Aplicación del Razonamiento Semicualitativo al modelado y análisis de sistemas económicos

Rafael M. Gasca, J. A. Ortega y M. Toro
Dpto. Lenguajes y Sistemas Informáticos
Facultad de Informática y Estadística
Universidad de Sevilla
Avda. Reina Mercedes s/n 41012 SEVILLA
gasca,jaortega,mtoro@lsi.us.es

Resumen

Generalmente, el uso de modelos para el estudio y análisis de sistemas económicos y de otras disciplinas, tienen en cuenta solamente el conocimiento cuantitativo, ignorándose el conocimiento cualitativo, que sin embargo parece conveniente considerarlo, con el objetivo de obtener mejores conclusiones. Este conocimiento cualitativo comprende conceptos como "alto", "muy negativo", "poco valioso", "monótono creciente", etc.. y símbolos como $\gg$ y $\approx$. Estos elementos ya se usan implícitamente en diferentes tareas de diseño o diagnóstico, pues en la parte del análisis de una tarea de diseño, se deducen muchas relaciones entre los parámetros de un proceso.
En este trabajo se presenta una nueva metodología para integrar el conocimiento cualitativo y cuantitativo que se tiene de los sistemas, y en particular en los sistemas económicos, con el objeto de responder a determinadas preguntas. Se adopta una aproximación, muy usada en la práctica, para la representación de los conceptos cualitativos, que es mediante intervalos cerrados reales, que ha sido ampliamente aceptada en el área de la Inteligencia Artificial. Un lenguaje de modelado permite especificar los conceptos tanto cualitativo como cuantitativo del modelo y mediante las correspondientes reglas de transformación de la semántica del lenguaje se obtiene un problema de satisfacción de restricciones numérico. Para obtener las conclusiones, hemos desarrollado algoritmos que tratan el problema primeramente de forma simbólica y después en forma numérica. Los resultados obtenidos que son intervalos reales cerrados pueden convertirse en respuestas cualitativas a través de la interpretación lingüística correspondiente. Finalmente, las capacidades de estas técnicas se ilustran en diferentes modelos económicos mostrando resultados muy satisfactorios.

1 Introducción

Los modelos son representaciones de los aspectos relevantes de un sistema con el propósito de responder a cuestiones particulares. Es frecuente en muchos sistemas, tener una carencia de información cuantitativa y a veces también de un "exceso" de información cuantitativa, que en ciertas situaciones permite obtener conclusiones significativas y que forman un conocimiento completamente cualitativo. Es por ello que se presentan en los últimos años un conjunto de monografías sobre métodos y técnicas que son posibles aplicar para razonar cualitativamente [Weld90], [Faltings92], [Kuipers94], [Piera95], [Dague95], [Trave97]. Este conocimiento cualitativo es útil para entender de una manera simple algunas de las propiedades de los modelos, por consiguiente su simplicidad es su propiedad principal. La representación cualitativa del mundo y el intento de razonar cualitativamente sobre la realidad física no es nuevo y ha sido usado con fines diferentes, como la supervisión y diagnosis de procesos químicos industriales [Penalva91], [Bousson93], de motores marinos [Moreno93], el control de procesos[Lepetit87], [Foulloy93], el análisis de sistemas dinámicos [Aracil93], [Gasca98] y el análisis de software [Xanthak94]. Para modelos complejos donde no se tiene un conocimiento cuantitativo completo del mismo o es imposible disponer de él, los economistas usan para el análisis de sus sistemas las técnicas de *orden causal* [Simon77] y la *estática comparativa* [Ritschard83]. En la mayoría de las aproximaciones para realizar el razonamiento cualitativo (RC) en el campo de la Inteligencia Artificial, se supone explícitamente o implícitamente que los modelos cualitativos se obtienen directamente de modelos cuantitativos, o en otro caso los modelos cualitativos pueden refinarse para obtener una descripción cuantitativa del sistema. Debido a esto, puede parecer que el RC competiría con otras áreas y métodos científicos, de manera que los resultados puedan compararse con los obtenidos por métodos cuantitativos, sin embargo las técnicas cualitativas son consideradas en la bibliografía como complementarias a aquellas.

En la formalización de RC, las decisiones que se toman acerca de las formas de describir las cantidades cualitativas y para manipularlas con objeto de obtener resultados son las siguientes:

- Un conjunto finito de valores.
- El conjunto de valores debe cubrir el rango total del conductas de interés.
- Una interpretación de los resultados obtenidos en el análisis cualitativo.
- Un orden natural de los valores cualitativos
- Un formalismo que expresa la descripción del sistema en términos de relaciones cualitativas de las variables y las operaciones para obtener las soluciones.

La primera aproximación que se usó para razonar cualitativamente fué el álgebra de signos, pero tenía un problema importante y es que los resultados suelen ser poco significativos, llevando a lo que es conocido como el fenómeno sobre-abstracción [Kuipers86]. Por ello se han formalizado nuevas aproximaciones que establecen un nivel medio de abstración entre lo puramente cuantitativo y cualitativo. Estas aproximaciones aprovechan las relaciones en orden de magnitud absoluto [Trave89], [Missier89], [Piera91], [Agell98] y relativo[Raiman88]. Uno de los problemas más importantes en ellos eran la escasa flexibilidad a la hora de introducir el conocimiento cuantitativo es por ello que se empezaron a mejorar con el formalismo $O(M)$ [Mavrovo90]. Otro problema importante fue la imposibilidad desde un nivel formal para expresar un cambio gradual de un orden de magnitud a otro, debido a que no hay solapamiento de los órdenes de magnitud entonces se propone un nuevo sistema formal $ROM(K)$[Dague93a], introduciendo una relación nueva *"distante de"*. Previamente, se propuso también un sistema basado en conjuntos [Raiman91], que usa los conjuntos *Pequeño* y *Mediano*, que coinciden con determinadas etiquetas cualitativas de $ROM(K)$, y para inferir usa un balance aproximado de cantidades con un nivel variable de precisión.

Otro problema importante que presentan estas técnicas es la dificultad para controlar el proceso de inferencia, con objeto de obtener resultados válidos en el mundo real. Las mejoras para controlar el proceso de inferencia se han resuelto extendiendo estos modelos mediante el cálculo de tolerancia que mantiene una medida de exactitud de los resultados inferidos. Tales extensiones se realizaron primeramente con relaciones borrosas [Dubois89], posteriormente con relaciones representadas por intervalos en $ROM(\mathbb{R})$ [Dague93b] y últimamente través de la definición de nuevas relaciones entre las cantidades y usando más sofisticados cálculos de tolerancia [Dollinger98]. También la posibilidad de describir de una manera cualitativa la graduación de la *"despreciabilidad"* permite obtener una precisión mayor en ciertos problemas de razonamiento cualitativo [Sanchez96a].

Los primeros trabajos de integración del conocimiento cualitativo y cuantitativo se llevaron a cabo en $O(M)$ y después en $ROM(\mathbb{R})$ pero los resultados que obtuvieron aunque válidos no son en general óptimos. También en otra línea de integración se han tratado los diferentes tipos de orden de magnitud en los modelos cualitativos [Sanchez96b] con el objeto de mejorar los resultados. Por último cabe citar los trabajos desarrollados con la idea de resolver la situación usual en la cuál se dispone de algunos datos realmente cuantitativos, y de otros solamente se dispone de las descripciones cualitativas [Gasca96][Gasca98][Sanchez98].

También el razonamiento en orden de magnitud se usa en la simplificación de modelos y la búsqueda de un modelo aproximado que es, en general, más fácil de tratar y que captura mejor la esencia del problema. Se realiza identificando y eliminando los términos insignificantes, después se determina la importancia de un término por medio de la definición del orden de magnitud de una cantidad en un escala logarítmica y por último se usa un conjunto de reglas para propagar los órdenes de magnitud a través de las ecuaciones [Nayak92]. Otras ideas de simplificación del modelo se basan en una teoría de funciones en orden de magnitud asintótico [Yip93].

El Razonamiento con los rangos de los valores de variables son a menudo otro tipo de razonamiento usado en sistemas cualitativos, donde hay datos que pueden tomar un conjunto de valores o parámetros parcialmente definidos. Los primeros trabajos sobre ello [Simmon86], [Sacks87] usaron la aritmética de intervalos junto con otras técnicas específicas. En general, un problema de razonamiento puede convertirse en un Problema de Satisfacción de Restricciones Numérico ($CSPN$). Esto es una tupla (X, D, C) donde X denota un conjunto de variables, D denota un conjunto de dominios continuos, tal que D_{x_i} es el intervalo conteniendo todo los valores aceptables para la variable x_i y C es el conjunto de restricciones que tienen que satisfacerse. Una manera natural de razonamiento en los rangos de valores es propagar los dominios de las variables a través de las restricciones. La aplicación de diferentes técnicas de consistencia en la resolución de los $CSPN$ permite descubrir valores incoherentes y anularlos. En la bibliografía se han desarrollado diferentes técnicas para resolución de estos problemas [Davis87] [Hyonen92], [Lhomme93], [Lhomme94], [VanHent95b], [SamHar95], [Benham96], [VanHent97], [Marti97]. Muchas de estas técnicas tienen un inconveniente importante pues introducen puntos de elección que las hace de complejidad exponencial y en general las soluciones que obtienen no son las óptimas.

El objetivo de este trabajo es la construcción de un sistema para razonar, mediante una determinada metodología, en modelos donde se conocen algunos datos cuantitativos y las descripciones cualitativas de otros. Estos modelos se les ha denominado *modelos semicualitativos*. La metodología desarrollada permite fácilmente expresar de manera declarativa el conocimiento cualitativo en estos modelos mediante un lenguaje de modelado, bastante rico en conceptos de tipo cualitativo. Las estrategias de inferencia del sistema de razonamiento se han separado en dos etapas una simbólica y otra numérica que eficazmente restringe las inferencias de tal forma que los resultados obtenidos sean de utilidad para las actividades de análisis de los modelos.

2 Razonamiento Semicualitativo

Para representar los conceptos cualitativos pueden elegirse diferentes opciones, no obstante una representación ampliamente aceptada para estos conceptos pueden ser intervalos cerrados reales. Pero esta representación tiene dificultades tales como no poder expresar los cambios graduales de un valor hacia otro y obtener resultados no significativos para problemas reales. No obstante dicha aproximación, de interpretar los predicados cualitativos como un intervalo, en general, puede resultar práctica y útil con un procesado adecuado. En la bibliografía se han detallado extensamente los problemas para razonar mediante dicho tipo de representación [Struss90].

También, es importante establecer la manera de determinar como se corresponden las etiquetas cualitativas a los intervalos numéricos. Generalmente este tema se ha tratado poco en la bibliografía, en este trabajo se supone que la asignación de intervalos se hace teniendo en cuenta la experiencia de los expertos. Si los sistemas son complejos estos intervalos deben ser compatible con otros y con el resto del sistema que se esta modelando. Muchas veces este proceso es difícil, puesto que participan diferentes expertos en el modelado, esto causa que se requiera un proceso iterativo hasta que los intervalos se asignan satisfactoriamente para todas las etiquetas y relaciones cualitativas del modelo. Una vez escogidas éstas, las ecuaciones del modelo se pueden reducir a un conjunto de

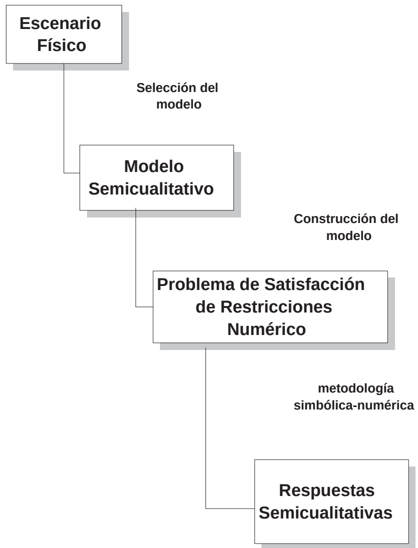

Figura 1: Esquema del modelado y razonamiento semicualitativo

restricciones entre las variables y parámetros cualitativos y cuantitativos. Mediante una interfaz adecuada se permite a los usuarios introducir toda esta información y las diferentes heurísticas en los algoritmos correspondientes para su tratamiento. Esto permitirá obtener las soluciones a las preguntas que se propongan y con ello inferir nuevo conocimiento a partir de lo previamente expresado.

El esquema de modelado y razonamiento, que se sigue para obtener las respuestas semicualitativas, se presenta en la figura 1. A partir de un escenario físico, en nuestro caso un escenario ecónomico se escoge la representación del modelo, que en este trabajo se realiza mediante un lenguaje de modelado. Las reglas de transformación de la semántica de dicho lenguaje convierten el modelo en un $CSPN$. Mediante un tratamiento computacional de dicho $CSPN$ por medio de métodos algebraicos y numéricos desarrollados *ad hoc*, se obtienen las respuestas semicualitativas.

Para fijar ideas, se puede considerar como ejemplo a tratar el modelo input-output desarrollado por Leontief, que se estudia en diferentes disciplinas. Este modelo usa una tabla de doble entrada input-output que representa a n sectores productivos en el que se divide el sistema económico de un determinado territorio. El problema de mayor aplicabilidad en economía es el modelo abierto de Leontief, que se puede expresar teniendo en cuenta las siguiente matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ X_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ . \\ D_n \end{pmatrix}$$

Cada a_{ij} representa los coeficientes técnicos que es el cociente entre la cantidad de producto que el sector i emplea en el sector j dividido por el output total del sector j. Se debe satisfacer en $\mathbf{A}$ que los coeficientes técnicos $a_{ij} \geq 0$ y que la suma $\sum_i a_{ij} \leq 1$. Además resulta que

$$\mathbf{A} * \mathbf{X} - \mathbf{D} = \mathbf{X} \qquad \text{o} \qquad (\mathbf{I} - \mathbf{A}) * \mathbf{X} = \mathbf{D}$$

donde $\mathbf{X}$ es el vector producción total y $\mathbf{D}$ es el vector demanda final, la ecuación anterior expresa que la producción total $\mathbf{X}$ se transforma, mediante la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ en $\mathbf{D}$. Entonces dicha matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ representa las condiciones técnicas de producción.

En ciertos sistemas pueden existir determinados elementos de sus modelos en los se dispone de conocimiento solamente cualitativo de ellos, entonces el razonamiento semicualitativo de este modelo se considera como la aplicación de un conjunto de técnicas para resolver las preguntas que se propongan, estudiando los valores cualitativo y/o cuantitativo que satisfacen todas las restricciones especificadas. Las preguntas que se pueden proponer son:

- Preguntas Lógicas: La respuesta es VERDADERO/FALSO. El resultado es verdadero si para ciertos dominios de las variables se satisface la red de restricciones. Para el ejemplo anterior la pregunta podría ser si la cantidad producida por el sector 1 es similar a la producida por el sector 3. En dichas preguntas pueden usarse los operadores lógicos *and* y *or*.
- Preguntas Globales: El sistema debe obtener los rangos de valores de todos el variables del modelo.
- Pregunta Parciales: El sistema obtiene valores cualitativos o cuantitativos en un subconjunto de variables pertenecientes al conjunto de variables del modelo.

x	variables	e	expresiones
v	valores reales	f	funciones
I	valores de intervalos	g	funciones de bandas
		p	predicados
ba	operadores aritméticos	c	restricciones
		q	preguntas
u, b	operadores cualitativos	cq	preguntas compuestas

Tabla 1: Tabla de la notación usada en el lenguaje

e	:	v	le	:	e	q	:	$e?$
	$\vert$	I		$\vert$	le, e		$\vert$	$e_1?e_2$
	$\vert$	x		;			$\vert$	?
	$\vert$	ua(e)	p	:	$u(e)$		;	
	$\vert$	ba(e,e)		$\vert$	$b(e, e)$	cq	:	q
	$\vert$	$f(le)$		;			$\vert$	q, q
	$\vert$	$g(e)$	c	:	p		$\vert$	q ; q
	;			$\vert$	c , c		;	
				$\vert$	c ; c			
				;				

Tabla 2: Gramática del lenguaje de modelado

La metodología desarrollada permite obtener respuestas en forma de intervalos reales precisos. Una interpretación lingüística de dichos intervalos permite la obtención de las respuestas semicualitativas.

3 El Lenguaje de Modelado

El lenguaje de modelado debe describir en forma declarativa el conocimiento cualitativo y cuantitativo en los modelos semicualitativos y expresar las cuestiones a resolver en el modelo.

3.1 Sintaxis

La notación usada en este lenguaje de modelado es la presentada en la tabla 1. Los elementos que la forman, representados con subíndices o superíndices simbolizan instancias o componentes de ellos. La sintaxis del lenguaje se define por medio de la gramática representada en la tabla 2.

En esta gramática el operador *and* se representa como "," y el operador *or* como ";", en lo que sigue se representa indistintamente en ambas maneras.

Definiciones

- Operadores Básicos, representa el conjunto de operadores aritméticos y funcionales básicos, ejemplo de estos operadores puede ser: $Ba = \{+, -, *, /, ln, ...\}$
- Operadores Cualitativos, U y B, representa el conjunto de operadores unarios y binarios para cada magnitud cualitativa del problema, respectivamente. Por ejemplo $U = \{$*grande, pequeño, medio, caro, corto, bajo, alto,...*$\}$ y $B = \{$*mucho más pequeño que, ligeramente más pequeño que, ligeramente más pequeño que, exactamente igual a, mucho más grande que, despreciable, distante de...*$\}$.
- Funciones y funciones de bandas, F representa un conjunto de funciones $f : I\!R \rightarrow I\!R$, que se definen por $f(x) \equiv < e(x), I_1, I_2 >$, donde I_1 e I_2 son el dominio y rango de f respectivamente. Las funciones de bandas g representan a una familia de funciones entre dos funciones f_1 y f_2,
$$g(x) \equiv < f_1(x), f_2(x), I_1, I_2 >$$
$$\text{tal que} \quad \forall x \in I_1 : f_1(x) < f_2(x)$$
donde I_1 y I_2 representan el dominio y rango de g respectivamente. También el lenguaje permite las *funciones a trozos* y aquellas que no son continuas en ciertos puntos. Éstas son definidas mediante
$$f(x) \equiv < e^1(x), I_1^1, I_2^1 >, ..., < e^n, I_1^n, I_2^n >$$
$$\text{tal que} \quad \bigcap_i I_1^i = \emptyset$$
De la misma forma puede usarse esta definición para *funciones de bandas.*
- Predicados, P donde cada p_i es un predicado unario $u_i(e)$ del conjunto de operadores U que se usa para simbolizar el conocimiento cualitativo de la expresión e, o un predicado binario $b_i(e_1, e_2)$, donde $b_i \in B$. Esto representa una relación cualitativa en orden de magnitud entre los valores de e_1 y e_2.
- Restricciones, C donde cada c_i es un predicado sobre las variables del modelo que

debe satisfacer para todos valores del sistema, y representa el conocimiento del sistema.

- Preguntas Simples, Q donde cada q_i es una pregunta. Puede ser una pregunta unaria, como $e?$ que pregunta sobre el valor cualitativo del expresión e. La pregunta binaria $e_1?e_2$ pregunta cual es el orden relativo de magnitud entre e_1y e_2.
- Preguntas Compuestas, son expresiones lógicas de preguntas simples.

3.2 Semántica

La semántica del lenguaje se define por medio de un conjunto de reglas de transformación que convierte el modelo inicial en uno nuevo normalizado. Si r siempre denota una nueva variable, las transformaciones que se aplican al modelo inicial son las siguientes:

- Renombrado de constantes que son intervalos: Cada intervalo constante del modelo se sustituye por una variable y una restricción $C(..., I, ..) \equiv C(..., r, ...),\ r \in I$
- Semántica de predicados unarios: Se lleva a cabo la transformación siguiente

  $$u(e) \equiv e - r = 0 \quad , \quad r \in I_u$$

  donde I_u es el intervalo asociado al operador unario u. En la bibliografía se han definido diferentes espacios de descripción cualitativo absoluto, unos basados en dos parámetros α y β[Trave89] y otros en más parámetros [Agell98]. La elección de dichos espacios de descripción depende de cada una de las magnitudes del modelo y el nivel de precisión deseado para denotar los valores cualitativos de las magnitudes. Esta asociación entre operadores y los intervalos se lleva a cabo de acuerdo con el conocimiento del experto. La elección de este orden de magnitud absoluto de una variable debe ser coherente con orden de magnitud relativo para dicha variable.
- Semántica de predicados binarios: Los predicados binarios se relacionan con el cociente y tienen la semántica siguiente

  $$b(e_1, e_2) \equiv e_1 - e_2 * r = 0 \quad , \quad r \in I_b$$

  donde I_b es el intervalo que corresponde al símbolo b. Diferentes semánticas se han considerado en la bibliografía para estos predicados, unas basados en un parámetro [Mavrovo90] y otras en dos parámetros [Dague93a].
- Semántica de funciones y funciones de bandas: De acuerdo con la definición de las funciones, la transformación que se aplica es la siguiente:

  $$r = f(x) \quad \equiv \quad \begin{cases} f(x) - r = 0 \\ x \in I_1,\ r \in I_2 \end{cases}$$

  y para las funciones de bandas, las transformaciones son las siguientes:

  $$r = g(x) \equiv \begin{cases} g(x) - r = 0 \\ g(x) = \underline{g}(x) + (1 - r_1) * \overline{g}(x) \\ r_1 \in [0, 1],\ x \in I_1,\ r \in I_2 \end{cases}$$

  Las funciones de banda se expresan por una función superior $\overline{g} : I\!R \to I\!R$ y otra inferior $\underline{g} : I\!R \to I\!R$. La familia de funciones es definida por la expresión:

  $$\begin{array}{l} g(x) = \alpha \underline{g}(x) + (1 - \alpha)\overline{g}(x), \\ \alpha \in [0, 1], \qquad x \in I_1 \end{array}$$

  tal que si $\alpha = 0 \Rightarrow g(x) = \overline{g}(x)$, y si $\alpha = 1 \Rightarrow g(x) = \underline{g}(x)$, y para cualquier otro valor de α perteneciente al intervalo [0,1] representa algún valor entre $\underline{g}(x)$ and $\overline{g}(x)$.
  Para las *funciones a trozos* las transformaciones que se llevan a cabo son:

  $$r = f(x) \quad \equiv \quad \begin{cases} e^1(x) - r_1 = 0 \\ x \in I_1^1,\ r_1 \in I_2^1; \\ \\ ...; \\ \\ e^n(x) - r_n = 0 \\ x \in I_1^n,\ r_n \in I_2^n \end{cases}$$

- Semántica de preguntas simples: Según el tipo de pregunta, se llevan a cabo las siguientes transformaciones:

  $$e_1? \quad \equiv \quad \begin{cases} e_1 - r = 0 \\ r? \end{cases}$$

  $$e_1?e_2 \quad \equiv \quad \begin{cases} e_1 - e_2 * r = 0 \\ r? \end{cases}$$

- Semántica de cuestiones compuestas: Para cada cuestión simple se lleva a cabo las transformaciones anteriores y los operadores lógicos que las ligan se conservan.

3.3 Especificación de un modelo semicualitativo

El lenguaje definido permite la especificación del conocimiento cualitativo y cuantitativo de un modelo semicualitativo por medio del diagrama siguiente:

$$M_0 \equiv \begin{cases} C & = & \{c_1, ..., c_t\} \\ V & = & \{x_1, ..., x_n\} \\ Q & = & \{q_1, ..., q_m, cq_1, ..., cq_p\} \end{cases}$$

donde C es el conjunto de restricciones del modelo, V es el conjunto de variables del modelo, y Q es el conjunto de preguntas, representado según la sintaxis del lenguaje. Entonces el razonamiento semicualitativo consiste en el método para obtener los valores de Q tal que todas las restricciones C se satisfacen.

En nuestra metodología, el modelo inicial semicualitativo se transforma en un nuevo modelo M_1, en donde se ha dividido el conjunto de variables del problema V en tres conjuntos:

- Y formado por las variables de dominio conocido, donde cada $y_i \in I_i$.
- Z formado por las variables que deseamos saber su valor cualitativo o cuantitativo.
- W formado por el resto de las variables del modelo tal que no se saben sus valores, ni estamos interesado en conocerlos.

De acuerdo con ello, veamos como se representaría un modelo input-output para tres sectores productivos, donde suponemos que se tiene conocimiento cuantitativo y cualitativo y se desea realizar varias preguntas.

Si denotamos mediante $Var(M)$ las variables de una determinada matriz de variables M entonces un modelo M_0 que representa dicho modelo input-output puede ser descrito por el diagrama siguiente:

$$M_0 \equiv \begin{cases} C \equiv & \begin{cases} \mathbf{A}\,\mathbf{X} \;+\; \mathbf{D} \;=\; \mathbf{X}, \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} \leq 1.0, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \leq 1.0, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \leq 1.0, \\ \forall\ a_{ij} \geq 0,\ a_{13} >\sim a_{11} \\ a_{12} = 0.4,\ PM(a_{21}), \\ a_{31} \ll a_{32},\ d_2 >\sim d_3, \\ a_{33} \geq 0.4,\ d_1 = 35, \\ PG_2(d_3) \end{cases} \\ V \equiv & \{Var(\mathbf{X}), Var(\mathbf{D}), Var(\mathbf{A})\} \\ Q \equiv & \{x_1 ? x_2\ ,\ a_{32}\} \end{cases}$$

En este modelo se ha expresado mediante el lenguaje de modelado que los coeficientes técnicos son todos mayores o iguales a cero, el coeficiente técnico a_{13} es *ligeramente mayor que* el coeficiente técnico a_{11}, el coeficiente técnico a_{21} es *Positivo Mediano*, la demanda d_2 *es ligeramente mayor que* la demanda d_3, el coeficiente técnico a_{31} es *mucho menor que* el coeficiente técnico a_{32} y la demanda d_3 es *Positiva Grande de subíndice 2* que de acuerdo con los expertos es un rango de valores comprendidos entre 34 y 40. Según las reglas de transformación de la semántica del lenguaje, el modelo M_0 se convierte en un nuevo modelo:

$$M_1 \equiv \begin{cases} C \equiv \begin{cases} \mathbf{A}'\,\mathbf{X} \;+\; \mathbf{D}' \;=\; \mathbf{X}, \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} \leq 1.0, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \leq 1.0, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \leq 1.0, \\ \forall\ a_{ij} \geq 0,\ a_{13} - r_1\, a_{11} = 0, \\ d_2 - r_1 d_3 = 0,\ x_1 - r x_2 = 0, \\ a_{33} \in [0.4, 1], a_{31} - a_{32} r_2 = 0, \\ a_{21} \in I_{PM},\ d_3 \in I_{PG_2}, \\ r_2 \in I_{\ll} \end{cases} \\ V \equiv \begin{cases} W = \{x_1, x_2, x_3, d_2, a_{11}, \\ \qquad a_{12}, a_{13}, a_{31}, a_{23}, a_{32}\} \\ Y = \{a_{33}, a_{22}, a_{21}, r_1, r_2, d_3\} \\ Z = \{r, a_{32}\} \end{cases} \\ Q \equiv \{r, a_{32}\} \end{cases}$$

donde $\mathbf{A}'$ y $\mathbf{D}'$ son los resultados de haber sustituido respectivamente en $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ los datos cuantitativos conocidos en este modelo particular. Este modelo puede considerarse como un problema de satisfacción de restricciones que integra conocimiento cualitativo y cuantitativo y que debe resolverse mediante alguna metodología. Pero en general en estos problemas los resultados no son óptimos si se aplica inmediatamente las técnicas de satisfacción de restricciones. Por ello se aplican en este trabajo técnicas simbólicas que mejoren dichos resultados.

4 Metodología del Razonamiento Semicualitativo

En este trabajo usaremos para razonar una red de restricciones, este tipo de razonamiento puede enmarcarse dentro de lo que se ha denominado en la bibliografía como razonamiento basado en restricciones[Freuder94]. El lenguaje de especificación que hemos definido

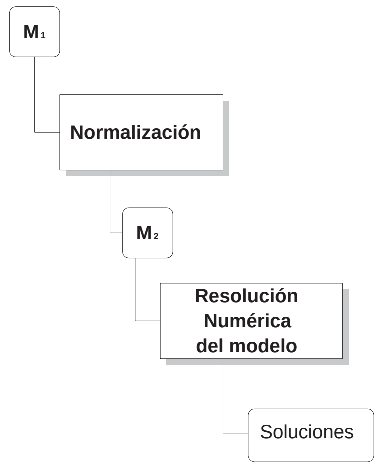

Figura 2: Esquema de las fases del razonamiento semicualitativo

permite, por medio de las correspondientes reglas de transformación, la formación de la red de restricciones, y el resultado es un problema de satisfacción de restricciones con variables cuyos dominios son intervalos. Las respuestas que queremos obtener al resolver dichos problemas serán cualitativas o cuantitativas, dependiendo del interés del usuario. La metodología desarrollada, nos proporciona el valor del intervalo o conjunto de valores que corresponden a las preguntas propuestas. Esta metodología se divide en dos fases bien diferenciadas que se representan en el figura 2.

En la primera fase de **Normalización** se usan técnicas simbólicas para transformar la red de restricciones, denotada como M_1, en una nueva red de restricciones, denotada como M_2. Esta nueva red es sometida a un tratamiento numérico que usa técnicas de razonamiento con variables cuyos dominios son intervalos y que obtiene las posibles respuestas a las preguntas planteadas, que se ha denotado por $Soluciones$. En la fase de normalización se usan algoritmos de reducción simbólica. En la resolución numérica se usan algoritmos del tipo *branch and prune*, donde debe tenerse presente que la velocidad de la convergencia depende de forma importante de las expresiones algebraicas de las restricciones [Ratschek84]. El interés principal de este tratamiento consiste en aplicar los algoritmos apropiados para aumentar el eficacia del mismo dado que estos problemas tienen complejidad exponencial. Al final se obtiene el rango de valores de las preguntas y dependiendo si la pregunta es cuantitativa o cualitativa, el resultado será respectivamente un intervalo real cerrado o una etiqueta cualitativa.

4.1 Normalización

El modelo M_1 anterior podría tratarse numéricamente como un problema de satisfacción de restricciones con variables cuyos dominios son intervalos, pero en muchos modelos los resultados obtenidos no son óptimos [Dague93b]. En este trabajo, por ello se ha propuesto un tratamiento simbólico previo con la idea de transformar la red de restricciones en una nueva red. Ésta tendrá las mismas soluciones que la anterior, pero permite mejorar los resultados que se obtengan en los algoritmos numéricos.

En esta fase se lleva a cabo la eliminación de determinadas restricciones donde existen variables no significativas. Las variables no significativas son aquéllas que no sabemos sus valores, ni estamos interesados en conocerlos. Este procedimiento por consiguiente puede reducir las variables que se tienen en el modelo. Dado el conjunto de restricciones de igualdad del modelo, el proceso de eliminación de las variables no significativas requiere la definición de los siguientes conceptos:

- Variables Sustituibles: Son aquellas variables $w \in W$ que aparecen en una restricción de la manera siguiente $kw + e(x) = 0$ donde k es una constante real. En tal caso la sustitución simbólica s es $s \equiv w = -e(x)/k$
- Restricciones candidatas a eliminar: Son restricciones con variables sustituibles.
- Interferencia de una restricción respecto a una variable sustituible: Es el número de restricciones donde dicha variable está presente, excepto la restricción considerada.

$$Interferencia(c_i, v_i) =$$

$$\mathcal{N} j : j \in \{1, ..., n\} \bullet (v_i \in Var(c_j) \wedge j \neq i)$$

donde $\mathcal{N}$ representa el operador de conteo y Var representa el conjunto de variables de la restricción .

- Interferencia de una restricción es la suma de las interferencias de todas las interferencias de la restricción respecto a las variables sustituibles.

$$\textbf{Interferencia}(c_i) = \sum \textbf{Interferencia}(c_i, v_j)$$

tal que $v_j \in Var(c_i) \wedge sustituible(v_j)$.

El algoritmo para eliminar las restricciones y variables es el siguiente:

alg
 mientras haya restricciones a eliminar
  Escoger una restricción a eliminar c
   según algún criterio
  Escoger en c una variable v
   sustituible según algún criterio
  Eliminar la restricción c
  Sustituir v por la sustitución s
   en la red de restricciones
 fmientras
fin

En este trabajo se ha seguido el siguiente criterio de selección de restricciones a eliminar

- Que la restricción sea candidata a eliminar.
- Que la restricción tenga interferencia mínima.
- Cuando la interferencia es la misma para dos o más restricciones que se pueden eliminar se escoge la escrita primeramente.

El criterio de selección de la variable a sustituir

- Primero se escoge la variable con menor interferencia y diferente de cero.
- Cuando la interferencia es la misma para dos o más variables se escoge la ordenación lexicográfica para la sustitución.

Aplicación al modelo de input-output de tres sectores productivos. Para la aplicación del anterior algoritmo es necesario determinar en cada iteración las restricciones candidatas y las variables sustituibles y las correspondientes interferencias. Así para el modelo M_1 del ejemplo, se obtiene un nuevo modelo M_2, tal que se han eliminado un conjunto de variables que no tenemos conocimiento de sus valores ni estamos interesado en ellas.

$$M_2 \equiv \begin{cases} C \equiv \{0.2 + 0.4 + 0.2r_1 \leq 1.0, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \leq 1.0, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \leq 1.0, \\ (0.4 - 0.8r)x_2 + 0.2r_1x_3 + 35.0 = 0, \\ (a_{21}r + a_{22} - 1)x_2 + a_{23} + d_3r_1 = 0, \\ (r_2a_{32}r + a_{32})x_2 + (a_{33} - 1)x_3 + d_3 = 0\} \\ V \equiv \begin{cases} a_{21}, a_{22}, a_{32}, a_{33}, \\ r, r_1, r_2, x_2, x_3, d_3 \end{cases} \\ I \equiv \begin{cases} \forall a_{ij} \geq 0, a_{33} \in [0.4, \infty], \\ a_{21} \in I_{PM}, d_3 \in I_{PG_2}, \\ r_2 \in I_{\ll}, r_1 \in I_{>\sim}, \\ a_{32} \in [0,1], r \in [-\infty, \infty] \end{cases} \end{cases}$$

4.2 Resolución numérica de la red de restricciones

En la primera sección de este trabajo ya se expusieron algunas referencias bibliográficas de diferentes alternativas desarrolladas para la resolución numérica de redes de restricciones con variables cuyos dominios son intervalos. Los últimos trabajos, en el dominio de los modelos semicualitativos, también desarrollan técnicas específicas para el razonamiento en estos modelos [Gasca98].

No obstante en este trabajo, debido a las ventajas de generalización, posibilidad de definir las restricciones cualitativas y las diferentes heurísticas de búsqueda de las soluciones de los problemas de satisfacción de restricciones se ha utilizado, para desarrollar los algoritmos de resolución, la herramienta comercial ILOG-Solver 4.4, que está constituida por un conjunto de bibliotecas para facilitar la programación con restricciones en dominios discretos y continuos. Las técnicas básicas que usa para la obtención de soluciones son las de reducción de dominios y de propagación de restricciones. La versatilidad de sus clases, en cuanto a poder establecer diferentes heurísticas en la búsqueda de soluciones, nos permite mejorar la eficiencia algorítmica y la obtención de soluciones más precisas.

4.2.1 Heurísticas de búsqueda de soluciones

La búsqueda de soluciones se basa en técnicas de *branch and prune* que exige una etapa de ramificación mediante una elección no determinista de las variables elegidas para dividir sus dominios. Con el objeto de mejorar está elección y los valores que se asignan a dichas variables, se deben escoger determinadas heurísticas de búsqueda. Las decisiones que se toman al respecto afectan de forma significativa a la eficiencia de la estrategia de búsqueda.

Existen en la bibliografía dos tipos de heurísticas, unas estáticas y otras dinámicas, dependiendo de si se establece el orden entre las variables antes de comenzar la búsqueda o durante la búsqueda. En nuestro sistema el usuario, dependiendo de la precisión exigida, puede determinar el tipo de heurística, así como establecer el orden en que las variables serán instanciadas si la heurística es éstatica. Los resultados más precisos en este tipo de resoluciones se alcanzan cuando se escogen las variables que pertenecen a un ciclo en el grafo que representa la red de restricciones y dentro de estas las variables más restringidas, o sea aquellas que participan en más restricciones.

4.2.2 Resultados experimentales

Aplicación al modelo input-output Cuando se aplican los algoritmos desarrollados con las heurísticas propuestas en este trabajo, al modelo M_2 que representa el modelo input-output de los tres sectores productivos con conocimiento cualitativo y cuantitativo, y utilizando la última heurística en el proceso de resolución, se obtienen los siguientes resultados:

$$r = [0.58, 0.91] \qquad \text{y} \qquad a_{32} = [0.59, 0.6]$$

Estos resultados, que son intervalos numéricos reales, pueden ser etiquetados de forma cualitativa mediante la interpretación lingüística correspondiente.

4.3 Representación cualitativa de los resultados

La metodología descrita ha permitido obtener un conjunto de intervalos para las preguntas propuestas. La interpretación lingüística de los resultados consiste en encontrar el operador cualitativo o el conjunto de operadores cualitativos de los previamente definidos para la magnitud en cuestión que recubre de forma mínima a cada uno de los intervalos resultante. Para hacer la asignación de estos operadores se han usado un método desarrollado previamente en la bibliografía [Riquelme96]. Los resultados que se obtuvieron para la pregunta representada por la variable r del modelo input-output es que la relación en orden de magnitud entre la producción total del sector 1, representada como X_1, puede ser *moderadamente menor o ligeramente menor* que la producción total del sector 2, representado por X_2, y que el coeficiente técnico a_{32} tiene un valor cualitativo $[PM]$, que de acuerdo con la semántica dada por los expertos, significa que debe ser *positivo mediano*.

5 Conclusiones y futuros trabajos

El nuevo sistema desarrollado resulta conveniente a la hora de capturar el conocimiento cualitativo y cuantitativo de muchos modelos en general y económicos en particular. Permite obtener nuevo conocimiento por medio de preguntas que el usuario introduce de forma interactiva. El lenguaje presentado para la especificación de modelos es muy rico a la hora de poder expresar todo el conocimiento cualitativo del sistema. Se han incluido nuevos tipos de conocimiento cualitativo como *funciones a trozos* y funciones discontinuas y disyunción de predicados cualitativos.

Los resultados en diferentes aplicaciones han mostrado que se obtienen soluciones menos ambigüas que cuando se usan otras técnicas cualitativas. Ello es debido principalmente al uso una fase simbólica y la adecuada elección de las heurísticas de búsqueda. En posteriores trabajos se pretenden mejorar estas técnicas con algoritmos de búsqueda más eficientes y que obtengan soluciones más precisas.

Como posibles campos de aplicación de estas técnicas consideramos que son interesantes su aplicación en el análisis semicualitativo de sistemas dinámicos donde es posible obtener la estabilidad y regiones de las bifurcaciones de los mismos. Otro campo de aplicaciones de nuestra metodología es el uso de estas técnicas en la simulación semicualitativa de sistemas dinámicos sujeta a un conjunto de restricciones.

Referencias

[Agell98] AGELL N. *Estrucgtures matem.tiques per al model qualitatiu d'ordres de magnitud absoluts* Ph. D. Universitat Politecnica de Catalunya(Spain) (1998).

[Aracil93] ARACIL J. AND TORO M. *Metodos cualitativos en dinamica de sistemas* en Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Sevilla,(1993).

[Benham96] BENHAMOU F. AND GRANVILLIERS L. *Combining Local Consistency, Symbolic Rewriting and Interval Methods* in Proceedings of AISMC-3 volume 1138 of LNCS, Springer-Verlag. pág 144-159 (1996).

[Bousson93] BOUSSON K. *Raisonnement causal pour la supervision de processus bas'e sur des modéles* Tesis Doctoral de INSA Toulouse, (1993).

[Dague93a] DAGUE P. *Symbolic Reasoning with relative orders of magnitude* Proceedings of the Thirteenth IJCAI, Cambery pág 1509-1514, (1993).

[Dague93b] DAGUE P. *Numeric Reasoning with relative orders of magnitude* Proceedings of the Thirteenth IJCAI, Cambery, pág 541-547, (1993).

[Dague95] DAGUE P. *Qualitative Reasoning: A Survey of Techniques and Applications* en AI Communications Vol 8 N 3/4 pág 119-192, (1995).

[Davis87] DAVIS E. *Constraint propagation with interval labels* Artificial Intelligence no. 32, pág 281-331, (1987).

[Dollinger98] DOLLINGER R. AND LETIA I.A. USING TOLERANCE CALCULUS FOR REASONING IN RELATIVE ORDER OF MAGNITUDE MODELS in Lectures Notes in Artificial Intelligence num 1415, pág 399-407, (1998)

[Dubois89] DUBOIS D. Y PRADE H., *Order-of-magnitude reasoning with fuzzy relations* Revue d'intelligence artificielle no. 3, pág 69-94 (1989)

[Faltings92] FALTINGS B. Y STRUSS P (EDS.) *Recent Advances in Qualitative Physics* Ed. Boi Faltings y Peter Struss The MIT Press (1992)

[Foulloy93] FOULLOY L. *Qualitative Control and Fuzzy Control. Towards a Writing Methodology* AICOM Vol 6 Nrs 3/4 pp 147-154 (1993)

[Freuder94] FREUDER E.C. Y MACKWORTH A. K. (EDS.) *Constraint-Based Reasoning* MIT-Elsevier (1994).

[Gasca96] GASCA R.M., TORO M., ORTEGA J.A. *"Propagación de restricciones integrando conocimiento cualitativo y cuantitativo"* Boletín de la AEPIA number 6 pág 23-30 (1996).

[Gasca98] GASCA, R. M. *Razonamiento y simulación en sistemas que integran conocimiento cualitativo y cuantitativo* Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla, (1998).

[Hong94] HONG H. Y STAHL V. *Safe Starting Regions by Fixed Points and Tightening* Computing 53, pág 323-335, (1994).

[Hyonen92] HYVONEN E., *Constraint reasoning based on interval arithmetic: the tolerance propagation* Artificial Intelligence nom. 58, 1-112 (1992).

[Kuipers86] KUIPERS, B.J. *Qualitative simulation* Artificial Inteligence 29, 289-338.

[Kuipers94] KUIPERS, B.J. *Qualitative Reasoning. Modeling and Simulation with Incomplete Knowledge* The MIT Press (1994).

[Lepetit87] LEPETIT, M. Y VERNET D. *Physique qualitative et contrôle de processus* En Proc. 7th Int. Conf. on Experts Systems and their Applications, Avignon, EC2, 229-1248, (1987).

[Lhomme93] LHOMME O. *Consistency Techniques for Numeric CSPs* Proceedings IJCAI'93, (1993) 232-238, (1993).

[Lhomme94] LHOMME O. *Contribution . la r'solution de constraintes sur les r'els par propagation d'intervalles* Ph. D. Nice-Sophia University. Antipolis (1994).

[Lhom96] LHOMME O. *Boosting the Interval Narrowing Algorithm* Proceedings JICSLP, Ed Michael Maher, MIT Press pp. 378-392 (1996)

[Moreno93] MORENO J. *T'cnicas cualitativas de supervision: aplicacion a motores marinos* Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla (1993).

[Marti97] MARTI P. Y RUEHER M. *Concurrent Cooperating Solvers over Reals.* in Reliable Computing 3 325-333 (1997).

[Mavrovo90] MAVROVOUNIOTIS M.L., STEPHANOPOULOS G., *Formal Order-of-Magnitude Reasoning* en Readings in Qualitative Reasoning about physical systems 323-336(1990).

[Missier89] MISSIER A., PIERA N. Y TRAVE L. *Order of Magnitude Algebras: a Survey* Revue d'Intelligence Artificielle n 4, Vol 3, 95-109 (1989)

[Nayak92] NAYAK, P.P. *Order of Magnitude Reasoning using logarithms* en Proc. 3rd Int. Conf. on Principles of knowledge representation and reasoning, Cambridge, M.A. p g 201-210, (1992).

[Penalva91] P'NALVA, J. M., COUDOUNEAU, L., LEYVAL L. Y MONTMAIN, J. *Diapason, un systSme d'aide . la supervision* en Proc. 11th Int. Conf. on Expert Systems and their Applications EC2, 41-52 (1991).

[Piera91] PIERA N., SÑCHEZ M. Y TRAV'-MASSUYSS, L. *Qualitative Operators for Order of Magnitude Calculers: Robustness and Precision* en Proc. 43th IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, Dublin p g 1-6, (1991).

[Piera95] PIERA N. (ED.) *Current trends in Qualitative Reasoning and Applications* Ed. Nuria Piera, (1995).

[Raiman88] RAIMAN O. *Order of magnitude reasoning* in Proceedings of AAAI, 100-104, (1988).

[Raiman91] RAIMAN O. *Order of magnitude reasoning* Artificial Intelligence 51 pág 11-38, (1991).

[Ratschek84] RATSCHEK H., ROKNE J., *Computer Methods for the Range of Functions*,
Ed. Ellis Horwood, (1984).

[Riquelme96] RIQUELME J.C. *Obtención de información Cualitativa a partir de datos cuantitativos: aplicación al análisis de sistemas complejos* Tesis Doctoral de la Universidad de Sevilla(1996).

[Ritschard83] RITSCHARD, G. *Computable qualitative comparative statics techniques* en Econometrica 51(4) pág 1145-1168 (1983).

[Sacks87] SACKS, E. *Hierarchical Reasoning about Inegualities* en Poc. 6th National Conf. on Artificial Intelligence, Seattle, WA, pág 649-654 (1987).

[SamHar95] *Sam J. Constraint Consistency techniques for continuous domains* Tesis Doctoral num 1423 de la Escuela Polit'cnica de Lausana, (1995).

[Sanchez96a] M SÁNCHEZ, F. PRATS Y N. PIERA *Mixing the Absolute and Relative Order of Magnitude Reasoning in Qualitative Models* Research Report MA2-IT-96-0005, UPC Barcelona, (1996).

[Sanchez96b] M SÁNCHEZ, F. PRATS Y N. PIERA *Una formalizacion de relaciones de comparabilidad en modelos cualitativos* Boletin AEPIA n 6, pág 15-22, (1996).

[Sanchez98] SÁNCHEZ M., PRATS F. AND PIERA N. *Negligibility relations between numbers and qualitative labels* en Lectures Notes in Artificial Intelligence num 1415, 367-376. (1998)

[Simon77] SIMON, H.A. *Causal ordering and identifiability* en Models of Discovery, Reidel, pp 1158-1163 (1977).

[Simmon86] SIMMONS, R. *Commonsense. Arithmetic Reasoning* En Proc. 5th National Conf. Artificial Intelligence. Philadelphia, PA, pág 118-124 (1986).

[Struss90] STRUSS P. *Problems of interval-based qualitative reasoning* en Qualitative Reasoning about physical systems Morgan Kaufmann, San Mateo, (1990).

[Trave89] TRAVÉ-MASSUYES L. Y PIERA N. *The orders of Magnitude Models as Qualitative Algebras* en Proc. 11th Int. Joint Conf. on Aritificial Intelligence, Detroit, MI pág 1261-1266 (1989).

[Trave97] TRAVÉ-MASSUYES L. DAGUE P. GUERRIN F. *Le raisonnement qualitatif pour les sciences de l'ing'nieur* Ed. Hermes, Paris, (1997).

[VanHent95a] VAN HENTENRYCK P. AND MICHEL L. *Newton: Constraint Programming over Nonlinear Real Constraints* Tech. Report No. CS-95-25 Brown University (1995).

[VanHent95b] VAN HENTENRYCK P., MCALLESTER D. Y KAPUR D. *Solving polynomial systems using a branch and prune approach* Tech. Report No. CS95-01 Brown University, (1995).

[VanHent97] VAN HENTENRYCK P., MICHEL L. AND DEVILLE Y. *Numerica. A modeling language for global optimization* The MIT Press (1997).

[Weld90] WELD D.S. Y DE KLEER J.(EDS.) *Qualitative Reasoning about physical systems* Morgan Kaufmann, San Mateo (1990).

[Williams91] WILLIAMS B. C. *A theory of interactions: unifying qualitative and quantitative algebraic reasoning* Artificial Intelligence 51 pág 39-94 (1991).

[Xanthak94] XANTHAKIS, S. *Une algebre du flot des donees pour l'analyse statique don programme* Journal TSI, 13,3 pág 421-461 (1994).

[Yip93] YIP K. M. *Model Simplification by Asymptotic Order of Magnitude Reasoning* en Proc. 11th National Conf. on Artificial Intelligence Washington D.C., pág 634-640, (1993)