ANAL!1 MEDIANTE ELEMENTOS DE CONTORNO CONSTANTES DE PROBLEMA$ ELASTODINAMICOS BIDIMENSIONALES EN EL DOMINIO DEL TIEMPO.

Rafael Gallego Sevilla
José Dominguez Abascal

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla.

Resumen,- Se presenta en este artículo, una formulación del método de los elementos de contorno para problemas elastodinamicos bidimensionales en el dominio del tiempo. Se introducen las ecuaciones básicas de la elastodinámica y se presenta el tratamiento numérico de la ecuación integral en que se basa el método. Se muestran algunos aspectos numéricos y computacionales de la formulación y, finalmente, se presentan algunas aplicaciones resueltas.

Abstract.- In this paper, a formulation of the Boundary Element Method for bidirnens1oal elastodinamic problems in the time domam 1s presented. Basic equations of the Elastodynarnic are introduced and the nurnerical treatment of the integral equation in which the method is based, is presented. Some numerical and cornputational aspects of the forrrnulat!on are shown and, finally, some aplications are studied.

1.- INTRODUCCIÓN

El método de los elementos de contorno (MEC) se ha revelado como una técnica muy adecuada para la resolución de una amplia variedad de problemas de la mecánica de los medios continuos.

El origen de la formulación del MEC para elastodinámica puede encontrarse en la identidad integral de Love / 1/. Sin embargo, la formulación del MEC, tal y como la conocemos hoy fué presentada por Cruse y Rizzo en 1968 *121.* Desde entonces se han pub! icado muchos artículos explorando las posibllidades del método en el campo de la elastodinámica. Cruse y Rizzo *121,* y Manolis y Beskos /3/ usaron la transformada de Laplace y trabajaron en el dominio transformado. Niwa, Kobayashi y Fukui /4/, Dominguez IS/, y Kobayashl y Nishirnura /6/ usaron la transformada de Four1er. Cole, Koslofr y Minster *171* trabajaron en el dominio del tiempo.

En el presente artículo se muestra una formulación del MEC para problemas elastodinámicos bidimensionales en el dominio del tiempo. Se muestran las ecuaciones básicas, la ecuación Integral en que se basa el método, asl como el tratamiento numérico de la misma. Se presentan, finalmente, algunos problemas resueltos mediante esta técnica numérica.

2.- FORMULACIÓN BÁSICA

La ecuación general de la Elastodinámica, que gobierna el campo de desplazamientos en el medio elástico es la ecuación de Navier:

$$\rho(c_p^2-c_s^2)u_{i,ij}+\rho c_s^2 u_{j,ii}+\rho f_j=\rho\ddot{u}_j \qquad (1)$$

donde, ui representa las componentes del vector de desplazamientos, fj las componentes del vector de fuerzas por unidad de masa, ρ es la densidad del medio, Cp y Cs son las velocidades de las ondas longitudinales y transversales, respectivamente.

A la ecuación de Navier hay que añadir las condiciones de contorno, y las condiciones iniciales, para caracterizar de forma completa el problema. Las primeras son expresiones tales como:

$$u(x,t) = u_c \quad \text{sí} \quad x \in \Gamma_1$$
$$t^n(x,t) = t^n_c \quad \text{Si} \quad x \in \Gamma_2$$

donde $\Gamma_1+\Gamma_2$ supone el contorno completo del dominio sobre el que está definida la ecuación, u es el vector de desplazamientos y Uc su valor conocido, t^n es el vector de tensiones en un Instante t, en un punto x del contorno en el cual la normal es n y t^n_c su valor conocido.

Puesto que la ecuación de Navíer es de segundo orden respecto a la variable temporal, es necesario conocer la posición y la velocidad de todos los puntos del dominio en el instante Inicial:

$$u(x,0) = u_0$$
$$\dot{u}(x,0) = v_0$$

El método de los elementos de contorno se basa, sin embargo, en una formulación integral del problema, que proviene del llamado Teorema de Reciprocidad. El teorema relaciona dos estados elastodinámicos, definidos sobre el mismo cuerpo y se expresa por la siguiente ecuación:

$$\int_\Gamma(t^n*u')d\Gamma + \rho\int_\Omega(f*u'+v_0u'+u_0v')d\Omega =$$

$$= \int_\Gamma(t'^n*u)d\Gamma + \rho\int_\Omega(f'*u+v'_0u+u'_0v)d\Omega \qquad (2)$$

donde n es una región cuyo contorno es Γ, u, v y tn, son las variables correspondientes al primer estado y f',u', v' y t'n las equivalentes del segundo estado elastodinámico; u_0, v_0, u'_0, v'_0 son las condiciones iniciales de posición y velocidad para ambos estados. El símbolo * entre dos vectores, Indica la suma del producto de convolución de sus componentes, es decir:

$$a*b = \Sigma_i a_i*b_i = \Sigma_i \int_0^t a_i(\tau)\cdot b_i(t-\tau)\,d\tau$$

La representación Integral de los desplazamientos de un estado elastodinámico, se basa en la aplicación del teorema de reciprocidad (2), entre dicho estado real, y otro virtual, de tensiones y desplazamientos conocidos. Dicho estado virtual es el formado por los campos de tensiones y desplazamientos, provocados por una carga concentrada en un punto y un Instante de tiempo, actuando sobre un dominio Infinito, con condiciones iniciales nulas. Este estado es el llamado "solución fundamental" de la ecuación de Navier. Los desplazamientos del estado virtual son los de la solución fundamental sobre el dominio n, que suponemos embebido en el dominio infinito y las tensiones se obtienen a partir del tensor de tensiones de la solución fundamental y las normales al contorno Γ. La ecuación integral que se obtiene, aplicando la carga de la solución fundamental en el punto ξ, y en el instante τ es la siguiente,

$$u_k(\xi,t) = \int_\Gamma (U_{ki}*t^n_i - T_{ki}*u_i)\,d\Gamma +$$
$$+\int_\Omega (\rho U_{ki}*f_i + \rho U_{ki}v_{0i} + \rho T_{ki}u_{0i})\,d\Omega$$

siendo, uki y Tki la componente i-ésima de los desplazamientos y las tensiones, respectivamente, de la solución fundamental, cuando la carga en el punto ξ, está colocada en dirección k.

La ecuación anterior cabe, en principio, establecerla para un punto ξ, perteneciente al contorno Γ, del dominio considerado. En este caso las Integrales del campo de tensiones y de desplazamientos de la solución fundamental, contienen una singularidad, al estar aplicada en el propio contorno de Integración la carga concentrada. Para encontrar el valor de dichas integrales singulares es necesario realizar un proceso de limite. Realizando esta operación, y suponiendo que el estado real tiene condiciones iniciales y fuerzas másicas nulas, se llega a:

$$c_{ki}(\xi)\,u_i(\xi,t) = \int_\Gamma (U_{ki}*t^n_i - T_{ki}*u_i)\,d\Gamma \qquad (3)$$

donde cki es una constante que depende de las tangentes al contorno en el punto considerado.

La ecuación (3) puede ser escrita de una forma alternativa teniendo en cuenta que, debido a la linealidad del problema,

$$U_{ki}*t^n_i = v_{ki}(x,t;\xi\,|\,t^n_i(x,t))$$
$$T_{ki}*u_i = -\sigma_{ki}(x,t;\xi\,|\,u_i(x,t))$$

siendo vki el desplazamiento en dirección i, en el punto x y el intante t, provocado por una carga colocada en el punto ξ, cuya variación con el tiempo es precisamente la de la función $t^n_i(x,t)$. Una interpretación similar puede darse a $-\sigma_{ki}$. Una demostración rigurosa de estas igualdades puede encontrarse en la referencia /8/. De esta forma podemos escribir (3) como,

$$c_{ki}(\xi)u_i(\xi,t) = \int_\Gamma (v_{ki}(x,t;\xi\,|\,t^n_i(x,t)) - \sigma_{ki}(x,t;\xi\,|\,u_i(x,t)))\,d\Gamma \qquad (4)$$

La ecuación integral (4) aplicada sobre todos los puntos del contorno, caracteriza de forma completa, los campos de tensiones y desplazamientos. La resolución de la misma permitiría conocer dichas variables en el contorno. Ésto en un caso de geometría y condiciones de contorno cualquiera es Inviable. La resolución numérica de la misma, se encuentra obstaculizada por las fuertes singularidades que presentan los núcleos de las ecuaciones de contorno. Es necesario transformar dichas expresiones para su tratamiento numérico.

3.-TRATAMIENTO NUMÉRICO

El intervalo de tiempo en estudio se divide en M pequeños pasos de tiempo iguales, de magnitud Δt, a lo largo de los cuales los valores de las tensiones y los desplazamientos permanecen constantes, es decir:

$$\forall t\,/\,(m-1)\cdot\Delta t \le t < m\cdot\Delta t$$

$$t^n_i(x,t) = t^{n\,m}_i(x)\cdot[\,H(t-(m-1)\cdot\Delta t)-H(t-m\cdot\Delta t)\,]$$

$$u_i(x,t) = u_i^m(x)\cdot[\,H(t-(m-1)\cdot\Delta t)-H(t-m\cdot\Delta t)\,]$$

donde H(t) es la función escalón de Heaviside, m es un índice entero que varía entre 1 y el número total M de Intervalos de tiempo. Para un Instante de tiempo cualquiera t, menor que N·Δt, se puede escribir,

$$t^n_i(x,t) = \sum_{m=1}^{N} t^{n\,m}_i(x)\cdot s^m(t)$$
$$u_i(x,t) = \sum_{m=1}^{N} u^m_i(x)\cdot s^m(t) \qquad (5)$$

con $s^m(t) = H(t-(m-1)\cdot\Delta t)-H(t-m\cdot\Delta t)$

Teniendo en cuenta (5) y la linealidad de la solución fundamental las expresiones del Integrando de (4) pueden transformarse en,

$$v_{ki}(x,t;\xi\,|\,t^n_i(x,t)) = \sum_{m=1}^{N} v_{ki}(x,t;\xi\,|\,s^m(t))$$
$$\sigma_{ki}(x,t;\xi\,|\,u_i(x,t)) = \sum_{m=1}^{N} \sigma_{ki}(x,t;\xi\,|\,s^m(t)) \qquad (6)$$

La respuesta de desplazamientos y tensiones en el Instante N debida a un pulso s^m, que está aplicado en el Instante m, es igual a la provocada en el instante N-m+1, por un pulso aplicado en el Instante t, s^1.

$$v_{ki}(x,N\Delta t;\xi\,|\,s^m) = v_{ki}(x,(N-m+1)\cdot\Delta t;\xi\,|\,s^1)$$
$$\sigma_{ki}(x,N\Delta t;\xi\,|\,s^m) = \sigma_{ki}(x,(N-m+1)\cdot\Delta t;\xi\,|\,s^1)$$

Llamando,

$$U^l_{ki} = v_{ki}(x,l\,\Delta t;\xi\,|\,s^1)$$
$$T^l_{ki} = \sigma_{ki}(x,l\,\Delta t;\xi\,|\,s^1)$$

se obtiene finalmente,

$$c_{ki}(\xi)u^N_i(\xi) = \sum_{m=1}^{N}\int_\Gamma (U^l_{ki}\cdot t^{n\,m}_i(x) - T^l_{ki}\cdot u^m_i(x))\,d\Gamma$$

con l=N-m+1

El cálculo de las Integrales de contorno va a realizarse subdividiendo el mismo en elementos.

$$c_{ki}(\xi)u^N_i(\xi) = \sum_{m=1}^{N}\sum_{q=1}^{Q}\int_{\Gamma_q}(U^l_{ki}\,t^{n\,m}_i(x)-T^l_{ki}\,u^m_i(x))\,d\Gamma$$

El contorno es aproximado mediante pequeños elementos rectos, sobre cada uno de los cuales se suponen constantes los desplazamientos y las tensiones. Llamando

$u^m(q)$ al valor del desplazamiento durante el 1ntervalo m-és1mo en el elemento q-és1mo y s1m1lar deftn1ción para $t^{0m}(q)$ pueden sacarse las variables desconocidas de las integrales elementales.

SI se agrupan los desplazam1entos del contorno, de un instante N, en un sólo vector, u^N, e 1gualmente se hace con las tensiones, en el vector t^N, y se escriben todas las ecuaciones en una forma matrlc1al compacta, se llega a,

$$H^1 u^N = G^1 t^N + a^N \qquad (8)$$

donde H^1 es la matriz formada por las integrales de las tensiones de la solución rundamental del pr1mer 1nstante. G1 formada , de manera s1mllar,y a^N contiene la contrtbuc1ón de los 1nstantes anteriores al N-és1mo, y viene dado por,

$$a^N = \begin{cases} 0 & \text{S1 } N=1 \\ \sum_{m=1}^{N-1} (G^l t^m - H^l u^m) & \text{S1 } N>l \\ \text{con } l=N-m+1 & \end{cases}$$

En esta ecuación los dos térm1nos del segundo miembro representan la contribuc16n al cam1po de desplazam1entos del Instante N, de las tensiones que existen en dicho Instante, y el efecto de los desplazam1entos y tensiones de instantes pasados, respectivamente. Puede oservarse, que en un instante dado N, el térm1no a^N es perfectamente calculable a partir de las tens1ones y desplazamientos de instantes anteriores. En un instyante dado, pues, las 1ncógn1tas, se encuentran en los vectores t^N y u^N, s1endo el resto de términos totalmente conocidos. Cada Instante de t1empo exige el cálculo de un nuevo vector de términos 1ndependlentes, formado a partir del vector a^N, más la contribuc16n de las condiciones de contorno conoc1das, en dicho instante de tiempo. S1n embargo, la Inversión de la matriz del sistema sólo es necesar1o realizarla una sóla vez, puesto que, como puede verse, dicha matriz es siempre la misma.

3.1.-Aspectos númer!cos y comoutacjona!es.

Según se observa del planteamiento del método, y de las d1scretizac1ones adoptadas en tiempo y espacio, no existe, en pr1ncip1o, ninguna dependencia entre el tamaño minimo de los elementos escogidos para la discretización geométrica, y la duración del incremento de tiempo de la discretización temporal. Sin embargo, en las aplicaciones práct1cas del método, se encuentra, que los resultados no son suficientemente satlsfactor1os si d1chas cant1dades no cumplen la relac16n:

$$c_p \cdot \Delta t \le sl_{min}$$

siendo cp la velocidad de las ondas P, que son las más rápidas, At el valor del lapso adoptado, y sl_{min} la más pequeña de las sem1long1tudes de los elementos del contorno. Esta cond1ción slgnif1ca, que los efectos de cargar un nodo cualqu1era q, no van más allá del elemento que lo cont1ene, durante el pr1mer 1ntervalo de t1empo.

Bajo el aspecto computacional hay que resaltar la necesidad de almacenar, a lo largo de todo el cálculo, todas las matr1ces globales H^N y G^N, asl como los vectores de tensiones y desplazamientos, calculados en cada Instante de t1empo. Esto es asl, por la convolución que en cada paso se real Iza entre las matrices y d1chos vectores, para éalcular el término a^N, que exige mult1plicar cada matriz por un vector d1ferente en cada instante de tiempo.

4.- APLICACIONES

4.1.- Placa sometIda a tracc100.

El problema cons1ste en una banda Infinita empotrada en uno de sus lados y 11bre en el otro. Este dominio se somete, en su extremo 11bre, a una carga constante unidad, que se ap11ca súbitamente, en el 1nstante Inicial t=O. Matemát1camente, su evolución en el tiempo se representa por una función escalón de Heavlslde.

Debido a la slmetrfa del problema, puede modelarse por una banda de la misma anchura que la or1glnal y longitud f1n1ta, L, restringiendo en estos extremos laterales, el movlmento en dirección oeroendlcular a la carqa.

Para la discretlzac1ón de la geometría, se han escogido dos longitudes diferentes, 2 y 3,5 , para comprobar su efecto en los resultados. Las caracterfsticas del material son, p=1, μ=40.000 y v=0,25. Para el caso de L=2 se han resuelto dos

casos con diferentes At, uno en el cual la onda no sale del elemento durante el primer intervalo de tiempo ($C_p t = 5 \cdot 10^{-4}$), y otro en que sí lo hace ($C_p t = 10 \cdot 10^{-4}$). Para ambas se ha discretizado el contorno med1ante 24 elementos constantes, 4 en el extremo libre y el empotrado, y 8 en los dos laterales. Los resultados de ambos problemas se presentan en la f1gura 1. En d1cha figura se observa la excelente aprox1mac16n de los resultados a la solución teór1ca del problema. Para los Instantes de t1empo r1nales las soluc1ón con el Intervalo de tiempo mayor se deteriora. Como ya se apuntó la causa de ello es que la onda no permanece dentro del elemento durante el primer Intervalo de tiempo.

Para la otra geometrfa, L=3,5 , se han tomado 7 elementos sobre los extremos libre y empotrado y 8 en los lados laterales. Se ha adoptado para este caso el Incremento de t1empo mayor ($At = 10 \cdot 10^{-4}$). Se representa en la figura 2 el movimiento vertical en dos puntos del extremo libre. Puede observarse que la aproximación es tan buena como en el caso del modelo anterior con *el* incremento de tiempo menor.

Estos resultados muestran la sensibi11dd del método a la forma del modelo y posición de los puntos. Dichos resultados pueden Justificarse teniendo en cuenta que la solución que aporta el método está perturbada por unas "ondas de contorno" que recorren el mismo a una veloctdad superior a la de las ondas reales del medto. estas ondas surgen de la discrettzaclón, ya que cuando una perturbación llega a un extremo de un elemento, a todos los efectos, es como s1 el elemento entero hubiera sido 1nflutdo por la mtsma, trasladandola hasta el centro del elemento, que se convierte, ahora, en un emisor de ondas. Este indeseable efecto se atenuará con una aproximación más exacta de las var1ables sobre los elementos, como la que se alcanza con elementos parabólicos.

En la figura 3 se representan las tensiones que aparecen en la base de la placa. Se ha representado la media de los 7 puntos que constituyen la d1scret1zac16n en ese extremo. Puede comprobarse que la aprox1mación es buena y representa con bastante prec1sión el salto brusco de tensión.

4.2.- Elemento sometido a flexión.

El siguiente aplicación consiste en un elemento rectangular empotrado en un lado y libre en los otros tres. En el extremo opuesto al empotramiento se coloca una carga cortante, que varía con el tiempo según se ve en la figura 4.

Para modelarlo, se ha tomado las dos d1scretlzaclones temporales anteriores y dos de la geometria, una con 12 elementos y otra con 24. En la figura 5 se presentan los resultados del desplazamiento horizontal de un punto del extremo cargado y se comparan los resultados con los obtenidos por otros autores /9/. Los resultados para tiempos cortos son buenos con todas las discretizac1ones, pero se deterioran conforme pasa el tiempo, más cuanto más groseras son aquellas.

5.- CONCLUSIONES.

Como conclusión se puede decir que el método ofrece soluciones aproximadas incluso para el elemento sometido a flexión, donde los elementos constantes, aproximan con dificultad el campo de desplazamientos. La aproximación de los resultados puede Incrementarse aumentando el número de elementos e Intervalos de tiempo. Se obtiene una mejor aprox1mac16n manteniendo la onda dentro del elemento durante el pr1mer intervalo de tiempo, por lo que la reducción de los elementos de contorno debe 1r acompañada de una reducción del Intervalo de t1empo.

Se ha mostrado una formulación del MEC para problemas elastodlnámlcos bidimensionales. Se basa en aproximar mediante escalones constantes la variación en el t1empo de las magnitudes. Esta simplificación conduce a un planteamiento muy sencillo cuyos resultados son satisfactorios. Para aplicaciones más complejas que las presentadas en este trabajo será necesario mejorar la aproximación de las variables, tanto en el tiempo como en el espacio.

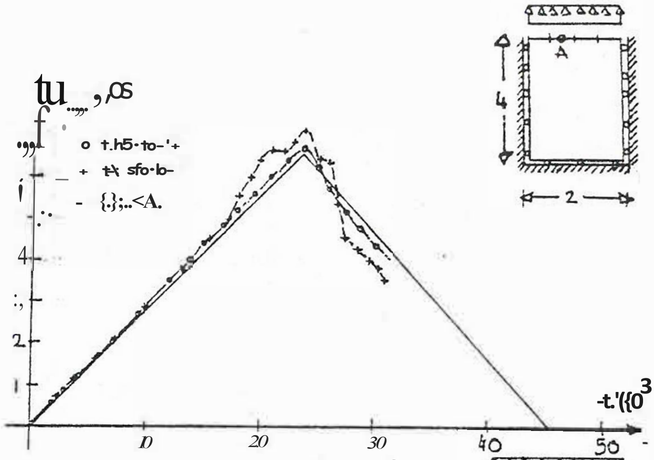

Figura 1

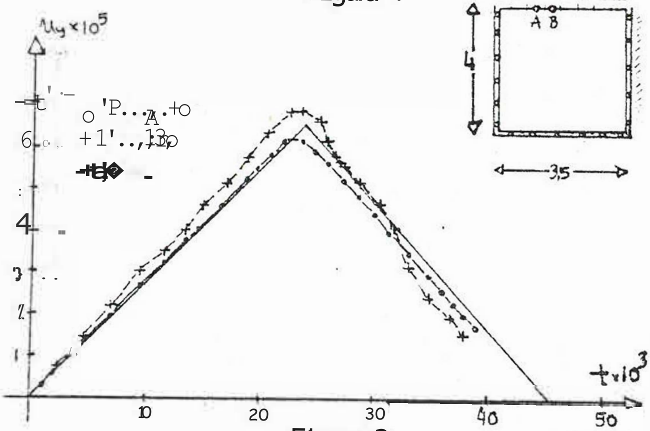

Figura 2

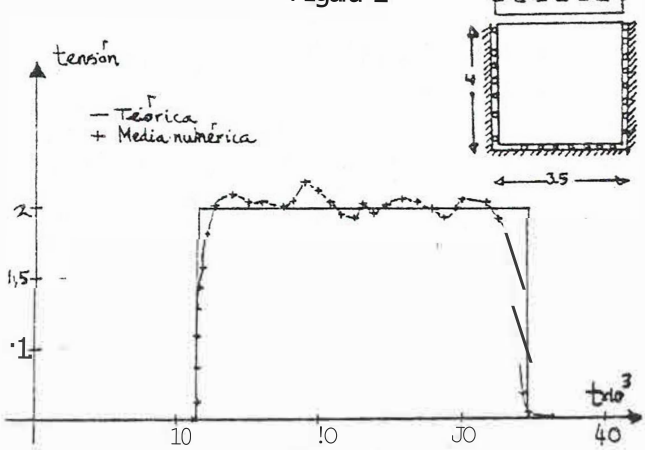

Figura 3

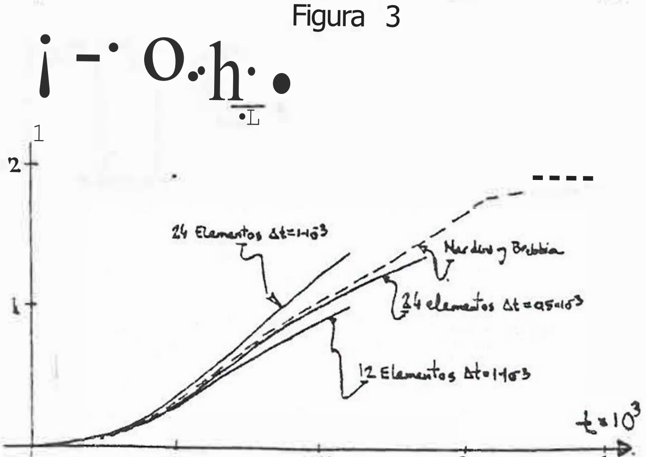

Figura 4

6.- BIBLIOGRAFIA

1.- Love, AE.H. "The Propagation of wave-mot1on 1n an Isotrop1c E1ast1c Sol1d Med1um". Proc. London Mathemat1cal Soc1ety, Ser1es 2, 1. 1904.

2.- Cruse, T A y Rizzo, FJ. "A Direct Formulat1on of the General Trasient Elastodynam1c Problem I". International Journal of Mathematlcal Analys1s and Aplications, Vol. 22, pp. 244-259, 1968.

3.- Manol1s, GD. y Beskos, OE. "Dynamic Stress Concentration Studies by Boundary Integral and Laplace Transform". Internat1onal Journal of Numerical Metnods in Engineermg, Vol. 17, pp. 573-599, 1981.

4.- Niwa, Y., Kobayash1, S. y Fukui, T. "Apl1cations of the Integral Equation Method for Some Geomechan1cal Problems". Numer1ca1 Method In Geomechanlcs, ASCE, Vol. I, pp. 120-131, 1976.

5.- Domínguez, J. "Dynamic Stlffness of Rectangular Foundat1ons·. Research Report R78-20, Departament of Civ11 Englneer1ng, Massachusetts Institute of Technology, Cambr1dge, Mass., 1978.

6.- Kobayashl, S. y Nlshimura, N. ·oynamic Response of Surface Foundations by Time Domaln BEM". International Sympos1um on Dynamlc Soll-Structure Interactlon, Mlnneapolis, Balkema, Rotterdam, 1984.

7.- Cole, DM., Kosloff, DD. y Mlnster, J.B. "A Numerlcal Boundary Integral Equat1on Method for Elastodynamlc 1:. Bullet1n of the se1smolog1cal Soclety of Amerlca, Vol. 68, pp. 1331-1357, 1978.

8.- Er1ngen, AG. y Suhubi, ES. "Elastodynamics·, Vol 11, 1975.

9.- Nardini, D. y Brebbia, CA. "Trasient Dynamic Analysls by the Boundary Element Method". Proceedlng of the Flth Internat1onal Conference, Hlroshlma, Japan, 1983.