valores particulares del parámetro de control μ_n^s dentro de cada ciclo 2^n . El valor μ_n^s es el valor del parámetro que corresponde al ciclo “superestable” 2^n (el exponente de Lyapunov tiende a $-\infty$). (Véase figuras 7.1 y 7.2.)

Además de los valores μ_n^s , podemos examinar también la separación entre los puntos correspondientes en la órbita (los $x(\mu_n^s)$). En cada bifurcación una órbita se separa en dos; es interesante ver cómo esta separación varía al aumentar n . Para un ciclo superestable, la separación mínima entre dos puntos en la órbita es la separación entre los dos puntos que coincidían antes de la bifurcación.

La separación entre los μ_n^s decrece rápidamente, y en realidad lo hace de manera geométrica, como muestra la razón entre las separaciones sucesivas, o su inversa

$$\delta_n = \frac{\mu_{n-1}^s - \mu_{n-2}^s}{\mu_n^s - \mu_{n-1}^s} \quad (7.1)$$

Los valores de μ_n^s y δ_n se muestran en la tabla 7.1.1. Se ve que δ_n tiende a un valor constante para n grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \rightarrow \delta = 4.6692016... \quad (7.2)$$

De manera similar la separación mínima d_n entre puntos del ciclo 2^n decrece geoméricamente, como se ve en la tabla 7.1.1, definiendo

$$\alpha_n = \frac{d_{n-1}}{d_n}. \quad (7.3)$$

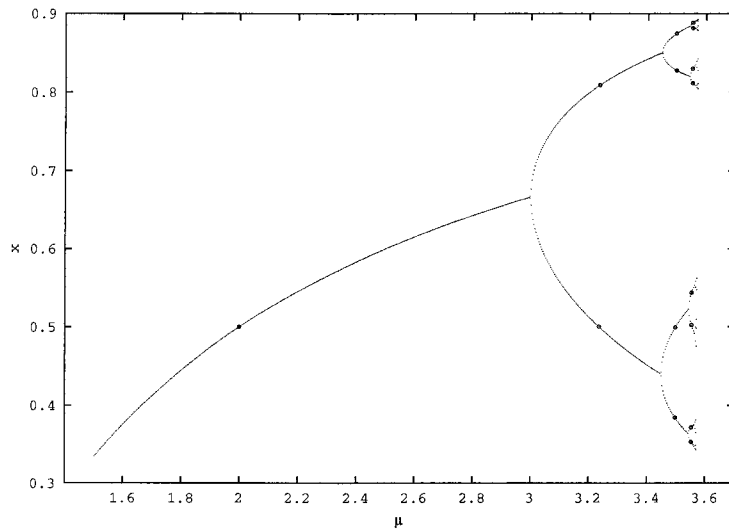


Figura 7.1: Una parte del diagrama de bifurcación de la aplicación logística. Se muestran las primeras bifurcaciones, así como las órbitas que corresponden a los puntos superestables (círculos vacíos).

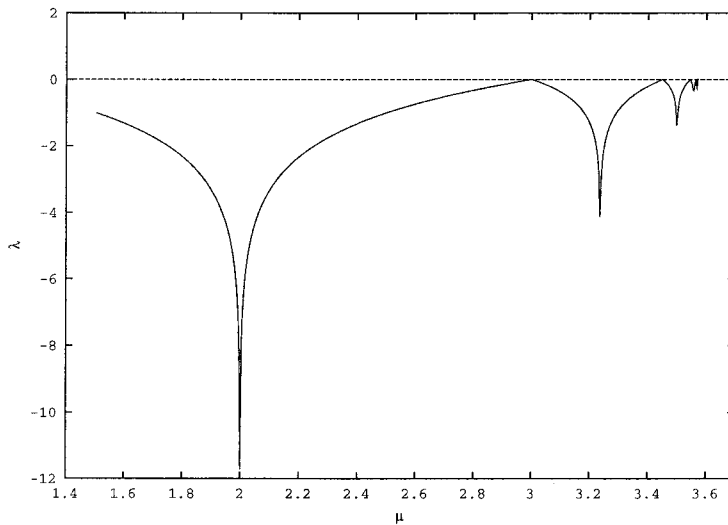


Figura 7.2: Representación del exponente de Lyapunov λ para el mapa logístico correspondiente al intervalo considerado en la figura 7.1. Los puntos de bifurcación tienen un exponente de Lyapunov que tiende a cero, mientras para los puntos superestables λ tiende a $-\infty$.

n	Período	μ_n^s	δ_n	d_n	α_n
0	1	2			
1	2	3.236065	1.61804	0.309016	
2	4	3.498562	4.70887	-0.116402	-2.65474
3	8	3.554641	4.68083	0.045975	-2.53184
4	16	3.566667	4.66294	-0.018326	-2.50872
5	32	3.569244	4.66840	0.007318	-2.50411
6	64	3.569795	4.66895	-0.002924	-2.50316
7	128	3.569913	4.66917	0.001168	-2.50296
8	256	3.569939	4.66919	-0.000467	-2.50292

Se observa que esta razón también tiende a una constante para n grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \rightarrow \alpha = -2.502907875\dots \quad (7.4)$$

7.1.2 Análisis del Grupo de Renormalización

7.1.2.1 El punto fijo

Consideremos un mapa unidimensional $x_{n+1} = g_0(x_n)$. La función $g_0(x)$ determina el operador de evolución para un paso de tiempo discreto, se supone que el mapa tiene un máximo en el origen. Para dos pasos obtenemos $x_{n+2} = g_0(g_0(x_n))$. Introduzcamos, en vez de x , una nueva variable escalada con un factor α . Cambiando x con x/α en ambos lados de la ecuación, escribimos $x_{n+2} = g_1(x_n)$, donde $g_1(x_n) = \alpha g_0(g_0(x/\alpha))$

Ahora tomemos $g_1(x)$ como nueva función inicial y realicemos las mismas operaciones. Entonces, obtenemos un *operador de evolución renormalizado* para cuatro pasos: $x_{n+4} = g_2(x_n)$, donde $g_2(x) = \alpha g_1(g_1(x/\alpha))$. La repetición del procedimiento conduce a una ecuación funcional recurrente

$$T[g_k](x) = g_{k+1}(x) = \alpha g_k(g_k(x/\alpha)). \quad (7.5)$$

T así definido es un operador que realiza la composición (iteración) funcional y reescalado (sustitución de escala). T actúa sobre la función g y no sobre la variable dinámica x .

Si el mapa original $g_0(x)$ depende de un parámetro y exhibe una cascada de desdoblamiento de período, entonces, en el punto de acumulación del desdoblamiento de período, y con una selección apropiada del factor de reescala α , tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x). \quad (7.6)$$

La función límite $g(x)$ satisfecerá la ecuación de Feigenbaum-Cvitanović

$$g(x) = \alpha g(g(x/\alpha)), \quad (7.7)$$

Se suele hablar de $g(x)$ como un punto fijo de la ecuación de renormalización. Es decir que g es un punto fijo de la ecuación funcional (el operador T : $T[g](x) = g(x)$).

Si el máximo en el origen es cuadrático, esto corresponderá a la *criticalidad* de Feigenbaum (tipo F). Las potencias 4, 6, 8 corresponden a otras clases de universalidad (tipos T , S , E).

Resolver la ecuación (7.7) significa hallar a la vez una función $g(x)$ (habitualmente de manera numérica, como desarrollo en polinomios) y una constante α . La función $g(x)$ representa la forma asintótica del operador de evolución, correctamente normalizado, para las 2^k iteraciones del mapa 1D precisamente en el punto crítico. La existencia del límite para $k \rightarrow \infty$ está asegurada por el reescalado de la variable dinámica como $x \sim \alpha^{-k}$.

7.1.2.2 Los factores de escala

La segunda etapa consiste en el análisis de pequeñas perturbaciones del punto fijo de la ecuación de grupo de renormalización (7.7).

Supongamos, que en el mapa original hacemos un pequeño desplazamiento a partir del punto crítico. Ahora el operador definido sobre las 2^k iteraciones

contendrá una perturbación a la función $g(x)$: $f_k(x) = g(x) + \epsilon h_k(x)$. Para $\epsilon \ll 1$, tenemos

$$h_{k+1}(x) = \alpha[g'(g(x/\alpha))h_k(x/\alpha) + h_k(g(x/\alpha))]. \quad (7.8)$$

Esta ecuación tiene la estructura de una ecuación de operador lineal $h_{k+1} = \mathbf{m}h_k$. Si tenemos una autofunción h y un autovalor ν que satisfacen $\mathbf{m}h = \nu h$, entonces una solución puede contener una componente que se comporta a lo largo de las iteraciones como $\nu^k h(x)$. Los autovalores ν que tendrán relevancia para el comportamiento asintótico (k grande), son aquellos que son mayores que 1 en valor absoluto, y que no corresponden a cambios infinitesimales en la variable. El número n de estos valores propios define la *codimensión* del tipo de comportamiento crítico. Es el número mínimo de parámetros de control, o la dimensión mínima del espacio de parámetros, para la cual la situación crítica puede aparecer en algún punto.

En un sistema de coordenadas apropiado (“coordenadas de escala”) el espacio de parámetros n -dimensional tendrá localmente una topografía universal específica al tipo de comportamiento crítico. Para definir las coordenadas de escala, necesitamos las condiciones siguientes. Un desplazamiento en el espacio de parámetros a partir del punto crítico a lo largo de cada eje de coordenadas debe generar una perturbación conteniendo solamente una función propia en la solución de la ecuación de grupo de renormalización linealizada (7.8). Los autovalores $\nu = \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ son los *factores de escala*.

Si utilizamos estos valores como factores de ampliación a lo largo de los ejes de coordenadas respectivos, podemos observar los mismos patrones de la topografía del espacio de parámetros en vecindades cada vez más pequeñas del punto crítico.

7.1.2.3 Escalado de la función f

Para entender la relación entre la función f que define la aplicación y la función g , punto fijo del operador de iteración funcional T , vamos a considerar el caso del comportamiento del tipo Feigenbaum, con $\alpha = -2.5028\dots$ y $\delta = 4.6692\dots$ Este

fenómeno es de codimensión uno (un sólo autovalor $\nu = \delta$).

En el espacio de las funciones, el punto fijo g tiene una dirección inestable: todas las otras direcciones se contraen. Podemos así construir una hipersuperficie en el espacio de funciones (la variedad estable) tal que funciones $f^{(\infty)}$ en esta hipersuperficie evolucionan hacia el punto fijo g bajo la operación de T . Dado que la variedad estable es de codimensión 1, podemos esperar que una función $f_R(x)$, parametrizada por un sólo parámetro R , intersecte la variedad estable para un valor de R que denotaremos R_∞ . Así bajo la operación de T tenemos

$$T^n f_{R_\infty} \longrightarrow g \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty. \quad (7.9)$$

Para R cerca de R_∞ $T^n f_R$ seguirá $T^n f_{R_\infty}$ hacia el punto fijo, para $R - R_\infty$ pequeño. (Véase figura 7.3).

El entendimiento del comportamiento en términos del punto fijo y la linealización nos enseña las propiedades del mapa *físico* a partir de las propiedades del punto fijo y mapa *universal* g_k .

Para un mapa unidimensional f , si f tiene un ciclo estable 2^n entonces $f(f(x))$ tiene un ciclo estable 2^{n-1} . Dado que la operación de T hace lo mismo, junto con un reescalado, la operación de T (ecuación (7.5)) decrece el período en un factor 2. Si denotamos g_k a la función con un ciclo 2^k , el punto fijo g tendrá un ciclo 2^∞ . Así, para un mapa f parametrizado con un parámetro R_∞ tendremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{R_\infty}^{2^n} = \alpha^{-n} g(\alpha^n x). \quad (7.10)$$

Es decir que nos acercamos de la función punto fijo universal, que resulta ser la función universal del “inicio del caos”.

7.2 Tipos de comportamiento crítico en mapas unidimensionales

Generalizando la idea para el caso multiparamétrico, podemos imaginar una configuración en el espacio de parámetros, que incluye dominios de dinámica regular y caótica. El comportamiento crítico de un cierto tipo puede ocurrir en

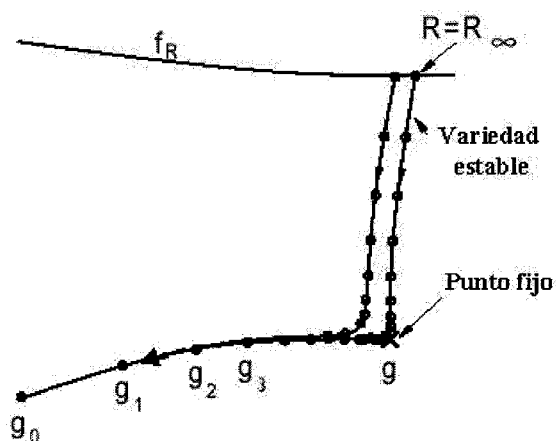


Figura 7.3: Evolución bajo la operación T en el espacio de funciones. Los círculos llenos muestran los g_k sucesivos, a lo largo de la dirección inestable, dados por la aplicación de T . Los círculos vacíos muestran los $T^n f_{R_\infty}$ sucesivos en dirección hacia el punto fijo g .

algunas superficies separando caos y orden, en curvas limitando estas superficies o en puntos terminando estas curvas. Respectivamente, hablamos de criticalidad de codimensión *uno*, *dos* o *tres*.

Hay una colección de tipos de comportamiento crítico:

- comportamientos críticos asociados con el desdoblamiento de período
 - **F**: Feigenbaum.
El factor de escala de órbita: $\alpha = -2.502907876$.
Los valores propios relevantes: $\delta = 4.669201609$.
 - **T**: Tricrítico (Tricritical).
 $\alpha = -1.6903029714$.
 $\delta_1 = 7.284686217$, $\delta_2 = \alpha^2$, $\delta_3 = \alpha^3$.
 - **S**: Sexta potencia (Six-power).
 $\alpha = -1.4677424503$.

$$\delta_1 = 9.296246833, \delta_2 = \alpha^2, \delta_3 = \alpha^3, \delta_4 = \alpha^4, \delta_5 = \alpha^5.$$

– **E**: Octava potencia (Eight-power).

$$\alpha = -1.358017279.$$

$$\delta_1 = 10.94862427, \delta_2 = \alpha^2, \delta_3 = \alpha^3, \delta_4 = \alpha^4, \delta_5 = \alpha^5, \delta_6 = \alpha^6, \delta_7 = \alpha^7.$$

– **B**: Bicrítico (Bicritical).

$$\text{Factores de escala de órbita: } \alpha = -2.502907876 \text{ y } \beta = -1.505318\dots$$

$$\text{Valores propios: } \delta_1 = 4.669201609 \text{ y } \delta_2 = 2.39272443.$$

– **BT**: Bi-Tricrítico (Bi-Tricritical).

$$\alpha = -2.502907876 \text{ y } \beta = -1.2416604.$$

$$\delta_1 = 4.669201, \delta_2 = 2.654654, \delta_3 = \beta^3, \delta_4 = \beta^2, \delta_5 = \alpha^6, \delta_6 = \alpha^7.$$

– **H**: Hamiltoniano (Hamiltonian).

$$\alpha = -4.0180767046 \text{ y } \beta = 16.3638968792.$$

$$\delta_1 = 8.7210972, \delta_2 = 2.$$

– **FQ**: Feigenbaum + Cuasiperiodicidad (Feigenbaum + Quasiperiodicity).

$$\alpha = -1.90007167 \text{ y } \beta = -4.00815785.$$

$$\delta_1 = 6.32631925, \delta_2 = 3.44470967, \delta_3 = \alpha.$$

– **C**: Ciclo de ecuaciones de GR (Cycle of the RG equations).

$$\alpha = 6.565350 \text{ y } \beta = 22.120227.$$

$$\delta_1 = 92.43126348, \delta_2 = 4.19244418, \delta_3 = 0.93.$$

- Comportamiento crítico asociado con la cuasiperiodicidad con una razón de frecuencia igual a la *razón áurea*².

– **GM**: Razón áurea (Golden Mean).

$$\alpha = -1.28857\dots$$

$$\delta_1 = 2.83361065\dots \text{ y } \delta_2 = \alpha^2 = 1.66042438\dots$$

– **TCT**: Terminal de Colisión de un Toro (Torus Collision Terminal).

– **TD**: Terminal de Desdoblamiento de un Toro (Torus Doubling Terminal).

– **TF**: Fractalización de un Toro (Torus Fractalization).

²La razón áurea $w = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339887\dots$

- Comportamiento crítico en sistemas conservativos.
- Comportamiento crítico en aplicaciones iteradas analíticas complejas.

7.2.1 Comportamiento crítico del tipo Feigenbaum (F)

Este tipo de comportamiento de desdoblamiento de período está asociado con el punto fijo solución de la ecuación de GR (7.7) [Feigenbaum, 1979]

$$g(x) = 1 - 1.527633x^2 + 0.104815x^4 + 0.026706x^6 - 0.003527x^8 + 0.000082x^{10} + 0.000025x^{12} + 0.000003x^{14} \quad (7.11)$$

con $\alpha = -2.502907876$. (Las soluciones de las ecuaciones de GR están normalizadas a la unidad en el origen). La ecuación de autovalores (7.8) tiene un valor propio relevante único $\nu = \delta = 4.669201609$, así la codimensión es igual a 1.

La clase de mapas más sencilla que exhibe el comportamiento del tipo Feigenbaum es la clase de mapas unidimensionales no invertibles. El mismo tipo de comportamiento en la transición al caos por desdoblamiento de período ocurre en los sistemas no lineales multidimensionales disipativos. El ejemplo clásico de comportamiento crítico de tipo Feigenbaum es el mapa logístico. Otros ejemplos son: el mapa de *Ueda*, el oscilador de *Rösler*, el sistema de *Lorenz*, el mapa de *Ikeda* y el mapa de *Hénon*.

7.2.2 El comportamiento tricrítico (T)

Está asociado con una solución de la ecuación de GR representada por una expansión en potencias de x^4

$$g(x) = 1 - 1.834108x^4 + 0.012962x^8 + 0.311902x^{12} + 0.062015x^{16} - 0.037539x^{20} + 0.017647x^{24} + 0.001938x^{28} - 0.002820x^{32}$$

$$\begin{aligned}
&+0.000115x^{36} + 0.000399x^{40} - 0.000024x^{44} - 0.000122x^{48} \\
&+0.000070x^{52} - 0.000018x^{56} + 0.000002x^{60} \quad (7.12)
\end{aligned}$$

con $\alpha = -1.6903029714$ [Chang et al., 1981]. La ecuación de valores propios (7.8) tiene tres valores propios relevantes $\delta = 7.284686217$, α^2 , y α^3 (véase referencias citadas en [Kuznetsov et al., 1997]). Esto implica que la codimensión es igual a 3. En el punto tricrítico se presenta un conjunto infinito de ciclos inestables de período 2^k , y el multiplicador universal asintótico es $\mu = -2.05094049$.

Sin embargo, la cuestión de la codimensión del punto tricrítico en mapas unidimensionales es un poco más delicada de lo que parece a primera vista. La razón es que la cuarta potencia del extremo puede aparecer como debida a la iteración y no porque figure en el mapa original. En este caso el comportamiento tricrítico en mapas unidimensionales puede ocurrir como un fenómeno de codimensión 2.

Supongamos que tenemos un mapa unidimensional con dos extremos cuadráticos y dos parámetros de control. En general puede existir una curva en el plano de parámetros donde la condición de que un extremo se transforme con el mapa precisamente en el otro extremo se cumple. Obviamente, si nos quedamos en esta curva, el mapa iterado tiene un extremo de cuarto orden. Si la cascada de desdoblamiento de período ocurre a lo largo de esta curva, el límite sería el punto tricrítico. Puede demostrarse que en tal caso el valor propio α^3 está excluido (un tipo de simetría escondida), y en este caso, sólo $\delta_1 = \delta$ y $\delta_2 = \alpha^2$ son relevantes.

En el plano de parámetros (bidimensional) se pueden observar estructuras llamadas *crossroad area*, que es la región del plano de parámetros donde se espera encontrar el comportamiento *pseudo-tricrítico*.

Como ejemplo de este comportamiento, mostramos en la figura 7.4, la estructura del plano de parámetros del mapa *cúbico* definido como

$$x_{n+1} = A - Bx_n + x_n^3. \quad (7.13)$$

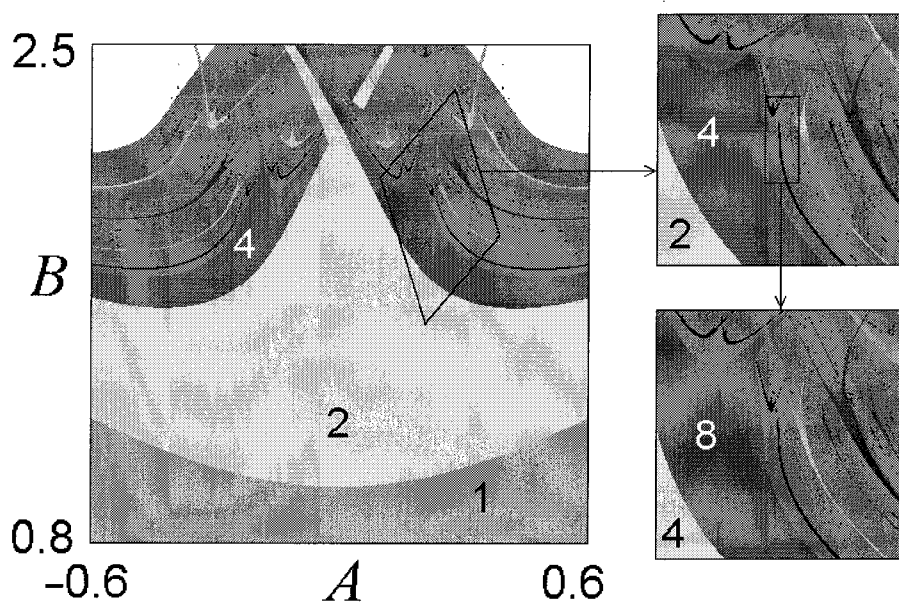


Figura 7.4: Representación de la estructura del plano de parámetros para el mapa cúbico (7.13). La transición al caos se hace según el comportamiento crítico del tipo T . Se muestra como se reescala la región alrededor del punto tricrítico usando los factores de escala.

7.2.3 Comportamiento crítico asociado con la cuasiperiodicidad y la razón áurea (Golden Mean)

Una teoría del grupo de renormalización [Rand et al., 1982], análoga a la teoría correspondiente al desdoblamiento de período, describe cómo la transición al caos puede ocurrir de una manera universal si la razón de frecuencias en un régimen cuasiperiódico se mantiene constante. Este tipo de transición recibe el nombre de comportamiento del tipo (GM).

El mapa del *círculo* 1D proporciona la base para la discusión del comportamiento del tipo (GM), tanto como el mapa logístico lo hace para la cascada de desdoblamiento de período (comportamiento crítico del tipo (F)).

El mapa del círculo se define como [Thompson and Stewart, 2002]

$$x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n), \quad (7.14)$$

cuando en el umbral de la destrucción del régimen cuasiperiódico se tiene un *número de rotación* (winding number) igual a la razón áurea. El número de rotación está definido como

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_0}{n}. \quad (7.15)$$

Es el promedio de la frecuencia de movimiento alrededor del círculo. En general, un sistema con un número de rotación racional está en *modo sincronizado*, mientras un sistema con un número de rotación irracional es cuasiperiódico.

El mapa del círculo es bastante simple como modelo de mapas 1D que exhiben el fenómeno de *sincronización de frecuencia* y la transición al caos a partir de un movimiento cuasiperiódico. En este mapa hay dos parámetros, r y K . Sin embargo, el comportamiento simple no se da por el aumento de K fijando r , sino más bien aumentando K y fijando el número de rotación W de la solución (o bien variando el número de rotación con K fijo). Los dos parámetros hacen la teoría más difícil.

La transición al caos en este caso se hace a partir de un órbita cuasiperiódica. Sin embargo es útil acercarse al número de rotación irracional como límite de una sucesión de números racionales p/q , con p y q enteros.

Cualquier número irracional puede escribirse como una fracción continua

$$W = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\vdots}}}} \quad (7.16)$$

donde los enteros a_1, a_2, a_3, \dots definen la fracción. La n -ésima fracción W_n de W se define truncando la sucesión al orden n , por ejemplo

$$W_2 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad (7.17)$$

Los irracionales cuadráticos (soluciones de una ecuación cuadrática) proporcionan una sucesión (a_1, a_2, a_3, \dots) que es periódica. La teoría del grupo de renormalización utiliza esta estructura, y por consiguiente fue desarrollada sólo para los irracionales cuadráticos. El mayor interés se centró sobre la razón áurea $G = (\sqrt{5} - 1)/2 \simeq 0.61803$, que tiene la simple fracción continua: $(1, 1, 1, \dots)$. Se

suele decir de este número que es “el más irracional”, puesto que las aproximaciones racionales de este número convergen muy despacio. Las aproximaciones racionales son

$$G_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}, \quad (7.18)$$

donde $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ son los números de Fibonacci.

Consideremos la dinámica cuasiperiódica, y supongamos que la razón de las dos frecuencias básicas es igual a la razón áurea, G .

Esto es el límite del desarrollo continuado de fracciones definida por $\frac{F_n}{F_{n+1}}$, donde los F_n son los números de Fibonacci.

La idea es considerar una secuencia de operadores de evolución sobre intervalos del tiempo dados por los números de Fibonacci. Supongamos que $f_n(x)$ y $f_{n-1}(x)$ son operadores de evolución de un mapa unidimensional sobre intervalos de tiempo F_n y F_{n-1} , respectivamente. Según la definición de los números de Fibonacci, $f_{n+1}(x) = F_{n-1}(f_n(x))$. En cada paso de orden n de la construcción podemos introducir una normalización de la variable dinámica por un factor α^n , luego el operador de evolución para F_n pasos de tiempo estará representado por la función $g_n(x) = \alpha^n f_n(x\alpha^{-n})$. La ecuación recurrente para las funciones g_n subsiguientes es

$$g_{n+1} = \alpha^2 g_{n-1}(\alpha^{-1} g_n(x\alpha^{-1})). \quad (7.19)$$

Con una selección adecuada del factor de escala ($\alpha = 1.28857\dots$) El punto fijo de esta ecuación se representa con una función universal

$$\begin{aligned} g(x) = & 1 + 0.76518455x^3 - 0.21546428x^6 - 0.05346973x^9 \\ & + 0.03292162x^{12} + 0.00123151x^{15} - 0.00430447x^{18} \\ & + 0.00066800x^{21} + 0.00050193x^{24} - 0.00017735x^{27} \\ & - 0.00004243x^{30} + 0.00003128x^{33} \end{aligned} \quad (7.20)$$

con un punto de inflexión cúbico en el origen. Esta función está asociada con el comportamiento crítico del tipo (GM).

La perturbación del punto fijo $g_n(x) = g(x) + \epsilon h_n(x)$ da lugar a la ecuación

$$h_{n+1} = \alpha^2 g'(\alpha^{-1}g(x/\alpha))h_n(x/\alpha) + \alpha h_{n-1}(\alpha^{-1}g(x/\alpha)). \quad (7.21)$$

Esta ecuación es lineal respecto a $h_n(x)$ con lo que se puede buscar una solución tal que $h_n(x) = \delta^n h(x)$. Esto nos lleva a un problema de autovalores. Hay dos valores propios relevantes mayores que 1 en módulo, y representan los factores de escala en el espacio de parámetros. Estos autovalores son: $\delta_1 = 2.83361065$; $\delta_2 = \alpha^2 = 1.66042438$; con lo cual la codimensión es igual a 2.

Al extender el estudio al caso bidimensional, se obtiene una generalización de la ecuación (7.19). En este caso la ecuación de grupo de renormalización tiene dos puntos fijos que son responsables de otros tipos de comportamiento crítico (tipos (TF) , (TCT) y (TDT)).

Para ilustrar la topografía del plano de parámetros en el caso del comportamiento crítico del tipo (GM) , representamos el caso del mapa límite en la figura 7.5.

Considerando la delicadeza de los fenómenos, es notable que haya un número de experimentos [A.P.Fein et al., 1985], [Jensen et al., 1985], [Gwinn and Westervelt, 1987], [Glazier and Libchaber, 1988] sobre sistemas desde fluidos a dispositivos electrónicos, que cuantitativamente verifican las predicciones de la teoría. Es imperativo que los sistemas tengan dos “ruedas” para sintonizar el sistema: una para aumentar la no linealidad, y la otra para mantener la razón de frecuencias de los osciladores en la razón irracional escogida, que es generalmente la razón áurea. En estos experimentos, muchos rasgos de la teoría quedaron ilustrados, como la estructura de sincronización de frecuencia y las lenguas de Arnold [Arnold, 1965]; la reconstrucción del toro atractor y su destrucción en el inicio del caos; la cascada de desdoblamientos de período en las lenguas de Arnold.

Nos conformamos con la descripción del comportamiento del tipo Feigenbaum (el caso en el cual el mapa logístico desempeña un papel de modelo estándar), y los comportamientos del tipo tricrítico (T) y razón áurea (GM)

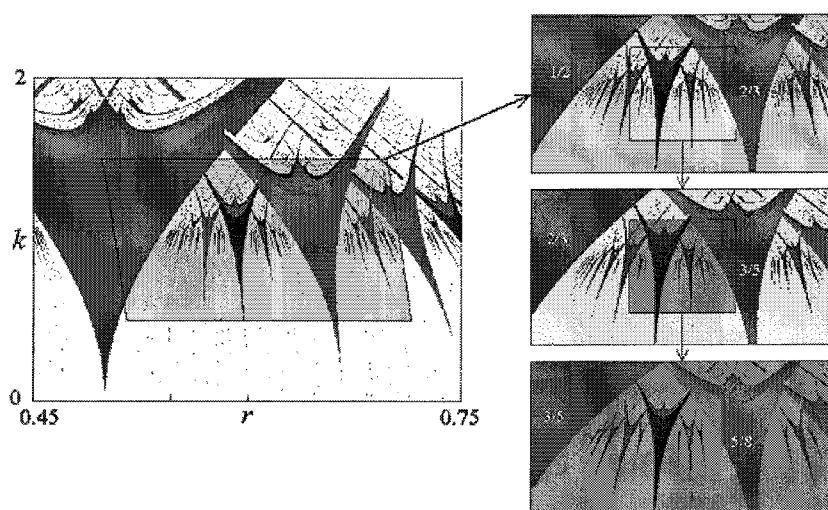


Figura 7.5: Representación de la estructura del plano de parámetros para el mapa del círculo (7.14). La transición al caos se hace según el comportamiento crítico del tipo GM . Se muestra como se hace el reescalado usando los factores de escala.

porque son los relevantes para el sistema de la bola (6.4).

Los otros tipos de comportamiento crítico están asociados con otras funciones $g(x)$ soluciones de la ecuación de GR (7.7), para distintas dimensiones y distintos números de parámetros de control.

7.3 Plano de parámetros: estudio numérico

Consideremos ahora la dinámica de la bola en codimensión 2: la amplitud y la frecuencia de la señal son variables.

La resolución numérica del mapa completo (6.4) así como el mapa en el caso límite ($G \rightarrow 0$) (6.6) permiten investigar la topografía del plano de parámetros (Ω, a) . Este plano exhibe una variedad de comportamientos asintóticos: puntos fijos, movimiento periódico de todos los períodos, movimiento cuasiperiódico, y caos.

El estudio del plano (Ω, a) es una herramienta muy importante para inves-

tigar y localizar estos comportamientos dinámicos. La identificación de estos comportamientos es muy útil para la predicción y el control del sistema.

Numéricamente distinguimos el movimiento periódico buscando puntos (de la trayectoria asintótica) que tienen un período 1, 2, 3... Sólo se buscan los primeros períodos debido a la limitación en la precisión del ordenador.

La figura 7.6 muestra la estructura, computada numéricamente, del plano de parámetros $(\Omega/\Omega_0, a)$ para el mapa 6.4. Las regiones periódicas de período 1 están coloreadas en azul, el período 2 en verde, el período 3 en amarillo, el período 4 en magenta, el período 5 en naranja, etc... . El color rojo corresponde a regiones caóticas mientras el azul claro delimita las zonas de movimiento cuasiperiódico. Para distinguir el movimiento cuasiperiódico del caótico hemos recurrido al criterio del exponente de Lyapunov. El exponente se computa usando la expresión analítica 5.16. Este exponente es mayor que cero para el movimiento caótico e igual a cero para el movimiento cuasiperiódico (véase la tabla 5.2.4). Evaluando el exponente en cada punto del plano de parámetros para el cual el movimiento no es periódico, se decide si corresponde a un punto caótico o cuasiperiódico.

Se ve que el sistema tiene también períodos impares (3, 5, ...), con lo cual todos los períodos son posibles (Teorema de Sarkovsky: período 3 implica caos (véase [Martín et al., 1995])). Aparecen dentro de las zonas cuasiperiódicas las estructuras llamadas *lenguas de Arnold* asociadas con la sincronización de fase y el comportamiento crítico a la transición al caos del tipo *GM*.

Hemos computado numéricamente los valores del parámetro δ_n para los primeros puntos superestables a_n^s del mapa (6.4), con $\Omega_0 = 5.579$. Los resultados se resumen en la tabla 7.3.

n	período	a_n^s	δ_n
1	2	0.134238	-
2	4	0.172730	7.838143
3	8	0.177641	7.288573
4	16	0.178314	8.090036
5	32	0.178398	8.266442

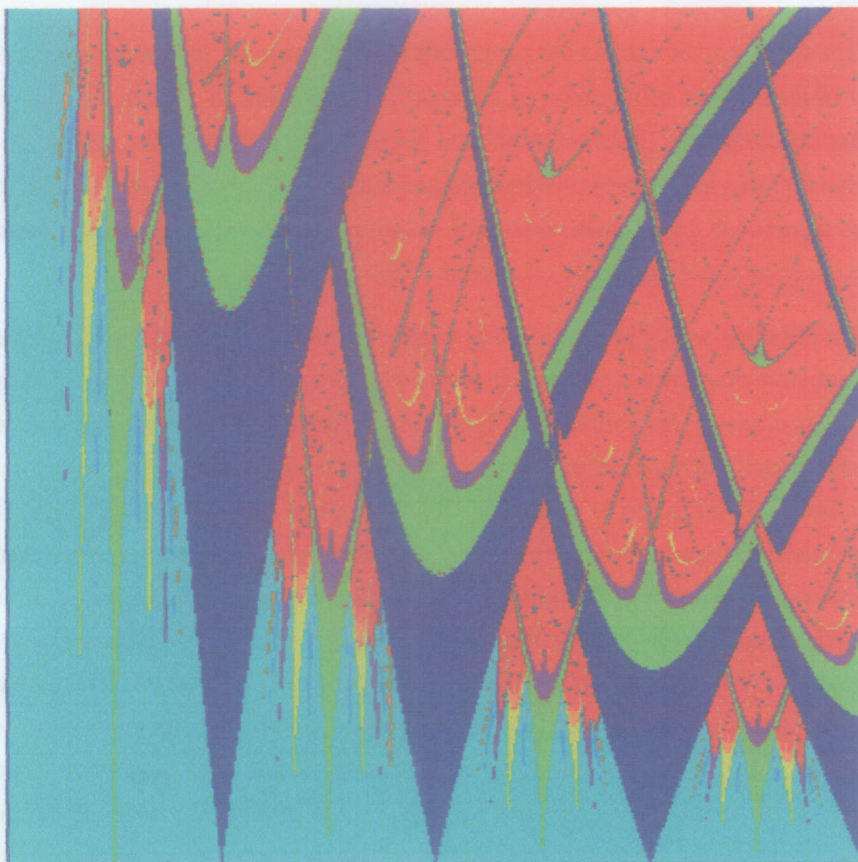


Figura 7.6: Representación de la estructura del plano de parámetros $(\Omega/\Omega_0, a)$ para el mapa (6.4). La región representada es el rectángulo $[0.0, 4.0] \times [0.0, 0.13]$. Los distintos colores corresponden a comportamientos asintóticos distintos; El rojo corresponde al régimen caótico y el azul claro al régimen cuasiperiódico. Los demás colores corresponden al movimiento periódico con distintos periodos: azul P1, verde P2, amarillo P3, magenta P4 y naranja P5.

(Todos los valores en la tabla 7.3 han sido calculados en doble precisión antes de truncarlos para encajar en la tabla.)

Sin embargo, los valores del parámetro α que representa la tasa de separación de la ramas de una bifurcación al período 2^{k+1} respecto al período 2^k , no son fáciles de computar. Esto es debido al hecho de que el mapa se dobla en el espacio de fases aún para el movimiento periódico, es decir que la representación de las soluciones no es unidimensional. Con lo cual el cálculo de las distancias entre los puntos periódicos de un período dado no es factible.

Para ilustrar mejor la transición al caos y el comportamiento del sistema en codimensión dos, vamos a estudiar ahora la topografía del exponente de Lyapunov en el plano de parámetros. Eligiendo la frecuencia y la amplitud como ejes del espacio de parámetros, podemos calcular el exponente de Lyapunov para todos los pares (Ω, a) en el plano (que llamaremos *el espacio de Lyapunov*). El exponente de Lyapunov $\lambda(\Omega, a)$ se comporta así como un campo escalar, como la temperatura o la altitud, y puede representarse de manera similar. A cada valor de λ asignamos un color específico. El esquema de colores que utilizaremos es el ideado por Markus [Markus, 1990]. Asignamos el blanco a todos los puntos cuyo exponente es igual a cero, y el negro a todos los puntos cuyo exponente es mayor que cero. Esto destaca la transición desde el orden al caos. Para puntos en los cuales λ es menor que cero, asignamos una escala de grises tal que los valores cerca de cero sean aproximadamente blancos mientras aquellos cerca de $\lambda = -\infty$ sean negros. Asignamos el negro a cualquier punto donde $\lambda = -\infty$ (es decir, para los puntos y ciclos superestables).

Una representación de la estructura del espacio de Lyapunov se ve en la figura 7.7. Hemos representado en este caso las soluciones para el mapa límite (6.6). La característica más llamativa de este diagrama es su apariencia tridimensional. Las estructuras llamadas *cola de golondrina* (swallowtail) en la zona caótica, cuando se amplían, aparecen como estructuras sólidas y las ramas superestables parecen cruzarse una sobre la otra. En estos sitios, tenemos coexistencia de una triple solución, dos estables y una inestable (inaccesible). Es una propiedad de la *catástrofe*³ del tipo *cúspide* (cusp). El sistema está atraído por una u otra

³Recibe el nombre de catástrofe porque la bifurcación se hace de manera brusca al pasar de un estado estable al otro.

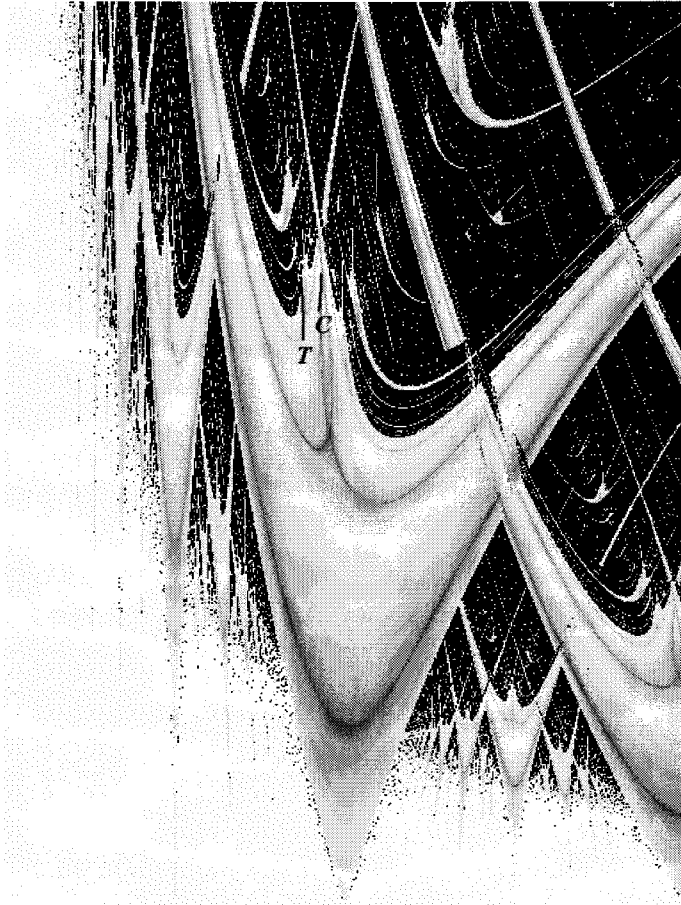


Figura 7.7: El mapa límite (6.6) en el espacio de Lyapunov ($\Omega/\Omega_0, a$). La esquina abajo izquierda corresponde al punto (0,0) y la esquina arriba derecha corresponde al punto (2, 0.4). La zonas blancas y grises corresponden al régimen periódico, mientras las zonas negras por encima de estas son caóticas. Las bandas negras dentro de las zonas periódicas son familias de puntos superestables. Los islotes dentro del régimen caótico son zonas estables con una periodicidad impar. Hemos representado también un punto tricrítico T y un punto “cúspide” C .

de las soluciones estables dependiendo del valor de los dos parámetros elegido para empezar la iteración del sistema. En ciertos casos de superposición de ramas, una de las ramas se ve acompañada con lo que parece como una sombra. Aquí la elección entre los estados posibles es más severa que una elección entre una cuenca de atracción u otra, pues incluye puntos que van a cambiar de orden (blanco o gris) a caos (negro).

Se nota también la existencia de regiones caóticas (negro) alrededor de las “lenguas de Arnold”, que se ven aquí con más claridad que en la representación 7.6. Esto sugiere que a parte del desdoblamiento de período, hay también transición al caos a partir del movimiento cuasiperiódico. No obstante, a lo largo de una estructura “lengua de Arnold”, el caos se inicia vía desdoblamiento de período al aumentar el parámetro a .

7.4 Plano de parámetros: estudio experimental

El estudio experimental del sistema en codimensión 2 no es una tarea fácil. Por cierto, un tiempo considerablemente largo es necesario para reproducir la estructura del plano de parámetros a un cierto nivel de resolución.

Para determinar el comportamiento asintótico, se registra una serie de tiempos de bote en cada punto $(\Omega/\Omega_0, a)$ para un número de botes entre 100 y 150 omitiendo los primeros 100 botes para descartar la fase transitoria. Desafortunadamente las propiedades eléctricas del líquido cambian de manera considerable cuando se alarga la duración del experimento. El tiempo de bote, que depende esencialmente de estas propiedades, se ve afectado también. Con lo cual el tiempo dedicado a cada experimento queda limitado.

De otra parte, las irregularidades de la superficie de la bola afectan a la precisión en la medición del tiempo de bote. Así, el incremento en los parámetros a y Ω está limitado también. Es decir, un incremento en la amplitud muy pequeño no es significativo. Por consiguiente sólo una reproducción gruesa del plano de parámetros es posible experimentalmente.

No obstante, el resultado experimental que se muestra en la figura 7.8 es muy comparable, al nivel de resolución permitido, a aquella computada numéri-

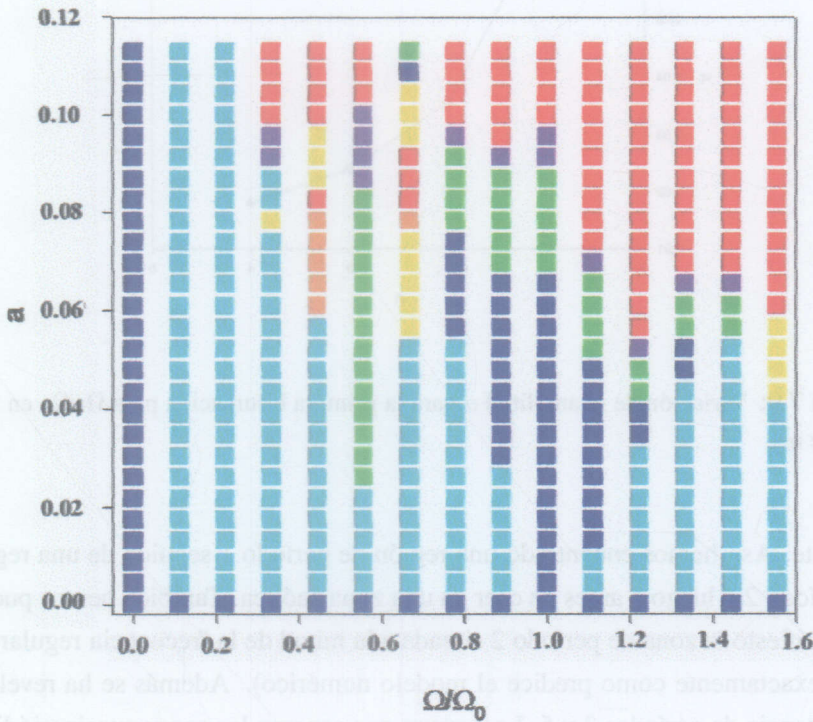


Figura 7.8: Representación de la estructura del plano de parámetros (Ω/Ω_0 , a) obtenida experimentalmente. Los distintos colores corresponden a comportamientos asintóticos distintos. El azul: período 1, verde: P2, amarillo: P3, magenta: P4, naranja: P5, azul claro: régimen cuasiperiódico y rojo: caos. Se ve que los distintos comportamientos dinámicos siguen los patrones predichos por el modelo numérico (véase figura 7.6).

7.5. Conclusión

El estudio en codimensión 2, ha mostrado que el sistema exhibe varios tipos de comportamiento crítico a la transición al caos que no siguen la universalidad de Feigenbaum. Cuando el sistema transita al caos via debilitamiento de período lo hace con un comportamiento crítico (γ). En estos puntos de transición del

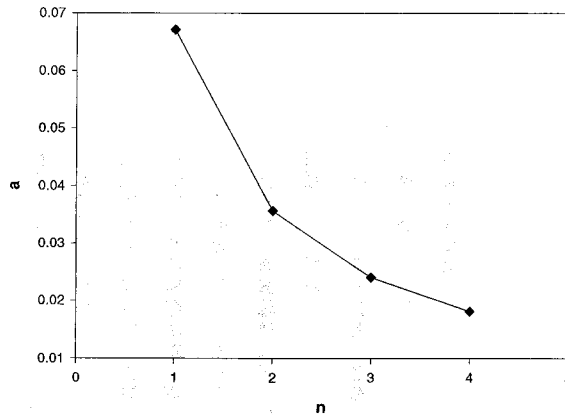


Figura 7.9: Variación de la amplitud a para la primera bifurcación para $\Omega=\Omega_0$ en función de n .

camente. Así, hemos encontrado una región de período 1 seguida de una región de período 2 y luego 4 antes de caer en una zona caótica. También hemos puesto de manifiesto la zona de período 2 situada a la mitad de la frecuencia regular del bote (exactamente como predice el modelo numérico). Además se ha revelado la existencia de períodos 3 y 5. Las curvas que separan las zonas cuasiperiódicas y las zonas periódicas siguen el mismo patrón que las numéricas.

En la figura 7.6 se puede ver que la amplitud a de la primera bifurcación para $\Omega = n\Omega_0$, con n entero, es una función decreciente de n . La figura 7.9 muestra los valores obtenidos experimentalmente para las primeras bifurcaciones en función de la frecuencia. El acuerdo entre teoría y experimento es aceptable.

7.5 Conclusión

El estudio en codimensión 2, ha mostrado que el sistema exhibe varios tipos de comportamiento crítico a la transición al caos que no siguen la universalidad de Feigenbaum. Cuando el sistema transita al caos vía desdoblamiento de período lo hace con un comportamiento tricrítico (T). En efecto nuestra estimación del

factor de escala δ que caracteriza el desdoblamiento de período en nuestro sistema muestra que no se trata de un comportamiento Feigenbaum si no tricrítico. La estructura del espacio de parámetros es, cerca del punto tricrítico, muy similar a la del mapa cúbico, un modelo teórico que exhibe este tipo de comportamiento crítico.

Además creemos que nuestro sistema exhibe, en algunas regiones del espacio de parámetros, una transición al caos a partir de un movimiento cuasiperiódico (a través de la destrucción de un toro 2D). Esta transición, que se hace con un comportamiento crítico del tipo razón áurea (GM), está estrechamente asociada con el fenómeno de sincronización de fase. Tal comportamiento está bien documentado para el mapa del círculo que sirve como modelo para el desarrollo de la teoría de grupo de renormalización asociada con este tipo de comportamiento.

La topografía del plano de parámetros muestra también estructuras de *cola de golondrina* y *cúspide* que surgen en los mapas de dinámica impulsiva.

Este estudio entra en lo que podemos llamar *la teoría de la criticalidad multiparamétrica*. Hasta ahora, sólo el comportamiento crítico del tipo Feigenbaum ha sido comúnmente encontrado y estudiado con detalle. Experimentalmente hay pocos sistemas que muestran tipos de comportamiento crítico *no Feigenbaum*. Nuestro experimento es una prueba de la existencia de tal comportamientos en la naturaleza.

Conclusiones

1. Hemos estudiado la dinámica de una bola conductora inmersa en un líquido poco conductor y sometida a un campo eléctrico estático.
 - (a) Hemos propuesto modelos teóricos simplificados que dan cuenta de las características principales del movimiento así como del umbral de la tensión de despegue de la bola.
 - (b) El estudio experimental de la carga revela que la carga transferida al circuito en cada impacto de la bola con el electrodo representa sólo una pequeña parte de la carga que debe ser transferida a la bola durante la descarga. Un análisis teórico muestra que esta carga es proporcional a la permitividad del líquido, a la inversa de la distancia entre electrodos y al cubo del radio de la bola. Los datos experimentales apoyan este resultado.
 - (c) Hemos evaluado también el orden de magnitud de la distancia x , a la cual se inicia la descarga entre la bola y el electrodo, así como el campo de ruptura del líquido. El parámetro x es muy sensible tanto a la forma de la partícula en movimiento como a la existencia de impurezas, inevitables, en el seno del líquido.
2. El estudio experimental de una partícula fluida (una gota) ha mostrado que en ciertas condiciones, la gota puede comportarse como una partícula sólida y botar sobre un electrodo bajo efecto del campo eléctrico.
 - (a) El modelo propuesto para una partícula sólida, puede ser aplicado al caso de la gota en vuelo.

- (b) En el caso de la gota dos valores críticos del campo eléctrico entran en juego. El primero es el valor del campo necesario para el primer despegue, mientras el segundo corresponde al campo para el cual la gota, ya en movimiento, vuelve al reposo. Este último es siempre menor que el primero debido al hecho de que la fuerza de adhesión sólo actúa sobre la gota antes del despegue y no durante los botes.
 - (c) La deformación de la gota en movimiento es bastante menor que antes del despegue. De otra parte hemos mostrado que el material de que están hechos los electrodos afecta mucho al proceso de despegue y al grado de deformación de la gota antes del despegue. Así, para ciertos materiales la gota, al aumentar el campo, se deforma y luego despega y bota sobre el electrodo como en el caso de la bola. Para otros materiales, la gota, al aumentar el campo, se deforma y luego se rompe eyectando un chorro por la punta hacia el electrodo superior.
3. Hemos estudiado la dinámica no lineal de la bola sometida a un campo eléctrico alterno.
- (a) Hemos propuesto un modelo teórico unidimensional para la dinámica. Los experimentos llevados a cabo revelan los mismos comportamientos predichos por el modelo teórico, tanto para los diagramas de bifurcación como para la reproducción de la función que yace detrás de la dinámica del sistema. Las medidas invariantes del atractor caótico son también consistentes con los resultados experimentales.
 - (b) Hemos encontrado, sin embargo, que el modelo unidimensional es incapaz de reproducir todas las características del atractor que surge de los datos experimentales. Especialmente la dimensión de correlación y la estructura fractal. Por eso hemos refinado el modelo teórico incluyendo el efecto del movimiento del líquido inducido por los botes de la bola. El modelo refinado proporciona atractores con una estructura y una dimensión más consistente con los resultados experimentales.
4. El estudio en codimensión 2, ha mostrado que el sistema exhibe una multitud de comportamientos dinámicos: movimientos periódicos de todos los períodos, cuasiperiódicos y caos.

- (a) Hemos podido reproducir la estructura del plano de parámetros experimentalmente, aunque no con tanta resolución como el estudio numérico lo permite. Los patrones revelados por los resultados experimentales son consistentes con los predichos por el modelo numérico.
- (b) Hemos encontrado que la transición al caos vía desdoblamiento de período no sigue la universalidad de Feigenbaum. El comportamiento crítico a la transición al caos en nuestro sistema revela ser del tipo tricrítico (T).
- (c) Además del desdoblamiento de período, en algunas regiones del espacio de parámetros, la transición al caos se hace a partir de un movimiento cuasiperiódico. Esta transición, que se hace con un comportamiento crítico del tipo razón áurea (GM), está estrechamente asociada con el fenómeno de sincronización de fase, que la estructura del espacio de parámetros exhibe.
- (d) La topografía del plano de parámetros muestra también estructuras de *cola de golondrina* y *cúspide* que surgen en los mapas de dinámica impulsiva.
- (e) Experimentalmente, hay pocos sistemas que muestren tipos de comportamiento crítico *no Feigenbaum*. El sistema que hemos estudiado es una prueba de la existencia de tales comportamientos en la naturaleza.

Apéndice A

Algoritmo de Levenberg-Marquardt

El modelo que ha de ser ajustado tiene la forma

$$y = y(x; \mathbf{a}) \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbf{a} es un vector de M parámetros de que depende el modelo; \mathbf{y} y \mathbf{x} son vectores de dimensión N . N en este caso corresponde al número de datos que hay que ajustar. Se define la función χ^2 como

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i; \mathbf{a})]^2}{\sigma_i} \quad (\text{A.2})$$

σ_i es el peso que corresponde a cada valor x_i .

La función χ^2 representa la suma de los cuadrados de las diferencias entre los datos experimentales y los valores esperados, es decir que corresponden al modelo. Ajustar el modelo corresponde, entonces, a determinar los parámetros \mathbf{a} minimizando esta función. Sin embargo, puesto que la dependencia es no lineal, la minimización debe de ser iterativa.

Se espera que la función χ^2 se aproxime bien por una forma cuadrática que puede escribirse como

$$\chi^2 \approx \gamma - \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.3})$$

donde \mathbf{d} es un M -vector y \mathbf{D} una matriz $M \times M$.

Si la aproximación es buena se puede pasar, en un sólo paso, del valor actual de los parámetros, \mathbf{a}_{actual} , al valor mínimo \mathbf{a}_{min} , del modo siguiente

$$\mathbf{a}_{min} = \mathbf{a}_{actual} + \mathbf{D}^{-1} \cdot [-\nabla \chi^2(\mathbf{a}_{actual})] \quad (\text{A.4})$$

De otra parte, (A.3) puede ser sólo una débil aproximación local a la función que estamos minimizando. En este caso la minimización debe hacerse de modo iterativo. El paso de una aproximación de \mathbf{a} a la siguiente se hace, entonces, según la fórmula

$$\mathbf{a}_{siguiente} = \mathbf{a}_{actual} - constante \times \nabla \chi^2(\mathbf{a}_{actual}) \quad (\text{A.5})$$

donde la constante es suficientemente pequeña para asegurar el decrecimiento de χ^2 .

El gradiente de χ^2 respecto de los parámetros \mathbf{a} , que ha de ser cero cuando χ^2 es mínima, tiene las componentes

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(x_i; \mathbf{a})]}{\sigma_i^2} \frac{\partial y(x_i; \mathbf{a})}{\partial a_k} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (\text{A.6})$$

Derivando una segunda vez, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[\frac{\partial y(x_i; \mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i; \mathbf{a})}{\partial a_l} - [y_i - y(x_i; \mathbf{a})] \frac{\partial^2 y(x_i; \mathbf{a})}{\partial a_l \partial a_k} \right] \quad (\text{A.7})$$

Luego, definimos los términos α y β como

$$\beta_k \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_k}, \quad \alpha_{kl} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_k \partial a_l} \quad (\text{A.8})$$

Haciendo $[\alpha] = \frac{1}{2}\mathbf{D}$ en la ecuación (A.4), esa se escribiría como un conjunto de ecuaciones lineales de la forma

$$\sum_{i=1}^M \alpha_{ki} \delta a_i = \beta_k \quad (\text{A.9})$$

El término que multiplica a la derivada segunda de χ^2 en la ecuación (A.7) es $[y_i - y(x_i; \mathbf{a})]$, que para un modelo adecuado, sólo corresponderá al error aleatorio en cada punto, y que, teniendo ambos signos, positivo y negativo, tiende a cancelarse cuando se suma sobre i . Por eso lo omitiremos, y la matriz $[\alpha]$ tendrá, entonces, la forma

$$\alpha_{kl} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} \frac{\partial y(x_i; \mathbf{a})}{\partial a_k} \frac{\partial y(x_i; \mathbf{a})}{\partial a_l} \quad (\text{A.10})$$

El sistema de ecuaciones (A.9) se resuelve para un incremento δa_l que, añadido a la aproximación actual de \mathbf{a} , da la aproximación siguiente. La ecuación (A.5), se escribe entonces como

$$\delta a_l = \text{constante} \times \beta_l \quad (\text{A.11})$$

Para obtener una escala para la constante que figura en esta fórmula, consideremos la fórmula de β_k en la ecuación (A.8). Siendo χ^2 adimensional, β_k tendrá las dimensiones de $1/a_k$. Por lo que la constante de proporcionalidad entre β_k y δa_k debe tener las dimensiones de a_k^2 . Sólo el término $1/\alpha_{kk}$ tiene estas dimensiones, y por consiguiente es el término adecuado para escalar la constante. Pero, puesto que esta escala puede ser también muy grande, dividimos la constante por un factor adimensional λ , con la posibilidad de poner $\lambda \gg 1$ para reducir el paso. Eso corresponde a cambiar la ecuación (A.11) por

$$\delta a_l = \frac{1}{\lambda \alpha_{ll}} \beta_l, \quad \text{o} \quad \lambda \alpha_{ll} \delta a_l = \beta_l \quad (\text{A.12})$$

En segundo lugar, el método de Marquardt combina las dos ecuaciones (A.12) y (A.9) para

$$\sum_{i=1}^M \alpha'_{ki} \delta a_i = \beta_k \quad (\text{A.13})$$

Los elementos de matriz α'_{ij} están relacionados a α_{ij} por

$$\begin{aligned} \alpha'_{jj} &\equiv \alpha_{jj}(1 + \lambda) \\ \alpha'_{jk} &\equiv \alpha_{jk}, \quad (j \neq k) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Cuando λ es muy grande, la matriz $[\alpha']$ es diagonalmente dominante, luego la ecuación (A.13) se identifica a la ecuación (A.12). De otra parte, cuando λ se acerca a cero, la ecuación (A.13) tiende entonces a la ecuación (A.9).

Después de identificar, así, las ecuaciones usadas por el método, presentamos el algoritmo:

Dados valores iniciales para los parámetros \mathbf{a} , el método consiste en los siguientes pasos:

- Calcular $\chi^2(\mathbf{a})$.
- Asignar un valor pequeño a λ , sea 0.001.
- (†) Resolver la ecuación (A.13) para $\delta\mathbf{a}$ y evaluar $\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a})$.
- Si $\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) \geq \chi^2(\mathbf{a})$, aumentar λ por un factor de 10 (o cualquier otro valor substancial) y volver a (†).
- Si $\chi^2(\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}) < \chi^2(\mathbf{a})$, disminuir λ por un factor de 10, actualizar la solución $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} + \delta\mathbf{a}$, y volver a (†).

La iteración del proceso se termina cuando la función χ^2 sólo decrece por una cantidad $\ll 1$. En la práctica menor que 10^{-3} .

El código del programa se basa esencialmente en tres rutinas que llamamos: `mrqmin()`, `mrqcof()` y `funcs()`.

La rutina `mrqmin` tiene como argumentos los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{a} y la matriz $[\alpha]$. Efectúa una iteración del método de Marquardt. La primera llamada se hace con $\lambda < 0$, para inicializar la rutina. En las siguientes llamadas λ toma el valor sugerido para la iteración siguiente; y cada vez la rutina proporciona los mejores valores de los parámetros \mathbf{a} y el valor de χ^2 correspondiente. En el caso de un paso en que χ^2 aumenta, entonces \mathbf{a} y χ^2 preservan sus valores de entrada mientras λ cambia al valor sugerido por el método. Cuando la convergencia se estima satisfactoria, se pone $\lambda = 0$ antes de hacer una última llamada a `mrqmin` que proporciona los valores finales de los parámetros \mathbf{a} .

La rutina `mrqmin`, llama a la rutina `mrqcof` para el cálculo de la matriz α (ecuación A.10) y el vector β (ecuación A.6 y A.8).

A su vez `mrqmin` llama a la rutina `funcs(x, a, y, dyda)`, que para las entradas $\mathbf{x} \equiv x_i$ y $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}$ calcula la función modelo $\mathbf{y} \equiv y(x_i; \mathbf{a})$ y el vector derivadas $\mathbf{dyda} \equiv \partial y / \partial a_k$.

Apéndice B

Valores asintóticos de S_1 y S_2

Hemos definido la series S_1 y S_2 en el capítulo 3 como

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\alpha)}, \quad (\text{B.1})$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\alpha)}{\sinh^2(n\alpha)}. \quad (\text{B.2})$$

con

$$\sinh(\alpha) = \sqrt{\frac{h^2}{R^2} - 1}, \quad (\text{B.3})$$

y h la distancia entre el centro de la bola y el electrodo inferior.

La descarga ocurre a una distancia x entre la bola y el electrodo, es decir $x = h - R$, con R el radio de la bola. Para valores de x pequeños, con lo que $x/R \ll 1$, se pueden hallar los valores asintóticos al que tienden las series S_1 y S_2 (ecuaciones (B.1) y (B.2)).

Cuando $x \rightarrow 0$ tenemos

$\alpha \rightarrow 0$, $h \rightarrow R$, $\sinh(\alpha) \rightarrow 0$ y $\cosh(\alpha) \rightarrow 1$.

En estas condiciones podemos escribir

$$\sinh^2(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\alpha)}{\sinh^2(n\alpha)} \rightarrow \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \alpha^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{B.4})$$

La serie S_1 , está definida por la ecuación (3.5) como

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh(n\alpha)}, \quad (\text{B.5})$$

con lo que podemos escribir

$$\alpha S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\sinh(n\alpha)}. \quad (\text{B.6})$$

Y como $\alpha \rightarrow 0$, podemos pasar de la suma a la forma integral del modo

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha S_1 = \int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\sinh(\alpha)} = \ln(\tanh(\alpha/2)). \quad (\text{B.7})$$

Por lo que el valor asintótico de la serie S_1 es

$$S_1 \rightarrow \frac{-\ln(\alpha/2)}{\alpha} \quad (\text{B.8})$$

En cuanto a la serie S_2 está definida por la ecuación (B.2) como

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(n\alpha)}{\sinh^2(n\alpha)}. \quad (\text{B.9})$$

Se obtiene por consiguiente que

$$S_2 \rightarrow \frac{\pi^2}{6\alpha^2}. \quad (\text{B.10})$$

Siendo $\cosh(\alpha) = h/R$ y x pequeño, se compruebe fácilmente que $\alpha = \sqrt{2x/R}$, en consecuencia de lo cual tenemos

$$\frac{S_2}{S_1} \rightarrow \frac{-\pi^2}{3\sqrt{\frac{2x}{R}} \ln\left(\frac{x}{2R}\right)} \quad (\text{B.11})$$

Apéndice C

Teoría de pequeñas deformaciones de un gota en un campo eléctrico

La deducción de la expresión de la deformación de una gota conductora libre en presencia de un campo eléctrico es la que sigue. La forma de equilibrio de la gota viene dada por el mínimo de la energía. En este caso la energía tiene un término eléctrico y uno capilar

$$U = -\frac{1}{2}pE_0 + \gamma_{12}S \quad (\text{C.1})$$

donde p es el momento dipolar inducido en la gota¹, y S el área de la gota.

Para una forma elipsoidal de revolución con semiejes $a > b$ el momento dipolar inducido en la gota se puede expresar como [Landau and Lifshitz, 1975]

$$p = \epsilon_l \frac{(4/3)\pi ab^2}{n} E_0 \quad (\text{C.2})$$

¹el factor 1/2 se debe a que el dipolo es proporcional al campo, así para aumentar el campo dE_0 la energía aumenta en $-p dE_0 \propto d((1/2)E_0^2)$

siendo

$$n = \frac{(1 - e^2)}{2e^3} \left(\ln \frac{1 + e}{1 - e} - 2e \right) \quad (\text{C.3})$$

la excentricidad es $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$.

El área S de un elipsoide viene dado por

$$S = 2\pi(b^2 + ba \frac{\arcsen(e)}{e}) \quad (\text{C.4})$$

Como el volumen de la gota se mantiene constante tenemos que $ab^2 = R^3$, que junto con la definición de e permite expresar todo en función de e y R

$$a = \frac{R}{(1 - e^2)^{1/3}} \quad b = R(1 - e^2)^{1/6} \quad (\text{C.5})$$

Introduciendo la energía adimensional como $\hat{U} = U/(4\pi\gamma_{12}R^2)$ y definiendo el número de Bond eléctrico $N_e = \frac{1}{2}\epsilon_l E_0^2 R/\gamma_{12}$ tenemos

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3n(e)} N_e + (1 - e^2)^{1/3} + \frac{1}{(1 - e^2)^{1/6}} \frac{\arcsin(e)}{e} \right) \quad (\text{C.6})$$

Desarrollando en serie para $e \ll 1$ se tiene

$$\hat{U} = (1 - N_e) - \frac{2}{5} N_e e^2 + \left(\frac{2}{45} - \frac{58}{175} N_e \right) e^4 \quad (\text{C.7})$$

El mínimo se obtiene para $d\hat{U}/de = 0$

$$e^2 = \frac{9}{2} N_e \quad (\text{C.8})$$

donde, por consistencia, se han despreciado los terminos $N_e^2(e^4)$.

La excentricidad se aproxima bien por $e^2 = 2(a - b)/R$. Con lo que se obtiene

$$\frac{a - b}{R} = \frac{9}{8} \frac{\epsilon_l E_0^2 R}{\gamma_{12}} \quad (\text{C.9})$$

Un cálculo exacto con ayuda de Matlab muestra que esta aproximación está dentro del 2% hasta valores de N_e de 0,01.

Bibliografía

- [Abarbanel, 1995] Abarbanel, H. D. I. (1995). *Analysis of Observed Chaotic Data*. Springer-Verlag, New York.
- [Andronov et al., 1971] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., and Mair, A. G. (1971). *Theory of Bifurcations of Dynamic System on a Plane*. Israel program of scientific translations, Jerusalem.
- [Anis and Srivastava, 1981] Anis, H. and Srivastava, K. D. (1981). Free conducting particles in compressed gas insulation. *IEEE Trans. Electr. Insul.*, EI-16(4):327–338.
- [A.P.Fein et al., 1985] A.P.Fein, Heutmaker, M., and Gollub, J. (1985). *Phys. Scr.*, T9(79).
- [Arnold, 1965] Arnold, V. I. (1965). Small denominators. i. mapping of the circumference onto itself. *Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2.*, 46:213–284.
- [Basaran and Scriven, 1990] Basaran, O. A. and Scriven, L. E. (1990). Axisymmetric shapes and stability of pendent and sessile drops in an electric field. *J. of Coll. and Int. Sci.*, 140(1):10–30.
- [Beard et al., 1989] Beard, K. V., Ochs, H. T., and Kubesh, R. T. (1989). Natural oscillations of small raindrops. *Nature*, 342(.):408–410.
- [Birlasekaran, 1991] Birlasekaran, S. (1991). The measurement of charge on single particles in transformer oil. *IEEE Trans. on Elec. Insul.*, 26(6):1094–1103.
- [Carcasses et al., 1991] Carcasses, J. P., Mira, C., Bosch, M., Simó, C., and Tatter, J. C. (1991). Crossroad area - spring area transition (i) parameter plane representation. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1(1):183–196.

- [Carraz et al., 1995] Carraz, F., Rain, P., and Tobazéon, R. (1995). Particle-initiated breakdown in a quasi-uniform field in transformer oil. *IEEE Trans. on Diel. and Elect. Insul.*, 2(6):1052–1063.
- [Chang et al., 1981] Chang, S. J., Wortis, M., and Wrights, J. A. (1981). Iterative properties of a one-dimensional quartic map: Critical lines and tricritical behavior. *Phys. Rev. A*, 24(5):2669–2684.
- [Chow et al., 1982] Chow, Y. L., Srivastava, K. D., and Charalambous, C. (1982). Electrostatic field between a conducting sphere and a dielectric-coated electrode. *J. Electrostatics*, 11:167–178.
- [Chows and Li, 1994] Chows, S. and Li, C. (1994). *Normal forms and bifurcations of planar vector fields*. Cambridge University Press.
- [Clift et al., 1978] Clift, R., Grace, J. R., and Weber, M. E. (1978). *Bubbles, Drops and Particles*. Academic Press, London.
- [Collet et al., 1980] Collet, P., Eckmann, J.-P., and Lanford, O. E. (1980). Universal properties of maps on an interval. *Comm. Math. Phys.*, 76:211–254.
- [Cooke, 1980] Cooke, C. M. (1980). *Electrostatics of particule control in gas-insulated apparatus, Gaseous Dielectrics II*, pages 275–283. L. G. Christophorou, Ed., New York: Pergamon.
- [Darveniza, 1969] Darveniza, N. (1969). The effect of carbon particles on the ac field strength of transformer oil. *Elect. Eng. Trans.*, 5.
- [Dascalescu et al., 2001] Dascalescu, L., Vlad, S., a. Iuga, and Levin, P. L. (2001). Electrostatics of conductive particles in contact with a plate electrode affected by a non uniform electric field. *J. Electrostatics*, 11:167–178.
- [Davis et al., 1986] Davis, R. H., Serayssol, J.-M., and Hinch, E. J. (1986). The electrohydrodynamic collision of two spheres. *J. Fluid Mech.*, 163(479).
- [Denegri et al., 1977] Denegri, G. B., Liberti, G., Molinari, C., and Viviani, A. (1977). Field enhanced motion of impurity particles in fluid dielectrics under linear conditions. *IEEE Trans. on Elect. Insul.*, 12(2):114.
- [Ditto et al., 1990] Ditto, W. L., Rauseo, S.Ñ., and Spano, M. L. (1990). Experimental control of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 65(26):3211–3216.

- [Feigenbaum, 1978] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of non linear transformations. *J. Stat. Phys.*, 19:25–52.
- [Feigenbaum, 1979] Feigenbaum, M. J. (1979). The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 21:669–706.
- [Felici, 1966] Felici, N. (1966). Forces et charges de petits objets en contact avec une électrode affectée d'un champ électrique. *Rev. Gén. Électr.*, 75(10):1145–1160.
- [Felsenthal, 1967] Felsenthal (1967). Enhanced charge transfer in dielectric fluids containing conducting particles. *Brit. J. Appl. Phys.*, 18:1801–1806.
- [Flynn and Wilson, 1998] Flynn, C. and Wilson, N. (1998). A simple method for controlling chaos. *Am. J. Phys.*, 66:730.
- [Fraser and Swinney, 1986] Fraser, A. M. and Swinney, H. L. (1986). Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Phys. Rev.*, A(33):1134.
- [Glazier and Libchaber, 1988] Glazier, J. A. and Libchaber, A. (1988). *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 35.
- [Gondret et al., 2002] Gondret, P., Lance, M., and Petit, L. (2002). Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Phys. of Fluids.*, 14(2):643–652.
- [Grasseberger and Procaccia, 1982] Grasseberger, P. and Procaccia, I. (1982). Characterization of strange attractors. *Phys. Rev. Lett.*, 50(.):346–349.
- [Guckenheimer and Holmes, 1983] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York.
- [Gwinn and Westervelt, 1987] Gwinn, E. and Westervelt, R. (1987). Scaling structure of attractors at the transition from quasiperiodicity to chaos in electronic transport in ge. *Phys. Rev. Lett.*, 59.
- [Ha and Yang, 2000] Ha, J. W. and Yang, S. M. (2000). Deformation and breakup of newtonian and non-newtonian conducting drops in an electric field. *J. Fluid Mechanics*, (405):131–156.

- [Israelachveli, 2000] Israelachveli, J. (2000). *Intermolecular and Surface Forces*. Academic Press, San Diego, CA.
- [Jensen et al., 1985] Jensen, M. H., Kadanoff, L. P., Libchaber, A., Procaccia, I., and Stavans, J. (1985). Global universality at the onset of chaos: Results of a forced rayleigh-bénard experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 55.
- [Johnson, 1973] Johnson, T. W. (1973). Dynamics of a conducting sphere between capacitor plates. Master's thesis, MIT.
- [Joseph et al., 2001] Joseph, G. G., Zenit, R., Hunt, M. L., and Rosenwinkel, A. M. (2001). Particle-wall collisions in viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 433(329):.
- [Kantz, 1994] Kantz, H. (1994). A robust method to estimate the maximal lyapunov exponent of a time series. *Phys. Lett.*, A(185):77.
- [Kantz and Schreiber, 1997] Kantz, H. and Schreiber, T. (1997). *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- [Kennel et al., 1992] Kennel, M. B., Brown, R., and Abarbanel, H. D. I. (1992). Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Phys. Rev.*, A(45):3403.
- [Krasucki, 1968] Krasucki, Z. (1968). High field conduction in liquid dielectrics. In *Int. Coll. on Conduction Processes in Dielectric Liquids*, Grenoble.
- [Kuznetsov et al., 1997] Kuznetsov, A. P., Kuznetsov, S. P., and Sataev, I. R. (1997). A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos. *Physica D*, 109:91–112.
- [Kuznetsov et al., 2001] Kuznetsov, A. P., Turukina, L. V., and Mosekilde, E. (2001). Dynamical systems of different classes as models of the kicked nonlinear oscillator. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 11:1065–1077.
- [Landau and Lifshitz, 1975] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1975). *Electrohidrodinámica de los medios continuos, curso de física teórica. Vol. 8*. Editorial Reverté.

- [Lanford, 1982] Lanford, O. E. (1982). A computer assisted proof of the feigenbaum conjecture. *Bull. Am. Math. Soc.*, 6:427–434.
- [Lebedev and Skalskaya, 1962] Lebedev, N.Ñ. and Skalskaya, I. P. (1962). Force acting on a conducting sphere in the field of parallel plate condenser. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 32(3):375–378.
- [Levin et al., 1993] Levin, P. L., Hansen, A. J., Beatovic, D., Gan, H., and Petrangelo, J. H. (1993). A unified boundary element-finite element package. *IEEE Trans. Electr. Insul.*, 28:161–167.
- [Lichtenberg and Liberman, 1983] Lichtenberg, A. J. and Liberman, M. A. (1983). *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, New York.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E.Ñ. (1963). Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141.
- [Mandelbrot, 1989] Mandelbrot, B. (1989). *Les objets fractales*. .
- [Markus, 1990] Markus, M. (1990). Chaos in maps with continuous and discontinuous maxima. *Computers in Physics*, pages 481–493.
- [Martín et al., 1995] Martín, M. A., Morán, M., and Reyes, M. (1995). *Iniciación al caos*. Editorial Síntesis, Madrid.
- [Maxwell, 1892] Maxwell, J. C. (1892). *A Treatise on Electricity and Magnetism.*, volume 1. Oxford Clarendon Press.
- [May, 1976] May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–467.
- [Melcher, 1974] Melcher, J. R. (1974). Electric fields and moving media. *IEEE Trans. on Edu.*, E-17(2):100–110.
- [Molinari and Viviani, 1979] Molinari, G. and Viviani, A. (1979). Analysis of the charge exchange mechanism between impurities and electrodes in a dielectric liquid. *J. Electrostatics*, 7:27–32.
- [Nicolis and Nicolis, 1984] Nicolis, C. and Nicolis, G. (1984). Is their a climatic attractor? *Nature*, 311:529–532.

- [Ott et al., 1990] Ott, E., Grebogi, C., and Yorke, J. A. (1990). Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1196.
- [Perez, 2002] Perez, A. T. (2002). Charge and force on a conducting sphere between two parallel electrodes. *J. of Electrostatics*, 56:199–217.
- [Pohl, 1967] Pohl, H. A. (1967). Nonuniform fields effects in poorly conducting media. *J. Electrochem. Soc.*, 107(5):386–390.
- [Press et al., 1990] Press, W. H. et al. (1990). *Numerical Recipes In C*, pages 540–547. Cambridge University Press.
- [Rand et al., 1982] Rand, D., Ostlund, S., Sethna, J., and Siggia, E. D. (1982). Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems. *Phys. Rev. Lett.*, 49.
- [Rayleigh, 1879] Rayleigh, L. (1879). . *Proc. R. Soc. Lond.*, A 28(406):.
- [Rayleigh, 1882] Rayleigh, L. (1882). . *Philos. Mag.*, 14(184):.
- [Richard et al., 2002] Richard, D., Clanet, C., and Quéré, D. (2002). Contact time of a bouncing drop. *Nature*, 417:811.
- [Rossi, 1989] Rossi, E. L. (1989). Archetypes as strange attractors. *Psychological Perspectives*, 20(1).
- [Samuila and Dascalescu, 1998] Samuila, A. and Dascalescu, L. (1998). Unipolar charging of cylindrical insulating particles near electrode surface. *IEEE Trans. Indust. Appl.*, 34(1):51–56.
- [Sartor, 1969] Sartor, J. D. (1969). . *Phys. Today*, 22(45):.
- [Shannon and Weaver, 1963] Shannon, C. E. and Weaver, W. (1963). *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana.
- [Sheshkamal et al., 1990] Sheshkamal, J., Cross, J. D., and Weckman, E. J. (1990). Laser doppler anemometer measurements of particle-fluid motion in dielectric liquids under uniform electric field. *Proc. of 1990 IEEE Int. Symp. on Elec. Insul. Canada*.

- [Sivakumar et al., 2000] Sivakumar, B., Berndtsson, R., Olsson, J., Jinno, K., and Kawamura, A. (2000). Dynamics of monthly rainfall-runoff process at the göta basin: A search of chaos. *Hydro. Earth Sys. Sci.*, 4(3):407–417.
- [Soria et al., 1997] Soria, C., Ramos, A., and Pérez, A. T. (1997). The charged bouncing ball: An experimental model for period-doubling bifurcation. *Europhysics Letters*, 37(8):541–546.
- [Stannett, 1951] Stannett, A. W. (1951). The conductivity of hydrocarbon transformer oil containing water and solid conducting particles. *Brit. J. Appl. Phys.*, 2.
- [Taylor, 1964] Taylor, G. I. (1964). Disintegration of water drops in an electric field. *Proc. R. Soc. Lond.*, A(280):383–397.
- [Taylor, 1966] Taylor, G. I. (1966). Studies in electrohydrodynamics. i. the circulation produced in a drop by an electric field. *Proc. R. Soc. Lond.*, A(269):256–319.
- [Thamilmaran and Lakshmanan, 2002] Thamilmaran, K. and Lakshmanan, M. (2002). Classification of bifurcations and routes to chaos in a variant of murali lakshmanan chua circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 12.
- [Thompson and Stewart, 2002] Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (2002). *Nonlinear dynamics and chaos*. John Wiley & sons Inc., New York.
- [Tobazéon, 1993] Tobazéon, R. (1993). Behaviour of spherical and cylindrical particles in an insulating liquid subjected to a dc field. In *Proceedings IEEE 11th ICDL*, pages 415–420, Baden-Dattwil, Switzerland.
- [Tobazéon, 1996] Tobazéon, R. (1996). Charges and discharges of conducting particles in a plane oil gap subjected to a dc voltage. In *Proceedings IEEE Record of the 12th ICDL*, Roma, Italy.
- [Tufillaro and Albano, 1986] Tufillaro, N. B. and Albano, A. M. (1986). Chaotic dynamics of a bouncing ball. *Am. J. Phys.*, 54(10):939–944.
- [Vizika and Saville, 1992] Vizika, O. and Saville, D. A. (1992). The electrohydrodynamic deformation of drops suspended in steady and oscillatory electric fields. *J. of Fluid Mech.*, 239(.):1–21.

[Wilson and Wetheril, 1951] Wilson, W. R. and Wetheril, L. (1951). Operation of bushings in carbonized oil. *Trans. AIEE, Pt. II*, 70:1398–1407.

[Zenit and Hunt, 1999] Zenit, R. and Hunt, M. L. (1999). Mechanics of immersed particle collisions. *J. Fluid Eng.*, 121(179):.

Algunas referencias interesantes en la Web

- Métodos de análisis de series temporales:
[http : //www.mpipks – dresden.mpg.de/ ~ tisean/](http://www.mpipks-dresden.mpg.de/~tisean/)
[http : //pw1.netcom.com/ ~ eugenek/download.html](http://pw1.netcom.com/~eugenek/download.html)
- Curso de caos:
[http : //www.cmp.caltech.edu/ ~ mcc/ChaosCourse/Outline.html](http://www.cmp.caltech.edu/~mcc/ChaosCourse/Outline.html)
- Saratov group of theoretical nonlinear dynamics:
[http : //www.sgtn.d.tserv.ru/education/eng/index.htm](http://www.sgtn.d.tserv.ru/education/eng/index.htm)
- Diccionario de términos científicos:
[http : //mathworld.wolfram.com/](http://mathworld.wolfram.com/)
- Software de tratamiento de imágenes *ImageJ*:
[http : //rsbweb.nih.gov/ij/](http://rsbweb.nih.gov/ij/)

Publicaciones relacionadas con la tesis

Publicaciones en revistas internacionales

- A. Khayari and A. T. Pérez, "Charge acquired by a spherical ball bouncing on an electrode: comparison between theory and experiment", *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Ins.*, vol. **9**, No. 4, pp. 589-595,(2002).
- A. Khayari and A. T. Pérez, "Nonlinear dynamics of a bouncing ball driven by electric forces", *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, vol. **13**, No. 10, pp. 2959-2975, (2003).


Publicaciones en proceedings de congresos

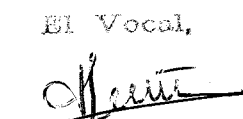
- A. Khayari, A. T. Pérez and A. Castellanos, "Charge acquired by a spherical ball bouncing on an electrode: comparison between theory and experiment", *2000 Annual Report CEIDP. IEEE Press 00CH37132*, pp. 470-473, (2000).
- A. Khayari, A. T. Pérez, F. J. García and A. Castellanos, "Dynamics and deformation of a drop in a DC electric field", *2003 Annual Report CEIDP. IEEE Press 03CH37471*, pp. 682-685, (2003).

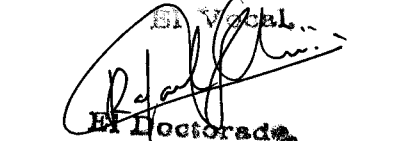
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Excmo. Sr. D. ABDELMOUNIM KHAYARI, Doctorante
 en el M. D. de Dinámica no lineal de una sola conductora ymersa en un líquido dieléctrico sometida a un campo eléctrico
 se le otorga la calificación de SOBRESALIENTE CUM LAUDE

Sevilla, 26 de MARZO de 2004

El Vocal,

 EL PRESIDENTE,

El Vocal,

 El Secretario,

El Vocal,

 El Doctorado,
