

Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Predicción de distancia mínima entre aeronaves a
partir de datos ADS-B

Autor: Antonio Rivas Rincón

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020



Trabajo Fin de Máster
Máster Universitario en Ingeniería Aeronáutica

Predicción de distancia mínima entre aeronaves a partir de datos ADS-B

Autor:

Antonio Rivas Rincón

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero

Profesor Contratado Doctor

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2020

Trabajo Fin de Máster: Predicción de distancia mínima entre aeronaves a partir de datos ADS-B

Autor: Antonio Rivas Rincón

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2020

El Secretario del Tribunal

*A mi eterna amiga María.
Por todos estos momentos que
nos arrebataron.*

Agradecimientos

Una vez llegado a este punto en la vida es inevitable echar la vista atrás y recordar, con cierta nostalgia, el camino seguido y todas las personas y vivencias que han formado parte de él y que, por tanto, forman parte de mí. De todos ellos he aprendido algo, de todos ellos me llevo algo y, sin duda, sin todos ellos hoy no sería la persona que soy ni estaría afrontando este reto al que hoy me enfrento. Es entonces, durante este recuerdo, cuando soy consciente de la cantidad de amigos, compañeros y profesores que deberían tener su reconocimiento en este humilde y tímido agradecimiento.

Volviendo de nuevo al pasado, allá por febrero de 2018 comienza mi último período como estudiante universitario y salen a relucir las ganas por acabar junto con el nerviosismo por hacer frente al trabajo de fin de máster. Y, en este revuelo compuesto también por las horas en el trabajo y la falta de tiempo, recuerdo lo oscuro y confuso que se me hacía este proyecto. No sabía por donde empezar ni mucho menos cómo acabar. Sin embargo, a medida que avanzaba en este proceso y me adentraba en el túnel la luz cada vez se hacía más clara debido, principalmente, a la ayuda, guía y colaboración que en todo momento me ha prestado Alfonso Valenzuela Romero. Ha sido enorme la paciencia y desenfado con la que siempre recibía cualquiera de mis dudas o dificultades, a pesar de haber sido un proceso muy largo en los que hemos tenido momentos en los que el avance era muy lento. Sin embargo, y a pesar de estos momentos de agobio, siempre me hacía ver una idea tan clara como necesaria en la vida: “si vas a hacer algo, hazlo bien”, idea que transmite a todos sus alumnos.

Gracias a mis padres por la educación que me han dado desde que nací, por enseñarme a mirar el mundo con una sonrisa, sea cual sea la situación, y por el permanente apoyo que me han mostrado desde que tengo uso de razón. Fueron ellos los que me abrieron las puertas del mundo de la ingeniería aeroespacial, un mundo en el que una vez que entras, te atrapa y te cambia la vida.

Es imposible no acordarme de mis compañeros durante estos cuatro años, mis fieles compañeros de batalla sin los cuales estos años hubieran sido traumáticos. Son ellos las personas capaces de transformar el día anterior a un examen en bromas y risas, esas personas en las que, aunque el agobio esté presente, siempre van a hacerte más leve cualquier trabajo interminable o cualquier práctica ininteligible, y quienes nunca dudan en ayudarte. Sin duda, su amistad es uno de los mayores regalos que me llevo.

Y por último, pero no por ello menos importante, agradecer a todas esas personas que durante el desarrollo de este trabajo han tenido que soportar, involuntariamente, la descripción cada paso que daba, transformando cada uno de nuestros encuentros en una pequeña sesión de desahogo de mi agobio.

Antonio Rivas Rincón

Sevilla, 2020

Actualmente, a cada segundo estamos siendo bombardeados por mensajes aeronáuticos transmitidos por las aeronaves. Para acceder a la información que contienen es necesario algún receptor que permita decodificar estos mensajes. Este es el caso del receptor SBS-3, usado en este proyecto para acceder a los mensajes transmitidos por las aeronaves mediante ADS-B.

Estos mensajes constituyen la base para alcanzar el objetivo de este trabajo, es decir, predecir la distancia mínima entre aquellas aeronaves que se aproximen, así como el instante en el que se producirá.

Para ello, se tiene que cada uno de los mensajes recibidos contiene numerosa información sobre el estado de la aeronave. De todos los datos que contienen cada uno de estos mensajes interesan, principalmente, la posición de la aeronave y el instante en el que se transmite. A partir de esta información se aplica el proceso descrito a continuación, el cual se divide en 2 etapas claramente diferenciadas:

1. En primer lugar, se aplica un Filtro de Kalman extendido para mejorar la precisión de la posición de la aeronave. La posición así obtenida se denomina como “posición mejorada”.
2. En segundo lugar, partiendo de la posición mejorada y considerando que las aeronaves siguen un movimiento rectilíneo y uniforme se estima la separación futura entre aquellas aeronaves que se estén aproximando entre sí. De esta forma, es posible predecir la separación mínima entre las aeronaves y el instante en el que se alcanzará.

Finalmente, una vez se ha aplicado este proceso a todos los mensajes recibidos, como análisis *a posteriori* es posible conocer la separación mínima real entre las aeronaves evaluadas.

A partir de la separación mínima real es posible conocer la diferencia entre la separación mínima predicha y la real. Representando esta diferencia respecto a la antelación de la predicción es posible analizar cómo disminuye la precisión de la predicción cuanto mayor es la antelación con la que se realiza.

Además, se analizan aquellos casos en los que el modelo de predicción desarrollado produce resultados anómalos.

Currently, we are constantly receiving a lot of aeronautic messages transmitted by aircraft. To know the information included in these messages is necessary some receiver that could decode them. An example of a receiver is SBS-3, which has been used during this project in order to receive aircraft messages transmitted by ADS-B.

ADS-B messages is the basis to achieve the main aim of this work: prediction of both minimum distance between those aircraft which are approaching and moment in which it will take place.

Each of the ADS-B messages contains important information about the aircraft state when the message is sent. This information includes the aircraft identification, speed, altitude, rhumb, ... However, the two more important features are the aircraft position and the time instant when the message is transmitted. These two factors are the base of the process developed in this project, which is clearly divided in two steps:

1. Firstly, an extended Kalman Filter is applied in order to improve precision of the aircraft position. The resulting position is called as "improved position".
2. Secondly, on the basis of this improved position it is supposed that aircraft follow a rectilinear uniform movement for the purpose of estimating the future distance between the aircraft which are approaching. In this way, it is possible to predict the minimum distance between aircraft and the time instant when this distance is achieved.

Finally, once this process has been applied to all received messages, as *a posteriori* analysis, it is possible to know the true minimum distance between the aircraft.

The true minimum distance allows one to know the difference between the predicted and true distances. Representing this difference depending on the prediction anticipation it is possible to analyse the decrease of prediction precision when the prediction anticipation increases.

Moreover, it is described those situations in which the prediction model produces abnormal results.

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Abstract	xi
Índice	xiii
Índice de Tablas	xv
Índice de Figuras	xvii
Glosario/Terminología	xix
1 Introducción	1
1.1 <i>Motivación y Objetivo</i>	1
1.2 <i>Metodología</i>	2
1.3 <i>Estructura del documento</i>	2
2 Datos de Vigilancia	3
2.1 <i>Datos de vuelo</i>	3
3 Filtro de Kalman	7
3.1 <i>Filtro de Kalman discreto</i>	7
3.2 <i>Filtro de Kalman extendido</i>	10
4 Aplicación del Filtro de Kalman a Trayectorias de Aeronaves	13
4.1 <i>Definiciones</i>	13
4.1.1 Variables de estado	13
4.1.2 Variables de control	14
4.1.3 Predicción del estado y su covarianza	14
4.1.4 Medidas y su covarianza	15
4.1.5 Resumen del Filtro de Kalman extendido aplicado al cálculo de trayectorias	17
4.2 <i>Cálculo del curso y de la velocidad respecto a tierra</i>	18
4.2.1 Curso	18
4.2.2 Velocidad respecto a tierra	20
4.3 <i>Casos ilustrativos</i>	21
4.3.1 Trayectoria con curso constante	21
4.3.2 Trayectoria con viraje	26
5 Distancia Mínima Predicha y Real	33
5.1 <i>Predicción de la distancia mínima</i>	33
5.1.1 Actualización de la posición de la aeronave cuya posición se haya recibido antes	33
5.1.2 Aproximación entre la pareja	33
5.1.3 Propagación de la posición	35
5.1.4 Distancia mínima predicha	38
5.2 <i>Distancia mínima real</i>	38
5.3 <i>Comparación entre distancia mínima predicha y real</i>	39
6 Resultados	43
7 Conclusiones y Líneas Futuras	51

8 Bibliografía	53
Apéndice A - Derivadas Parciales	55
<i>A.1. Matriz A_{k-1} del Filtro de Kalman extendido</i>	<i>55</i>
<i>A.2. Matriz W_{k-1} del Filtro de Kalman extendido</i>	<i>55</i>
<i>A.3. Gradiente del curso</i>	<i>56</i>
<i>A.4. Gradiente de la velocidad respecto a tierra</i>	<i>57</i>
<i>A.5. Gradiente de la separación entre dos aeronaves</i>	<i>57</i>

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Descripción de la estructura seguida en el archivo “.bst” para almacenar la información recibida	5
Tabla 4.1. Categoría para la precisión de la posición horizontal	16

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Receptor SBS-3	4
Figura 2.2. Ejemplo para ilustrar la estructura de la información almacenada en el archivo “.bst”	4
Figura 3.1. Resumen de las etapas del Filtro de Kalman discreto	10
Figura 3.2. Resumen de las etapas del Filtro de Kalman extendido	12
Figura 4.1. Resumen del Filtro de Kalman aplicado	17
Figura 4.2. Trayectoria rectilínea completa y vista en detalle.	22
Figura 4.3. Evolución de la desviación típica de la posición para una trayectoria rectilínea	23
Figura 4.4. Comparación entre el curso y rumbo geográfico para una trayectoria rectilínea	24
Figura 4.5. Desviación típica del curso geográfico para una trayectoria rectilínea	25
Figura 4.6. Comparación entre la velocidad respecto a tierra dada por ADS-B y la calculada a partir de la posición para una trayectoria rectilínea	25
Figura 4.7. Desviación típica de la velocidad respecto a tierra para una trayectoria rectilínea	26
Figura 4.8. Ejemplo de trayectoria con viraje	27
Figura 4.9. Ejemplo de trayectoria con viraje sin aplicar la corrección del intervalo temporal de evaluación	27
Figura 4.10. Evolución de la desviación típica de la posición para una trayectoria con viraje	28
Figura 4.11. Representación ampliada del efecto del viraje sobre la desviación típica de la posición	29
Figura 4.12. Comparación entre el curso y rumbo geográfico para una trayectoria con viraje	29
Figura 4.13. Desviación típica del curso geográfico para una trayectoria con viraje	30
Figura 4.14. Comparación entre la velocidad respecto a tierra dada por ADS-B y la calculada a partir de la posición para una trayectoria con viraje	31
Figura 4.15. Desviación típica de la velocidad respecto a tierra para una trayectoria con viraje	31
Figura 5.1. Ejemplo de trayectoria predicha	36
Figura 5.2. Evolución de la desviación típica de la posición predicha	37
Figura 5.3. Evolución de la desviación típica para una predicción de 20 minutos	38
Figura 5.4. Figura ilustrativa de cómo se obtiene la distancia mínima predicha	38
Figura 5.5. Ejemplo representativo de la evolución de la separación entre aeronaves con el tiempo	39
Figura 5.6. Ejemplo en el que una pareja de aeronave presenta dos distancias mínimas relativas	39
Figura 5.7. Ejemplo representativo de la predicción de la distancia mínima	40
Figura 5.8. Ejemplo representativo de la predicción de la distancia mínima cuando se tienen diferentes tramos de aproximación	40
Figura 5.9. Representación de la trayectoria para una pareja de aeronaves con diferentes tramos de aproximación	41
Figura 6.1. Error de predicción según la antelación	44
Figura 6.2. Desviación estándar del error de predicción según la antelación	44
Figura 6.3. Representación de las trayectorias para la pareja 4CA7B4 – 4CA8EA	45

Figura 6.4. Representación de los puntos de mínima separación con error normalizado alto	46
Figura 6.5. Evolución de la separación para la pareja 4CA7B4 – 4CA8EA	46
Figura 6.6. Error de predicción para antelación menor a 600 segundos	47
Figura 6.7. Desviación estándar del error de predicción para antelación menor a 600 segundos	47
Figura 6.8. Trayectorias de la pareja de aeronaves 020098 - 020073	48
Figura 6.9. Evolución de la separación para la pareja 020098 – 020073	48
Figura 6.10. Error de predicción para antelación menor a 600 segundos tras corrección	49
Figura 6.11. Región de confianza del 95% para el error de predicción normalizado	50

Glosario/Terminología

Aeronave rastreada	Aeronave cuyos mensajes ADS-B son recibidos por la estación receptora en tierra. El tiempo transcurrido desde la recepción del último mensaje debe ser inferior al tiempo límite de rastreo.
Tiempo límite de rastreo	Tiempo transcurrido desde el instante en el que se recibe el último mensaje de una aeronave rastreada a partir del cual, si no se recibe ningún mensaje nuevo, la aeronave pasa de “rastreada” a “perdida”.
Aeronave perdida	Aeronave para la cual el tiempo transcurrido desde la recepción de su último mensaje ADS-B es superior al tiempo límite de rastreo.
Posición mejorada	Posición geográfica obtenida como resultado de la aplicación del Filtro de Kalman.
Intervalo temporal de evaluación	Diferencia de tiempo entre dos posiciones de una aeronave a partir de las cuales se estima su curso geográfico y velocidad respecto a tierra.
Instante de predicción	Instante de tiempo en el que se realiza la predicción de la distancia mínima para una pareja de aeronaves.
Instante de distancia mínima	Instante de tiempo en el que se alcanza la separación mínima entre una pareja de aeronaves. Esta separación entre dos aeronaves puede ser de dos tipos: <ul style="list-style-type: none">- Predicha: pronosticada por el modelo de predicción.- Real: obtenida como resultado del análisis <i>a posteriori</i> de la separación entre la pareja de aeronaves a lo largo del tiempo.
Error de predicción	Diferencia entre la distancia mínima predicha y la distancia mínima real.
Error de predicción normalizado	Error de predicción normalizado respecto a la distancia mínima real. Se da en porcentaje.

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación y Objetivo

Aunque antiguamente la información relacionada con la navegación aérea y las aerolíneas se consideraba de uso privado y era sólo accesible para aquellos implicados, con el paso del tiempo se ha experimentado una cierta liberalización de dicha información. Además, como consecuencia del desarrollo de la navegación aérea, la información disponible en abierto es cada vez es más extensa. De hecho, hoy en día es posible obtener una gran cantidad de información relacionada con el estado de una aeronave en vuelo, así como con el tráfico aéreo, ya sean trayectorias realizadas por aeronaves en el pasado, planes de vuelo planificados o, incluso, información del estado de la aeronave en tiempo real.

Por otra parte, es un hecho contrastado el aumento de la demanda del espacio aéreo por parte de aerolíneas, por lo que los proveedores de servicios se esfuerzan en mejorar la oferta y, así, intentar satisfacer estas necesidades. Algunas de las medidas que los proveedores de servicios de navegación aérea (ANSPs, “Air Navigation Service Providers”) están desarrollando se centran en el concepto de “*Free Route*”. Al aumentar la complejidad de la red aérea se hace más complejo adelantarse a una posible violación de las distancias mínimas de separación. En este sentido, una mejora sería tener en cuenta el efecto del viento a la hora de predecir las trayectorias de las aeronaves.

Recientemente se ha desarrollado una mejora de la comunicación Mode-S en la que las aeronaves adecuadamente equipadas pueden transmitir información meteorológica, denominada “Meteorological Routine Air Report” (MRAR). Poder disponer de información meteorológica captada por las aeronaves implica la posibilidad de crear una gran red de estaciones meteorológicas distribuidas por todo el territorio y a diferentes altitudes. De esta manera, se abre una vía para poder conocer mejor el estado y la evolución de la atmósfera, uno de los factores más importantes en la navegación aérea debido a sus efectos sobre la aeronave y su carácter impredecible.

Este proyecto surge inicialmente con la intención de incorporar los datos de vientos obtenidos gracias al MRAR para mejorar la predicción de la posición de las aeronaves y deducir la importancia de este factor, pues, entre otros factores, el viento es responsable de la degradación de la predicción de la separación con otras aeronaves conforme el horizonte temporal aumenta. Para ello se dispone del receptor SBS-3, capaz de recibir señales Mode-S/ADS-B con un alcance de hasta 400 km. Sin embargo, durante la investigación inicial se encontraron 3 problemas para alcanzar este objetivo:

1. Para recibir la información MRAR se debe interrogar al transpondedor a bordo solicitando dicha información. Sin embargo, el receptor SBS-3 no tiene capacidad de interrogación, sólo de escucha.
2. Como continuación del inconveniente anterior, en el momento en el que se inició este proyecto España no disponía de la infraestructura suficiente para interrogar mediante Mode-S EHS en la zona sur. Sin embargo, se espera que para 2020 se tenga capacidad para recibir datos Mode-S EHS en todo el país [10].
3. Por tanto, ante esta situación ha sido imposible conocer qué información Mode-S es capaz de decodificar el receptor SBS-3.

Ante esta problemática se optó por darle un giro al objetivo del proyecto. De esta manera, el nuevo y definitivo objetivo consiste en desarrollar un predictor de trayectorias para el corto plazo (hasta un horizonte de 20 minutos) basado en medidas ADS-B. Con este predictor se pretende emular las capacidades de predicción que tienen los proveedores de servicios de navegación aérea y analizar su degradación con el horizonte de predicción, especialmente en cuanto a la predicción de la distancia mínima entre aeronaves.

1.2 Metodología

Para alcanzar el objetivo mencionado anteriormente se ha desarrollado un proceso en el que, partiendo únicamente de la posición de la aeronave transmitida mediante ADS-B, sea capaz de obtener la predicción de la separación mínima entre las aeronaves que sobrevuelan el espacio aéreo analizado. Este proceso consta de dos fases claramente diferenciadas:

1. Filtro de Kalman. Se diseña un Filtro de Kalman extendido con el objetivo de mejorar la posición recibida inicialmente mediante ADS-B.
2. Predicción de trayectorias futuras. A partir de la posición mejorada se estima la trayectoria futura para cada una de las aeronaves. De esta forma, se puede obtener fácilmente la distancia mínima entre aquellas aeronaves que se estén aproximando entre sí.

Con la intención de poder evaluar la calidad de las predicciones y las separaciones obtenidas se realizará un análisis *a posteriori* en el que se comparen estos resultados con los valores obtenidos en la realidad.

1.3 Estructura del documento

Este documento consta de 8 capítulos. El primero de ellos pretende presentar el objetivo de este proyecto. En el capítulo 2 se hace una breve introducción a la situación de partida y al receptor usado para este proyecto. Por otro lado, en el capítulo 3 se describe de manera teórica las dos modalidades del Filtro de Kalman, el discreto y el extendido para, en el capítulo 4, dar paso a la caracterización de las ecuaciones que definen el Filtro de Kalman extendido aplicado en este proyecto. El siguiente punto, el capítulo 5, consiste en la descripción del proceso seguido para estimar la trayectoria futura de las aeronaves y, a partir de ella, la separación entre las aeronaves circundantes. Finalmente, en el capítulo 6 se muestran los resultados. En ellos se realiza un análisis *a posteriori* en el que se pretende ilustrar la calidad de las predicciones tomando como referencia la distancia real entre las aeronaves. Para ello, se representa la evolución de la diferencia entre predicción y realidad según la antelación de las predicciones.

2 DATOS DE VIGILANCIA

Desde el inicio de la aviación comercial, ésta ha experimentado un crecimiento prácticamente constante. Este crecimiento ha obligado al desarrollo de tecnología que pueda garantizar una gestión del tránsito aéreo de manera segura, económica, y eficiente. Como consecuencia de esta necesidad, se han desarrollado paulatinamente tres tipos de vigilancia dependiendo de la tecnología disponible:

- **Vigilancia Independiente No Cooperativa:** provista por los radares primarios (PSR), los cuales sólo pueden determinar la posición de las aeronaves circundantes a partir del reflejo de la señal emitida.
- **Vigilancia Independiente Cooperativa:** asociada a los radares secundarios (SSR). Éstos hacen posible la comunicación gracias a unos elementos a bordo denominados “transpondedores” capaces de responder a interrogaciones desde tierra. La posición horizontal de la aeronave es determinada por los sistemas en tierra mientras que la aeronave proporciona en su respuesta la altitud y su identidad.
- **Vigilancia Dependiente Cooperativa:** basado en la tecnología ADS-B (“Automatic Dependent Surveillance – Broadcast”), mediante la cual la aeronave difunde su posición, altitud, velocidad, identidad, así como otros parámetros adicionales, a todos los usuarios que estén escuchando. Esta difusión se realiza automáticamente, a una tasa aproximada de 1 Hz, y no como respuesta a una interrogación previa.

La Vigilancia Independiente Cooperativa se fundamenta en el uso de la técnica de interrogación “Mode-S”. Esta técnica de interrogación pretende evitar errores en la identificación de las aeronaves en espacios muy congestionados mediante la asignación de una dirección única a la aeronave, lo cual permite el establecimiento de una comunicación selectiva. A su vez, el Mode-S EHS (“Enhanced Surveillance”) es capaz de transmitir otros parámetros de la aeronave, como por ejemplo la altitud, rumbo magnético, velocidad respecto a tierra, IAS o Mach, entre otros.

Aquellos radares equipados con Mode-S EHS pueden, a su vez, interrogar a las aeronaves solicitando información adicional. Esta información depende de dos factores, denominados “Downlink Format” (DF) y “Binary Data Store” (BDS). El BDS se trata de un mensaje incluido en la interrogación que realiza el radar secundario al transpondedor y que define el tipo de información que quiere recibir. Dentro de los diferentes códigos BDS se ha introducido recientemente el MRAR, del que se había hablado en el capítulo anterior y que corresponde al BDS 4,4. Este código permite obtener observaciones directas del viento y la temperatura que experimenta la aeronave en cada instante.

Debido a la imposibilidad tecnológica para disponer de esta información, este proyecto se basa en los datos obtenidos mediante ADS-B, aunque se plantea como posible desarrollo futuro continuar con esta línea de investigación.

2.1 Datos de vuelo

Para que la señal transmitida por la aeronave se traduzca en información útil para el resto de usuarios son necesarios dos factores adicionales: una antena receptora y un software decodificador.

Receptor

Como se comentaba anteriormente, para este proyecto se ha hecho uso del receptor diseñado por la compañía KINETIC denominado “SBS-3”. Este dispositivo es especialmente interesante por tratarse de un receptor “stand-alone”, es decir, es capaz de realizar el procesamiento y demodulación de numerosas señales de audio y datos de manera simultánea e interna.

Sus principales características son:

- Receptor de señales Mode-S/ADS-B y ACARS a 1090 MHz.
- Receptor SDR (Software-Defined Radio) AM/FM desde 27 MHz hasta 980 MHz.
- Salida por puerto USB para datos.
- Salida por Ethernet para datos y audio con 100 Mbps de máxima velocidad.



Figura 2.1. Receptor SBS-3

Software

El mismo fabricante pone a disposición de los usuarios un programa denominado “BaseStation”. En la actualidad existen diversos programas de uso libre alternativos a este, sin embargo, “BaseStation” presenta dos grandes ventajas desde el punto de vista de este proyecto:

1. Permite decodificar y representar sobre un mapa virtual la información relativa de aquellas aeronaves que se están escuchando, a diferencia de otros programas que realizan cada una de estas funciones por separado. Por tanto, la configuración y el manejo de la información es mucho más sencillo.
2. Permite grabar la información recibida mediante ADS-B durante un intervalo de tiempo deseado. Esta información se almacena en un archivo con extensión “.bst” en el que cada línea corresponde a un mensaje ADS-B concreto. A modo de ejemplo se presenta en la Figura 2.2 un ejemplo real de la información contenida en cada mensaje.

```
"2013/07/01", "17:12:06.375", "131194", "02007A", "RAM641B", "Morocco", "0", "39000", "39000", "37.21916", "-4.14740", "0", "0", "437.8", "204.0", "30293", "7655"
"2013/07/01", "17:12:06.375", "4457816", "440558", "BER384E", "Austria", "0", "35000", "35000", "35.73386", "-7.51619", "0", "0", "443.5", "220.2", "17728", "4540"
"2013/07/01", "17:12:06.984", "3420488", "343148", "AEA9164", "Spain", "0", "41000", "41000", "38.42725", "-7.93368", "0", "0", "449.8", "215.3", "17670", "4506"
"2013/07/01", "17:12:06.984", "5023919", "4CA8AF", "RYR2QW", "Ireland", "0", "35000", "35000", "38.24494", "-8.28280", "64", "64", "434.0", "180.5", "17749", "4555"
"2013/07/01", "17:12:06.984", "3416345", "342119", "AEA1037", "Spain", "0", "26150", "26150", "37.39583", "-3.91161", "1984", "1984", "418.2", "17.0", "4195", "1063"
"2013/07/01", "17:12:07.000", "4219970", "406442", "EZY539L", "United Kingdom", "0", "37050", "37050", "38.35089", "-3.60287", "832", "832", "448.4", "4.6", "4192", "1060"
```

Figura 2.2. Ejemplo para ilustrar la estructura de la información almacenada en el archivo “.bst”

Como se observa en la Figura 2.2, cada uno de estos mensajes consta de 17 parámetros entrecorriados y separados por comas. La información asociada a cada uno de ellos se detalla en la Tabla 2.1.

Parámetro	Nombre	Tipo	Tamaño	Descripción
1	Fecha	Fecha y hora	10	Fecha en la que se recibe el mensaje en formato “yyyy/mm/dd”.
2	Hora	Fecha y hora	12	Hora en la que se recibe el mensaje en formato “hh:mm:ss.mmm” .
3	Dirección del Mode-S – raw	Número entero	7	Identificación de la aeronave en formato raw.
4	Dirección del Mode-S – hexadecimal	Carácter	6	Identificación de la aeronave en formato hexadecimal.

5	CallSign	Carácter	6-7	Identificación del vuelo realizado por la aeronave.
6	País	Carácter	Variable	País de matriculación de la aeronave.
7	Is On Ground	Número entero	1-2	Puede tomar dos valores: <ul style="list-style-type: none"> ▪ “0”: si la aeronave está en el aire. ▪ “-1”: si la aeronave está en tierra.
8	Altitud	Número entero	1-5	Altitud barométrica en pies (ft).
9	Altitud mostrada	Número entero	1-5	Campo reservado para transmitir otra información en el futuro. Hasta entonces se duplica la altitud.
10	Latitud	Flotante	Variable	Latitud instantánea de la aeronave en grados (°).
11	Longitud	Flotante	Variable	Longitud instantánea de la aeronave en grados (°).
12	<i>Rate of Climb</i> (ROC)	Número entero	Variable	Velocidad de ascenso de la aeronave en pies por minuto (ft/min).
13	ROC calculado	Número entero	Variable	Velocidad de ascenso calculada a partir de la altitud por si la aeronave no transmite el ROC directamente. Se expresa en pies por minuto (ft/min).
14	Velocidad respecto a tierra	Flotante	Variable	Se expresa en nudos (kt).
15	Rumbo	Flotante	Variable	Rumbo respecto al norte magnético en grados (°).
16	<i>Squawk</i> – decimal	Número entero	4-5	Código asignado por el ATC para identificar a cada transpondedor. Toma valor nulo si aún no se tiene identificación.
17	<i>Squawk</i> – octal	Número entero	4	Mismo parámetro que el anterior, pero en codificación octal. Si el valor en decimal es nulo, para la codificación octal se deja en blanco.

Tabla 2.1. Descripción de la estructura seguida en el archivo “.bst” para almacenar la información recibida

El archivo “.bst” generado es nombrado automáticamente por el programa a partir de la fecha y hora en la que se inicia la grabación de datos. El nombre de estos archivos sigue el formato “aaaammdd – hhmmss”.

Finalmente, debido a algún problema relacionado con la falta de actualización o mantenimiento, el programa “BaseStation” se encuentra inoperativo para *Windows 10* desde el verano de 2018. Por esta razón, los archivos con datos de vuelo con los que se ha trabajado en este proyecto corresponden a los obtenidos por Francisco Cantos Galán entre el 15 de mayo y el 17 de julio de 2013 para su Proyecto Fin de Carrera denominado “Análisis de trayectorias de aeronaves obtenidas mediante ADS-B” [9].

3 FILTRO DE KALMAN

Debido a la complejidad y diversidad de los casos para los que se puede aplicar el Filtro de Kalman, en este capítulo se realiza inicialmente una breve introducción a las dos variantes del filtro, el discreto y el extendido, para, posteriormente, dar paso a la adaptación del filtro y de las ecuaciones que permita cumplir con el objetivo inicial de mejorar la posición proporcionada por ADS-B.

3.1 Filtro de Kalman discreto

En 1960, R.E. Kalman publicó su famoso estudio en el que describía una solución iterativa para el problema del filtro lineal de datos discretos. Desde ese momento, y gracias en gran medida al desarrollo de la informática, el Filtro de Kalman se ha convertido en materia de numerosos estudios y aplicaciones, especialmente en el área de la navegación, pues permite combinar todas las medidas disponibles junto con el modelo que describe el comportamiento del sistema para producir una estimación de las variables de interés de manera que el error es minimizado estadísticamente.

Según se define en [3], el Filtro de Kalman consiste en un algoritmo iterativo para el procesamiento óptimo de datos. En este punto es interesante pararse un segundo para entender las implicaciones de esta definición.

Atendiendo a la aplicación del Filtro de Kalman para este proyecto “óptimo” se refiere a que el filtro, a partir de unos datos con ruido, proporciona la mejor estimación del estado real. Esto es así siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones:

- El sistema debe ser descrito por un modelo lineal.
- El ruido asociado a las variables debe ser blanco (no correlacionado en el tiempo) y gaussiano (distribución normal de la probabilidad).

La palabra “iterativa” significa que cada vez que se recibe una medida se actualiza la estimación del estado del sistema tomando como condición inicial la estimación del estado obtenida en el instante anterior. De esta forma, la estimación de las variables de estado utiliza toda la información disponible hasta ese momento sin necesidad de procesar todos los datos desde el inicio de la aplicación del filtro, lo que es esencial para el carácter práctico de su implementación.

El Filtro de Kalman es capaz de procesar todas las medidas disponibles, sin importar su valor de precisión, para estimar el valor real de las variables de interés. Para ello es necesario:

1. Información disponible sobre las condiciones iniciales de las variables de interés.
2. Modelo del comportamiento dinámico del sistema.
3. Caracterización de la incertidumbre del modelo dinámico.
4. Modelo de la medición.
5. Caracterización de la incertidumbre del modelo de medición.

El Filtro de Kalman discreto aborda el problema de la estimación del estado de un sistema en tiempo discreto. Este sistema se puede definir por la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (3-1)$$

donde:

- $x_k \in \mathfrak{R}^n$: vector de estado estimado en el instante de evaluación, t_k , con $k = 1, 2, 3, \dots$
- n : dimensión del vector de estado.

- $u_{k-1} \in \mathfrak{R}^l$: vector de control en el instante de tiempo previo t_{k-1} .
- l : dimensión del vector de control.
- A : matriz $n \times n$ que relaciona el estado en el instante previo, x_{k-1} , con el estado en el instante actual, x_k .
- B : matriz $n \times l$ que relaciona la señal de control en el instante, u_{k-1} , con el estado en el instante actual, x_k .
- $w_{k-1} \in \mathfrak{R}^n$: representa el ruido asociado al sistema en el instante previo, t_{k-1} .

La observación, o medida, que se recibe en cada instante se asume que sigue la siguiente relación lineal:

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (3-2)$$

donde:

- $z_k \in \mathfrak{R}^m$: observación o medida recibida en t_k .
- m : dimensión de la medida.
- H_k : matriz $m \times n$ que relaciona en el instante de evaluación el estado, x_k , con la medida, z_k .
- $v_k \in \mathfrak{R}^m$: representa el ruido asociado a la medida en el instante t_k .

Como se comentó anteriormente, tanto el ruido del sistema como el asociado a la medida se asume que son independientes entre ellos, blancos y sus funciones de densidad siguen distribuciones normales con medias nulas y varianzas Q_k y R_k , respectivamente, es decir:

$$w_k \sim N(0, Q_k) \quad (3-3)$$

$$v_k \sim N(0, R_k) \quad (3-4)$$

donde:

- $Q_k \in \mathfrak{R}^{n \times n}$: covarianza asociada al ruido del sistema.
- $R_k \in \mathfrak{R}^{m \times m}$: covarianza asociada al ruido de la medida.

Para iniciar cada iteración del Filtro de Kalman es necesaria una estimación previa del estado del sistema. Esta estimación corresponde a:

- Estimación inicial del estado, \hat{x}_0 , y de su covarianza, P_0 , para la primera iteración del filtro.
- Estimación proporcionada por el Filtro de Kalman en el instante anterior, \hat{x}_{k-1} y P_{k-1} , para el resto de iteraciones.

A partir de la estimación previa en el instante de evaluación anterior es posible obtener la estimación *a priori*, la cual se denota como \hat{x}_k^- donde el signo menos como superíndice significa que se trata de una estimación que se tiene antes de recibir la medida en el instante de evaluación, t_k , mientras que el acento circunflejo (^) se usa para indicar que se trata de una estimación. A su vez, \hat{x}_k se define como el estado estimado *a posteriori* en el instante t_k .

El error asociado a la estimación *a priori* y *a posteriori* se definen como:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (3-5)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (3-6)$$

Por tanto, las covarianzas asociadas se obtienen como:

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (3-7)$$

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (3-8)$$

Este documento se centra en dar a conocer aquellos principios del Filtro de Kalman de interés para el proyecto realizado. En caso de querer ahondar en los desarrollos matemáticos que justifican el Filtro de Kalman se puede consultar los documentos [2], [3], y [4] citados en la Bibliografía.

En cualquier caso, durante la derivación de las ecuaciones del Filtro de Kalman el objetivo inicial es encontrar una ecuación que estime el estado *a posteriori*, \hat{x}_k , como una combinación lineal de la estimación *a priori*, \hat{x}_k^- , y una diferencia ponderada entre la medida recibida, z_k , y la predicha, $H\hat{x}_k^-$, como se muestra a continuación:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H_k\hat{x}_k^-) \quad (3-9)$$

donde:

- $(z_k - H\hat{x}_k^-)$: diferencia, denominada residuo, que refleja la discrepancia existente entre la medida predicha, $H\hat{x}_k^-$, y la medida recibida, z_k .
- K_k : matriz $n \times m$ denominada “Ganancia de Kalman”. Se elige de manera que minimice el error *a posteriori* de la covarianza. Esta matriz se puede expresar como:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3-10)$$

Una manera de interpretar el comportamiento de K_k es la siguiente: si la covarianza de la medida recibida, R_k , se aproxima a cero, entonces:

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H_k^{-1} \quad (3-11)$$

es decir, se “confía” en el valor de la medida recibida per no en el estado predicho. De igual modo, si la covarianza de la estimación, P_k^- , se aproxima a cero:

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0 \quad (3-12)$$

por lo que se “confiaría” en el estado predicho, $H_k\hat{x}_k^-$, pero no en la medida recibida.

Una vez aclaradas las ideas básicas del Filtro de Kalman se está en disposición de dar paso a las etapas que lo componen. Estas etapas son dos:

- **Etapas de predicción.** Responsable de la proyección futura del estado y de la covarianza para obtener el estado *a priori* para el siguiente instante. En algunos textos también se denomina “actualización de tiempo”. Las ecuaciones que forman parte de esta etapa son:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (3-13)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q_k \quad (3-14)$$

Estas ecuaciones permiten que, para cada instante de evaluación, y a partir de unas condiciones iniciales, se pueda obtener la estimación del estado y de la covarianza proyectadas desde el instante anterior, t_{k-1} , al actual, t_k .

- **Etapas de actualización.** Responsable de la retroalimentación o corrección del Filtro de Kalman. Las ecuaciones que forman parte de esta etapa son:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (3-15)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \quad (3-16)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (3-17)$$

A la vista de estas ecuaciones, una vez obtenida la Ganancia de Kalman, K_k se incorpora el valor de la medida recibida, z_k , para poder obtener la estimación del estado *a posteriori*. Finalmente, se computa la estimación de la covarianza *a posteriori*.

Una vez se completan las dos etapas el proceso se repite tomando la estimación *a posteriori* para predecir la estimación *a priori* del siguiente instante. Este aspecto es el que le confiere un carácter más práctico que otros filtros.

En la Figura 3.1 se muestra un resumen del proceso a seguir por el Filtro de Kalman discreto para cada instante de evaluación.

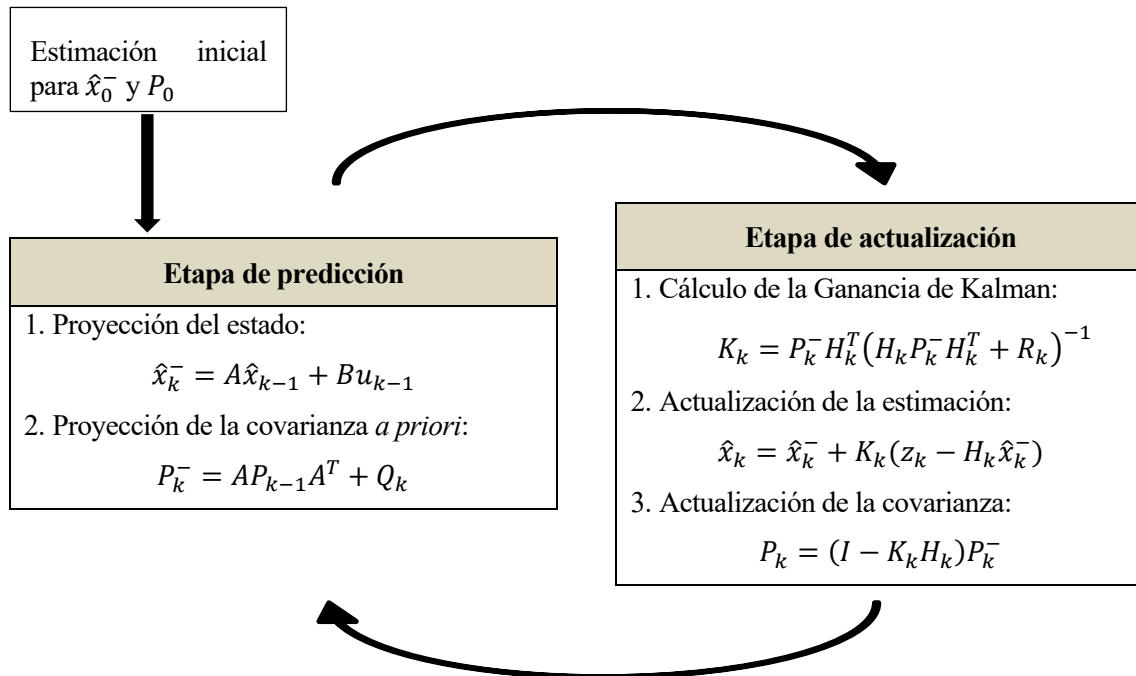


Figura 3.1. Resumen de las etapas del Filtro de Kalman discreto

3.2 Filtro de Kalman extendido

Cuando el proceso viene descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales se emplea el Filtro de Kalman Extendido. Este filtro consiste, simplemente, en un Filtro de Kalman que se linealiza en torno al valor del estado y del control en el instante t_{k-1} .

En este caso, el vector de estado se modela como:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad (3-18)$$

donde $f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \in \mathfrak{R}^n$ corresponde a un vector de funciones no lineales que relaciona el estado en el instante t_{k-1} con el estado en el instante t_k .

Por otro lado, la medida viene dada por:

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad (3-19)$$

Donde $h(x_k, v_k) \in \mathfrak{R}^m$ es definido por el vector de funciones no lineales que relaciona el estado, x_k , con la medida, z_k .

En la práctica no es posible saber los valores del ruido w_k y v_k . Sin embargo, al igual que se hizo para el Filtro de Kalman discreto, es usual suponer que estas variables siguen una distribución normal con media nula y covarianzas Q_k y R_k , respectivamente:

$$w_k \sim N(0, Q_k) \quad (3-20)$$

$$v_k \sim N(0, R_k) \quad (3-21)$$

Reescribiendo las ecuaciones para el sistema y la medida una vez linealizadas se tiene:

$$x_k \approx \hat{x}_k + A_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W_{k-1}w_{k-1} \quad (3-22)$$

$$z_k \approx \hat{z}_k + H_k(x_k - \hat{x}_k) + V_k v_k \quad (3-23)$$

donde:

- \hat{z}_k : estimación de la medida en el instante t_k .
- A_{k-1} : jacobiano de la función f respecto a x . La componente i, j de la matriz viene dada por:

$$A_{[i,j]_{k-1}} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (3-24)$$

- W_{k-1} : jacobiano de la función f respecto a w_{k-1} . La componente i, j de la matriz viene dada por:

$$W_{[i,j]_{k-1}} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (3-25)$$

- H_k : jacobiano de la función h respecto a x . La componente i, j de la matriz viene dada por:

$$H_{[i,j]_k} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_k) \quad (3-26)$$

- V : jacobiano de la función h respecto a v . La componente i, j de la matriz viene dada por:

$$V_{[i,j]_k} = \frac{\partial h_{[i]}}{\partial v_{[j]}}(\hat{x}_k, 0) \quad (3-27)$$

Es importante observar que, tras linealizar el sistema, el error entre el estado real y el linealizado varía. Se tiene que:

- ε_k : error entre el estado real del sistema y el estado linealizado.
- η_k : error entre la observación real y la observación linealizada.

Es decir, antes de linealizar el ruido venía dado por w_k y v_k . Sin embargo, como resultado de linealizar, el ruido asociado al sistema y a la observación corresponden a ε_k y η_k , las cuales siguen una distribución normal:

$$\varepsilon_k \sim N(0, W_k Q_k W_k^T) \quad (3-28)$$

$$\eta_k \sim N(0, V_k Q_k V_k^T) \quad (3-29)$$

A partir de este punto, una vez se ha linealizado el sistema, el procedimiento a seguir es similar al aplicado para el Filtro de Kalman discreto.

Por tanto, las etapas que componen el Filtro de Kalman extendido son:

- **Etapas de predicción.** Responsable de la proyección del estado y de la covarianza en el instante t_{k-1} para obtener el estado *a priori* para el siguiente instante, t_k . En algunos textos también se denomina “actualización de tiempo”. Las ecuaciones que forman parte de esta etapa son:

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (3-30)$$

$$P_k^- = A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + W_{k-1} Q_{k-1} W_{k-1}^T \quad (3-31)$$

- **Etapas de actualización.** Responsable de la retroalimentación o corrección del Filtro de Kalman. Las ecuaciones que forman parte de esta etapa son:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (3-32)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (3-33)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (3-34)$$

Una vez se completan las dos etapas el proceso se repite tomando la estimación *a posteriori* para predecir la estimación *a priori* del siguiente instante. Este aspecto es el que le confiere un carácter más práctico que otros filtros.

Al igual que se hizo en el caso del Filtro de Kalman discreto en la Figura 3.2 se muestra un resumen del proceso a seguir por el Filtro de Kalman extendido para cada instante de evaluación.

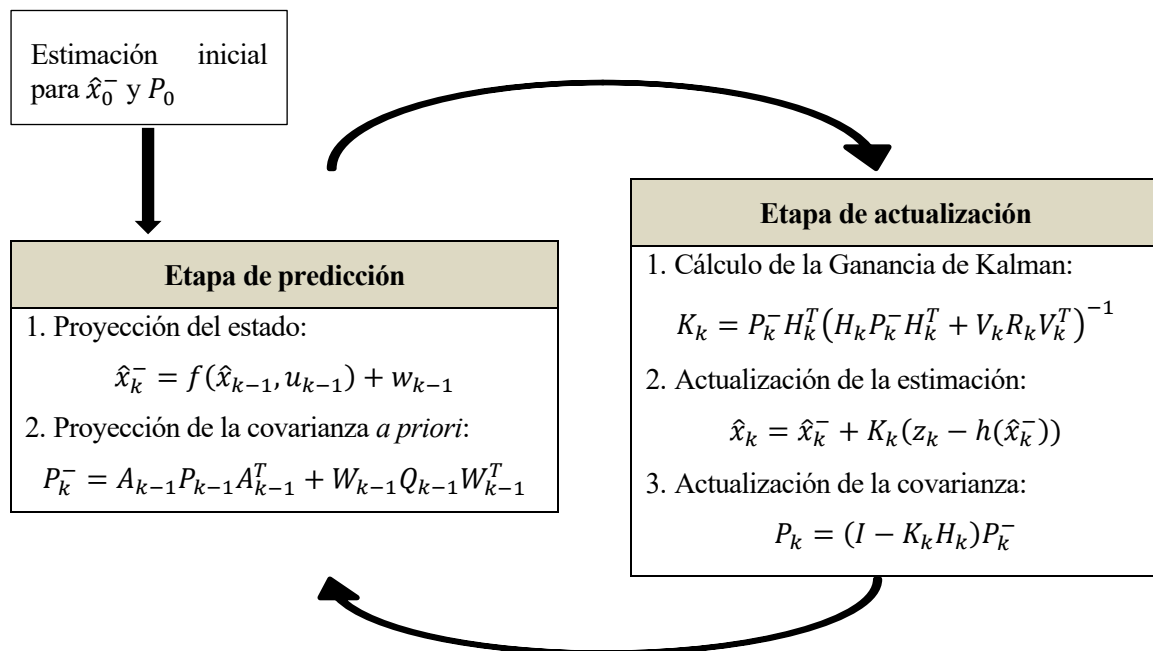


Figura 3.2. Resumen de las etapas del Filtro de Kalman extendido

4 APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A TRAYECTORIAS DE AERONAVES

Tras esta introducción al Filtro de Kalman faltaría por conocer el sistema matricial resultante de la adaptación de dicho filtro al caso bajo estudio. Para ello se han tenido en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se considera el plano horizontal de la trayectoria.
- Para una mayor robustez y capacidad de aplicación en diferentes situaciones se va a tener en cuenta sólo la información básica transmitida por un sistema de vigilancia independiente cooperativa. Por tanto, de los 17 parámetros de los que está compuesto cada línea de mensaje ADS-B registrado, como se puede ver en la Tabla 2.1, sólo se tendrá en cuenta la latitud, longitud, el instante en el que se recibe y el valor de “Is On Ground”. Respecto a este último parámetro se tienen 2 posibles situaciones:
 1. Aeronave en el aire (IoG = 0): se realiza el estudio general.
 2. Aeronave en tierra (IoG = -1): se considera como aeronave perdida.

Por tanto, para aplicar el Filtro de Kalman extendido es necesario determinar los siguientes elementos:

- Variables de estado.
- Variables de control.
- Predicción del estado y su covarianza.
- Medidas y su covarianza.

En este capítulo, en primer lugar, se definen las variables a las que se aplicará el Filtro de Kalman extendido. La determinación de la velocidad con respecto a tierra y del curso a partir de las posiciones se muestra en el apartado 4.2. Por último, en el apartado 4.3, se muestran y se comentan dos casos representativos que permiten ilustrar comportamiento del Filtro de Kalman desarrollado.

4.1 Definiciones

4.1.1 Variables de estado

Como ya se ha comentado en varias ocasiones, el objetivo en este de trabajo de aplicar un Filtro de Kalman es obtener la mejor estimación posible de la posición geográfica de una aeronave. Esta posición viene definida por su proyección sobre el plano horizontal. Por tanto, el vector de estado corresponde a:

$$x_k = \begin{bmatrix} \phi_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

donde:

- ϕ_k : latitud de la aeronave en el instante t_k .
- λ_k : longitud de la aeronave en el instante t_k .

Es necesario destacar que la posición transmitida por ADS-B toma como referencia el modelo terrestre WGS-84, por tanto, estas variables son referidas a este modelo.

4.1.2 Variables de control

Las variables que intervienen en la estimación de la posición corresponden al curso geográfico, ψ , y a la velocidad respecto a tierra, V_g .

$$u_k = \begin{bmatrix} \psi_k \\ V_{gk} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

Estas dos magnitudes se obtienen a partir de las posiciones anteriores, por lo tanto, se considera que su error no depende de la posición en el instante de evaluación. Más adelante, en el apartado 4.2 se describirá cómo se obtiene, así como la estimación de los errores asociados.

4.1.3 Predicción del estado y su covarianza

Se considera que la aeronave se desplaza siguiendo un movimiento rectilíneo y uniforme. Esta suposición podría entrar en conflicto cuando se analicen trayectorias con virajes, sin embargo, debido a que el tiempo entre mensajes es pequeño (aproximadamente de 1 segundo), se observará en los resultados que es posible aproximar dicho viraje mediante desplazamientos rectilíneos en intervalos de tiempo reducidos.

El sistema que determina la evolución de la posición viene dado por [7]:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{V_g \cos(\psi)}{R_t + h} \quad (4-3)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V_g \sin(\psi)}{(R_t + h)\cos(\phi)} \quad (4-4)$$

donde:

- R_t : valor medio del radio terrestre (6371 m).
- h : altitud de la aeronave.

En este trabajo se ha supuesto que durante todo el intervalo entre el instante inicial y el de evaluación, definido como Δt , la velocidad respecto a tierra, V_g , el curso, ψ , y la altitud, h se mantienen constantes. Como se mencionó anteriormente, estas variables se obtendrán como función de las posiciones anteriores. En el apartado 4.2 se desarrollará el proceso seguido para obtener estas variables, así como sus características.

Es importante aclarar que las ecuaciones (4-3) y (4-4) se basan en un modelo de tierra esférico. Por ello, la diferencia entre este modelo y el WGS-84, en el que se basan las variables de estado, será absorbida por el Filtro de Kalman.

Integrando las ecuaciones diferenciales anteriores y discretizándolas se llega a las ecuaciones que permiten estimar la proyección del estado *a priori*:

$$\hat{\phi}_k^- = \frac{V_{g_{k-1}} \cos(\psi_{k-1})}{R_{h_{k-1}}} (t_k - t_{k-1}) + \hat{\phi}_{k-1} \quad (4-5)$$

$$\hat{\lambda}_k^- = \tan(\psi_{k-1}) \ln \left| \frac{\sec(\hat{\phi}_k) + \tan(\hat{\phi}_k)}{\sec(\hat{\phi}_{k-1}) + \tan(\hat{\phi}_{k-1})} \right| + \hat{\lambda}_{k-1} \quad (4-6)$$

Para cerrar la etapa de predicción faltaría por conocer cómo obtener la covarianza del estado *a priori*. Esto es posible aplicando directamente la expresión (3-31), la cual se vuelve a mostrar a continuación:

$$P_k^- = A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + W_{k-1} Q_{k-1} W_{k-1}^T \quad (4-7)$$

Como es fácil de imaginar, una vez se han definido las variables de estado, la matriz de covarianza del estado adopta la forma:

$$P_k = \begin{bmatrix} (\sigma_{\phi_k})^2 & (\sigma_{\phi\lambda_k})^2 \\ (\sigma_{\phi\lambda_k})^2 & (\sigma_{\lambda_k})^2 \end{bmatrix}, \quad (4-8)$$

donde:

- σ_{ϕ_k} : desviación típica asociada a la latitud en el instante t_k .
- σ_{λ_k} : desviación típica asociada a la longitud en el instante t_k .
- $\sigma_{\phi\lambda_k}$: indicador del grado de correlación entre la latitud y la longitud en el instante t_k .

En cuanto al error asociado al sistema linealizado se tiene que éste depende de ambas variables de control. Como ya se ha comentado, tanto el curso como la velocidad respecto a tierra se obtienen a partir de las posiciones anteriores, por lo que llevan asociado un error que, a su vez, afecta a la predicción de la posición. Por tanto, considerando que el curso y la velocidad son independientes entre sí se tiene que:

$$w_k = \begin{bmatrix} \sigma_{\psi_k} \\ \sigma_{Vg_k} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} \sigma_{\psi_k}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{Vg_k}^2 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

En el apartado 4.2 se describe con más detalle cómo se obtienen las dos variables de control, así como el proceso seguido para estimar la desviación típica asociada a cada variable, σ_{ψ_k} y σ_{Vg_k} .

Por último, las matrices A_{k-1} y W_{k-1} son las responsables de poder estimar cómo aumenta la varianza con el tiempo. Las expresiones concretas que definen cada una de las componentes de ambas matrices se pueden consultar en el Anexo A.1 y A.2. Aun así, en el apartado 4.3 se mostrará gráficamente la propagación de la desviación típica asociada a la posición para un par de ejemplos reales.

4.1.4 Medidas y su covarianza

Para el caso estudiado la medida de la posición se extrae directamente de los datos almacenados en el archivo “.bst”, es decir, no es necesario ninguna transformación entre la información recibida y el vector de estado. Esto significa que el modelo de medición discretizado toma la forma mostrada a continuación:

$$\phi_k^{ADS-B} = \phi_k + v_{1k} \quad (4-11)$$

$$\lambda_k^{ADS-B} = \lambda_k + v_{2k} \quad (4-12)$$

Siendo v_1 y v_2 el ruido asociado a la latitud y longitud recibida, respectivamente. Cada uno de ellos se asume que es blanco y que su función de densidad sigue una distribución normal. Es decir:

$$v_{1k} \sim N\left(0, (\sigma_{\phi_k}^{ADS-B})^2\right) \quad (4-13)$$

$$v_{2k} \sim N\left(0, (\sigma_{\lambda_k}^{ADS-B})^2\right) \quad (4-14)$$

Por tanto, el ruido asociado a la medida, v_k , está compuesto por la incertidumbre asociada a la posición transmitida por ADS-B.

$$v_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Al estar compuesto por dos normales independientes y asumiendo que los errores en las medidas no están correlacionados se tiene que:

$$V_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-16)$$

En este proyecto, a pesar de aplicar un Filtro de Kalman extendido, la medida viene dada por un sistema lineal en el que la medida se obtiene directamente. Esto implica que la matriz H_k se corresponde con la matriz identidad:

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

Casi todas las variables que definen las etapas del Filtro de Kalman están determinadas, sólo faltaría por conocer cómo obtener la covarianza de la medida, R_k .

Para determinar la covarianza haría falta conocer el error asociado a la posición transmitida por ADS-B, v_k . Este error varía según la aeronave, pues depende de los sistemas a bordo que use para determinar la posición, y, a su vez, para una misma aeronave su valor varía con el tiempo.

En este sentido la tecnología ADS-B presenta una interesante ventaja, pues incluye en la señal transmitida la calidad de la velocidad y posición transmitidas. Concretamente, la precisión de la posición horizontal viene indicada por un grupo de 4 bits en el mensaje codificado. Como se observa en la Tabla 4.1 este grupo de bits puede tomar 12 valores o categorías diferentes, cada uno de ellos relacionado con un valor concreto de la incertidumbre asociada a la posición horizontal transmitida por ADS-B [1].

Esta incertidumbre define el radio de un círculo centrado en la posición horizontal real de la aeronave de manera que se puede asegurar que la posición transmitida por ADS-B se encuentra dentro de dicho círculo con un 95% de probabilidad. Considerando que sigue una distribución normal es fácil ver que este valor de probabilidad define un intervalo de confianza del doble de la desviación típica. Es decir, la desviación típica asociada a la medida corresponde a la mitad del valor indicado en la Tabla 4.1.

Categoría de la precisión (NACp)	Incertidumbre estimada (EPU)
0	≥ 10 NM
1	< 10 NM
2	< 4 NM
3	< 2 NM
4	< 1 NM
5	< 0.5 NM
6	< 0.3 NM
7	< 0.1 NM
8	< 0.05 NM
9	< 30 m
10	< 10 m
11	< 3 m

Tabla 4.1. Categoría para la precisión de la posición horizontal

Sin embargo, el receptor SBS-3 usado no permite conocer la incertidumbre transmitida por ADS-B ni acceder

al mensaje codificado. Por lo tanto, ante esta situación se ha elegido como error para la posición transmitida el valor mínimo permitido por EUROCONTROL según el documento “*EUROCONTROL Specification for ATM Surveillance System Performance (Volume 2 Appendices)*” [5]. Según EUROCONTROL, la precisión de la posición horizontal debe ser igual o superior a la Categoría 8. Esta categoría se aplica a zonas donde la señal de GPS incluye una degradación intencionada normalmente por tratarse de territorios en conflictos. Como este no es el caso de la zona cubierta por el receptor SBS-3 se toma como valor de incertidumbre el definido por la Categoría 9, es decir, 30 m.

Este valor para el error de la posición horizontal se va a considerar constante en el tiempo e igual para todas las aeronaves analizadas. Sin embargo, se debe transformar esta desviación típica dada en metros a grados geográficos, siendo esta transformación dependiente del punto en el que se encuentre la aeronave. Por lo tanto, la covarianza de la medida se obtiene como sigue:

$$\text{Categoría 9} \rightarrow 2\sigma^{ADS-B} = 30 \text{ m}$$

$$\sigma^{ADS-B} = \sigma_x = \sigma_y = 15 \text{ m} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{\phi_k}^{ADS-B} = p(\sigma^{ADS-B}, \phi_k^{ADS-B}, \lambda_k^{ADS-B}) \\ \sigma_{\lambda_k}^{ADS-B} = q(\sigma^{ADS-B}, \phi_k^{ADS-B}, \lambda_k^{ADS-B}) \end{cases} \quad (4-18)$$

$$R_k = \begin{bmatrix} (\sigma_{\phi_k}^{ADS-B})^2 & 0 \\ 0 & (\sigma_{\lambda_k}^{ADS-B})^2 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

4.1.5 Resumen del Filtro de Kalman extendido aplicado al cálculo de trayectorias

Finalmente, como consecuencia de los resultados anteriores las etapas que componen el Filtro de Kalman extendido se resumen en las ecuaciones mostradas en la Figura 4.1:

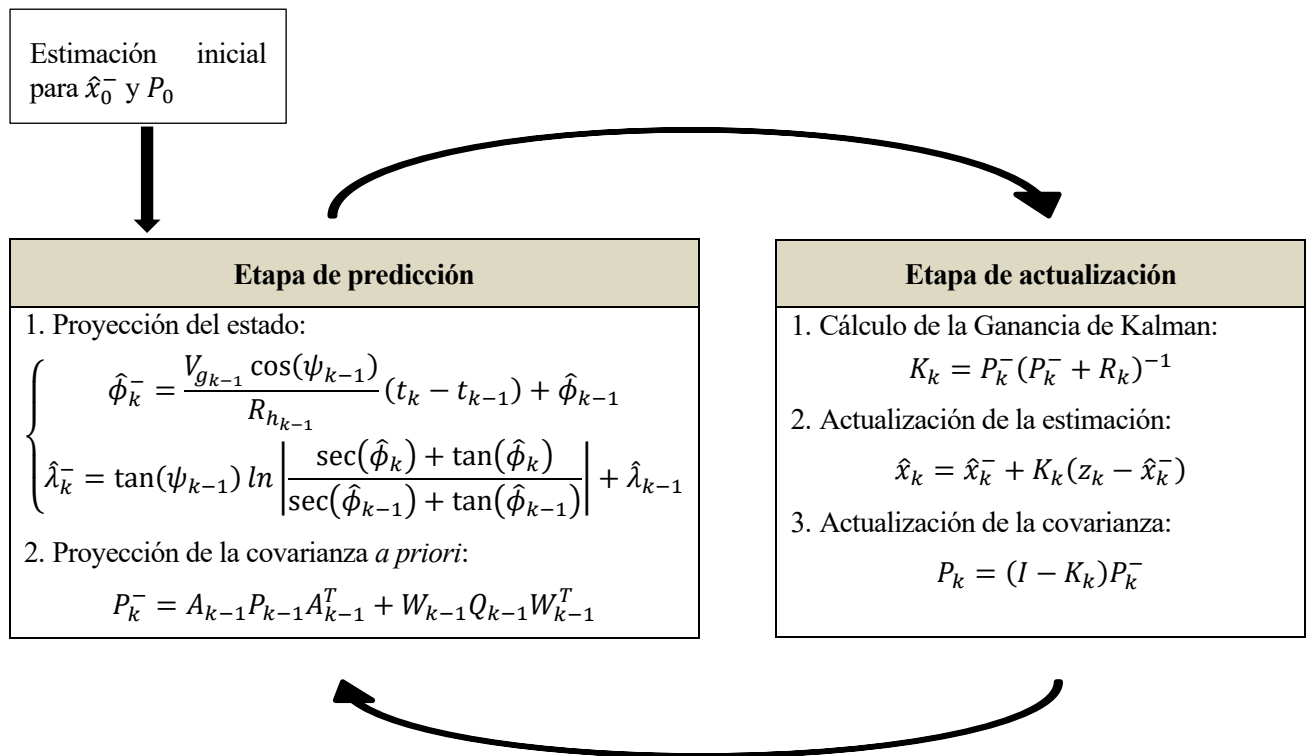


Figura 4.1. Resumen del Filtro de Kalman aplicado

La estimación inicial necesaria para iniciar el filtro, \hat{x}_0^- y P_0 , se obtiene directamente de la medida proporcionada por ADS-B. A partir de este instante tanto la variable de estado como su covarianza vienen dadas por el Filtro de Kalman extendido.

4.2 Cálculo del curso y de la velocidad respecto a tierra

Para cerrar el problema del Filtro de Kalman sólo faltaría conocer el curso, ψ , y la velocidad respecto a tierra, V_g , junto con sus desviaciones típicas. Como ya se ha mencionado, ambas variables se obtienen a partir de las posiciones mejoradas de la aeronave bajo estudio. En este apartado se detallará el procedimiento seguido para obtener tanto el valor las variables de control en cada instante de evaluación como la covarianza asociada.

4.2.1 Curso

Antes de poder definir las ecuaciones que permiten estimar el curso es necesario realizar algunas consideraciones:

- Se asume el modelo de Tierra esférico.
- Se considera que las aeronaves navegan según una ruta loxodrómica en la que el rumbo (o curso para el caso de estudio) se mantiene constante.
- Se toma como referencia el Norte Geográfico.

Por lo tanto, la ecuación que permite estimar el curso teniendo en cuenta estas consideraciones es [6]:

$$\psi = \text{atan} \left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_A}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_B}{2} \right)} \right)} \right) \quad (4-20)$$

Donde:

- λ_B : longitud del punto final. Medida en radianes [rad].
- λ_A : longitud del punto inicial. Medida en radianes [rad].
- ϕ_B : latitud del punto final. Medida en radianes [rad].
- ϕ_A : latitud del punto inicial. Medida en radianes [rad].

A la vista de esta expresión se deduce que existe una singularidad cuando la aeronave vuela siguiendo un paralelo ($\phi_A = \phi_B$). En ese caso, el curso corresponde a:

- $\psi = 90^\circ$: si $\lambda_B > \lambda_A$ y $\lambda_B - \lambda_A < 180^\circ$.
- $\psi = 270^\circ$: si $\lambda_B < \lambda_A$ y $\lambda_A - \lambda_B < 180^\circ$.

Para este proyecto el curso se va a obtener a partir de dos posiciones que deben cumplir:

- La diferencia temporal entre ellas debe ser aproximadamente igual al intervalo temporal de evaluación.
- El punto final del tramo corresponde a la última posición mejorada de la aeronave.

Este intervalo temporal de evaluación se establece en 10 segundos. Sin embargo, aunque la tasa de transmisión para la tecnología ADS-B se establece en 1 Hz, en la práctica se observa que esta frecuencia puede variar con el tiempo e incluso se pueden producir pérdidas temporales de la señal. Por tanto, el intervalo temporal variará según el instante en el que se recibe el mensaje más próximo al intervalo de 10 segundos respecto al instante de evaluación. De ahora en adelante, este instante que define el límite inferior del intervalo se define con el índice “j”. De esta manera, t_j es el mayor tiempo que hace que se cumpla que $t_{k-1} - t_j < 10$ segundos.

Además, el valor establecido para el intervalo temporal se puede ver afectado en las siguientes situaciones:

1. Cuando se rastrea una aeronave por primera vez o tras recuperar la señal. En estos casos, al disponer de menos de 10 segundos de información, el intervalo de tiempo es inferior al intervalo temporal de evaluación. Una vez se alcanzan los 10 segundos de diferencia entre el instante de evaluación y el primer mensaje recibido se sigue el proceso normal.

2. Cuando se detecte un viraje. En primer lugar, para detectar si una aeronave está virando el criterio que se ha tomado es el siguiente: en cada instante de evaluación se comprueba si la posición mejorada y la obtenida a partir de ADS-B difieren más de 3 veces de la desviación típica de la posición ADS-B, σ_{ADS-B} (correspondiente a un intervalo de confianza del 99.73%). Es decir, si:

$$Dist(POS_{FK}, POS_{ADS-B}) > 3\sigma_{ADS-B} \quad (4-21)$$

O, lo que es lo mismo:

$$R_t \cos(\sin(\hat{\phi}_k) \sin(\phi_k^{ADS-B}) + \cos(\hat{\phi}_k) \cos(\phi_k^{ADS-B}) \cos(\lambda_k^{ADS-B} - \hat{\lambda}_k)) > 3\sigma_{ADS-B} \quad (4-22)$$

Cuando se cumpla esta condición el intervalo temporal se reduce en 1 segundo para el siguiente instante de evaluación, hasta un mínimo de 3 segundos. De esta manera se consigue mejorar notablemente el seguimiento del viraje al tomar posiciones más cercanas entre sí, aunque, por el contrario, se obtiene un aumento del error asociado.

Cuando deje de cumplirse la condición dada por la expresión 4-21, es decir, una vez finalice el viraje, el intervalo temporal de evaluación aumentará en 1 segundo para cada instante de evaluación hasta alcanzar de nuevo los 10 segundos preestablecidos.

Por lo tanto, para estimar el curso en el instante de evaluación, ψ_{k-1} , se hace uso de las posiciones mejoradas en t_{k-1} y t_j . Es decir, se está considerando que el curso en t_{k-1} se mantiene constante en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$. Esta consideración es consecuencia de la suposición tomada según la cual la aeronave sigue un movimiento rectilíneo y uniforme.

Teniendo en cuenta estos comentarios y aplicando la notación seguida durante este proyecto se obtiene que la ecuación que define el curso en t_{k-1} es:

$$\psi_{k-1} = \text{atan} \left(\frac{\lambda_{k-1} - \lambda_j}{\ln \left(\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_j}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_{k-1}}{2}\right)} \right)} \right) \quad (4-23)$$

Faltaría por conocer la estimación del error asociado al curso. Una manera de estimar el error asociado a una variable definida por una función conocida se expone en [8], según el cual: si se considera y_1 una función tal que $y_1 = g_1(u_1, u_2)$ se puede sustituir por una aproximación lineal centrada en el valor medio (\hat{u}_1, \hat{u}_2) de las variables aleatorias u_1 y u_2 . Es decir:

$$y_1 \approx g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2) + \nabla g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \begin{bmatrix} u_1 - \hat{u}_1 \\ u_2 - \hat{u}_2 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

Donde $\nabla g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ corresponde al gradiente de la función g_1 evaluado en \hat{u}_1 y \hat{u}_2 . Por tanto, se tiene que:

$$E[y_1] \approx g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \quad (4-25)$$

$$\sigma^2[y_1] \approx \nabla g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \cdot V_{g_1}(\hat{u}_1, \hat{u}_2) \cdot \nabla g_1(\hat{u}_1, \hat{u}_2)^T \quad (4-26)$$

Siendo $V_{g_1}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ la matriz de covarianza de las variables u_1 y u_2 evaluada en \hat{u}_1 y \hat{u}_2 .

Aplicando este razonamiento a las ecuaciones usadas para calcular el curso se tiene que:

$$y_1 = \psi_{k-1} \approx g_1(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) + \nabla g_1(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) \begin{bmatrix} \phi_{k-1} - \hat{\phi}_{k-1} \\ \lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1} \\ \phi_j - \hat{\phi}_j \\ \lambda_j - \hat{\lambda}_j \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

Donde el gradiente se define como:

$$\nabla g_1 = \left[\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_{k-1}} \quad \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_{k-1}} \quad \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_j} \quad \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_j} \right] \quad (4-28)$$

En el Apéndice A.3 se puede consultar las expresiones correspondientes a cada una de estas derivadas parciales, las cuales no se muestran aquí para no enturbiar el desarrollo.

La varianza, considerando que no existe correlación entre entre las dos posiciones de referencia, corresponde a:

$$Vg_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{\phi_{k-1}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\lambda_{k-1}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi_j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\lambda_j}^2 \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

Por tanto, la desviación típica quedaría definida como:

$$\sigma_{\psi_k} = \sqrt{\nabla g_1(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) Vg_1(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) \nabla g_1(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j)^T} \quad (4-30)$$

$$\sigma_{\psi_{k-1}}^2 = \left(\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_{k-1}} \right)^2 \sigma_{\phi_{k-1}}^2 + \left(\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_{k-1}} \right)^2 \sigma_{\lambda_{k-1}}^2 + \left(\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_j} \right)^2 \sigma_{\phi_j}^2 + \left(\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_j} \right)^2 \sigma_{\lambda_j}^2 \quad (4-31)$$

4.2.2 Velocidad respecto a tierra

El último parámetro que falta por definir es la velocidad respecto a tierra. Para determinar la expresión que permite estimar esta variable se ha considerado que la Tierra es esférica.

Así, atendiendo a las Ecuaciones Diferenciales de la Posición se observa que las componentes norte y este de la velocidad vienen definidas por [6]:

$$V_N = \dot{\phi}(R_t + h) \approx (R_t + h) \frac{\phi_B - \phi_A}{t_B - t_A} \quad (4-32)$$

$$V_E = \dot{\lambda}(R_t + h) \cos(\phi) \approx (R_t + h) \cos(\phi_B) \frac{\lambda_B - \lambda_A}{t_B - t_A} \quad (4-33)$$

Por lo tanto, la velocidad absoluta corresponde a:

$$V_g = \sqrt{V_N^2 + V_E^2} \approx (R_t + h) \sqrt{\left(\frac{\phi_B - \phi_A}{t_B - t_A} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_B - \lambda_A}{t_B - t_A} \right)^2 \cos(\phi_B)^2} \quad (4-34)$$

Al igual que para el curso, las dos posiciones de referencia corresponden a la última posición mejorada de la aeronave y aquella correspondiente según el intervalo temporal de evaluación.

Adaptando esta expresión a la notación seguida durante este proyecto quedaría como:

$$V_{g_{k-1}} = (R_t + h) \sqrt{\left(\frac{\phi_{k-1} - \phi_j}{t_{k-1} - t_j}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_{k-1} - \lambda_j}{t_{k-1} - t_j}\right)^2 \cos(\phi_{k-1})^2} \quad (4-35)$$

Para poder cerrar por completo el problema del Filtro de Kalman faltaría por conocer la estimación del error asociado a la velocidad. Al ser conocida la expresión que determina la velocidad respecto a tierra es posible estimar su incertidumbre aplicando el mismo procedimiento que el empleado anteriormente para el curso.

De esta manera se tendría que:

$$y_2 = V_{g_{k-1}} \approx g_2(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) + \nabla g_2(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) \begin{bmatrix} \phi_{k-1} - \hat{\phi}_{k-1} \\ \lambda_{k-1} - \hat{\lambda}_{k-1} \\ \phi_j - \hat{\phi}_j \\ \lambda_j - \hat{\lambda}_j \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

Donde el gradiente se define como:

$$\nabla g_2 = \left[\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_{k-1}} \quad \frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_{k-1}} \quad \frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_j} \quad \frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_j} \right] \quad (4-37)$$

Donde la expresión de cada una de las derivadas parciales se puede consultar en Apéndice A.4.

La varianza corresponde a:

$$V_{g_2} = \begin{bmatrix} \sigma_{\hat{\phi}_{k-1}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\hat{\lambda}_{k-1}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\hat{\phi}_j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\hat{\lambda}_j}^2 \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

Por tanto, la desviación típica quedaría definida como:

$$\sigma_{V_{g_{k-1}}} = \sqrt{\nabla g_2(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) V_{g_2}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) \nabla g_2(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j)^T} \quad (4-39)$$

$$\sigma_{V_{g_{k-1}}}^2 = \left(\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_{k-1}}\right)^2 \sigma_{\hat{\phi}_{k-1}}^2 + \left(\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_{k-1}}\right)^2 \sigma_{\hat{\lambda}_{k-1}}^2 + \left(\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_j}\right)^2 \sigma_{\hat{\phi}_j}^2 + \left(\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_j}\right)^2 \sigma_{\hat{\lambda}_j}^2 \quad (4-40)$$

4.3 Casos ilustrativos

Llegados a este punto se conoce cómo funciona el Filtro de Kalman de manera teórica. El problema ha quedado completamente cerrado, sin embargo, faltaría comprobar que realmente el filtro se comporta de la manera deseada. Para ello en este apartado se ilustran diferentes situaciones.

Concretamente, se va a aplicar a dos situaciones:

1. Trayectoria con curso constante.
2. Trayectoria con viraje.

4.3.1 Trayectoria con curso constante

Para este caso se ha tomado como ejemplo un tramo de casi 10 minutos de la trayectoria realizada por la aeronave identificada con el distintivo de llamada "48CB15" durante el día 1 de julio de 2013. Este tramo se representa

en la Figura 4.2, donde se muestra simultáneamente la posición proporcionada por ADS-B, la predicha y la mejorada tras la aplicación del Filtro de Kalman. Tanto la posición dada por ADS-B como la predicha se representan puntualmente para cada instante de evaluación, mientras que la posición mejorada obtenida como resultado de la aplicación del Filtro de Kalman define la trayectoria de la aeronave y se representa como una línea continua.

Para poder apreciar con más detalle la diferencia entre cada una de estas posiciones se añade una vista ampliada. En esta representación se observa cómo la posición mejorada prácticamente coincide con la posición predicha. Esto se debe al menor error asociado a la posición predicha respecto al asociado a la posición dada por ADS.B.

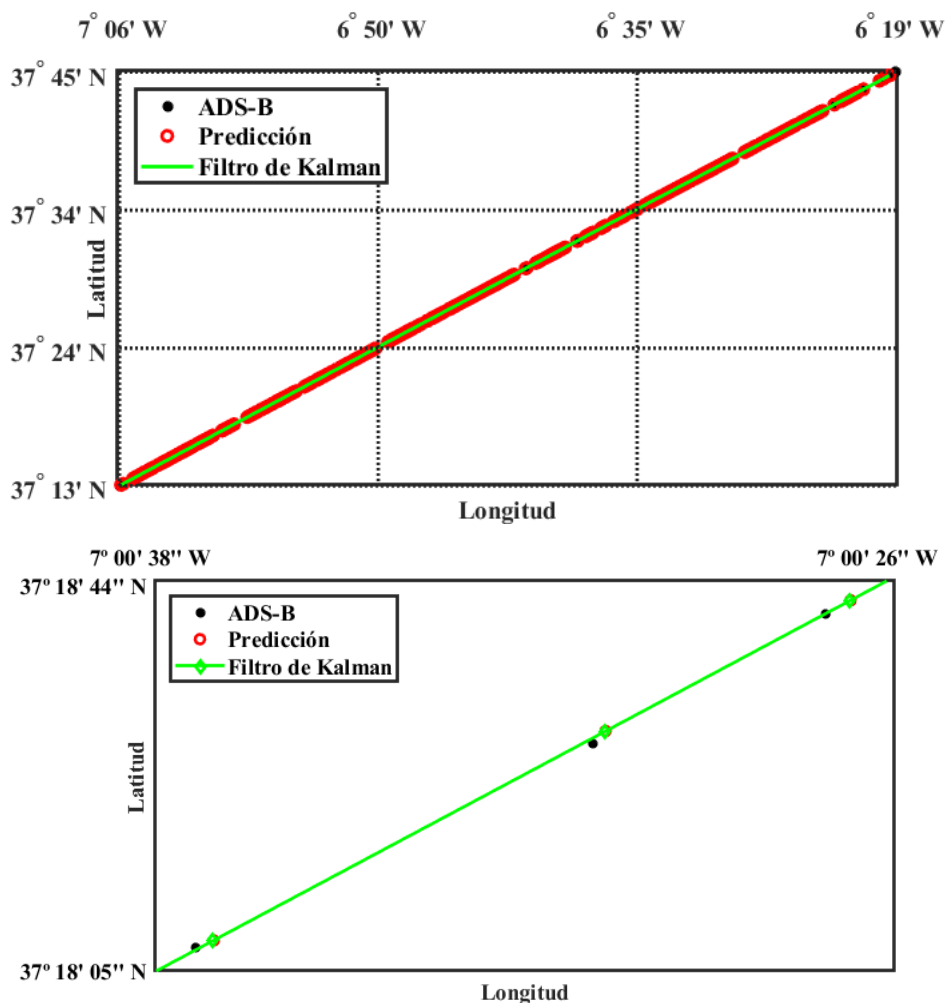


Figura 4.2. Trayectoria rectilínea completa y vista en detalle.

En la Figura 4.3 se representa para cada instante de evaluación la desviación típica relacionada con las posiciones predicha, recibida por ADS-B y mejorada. En esta figura se observa cómo el error de la posición mejorada es siempre menor que el de los otros dos. En los primeros instantes, cuando han transcurrido menos de 10 segundos desde el inicio del filtro, es necesario destacar dos aspectos:

- Las dos primeras posiciones, así como el error asociado, corresponden a la obtenida por ADS-B.
- Como aún no se han superado los 10 segundos, para la aplicación del Filtro de Kalman se toman posiciones cuya diferencia temporal es menor y, como ya se sabe, cuanto menor sea la diferencia de tiempo mayor es el error asociado a la predicción. Este hecho explica los primeros valores que se obtiene para el error de predicción.

Con todo ello, una vez se han superado los 10 segundos desde el inicio del filtro su comportamiento mejora notablemente. Prueba de ello es el hecho de que a partir de los 15 segundos se consigue reducir 3 veces el error que se tendría sólo con la posición dada por el ADS-B, mejora que se hace más evidente con el tiempo, llegando a estabilizarse en torno a $2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ$ para la latitud y $2.5 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ$ para la longitud.

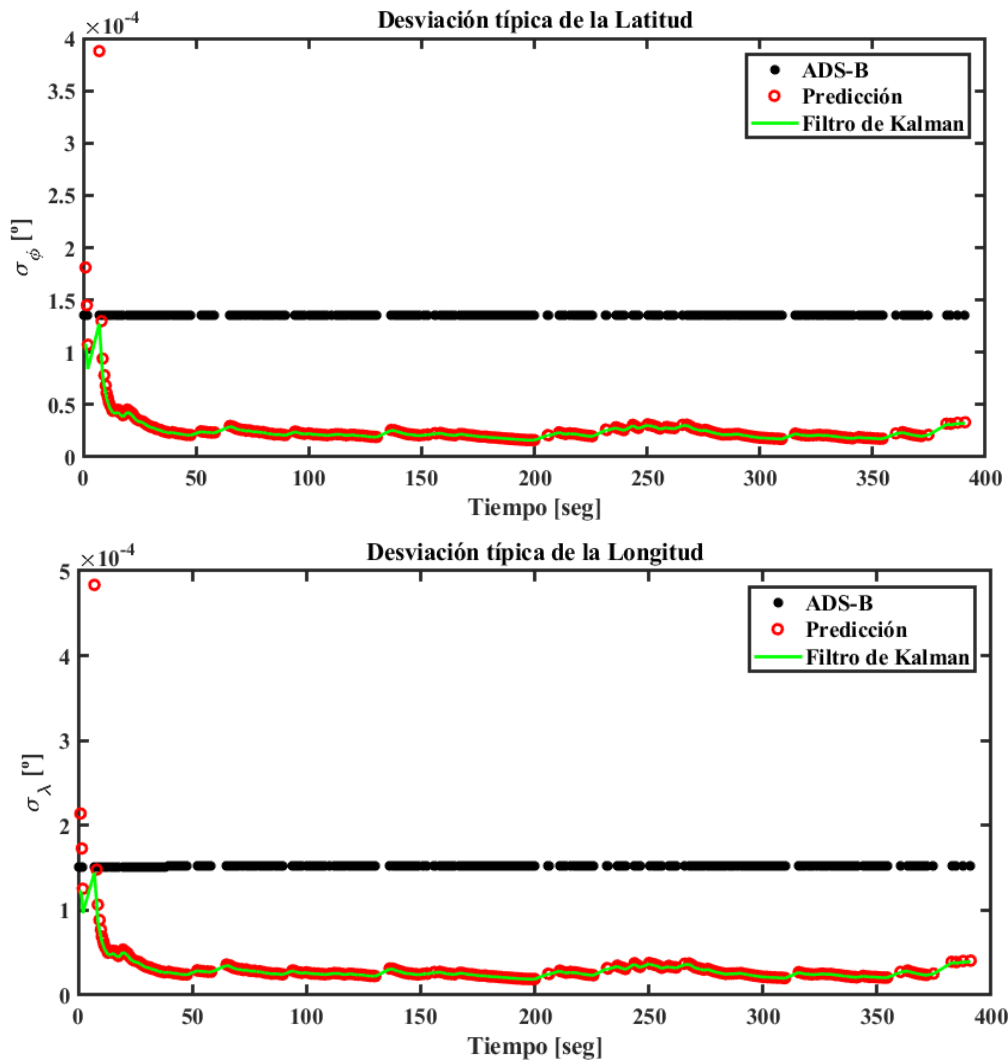


Figura 4.3. Evolución de la desviación típica de la posición para una trayectoria rectilínea

Por otro lado, para poder comprobar la evolución del curso a lo largo de este tramo se puede consultar la Figura 4.4. En esta figura se representa tanto el curso calculado como el rumbo proporcionado por ADS-B. Anteriormente se explicó que la comparación entre estas variables no es directa pues el viento puede hacer que no coincidan, sin embargo, es una forma de poder comprobar que ambos parámetros son cualitativamente similares, es decir, que ambos muestran la misma evolución a lo largo del tiempo y que la diferencia entre las dos medidas es pequeña.

Además, el curso se ha calculado a partir del norte geográfico mientras que el rumbo viene dado tomando el norte magnético como referencia. Por tanto, para ser más riguroso en la comparación se ha decidido tomar como referencia común el norte geográfico. Para transformar de una referencia a otra se ha usado la siguiente expresión:

$$N_{geo} = N_{mag} + \delta \tag{4-41}$$

Donde δ corresponde a la declinación magnética, la cual se ha obtenido a partir de la Generación 12 (válido entre los años 1900 y 2020) del Modelo “Campo Geomagnético Internacional de Referencia (*International Geomagnetic Reference Field*). Este valor es proporcionado por la función “igrfmm” de Matlab.

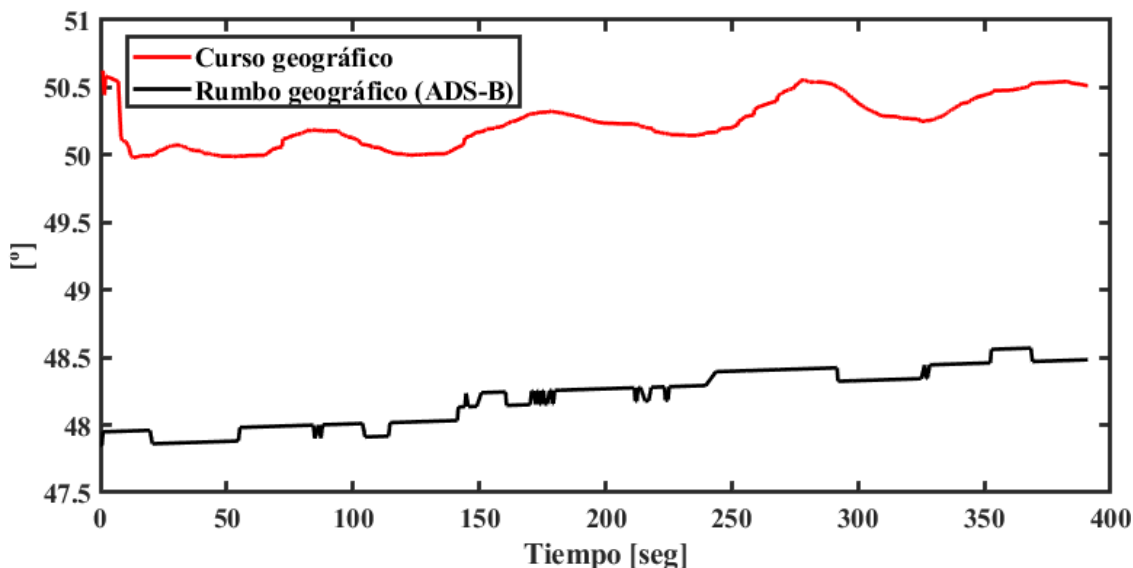
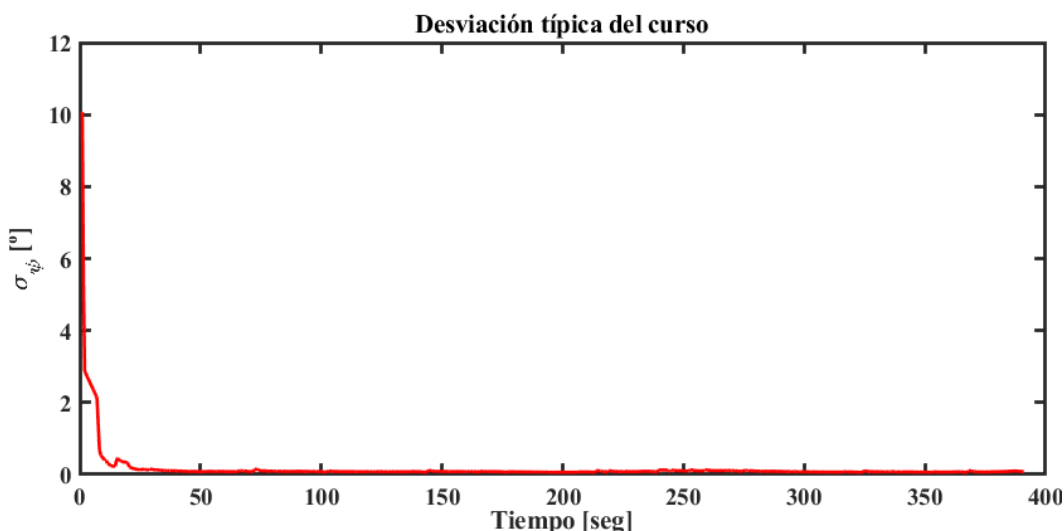


Figura 4.4. Comparación entre el curso y rumbo geográfico para una trayectoria rectilínea

A la vista de la Figura 4.4 se observa que ambos parámetros prácticamente se mantienen constantes a lo largo del tiempo si se considera permisible esas pequeñas oscilaciones. Además, se puede deducir que el viento provoca una desviación de, aproximadamente, 2° entre el curso y el rumbo.

Si se observa la evolución de la desviación típica asociada al curso, representada en la Figura 4.5, llama la atención que en los primeros instantes el error sea elevado, entre 2° y 10° . Esto se debe a la poca diferencia de tiempo entre las posiciones que se están tomando para el cálculo del curso. Sin embargo, a partir de 10 segundos se estabiliza rápidamente en torno a 0.1° .

Además, también se ve afectado por la posición que se está tomando como origen del segmento de vuelo para calcular el curso. Es decir, mientras se analicen los 10 primeros segundos de una trayectoria el inicio del segmento se corresponde con la primera posición dada por ADS-B. Una vez se superan los 10 segundos desde el inicio de la trayectoria analizada la posición inicial viene dada por el Filtro de Kalman, por lo que su error es menor y esto afecta de manera directa al error del curso.



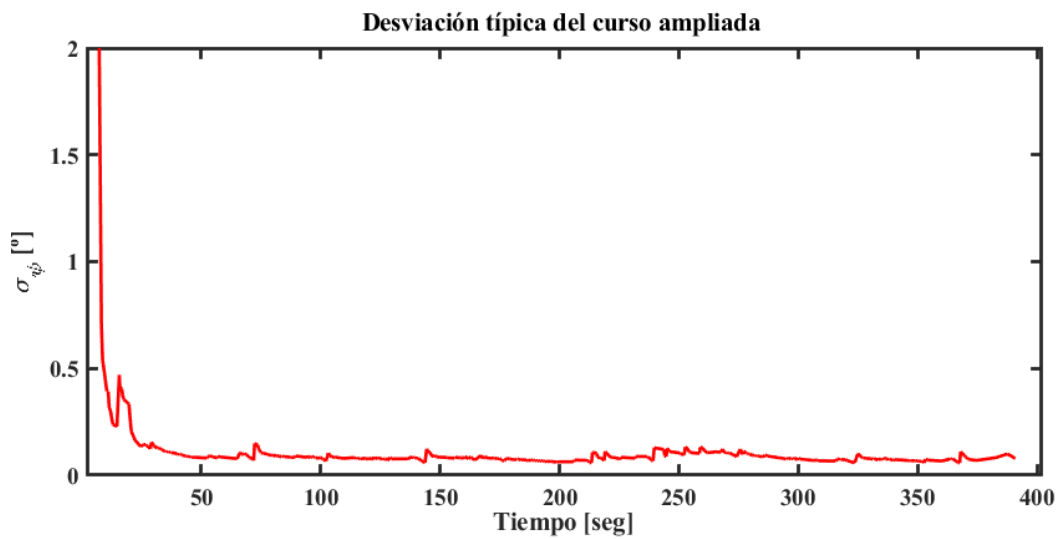


Figura 4.5. Desviación típica del curso geográfico para una trayectoria rectilínea

Otro de los parámetros principales, la velocidad respecto a tierra, se representa en la Figura 4.6. En esta figura se compara la evolución de la velocidad dada por ADS-B con la velocidad calculada a partir de las posiciones anteriores.

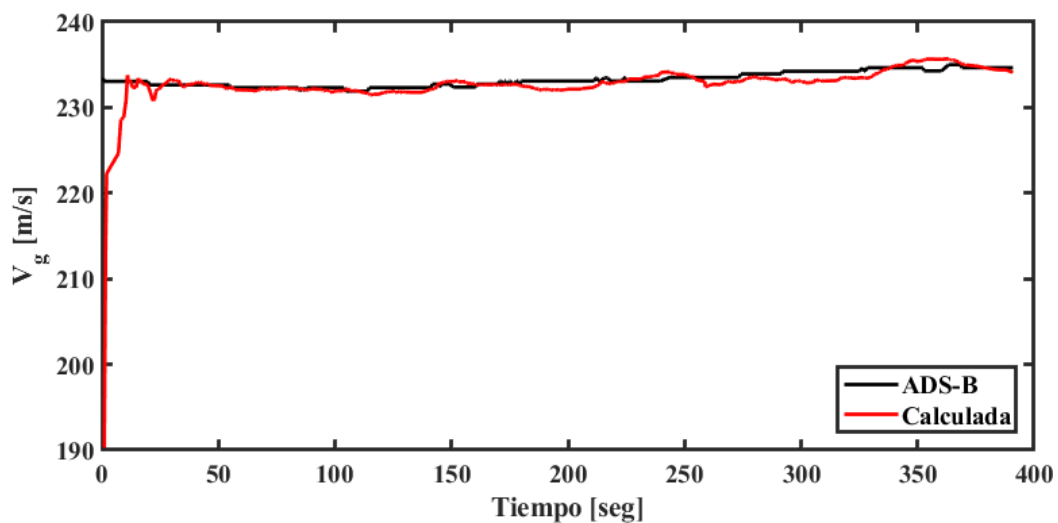


Figura 4.6. Comparación entre la velocidad respecto a tierra dada por ADS-B y la calculada a partir de la posición para una trayectoria rectilínea

También llama la atención la gran diferencia entre ambas magnitudes en los primeros instantes de la trayectoria. Esta diferencia se traduce en un mayor error, como se refleja en la Figura 4.7. Al igual que sucedía con el curso se tiene una elevada desviación típica al inicio debido a la obtención de la velocidad a partir de posiciones muy próximas. Sin embargo, este error cae rápidamente una vez aumenta la diferencia temporal entre las posiciones comparadas llegando a estabilizarse en torno a 0.2 m/s.

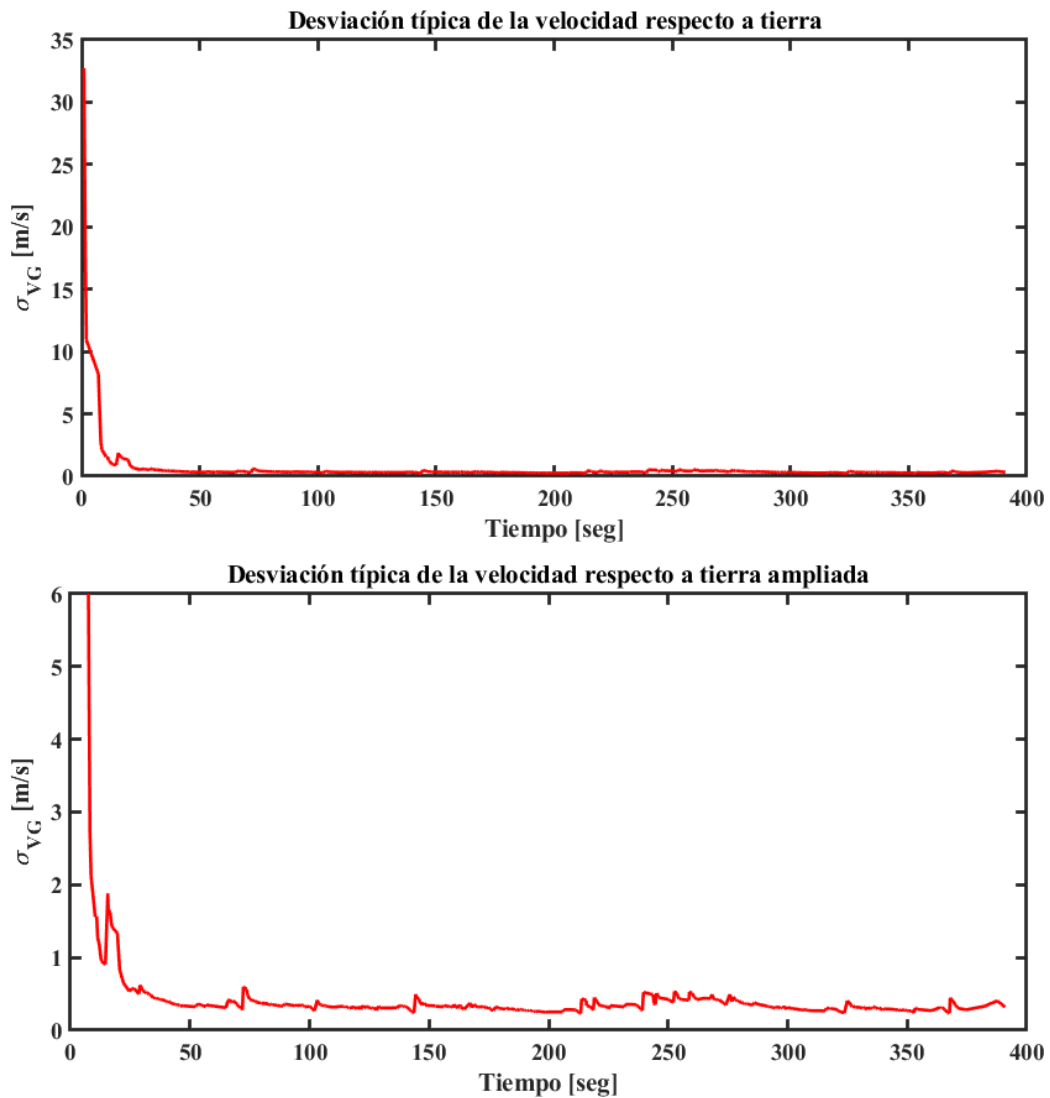


Figura 4.7. Desviación típica de la velocidad respecto a tierra para una trayectoria rectilínea

4.3.2 Trayectoria con viraje

Para ilustrar el comportamiento del Filtro de Kalman durante un viraje se ha tomado la trayectoria seguida por la aeronave con distintivo de llamada "34110C" el día 1 de julio de 2013 durante la fase de aproximación. Al igual que se realizó para la trayectoria rectilínea, en la Figura 4.8 se muestra la trayectoria definida tras aplicar el Filtro de Kalman junto con las posiciones predicha y proporcionada por ADS-B para cada instante.

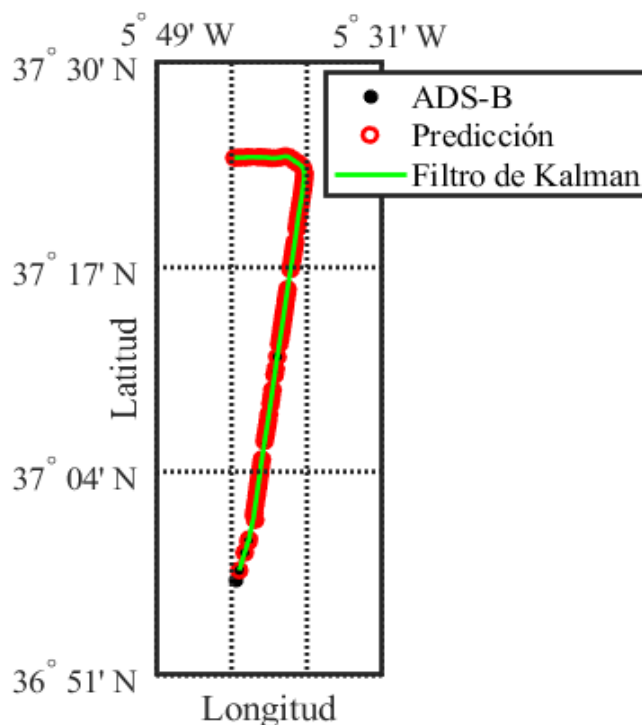


Figura 4.8. Ejemplo de trayectoria con viraje

Como ya se mencionó en el apartado 4.2.1 los virajes presentan la peculiaridad de que el intervalo temporal de evaluación se reduce para mejorar la predicción de dicho viraje a partir de segmentos rectilíneos. Para ilustrar gráficamente la mejora en el seguimiento del viraje aplicando esta corrección se propone comparar los resultados obtenidos en la Figura 4.8 con los que se obtendrían si no se corrigiera el intervalo temporal de evaluación entre posiciones y se mantuviera constantemente en 10 segundos, representado en la Figura 4.9.

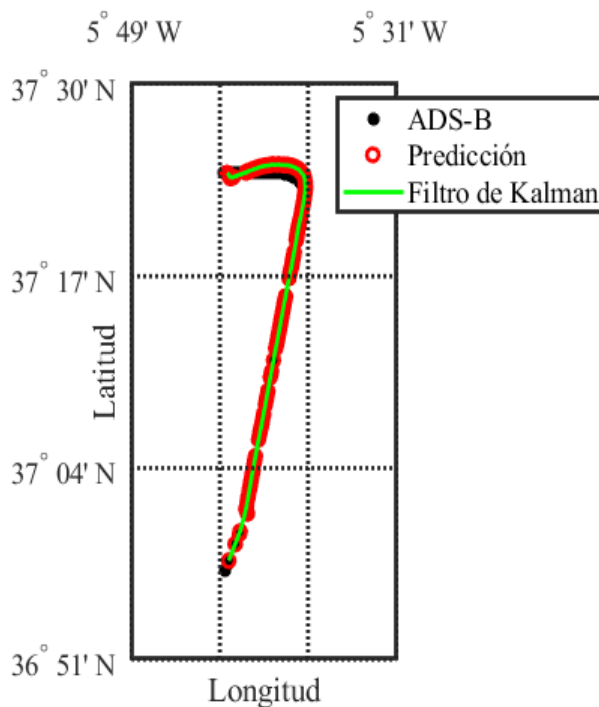


Figura 4.9. Ejemplo de trayectoria con viraje sin aplicar la corrección del intervalo temporal de evaluación

A la vista de estos resultados se demuestra una mejora notable en el seguimiento del viraje como resultado de un filtro más ágil. Sin embargo, como consecuencia de reducir el intervalo de evaluación y tomar posiciones más próximas entre sí se obtiene un aumento inevitable de la desviación típica asociada a la posición.

A continuación, en la Figura 4.10 se muestra la evolución de la desviación asociada a la latitud y longitud cuando. En esta representación se observan diferentes intervalos en los que aumenta la desviación típica. Según sus características estos incrementos se asocian a dos fenómenos diferentes:

1. Durante 5 intervalos (aproximadamente, entre 10 y 50 segundos; 95 y 115 segundos; 150 y 200 segundos; 250 y 270 segundos; 300 y 315 segundos después de iniciarse el análisis de la trayectoria) se pierde la señal, lo que conlleva un aumento del error de predicción y, por tanto, también de la desviación típica asociada a la posición mejorada. Aún así, siempre se obtiene un valor menor que el que se tendría teniendo únicamente en cuenta la posición predicha o la dada por ADS-B.
2. El viraje se inicia a partir de los 380 segundos desde el inicio de la trayectoria. Este hecho lleva asociado un incremento de la desviación típica como consecuencia de reducir el intervalo de evaluación. En la Figura 4.11 se muestra con más detalle el efecto del viraje sobre la desviación típica asociada a la posición. En esta representación se observa un aumento de la desviación típica, especialmente rápido al inicio del viraje.

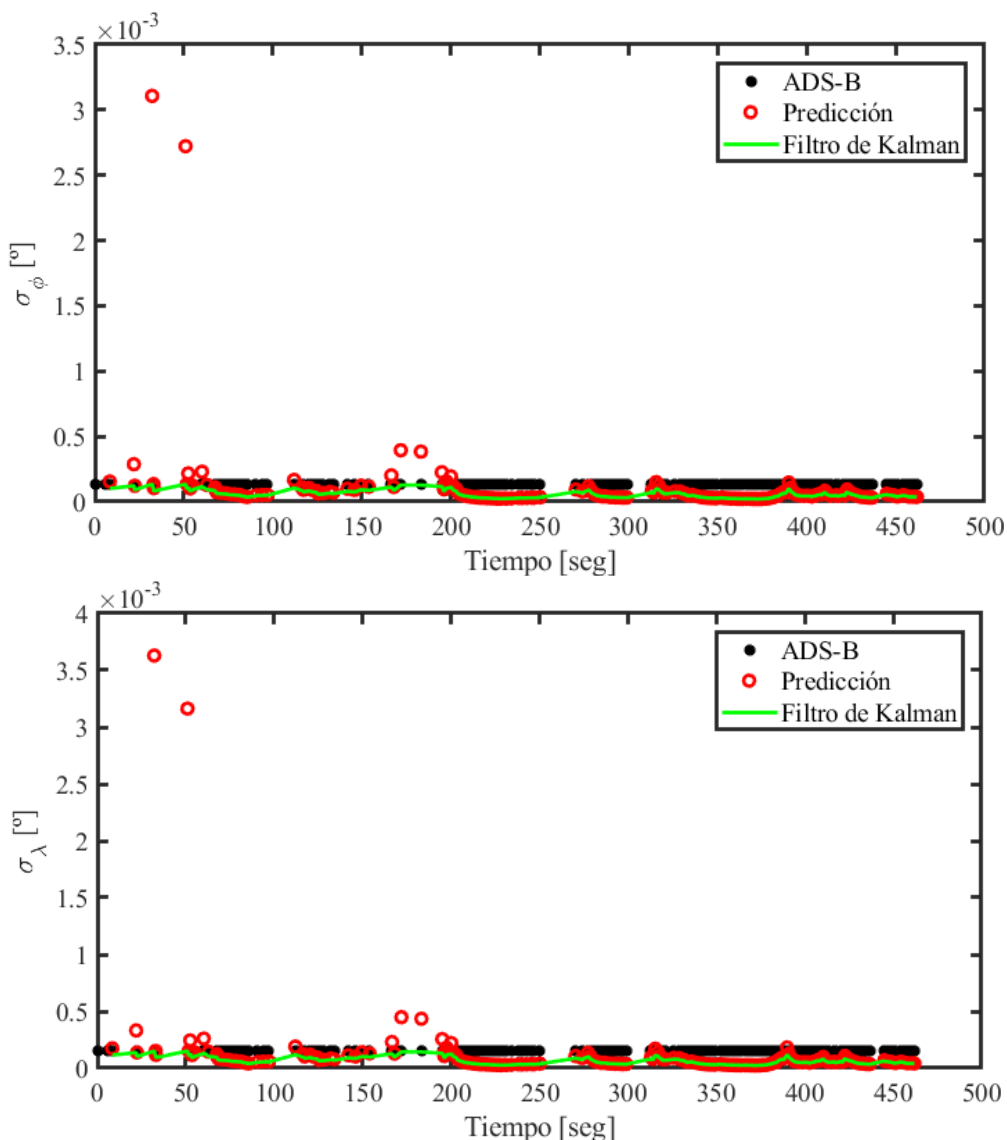


Figura 4.10. Evolución de la desviación típica de la posición para una trayectoria con viraje

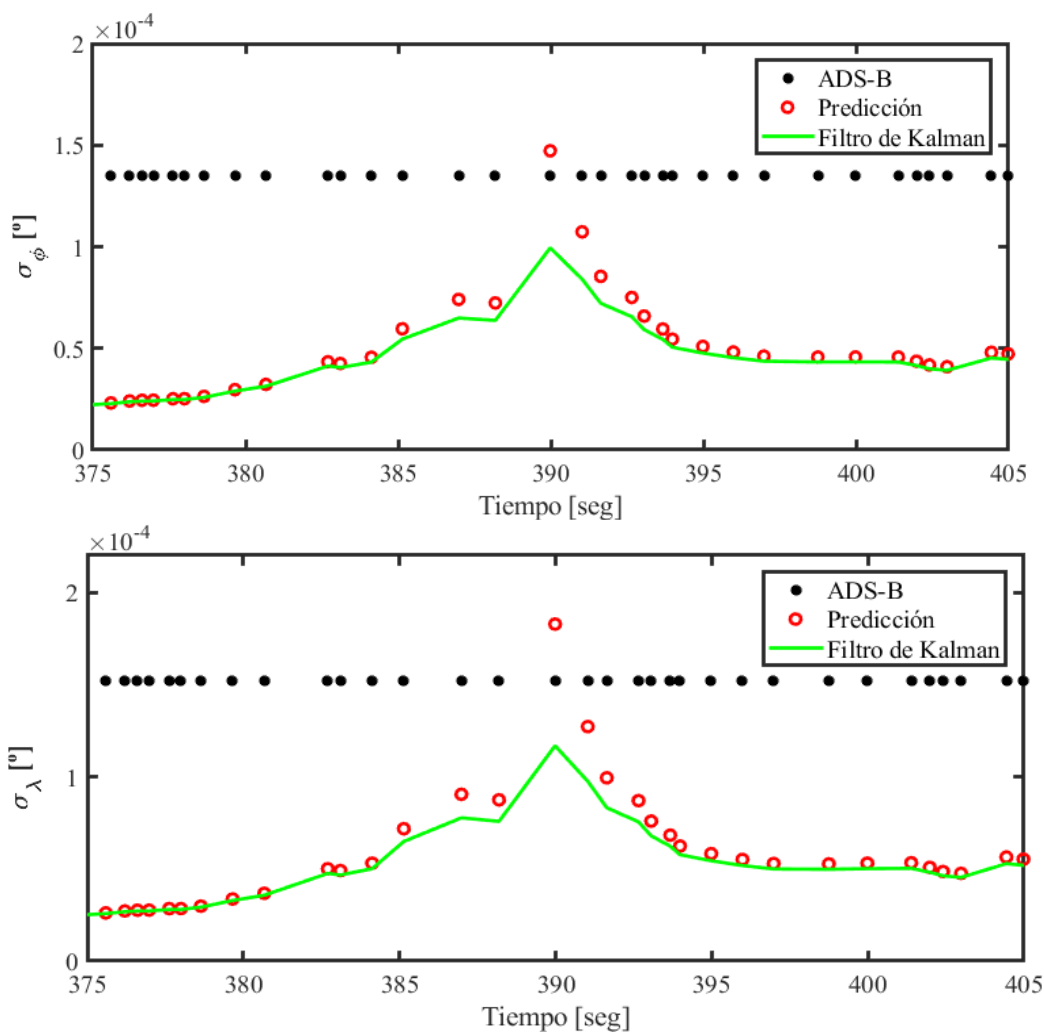


Figura 4.11. Representación ampliada del efecto del viraje sobre la desviación típica de la posición

Para el caso del viraje es especialmente interesante la comparación entre el curso y el rumbo. Esta comparación se muestra en la Figura 4.12 de manera similar a la seguida para la trayectoria rectilínea.

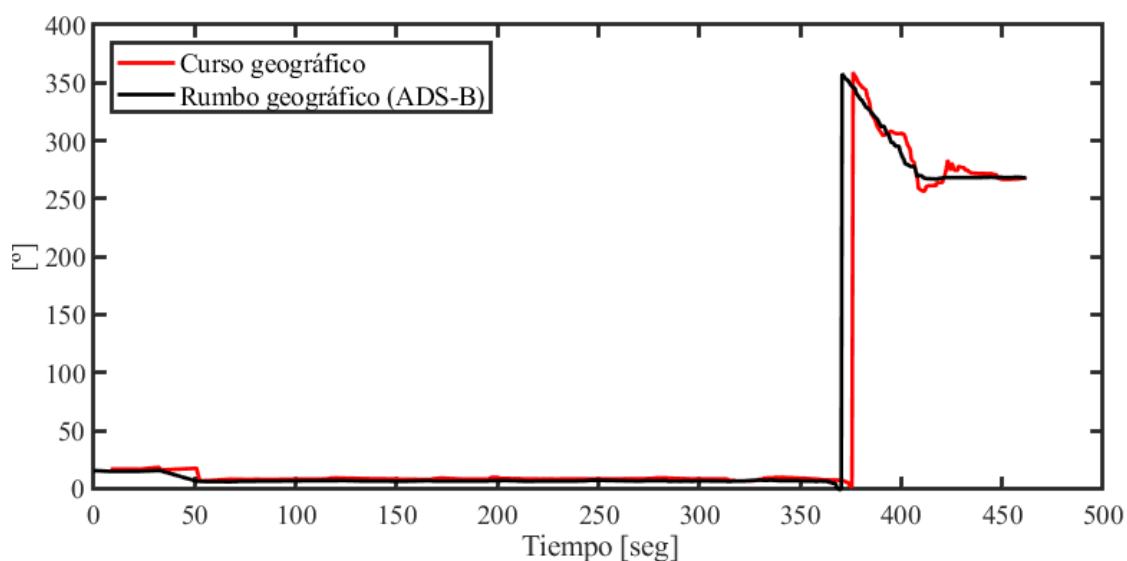


Figura 4.12. Comparación entre el curso y rumbo geográfico para una trayectoria con viraje

Al igual que sucedía para el caso anterior, mientras la aeronave se desplaza en una dirección constante tanto el curso como el rumbo presentan un comportamiento similar, siendo la diferencia entre ellas de,

aproximadamente, 2°. Sin embargo, cuando se produce el viraje se produce un retraso en la evolución del curso respecto al rumbo debido al intervalo temporal de evaluación, como era de esperar. Aproximadamente, el retraso en la evolución del curso es de 8 segundos.

En cuanto a la desviación típica asociada al curso, ésta se representa en la Figura 4.13. Observando estos resultados llama la atención la existencia de 4 intervalos en los que la desviación típica aumenta, llegando a valores entre los 4° y 14° de desviación. Estos 4 intervalos se pueden diferenciar según el origen de dicho aumento:

- Los tres primeros intervalos (aproximadamente, entre 10 y 50 segundos; 170 y 200 segundos; y 315 y 320 segundos después de iniciarse el análisis de la trayectoria) este incremento de la desviación típica se debe a la pérdida de señal, lo que provoca que al volver a producirse la recepción de datos ADS-B el intervalo de evaluación disminuye.
- El cuarto intervalo (aproximadamente, entre 380 a 425 segundos después de iniciarse el análisis de la trayectoria) se debe tanto a la reducción del intervalo de evaluación durante el viraje como a la recuperación de dicho intervalo de evaluación una vez finaliza el viraje. Es decir, durante el viraje se reduce la diferencia de tiempo entre las posiciones tomadas para calcular el curso, pero una vez se detecta que el viraje finaliza se produce el proceso contrario, poco a poco se aumenta la diferencia temporal entre las posiciones hasta alcanzar los 10 segundos. Este proceso de corrección del intervalo de evaluación introduce cierta inestabilidad, efecto que se observa en la Figura 4.13.

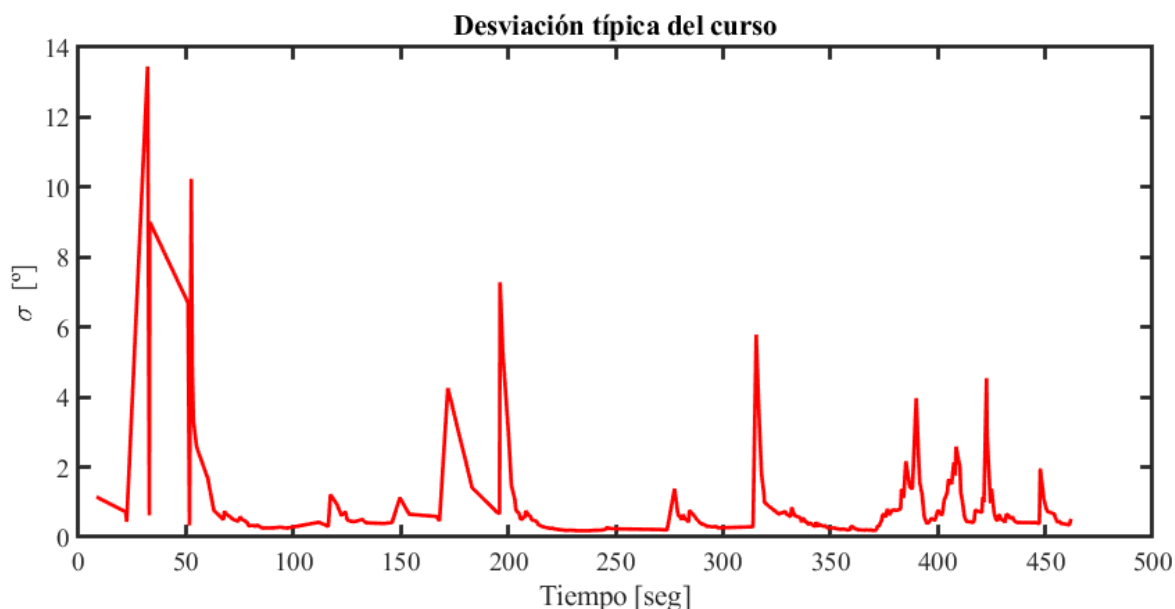


Figura 4.13. Desviación típica del curso geográfico para una trayectoria con viraje

En relación a la velocidad, al tratarse de una maniobra de aproximación, va disminuyendo con el tiempo, como se observa en la Figura 4.14. Esta continua disminución hace que la velocidad respecto a tierra calculada a partir de la posición sea más inestable que para el caso de la trayectoria rectilínea. Además, en relación a lo mencionado para el curso durante el viraje, la mayor diferencia entre la velocidad proporcionada por ADS-B y la obtenida a partir de las posiciones anteriores se produce durante el tramo de viraje y de su posterior corrección, lo que refuerza la importancia de tomar un intervalo de evaluación adecuado.

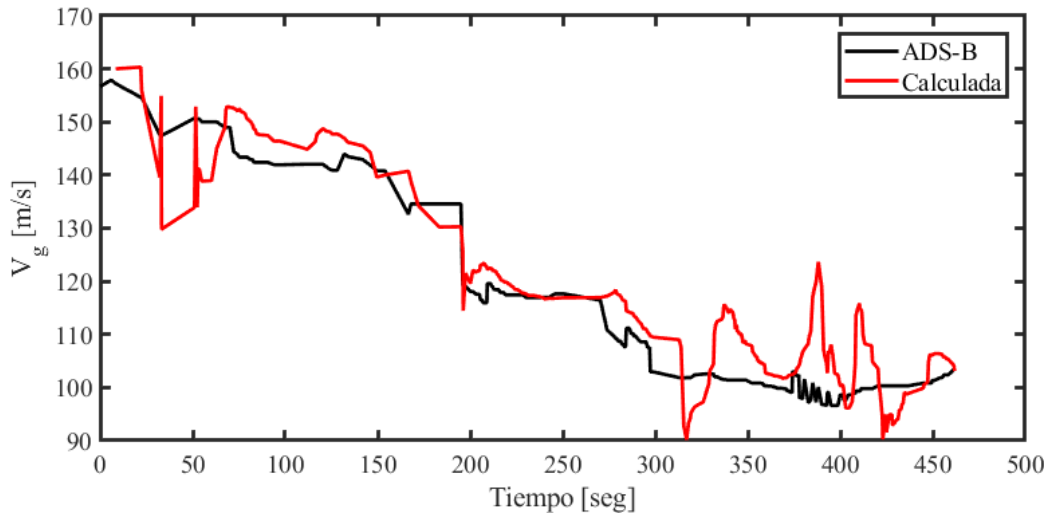


Figura 4.14. Comparación entre la velocidad respecto a tierra dada por ADS-B y la calculada a partir de la posición para una trayectoria con viraje

Observando la evolución del error de la velocidad en la Figura 4.15 se tiene que la desviación típica presenta una evolución similar a la del curso, en el que se distinguían 4 intervalos en los que se producía un aumento de dicha desviación típica. Por lo tanto, como cabe de esperar, el origen de dicho incremento de la desviación típica es el mismo que el descrito para el caso del curso.

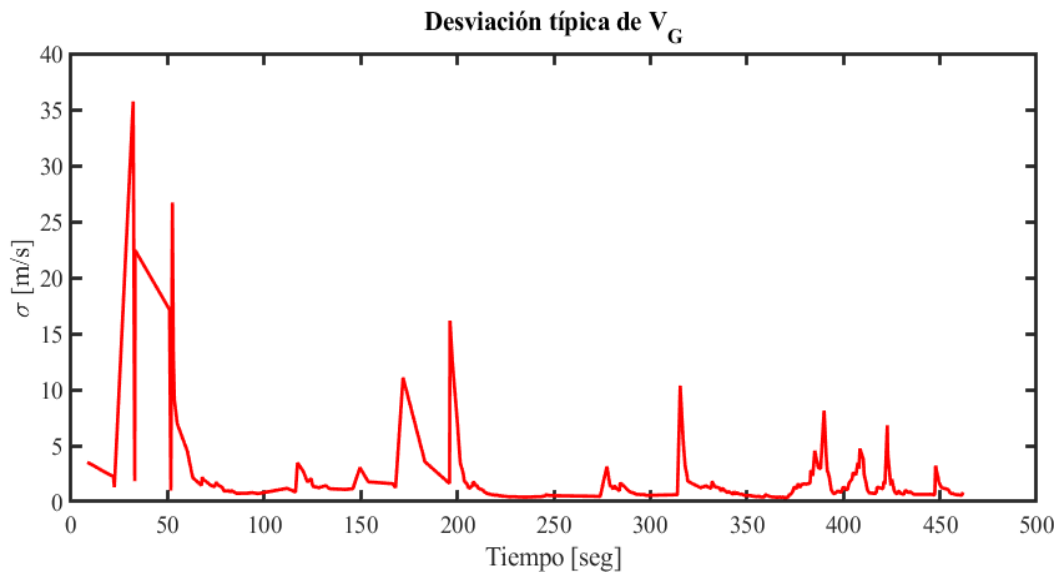


Figura 4.15. Desviación típica de la velocidad respecto a tierra para una trayectoria con viraje

5 DISTANCIA MÍNIMA PREDICHA Y REAL

En este punto se dispone de la siguiente información para cada una de las aeronaves rastreadas:

- Trayectoria mejorada: conjunto de puntos obtenidos tras aplicar el Filtro de Kalman, así como la desviación típica asociada a cada posición.
- Instante de tiempo para cada posición mejorada. Es importante tener en cuenta que la última posición de cada aeronave rastreada puede corresponder a instantes diferentes.
- Curso y velocidad respecto a tierra de la aeronave a lo largo de su trayectoria.

Por lo tanto, partiendo de esta información, el objetivo de este capítulo es doble:

1. Predecir la distancia mínima entre aquellas aeronaves que se aproximan, así como el instante en el que se produce.
2. Determinar la separación mínima real entre las aeronaves mediante un análisis *a posteriori*. Esta separación mínima se obtiene a partir de la posición mejorada.

Para ello es necesario tener en cuenta las siguientes consideraciones tomadas:

- La distancia mínima y el instante en el que se producirá se obtienen por parejas.
- Las dos aeronaves que forman la pareja deben estar aproximándose entre ellas. En caso contrario no tiene sentido intentar predecir cuál será el punto de mínima distancia.

5.1 Predicción de la distancia mínima

El proceso que permite obtener la separación mínima entre las aeronaves rastreadas consta de los siguientes pasos:

1. Actualizar la posición de la aeronave cuya posición se haya recibido antes.
2. Determinar si las dos aeronaves se aproximan.
3. Propagar las trayectorias.
4. Obtener la distancia mínima.

A continuación, se describe cada uno de estos pasos.

5.1.1 Actualización de la posición de la aeronave cuya posición se haya recibido antes

Por lo general, la última posición de cada una de las aeronaves de la pareja se tiene en instantes diferentes. Por esta razón, es necesario propagar tanto la posición como la desviación típica de aquella aeronave cuya última posición se haya obtenido antes. Para ello se vuelve a hacer uso de las ecuaciones (4-5) y (4-6).

De esta manera, es posible conocer la posición de cada aeronave en el mismo instante de tiempo (se tendrá para una aeronave una posición estimada mientras que para la otra aeronave su posición es predicha) y, por tanto, poder compararlas para determinar si las aeronaves se aproximan o se alejan.

5.1.2 Aproximación entre la pareja

Como se había mencionado anteriormente sólo tiene sentido predecir la distancia mínima entre dos aeronaves cuando éstas se estén acercando. Para determinar si una pareja de aeronaves se está aproximando el criterio

tomado se basa exclusivamente en las posiciones de cada una de ellas, al igual que se viene haciendo a lo largo del proyecto.

Como ya se sabe, la posición se trata de una variable estocástica de la cual se conoce su estimación del error. Por tanto, teniendo en cuenta este carácter estocástico, se considerará que dos aeronaves se aproximan o se alejan según términos probabilísticos. Es decir, si se considera que la separación entre dos aeronaves sigue una distribución normal y, además, es independiente de sus valores anteriores se tiene que:

$$D(t_k) \sim N(D_k, \sigma_{D_k}^2) \quad (5-1)$$

$$D(t_l) \sim N(D_l, \sigma_{D_l}^2) \quad (5-2)$$

Donde D_k se refiere a la estimación de la distancia entre dos aeronaves en el instante de evaluación, t_k , mientras que D_l se corresponde a la distancia entre las mismas aeronaves en un instante, t_l , anterior al instante de evaluación un tiempo Δt . Debido a que una gran diferencia temporal entre los dos instantes considerados podría dar lugar a una mala interpretación del comportamiento de las aeronaves se considera que la diferencia entre los instantes correspondientes a las dos distancias a comparar será lo más próxima posible a 30 segundos de diferencia, pero siempre que sobrepase los 15 segundos.

La separación entre las aeronaves A y B en un instante cualquiera, k , viene dada por la expresión:

$$D_k = R_t \cos(\sin(\phi_{A_k}) \sin(\phi_{B_k}) + \cos(\phi_{A_k}) \cos(\phi_{B_k}) \cos(\lambda_{B_k} - \lambda_{A_k})) \quad (5-3)$$

Al ser conocida la expresión que permite estimar la separación entre la pareja de aeronaves es posible conocer su incertidumbre, σ_D , aplicando el mismo procedimiento que el ya empleado en el capítulo 3 para la posición, el curso y la velocidad respecto a tierra. De esta manera, se tiene que:

$$y_3 = D_k \approx g_3(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) + \nabla g_3(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) \begin{bmatrix} \phi_{A_k} - \hat{\phi}_{A_k} \\ \lambda_{A_k} - \hat{\lambda}_{A_k} \\ \phi_{B_k} - \hat{\phi}_{B_k} \\ \lambda_{B_k} - \hat{\lambda}_{B_k} \end{bmatrix}, \quad (5-4)$$

donde el gradiente se define como:

$$\nabla g_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_k}{\partial \phi_{A_k}} & \frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{A_k}} & \frac{\partial D_k}{\partial \phi_{B_k}} & \frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{B_k}} \end{bmatrix}, \quad (5-5)$$

cuyas expresiones de las derivadas parciales se pueden consultar en Apéndice A.

Ya que se supone que los errores entre las aeronaves son independientes, y también entre las propias coordenadas la varianza corresponde a:

$$Vg_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{\phi_{A_k}}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\lambda_{A_k}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi_{B_k}}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\lambda_{B_k}}^2 \end{bmatrix}. \quad (5-6)$$

Por tanto, la desviación típica quedaría definida como:

$$\sigma_{D_k} = \sqrt{\nabla g_3(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) Vg_3(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) \nabla g_3(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k})^T} \quad (5-7)$$

$$\sigma_{D_k}^2 = \left(\frac{\partial D_k}{\partial \phi_{A_k}}\right)^2 \sigma_{\phi_{A_k}}^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{A_k}}\right)^2 \sigma_{\lambda_{A_k}}^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial \phi_{B_k}}\right)^2 \sigma_{\phi_{B_k}}^2 + \left(\frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{B_k}}\right)^2 \sigma_{\lambda_{B_k}}^2. \quad (5-8)$$

Una vez se conoce la distribución probabilística de la separación entre dos aeronaves para cualquier instante evaluado queda definir el criterio que permite determinar si esta pareja de aeronaves se aproxima o se aleja.

Lógicamente, desde un punto de vista determinista dos aeronaves se aproximan cuando la separación entre ellas disminuye con el tiempo. Trasladando esta idea a un proceso estocástico, como el seguido en este proyecto, se considera que dos aeronaves se aproximan cuando la probabilidad de que la separación en el instante de evaluación sea menor que la separación en un instante anterior es, como mínimo, del 90%. Este criterio se puede resumir en:

$$P(D_j > D_k) \geq 0.9. \quad (5-9)$$

Considerando que D_j y D_k son independientes entre sí y teniendo en cuenta las propiedades de la distribución normal para la diferencia entre variables aleatorias normales independientes se sabe que:

$$P(D_j > D_k) \sim N(D_k - D_j, \sigma_{D_k}^2 + \sigma_{D_j}^2) \quad (5-10)$$

5.1.3 Propagación de la posición

Cuando, siguiendo el criterio anterior, se determina que la pareja de aeronaves se aproxima, se procede a la propagación de la posición de cada una de ellas a partir del instante de evaluación y hasta un máximo de 20 minutos después. Para ello se vuelve a hacer uso de las ecuaciones (4-5) y (4-6).

Teniendo en cuenta que la predicción de la trayectoria futura se compone de predicciones discretas (trayectoria definida por posiciones en instantes concretos) es importante determinar el tiempo de paso de esta propagación, es decir, la diferencia temporal entre cada par de instantes consecutivos en los que se predice la posición. Por ejemplo, si dos aeronaves se desplazan a 240 m/s y en sentidos opuestos, al coger un tiempo de paso de predicción de 1 segundo se estaría cometiendo un error en la medida de 480 m. A su vez, un tiempo de paso pequeño supondría un elevado número de predicciones, las cuales podrían ralentizar demasiado la predicción. Por esta razón, como parámetro de diseño se ha decidido tomar 0.1 segundos como tiempo de paso, ya que conlleva un error asumible y el programa es capaz de procesarlo con fluidez.

Cuando se realiza la propagación de la posición, cuanto más se aleje la posición predicha mayor será la desviación típica asociada a dicha posición. Para poder conocer cómo se propaga la incertidumbre asociada a la posición se presenta en la Figura 5.1 la trayectoria predicha, en color rojo, para la aeronave con matrícula "4CA8D5" una vez se estabiliza el comportamiento del Filtro de Kalman.

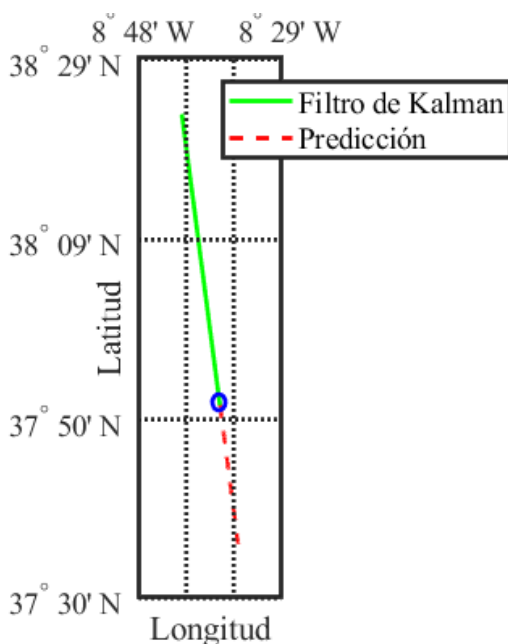
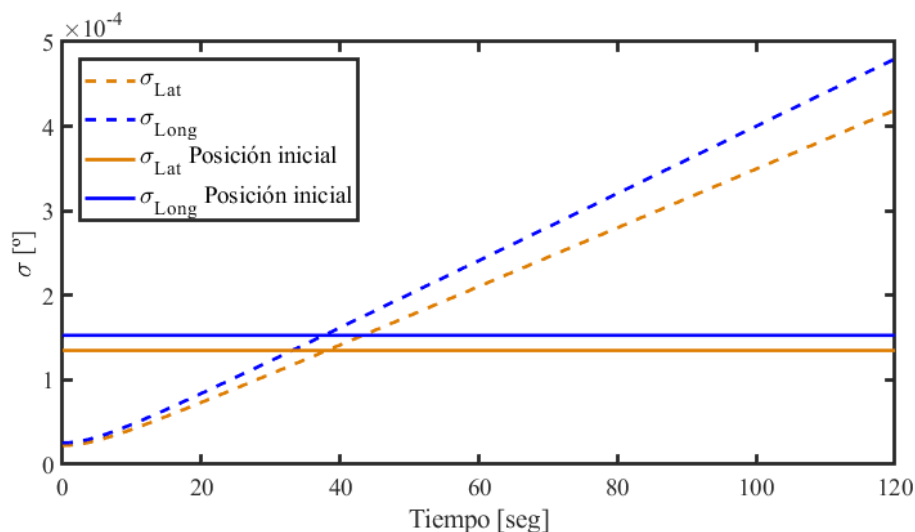


Figura 5.1. Ejemplo de trayectoria predicha

Durante esta etapa de predicción la incertidumbre asociada a la posición predicha crece con el tiempo de manera aproximadamente lineal, como se observa en la Figura 5.2. En esta figura se muestra la evolución de la desviación típica asociada a la latitud y longitud de la posición predicha junto con el valor de la desviación estándar de la posición dada por ADS-B en el punto en el que se inicia la predicción. En cada representación se presenta el mismo comportamiento, pero en diferentes unidades: en la representación superior la evolución de la desviación viene dada en grados mientras que en la inferior se expresa en metros, a fin de entender mejor cómo de relevante es la incertidumbre en cada instante durante la predicción.



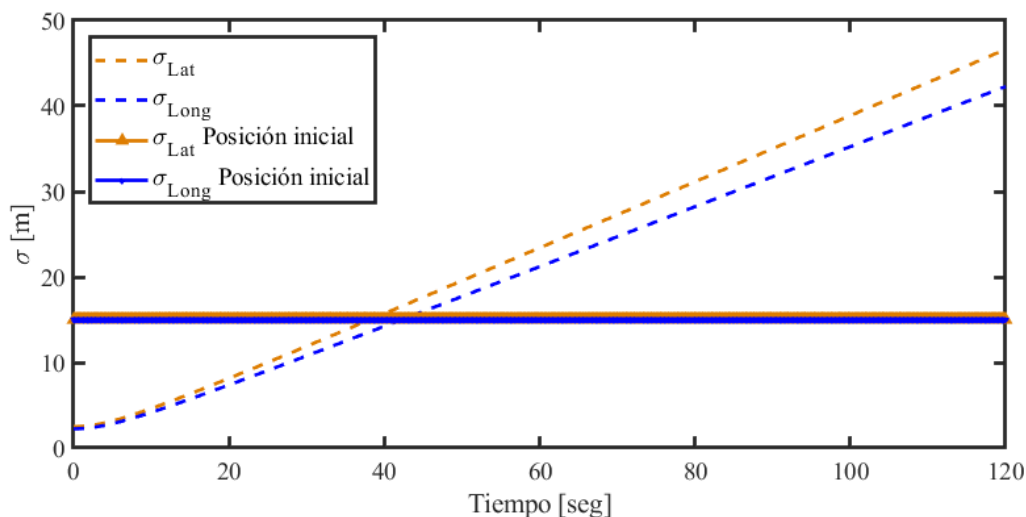
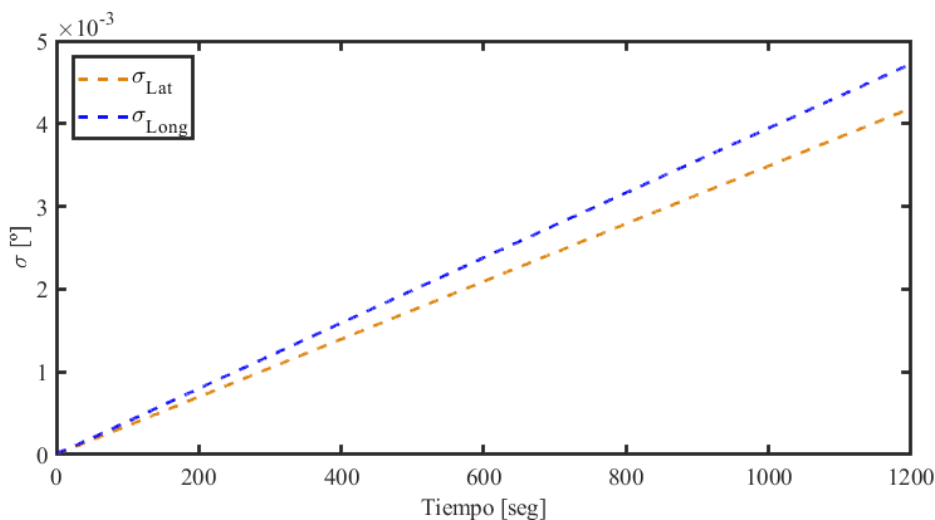


Figura 5.2. Evolución de la desviación típica de la posición predicha

En este ejemplo se observa que:

1. Exceptuando los primeros instantes durante la predicción, la desviación típica aumenta de manera lineal.
2. Aproximadamente, hasta 40 segundos después de iniciar la propagación de la posición el valor predicho es más preciso o “fiable” que la posición proporcionada por ADS-B en el instante de evaluación. Este hecho justifica la mejora que se obtiene en el seguimiento y predicción de la posición de una aeronave al aplicar el Filtro de Kalman diseñado.

Si se prolonga la predicción hasta un horizonte de 20 minutos, límite que se ha tomado para la predicción de la trayectoria de las aeronaves, se obtiene que la evolución de la desviación típica corresponde a la mostrada en la Figura 5.3. En esta representación se observa cómo cuando se predice la posición con 20 minutos de antelación, la incertidumbre asociada a su latitud es de, aproximadamente, 460 m, mientras que para la longitud es de 430 m.



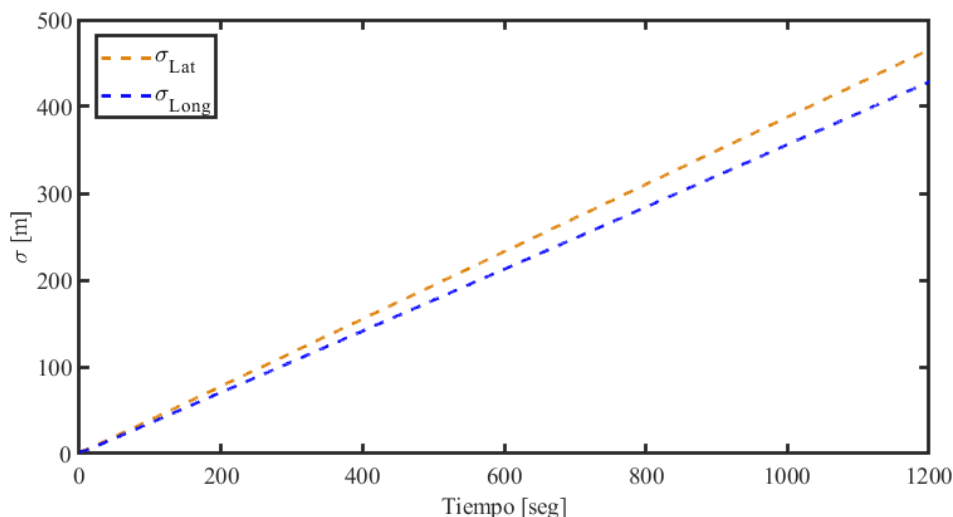


Figura 5.3. Evolución de la desviación típica para una predicción de 20 minutos

5.1.4 Distancia mínima predicha

Por último, a partir de la propagación de la trayectoria para cada aeronave de la pareja se obtiene la separación futura entre ellas, siendo posible detectar cuál es la distancia mínima y el instante en el que se estima que se alcanzará. En la Figura 5.4 se representa un ejemplo de cómo se obtiene la distancia mínima predicha para una pareja de aeronaves. Esta figura pretende ilustrar algunos de los conceptos principales como el punto en el que se inicia la predicción para cada aeronave de la pareja, la trayectoria predicha para cada una de ellas y el punto predicho de mínima separación.

De esta manera, es posible conocer la distancia mínima predicha, el instante en el que se produciría y el instante de evaluación en el que se inicia la predicción.

Este proceso se repite hasta que la aeronave se haya comparado con todas las aeronaves rastreadas en el instante de evaluación.

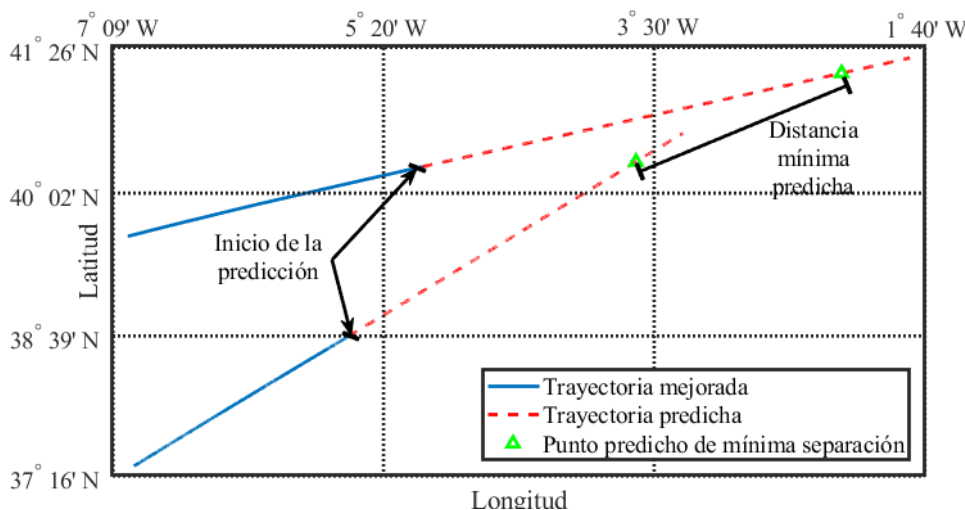


Figura 5.4. Figura ilustrativa de cómo se obtiene la distancia mínima predicha

5.2 Distancia mínima real

Para determinar la distancia mínima real, en cada instante de evaluación, independientemente de si la pareja de aeronaves se aproxima o se aleja, se determina la separación entre ellas en dicho instante. De esta manera, tras finalizar la lectura de todos los mensajes ADS-B recibidos y aplicarles el Filtro de Kalman a cada uno de ellos es posible conocer cómo evoluciona la distancia real entre cualquier pareja de las aeronaves rastreadas y, por tanto, la separación mínima alcanzada en la realidad, así como el instante en el que se produce (siempre que

exista algún tramo en el que ambas aeronaves se estén aproximando).

En la Figura 5.5 se muestra un ejemplo real que representa cómo suele ser normalmente la evolución de la separación entre aeronaves a lo largo del tiempo. En el eje horizontal se indica el tiempo transcurrido desde que se comienza a seguir a la primera aeronave de la pareja.

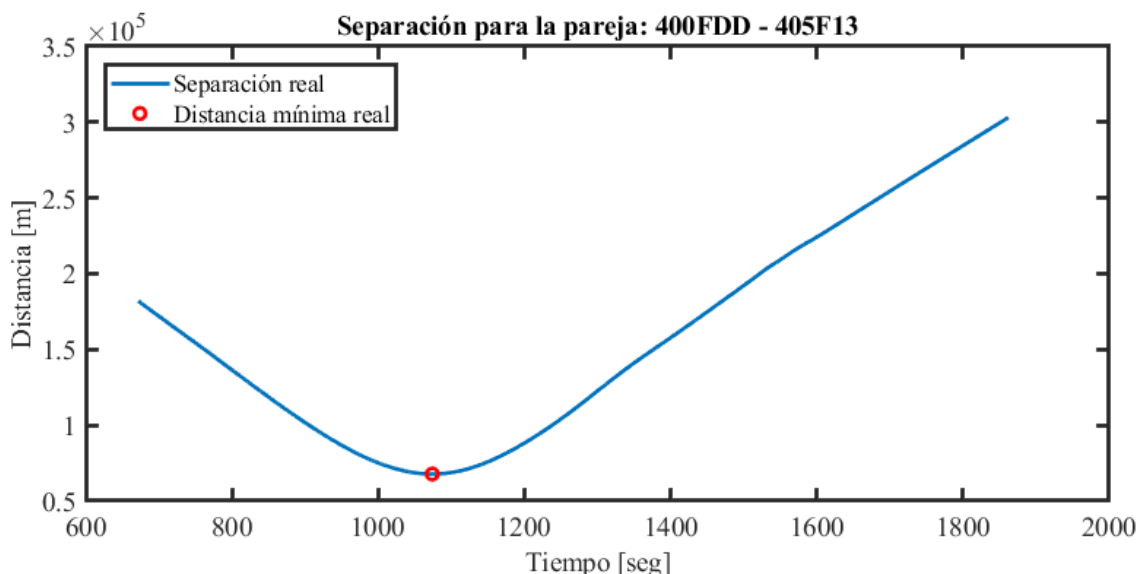


Figura 5.5. Ejemplo representativo de la evolución de la separación entre aeronaves con el tiempo

Sin embargo, puede darse también el caso, aunque no es muy común, en el que dos aeronaves presentan varios tramos de aproximación-alejamiento durante una misma trayectoria. Un ejemplo de esta situación se muestra en la Figura 5.6. Cada uno de estos tramos se analiza de manera independiente, pues cada vez que se produzca la aproximación entre ellas se realizará la predicción de la distancia mínima. De esta forma, estos casos se caracterizan por presentar diferentes valores mínimos relativos de la distancia entre la pareja de aeronaves en cuestión.

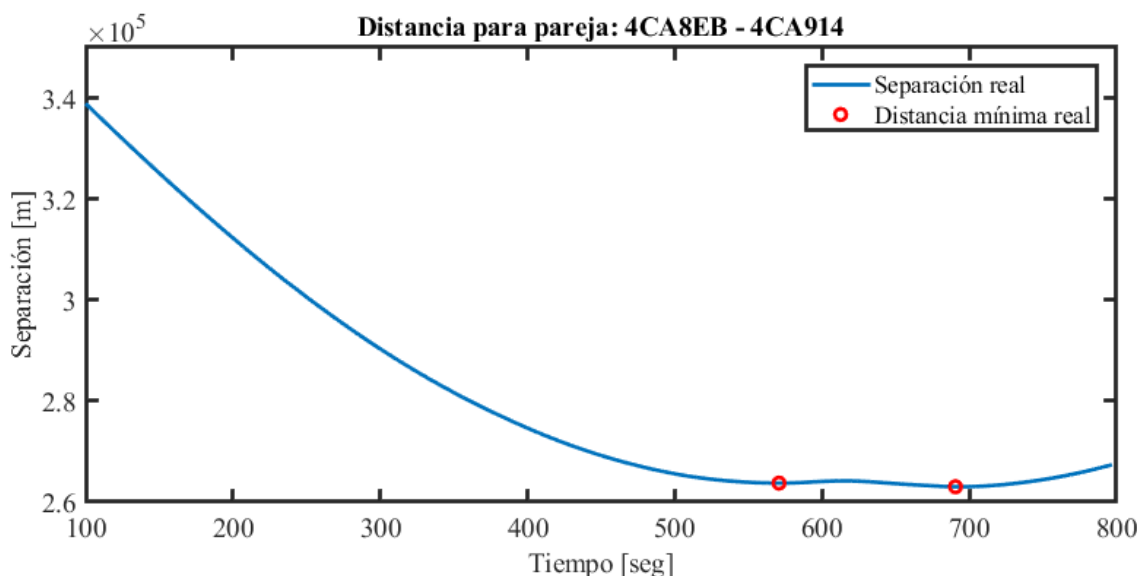


Figura 5.6. Ejemplo en el que una pareja de aeronave presenta dos distancias mínimas relativas

5.3 Comparación entre distancia mínima predicha y real

Llegados a este punto se dispone de la siguiente información para cada aeronave estudiada:

- Distancia mínima predicha con el resto de aeronaves rastreadas, junto con el instante en el que se alcanzaría dicha separación, para distintos instantes de predicción.

- Distancia mínima real con el resto de aeronaves rastreadas junto con el instante en el que se produce.

Esta información resulta realmente útil para poder cuantificar la precisión de la predicción de la distancia mínima entre aeronaves según el modelo desarrollado.

Continuando con los ejemplos mostrados anteriormente en el apartado 5.2 se muestra a continuación para cada caso las diferentes predicciones de distancia mínima. De esta manera, es posible conocer visualmente cómo de preciso es el modelo de predicción desarrollado.

En la Figura 5.7 se añade a la evolución de la separación real para la pareja 400FDD – 405F13 el conjunto de las distancias mínimas predichas junto con el instante en el que se estima que se alcanzarán. Para este caso las predicciones se agrupan en torno a la distancia mínima real, pero no para todas las parejas de aeronaves se alcanza este nivel de precisión.

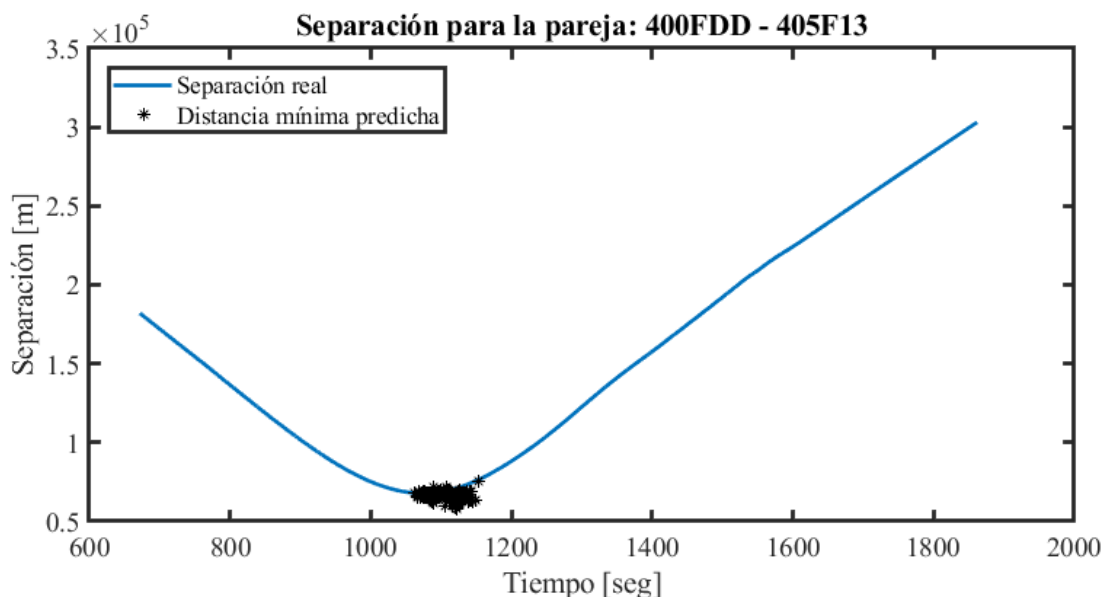


Figura 5.7. Ejemplo representativo de la predicción de la distancia mínima

Para la pareja 4CA8EB – 4CA914 la comparativa es más llamativa debido a los dos tramos de aproximación que presenta. Para este caso concreto se tiene que las predicciones no son tan precisas como en el ejemplo anterior, especialmente para el primer tramo, como se muestra en la Figura 5.8.

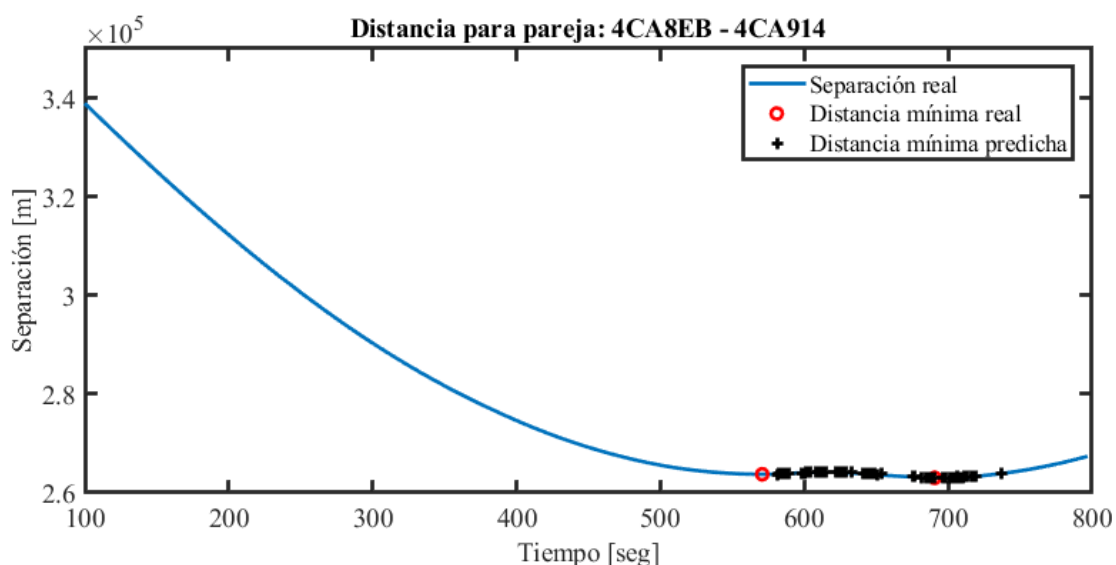


Figura 5.8. Ejemplo representativo de la predicción de la distancia mínima cuando se tienen diferentes tramos de aproximación

Este hecho es más fácil de entender si se observan las trayectorias de cada una de las aeronaves, representadas

en la Figura 5.9. En esta representación la aeronave 4CA8EB se desplaza en dirección noreste y luego vira hacia el suroeste, mientras que la aeronave 4CA914 lo hace en dirección suroeste. Como se puede ver, el primer punto de separación mínima, marcado por un círculo rojo, se produce antes de un viraje por parte de la aeronave 4CA8EB. Dicho viraje se realiza de manera que durante unos instantes las dos aeronaves se vuelven a aproximar, lo que provoca que se vuelva a obtener otro punto de mínima separación. Además, también se observa la pérdida de señal por parte de la aeronave 4CA8EB.

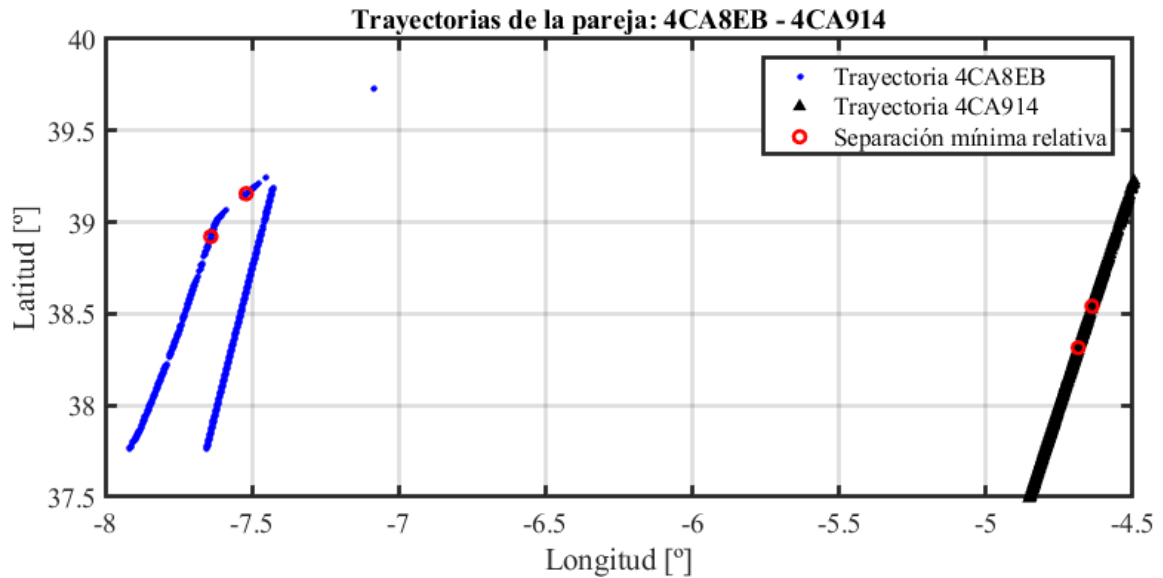


Figura 5.9. Representación de la trayectoria para una pareja de aeronaves con diferentes tramos de aproximación

6 RESULTADOS

Los ejemplos mostrados anteriormente son una muestra de la diversidad de los casos analizados. Por esta razón se propone analizar esta pluralidad de casos de forma global, siendo el objetivo de este análisis conocer la precisión de la predicción según su antelación respecto al instante de distancia mínima real. Por ello, tras aplicar el Filtro de Kalman a cada uno de los mensajes recibidos y realizar posteriormente las predicciones de las separaciones entre las diferentes aeronaves se llega al análisis *a posteriori*.

Para este estudio, a partir del instante en el que se realiza la predicción y aquel en el que se produce realmente la separación mínima, se obtiene la antelación con la que se realiza la predicción. De esta forma, las predicciones se ordenan según su antelación y se agrupan cada 5 segundos. Es decir, el primer grupo reúne aquellas predicciones realizadas entre 0 y 5 segundos antes de alcanzar el instante de mínima separación, el segundo grupo reúne aquellas predicciones con una antelación entre 5 y 10 segundos, y así sucesivamente.

Para cuantificar cómo de buena es cada predicción se ha decidido tomar como parámetros de evaluación los dos siguientes:

- Valor medio del error de predicción, μ_{e_p} . Para cada una de las predicciones que componen cada grupo se calcula el error de predicción, es decir, la diferencia entre la distancia predicha y la real. A partir de esta información es fácil obtener el valor medio de la diferencia entre distancias cada 5 segundos.
- Desviación típica del error de predicción, σ_{e_p} . El procedimiento es similar al seguido para el valor medio, salvo que en este caso interesa la dispersión de las medidas que conforman cada grupo o, en otras palabras, la desviación existente para cada grupo entre el error de cada una de las predicciones y su valor medio.

Con esta definición de los parámetros de evaluación se estaría estimando la precisión de la predicción sólo prestando atención al error de predicción absoluto, sin tener en cuenta el valor de la distancia mínima. Es decir, se estaría dando el mismo peso o relevancia si se obtiene un error de predicción de 50 m cuando la separación mínima entre las aeronaves es de 10 km que para otro caso en el que el error es también de 50 m, pero la separación mínima es de 100 km, cuando realmente la predicción es mucho más precisa para el segundo caso. Debido a ello se decide normalizar el error de predicción respecto a la distancia mínima real, quedando definido cada parámetro de evaluación como se muestra a continuación:

$$\mu_{e_p} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{D_{i_{\min}}^{real} - D_{i_{\min}}^{pred}}{D_{i_{\min}}^{real}} \quad (6-1)$$

$$\sigma_{e_p} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{D_{i_{\min}}^{real} - D_{i_{\min}}^{pred}}{D_{i_{\min}}^{real}} - \mu_{e_p} \right)^2}, \quad (6-2)$$

donde N corresponde al número de predicciones que componen el grupo en cuestión.

Con estas ideas aclaradas se está en disposición de pasar al plano final de los resultados. Para este análisis global se ha aplicado el proceso desarrollado en este proyecto a los mensajes recibidos entre las 16:54:45 y 23:54:31 del día 15 de mayo de 2013. En resumen, durante estas 7 horas se han recibido y, posteriormente, analizado 372387 mensajes.

Tras someter cada uno de estos mensajes al proceso descrito el análisis global arroja los resultados mostrados en las Figuras 6.1 y 6.2. En el eje vertical izquierdo de la Figura 6.1 se muestra la evolución del error medio de la predicción según la antelación con la que se realiza, mientras que en la Figura 6.2 se representa la dispersión del error de predicción. A su vez, en el eje vertical derecho se indica el número de predicciones que componen cada uno de los grupos de 5 segundos en los que se ha dividido el eje horizontal en el que se refleja la antelación de la predicción. Como no puede ser de otra forma el eje vertical derecho es el mismo para ambas figuras.

Para ambas representaciones se observa cómo a medida que aumenta la antelación respecto al instante de mínima distancia el número de predicciones decrece. Teniendo en cuenta que la predicción se inicia cuando una pareja de aeronaves comienza a aproximarse, al aumentar la antelación es menos probable que dicho fenómeno se haya producido, ya sea porque aún no se ha empezado a rastrear alguna de las aeronaves de la pareja o porque en instantes posteriores se aproximarán debido a que una de ellas realizará un viraje. Por ejemplo, hasta 12 minutos antes del punto de mínima separación la pareja de aeronaves puede estar alejándose o, incluso, que aún no se haya recibido un mensaje de alguna de ellas, por lo que sólo se tendrán predicciones a partir de dicho instante.

En la Figura 6.1 se observa que a partir de una antelación de 600 segundos el número de predicciones es inferior a 150.

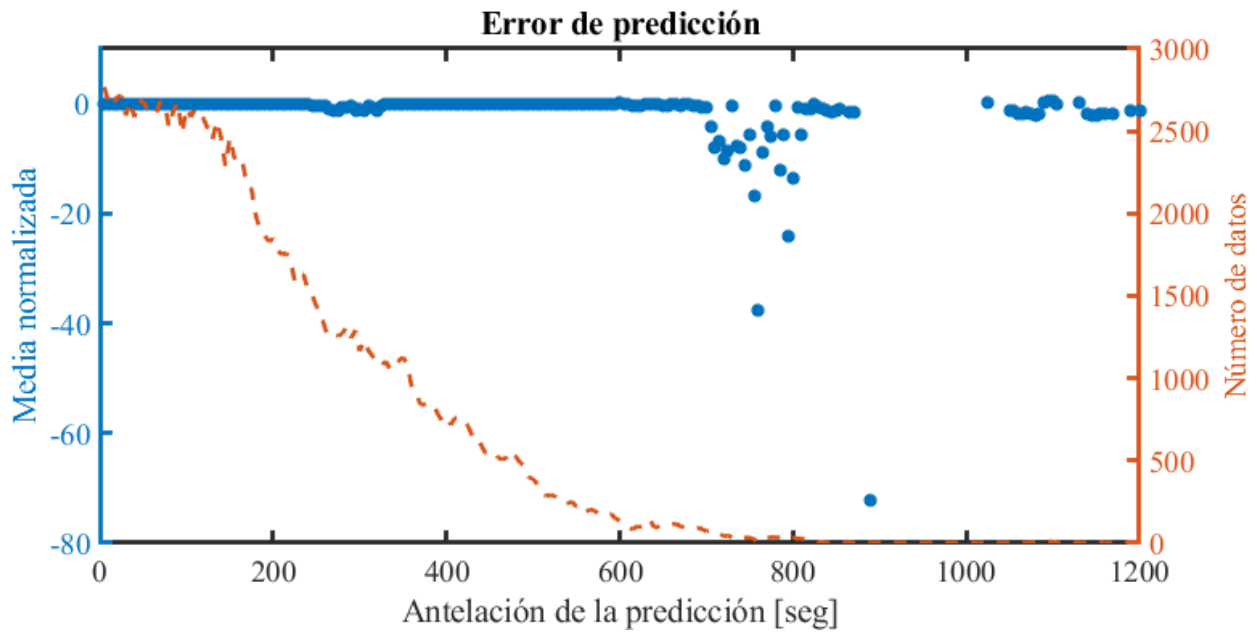


Figura 6.1. Error de predicción según la antelación

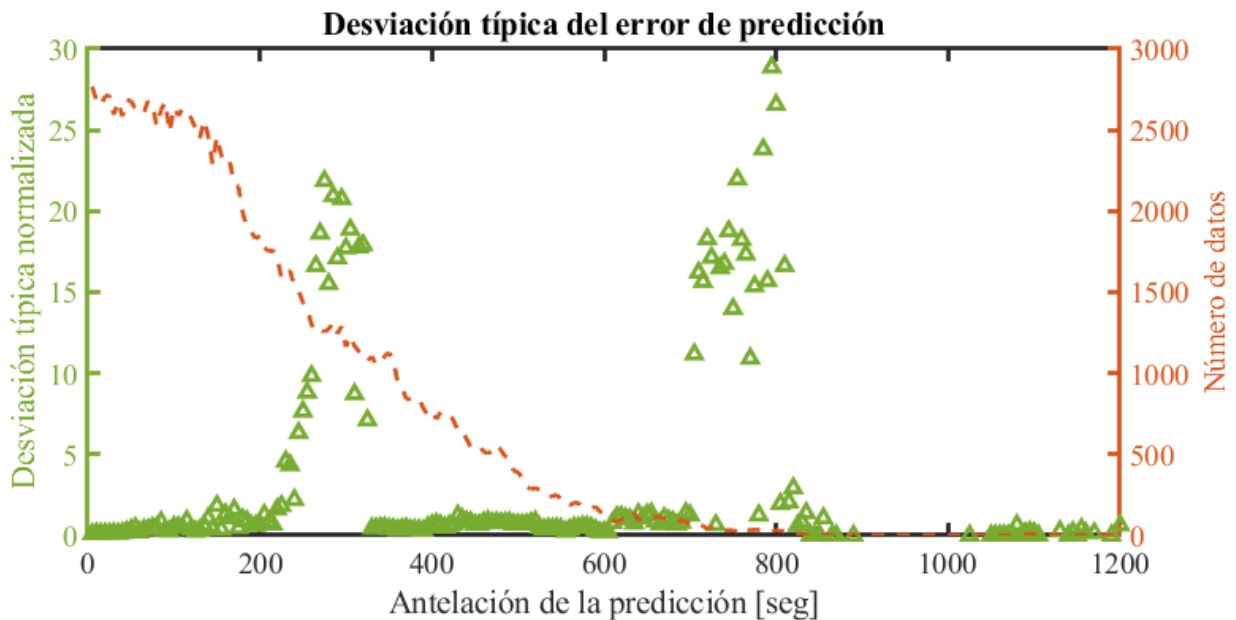


Figura 6.2. Desviación estándar del error de predicción según la antelación

Observando ambas figuras y atendiendo tanto a los resultados obtenidos como al número de predicciones según su antelación se pueden diferenciar dos regiones. La primera abarca las predicciones realizadas con una antelación inferior a 600 segundos, mientras que la segunda se extiende desde los 600 segundos de antelación hasta el límite de 1200 segundos.

En esta segunda región llama especialmente la atención el tramo entre 12 y 15 minutos de antelación, en el que se observa un error normalizado medio superior a 10, es decir, el error entre la distancia mínima predicha y la real es mayor a 10 veces el valor de esta última. A su vez, la dispersión del error normalizado este tramo también alcanza valores muy elevados, siendo generalmente superior a 10. En relación a la desviación típica para algunos valores de antelación comprendidos en este tramo se obtienen desviaciones muy bajas, pero esto es debido a que el número de predicciones con dicha antelación es inferior a 5.

A primera vista, estos resultados son muy llamativos, especialmente para la única predicción que se realiza con 890 segundos de antelación respecto al punto de mínima distancia, en el que se alcanza un error normalizado de -72.29. El valor negativo indica que la distancia mínima predicha es mayor que la distancia mínima real.

Aunque en esta segunda región el número de predicciones es reducido y no supone una muestra representativa del comportamiento del modelo aplicado, a continuación se muestra una explicación de por qué se obtienen estos valores.

Todas las predicciones realizadas en este intervalo (entre 12 y 15 minutos de antelación) con un error normalizado superior a 5 pertenecen a un único caso, correspondiente a la pareja de aeronaves 4CA7B4 – 4CA8EA. En la Figura 6.3 se representa la trayectoria realizada por cada aeronave, en la que la aeronave 4CA7B4 (en color azul) se comienza a rastrear a, aproximadamente, 40° de latitud norte y 3.5° longitud oeste. A partir de este instante sigue una trayectoria en dirección suroeste y, tras recuperar la señal, se desplaza en dirección noreste. Es durante este tramo cuando se recibe el primer mensaje de la aeronave 4CA8EA (en color negro) a, aproximadamente, 40.3° de latitud norte y 4.3° de longitud oeste, cuya trayectoria se inicia en dirección suroeste para luego virar en dirección norte-noreste, describiendo lo que se podría asemejar a un lazo.

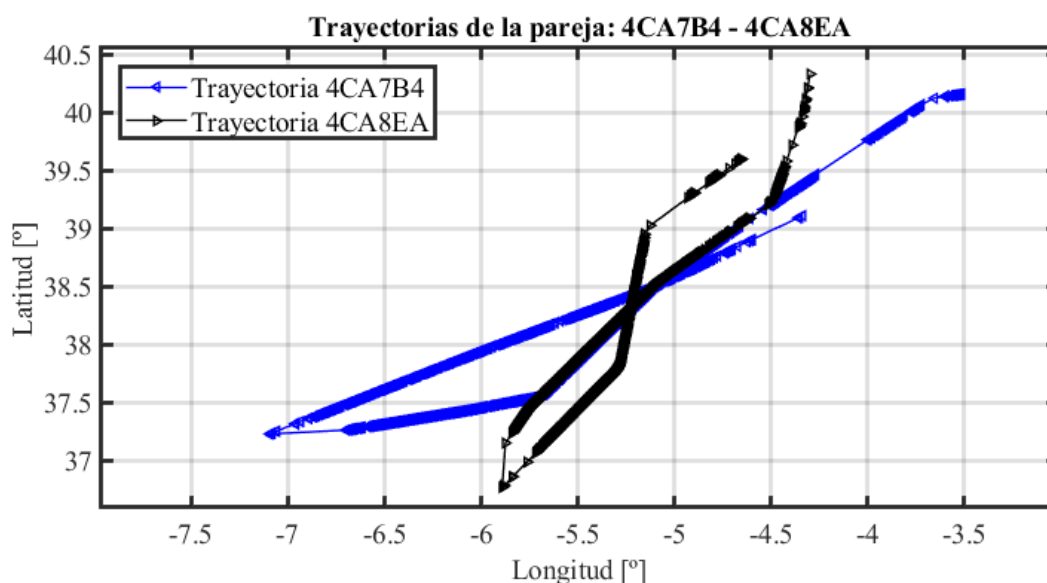


Figura 6.3. Representación de las trayectorias para la pareja 4CA7B4 – 4CA8EA

Una vez aclarada las trayectorias de la pareja en la Figura 6.4 se representan aquellas predicciones cuyo error normalizado es superior a 20 (en color verde) junto con el punto de mínima separación real (en color rojo). En esta figura se observa la gran diferencia entre la posición en la que se produce la mínima separación y las predichas para la aeronave 4CA8EA como consecuencia del primer viraje realizado por esta aeronave. A esta gran diferencia se le suma el hecho de que la posición en la que se produce la mínima separación real es casi coincidente (en el plano horizontal), lo que conlleva un valor de distancia muy pequeño. Esto hace que al calcular el error entre predicción y realidad y normalizarlo respecto a esta última se obtengan valores tan elevados.

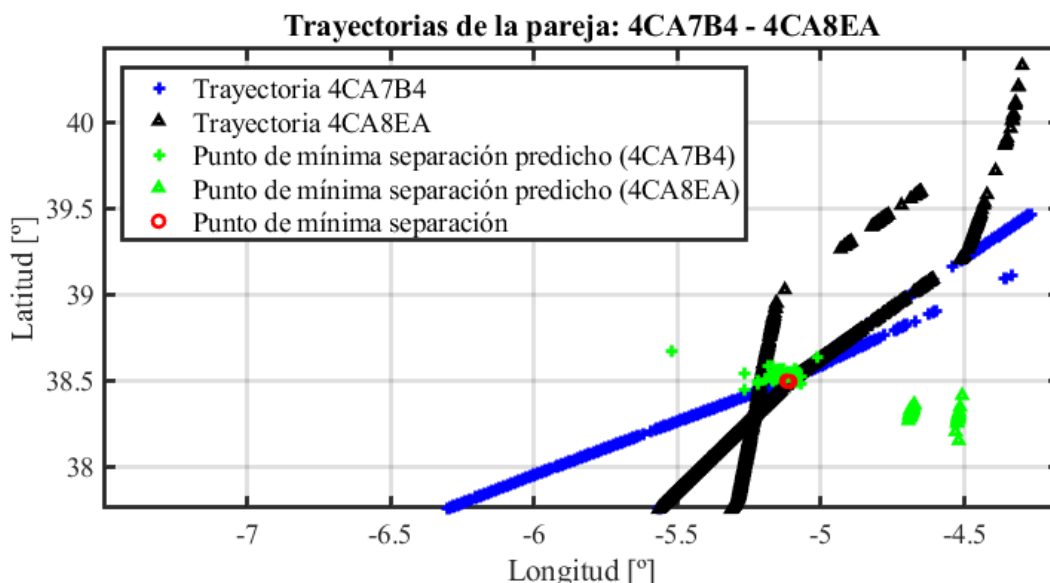


Figura 6.4. Representación de los puntos de mínima separación con error normalizado alto

Para más detalle en la Figura 6.5 se muestran la evolución de la separación real entre la pareja 4CA7B4 – 4CA8EA respecto al tiempo transcurrido desde que se empieza a rastrear a la primera aeronave de la pareja junto con el valor de la separación mínima real y los predichos. En esta representación se tiene que la distancia mínima predicha está entre 40 y 100 km, mientras que la separación mínima real obtenida es de 993.8 m. Además, otro hecho a destacar es que, aunque el punto predicho es claramente diferente al punto de separación mínima real, el instante en el que se alcanzan unos y otros es similar.

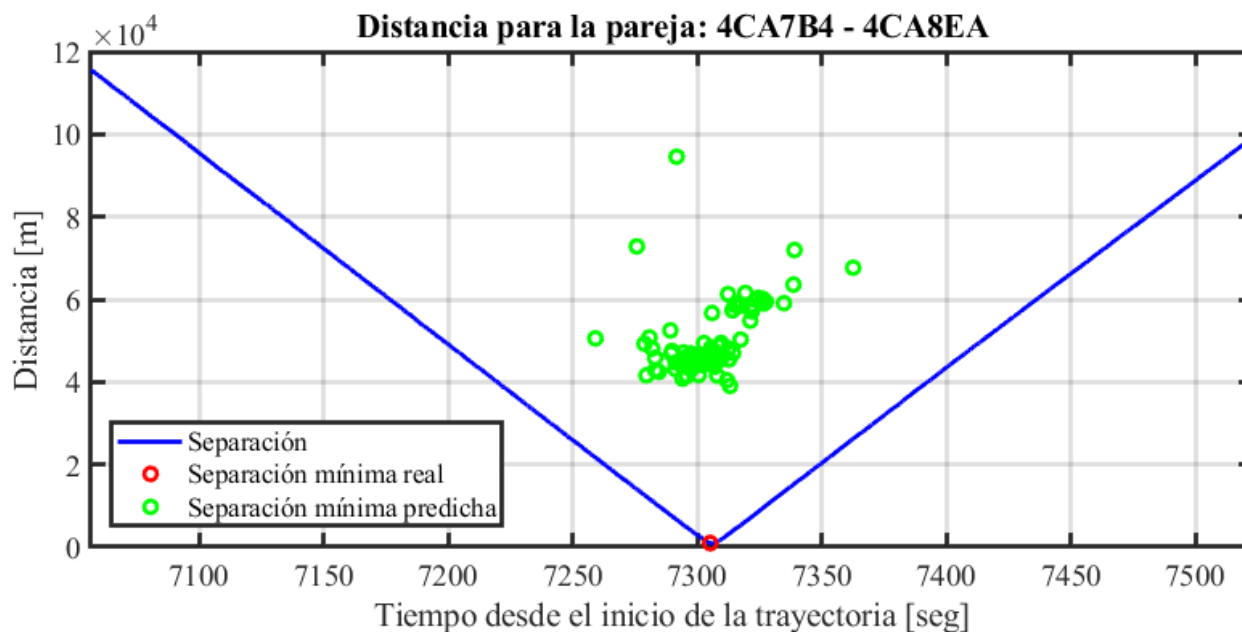


Figura 6.5. Evolución de la separación para la pareja 4CA7B4 – 4CA8EA

Centrando ahora la atención en la primera región, es decir, en aquellas predicciones realizadas con una antelación inferior a 10 minutos. En este tramo se dispone de un número de predicciones suficientemente significativo como para sacar conclusiones más determinantes respecto al comportamiento del modelo aplicado. Para una mejor visualización de los resultados obtenidos en esta primera región se muestra en las Figuras 6.6 y 6.7 una vista ampliada de la evolución del error normalizado medio y su desviación típica, respectivamente.

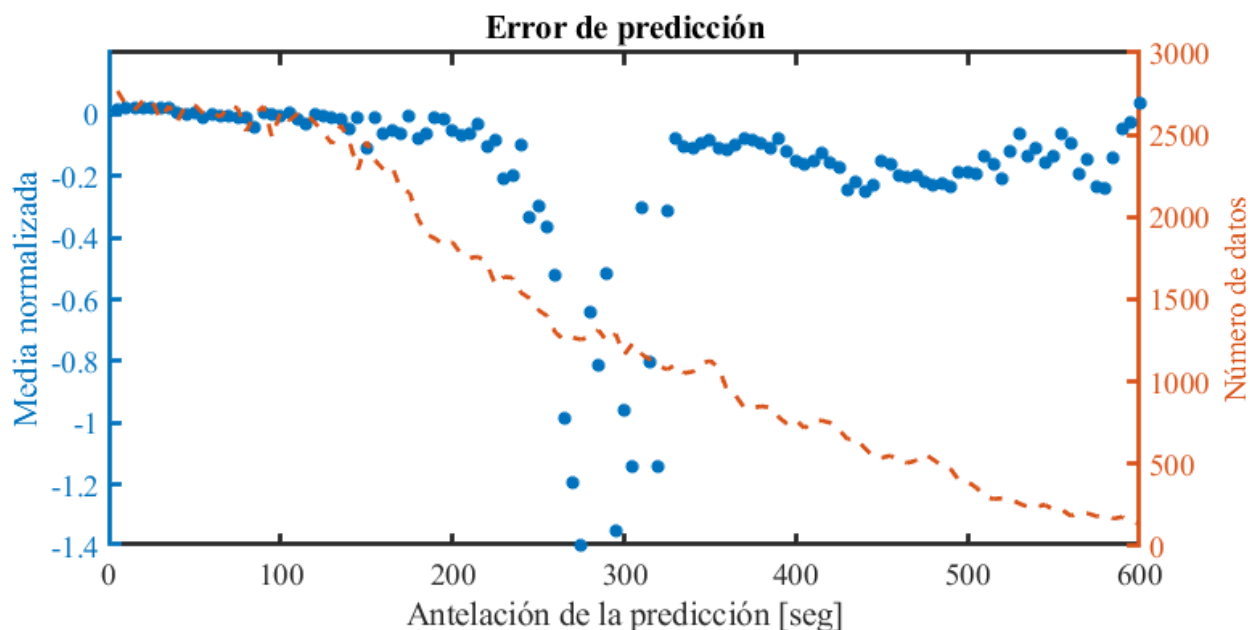


Figura 6.6. Error de predicción para antelación menor a 600 segundos

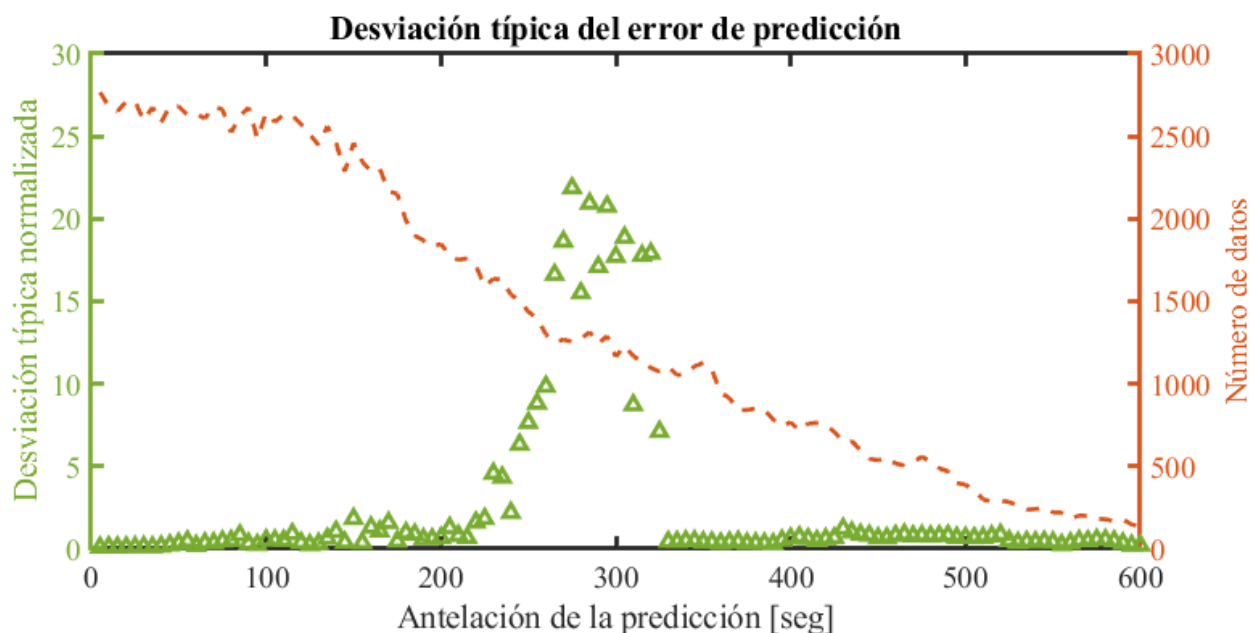


Figura 6.7. Desviación estándar del error de predicción para antelación menor a 600 segundos

En esta región destacan los resultados obtenidos cuando la antelación de la predicción está comprendida entre 220 segundos y 325 segundos. En este tramo se dispara tanto el error normalizado medio como la desviación típica. Esto se debe a que en este intervalo se producen numerosos casos similares al obtenido para la pareja 4CA7B4 – 4CA8EA mostrado anteriormente. Estos casos se caracterizan por:

1. Realización de un viraje por parte de una de las aeronaves que compone la pareja, lo que provoca que el punto de mínima separación real se distancie de los puntos de mínima separación predichos antes de realizar el viraje.
2. La separación mínima obtenida en la realidad suele ser pequeña, del orden de 1 km.

A modo de ejemplo, en la Figura 6.8 se muestra uno de los casos que componen este tipo de predicciones. En esta figura se representan las trayectorias para la pareja 020098 - 020073. La aeronave 020073 se desplaza en dirección norte hasta que realiza un viraje en dirección noroeste. Por otro lado, la aeronave 020098 describe la misma trayectoria, pero en sentido inverso. Es por ello que el punto de mínima separación prácticamente coincide en el plano horizontal. A su vez, se representan las posiciones en las que se predice que se alcanzará la

mínima separación y cuyo error normalizado es superior a 10.

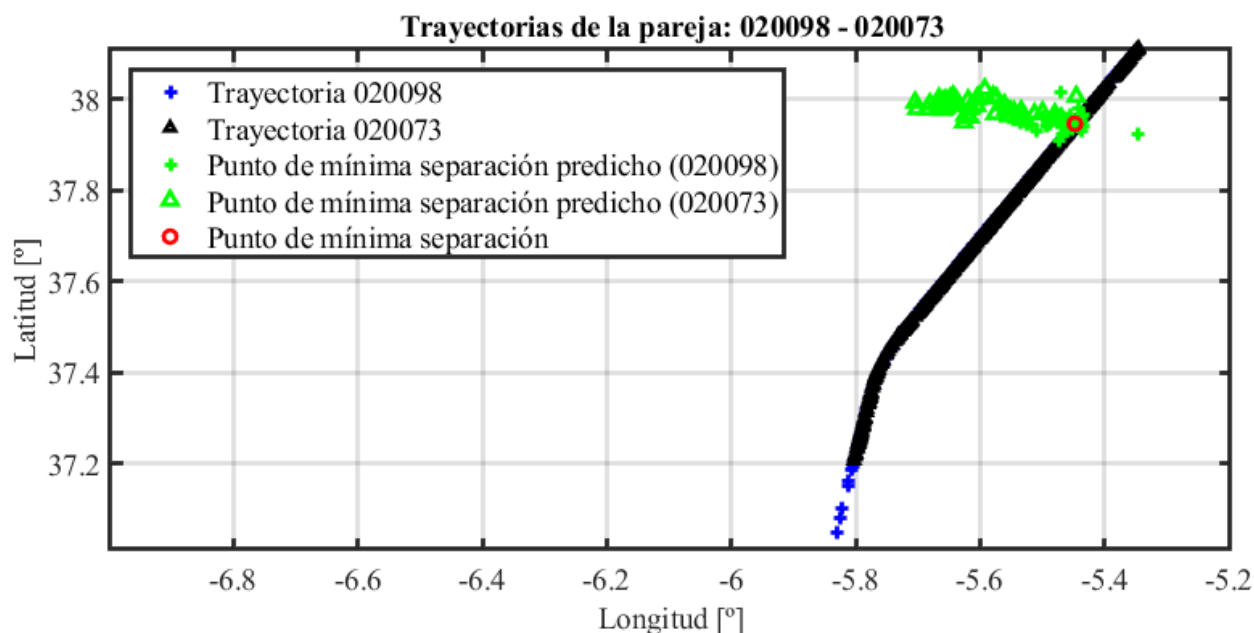


Figura 6.8. Trayectorias de la pareja de aeronaves 020098 - 020073

En esta representación se demuestra la primera de las características comentadas anteriormente, es decir, la presencia de un viraje. Para la demostración de la segunda característica de estos casos se añade la Figura 6.9, en la que se representa la evolución de la distancia para la pareja 020098 - 020073 desde que se recibe el primer mensaje de una de las aeronaves de la pareja. El valor de las distancias mínimas predichas está comprendido entre los 2 km y los 30 km, mientras que el valor obtenido como separación mínima en la realidad es de 46.51 m. Además, la mayoría de los puntos en los que se predice que se alcanzará la distancia mínima no distan más de 15 segundos desde el instante en el que posteriormente se producirá el punto de mínima separación real.

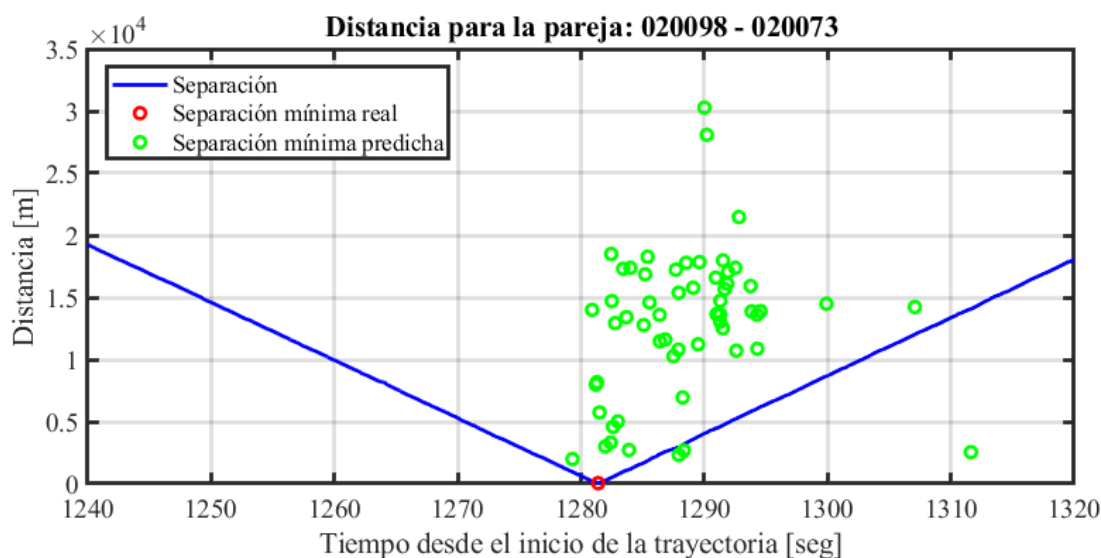


Figura 6.9. Evolución de la separación para la pareja 020098 - 020073

El número de predicciones cuyo error normalizado es superior a 5 para antelaciones comprendidas entre 220 segundos y 325 segundos es de 75, es decir, el 0.26% de las predicciones consideradas en este intervalo. Sin embargo, su influencia es tan grande que si no se tuvieran en cuenta la evolución del valor medio del error normalizado que se obtendría sería la mostrada en la Figura 6.10.

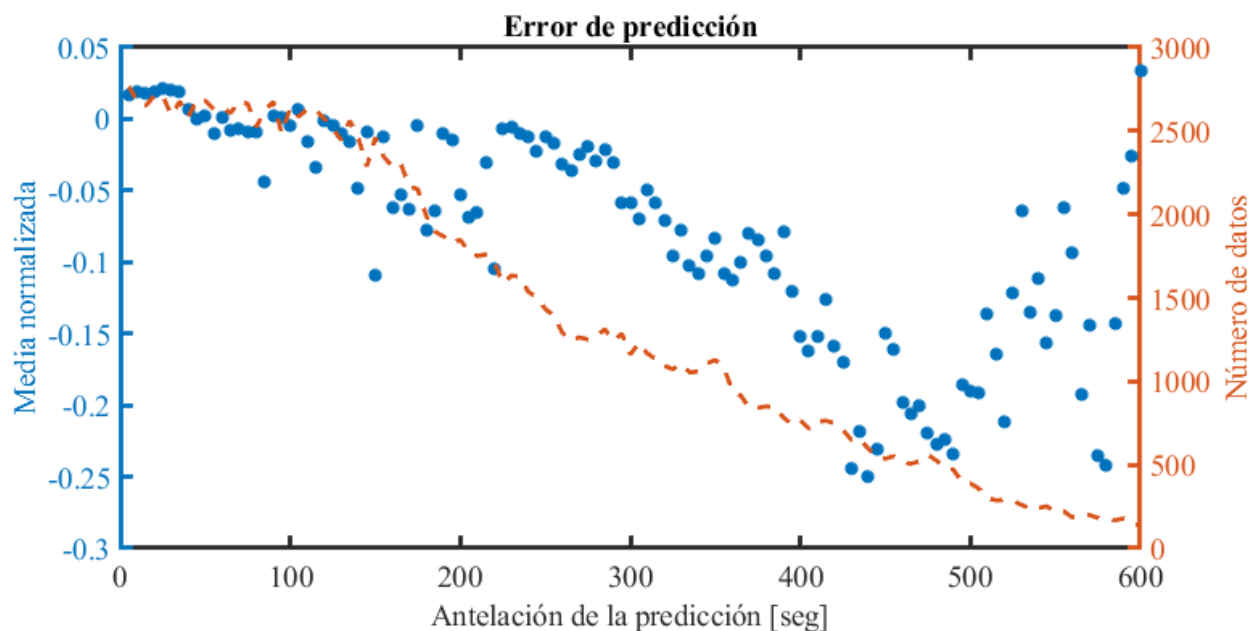


Figura 6.10. Error de predicción para antelación menor a 600 segundos tras corrección

Como era de esperar, al eliminar aquellos casos cuyo error normalizado es mayor que 5 para las predicciones realizadas con una antelación entre 220 segundos y 325 segundos los resultados obtenidos en este intervalo mejoran en cuanto a precisión de la predicción y mantienen la tendencia mostrada en esta primera región.

Considerando el error normalizado en valor absoluto se obtiene una tendencia ascendente cuanto mayor es la antelación con la que se realiza la predicción. Este es el comportamiento esperado, pues cuanto mayor es la antelación de la predicción existe una mayor probabilidad de que se produzca algún fenómeno (el más común suele ser un viraje) que provoque un desvío de la trayectoria respecto a la predicha.

Realizando un análisis cuantitativo del valor medio del error normalizado se obtiene que, por lo general, éste no sobrepasa el límite del 10% hasta que las predicciones se realizan con una antelación superior a 330 segundos. Especialmente llamativo son los resultados obtenidos cuando la antelación es inferior a 150 segundos, en los que el error normalizado medio es inferior, en valor absoluto, al 2%.

Es necesario destacar que el valor medio del error normalizado toma mayoritariamente (salvo para antelaciones pequeñas) valores negativos. Atendiendo a la expresión 6-1 el valor negativo se traduce en una sobreestimación de la separación mínima predicha, es decir, la separación mínima que se alcanza en la realidad es inferior a las separaciones predichas.

Para analizar la evolución de la desviación típica en esta primera región en la Figura 6.11 se muestra la evolución de la región delimitada por el doble de la desviación típica del error normalizado respecto a su valor medio. Esta área, o región de confianza, representa para cada una de las antelaciones consideradas el intervalo dentro del cual se estima que estará el error normalizado con una probabilidad del 95%.

En la Figura 6.11 se observa que cuando la antelación es inferior a 40 segundos la región de confianza se mantiene por debajo del 20%. Sin embargo, a medida que aumenta la antelación de la predicción la disparidad de casos aumenta, lo que conlleva un aumento de la desviación típica. Este hecho se traduce en un ensanchamiento de la región de confianza a medida que crece la antelación, salvo cuando la antelación es superior a 520 segundos (en este tramo se tiene una menor dispersión en los errores de predicción como consecuencia de una reducción en el número de predicciones analizadas).

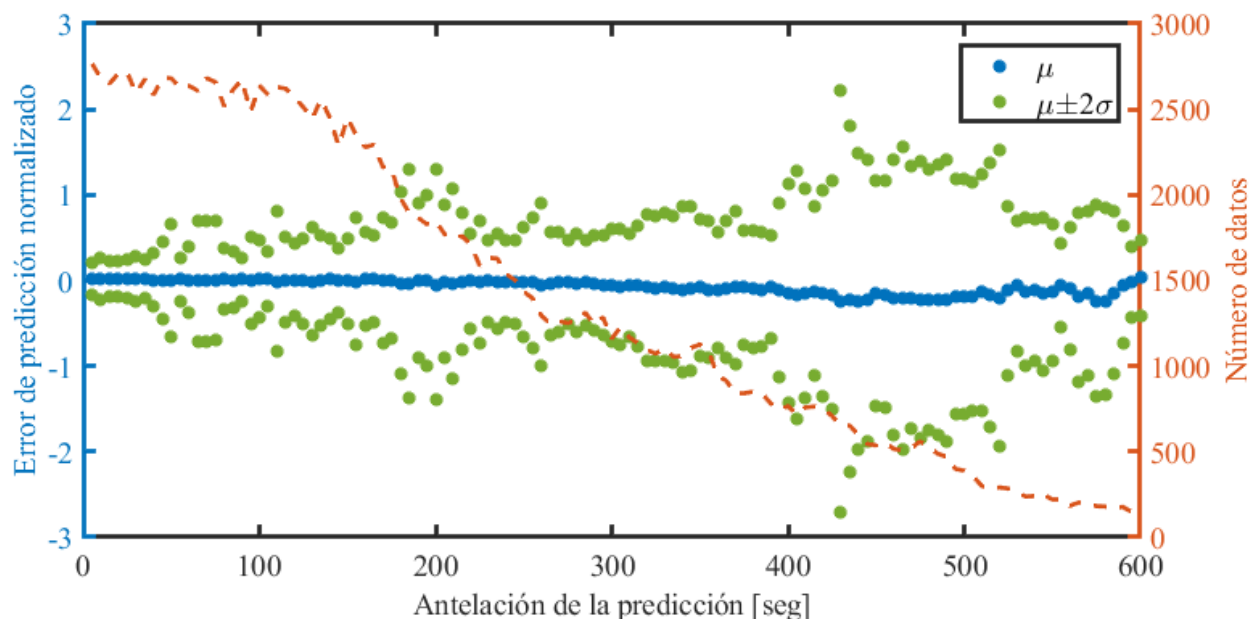


Figura 6.11. Región de confianza del 95% para el error de predicción normalizado

Como ya se ha comentado anteriormente, al considerar que las aeronaves se desplazan siguiendo trayectorias rectilíneas y uniformes la realización de un viraje conlleva que la predicción se desvíe de la realidad. Este fenómeno es la principal causa del incremento del error de predicción y de la desviación típica conforme aumenta la antelación de la predicción.

Del conjunto de predicciones realizadas con una antelación inferior a 600 segundos, se tiene un total de 12881 de predicciones afectadas por virajes, lo que supone el 7.87% de las predicciones en este intervalo. Sin embargo, a pesar de ser una cantidad relativamente baja su influencia tienen una gran relevancia en los resultados obtenidos y son los responsables principales de que la región de confianza se ensanche al aumentar la antelación.

7 CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

Este proyecto nace con el objetivo de predecir la separación mínima entre aeronaves a partir de la posición recibida mediante ADS-B. Para ello, cada vez que se lee uno de los mensajes recibidos se le aplica el proceso siguiente, el cual se puede dividir en dos partes:

1. En primer lugar, se ha desarrollado un Filtro de Kalman extendido en el que el sistema ha sido modelado aplicando las ecuaciones (4-3) y (4-4), mientras que la observación necesaria para actualizar el estado del filtro se ha tomado directamente de la posición proporcionada por ADS-B. A su vez, para estimar los errores asociados a la predicción y a la medida se han seguido dos procedimientos diferentes:
 - Predicción: la estimación del error asociado al vector de estado se ha obtenido a partir de la covarianza asociada al sistema linealizado.
 - Observación: en este caso, para la desviación típica de las observaciones se ha considerado el límite establecido por EUROCONTROL para la posición transmitida por ADS-B.

Además, como parte del Filtro de Kalman es necesario conocer el curso y la velocidad de las aeronaves. Estas magnitudes se han conseguido estimar a partir de las posiciones mejoradas anteriores.

De esta manera, se consigue una mejora de la posición de las aeronaves respecto a la obtenida mediante ADS-B.

2. Posteriormente, se determina aquellas aeronaves que se están aproximando y, tras propagar sus trayectorias, se estima la distancia mínima de separación junto con el instante en el que se alcanzará.

Finalmente, para poder evaluar la precisión del modelo de predicción se ha realizado un análisis *a posteriori*. Este análisis se basa en la distancia mínima real, la cual se obtiene una vez se han leído todos los mensajes y se dispone de las trayectorias finales. Por tanto, se ha tomado como parámetro de evaluación el error entre la distancia mínima predicha y la real normalizado respecto a la distancia mínima real.

Tras analizar los datos recogidos durante 7 horas y determinar el error normalizado del conjunto de predicciones realizadas se extraen dos resultados principales: por un lado, el valor medio del error normalizado según la antelación con la que se realiza la predicción; por otro lado, la desviación del error normalizado respecto al valor medio según la antelación con la que se realiza la predicción.

A la vista de la evolución de ambos resultados se observa, como era de esperar, un aumento de ambos parámetros cuanto mayor es la antelación con la que se realiza la predicción, tanto porque la precisión de la predicción decae como por una mayor presencia de virajes. Sin embargo, existe un par de tramos en los que se obtienen resultados realmente llamativos por su elevado valor tanto para el error normalizado como para la desviación típica.

Estos valores son consecuencia de dos fenómenos. Por un lado, la realización de un viraje posterior a las predicciones cuando el horizonte temporal es elevado (para horizontes temporales pequeños se obtiene un buen comportamiento). Por otro lado, una separación mínima en la realidad reducida, lo que conlleva que las predicciones afectadas lleven asociadas un error normalizado muy elevado.

Aún así, es necesario tener en cuenta que el modelo desarrollado se basa únicamente en la posición transmitida por la aeronave, lo que lo hace más robusto e independiente. Por tanto, a partir de una información muy básica es capaz de obtener una buena estimación de las trayectorias futuras cuando las aeronaves se desplazan con rumbo constante y con aceleraciones suaves.

En este sentido, a lo largo del proyecto se han tomado diferentes suposiciones o simplificaciones que han permitido adaptar el alcance de este trabajo a los medios disponibles. Este hecho implica la existencia de diferentes mejoras o desarrollos futuro que permitan ampliar el campo de investigación iniciado a partir de este proyecto. A continuación, se proponen algunas de las líneas de mejora que se podrían seguir:

1. Retomar el planteamiento inicial para el proyecto, es decir, obtener información meteorológica a partir del registro MRAR del Mode-S EHS. Aunque al inicio del proyecto no se disponían de medios para

recibir esta información está previsto que a partir del 2020 España disponga de una red de radares secundarios capaces de establecer comunicación con las aeronaves circundantes mediante Mode-S. De esta manera, una vez se dispone de información meteorológica se podría desarrollar un modelo de predicción más preciso en el que se tuviera en cuenta las desviaciones en la posición debida al viento. A su vez, tomar esta vía permitiría comparar cómo varían los resultados si se tiene en cuenta el viento en la predicción o si no y analizar la importancia de dicho efecto en la separación entre dos aeronaves.

2. En relación al modelo de predicción ya se ha expuesto que se supone que las trayectorias siguen un movimiento rectilíneo y uniforme. Esta suposición lleva a errores severos cuando la aeronave realiza un viraje dentro del horizonte de predicción. Por tanto, para ampliar el horizonte es necesario introducir ecuaciones del movimiento con viraje e incorporar la información del plan de vuelo al modelo de predicción, lo que permitiría prever cuándo se producirá un viraje de una aeronave y, por tanto, mejorar dicha predicción.

Por otro lado, se ha visto que la pérdida de señal tiene una importante influencia en la desviación típica una vez se recupera la señal. Por ello, se podría plantear una solución que permitiera disminuir los efectos de la pérdida de señal como, por ejemplo, considerar la posición justo antes de perderse la señal y no la recibida tras recuperarla.

3. La estimación de la incertidumbre asociada a la posición dada por ADS-B se ha considerado que se mantiene constante y que toma el valor mínimo permitido por normativa. Sin embargo, si se pudiera extraer del mensaje transmitido la categoría de precisión de la posición se podría desarrollar un Filtro de Kalman que mejorara la precisión de la posición mejorada y, por consiguiente, la fiabilidad de las trayectorias predichas.

En este sentido se podría considerar el uso del rumbo y de la velocidad respecto a tierra proporcionados por ADS-B y comparar los resultados con los obtenidos al estimar estas variables a partir de las posiciones anteriores.

4. En cuanto a los resultados, se ha comentado que las separaciones entre aeronaves se proyectan en un plano, por lo que se propone obtener la distancia mínima en 3 dimensiones, es decir, teniendo en cuenta la altitud de las aeronaves y la velocidad de ascenso o descenso.

8 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Satish C. Mohleji y Ganghuai Wang, "Modeling ADS-B Position and Velocity Errors for Airborne Merging and Spacing in Interval Management Application", *MITRE*, 2010.
- [2] Greg Welch y Gary Bishop, "An Introduction to the Kalman Filter", *University of North Carolina at Chapel Hill*, 2006.
- [3] Peter S. Maybeck, "Stochastic models, estimation, and control", Chapter 1, 1979.
- [4] Robert Grover Brown y Patrick Y. C. Hwang, "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering", 2012.
- [5] EUROCONTROL, "Specification for ATM Surveillance System Performance (Volume 2 Appendices)", 2015.
- [6] Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos, "Fundamentos de Navegación Aérea. Tema 2: Modelos de la superficie terrestre. Geodesia y cartografía. Rutas aéreas", *Universidad de Sevilla*, 2018.
- [7] Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos, "Fundamentos de Navegación Aérea. Tema 7: Sistemas de referencia. Actitud. Ecuaciones de la navegación", *Universidad de Sevilla*, 2018.
- [8] Benaroya H. y Mi Han S, " Probability Models in Engineering and Science", 2005, pp. 168–169.
- [9] Francisco Cantos Galán, "Análisis de trayectorias de aeronaves obtenidas mediante ADS-B", *Universidad de Sevilla*, 2013.
- [10] EUMETNET ADD FS ET, " Aircraft Derived Data Feasibility Study Expert Team", 2015.

APÉNDICE A - DERIVADAS PARCIALES

A.1. Matriz A_{k-1} del Filtro de Kalman extendido

$$A_{[i,j]_{k-1}} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial x_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \Rightarrow A_{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_{k-1}} & \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_{k-1}} \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi_{k-1}} & \frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_{k-1}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \phi_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = 1 \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = 0 \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = 1 \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \lambda_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = \tan(\hat{\psi}_{k-1})(\sec(\hat{\phi}_k) - \sec(\hat{\phi}_{k-1})) \quad (\text{A-4})$$

A.2. Matriz W_{k-1} del Filtro de Kalman extendido

$$W_{[i,j]_{k-1}} = \frac{\partial f_{[i]}}{\partial w_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \Rightarrow W_{k-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_k}{\partial \psi_{k-1}} & \frac{\partial \phi_k}{\partial V_{g_{k-1}}} \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial \psi_{k-1}} & \frac{\partial \lambda_k}{\partial V_{g_{k-1}}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \psi_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = -\frac{\hat{V}_g \sin(\hat{\psi}_{k-1}) \Delta t}{R_h} \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial V_{g_{k-1}}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = \frac{\cos(\hat{\psi}_{k-1}) \Delta t}{R_h} \quad (\text{A-6})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \psi_{k-1}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = (1 + \tan^2(\hat{\psi}_{k-1})) \ln \left| \frac{\sec(\hat{\phi}_k) + \tan(\hat{\phi}_{k-1})}{\sec(\hat{\phi}_k) + \tan(\hat{\phi}_{k-1})} \right| - \frac{\hat{V}_g \sin(\hat{\psi}_{k-1}) \tan(\hat{\psi}_{k-1})}{R_h \cos(\hat{\phi}_k)} \Delta t \quad (\text{A-7})$$

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial V_{g_{k-1}}}(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) = \frac{\sec(\hat{\phi}_k) \sin(\hat{\psi}_{k-1})}{R_h} \Delta t \quad (\text{A-8})$$

A.3. Gradiente del curso

$$\nabla g_1(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = \left[\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_{k-1}} \quad \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_{k-1}} \quad \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_j} \quad \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_j} \right] (\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j)$$

$$\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_{k-1}}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = -\frac{1}{2} \frac{(\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j) \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right) \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right) \left((\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j)^2 + \left(\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right)} \right) \right)^2 \right)} \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_{k-1}}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = \frac{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right)} \right)}{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right)} \right)^2 + (\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j)^2} \quad (\text{A-10})$$

$$\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \phi_j}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = \frac{1}{2} \frac{(\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j) \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right) \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right) \left((\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j)^2 + \left(\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right)} \right) \right)^2 \right)} \quad (\text{A-11})$$

$$\frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \lambda_j}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = -\frac{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right)} \right)}{\ln \left(\frac{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_j}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\hat{\phi}_{k-1}}{2} \right)} \right)^2 + (\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j)^2} \quad (\text{A-12})$$

A.4. Gradiente de la velocidad respecto a tierra

$$\nabla g_2(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = \left[\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_{k-1}} \quad \frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_{k-1}} \quad \frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_j} \quad \frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_j} \right] (\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j)$$

$$\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_{k-1}}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = \frac{(R_t + h) \left((\hat{\phi}_{k-1} - \hat{\phi}_j) - (\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j)^2 \cos(\hat{\phi}_{k-1}) \sin(\hat{\phi}_{k-1}) \right)}{(\Delta t)^2 \sqrt{\left(\frac{\hat{\phi}_{k-1} - \hat{\phi}_j}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j}{\Delta t} \right)^2 \cos^2(\hat{\phi}_{k-1})}} \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_{k-1}}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = \frac{(R_t + h)(\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j) \cos^2(\hat{\phi}_{k-1})}{(\Delta t)^2 \sqrt{\left(\frac{\hat{\phi}_{k-1} - \hat{\phi}_j}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j}{\Delta t} \right)^2 \cos^2(\hat{\phi}_{k-1})}} \quad (\text{A-14})$$

$$\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \phi_j}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = - \frac{(R_t + h)(\hat{\phi}_{k-1} - \hat{\phi}_j)}{(\Delta t)^2 \sqrt{\left(\frac{\hat{\phi}_{k-1} - \hat{\phi}_j}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j}{\Delta t} \right)^2 \cos^2(\hat{\phi}_{k-1})}} \quad (\text{A-15})$$

$$\frac{\partial V_{g_{k-1}}}{\partial \lambda_j}(\hat{\phi}_{k-1}, \hat{\lambda}_{k-1}, \hat{\phi}_j, \hat{\lambda}_j) = - \frac{(R_t + h)(\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j) \cos^2(\hat{\phi}_{k-1})}{(\Delta t)^2 \sqrt{\left(\frac{\hat{\phi}_{k-1} - \hat{\phi}_j}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{\hat{\lambda}_{k-1} - \hat{\lambda}_j}{\Delta t} \right)^2 \cos^2(\hat{\phi}_{k-1})}} \quad (\text{A-16})$$

A.5. Gradiente de la separación entre dos aeronaves

$$\nabla g_3(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) = \left[\frac{\partial D_k}{\partial \phi_{A_k}} \quad \frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{A_k}} \quad \frac{\partial D_k}{\partial \phi_{B_k}} \quad \frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{B_k}} \right] (\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k})$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial \phi_{A_k}}(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) = - \frac{R_h(\sin \hat{\phi}_{B_k} \cos \hat{\phi}_{A_k} - \cos \hat{\phi}_{B_k} \sin \hat{\phi}_{A_k} \cos(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))}{\sqrt{1 - (\sin \hat{\phi}_{A_k} \sin \hat{\phi}_{B_k} + \cos \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} \cos(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))^2}} \quad (\text{A-17})$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{A_k}}(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) = - \frac{R_h(\cos \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} \sin(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))}{\sqrt{1 - (\sin \hat{\phi}_{A_k} \sin \hat{\phi}_{B_k} + \cos \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} \cos(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))^2}} \quad (\text{A-18})$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial \phi_{B_k}}(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) = - \frac{R_h(\sin \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} - \cos \hat{\phi}_{A_k} \sin \hat{\phi}_{B_k} \cos(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))}{\sqrt{1 - (\sin \hat{\phi}_{A_k} \sin \hat{\phi}_{B_k} + \cos \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} \cos(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))^2}} \quad (\text{A-19})$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial \lambda_{B_k}}(\hat{\phi}_{A_k}, \hat{\lambda}_{A_k}, \hat{\phi}_{B_k}, \hat{\lambda}_{B_k}) = \frac{R_h(\cos \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} \sin(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))}{\sqrt{1 - (\sin \hat{\phi}_{A_k} \sin \hat{\phi}_{B_k} + \cos \hat{\phi}_{A_k} \cos \hat{\phi}_{B_k} \cos(\hat{\lambda}_{B_k} - \hat{\lambda}_{A_k}))^2}} \quad (\text{A-20})$$