

119273988

Solo Consulta

4109

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

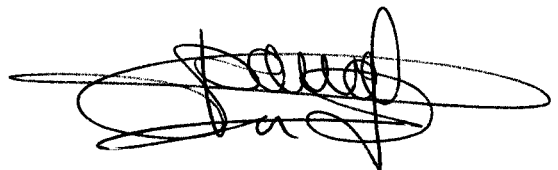
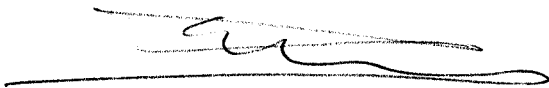
Tesis

26

GRAFOS PERIÓDICOS: UNA
FAMILIA DE GRAFOS INFINITOS
QUE ADMITEN UNA
ALGORÍTMICA CONSTRUCTIVA

Vº Bº
del Director

Memoria presentada por
Juan Carlos Dana Jiménez
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla



Fdo. Alberto Márquez Pérez
Profesor Titular de Universidad
del Departamento de
Matemática Aplicada I
de la Universidad
de Sevilla

Sevilla, abril de 1994

FACULTAD DE INFORMÁTICA
Y ESTADÍSTICA. BIBLIOTECA

60

58

Fleura Kappili

A MARÍA JOSÉ

*¡Non fuyades, cobardes y viles criaturas,
que un solo caballero es el que os acomete!*

“El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha”.

MIGUEL DE CERVANTES SAAVEDRA.

Resumen

El objetivo de esta tesis es definir una familia de grafos infinitos en la cual es posible construir una algorítmica finita.

Se estudiará los grafos infinitos fundamentalmente por dos razones: una de ellas porque los grafos infinitos constituyen una estructura incluida dentro de las matemáticas y, por tanto, merece la pena su estudio; la otra razón es que, en realidad, conociendo soluciones de problemas que se plantean en grafos finitos, podemos trasladarlos para familias crecientes de grafos finitos (lo que en la literatura se conoce como *Grafos Universales*).

En grafos infinitos, uno de los principales problemas que surgen es la forma de poder definirlos de manera que puedan ser tratados en el ordenador. En esta memoria, este problema es solventado definiendo los grafos de manera recurrente, es decir, definimos un grafo finito y, a partir de él y mediante reglas aritméticas, definimos los demás vértices y aristas del grafo infinito. Esta familia está constituida por grafos que llamaremos *grafos periódicos*.

A pesar de lo restringida que pueda parecer esta familia de grafos, muchos ejemplos de grafos infinitos que surgen en la literatura se pueden incluir dentro de este contexto, como por ejemplo cabe citar los grafos tratados por B. Grünbaum y G.C. Shephard en "*Tilings and Patterns*", Freeman, New York. Año 1987; los que surgen al resolver sistemas de ecuaciones en grafos (estudio que se recoge en M. Bauderon, "*On System of Equations Defining Infinite Graphs*", C.N.R.S. prc. *Mathematiques et Informatique*); en teoría de probabilidades; los *Diagramas de Cayley* son ejemplos de grafos infinitos contenidos en esta familia, etc.

Los algoritmos básicos que se emplean en la resolución de multitud de cuestiones en grafos finitos, son los algoritmos de conexión, construcción de un árbol generador y de planaridad. Como ejemplo de la construcción de una algorítmica para grafos periódicos, en este trabajo se construye un algoritmo que responde si el grafo periódico es conexo o no, un algoritmo que construye un árbol generador, y algoritmos que responden al problema de la planaridad de un grafo periódico y a la planaridad sin acumulación de vértices (p-planaridad). Los algoritmos aquí presentados para grafos periódicos, resuelven los problemas en tiempo polinomial.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que, de una u otra forma, han contribuido a la realización de este trabajo.

En primer lugar, debo citar al profesor Alberto Márquez Pérez por su constante apoyo y por su ayuda incondicional, sin los que esta memoria nunca se hubiera realizado.

También quiero resaltar la gran ayuda, tanto logística como moral, que me prestaron los profesores Luis Boza Prieto y Antonio Jiménez Merchán.

Quiero expresar mi gratitud a mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I que siempre me ayudaron cuando los necesité.

En último lugar, que no en importancia, no puedo dejar de mencionar a mi familia, mis amigos y, de forma muy especial, a María José y a Clara, por su paciencia y estímulo durante la realización de este trabajo.

Capítulo A

Introducción

Pocos campos dentro de las matemáticas aparecen tan relacionados como pueden ser la Teoría de Grafos y la Algorítmica. Efectivamente, una parte importante de la Teoría de Grafos requiere o trata de la resolución algorítmica de los problemas que se plantean y, por otra parte, no existe otra vía más natural para introducirse en la algorítmica que la Teoría de Grafos, ya que las estructuras que se presentan en algorítmica permiten, de forma muy sencilla, introducirse en dicha disciplina.

Por razones obvias, prácticamente la totalidad del esfuerzo desarrollado por la algorítmica en teoría de grafos queda limitado para el caso en que los grafos son finitos. Sin embargo, los grafos infinitos constituyen una estructura a la que se le ha dedicado relativamente poco estudio y esfuerzo, aunque tal vez merezca la pena dedicarle una mayor atención. Fundamentalmente por dos razones:

- La primera porque los grafos infinitos constituyen una estructura incluida dentro de las matemáticas y, por tanto, merece la pena su estudio.
- Una segunda razón es que, en realidad, conociendo soluciones de problemas que se plantean en grafos finitos, podemos trasladarlos para familias crecientes de grafos finitos (lo que en la literatura se conoce como *Grafos Universales* [45]).

Por otra parte, y posiblemente sorprendente para muchos, últimamente se han desarrollado muchos métodos que permiten trabajar algorítmicamente en estruc-

turas infinitas [29] e incluso, dentro de la teoría de grafos, existen algunos esfuerzos por resolver problemas en grafos infinitos, tanto los que vienen definidos de una forma recursiva o bien generados por grafos finitos [5].

Sin embargo, hay que decir que estos métodos señalados anteriormente es fácil comprobar que es imposible desarrollar una algorítmica similar a las clásicas existentes para grafos finitos (algorítmica que resuelve problemas como conexión de un grafo, planaridad, etc.) si los grafos están definidos de esa forma. Así por ejemplo, si un grafo viene definido de forma recursiva [53] ni tan siquiera es posible desarrollar un algoritmo que responda si una arista dada es arista del grafo.

Otra cuestión sería definir el grafo de forma recursivamente enumerable. En este caso es posible conocer, sin más que ir generando una lista, que evidentemente sería parcial, las aristas del grafo. Pero aún en este caso sería imposible desarrollar una algorítmica que, en tiempo finito, responda si el grafo es conexo o no (problema que es fundamental tenerlo resuelto, desde un punto de vista algorítmico, en teoría de grafos).

Para solventar estos problemas definiremos una familia de grafos infinitos como serán los grafos *periódicos*. Básicamente, un grafo periódico será la unión de todas las traslaciones, según vectores de \mathbf{Z}^2 , de cierto grafo finito dado.

A pesar de lo restringida que pueda parecer esta definición, muchos ejemplos de grafos infinitos que surgen en la literatura se pueden incluir dentro de este contexto, como por ejemplo cabe citar los grafos tratados por B. Grünbaum en “*Tilings and Patterns*” [23], los que surgen al resolver sistemas de ecuaciones en grafos [5], los diagramas de Cayley ([22] y [17]), etc.

Cabe decir que, a lo largo de esta memoria trataremos de desarrollar una algorítmica sobre los grafos infinitos anteriormente definidos. Para ello, lo que se hará será tratar tres problemas clásicos en la Teoría de Grafos finitos y la Algorítmica como son la conexión, existencia y construcción de un árbol generador, y el problema de la planaridad. Veremos que es posible desarrollar algoritmos que resuelvan, incluso en tiempo polinomial, dichos problemas.

La memoria está organizada de la siguiente forma: Un primer capítulo de preliminares que recoge de una forma general las definiciones básicas de Teoría

de Grafos y Algorítmica, así como algunos resultados que se utilizarán posteriormente.

Anteriormente se ha definido la familia de grafos periódicos generados por un grafo finito como los trasladados en todo el plano de dicho generador. En el siguiente capítulo de este trabajo se resuelve el problema de la conexión para esta familia de grafos. A diferencia del caso finito, que para estudiar la conexión se parte de un vértice y se construye un árbol generador, para el caso de un grafo periódico se comprueba si éste pertenece a una serie de ciertas familias definidas previamente, las cuales se intersectan en una subfamilia que definen a los grafos infinitos conexos. Una vez que se ha estudiado y resuelto el problema de la conexión para grafos periódicos, se presenta en este capítulo un algoritmo que, en tiempo $O(n^9)$, responde si dicho grafo periódico es conexo o no, siendo n el número de componentes conexas que tiene el grafo finito que genera al periódico. En el caso en que el grafo periódico no es conexo, tenemos suficiente información sobre la cantidad y la forma que tienen sus componentes conexas. Así, dependiendo de las familias a las que pertenece el grafo periódico, éste podrá tener un número infinito de componentes finitas, un número finito de componentes infinitas, un número infinito de ellas, etc. Además, si el grafo finito que genera al periódico tiene n componentes conexas se tiene que, a lo más, existen n componentes en el grafo periódico que, mediante traslaciones de éstas, se obtienen todas las demás.

Posteriormente, en el siguiente capítulo, se resuelve el problema de la construcción de un árbol generador (en la literatura *spanning tree*) para grafos periódicos conexos. Un primer resultado que se tiene es que un grafo periódico conexo siempre contiene ciclos, por lo que la estructura de árbol infinito no podemos definirla como grafo periódico. Por lo tanto, se amplía la definición de la familia de los grafos periódicos a otra familia, formada por lo que se llamarán *grafos periódicos generalizados*, de forma que un grafo periódico generalizado no será más que una unión finita de grafos periódicos. Se verá que dentro de esta familia podemos encontrar grafos infinitos sin ciclos y se demostrará que todo grafo periódico conexo contiene, en la familia ampliada, un subgrafo suyo que es árbol generador. Después de las bases teóricas que demuestran que siempre existe un árbol generador de un grafo periódico conexo, se presenta un algoritmo que, en tiempo $O(n^4)$, construye dicho árbol, definiéndolo como un grafo periódico generalizado. En el caso en que el grafo periódico no sea conexo, se tiene que existe un subgrafo de él que contiene generadores de todas las componentes conexas del

periódico. Bastará con aplicar dicho algoritmo a cada componente conexa.

Por último se estudia el problema de la planaridad y la planaridad sin acumulación de vértices (en la literatura *p-planaridad*) para grafos periódicos, haciendo distinción en toda la casuística posible según cómo puedan ser las componentes conexas de dicho grafo periódico. Al igual que en los otros capítulos, se presenta un algoritmo que, en el peor de los casos en tiempo $O(m^2)$, con m el número de vértices del grafo finito que genera al periódico, resuelve el problema de la planaridad y el de la planaridad sin acumulación de vértices.

Al final de cada capítulo hemos preferido presentar conclusiones y problemas abiertos, pues se ha creído que podría contribuir a fijar el alcance y una posible prolongación de los temas estudiados y de otros temas mencionados.

Por último se da una sección dedicada a la bibliografía empleada, así como las referencias básicas que se han utilizado para el desarrollo de este trabajo.

Índice

| | |
|--|-------------|
| Resumen | v |
| Agradecimientos | viii |
| Introducción | ix |
| Índice | xiii |
| 0 Preliminares | 1 |
| 0.1 Notaciones y terminología | 2 |
| 0.2 Grafos periódicos | 8 |
| 1 Conexión de grafos periódicos | 13 |
| 1.1 Introducción | 13 |
| 1.2 El problema de la conexión | 14 |
| 1.3 Caracterización de la conexión | 19 |
| 1.4 Algoritmo de conexión | 45 |
| 1.4.1 Algoritmo | 46 |
| 1.4.2 Complejidad del algoritmo | 48 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.5 | Conclusiones y problemas abiertos | 50 |
| 2 | Árbol generador | 53 |
| 2.1 | Introducción | 53 |
| 2.2 | Preliminares | 55 |
| 2.3 | Generalización de grafos periódicos | 59 |
| 2.4 | Construcción del árbol generador | 65 |
| 2.5 | Descripción del algoritmo | 68 |
| 2.5.1 | Algoritmo “ <i>SPANNING TREE</i> ” | 84 |
| 2.5.2 | Complejidad del Algoritmo | 87 |
| 2.6 | Conclusiones y problemas abiertos | 89 |
| 3 | Planaridad en grafos periódicos | 91 |
| 3.1 | Introducción y preliminares | 91 |
| 3.2 | Planaridad en grafos periódicos conexos | 96 |
| 3.2.1 | W-periplanaridad | 96 |
| 3.2.2 | Planaridad en grafos periódicos conexos | 99 |
| 3.2.3 | Algoritmo de planaridad | 110 |
| 3.2.4 | Complejidad del algoritmo | 111 |
| 3.3 | P-planaridad en grafos periódicos conexos | 113 |
| 3.4 | P-planaridad en grafos periódicos no conexos | 113 |
| 3.4.1 | Grafos Spanning | 114 |
| 3.4.2 | P-planaridad | 119 |

| | | |
|-------|---|------------|
| 3.4.3 | Algoritmo de p-planaridad | 123 |
| 3.4.4 | Complejidad del algoritmo de p-planaridad | 124 |
| 3.5 | Conclusiones y problemas abiertos | 125 |
| | Bibliografía | 127 |

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se darán las nociones y definiciones generales que se utilizarán a lo largo de esta memoria.

Esta memoria contiene conceptos que el lector deberá, si no conocer, estar suficientemente familiarizados con ellos.

Básicamente, este trabajo se podría enmarcar dentro de la Teoría de Grafos y la Geometría Computacional, así como desde un punto de vista informático, en la Algorítmica.

Cualquier texto introductorio de Teoría de Grafos, como el de Chartrand y Lesmak [18], el de Harary [27] (para grafos finitos); el de König [35] y los *surveys* de Thomassen [49] y Nash y Williams [42] (para grafos infinitos); de Geometría Computacional, como el de Preparata y Shamos [52]; así como algún otro de algorítmica, como el de Aho, Hopcroft y Ullman [1], el de Nishizeki y Chiba [43], etc. serán suficientes como referencias para la terminología y resultados que se utilizan en este trabajo.

Se tratarán, en esta memoria, una familia de grafos infinitos que, básicamente, vienen definidos por un grafo finito y, mediante traslaciones en el plano, se genera uno infinito. Se pueden encontrar grafos de esta familia recogidos en [23] así como en [17] y [22]; y, como referencia al tema de la recursividad y grafos recursivos, podemos citar el texto de Ann Yasuhara [53].

0.1 Notaciones y terminología

Esta sección contiene algunas precisiones sobre el language y notaciones que utilizaremos.

Un grafo G es un par $\{V, A\}$, donde V es el conjunto de vértices de G y A es el conjunto de aristas de G . Una arista es un par no ordenados de vértices distintos de G . Dos vértices son adyacentes en G si existe una arista de G formada por esos dos vértices. Dos aristas son incidentes si tienen un vértice en común. Un vértice y una arista son incidentes si dicho vértice es uno de los dos vértices de la arista. Dos vértices se dicen incidentes si existe una arista entre ellos.

Si p es un vértice de un grafo G , denotaremos por $\delta(p)$ su valencia en G , que es el número de aristas de G incidentes con p . Por $lk(p, G)$ denotaremos el conjunto de vértices incidentes con p .

Representaremos el cardinal de un conjunto A por $|A|$.

Sea G un grafo y p_1 y p_2 dos vértices suyo. Un camino en G que une p_1 con p_2 es un conjunto ordenado $\alpha = \{p_1, q_1, q_2, \dots, q_n, p_2\}$ de vértices incidentes con el anterior y el siguiente. Definiremos la longitud de α como el número de vértices que tiene menos 1. También se llama camino en G que une a p_1 con p_2 a la sucesión de aristas $\{\{p_1, q_1\}, \{q_1, q_2\}, \dots, \{q_n, p_2\}\}$. La longitud de este camino es la misma que la de α que es igual al número de aristas que lo componen.

Un camino, como el anteriormente descrito, se dirá que es un ciclo si el punto inicial p y el final q coinciden, es decir, que $p = q$.

Sea \mathcal{R} la relación de equivalencia entre los vértices de un grafo G definida por: $v\mathcal{R}w$ si y sólo si existe un camino en G entre v y w . Llamaremos componentes conexas (o simplemente componentes) de G a las clases de equivalencia del conjunto cociente G/\mathcal{R} y diremos que un grafo es conexo si sólo tiene una componente conexa.

Un grafo conexo que no contenga ciclos se dirá que es un *árbol*. Caso en que el grafo no sea conexo, pero sin contener ciclos, se dice que es un *bosque*.

Por un grafo infinito se considerará a un grafo tal que su conjunto de vértices es infinito numerable y la valencia de cada vértice es finita (un grafo numerable y localmente finito). Se usará la notación y las definiciones de [27], excepto vértice por punto (point) y arista por línea (line).

Sean $\mathbf{G}_1 = (V_1, A_1)$ y $\mathbf{G}_2 = (V_2, A_2)$ dos grafos. Diremos que \mathbf{G}_1 es un subgrafo de \mathbf{G}_2 si V_1 es un subconjunto de V_2 y A_1 es un subconjunto de A_2 . Si $V_1 = V_2$ entonces se dirá que \mathbf{G}_1 es un subgrafo generador de \mathbf{G}_2 .

Si \mathbf{G} es un grafo entonces el complementario de un subgrafo H (denotado por $\mathbf{G} - H$) será el subgrafo de \mathbf{G} que consiste en las aristas de \mathbf{G} que no están en H y vértices de \mathbf{G} que no lo son de H .

Sean $\mathbf{G}_1 = (V_1, A_1)$ y $\mathbf{G}_2 = (V_2, A_2)$ dos grafos y $\phi : V_1 \rightarrow V_2$. Si ϕ es inyectiva y dados dos vértices p y p' de \mathbf{G}_1 son adyacentes en \mathbf{G}_1 se tiene que $\phi(p)$ y $\phi(p')$ son adyacentes en \mathbf{G}_2 , entonces se dice que ϕ es una inmersión de \mathbf{G}_1 en \mathbf{G}_2 . Si ϕ es una inmersión de \mathbf{G}_1 en \mathbf{G}_2 , biyectiva tal que ϕ^{-1} es una inmersión de \mathbf{G}_2 en \mathbf{G}_1 entonces ϕ es un isomorfismo entre \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 . \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 se dicen isomorfos si hay un isomorfismo entre ellos.

Sea una arista $l = \{p_1, p_2\}$, llamaremos partición de l o bien a un conjunto finito de aristas $\alpha = \{\{p_1, q_1\}, \{q_1, q_2\}, \dots, \{q_n, p_2\}\}$ con todos los vértices distintos o bien a la misma arista l . Sea \mathbf{G} un grafo, entonces llamaremos partición de \mathbf{G} al grafo obtenido al sustituir las aristas de \mathbf{G} por particiones suyas, de manera que los vértices que están en los interiores de las particiones de una arista son distintos entre sí y distintos de los vértices de \mathbf{G} . Diremos que dos grafos \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 son homeomorfos si existe un grafo \mathbf{G}_3 que sea partición de \mathbf{G}_1 y \mathbf{G}_2 .

Un 1-camino W en un grafo infinito \mathbf{G} es un subgrafo W de \mathbf{G} tal que existe un morfismo $\phi : J \rightarrow W$, siendo J un grafo homeomorfo a la semirrecta de los números reales no negativos \mathbf{R}^+ , de forma que induce una biyección en las aristas.

Un 2-camino W en un grafo infinito \mathbf{G} es un subgrafo W de \mathbf{G} tal que existe un morfismo $\phi : L \rightarrow W$, siendo L un grafo homeomorfo a la recta de los números reales \mathbf{R} , de forma que induce una biyección en las aristas.

Usaremos un invariante de los espacios no compactos, llamados, finales de

Freudenthal [21].

Definición 0.1.1 Un final de Freudenthal de un espacio no compacto X es un elemento del límite inverso $\mathcal{F}(X) = \varprojlim \Pi_0(X - K)$, donde K toma valores en la familia de los conjuntos compactos de X y Π_0 indica el número de componentes conexas.

El cardinal de $\mathcal{F}(X)$ se denota por $e(X)$. Cuando X es un grafo podemos usar una sucesión numerable $\mathbf{G}_1 \subseteq \mathbf{G}_2 \subseteq \dots$ de subgrafos finitos para obtener $\mathcal{F}(X)$ (ver [4] para más detalles).

Sea \mathbf{G} un grafo infinito y conexo. Sea \mathcal{W} el conjunto de todos los 1-caminos de \mathbf{G} . En este conjunto definimos la siguiente relación de equivalencia: Dados W_1 y W_2 dos 1-caminos, se dice que $W_1 \mathcal{R} W_2$ si y sólo si para cualquier subgrafo K de \mathbf{G} finito, existen vértices de W_1 y W_2 que están en la misma componente de $\mathbf{G} - K$. Si consideramos el cociente \mathbf{G}/\mathcal{R} , cada clase de equivalencia define un final de Freudenthal. Está claro que, para todo final de Freudenthal existe un 1-camino que desemboca en él.

Ejemplo 0.1.1 Sea \mathbf{G} un grafo infinito, entonces:

1. Si $e(\mathbf{G}) \leq \aleph_0$ entonces es fácil comprobar que existe un subgrafo K finito de \mathbf{G} tal que $\mathbf{G} - K$ tiene $e(\mathbf{G})$ componentes infinitas (ver el grafo \mathbf{G}_1 de la Figura 0.1).
2. $e(\mathbf{G})$ puede ser \aleph_0 , como por ejemplo el grafo \mathbf{G}_2 de la Figura 0.2.
3. $e(\mathbf{G})$ puede ser 2^{\aleph_0} , como por ejemplo el grafo \mathbf{G}_3 de la Figura 0.3.

□

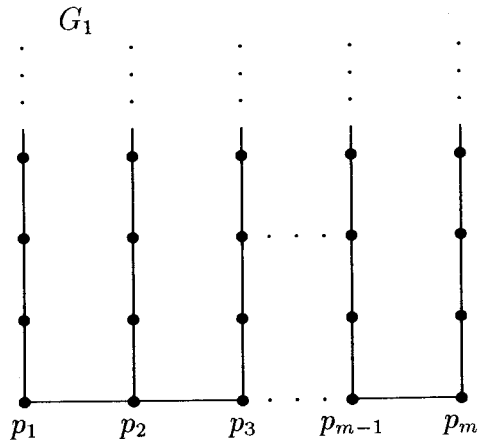


Figura 0.1: G_1 tiene m finales de Freudenthal

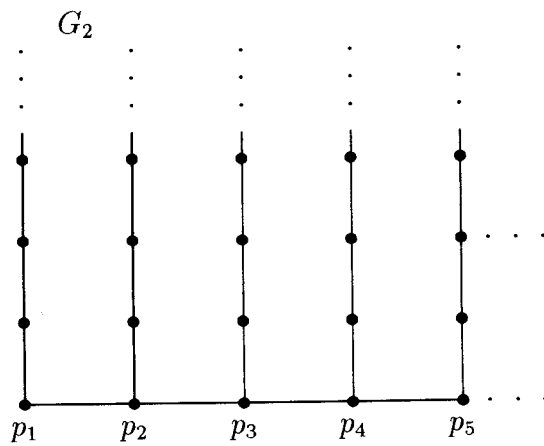


Figura 0.2: G_2 tiene \aleph_0 finales de Freudenthal

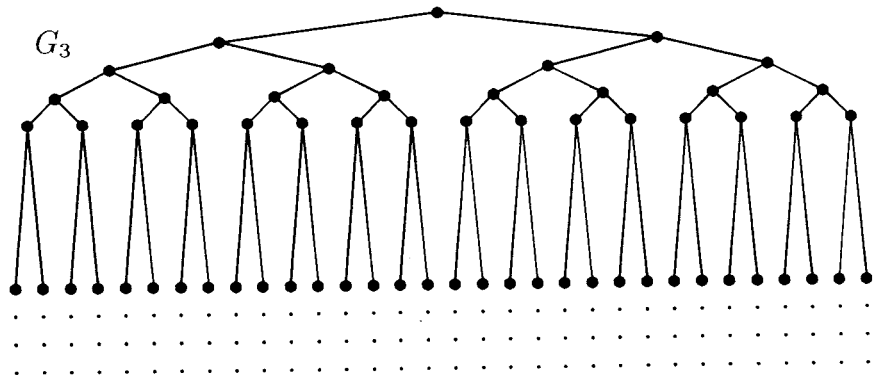


Figura 0.3: G_3 tiene 2^{\aleph_0} finales de Freudenthal

Las traslaciones en el plano de vectores (a, b) , con $a, b \in \mathbf{Z}$, se notarán por $\tau_{(a,b)}$. Así, el trasladado de un grafo G según el vector (a, b) , con $a, b \in \mathbf{Z}$, se notará por $\tau_{(a,b)}(G)$.

Se notará por \mathcal{T} el conjunto

$$\mathcal{T} = \{\tau_u | \tau_u : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2 \text{ con } \tau_u \text{ la traslación de vector } u\}$$

Gráficamente, un grafo (ya sea finito o infinito) se puede representar por un conjunto de \mathbf{Z}^2 y, entre algunos de sus vértices, arcos de curvas (sin precisar su forma y longitud), de forma que existirá un arco entre los vértices p y q de V si y sólo si el conjunto $\{p, q\}$ está en A . Así, los grafos de la Figura 0.4 pueden representar gráficamente al mismo grafo:

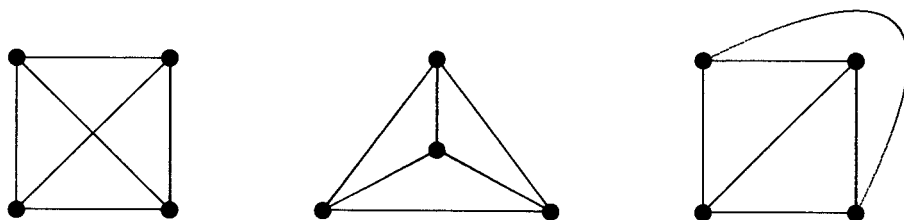


Figura 0.4

En este trabajo podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el conjunto de vértices de cualquier grafo finito está contenido en el cuadrado $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$.

Dado un grafo G conexo, un *árbol generador* se define como un subgrafo de G que no contiene ciclos y contiene a todos los vértices de G . Caso en que G no sea conexo, un subgrafo que cumpla las condiciones anteriores se dirá que es un *bosque generador*.

Puesto que cada grafo se puede representar gráficamente en el plano (notando a los vértices como puntos y a las aristas como arcos de curvas entre sus vértices), se dirá que un grafo es plano si existe una representación gráfica de tal forma que las aristas no se cruzan. Un ejemplo de grafo plano es el de la Figura 0.4, mientras que el de la Figura 0.5 no lo es:

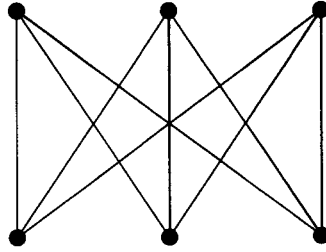


Figura 0.5

(para más detalles ver [27])

Paralelamente al concepto de planaridad, existe el de p-planaridad, que es una generalización para grafos infinitos. Un grafo infinito se dice que es p-plano si se puede representar gráficamente en el plano sin que sus aristas se cruce y de forma tal que no se acumulen vértices. Como ejemplo de grafo plano que no es p-plano es el de la Figura 0.6:

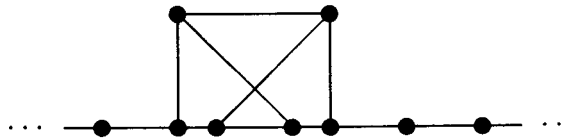


Figura 0.6

cuya inmersión en el plano podría ser la Figura 0.7:

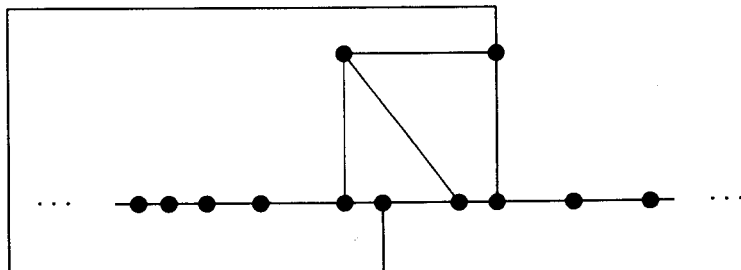


Figura 0.7

que, como se puede observar, existe acumulación de vértices.

A lo largo de este trabajo usaremos la siguiente notación clásica para denominar algunos grafos finitos (para más detalles ver [27])

- K_n es el grafo que por vértices tiene al conjunto $V = \{p_1, \dots, p_n\}$ y por aristas el conjunto $A = \{\{p_i, p_j\} : \text{con } p_i, p_j \in V \text{ y tal que } i \neq j\}$
- $K_{n,m}$ es el grafo que tiene por vértices al conjunto $V = \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m\}$ y por aristas el conjunto

$$A = \{\{p_i, q_j\} : p_i, q_j \in V \text{ y tal que } i \in \{1, \dots, n\} \text{ y } j \in \{1, \dots, m\}\}$$

El tiempo usado en la ejecución de un algoritmo es la suma de los tiempos que se invierten en cada uno de los pasos que sigue dicho algoritmo. Se suele utilizar, en lo que se refiere al análisis de algoritmos, una expresión del tiempo de ejecución módulo una constante multiplicativa. Expresión que viene dada mediante una función que mide la cantidad de operaciones realizadas en la ejecución del algoritmo. Esto es lo que se conoce por *efectividad* del algoritmo. Para medir la efectividad de los algoritmos descritos en esta memoria utilizaremos la notación asintótica introducida por Knuth [34]. Así, se notará por $O(f(n))$ el conjunto de todas las funciones $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ tales que existe una constante positiva C y existe un natural n_0 tal que para cualquier $n \geq n_0$ se tiene que $|g(n)| \leq C f(n)$. Se dirá pues indistintamente que $2n^3 - 3n^2 + 5n - 7$ es de $O(n^3)$ o bien que $2n^3 - 3n^2 + 5n - 7 \in O(n^3)$.

0.2 Grafos periódicos

En esta sección definiremos la familia de grafos infinitos en la cual construiremos una algorítmica. Como ya se ha indicado, esta familia estará generada por un grafo finito y, mediante traslaciones, se recubrirá todo el plano, generando así un grafo infinito. A los grafos así resultantes los llamaremos *grafos periódicos* y, es de señalar que grafos infinitos obtenidos por otros procedimientos como grafos resultantes de resolver sistemas de ecuaciones [5], diagramas de Cayley [17] [22], grafos mosaicos y patrones [23], etc., son ejemplos de grafos periódicos.

Se notará por \mathcal{C} el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$, y por $\partial\mathcal{C}$ el borde de dicho cuadrado.

Definición 0.2.1 Un grafo célula $G = \{V, A\}$ es un grafo finito en donde $V \subset \mathcal{C}$ y de tal forma que ningún vértice tiene valencia 0.

Definición 0.2.2 Dado un grafo célula G , se define el grafo periódico generado por G como el grafo \mathcal{M}_G siguiente:

- El conjunto de vértices de \mathcal{M}_G es el conjunto

$$\{q \in \mathbf{Z}^2 : q = \tau_{(m,n)}(p) \text{ con } p \text{ vértice de } G \text{ y } (m, n) \in \mathbf{Z}^2\}$$

- El conjunto de aristas es el conjunto

$$\{\{p', q'\} : p' = \tau_{(m,n)}(p), q' = \tau_{(m,n)}(q), \{p, q\} \text{ arista de } G \text{ y } (m, n) \in \mathbf{Z}^2\}$$

Se notará el grafo periódico como \mathcal{M}_G o bien como $(\mathbf{Z}_{(0,1)} + \mathbf{Z}_{(1,0)})(G)$.

Definición 0.2.3 Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Sea B un subconjunto de vértices de \mathcal{M}_G . Se dice que B tiene coordenadas $(m, n)_G$, con m y n enteros, si el conjunto $\tau_{(-m, -n)}(B)$ es un subconjunto de vértices de G .

Salvo que haya confusión, se notará las coordenadas como $(m, n)_G$ o bien simplemente por (m, n) .

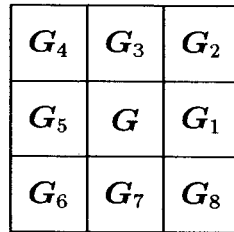
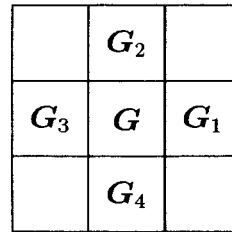
Definición 0.2.4 Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Sea B un subconjunto de vértices de G . Sean $m, n \in \mathbf{Z}$. Se dice que $B' = \tau_{(m,n)}(B)$ es una copia de B en \mathcal{M}_G .

Definición 0.2.5 Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Sea A' un subconjunto de \mathcal{M}_G . Se dice que A' es una copia de $A \subset G$ por G si existe un vector $u \in \mathbf{Z}^2$ tal que $\tau_u(A) = A'$.

Salvo que haya confusión, se dirá copias por G de un subconjunto A de G o simplemente copias de A .

Definición 0.2.6 Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera.

- Se definen los 8-vecinos de G como los subgrafos de \mathcal{M}_G , $\tau_{(i,j)}(G)$, en donde $i = -1, 0, 1$ y $j = -1, 0, 1$ con $(i, j) \neq (0, 0)$.
- Se definen los 4-vecinos de G como los subgrafos de \mathcal{M}_G , $\tau_{(i,j)}(G)$, en donde $i = -1, 0, 1$ y $j = -1, 0, 1$ con $(i, j) \neq (0, 0)$ y tal que el producto $ij = 0$.

8-vecinos de G 4-vecinos de G

Definición 0.2.7 Se dice que G está unido a G_i , con $i = 1, \dots, 4$, si existe un vértice común a G y a G_i . Se dice G que está unido a sus 4-vecinos si G está unido a G_1, G_2, G_3 y G_4 .

Nota 0.2.1 Podemos observar fácilmente lo siguiente:

- En la Definición 0.2.7 el vértice común a G y a G_i está en $\partial\mathcal{C}$.
- Si G está unido con G_1 entonces G está unido con G_4 .
- Si G está unido con G_2 entonces G está unido con G_3 .
- Si G tiene un vértice en una de las esquinas de $\partial\mathcal{C}$ entonces G está unido a sus 4-vecinos.

Entre los vértices situados en $\partial\mathcal{C}$, señalaremos unos que juegan un papel fundamental a lo largo de esta memoria. Estos son los siguientes:

Definición 0.2.8 Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Un vértice de G se dice que es de juntura si dicho vértice es también un vértice de algún 8-vecino.

Capítulo 1

Conexión de grafos periódicos

1.1 Introducción

El poder reconocer si un grafo es conexo o no, aparte de la gran importancia que tiene en sí mismo, es básico para la resolución de otros tipos de problemas. Por ejemplo, para reconocer si un grafo periódico es plano o no, estudiamos cada una de las componentes conexas del grafo periódico. Lo mismo ocurre con la p -planaridad, más aún, si un grafo periódico es plano y conexo entonces se verá que es p -plano.

Problemas relacionados con la conexión son la n -conectividad, entre otros, (siendo la conectividad un caso particular), la teoría de flujos, etc.

Cabe citar la importancia de la utilización de la conexión en procesamiento de imágenes (ver [46]), ya que a una imagen digitalizada se le puede asociar un grafo de tal forma que si a un *pixel* le asociamos un vértice, la componente conexa de un vértice corresponde a la figura que contiene dicho pixel.

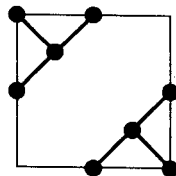
Entre otros campos en donde es utilizada la conexión de grafos podemos citar toda la teoría que estudia los movimientos de robots, ya que se puede asociar un grafo que representa los movimientos de un robot, en donde los vértices podrían representar los lugares en donde podría estar situado dicho robot, y la componente conexa de un vértice sería el conjunto de lugares accesibles por el robot, partiendo del lugar correspondiente a dicho vértice.

Dado un grafo finito G contenido en \mathcal{C} , con n componentes conexas, y si consideramos \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera, veremos que \mathcal{M}_G es conexo si y sólo si existe un subgrafo finito de \mathcal{M}_G que contiene a G en una componente de dicho grafo finito. De lo que se trata es de buscar una cota superior del tamaño de este grafo finito. Se resuelve este problema no construyendo un árbol maximal a partir de algún vértice, como ocurre en los grafos finitos, sino que comprueba si el grafo periódico está en una serie de familias definidas previamente.

Caso en que el grafo periódico no sea conexo, veremos que, a lo más, existen n componentes en \mathcal{M}_G (una por cada componente de G) tales que, mediante traslaciones, generan las restantes componentes del grafo periódico.

1.2 El problema de la conexión

Claramente se tiene que la conexión de un grafo periódico \mathcal{M}_G es independiente de la conexión del grafo célula G que lo genera, como muestran las Figuras 1.2 y 1.3.



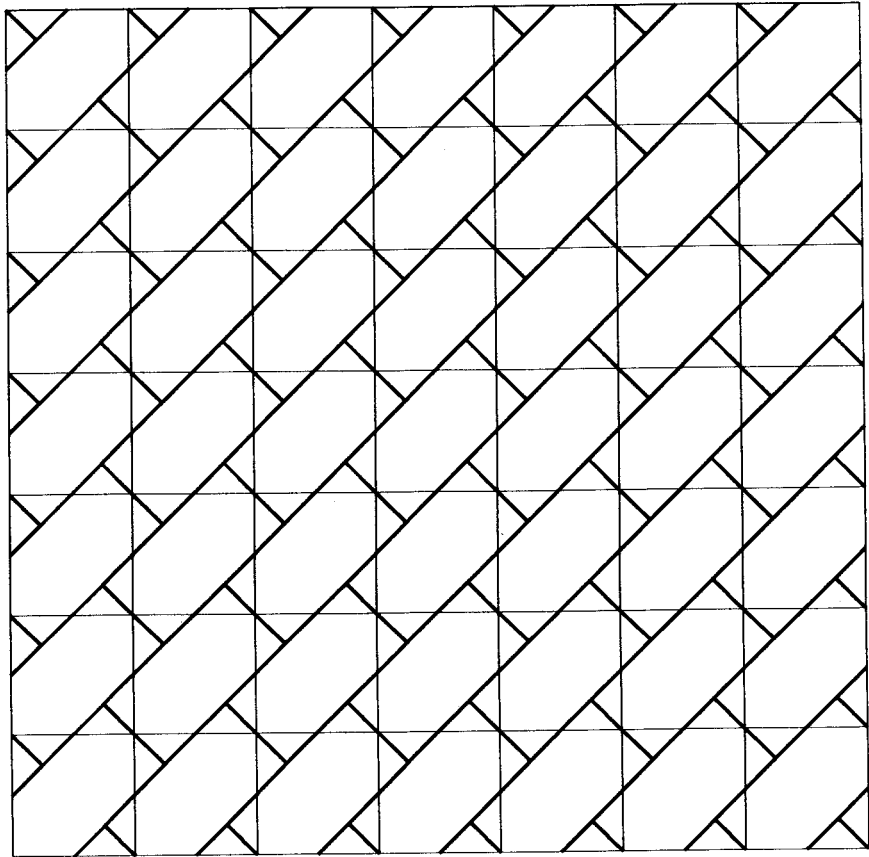
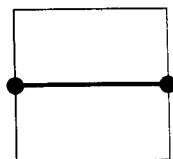


Figura 1.2: \mathcal{M}_G es conexo pero G no lo es



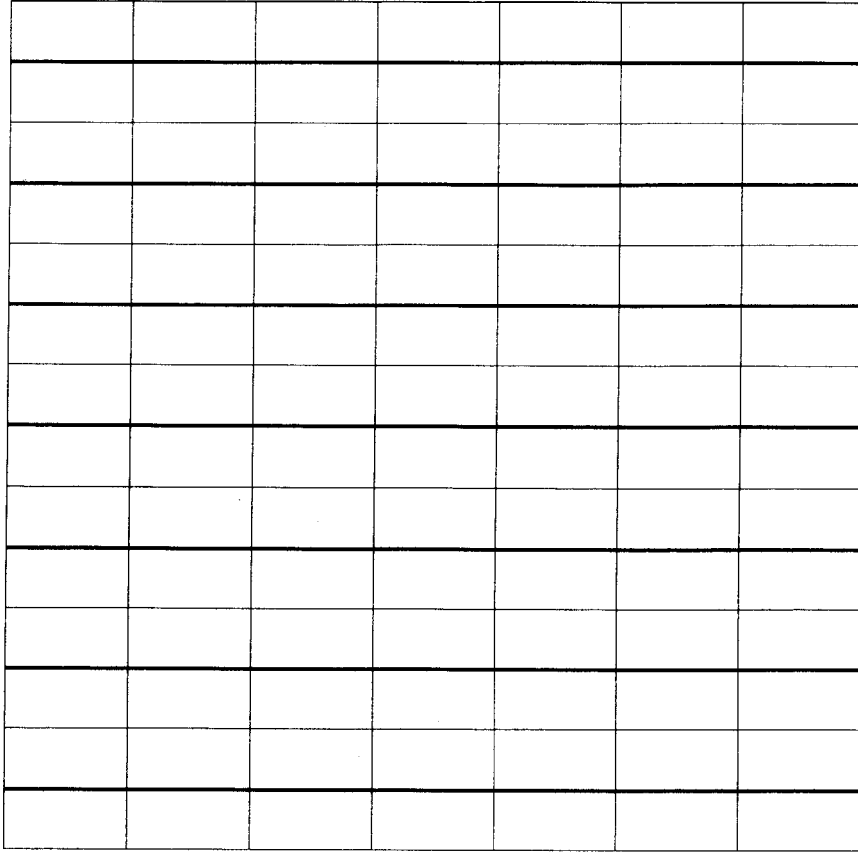


Figura 1.3: \mathcal{M}_G no es conexo pero G sí lo es

Por consiguiente, para la conexión de un grafo periódico infinito, el grafo célula deberá cumplir otras propiedades que se detallarán a continuación:

Definición 1.2.1 Sea G un grafo célula y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define el n -cuadrado de centro G y radio n , que lo notaremos por $\prod_n G$, como el subgrafo de \mathcal{M}_G

$$\prod_n G = \{G^* | G^* \subseteq \mathcal{C}^* \text{ copia de } G \text{ en donde } \mathcal{C}^* \equiv \tau_{(x,y)}(\mathcal{C}) \text{ con } \max\{|x|, |y|\} \leq n\}$$

Nota 1.2.1 EL n -cuadrado $\prod_n G$ está contenido en total en $(2n + 1)^2$ baldosas, todas copias de la baldosa \mathcal{C} (ver la Figura 1.4, en donde $\tau_{(i,j)}$ denota el trasladado del grafo G según el vector (i, j)).

| | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\mathcal{T}_{(-3,3)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,3)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,3)}$ | $\mathcal{T}_{(0,3)}$ | $\mathcal{T}_{(1,3)}$ | $\mathcal{T}_{(2,3)}$ | $\mathcal{T}_{(3,3)}$ |
| $\mathcal{T}_{(-3,2)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,2)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,2)}$ | $\mathcal{T}_{(0,2)}$ | $\mathcal{T}_{(1,2)}$ | $\mathcal{T}_{(2,2)}$ | $\mathcal{T}_{(3,2)}$ |
| $\mathcal{T}_{(-3,1)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,1)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,1)}$ | $\mathcal{T}_{(0,1)}$ | $\mathcal{T}_{(1,1)}$ | $\mathcal{T}_{(2,1)}$ | $\mathcal{T}_{(3,1)}$ |
| $\mathcal{T}_{(-3,0)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,0)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,0)}$ | \mathbf{G} | $\mathcal{T}_{(1,0)}$ | $\mathcal{T}_{(2,0)}$ | $\mathcal{T}_{(3,0)}$ |
| $\mathcal{T}_{(-3,-1)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,-1)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,-1)}$ | $\mathcal{T}_{(0,-1)}$ | $\mathcal{T}_{(1,-1)}$ | $\mathcal{T}_{(2,-1)}$ | $\mathcal{T}_{(3,-1)}$ |
| $\mathcal{T}_{(-3,-2)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,-2)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,-2)}$ | $\mathcal{T}_{(0,-2)}$ | $\mathcal{T}_{(1,-2)}$ | $\mathcal{T}_{(2,-2)}$ | $\mathcal{T}_{(3,-2)}$ |
| $\mathcal{T}_{(-3,-3)}$ | $\mathcal{T}_{(-2,-3)}$ | $\mathcal{T}_{(-1,-3)}$ | $\mathcal{T}_{(0,-3)}$ | $\mathcal{T}_{(1,-3)}$ | $\mathcal{T}_{(2,-3)}$ | $\mathcal{T}_{(3,-3)}$ |

Figura 1.4: 3-cuadrado $\prod_3 \mathbf{G}$

Veamos una condición que caracteriza la conexión de un grafo periódico.

Teorema 1.2.1 *Sea \mathbf{G} un grafo célula y sea $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ el grafo periódico generado. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo.
2. (a) \mathbf{G} está unido a sus 4-vecinos.
 (b) Existe un natural $k \in \mathbf{N}$ tal que \mathbf{G} está en una componente conexa de $\prod_k \mathbf{G}$.

Demostración: En el caso en que \mathbf{G} no estuviese unido a algún 4-vecino (sin pérdida de generalidad podemos suponer que este es \mathbf{G}_1), un vértice $p \in \mathbf{G}$ no

estará unido en \mathcal{M}_G con otro $q \in G_1$, ya que si existe un camino α en \mathcal{M}_G que une p con q , se tendría que α pasa por un vértice que está en la recta que separa las baldosas de ordenada 0 con las de ordenada 1. Sea a ese punto, que está en la intersección de las baldosas $\tau_{(N,0)}(G)$ y $\tau_{(N,1)}(G)$, entonces el punto $\tau_{(-N,0)}(a)$ está en G y G_1 , por lo que llegaríamos a contradicción y \mathcal{M}_G no puede ser conexo.

Supongamos que \mathcal{M}_G es conexo. Sean A_1, \dots, A_n las componentes conexas de G . Por hipótesis existen caminos α_j , $j = 1, \dots, n$, que unen A_1 con A_j . Sea $k \in N$ tal que $\prod_k G$ contiene a todos los caminos α_j . Está claro que G está en una componente conexa de este k -cuadrado, con lo que se tendría esta implicación.

Veamos el recíproco. Supongamos que G está en una componente de $\prod_k G$ y G está unido a sus 4-vecinos, como G está en una componente de \mathcal{M}_G (ya que lo está en una de $\prod_k G$), sea H esta componente. Sea q_i un vértice de $G_i = \tau_{(x,y)}(G)$, $p_i = \tau_{(-x,-y)}(q_i)$ su trasladado en G , a_i un vértice de G_i y de G y $b_i = \tau_{(-x,-y)}(a_i)$ su trasladado en G . Como b_i y p_i están en G y por tanto en H , entonces existe un camino α_i entre b_i y p_i . El camino $\tau_{(x,y)}(\alpha_i)$ une a_i con q_i y como a_i está en G , y por tanto en H , se tiene que q_i también. Al ser q_i un vértice cualquiera de uno de los 4-vecinos de G , se tiene que los 4-vecinos de G están en H .

Repetiendo el mismo razonamiento si $\tau_{(a,b)}(G)$ está en H se prueba que sus 4-vecinos también están en H y, por inducción en la distancia l_1 a G , se prueba que toda baldosa está en H , ya que para una baldosa a distancia 0 ó 1 ya se tiene el resultado (la única baldosa a distancia 0 de G es la propia G y las baldosas a distancia 1 de G son sus 4-vecinos), mientras que si suponemos que las baldosas a distancia n de G están en H entonces una baldosa a distancia $n + 1$ de G es uno de los 4-vecinos de una de las baldosas a distancia n de G y como ésta está en H , aquella también. Con esto se tiene que H es todo \mathcal{M}_G y por tanto \mathcal{M}_G es conexo. \square

Si \mathcal{M}_G es conexo, a partir de ahora denotaremos como $K(G)$ al menor número natural n tal que G está en una componente de $\prod_n G$.

Supongamos que podemos encontrar un natural $h(\mathbf{G})$ de forma que se tenga que si $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo entonces $h(\mathbf{G}) \geq K(\mathbf{G})$. Entonces tendremos que el problema de la conexión para $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ sería algoritmizable, ya que estudiar dicho problema es equivalente a ver si \mathbf{G} está en una componente conexa del grafo finito

$$\prod_{h(\mathbf{G})} \mathbf{G}.$$

Nos ocuparemos de encontrar una cota superior de $K(\mathbf{G})$ en la siguiente sección.

1.3 Caracterización de la conexión

En esta sección lo que haremos será resolver el problema de encontrar una cota superior del natural k del Teorema 1.2.1.

Veamos primero que existe una cota que depende sólo del número de componentes conexas del grafo \mathbf{G} , lo cual supone un avance sobre el Teorema 1.2.1.

Proposición 1.3.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $k(n) \in \mathbb{N}$ tal que si \mathbf{G} es un grafo con n componentes conexas de forma que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo, entonces \mathbf{G} está en una componente del grafo $\prod_{k(n)} \mathbf{G}$.*

Demostración: Sean Γ el conjunto de los grafos con n componentes conexas tales que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo. Demos un orden a las n componentes de cada grafo de Γ y llamemos $C_j(\mathbf{G})$ a la j -ésima componente de $\mathbf{G} \in \Gamma$. Construyamos ahora, para $i = 1, \dots, 4$ y para $j, h = 1, \dots, n$, la función $f_i^{j,h} : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ definida como:

$$f_i^{j,h}(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_j(\mathbf{G}) \text{ tiene algún vértice del trasladado en } \mathbf{G}_i \text{ de } C_h(\mathbf{G}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para $i = 1, \dots, 4$ y $j = 1, \dots, n$ definamos $F_i^j : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}^n$ como

$$F_i^j(\mathbf{G}) = (f_i^{j,1}(\mathbf{G}), f_i^{j,2}(\mathbf{G}), \dots, f_i^{j,n}(\mathbf{G}))$$

$F_i : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}^{n^2}$ como

$$F_i(\mathbf{G}) = (f_i^1(\mathbf{G}), f_i^2(\mathbf{G}), \dots, f_i^n(\mathbf{G}))$$

y $F : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}^{4n^2}$ como

$$F(\mathbf{G}) = (f_1(\mathbf{G}), f_2(\mathbf{G}), f_3(\mathbf{G}), f_4(\mathbf{G}))$$

Está claro que si $\mathbf{G}, \mathbf{G}' \in \Gamma$ y $F(\mathbf{G}) = F(\mathbf{G}')$ cada camino de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ induce de manera natural un camino en $\mathcal{M}_{\mathbf{G}'}$ y recíprocamente cada camino de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}'}$ induce un camino en $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ y por tanto $K(\mathbf{G}) = K(\mathbf{G}')$.

Como $K(\mathbf{G})$ sólo depende del valor de $F(\mathbf{G})$ y F toma una cantidad finita de valores, se tiene que K está acotada en Γ y por tanto existe el número $k(n)$ del enunciado. \square

Antes de buscar una cota superior de $k(n)$ vamos a dar una cota inferior. Para ello veamos algunos ejemplos:

Definamos primero la baldosa plana $\mathbf{G}_n = (V_n, A_n)$, donde el conjunto de vértices y el de aristas vienen definidos como:

$$V_n = \left\{ \left(\frac{2k+1}{2n}, 0 \right), \left(\frac{2k+1}{2n}, 1 \right) : k = 0, \dots, n-1 \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$A_n = \left\{ \left\{ \left(\frac{2k+1}{2n}, 0 \right), \left(\frac{2k+3}{2n}, 1 \right) \right\} : k = 0, \dots, n-3 \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \left\{ \left(\frac{2n-3}{2n}, 0 \right), \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2n-1}{2n}, 1 \right) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}, \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2n-1}{2n}, 0 \right) \right\} \right\}$$

(ver las Figuras 1.5 y 1.6).

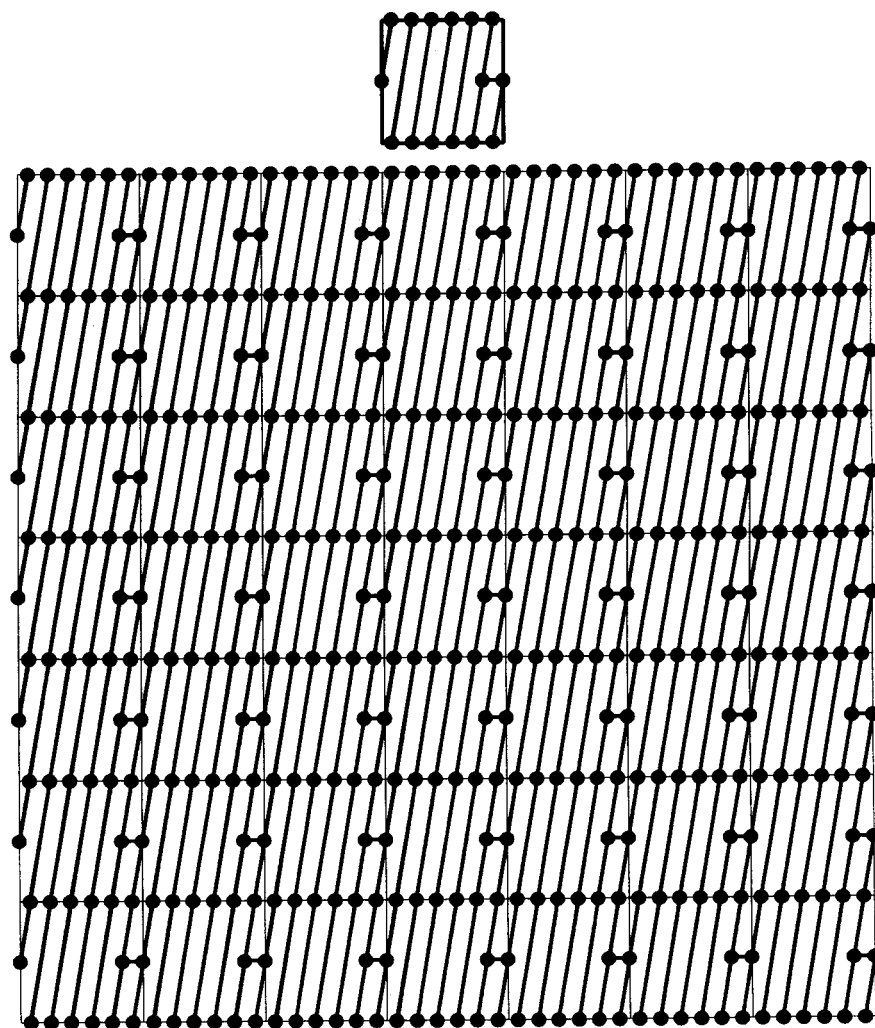


Figura 1.5: G_6 está en una componente de $\prod_3 G_6$, pero no de $\prod_2 G_6$

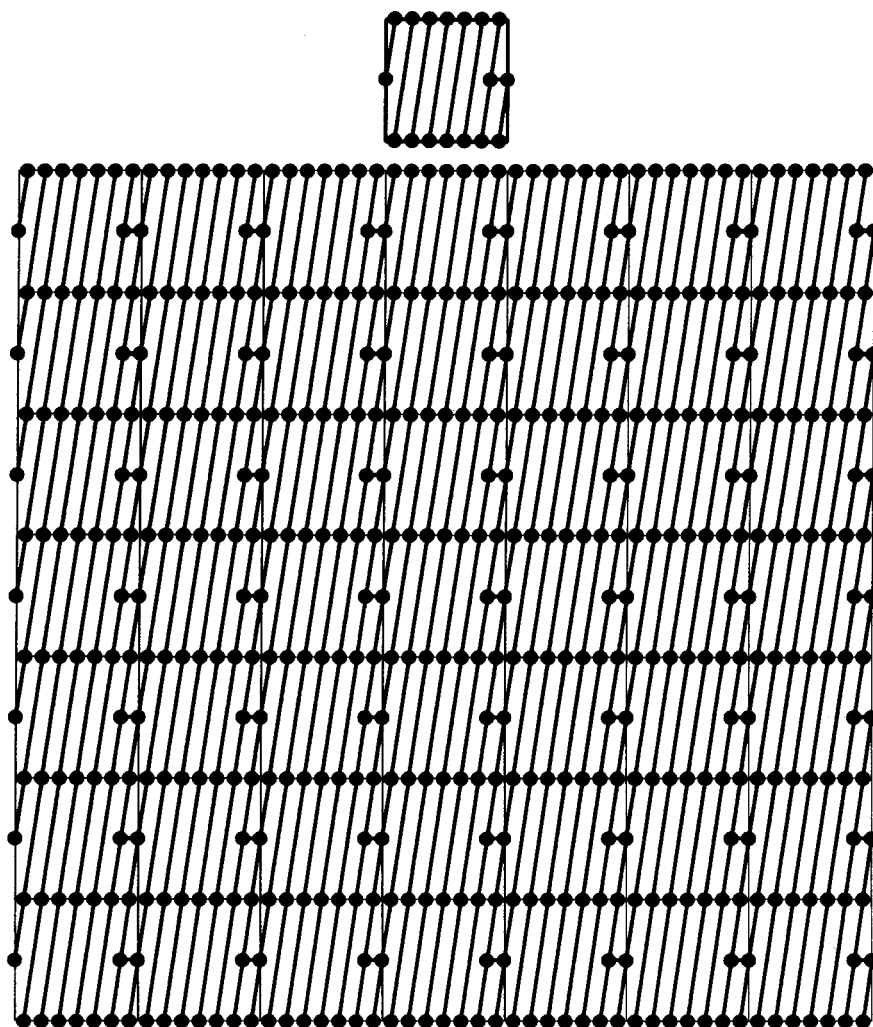


Figura 1.6: G_7 está en una componente de $\prod_3 G_7$, pero no de $\prod_2 G_7$

Es fácil comprobar que:

- G_n tiene n componentes.
- G_n está unido a sus 4-vecinos.
- G_n está en una componente de $\prod_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} G$.
- G_n no está en una componente de $\prod_{\lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor} G$.

De esto se deduce que \mathcal{M}_G es conexo y que $k(n) \geq \lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor$.

Sin embargo, esta cota puede aumentarse aún más. Definamos la baldosa no plana $G'_n = (V'_n, A'_n)$, siendo

$$V'_n = \left\{ \left(\frac{2k+1}{2n+2}, 0 \right) : k = 0, \dots, n \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \left(\frac{2k+1}{2n+2}, 0 \right), \left(\frac{2k+1}{2n}, 1 \right) : k = 1, \dots, n \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2} \right), \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$A'_n = \left\{ \left\{ \left(\frac{2k+1}{2n+2}, 0 \right), \left(\frac{2k+3}{2n+2}, 1 \right) \right\} : k = 0, \dots, n-2 \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \left\{ \left(\frac{2n-1}{2n+2}, 0 \right), \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \left\{ \left(\frac{2n+1}{2n+2}, 0 \right), \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \left(\frac{2n+1}{2n+2}, 1 \right), \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \left\{ \left(0, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{2n+1}{2n+2}, \frac{1}{2} \right) \right\} \right\}$$

(ver la Figura 1.7).

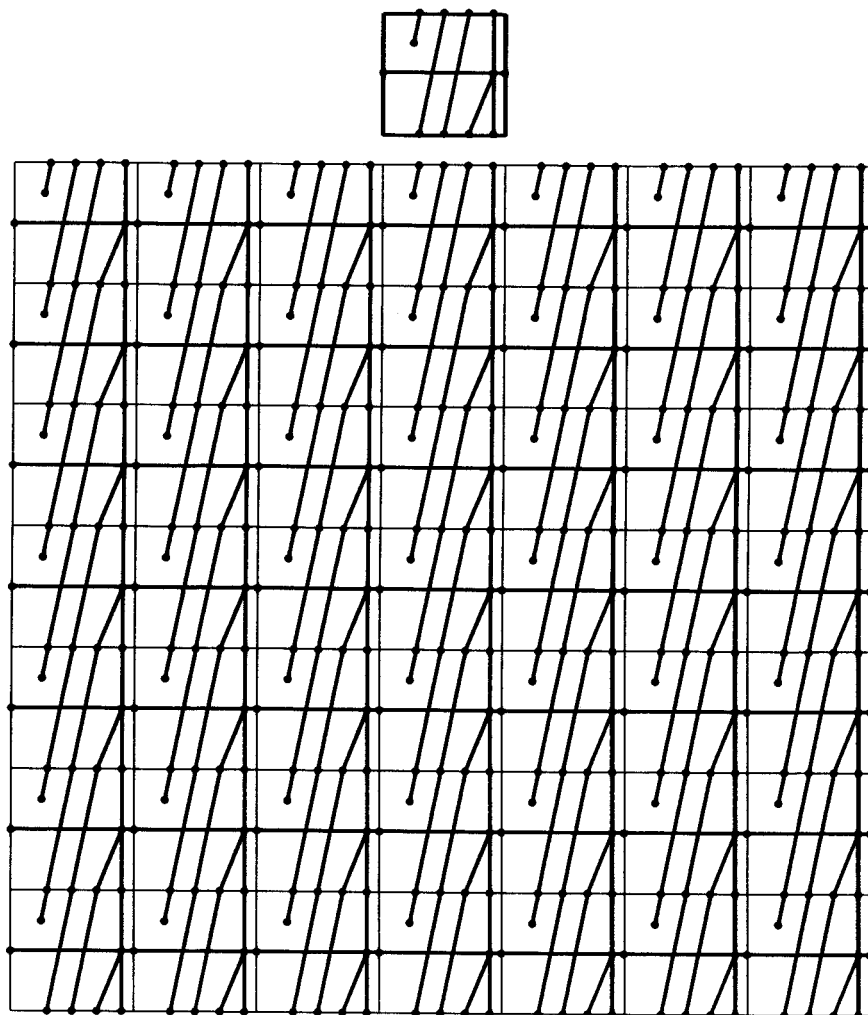


Figura 1.7: G'_4 está en una componente de $\prod_3 G'_4$, pero no de $\prod_2 G'_4$

Es fácil comprobar que:

- G_n tiene n componentes.
- G_n está unido a sus 4-vecinos.
- G_n está en una componente de $\prod_{n-1} G$.
- G_n no está en una componente de $\prod_{n-2} G$.

De esto se deduce que \mathcal{M}_G es conexo y que $k(n) \geq n - 1$.

Para dar una cota superior de $k(n)$ en función de n vamos a usar la siguiente notación:

Sea G un grafo célula, \mathcal{M}_G el grafo periódico generado y n el número de componentes conexas de G .

- Se notarán por H_1, \dots, H_m las componentes de $\prod_n G$ que contienen a alguna componente de G (obviamente se tiene que $m \leq n$).
- Se notarán por J_1, \dots, J_j las componentes de $\prod_{2n} G$ que contienen a alguna componente de G .

Sean G un grafo célula y n el número de componentes conexas de G . Se define el n -rombo $D_n(G)$ como el conjunto

$$D_n(G) = \{C^* | C^* = \tau_{(x,y)}(C), \text{ con } |x| + |y| \leq n - 1\}$$

- Se notarán por K_1, \dots, K_k las componentes de $D_n(G)$ que contienen a alguna componente de G .

Nota 1.3.1 Sea B una componente conexa de G , y sean H , J y K las definidas anteriormente que contienen a la componente B . Se tiene que $B \subseteq K \subseteq H \subseteq J$.

Ahora definiremos unas familias de grafos periódicos que necesitaremos para hallar la cota de $k(n)$:

Definición 1.3.1 Sean G un grafo célula y \mathcal{M}_G el grafo periódico generado. Decimos que \mathcal{M}_G es un grafo:

- C. F. de G si \mathcal{M}_G tiene componentes finitas.
- C. I. G si todas las componentes de \mathcal{M}_G son infinitas.
- C. N. T. de G si hay dos componentes de \mathcal{M}_G que no sean traslaciones una de la otra.

- C. T. de G si todas las componentes de \mathcal{M}_G son traslaciones de una cualquiera de ellas.

Nota 1.3.2 Está claro que \mathcal{M}_G es C. F. de G si y sólo si no es C. I., y que \mathcal{M}_G es C. N. T. de G si y sólo si no es C. T. de G . Sin embargo, tanto los grafos C. F. de G como los C. I. pueden ser C. N. T. de G ó C. T. de G (ver las Figuras 1.8, 1.9, 1.10, 1.11 y 1.12).

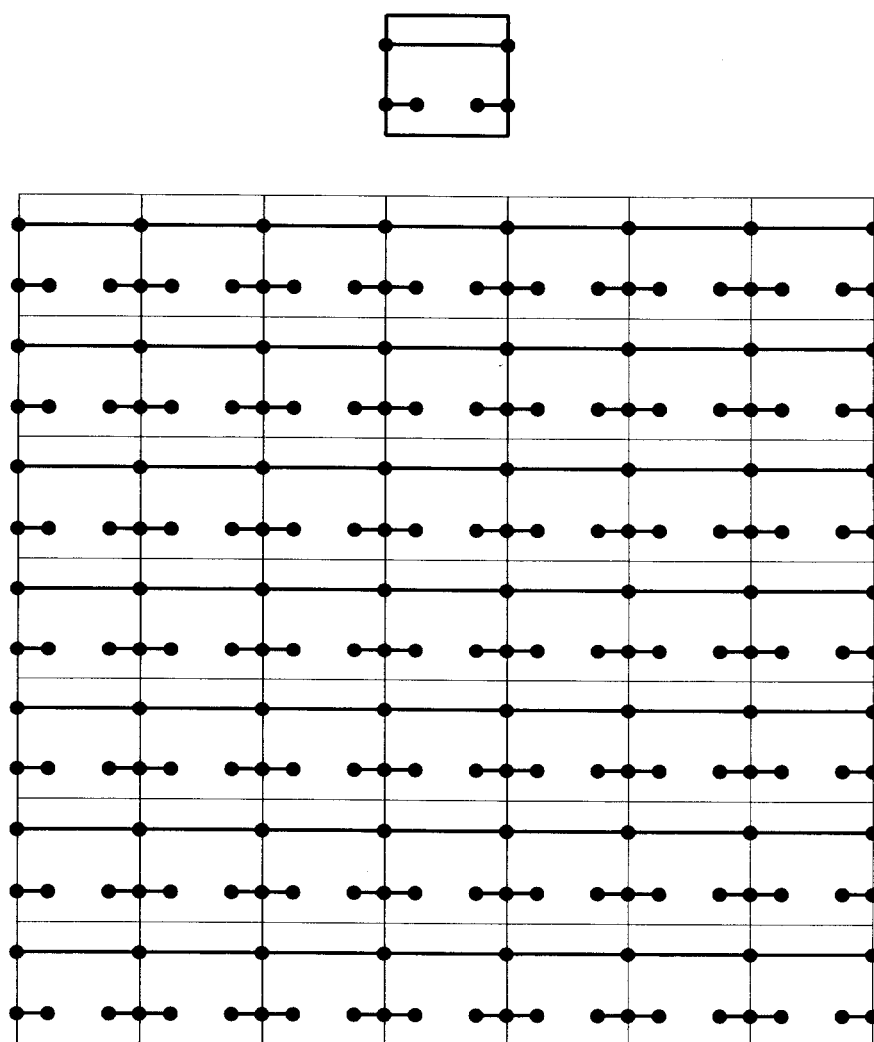


Figura 1.8: Este grafo es C. F. de G y C. N. T. de G

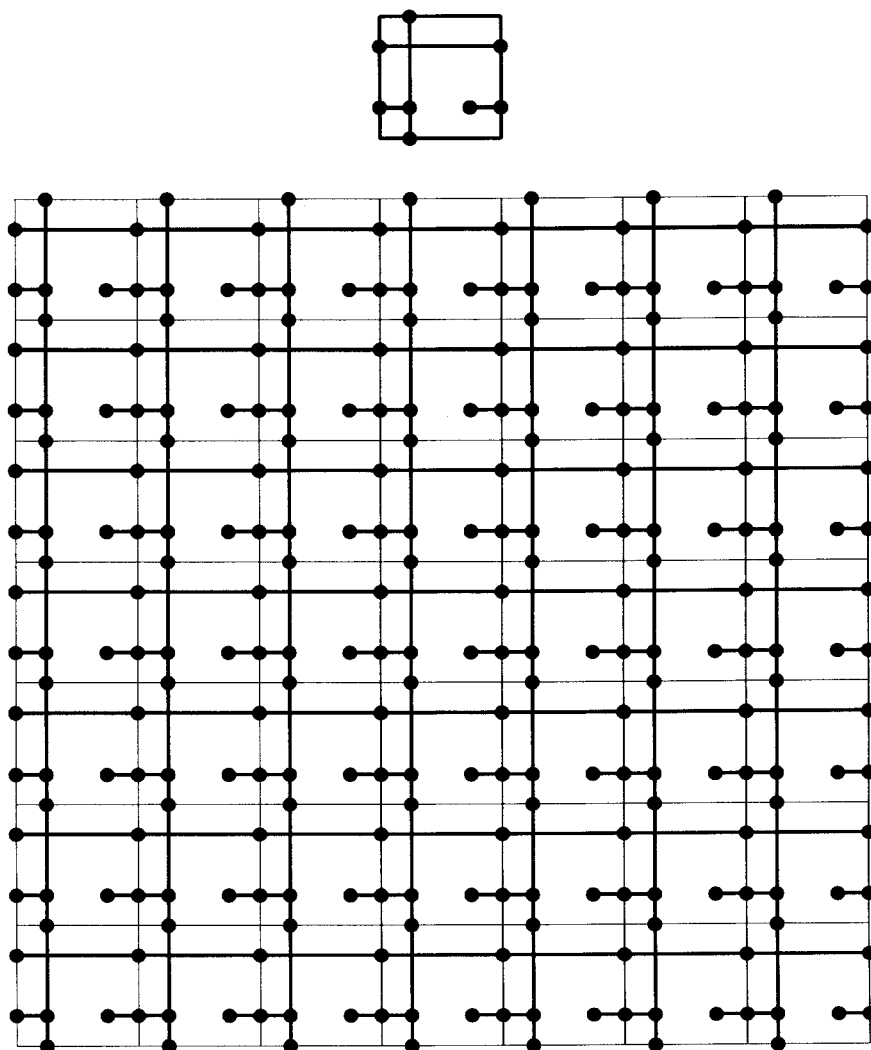


Figura 1.9: Este grafo es C. I. y C. N. T. de G y tiene una cantidad infinita de componentes

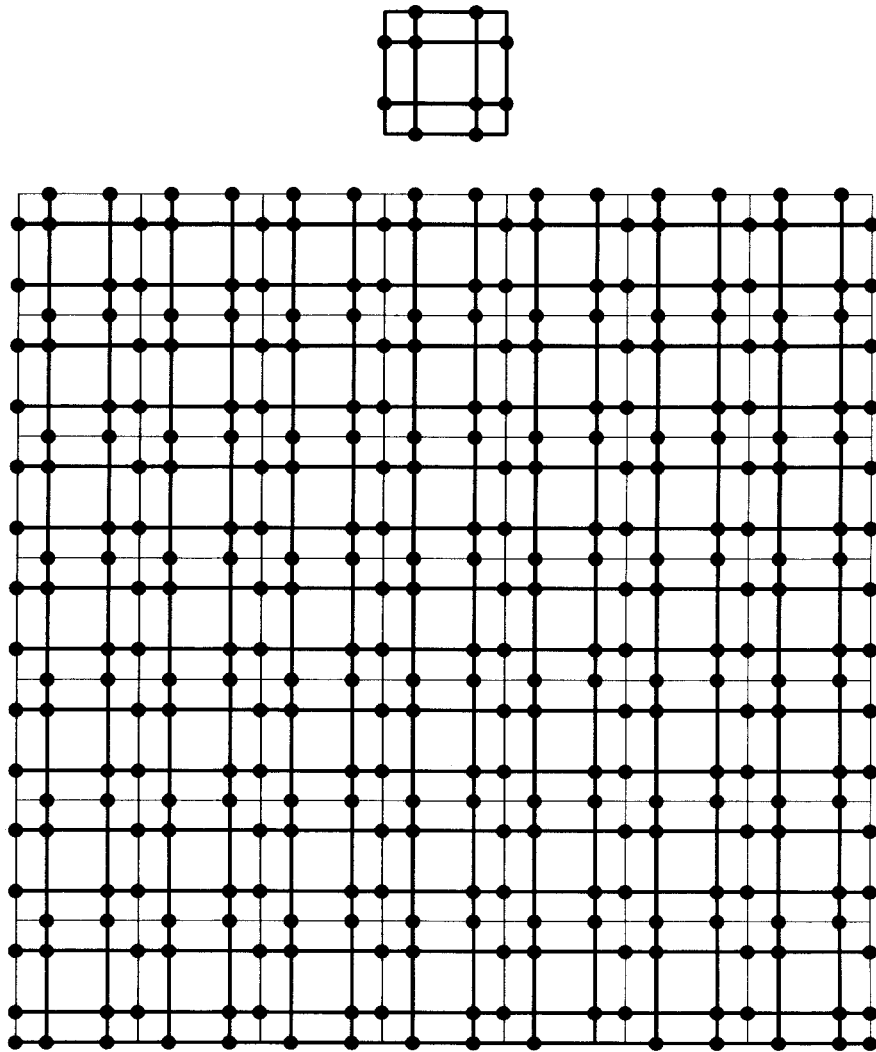


Figura 1.10: Este grafo es C. I. y C. N. T. de G y que tiene 2 componentes

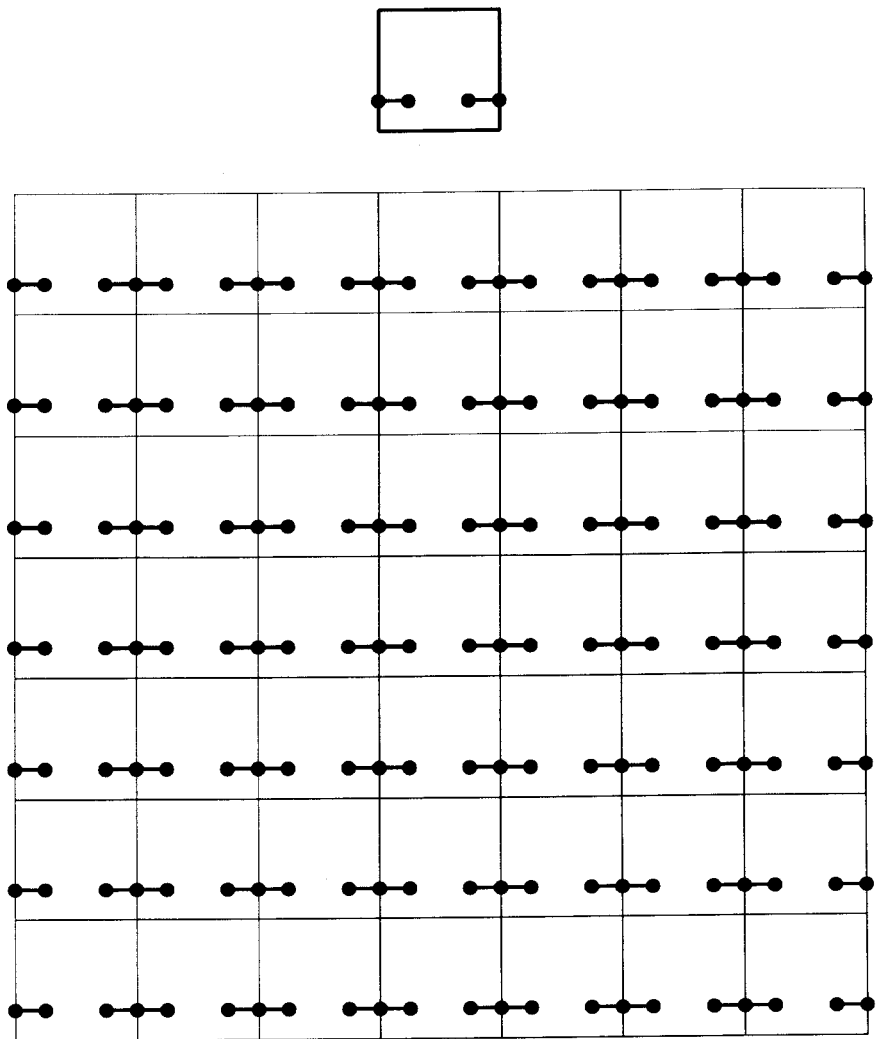


Figura 1.11: Este grafo es C. F. de G y C. T. de G

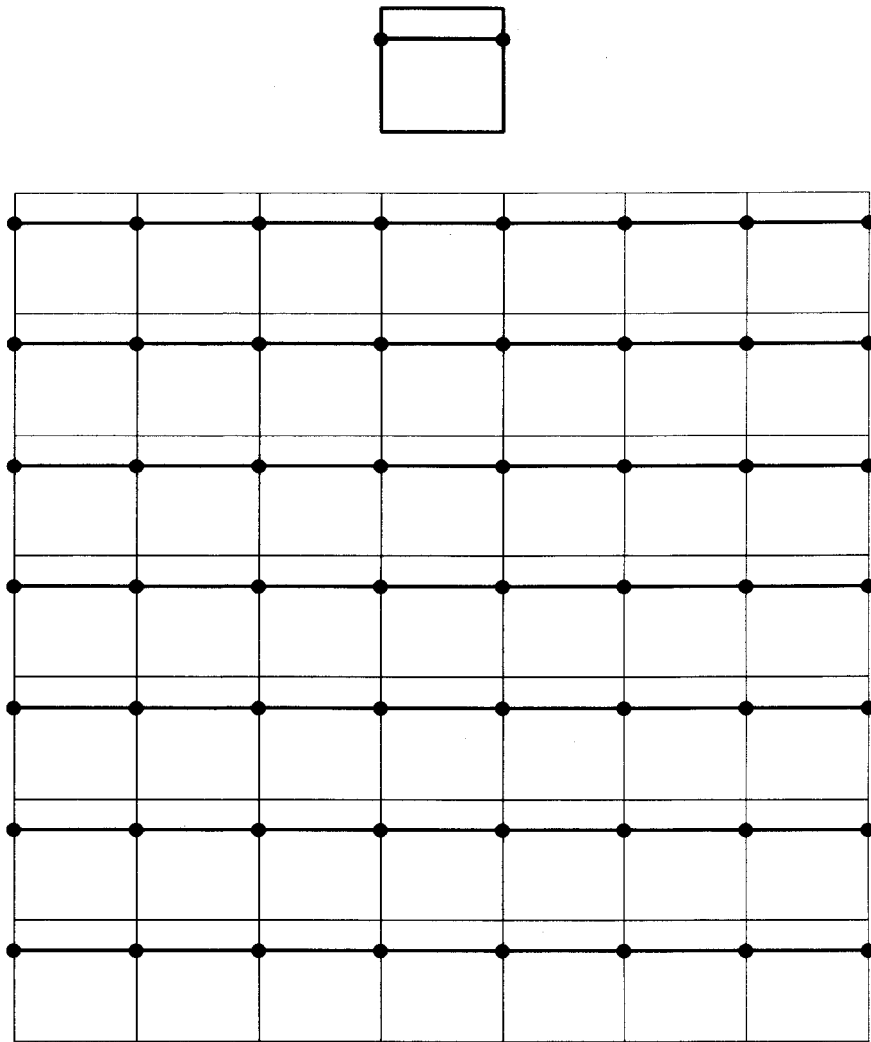


Figura 1.12: Este grafo es C. I. y C. T. de G , pero no es conexo

Nota 1.3.3 Podemos observar fácilmente que para que un grafo periódico sea conexo es necesario que sean C. I. y C. T. de G .

Damos ahora un resultado que nos dice que, estudiando $\prod_n G$, podemos reconocer si un grafo es C. F. de G ó C. I.:

Proposición 1.3.2 Sean G un grafo célula y n el número de componentes conexas de G . Sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera G . Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. \mathcal{M}_G es C. F. de G .
2. Para cierto i se tiene que algún H_i no está conectado con $\mathcal{M}_G - \prod_n G$.
3. En algún H_i se tiene que para cualquier componente E de G , no existen dos copias de E por G .

Demostración: Veamos que la segunda condición implica la primera. Si H_i no está conectada con $\mathcal{M}_G - \prod_n G$ se tiene que H_i está contenida estrictamente en $\prod_n G$, con lo que se tiene que H_i es finito y por lo tanto \mathcal{M}_G tiene componentes conexas finitas.

Veamos que la primera condición implica la tercera. Sea F una componente finita de \mathcal{M}_G y sea B una componente de G de forma que B' es una copia de B en F . Si $B' = \tau_{(m,n)}(B)$ entonces sea $F^* = \tau_{(-m,-n)}(F)$, que obviamente es una componente conexa finita, ya que es traslación de una componente conexa finita. Sea H_i la componente conexa de $\prod_n G$ que contiene a B . Se tiene que $B \subseteq H_1 \subseteq F^*$. Si existe una componente E de G tal que H_i tiene dos copias E_1 y E_2 de E entonces, al ser H_i conexo, se tendrá que existe un camino α que une E_1 con E_2 . Sea el vector $u \in \mathbb{Z}^2$ tal que $E_2 = \tau_u(E_1)$. Si llamamos $E_3 = \tau_u(E_2)$ entonces considerando el camino $\beta = \tau_u(\alpha)$ que une E_2 (que está en H_i) con E_3 , al ser H_1 una componente conexa, se tendrá que E_3 estará también en H_i . Así sucesivamente llegaríamos a que H_i contiene infinitas copias de B , luego H_i sería infinito, y por lo tanto F sería infinito, lo cual es contradictorio con las hipótesis del enunciado.

Para terminar nos basta comprobar que si no se verifica la segunda condición entonces tampoco se verifica la tercera.

Si H_i está conectado con $\mathcal{M}_G - \prod_n G$ existiría un camino α que une a la componente B con el borde de $\prod_n G$. Este camino atravesaría al menos $n + 1$ baldosas copias de G y como G tiene n componentes entonces α pasa por dos copias de una misma componente de G y por tanto H_i también tiene dos copias de una componente de G . \square

Análogamente estudiando $\prod_n G$ (de hecho basta estudiar $D_n(G)$) podemos reco-

nocer si un grafo es C. N. T. de \mathbf{G} ó C. T. de \mathbf{G} , como se tiene en el siguiente resultado:

Proposición 1.3.3 *Sea \mathbf{G} un grafo célula con n componentes. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es C. T. de \mathbf{G} .
2. Si A es una componente conexa de \mathbf{G} y K es la componente de $D_n(\mathbf{G})$ que contiene a A entonces K contiene copias por \mathbf{G} de todas las componentes de \mathbf{G} .

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Supongamos que K no tiene copias de todas las componentes de \mathbf{G} y que F es la componente de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ que contiene a K y sea B una componente de \mathbf{G} tal que K no tiene copias B .

Si F tiene copias de B entonces consideremos B' una copia de B en F tal que existe un camino α entre A y B' de forma que no existe otra copia B'' de B en F , y un camino α' que une A con B'' y que tiene longitud menor que α . Como B' no está en K , entonces α tiene que salir de K y por consiguiente tener longitud al menos $n - 1$. Al ser la longitud de α al menos $n - 1$ se tiene que existe una componente E de \mathbf{G} y dos copias distintas, E_1 y E_2 , de E que están en α . Sin pérdida de generalidad supongamos que A , E_1 , E_2 y B' aparecen en ese orden a lo largo de α . Denotemos como α_1 a la parte de α entre A y E_1 , α_2 a la parte de α entre E_2 y B' y (x, y) al vector tal que $E_2 = \tau_{(x,y)}(E_1)$. Considerando α' como el camino $\alpha_1 \cup \tau_{(-x,-y)}(\alpha_2)$ que une A con $B'' = \tau_{(-x,-y)}(B')$, se tiene que B'' es una copia de B la cual está unida a A mediante un camino α' de longitud menor que la de α , con lo que llegamos a contradicción y, por lo tanto, no existen copias de B por \mathbf{G} en F .

Sea F^* la componente de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ que contiene a B . Está claro que F^* no es copia de F , ya que toda copia de F contiene al menos una copia de B . Por tanto F^* no es traslación de F y $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es C. N. T. de \mathbf{G} .

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Sea F la componente conexa de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ que contiene a K . Como K contiene copias de

todas las componentes de G , F también. Sea F^* otra componente de \mathcal{M}_G cualquiera. Basta probar que F^* es una traslación de F . Sea B^* una copia de cierta componente B de G en F^* y sea B' una copia en F de B . Si $B' = \tau_{(x,y)}(B)$, $B^* = \tau_{(x^*,y^*)}(B)$ y $u = (x^* - x, y^* - y)$ entonces se tiene que $\tau_u(F) = F^*$, pues la traslación de una componente es una componente y se tiene que $\tau_u(F) \cap F^* \neq \emptyset$, ya que B^* está en dicha intersección. \square

Por tanto estudiando $\prod_n G$ podemos saber si \mathcal{M}_G es C. T. de G y C. I. o no. En el caso de que no lo sea ya sabemos que \mathcal{M}_G no es conexo, por lo que a partir de ahora supondremos que \mathcal{M}_G es C. T. de G y C. I. Ahora distinguimos dos tipos de grafos C. T. de G y C. I.:

Definición 1.3.2 Sean G un grafo célula tal que \mathcal{M}_G es C. T. de G y C. I. Decimos que \mathcal{M}_G es un grafo:

- F. C. de G si \mathcal{M}_G tiene un número finito de componentes.
- I. C. de G si \mathcal{M}_G tiene una cantidad infinita de componentes.

Nota 1.3.4 Está claro que \mathcal{M}_G es F. C. de G si y sólo si no es I. C. de G y que los grafos periódicos conexos son F. C. de G (ver las Figuras 1.13 y 1.14).

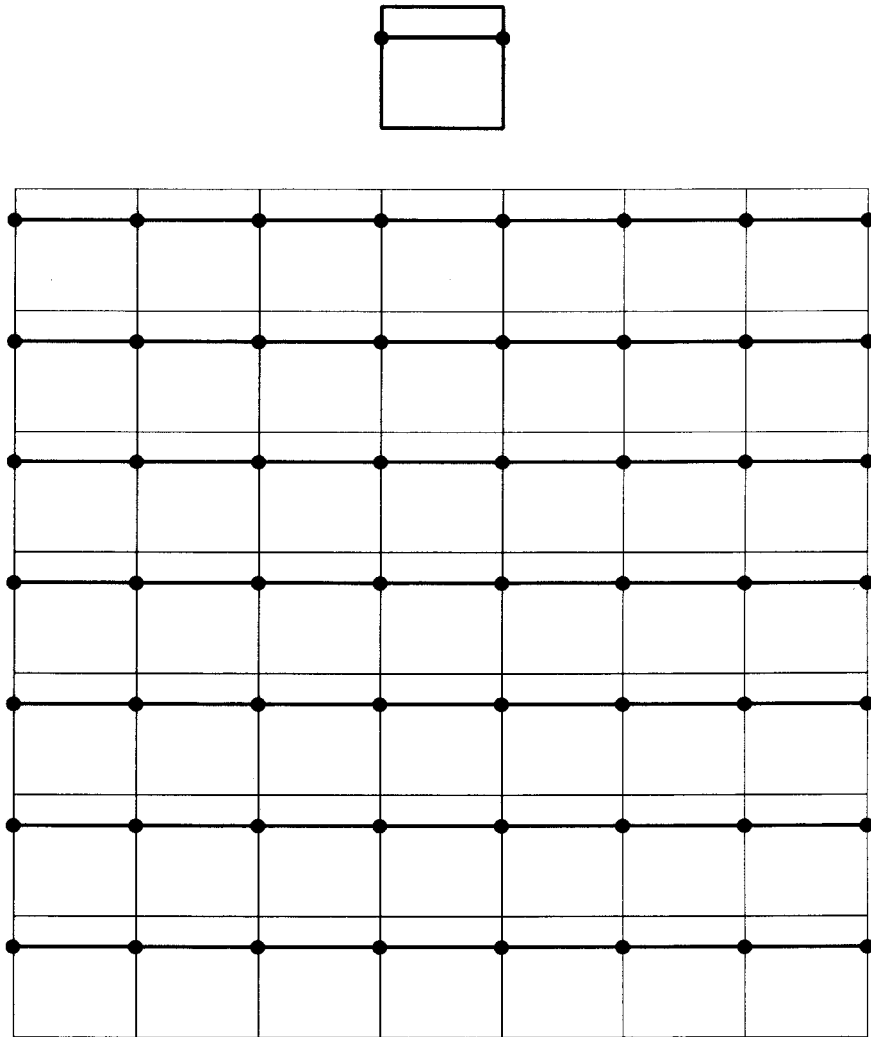


Figura 1.13: Este grafo es I. C. de G

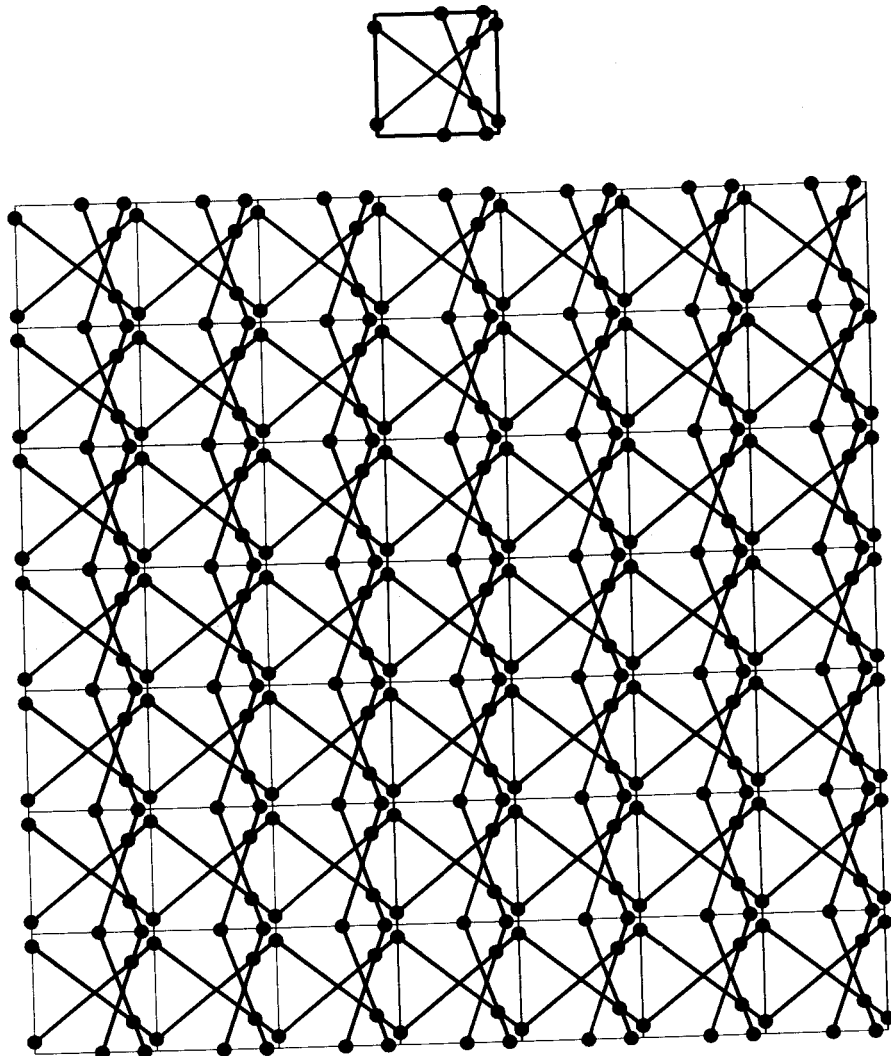


Figura 1.14: Este grafo es F. C. de G pero no es conexo ya que tiene 2 componentes

Veamos un resultado que nos dice que estudiando $\prod_{2n} G$ podemos reconocer si un grafo es F. C. de G ó I. C. de G :

Proposición 1.3.4 Sea G un grafo célula con n componentes conexas tal que \mathcal{M}_G es C. I. y C. T. y B una componente de G que está en J_1 , componente de $\prod_{2n} G$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. \mathcal{M}_G es F. C. de G .

2. Existen dos copias B_1 y B_2 de B por G en la componente J_1 tales que B , B_1 y B_2 no están alineadas, es decir, si u y v son tales que $\tau_u(B) = B_1$ y $\tau_v(B) = B_2$ se tiene que u y v son linealmente independientes.
3. Existe un cuadrado \tilde{G} de lado con longitud a lo sumo $4n^2$ de forma que $\mathcal{M}_G = \mathcal{M}_{\tilde{G}}$ y además se tiene que si F es una componente de \mathcal{M}_G entonces $F = \mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F}$.

Demostración: Veamos que la segunda condición implica la tercera. Sean B_1 y B_2 copias de una componente B de G contenidas en la componente J_1 de $\prod_{2n} G$ cuyas coordenadas son (p_1, q_1) y (p_2, q_2) respectivamente y tales que $p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$, es decir, que B , B_1 y B_2 no están alineados. Además, como están en J_1 estas copias, se tiene que $|p_1|$, $|p_2|$, $|q_1|$ y $|q_2|$ son menores que $2n$.

Sea F' la componente de \mathcal{M}_G que contiene a J_1 . Está claro que todas las copias de B de la forma $\tau_{(\lambda p_1 + \mu p_2, \lambda q_1 + \mu q_2)}(B)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ están en F' . En particular, las que están en las baldosas G , $\tau_{(p_1q_2 - p_2q_1, 0)}(G)$, $\tau_{(0, p_1q_2 - p_2q_1)}(G)$ y $\tau_{(p_1q_2 - p_2q_1, p_1q_2 - p_2q_1)}(G)$.

A partir de ahora supondremos sin pérdida de generalidad que $p_1q_2 > p_2q_1$ y notaremos h_0 a $p_1q_2 - p_2q_1$.

Sea \tilde{G} el cuadrado que tiene por esquinas las siguientes copias de G :

$$\tau_{(h_0-1, h_0-1)}(G), \tau_{(h_0-1, 0)}(G), \tau_{(0, h_0-1)}(G), G$$

Está claro que \mathcal{M}_G es el mismo grafo que $\mathcal{M}_{\tilde{G}}$ y que el lado de este cuadrado es a lo sumo $4n^2$.

Veamos ahora que $F' = \mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F'}$. Primero demostraremos que $F' \subseteq \mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F'}$. Sean A' , una copia de una componente A de G en F' , y A'' la copia de A en \tilde{G} tal que A' es copia de A'' por \tilde{G} . Basta probar que A'' está en F' , ya que al estar en \tilde{G} , A'' estaría en $\tilde{G} \cap F'$ y, por lo tanto, A' estaría en $\mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F'}$, con lo que ya se tendría la inclusión.

Sea \tilde{G}' la baldosa, copia de \tilde{G} , que contiene a A' . Se tiene que todas las copias de B por G que están en las baldosas $\tau_{(k_1 h_0, k_2 h_0)}(G)$, con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, (que son las esquinas inferiores izquierdas de las copias de \tilde{G} por \tilde{G}) al tener

coordenadas del tipo $\tau_{(\lambda p_1 + \mu p_2, \lambda q_1 + \mu q_2)}(B)$ con $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$, están contenidas en F' . En particular, la copia B' de B por \mathbf{G} en la esquina inferior izquierda de $\tilde{\mathbf{G}}'$.

Como B' y A' están en F' , existe un camino α entre B' y A' . Si $u \in \mathbf{Z}^2$ es el vector tal que $\tau_u(A') = A''$ entonces $\tau_u(B') = B$ y el camino $\beta = \tau_u(\alpha)$ une B con A'' . Por tanto $A'' \subseteq F'$.

Veamos que $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F'} \subseteq F'$. Sea A' , una copia de alguna componente A de \mathbf{G} , en $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F'}$. Hay que probar que A' está contenida en F' .

Existe una copia A'' de A por \mathbf{G} tal que A'' es copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de A' que está en $\tilde{\mathbf{G}} \cap F'$. Sea B' copia por \mathbf{G} de B en la esquina inferior izquierda de $\tilde{\mathbf{G}}'$, donde $\tilde{\mathbf{G}}'$ es la copia de $\tilde{\mathbf{G}}$ que contiene a A' . Como tanto A'' como B_1 están en F' , existe un camino α que une B_1 con A'' . Si u es el vector de \mathbf{Z}^2 tal que $\tau_u(A'') = A'$ entonces $\tau_u(B) = B'$ y el camino $\tau_u(\alpha)$ une A' con B' . Como B' está en F' , entonces A' también. Con lo que tenemos demostrado que $F' = \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F'}$.

Sea F una componente cualquiera de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$. Veamos que $F = \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F}$ también por doble contención.

Primero vamos a demostrar que $F \subseteq \mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F}$. Sea A' una componente de alguna copia de \mathbf{G} en F y sea A la componente de \mathbf{G} tal que A' es copia de A . Sea la A'' copia de A que está en $\tilde{\mathbf{G}}$ tal que A' es copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de A'' .

Basta ver que A'' está en F , con lo que se demostraría que A'' estaría en $\tilde{\mathbf{G}} \cap F$ y, por lo tanto, A' en $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F}$.

Sea $\tilde{\mathbf{G}}^*$ la copia de $\tilde{\mathbf{G}}$ que contiene a A' , sea B^* la copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de B en $\tilde{\mathbf{G}}^*$ y sea B' una copia por \mathbf{G} de B que esté en F . Como B^* es una copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de B y además B está en $\tilde{\mathbf{G}} \cap F'$, se tiene que B^* está en $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F'} = F'$, por lo que B^* y B están en F' y existe un camino α que los une. Como B' y A' están en F existe un camino β entre ellos.

Sean u el vector de \mathbf{Z}^2 tal que $\tau_u(B^*) = B'$ y $B'' = \tau_u(B)$. Como el camino $\tau_u(\alpha)$ une B'' con B' se tiene que B' y B'' están en la misma componente de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$, por lo que B'' está en F . Considerando v tal que $\tau_v(B) = B^*$ entonces $\tau_v(B'') = B'$ y $\tau_v(A'') = A'$, se tiene que $\tau_{-v}(\beta)$ une B'' con A'' , con lo que A'' estaría en la misma componente de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ que B'' la cual es F .

Veamos que $\mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F} \subseteq F$. Sea A'' , una copia por G de una componente A de G , en $\mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F}$. Sea A' la copia de A por G que está en $\tilde{G} \cap F$ de forma que A'' es una copia de A' por \tilde{G} .

Tenemos que probar que A'' está en F . Para ello basta encontrar un camino entre A' y A'' , ya que A' está en F .

Como $F' = \mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F'}$ tiene copias por G de A , $\tilde{G} \cap F'$ también. Sea, por tanto, A''' una copia de A por G que esté en $\tilde{G} \cap F'$.

Si llamamos u al vector de \mathbf{Z}^2 tal que A'' es $\tau_u(A')$ entonces $A'''' = \tau_u(A''')$ es una copia de A''' por \tilde{G} y como A''' está en $\tilde{G} \cap F'$ entonces A'''' está en $\mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F'} = F'$.

Al estar A''' y A'''' en F' existe un camino α que los une. Sea v al vector de \mathbf{Z}^2 tal que A' es $\tau_v(A''')$ entonces A'' es $\tau_v(A''')$, $\tau_v(\alpha)$ une A' con A'' y como A' está en F , A'' también.

Veamos que la tercera condición implica la primera. Sea F una componente de \mathcal{M}_G . Como F es $\mathcal{M}_{\tilde{G} \cap F}$, entonces $\tilde{G} \cap F \neq \emptyset$ y F tiene una copia, por G de alguna componente de G , que está en $\tilde{G} \cap F$. Como en \tilde{G} hay un número finito de copias por G de componentes de G (de hecho hay $h_0^2 n$, siendo h_0 el lado del cuadrado), cada componente de \mathcal{M}_G tiene alguna de aquellas y dos componentes distintas de \mathcal{M}_G no pueden tener a la misma copia por G de componentes de G en \tilde{G} (ya que las componentes de \mathcal{M}_G son disjuntas), sólo hay un número finito de componentes de \mathcal{M}_G .

Por último veamos que la primera condición implica la segunda. Sea H_1 la componente de $\prod_n(G)$ que contiene a B . Está claro que $H_1 \subseteq J_1$. Por la Proposición 1.3.2 existen en H_1 dos copias B^1 y B_1 por G de una componente B de G (podemos suponer que B^1 es B) entre las que hay un camino α . Notemos por F' a la componente de \mathcal{M}_G que contiene a F' .

Sean $u = (x, y) \in \mathbf{Z}^2$ tal que $\tau_u(B) = B_1$, $x', y' \in \mathbf{Z}$ tales que $|x'| + |y'| \leq n$ y que $x'y \neq xy'$. Para todo $k \in \mathbf{Z}$ definimos $B'_k = \tau_{(kx', ky')}(B)$.

Está claro que $B'_{k_1} \neq B'_{k_2}$ si y sólo si $k_1 \neq k_2$. Como hay un número finito de componentes de \mathcal{M}_G , existen una componente F de \mathcal{M}_G y dos enteros distintos h_0 y k_0 tales que B'_{h_0} y B'_{k_0} están en F . Podemos suponer sin pérdida

de generalidad que $h_0 < k_0$. Como $\tau_{(k_0x', k_0y')}(B)$ es B'_{k_0} , B está en F' y B'_{k_0} está en F , se tiene que $\tau_{(k_0x', k_0y')}(F') = F$. Recíprocamente, como $\tau_{(-h_0x', -h_0y')}(B'_{h_0})$ es B , B'_{h_0} está en F y B está en F' , se tiene que $\tau_{(-h_0x', -h_0y')}(F) = F'$ y por tanto $\tau_{((k_0-h_0)x', (k_0-h_0)y')}(F')$ es $\tau_{(-h_0x', -h_0y')}(F)$, que es igual a F' .

Llamemos B_2 a $\tau_{((k_0-h_0)x', (k_0-h_0)y')}(B) = B'_{k_0-h_0}$, que está en F' y sea β' un camino en F' que une B con B_2 . Notemos (a, b) al vector tal que $\tau_{(a,b)}(B)$ es B_2 . Si la longitud del camino es mayor que n , entonces existen dos copias A_1 y A_2 de una componente A de \mathbf{G} tales que la parte de β' que las une es a lo sumo n . Sean $x'', y'' \in \mathbf{Z}$ tales que $A_2 = \tau_{(x'', y'')}(A_1)$. Llamamos β'_1 a la parte de β' que empieza en B y termina en A_1 , β'_2 a la parte que empieza en A_2 y termina en B_2 , y β^* a la parte de β que empieza en A_1 y que termina en A_2 . Considerando $\beta = \beta'_1 \cup \tau_{(-x'', -y'')}(A_2)$, sea B^* el extremo de β que no es B , es decir, $\tau_{(a-x'', b-y'')}(B)$. Distinguiamos dos casos:

- Si $x''y = xy''$ entonces $(a - x'')y \neq (b - y'')x$ y redefinimos lo siguiente: B_2 como B , a como $a - x''$, b como $b - y''$, β' como β y reiteramos el proceso.
- Si $x''y \neq xy''$ entonces sean \tilde{A}_1 una copia de A por \mathbf{G} en H_1 (existe por la Proposición 1.3.3), γ el camino que une B con \tilde{A}_1 en H_1 y \tilde{A}_2 igual a $\tau_{(x'', y'')}(A_1)$. Notemos como $-\gamma$ al camino γ recorrido en sentido contrario, es decir, desde \tilde{A}_1 hasta B y (r, s) al vector tal que $\tau_{(r,s)}(A_1) = \tilde{A}_1$ (también se tiene que $\tau_{(r,s)}(A_2) = \tilde{A}_2$). Consideremos el camino $\gamma \cup \tau_{(r,s)}(\beta^*) \cup \tau_{(x'', y'')}(A_2) \cup (-\gamma)$ que empieza en B y, tras pasar por \tilde{A}_1 y por \tilde{A}_2 , acaba en $\tau_{(x'', y'')}(B)$. Finalmente, redefinimos a como x'' , b como y'' y B_2 como $\tau_{(x'', y'')}(B)$ y β' como $\gamma \cup \tau_{(r,s)}(\beta^*) \cup \tau_{(a,b)}(-\gamma)$.

En cualquier caso tenemos B , $B_1 = \tau_{(x,y)}(B)$ y $B_2 = \tau_{(a,b)}(B)$ con $xb \neq ya$ y $|a| + |b| \leq n$. Tal como se ha construido β' que empieza en B y acaba en B_2 , o bien tiene longitud a lo más n , o bien es $\gamma \cup \tau_{(r,s)}(\beta^*) \cup \tau_{(a,b)}(-\gamma)$, donde γ es un camino en H_1 , $\tau_{(r,s)}(\beta^*)$ es un camino de longitud a lo sumo n que empieza donde acaba γ y acaba donde empieza $\tau_{(a,b)}(-\gamma)$, que es una tralación de γ recorrida en sentido contrario.

Si β' tiene longitud a lo sumo n , como B está en $\prod_n \mathbf{G}$, entonces β' está en $\prod_{2n} \mathbf{G}$, por lo que B , B_1 y B_2 están unidos en $\prod_{2n} \mathbf{G}$.

Si β' es $\gamma \cup \tau_{(r,s)}(\beta^*) \cup \tau_{(a,b)}(-\gamma)$ entonces γ está en $\prod_n \mathbf{G}$, $\tau_{(r,s)}(\beta^*)$, al tener longitud a lo sumo n , está en el rombo de radio n centrado en la baldosa en que termina γ (copia por \mathbf{G} de $D_n(\mathbf{G})$) y como todo el rombo está en $\prod_{2n} \mathbf{G}$, se tiene que $\tau_{(r,s)}(\beta^*)$ está en $\prod_{2n} \mathbf{G}$. Finalmente, como γ está en $\prod_n \mathbf{G}$ y $|a| + |b| \leq n$, se tiene que $\tau_{(a,b)}(-\gamma)$ también está en $\prod_{2n} \mathbf{G}$. Por consiguiente β' está toda ella en $\prod_{2n} \mathbf{G}$ y B , B_1 y B_2 están unidos en $\prod_{2n} \mathbf{G}$, con lo que ya se tendría la Proposición. \square

Ahora podemos caracterizar los grafos periódicos conexos. Para ello podemos limitarnos a los grafos F. C. de \mathbf{G} que sabemos caracterizar y que son los únicos candidatos a ser conexos.

Proposición 1.3.5 *Sea \mathbf{G} un grafo célula tal que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es F. C. de \mathbf{G} y sea el cuadrado $\tilde{\mathbf{G}}$ correspondiente definido en la Proposición 1.3.4. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo.
2. $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es C. T. de $\tilde{\mathbf{G}}$.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Si $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo, como $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}}}$ y para que $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}}}$ sea conexo tiene que ser C. T. de $\tilde{\mathbf{G}}$, se tiene el resultado.

Veamos que la segunda condición implica la primera. Si $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ no fuese conexo, sean F y \tilde{F} dos componentes distintas de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$. Como F es $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F}$, \tilde{F} es $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap \tilde{F}}$, cualquier copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F}$ es $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap F}$ y cualquier copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap \tilde{F}}$ es $\mathcal{M}_{\tilde{\mathbf{G}} \cap \tilde{F}}$, se tiene que F no es copia por $\tilde{\mathbf{G}}$ de \tilde{F} y, por tanto, que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ no es C. T. de $\tilde{\mathbf{G}}$. \square

Para dar la cota de $k(n)$ necesitaremos el siguiente resultado:

Lema 1.3.1 *Sea \mathbf{G} un grafo célula tal que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo y sean el cuadrado $\tilde{\mathbf{G}}$ correspondiente definido en la Proposición 1.3.4, N el número de baldosas copias*

de \mathbf{G} por $\tilde{\mathbf{G}}$ que hay en cada lado de $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{G}}_i$ con $i = 1, \dots, 4$ las copias de $\tilde{\mathbf{G}}$ por $\tilde{\mathbf{G}}$ que son 4-vecinos de $\tilde{\mathbf{G}}$. Existe una componente A_0 de \mathbf{G} tal que si A'_0 es $\tau_{(x_0, y_0)}(A_0)$ y también una copia por \mathbf{G} de A_0 en $\tilde{\mathbf{G}}$ y A_1 es $\tau_{(x_0, y_0 + N)}(A_0)$, A_2 es $\tau_{(x_0 - N, y_0)}(A_0)$, A_3 es $\tau_{(x_0 + N, y_0)}(A_0)$ y A_4 es $\tau_{(x_0, y_0 - N)}(A_0)$ y además son las copias de A'_0 por $\tilde{\mathbf{G}}$ en cada uno de los 4-vecinos de $\tilde{\mathbf{G}}$ entonces:

1. Existe un camino δ_1 entre A'_0 y A_1 contenido en el rectángulo cuyas esquinas son las baldosas $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + N + 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + N + 4n)}(\mathbf{G})$.
2. Existe un camino δ_2 entre A'_0 y A_2 contenido en el rectángulo cuyas esquinas son las baldosas $\tau_{(x_0 + 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - N - 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 - N - 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$.
3. Existe un camino δ_3 entre A'_0 y A_3 contenido en el rectángulo cuyas esquinas son las baldosas $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$.
4. Existe un camino δ_4 entre A'_0 y A_1 contenido en el rectángulo cuyas esquinas son las baldosas $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + 4n, y_0 + 2)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - N - 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - N - 4n)}(\mathbf{G})$.

Demostración: Por la Proposición 1.3.4 existen tres copias $E'_1 = \tau_{(a, b)}(E)$, $E'_2 = \tau_{(a + p_1, b + q_1)}(E)$ y $E'_3 = \tau_{(a + p_2, b + q_2)}(E)$ por \mathbf{G} de una componente E de \mathbf{G} tales que $p_1 q_2 \neq p_2 q_1$ y existen α' , camino entre E'_1 y E'_2 , y β' , camino entre E'_1 y E'_3 , que están contenidos en el cuadrado de centro E'_1 cuyo lado tiene $4n + 1$ baldosas copias de \mathbf{G} . Consideremos $A_0 = E$, $A'_0 = \tau_{(x_0, y_0)}(E)$, $\alpha = \tau_{(a - x_0, b - y_0)}(\alpha')$ y $\beta = \tau_{(a - x_0, b - y_0)}(\beta')$. Está claro que α es un camino entre A'_0 y E_2 , β es un camino entre A'_0 y E_3 y que ambos están contenidos en el cuadrado de centro la baldosa copia de \mathbf{G} que contiene a A'_0 y cuyo lado tiene $4n + 1$ baldosas copias de \mathbf{G} .

Vamos a demostrar solamente el tercer apartado del enunciado del lema, ya que los otros tres son totalmente análogos. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p_1 \geq 0$ ya que en otro caso intercambiamos α por $\tau_{(-p_1, -q_1)}(-\alpha)$, siendo $-\alpha$ el camino α recorrido al revés y también intercambiamos p_1 por $-p_1$ y q_1 por $-q_1$. De igual forma podemos suponer que $p_2 \geq 0$. También podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\frac{q_1}{p_1} < \frac{q_2}{p_2}$, porque en otro caso intercambiamos α y β y también (p_1, q_1) y (p_2, q_2) .

Supongamos que $q_1 \geq 0$ y que $q_2 \geq 0$ (aunque hay pérdida de generalidad, los demás casos son o bien análogos, o bien más sencillos). Si partimos de A'_0 y empalmamos q_1 copias por \mathbf{G} de β y q_2 copias por \mathbf{G} de $-\alpha$, sin importar el orden, llegamos a $A_3 = \tau_{(q_1 p_2 - q_2 p_1, 0)}(A_3)$. Hay que elegir el orden de las q_1 copias por \mathbf{G} de β y las q_2 copias por \mathbf{G} de $-\alpha$ para que el camino δ_3 , formado por éstas, esté contenido en el rectángulo cuyas esquinas son $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$.

Llamemos r y s a números tales que $r - x_0$ y $s - y_0$ son los valores de la abscisa y de la ordenada del final de la parte de δ_3 que llevamos construido, respectivamente. Inicialmente r y s valen 0, por lo que $0 \leq r \leq N$ y $-2n \leq s \leq 2n$.

Sea $l = r - \frac{p_1 s}{q_1}$. Se tiene que l es no decreciente, ya que si añadimos una copia de $-\alpha$ entonces el nuevo l vale $r - p_1 - \frac{p_1(s - q_1)}{q_1}$, que es igual al antiguo l , mientras que si añadimos una copia de β entonces el nuevo l vale $r + p_2 - \frac{p_1(s + q_2)}{q_1}$, que es mayor que el antiguo l .

Ahora vamos a elegir el orden de las q_1 copias por \mathbf{G} de β y las q_2 copias por \mathbf{G} de $-\alpha$. Si $s \leq 0$ entonces unimos una copia β^* por \mathbf{G} de β y Si $s > 0$ entonces unimos una copia α^* por \mathbf{G} de $-\alpha$.

Para demostrar que el camino δ_3 , formado por las q_1 copias por \mathbf{G} de β y las q_2 copias por \mathbf{G} de $-\alpha$, está contenido en el rectángulo cuyas esquinas son $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, sólo necesitamos probar que en todo momento $-2n \leq s \leq 2n$ y $-2n \leq r \leq N + 2n$, ya que en este caso, como α y β^* están contenidos en el cuadrado cuyo centro es la copia $\tau_{(x_0 + r, y_0 + s)}(\mathbf{G})$ de \mathbf{G} y lado $4n + 1$, el cual está a su vez contenido en el rectángulo cuyas esquinas son $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 - 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 - 4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(x_0 + N + 4n, y_0 + 4n)}(\mathbf{G})$.

Antes de ver que efectivamente se verifican $-2n \leq s \leq 2n$ y $-2n \leq r \leq N + 2n$, vamos a demostrar que δ_3 así construido acaba en A_3 .

Si al construir δ_3 utilizamos primero las q_1 copias por \mathbf{G} de β y llevamos utilizadas $q < q_2$ copias por \mathbf{G} de α entonces la parte construida de δ_3 termina en $\tau_{(r=q_1 p_2 - q p_1, s=q_1 q_2 - q q_1)}(A'_0)$, por lo que $s < 0$ y le tendremos que añadir una

copia de $-\alpha$, además s seguirá siendo negativo hasta que le hayamos añadido las q_2 copias por \mathbf{G} de $-\alpha$, por lo que el camino δ_3 termina en A_3 .

Si al construir δ_3 utilizamos primero las q_2 copias por \mathbf{G} de $-\alpha$ y llevamos utilizadas $q < q_1$ copias por \mathbf{G} de β entonces la parte construida de δ_3 termina en $\tau_{(r=q_1 p_2 - q_2 p_1, s=q_2 - q_2 q_1)}(A'_0)$, por lo que $s > 0$ y le tendremos que añadir una copia de β , además s seguirá siendo positivo hasta que le hayamos añadido las q_1 copias por \mathbf{G} de β , por lo que el camino δ_3 termina en A_3 .

Justifiquemos ahora que $-2n \leq s \leq 2n$ y $-2n \leq r \leq N + 2n$.

Inicialmente $s = 0$, por lo que $-q_1 \leq s \leq q_2$. Supongamos por inducción que hasta un paso de la construcción de δ_3 se verifica que $-q_1 \leq s \leq q_2$. Si $s \leq 0$ entonces se añade una copia por \mathbf{G} de β y el nuevo valor de s es $s + q_2$ y como $0 \leq q_2 \leq 2n$, se tiene que $-q_1 \leq s + q_2 \leq q_2$. Si $s > 0$ entonces se añade una copia por \mathbf{G} de $-\alpha$ y el nuevo valor de s es $s - q_1$ y como $0 \leq q_1 \leq 2n$, se tiene que $-q_1 \leq s - q_1 \leq q_2$. Por tanto $-2n \leq -q_1 \leq s \leq q_2 \leq 2n$.

Inicialmente el valor de l es 0 y al construir completamente δ_3 el valor de l es N . Al ser l no decreciente se tiene que en todo momento $0 \leq l \leq N$. Como $r = l + \frac{p_1 s}{q_1}$, sustituyendo s por sus cotas superior e inferior se tiene que $l - p_1 \leq r \leq l + \frac{p_1 q_2}{q_1}$. Como $q_1 p_2 > q_2 p_1$ se tiene que $\frac{p_1 q_2}{q_1} < p_2$, por lo que $l - p_1 \leq r \leq l + p_2$. Sustituyendo N por sus cotas superior e inferior se tiene que $-p_1 \leq r \leq N + p_2$ y por consiguiente $-2n \leq r \leq N + 2n$. \square

En virtud del Lema 1.3.1, podemos dar una cota de $k(n)$ en función del número de componentes del grafo \mathbf{G} y, por lo tanto, ya se tendrá que el estudio de la conexión del grafo $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ será un problema computable, ya que se reducirá a estudiar el grafo finito $\prod_{k(n)} \mathbf{G}$.

Damos ahora el teorema que acota superiormente a $k(n)$:

Teorema 1.3.1 $k(n) \leq 64n^5 - 16n^3 + 2n^2$.

Demostración: Sea \mathbf{G} una baldosa con n componentes tal que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo. Si notamos por $k_0 = 64n^5 - 16n^3 + 2n^2$ demostraremos que \mathbf{G} está en una com-

ponente de $\prod_{k_0} \mathbf{G}$. Para ello consideremos $\tilde{\mathbf{G}}$ el cuadrado introducido en la Proposición 1.3.4, el cual tiene en cada lado N baldosas copias de \mathbf{G} , siendo $N \leq 2n^2$ y supongamos que m es el número de componentes de $\tilde{\mathbf{G}}$. Podemos suponer que las baldosas copias de \mathbf{G} que son esquinas de $\tilde{\mathbf{G}}$ son $\tau_{(-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil, -\lceil \frac{N-1}{2} \rceil)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil, \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor, -\lceil \frac{N-1}{2} \rceil)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor)}(\mathbf{G})$, ya que entre $-\lceil \frac{N-1}{2} \rceil$ y $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$, incluyendo a ambos, hay N números enteros.

Sea A_0 la componente de \mathbf{G} que aparece en el enunciado del Lema 1.3.1 y B otra componentes de \mathbf{G} cualquiera, basta probar que existe un camino entre ellas en $\prod_{l_0} \mathbf{G}$, en donde $l_0 = mN + \max\{\lceil \frac{N-1}{2} \rceil, 4n\}$. Si llamamos L_{A_0} a la componente de A en $\tilde{\mathbf{G}}$ y L_B a la componente de B en $\tilde{\mathbf{G}}$ entonces pueden darse dos casos:

- L_{A_0} es L_B . En este caso existe un camino entre A_0 y B en $\tilde{\mathbf{G}}$, por tanto también en $\prod_m \tilde{\mathbf{G}}$. Como $\prod_m \tilde{\mathbf{G}} \subseteq \prod_{l_0} \mathbf{G}$ se tiene el resultado.
- L_{A_0} no es L_B . Como $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo entonces por la Proposición 1.3.5 se tiene que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es C. T. de $\tilde{\mathbf{G}}$ y, por la Proposición 1.3.3, si K es la componente de $D_m(\tilde{\mathbf{G}})$ que contiene a L_B entonces K contiene copias por $\tilde{\mathbf{G}}$ de todas las componentes de \mathbf{G} , en particular de L_{A_0} . Sea $L'_{A_0} = \tau_{(hN, kN)}(L_{A_0})$, con $|h| + |k| \leq m - 1$ la copia de L_{A_0} por $\tilde{\mathbf{G}}$ que está en K . Como existe un camino entre L_B y L'_{A_0} en $K \subseteq \prod_m \tilde{\mathbf{G}} \subseteq \prod_{l_0} \mathbf{G}$ basta encontrar un camino entre L_{A_0} y L'_{A_0} (por ejemplo un camino entre A_0 y $A'_0 = \tau_{(hN, kN)}(A_0)$ en $\prod_{l_0} \mathbf{G}$).

Supongamos que $h, k \geq 0$ (los otros casos son análogos) y denotemos A_0^i , con $i = 0, \dots, h$ a la traslación $\tau_{(iN, 0)}(A_0)$ de A_0 por $\tilde{\mathbf{G}}$, y A_0^{h+j} , con $j = 1, \dots, k$ a la traslación $\tau_{(hN, jN)}(A_0)$ de A_0 por $\tilde{\mathbf{G}}$. Por el Lema 1.3.1 tenemos que para $i = 0, \dots, h - 1$ existe un camino α_i entre A_0^i y A_0^{i+1} contenido en el rectángulo cuyas esquinas son $\tau_{(iN-4n, -4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(iN-4n, 4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{((i+1)N+4n, -4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{((i+1)N+4n, 4n)}(\mathbf{G})$ y que para $j = 0, \dots, k - 1$ existe un camino α_{h+i} entre A_0^{h+i} y A_0^{h+i+1} contenido en el rectángulo cuyas esquinas son $\tau_{(hN-4n, kN-4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(hN+4n, kN-4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(hN-4n, (k+1)N-4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(hN-4n, (k+1)N-4n)}(\mathbf{G})$. Sea α el camino $\bigcup_{l=1}^{h+k} \alpha_l$ que une A_0 con A'_0 . α está con-

tenido en el rectángulo cuyas esquinas son $\tau_{(-4n,-4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(-4n,kN+4n)}(\mathbf{G})$, $\tau_{(hN+4n,-4n)}(\mathbf{G})$ y $\tau_{(hN+4n,kN+4n)}(\mathbf{G})$ que a su vez está contenido en $\prod_{l_0} \mathbf{G}$.

Tenemos probado que \mathbf{G} está contenido en una componente de $\prod_{l_0} \mathbf{G}$. Para acabar la demostración sólo necesitamos probar que $l_0 \leq k_0$. Para ello necesitamos dar cotas de m y N en función de n .

Al ser $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ conexo, toda componente de $\tilde{\mathbf{G}}$ está conectada con $\mathcal{M}_{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{G}}$, por lo que toda componente de $\tilde{\mathbf{G}}$ tiene que contener algún vértice del borde de $\tilde{\mathbf{G}}$. En los cuatro lados de $\tilde{\mathbf{G}}$ hay $4N-4$ baldosas copias de \mathbf{G} y si una componte L de $\tilde{\mathbf{G}}$ contiene un vértice p del borde de $\tilde{\mathbf{G}}$ entonces contiene a toda una copia B' por \mathbf{G} de una componente B de \mathbf{G} , estando B' en una de las $4N-4$ baldosas copias de \mathbf{G} que están en los cuatro lados de $\tilde{\mathbf{G}}$ y conteniendo B' a p . Como una copia de \mathbf{G} no puede estar en dos componentes distintas de $\tilde{\mathbf{G}}$ y cada baldosa copia de \mathbf{G} contiene n copias por \mathbf{G} de componentes de \mathbf{G} , sólo puede haber a lo sumo $n(4N-4)$ componentes de $\tilde{\mathbf{G}}$. Luego $m \leq 4n(N-1)$.

Por otra parte, tal como se vió en la Proposición 1.3.4 nos dice que $N \leq 4n^2$ por lo que

$$l_0 \leq 4n(N-1)N + \max\left\{\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil, 4n\right\} \leq 64n^5 - 16n^3 + 2n \max\{n, 2\}$$

Como \mathbf{G} era una baldosa cualquiera con n componentes tal que $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo se tiene que $k(n) \leq 64n^5 - 16n^3 + 2n \max\{n, 2\}$. Como $k(1) = 0$, ya que si \mathbf{G} es conexo \mathbf{G} está contenido en una componente conexa de $\prod_0 \mathbf{G} = \mathbf{G}$, por lo que tanto para $n = 1$ como para $n \geq 2$ tenemos que $k(n) \leq 64n^5 - 16n^3 + 2n^2$.
□

1.4 Algoritmo de conexión

Usando los resultados obtenidos en la sección anterior y, en particular el Teorema 1.3.1, podemos construir un algoritmo de conexión. Esquemáticamente, este algoritmo que podemos construir de forma natural natural para comprobar si $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es conexo o no es el siguiente:

CONEXIÓN1(\mathcal{M}_G)

PASO 1 Introducir el grafo G .

PASO 2 Calcular las n componentes de G .

PASO 3 Hallar las copias de G por G en los 4-vecinos de G de las componentes de G .

PASO 4 Estudiando el grafo finito $\prod_{l_0} G$, en donde $l_0 = 64n^5 - 16n^3 + 2n^2$, ver si G está contenido en una componente conexa suya. Si no lo está: “El grafo periódico no es conexo” y FIN.

PASO 5 Responde “El grafo periódico \mathcal{M}_G es conexo”.

FIN

Como se puede observar, el grafo $\prod_{l_0} G$, con $l_0 = 64n^5 - 16n^3 + 2n^2$, tiene del orden de $O(n^{10})$ copias de G . Sabiendo que G tiene n componentes conexas, se tendrá que la eficiencia de este algoritmo es de $O(n^{11})$. Como veremos posteriormente, la eficiencia de este algoritmo no parece suficiente. En virtud de los resultados obtenidos en la sección 1.4, podemos dar un algoritmo que responda si un grafo periódico es conexo o no lo es con menos operaciones. Más explícitamente, daremos un nuevo algoritmo que resuelve el problema de la conexión en tiempo $O(n^9)$, con lo que se disminuirá la complejidad del algoritmo CONEXION1(\mathcal{M}_G).

1.4.1 Algoritmo

Este nuevo algoritmo que estudia la conexión de un grafo periódico \mathcal{M}_G comienza clasificando el grafo periódico entre los que tienen todas sus componentes infinitas, es decir, si el grafo \mathcal{M}_G es C. I. Utilizando la Proposición 1.3.2, lo hace estudiando el grafo finito $\prod_n G$, siendo n el número de componentes conexas del grafo G . Posteriormente, usando el resultado de la Proposición 1.3.3 y estudiando el mismo grafo $\prod_n G$, se verá si en el grafo periódico todas sus componentes son copias por G unas de otras, es decir, si el grafo \mathcal{M}_G es C. T. Estas dos condiciones, como hemos visto, son necesarias para que \mathcal{M}_G sea conexo.

Aplicando la Proposición 1.3.4 y estudiando el grafo finito $\prod_{2n} G$, se comprueba si se cumple la condición primera de dicha proposición. Llamando m al número de componentes conexas de \tilde{G} , considerando el cuadrado $\prod_m \tilde{G}$ y usando de nuevo la Proposición 1.3.3 vemos si las componentes de \mathcal{M}_G son copias por \tilde{G} unas de otras. Esta condición, como hemos visto en la Proposición 1.3.5, es necesaria y suficiente para que \mathcal{M}_G sea conexo.

Este algoritmo es el siguiente:

CONEXIÓN(\mathcal{M}_G)

PASO 1 Introducir el grafo G .

PASO 2 Calcular las n componentes de G .

PASO 3 Hallar las copias de las componentes G en los 4-vecinos de G que estén unidas a las componentes de G .

PASO 4 Estudiando el grafo finito $\prod_n G$ ver si \mathcal{M}_G es C. I. por G . Si no lo es: “El grafo periódico no es conexo” y ve a FIN.

PASO 5 Estudiando el grafo finito $\prod_n G$ ver si \mathcal{M}_G es C. T. Si no lo es: “El grafo periódico no es conexo” y FIN.

PASO 6 Estudiando el grafo finito $\prod_{2n} G$ ver si \mathcal{M}_G es F. C. Si no lo es: “El grafo periódico no es conexo” y FIN.

PASO 7 Calcular las m componentes de \tilde{G} .

PASO 8 Hallar las copias de las componentes \tilde{G} en los 4-vecinos de \tilde{G} que estén unidas a las componentes de \tilde{G} .

PASO 9 Estudiando el grafo finito $\prod_m \tilde{G}$ ver si \mathcal{M}_G es C. T. de \tilde{G} . Si no lo es: “El grafo periódico no es conexo” y ve a FIN.

PASO 10 Responde “El grafo periódico \mathcal{M}_G es conexo”.

FIN

1.4.2 Complejidad del algoritmo

Veamos un estudio de la efectividad de este algoritmo. Para ello estudiemos cada paso por separado:

Paso 2 Para calcular las componentes de G podemos aplicar cualquiera de los algoritmos conocidos para grafos finitos.

Paso 3 Este paso se divide en los siguientes subpasos:

1. Se toma A , una de las n componentes de G .
2. Se toma G_{i_0} , uno de los 4-vecinos de G .
3. Se toma B componente de G y se considera B_{i_0} , copia de B por G en G_{i_0} .
4. Nos preguntamos si A y B_{i_0} están unidos.

En los tres primeros subpasos tenemos tres bucles, en los cuales tenemos que tomar $4n^2$ elecciones. Suponiendo que el último subpaso lo podemos resolver en tiempo constante, todo el paso se puede resolver con $O(n^2)$ operaciones.

A partir de aquí en el algoritmo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada componente B de G que está unida a k copias por G de componentes de G es una estrella $K_{1,k}$, estando el vértice de valencia n en el interior de C y los demás vértices en ∂C perteneciendo cada uno de ellos a una de las k copias por G de componentes de G unidas con B de forma que cada una de éstas contiene sólo a uno de estos vértices, ya que está claro que este nuevo grafo periódico es conexo si y sólo si lo es el anterior.

Al efectuar este paso, no sólo conocemos las copias de componentes de G que están unidas a componentes de G , sino también las copias de componentes de G que están unidas a cualquier copia de cualquier componente de G .

Paso 4 Para comprobar si \mathcal{M}_G es C. I. hacemos lo siguiente:

- a) Consideramos A , una componente cualquiera de G , y los conjuntos $\Gamma_1 = \{(A; 0, 0)\}$ y $\Gamma_2 = \{A\}$.

b) Nos preguntamos si existen $\tau_{(a',b')}(C')$ y $\tau_{(a,b)}(C)$, con C y C' componentes de \mathbf{G} (C y C' podrían la misma componente de \mathbf{G}) tales que $(C; a, b) \in \Gamma_1$ y $(C'; a', b') \notin \Gamma_1$.

- En caso afirmativo nos preguntamos si $C' \in \Gamma_2$:

Si la respuesta es SÍ entonces $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es C. I.

Si la respuesta es NO entonces añadimos $(C'; a', b')$ a Γ_1 y C' a Γ_2 y volvemos a b).

- En caso negativo $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ no es ni C. I. ni conexo.

El subpaso a) se puede hacer en tiempo constante y suponiendo que podemos responder cada pregunta en tiempo constante, como el subpaso b) es efectuado a lo más en $(2n + 1)n - 1$ ocasiones (que es el número de copias de componentes de \mathbf{G} que hay en $\prod_n \mathbf{G}$), el paso se efectuará con $O(n^3)$ operaciones.

Paso 6 Hacemos lo siguiente:

a) Tomemos el valor final de Γ_1 en el paso anterior y consideremos cualquier $(A; a, b) \in \Gamma_1$ (siendo A la misma componente del paso anterior) con $(a, b) \neq (0, 0)$ y $\Gamma_3 = \{(A; 0, 0), (A; a, b)\}$.

b) Nos preguntamos si existe $(A; c, d) \in \Gamma_1 - \Gamma_3$.

- En caso afirmativo comprobamos si $ad = bc$:

Si la respuesta es SÍ entonces añadimos $(A; c, d)$ a Γ_3 y volvemos a b).

Si la respuesta es NO entonces $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ es F. C. y se considera la baldosa $\tilde{\mathbf{G}}$.

- En caso negativo $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ no es ni F. C. de \mathbf{G} ni conexo.

El subpaso a) se puede hacer en tiempo constante y suponiendo que podemos responder cada pregunta en tiempo constante, como el subpaso b) es efectuado a lo más en n ocasiones, ya que a lo más hay $O(n)$ posibles (c, d) tales que $|c| \leq n, |d| \leq n$ y que $ad = bc$. El paso se efectuará con $O(n)$ operaciones.

Paso 7 Este paso es análogo que el Paso 2.

Paso 8 Este paso es análogo que el Paso 3. Requiere, por tanto, $O(m^2)$ operaciones y como m es $O(n^3)$, se tiene que necesita $O(n^6)$.

A partir de aquí en el algoritmo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada componente B de \tilde{G} que está unida a k copias por \tilde{G} de componentes de \tilde{G} es una estrella $K_{1,k}$, estando el vértice de valencia n en el interior de \tilde{G} y los demás vértices en $\partial\tilde{G}$ perteneciendo cada uno de ellos a una de las k copias por \tilde{G} de componentes de \tilde{G} unidas con B de forma que cada una de éstas contiene sólo a uno de estos vértices, ya que está claro que este nuevo grafo periódico es conexo si y sólo si lo es el anterior.

Al efectuar este paso, no sólo conocemos las copias por \tilde{G} de componentes de \tilde{G} que están unidas a componentes de \tilde{G} , sino también las copias por \tilde{G} de componentes de \tilde{G} que están unidas a cualquier copia por \tilde{G} de cualquier componente de \tilde{G} .

Paso 9 Este paso es análogo que el Paso 5, requiere por tanto $O(m^3)$ operaciones y como m es $O(n^3)$, se tiene que necesita $O(n^9)$.

Por consiguiente, este algoritmo necesita un tiempo $O(n^9)$.

Tenemos, por tanto, probado el siguiente resultado:

Teorema 1.4.1 *Se puede decidir si un grafo periódico \mathcal{M}_G es conexo en tiempo $O(n^9)$, en donde n es el número de componentes conexas del grafo célula G .*

1.5 Conclusiones y problemas abiertos

Se ha planteado en este Capítulo el problema de la conexión de un grafo periódico \mathcal{M}_G . A parte de resolver este problema desde un punto de vista teórico, se da un algoritmo que, en tiempo $O(n^9)$ (en donde n es el número de componentes conexas que tiene el grafo finito G que genera al periódico), responde si dicho grafo es conexo o no.

Caso en que el grafo periódico no sea conexo, se ha visto que todas sus componentes vienen generadas por traslaciones de, a lo más, n componentes (una por cada componente de G).

El problema queda resuelto, desde un punto de vista teórico, viendo que \mathcal{M}_G es conexo si y sólo si G está en una componente finita de cierto subgrafo de \mathcal{M}_G finito (que llamamos $\prod_{k(n)} G$) y compartiendo G vértices de junturas con sus 4-vecinos. Desde un punto de vista algorítmico, se resuelve dicho problema dando una cota superior del tamaño del subgrafo de \mathcal{M}_G finito mencionado anteriormente (es decir, dando una cota superior del número $k(n)$).

Los problemas abiertos que se proponen están relacionados con la mejora de alguna de las conclusiones obtenidas en este capítulo. Los más naturales son los siguientes:

1. Demostrar que los pasos del algoritmo tienen una eficiencia mejor que la descrita anteriormente, especialmente el último paso que es el único que requiere $O(n^9)$ operaciones.
2. Reducir el tamaño del lado de la baldosa \tilde{G} . Si por ejemplo la baldosa \tilde{G} tuviese una baldosa de lado $O(n)$ entonces $k(n)$ sería $O(n^3)$ y el último paso del algoritmo de conexión utilizaría $O(n^6)$ operaciones.
3. Ver la efectividad del algoritmo si en vez de tener un sólo procesador tenemos más, por ejemplo n ó m .
4. Encontrar una cota superior (o inferior) más fina de $k(n)$. Hay que destacar la gran diferencia que existe entre las cotas superiores e inferiores de $k(n)$ dadas. De ser posible, dar el valor explícito de $k(n)$.

Otro de los problemas que se propone es si dado G un grafo finito contenido en \mathcal{C} de forma que el grafo periódico \mathcal{M}_G que genera es conexo, encontrar un grafo finito G' conexo tal que el grafo periódico $\mathcal{M}_{G'}$ que genera es homeomorfo a \mathcal{M}_G .

Capítulo 2

Árbol generador

Dado un grafo periódico conexo \mathcal{M}_G , en este capítulo se plantea el problema de la existencia de un árbol generador de dicho grafo. El primer problema que surge es que los grafos periódicos conexos siempre contienen ciclos, por lo que no podemos definir los árboles generadores como grafos periódicos. Por lo tanto, es necesario ampliar la definición de grafo periódico definiendo lo que serán los grafos periódicos generalizados. Este tipo de grafos vienen definidos como una unión finita de grafos periódicos.

Una vez ampliada esta definición, se resuelve el problema de dado un grafo periódico \mathcal{M}_G conexo, encontrar un árbol generador de dicho grafo, viniendo definido este árbol como grafo periódico generalizado. Desde un punto de vista algorítmico, se presenta un algoritmo que, en tiempo polinomial, construye un árbol generador de \mathcal{M}_G .

2.1 Introducción

El concepto de árbol como grafo finito, conexo y sin ciclos, fue introducido y estudiado formalmente en 1857 por Cayley, conjuntamente con Sylvester en [11], [12], [13], [14], [15] y [16], como herramienta básica para la resolución de problemas como la trasposición de variables en Cálculo diferencial, en Química al estudiar los isómeros, etc.; aunque la primera vez que se utilizó la estructura de árbol

fue en 1845 en la rama de la Física. Más concretamente en Electricidad, cuando Kirchhoff planteó y resolvió, identificando la idea de circuito eléctrico como grafo dirigido, las leyes de electricidad que llevan su nombre [33].

Un primer resultado formal para árboles se tiene en [16] cuando Cayley demuestra que existen n^{n-2} posibles árboles con n vértices. Quedó pues resuelto el problema en Química de dar una interpretación geométrica para encontrar todas las parafinas posibles con una misma estructura atómica, pero con distintas estructura molecular.

Paralélamente y, por otro camino, Listing en [37] y Jordan en [31] llegaron al concepto de árbol, estudiando algunas de sus propiedades.

A partir de 1921, la estructura de árbol jugó un papel fundamental en otras disciplinas matemáticas como la nueva teoría de curvas, desarrollada entre otros por Menger en [41].

Ahrens en [2] estudió y dió cierta estructura de *grupo* a las aristas de un grafo que formaban ciclos en él. Estas aristas son las que si no se consideran en el grafo, el subgrafo resultante sería un árbol generador del grafo en cuestión.

Los árboles generadores constituyen una herramienta fundamental, hoy en día, en el campo de *telecomunicaciones*. Más que con la estructura de árbol, lo que se utiliza es, dado un grafo dirigido, finito y conexo, cuyas aristas tienen un “peso” definido, un árbol generador minimal. Kruskal, entre otros, da un algoritmo que construye dicho árbol generador minimal.

No sólo se ha estudiado la estructura de árbol como aplicaciones a la resolución de problemas en las distintas disciplinas, sino también como ente puramente matemático, como se puede ver en [27], obteniéndose propiedades y una algorítmica bastante amplia. Cabe citar [32], [26], [28], [8], [38] y [39] entre otros.

Son bien conocidas las aplicaciones de la teoría de grafos, y en especial los árboles, en biología, estadística, lingüística, organización de empresas, etc. como se puede observar en [10] y en [19].

Los algoritmos más importantes de *búsqueda* (*Depth-first search* y *Breadth-first search*) están basados en estructuras de árboles finitos (ver [1] y [19]). Se pueden generalizar éstas búsquedas en árboles finitos para árboles infinitos, am-

pliando estos algoritmos recursivos a algoritmos de búsqueda recursivamente enumerables.

Cabe citar, por último, que casi la totalidad de la algorítmica para árboles existente, la podemos encontrar en [1], [6] y [40], así como un estudio de la complejidad de dichos algoritmos.

2.2 Preliminares

Dado un grafo finito G conexo, se define un *árbol generador* como aquel árbol, subgrafo de G , que contiene a todos los vértices de G . En el caso en que G no es conexo, se define un *bosque generador* como la unión de los árboles generadores de cada componente conexa de G . Es bien conocido que todo grafo tiene un bosque generador y que dicho bosque puede obtenerse en tiempo $n \log n$ (en función del número de vértices del grafo). Los algoritmos básicos para la obtención de árboles generadores son de búsqueda por capas y de búsqueda en profundidad. Muchos algoritmos y propiedades en grafos están basados en la existencia de un árbol generador [1].

Puesto que estamos trabajando en grafos periódicos, sería interesante dar una descripción del árbol generador de dicho tipo de grafos (cuando sean conexos, o un bosque generador en el caso en que no lo sean).

En este capítulo se tratará de dar una construcción de un árbol generador de un grafo periódico conexo.

En principio, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1 *Sea G un grafo definido recursivamente con vértices en \mathbb{Z}^2 . El problema de la construcción de un bosque generador es recursivamente enumerable.*

Demostración: Se puede observar en [1] que siempre se puede construir el bosque generador de un grafo finito. Si consideramos el grafo recursivo G , y si para cada n natural se define $G_n = G \cap ([-n, n] \times [-n, n])$, se tiene que este grafo es finito.

Si a este grafo le construimos su bosque generador, se tiene que haciendo crecer n se va obteniendo un bosque generador de G . \square

Evidentemente no se podría expresar la complejidad de la construcción dada en el Teorema 2.2.1 en función de los vértices de G , puesto que la comprobación de si una arista cierra un ciclo se tiene que hacer en G_n .

Por lo tanto, en nuestro contexto, lo ideal sería dar el árbol generador de un grafo periódico conexo como grafo periódico, es decir, dado \mathcal{M}_G se trataría de encontrar un grafo finito F tal que \mathcal{M}_F sea conexo, no contenga ciclos y que sea subgrafo de \mathcal{M}_G , además de contener todos los vértices de \mathcal{M}_G . Sin embargo, esto no es posible, ya que se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2.2 *Sea G un grafo contenido en la baldosa \mathcal{C} y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Si \mathcal{M}_G es conexo entonces tiene ciclos. Por lo tanto, ningún grafo periódico puede ser árbol.*

Demostración: Sea $p_1 \in G$ un vértice y sean p_2 , p_3 y p_4 los trasladados de p_1 según los vectores $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$ respectivamente.

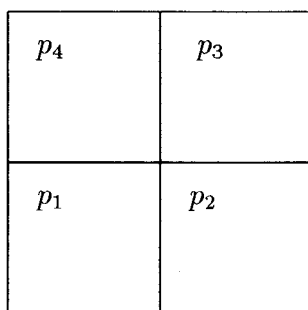


Figura 2.1

Como \mathcal{M}_G es conexo existe un camino minimal α que une p_1 con p_2 . Notemos este camino como

$$\alpha = \{a_0 = p_1, a_2, \dots, a_n = p_2\}$$

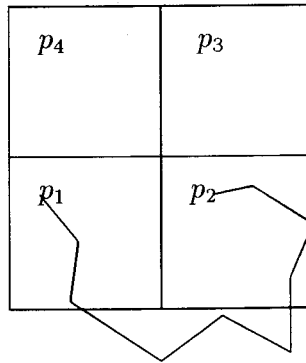


Figura 2.2

De igual forma existe un camino minimal

$$\beta = \{b_0 = p_4, b_1, \dots, b_m = p_1\}$$

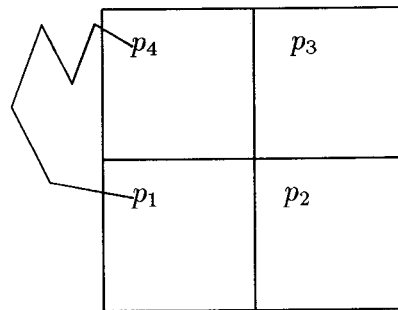


Figura 2.3

Supongamos que $\alpha \cap \beta \neq \{p_1\}$. Sea $i_0 < m$ tal que $b_{i_0} \in \alpha$ y tal que si $i < i_0$ se tenga que $b_i \notin \alpha$.

Caso 1.

Supongamos que existe un $k_0 \geq i_0$ tal que cualquier j con $i_0 \leq j \leq k_0$ se tenga que $b_j \in \alpha$ y $b_{k_0+1} \notin \alpha$. Sea $j_0 = \inf\{j : j > k_0, b_j \in \alpha\}$, que está bien definido pues $b_m \in \alpha$. Sea $a_{n_k} = b_{k_0}$ y $a_{n_j} = b_{j_0}$. Sea el camino

$$\{a_{n_k} = b_{k_0}, b_{k_0+1}, \dots, b_{j_0} = a_{n_j}, a_{n_{j-1}}, \dots, a_{n_k} = b_{k_0}\}$$

que obviamente es un ciclo.

Caso 2.

Supongamos que para todo $k \geq i_0$ se tenga que $b_k \in \alpha$. Sea el camino

$$\gamma = \{b_0 = p_4, b_1, \dots, b_{k_0} = a_{n_k}, a_{n_k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n = p_1\}$$

Consideremos el camino $\delta = \tau_{(1,0)}(\alpha)$ que, como \mathcal{M}_G es periódico, une p_4 con p_3 . Razonando como en los casos anteriores, o bien existe un ciclo en el camino $\gamma \cup \delta$ o bien se puede formar un subcamino η del $\gamma \cup \delta$ sin ciclos que una p_3 con p_2 . Consideremos el camino $\sigma = \tau_{(0,1)}(\beta)$ que une los puntos p_3 con p_2 . Razonando de la misma forma con los caminos η y σ se deduce que o bien contiene un ciclo o bien es un camino sin ciclos que une p_2 con p_2 , luego es un ciclo.

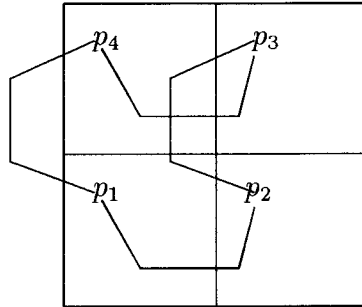


Figura 2.4

□

Luego para dar el árbol generador de forma recursiva, necesitamos dar una definición más general de grafos periódicos, de tal forma que este tipo de grafos infinitos formen una subclase de dichos grafos.

Obsérvese también, que el Teorema 2.2.2 nos dice no sólo que hay ciclos en cualquier grafo periódico conexo, sino que son infinitos los ciclos que hay, por lo tanto no es posible dar un árbol como un grafo periódico menos una cantidad finita de aristas.

2.3 Generalización de grafos periódicos

Aunque el Teorema 2.2.2 nos dice que un árbol generador nunca puede ser un grafo periódico, en esta sección definiremos una nueva familia de grafos infinitos, que amplía a la de los grafos periódicos, en la que sí podemos encontrar un árbol generador de un grafo periódico conexo.

Vemos con un ejemplo ilustrativo, como se puede construir, dado \mathcal{M}_G , un árbol generador. Así, sea el grafo G definido como se muestra en la Figura 2.5:

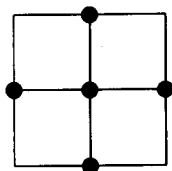


Figura 2.5

y consideremos el grafo periódico que genera (Figura 2.6):

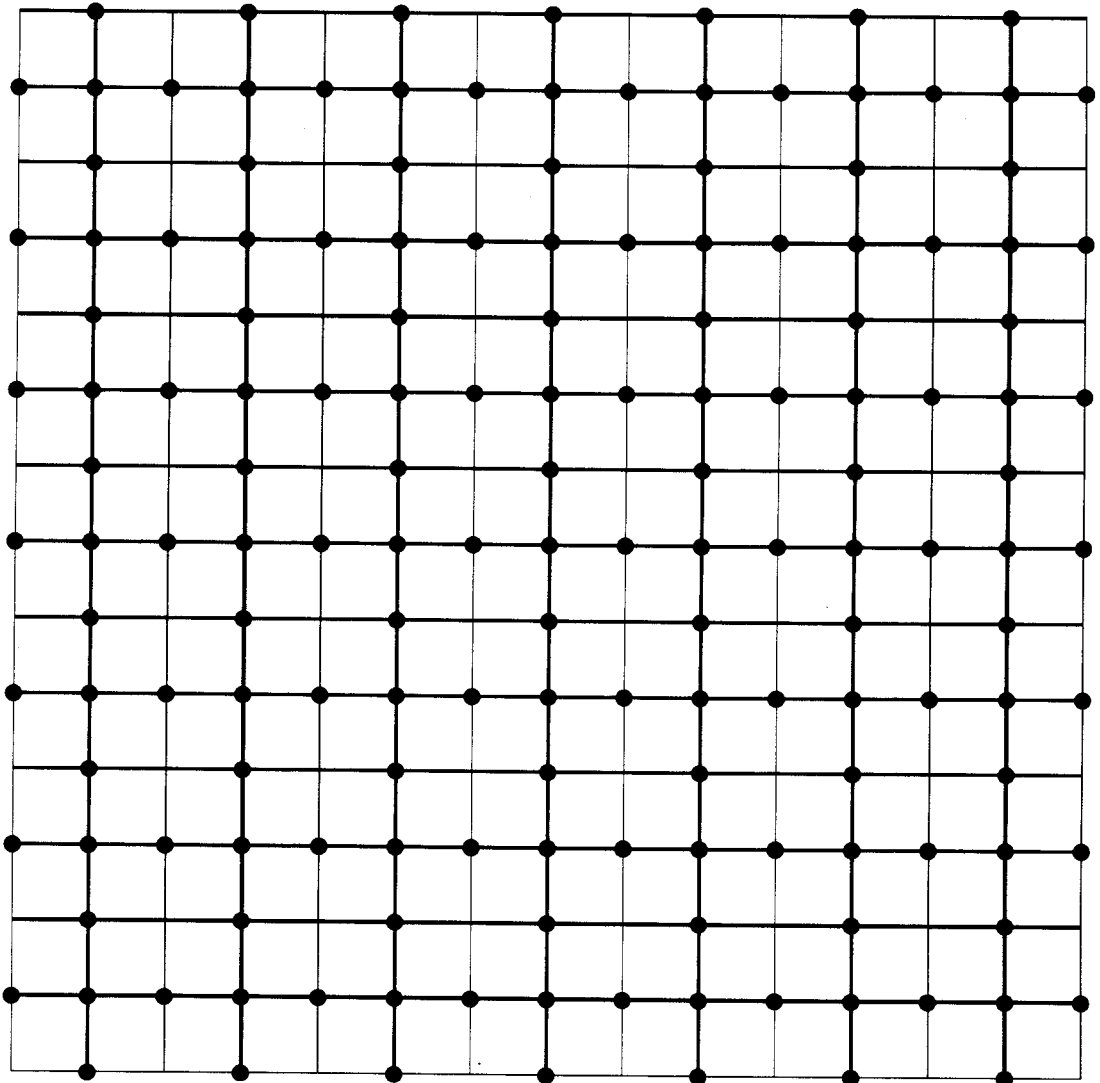


Figura 2.6

Obsérvese que se puede construir un árbol generador si consideramos primero el grafo generado por el de la Figura 2.7

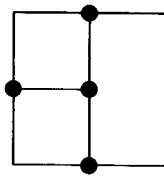


Figura 2.7

cuyo grafo periódico es el de la Figura 2.8:

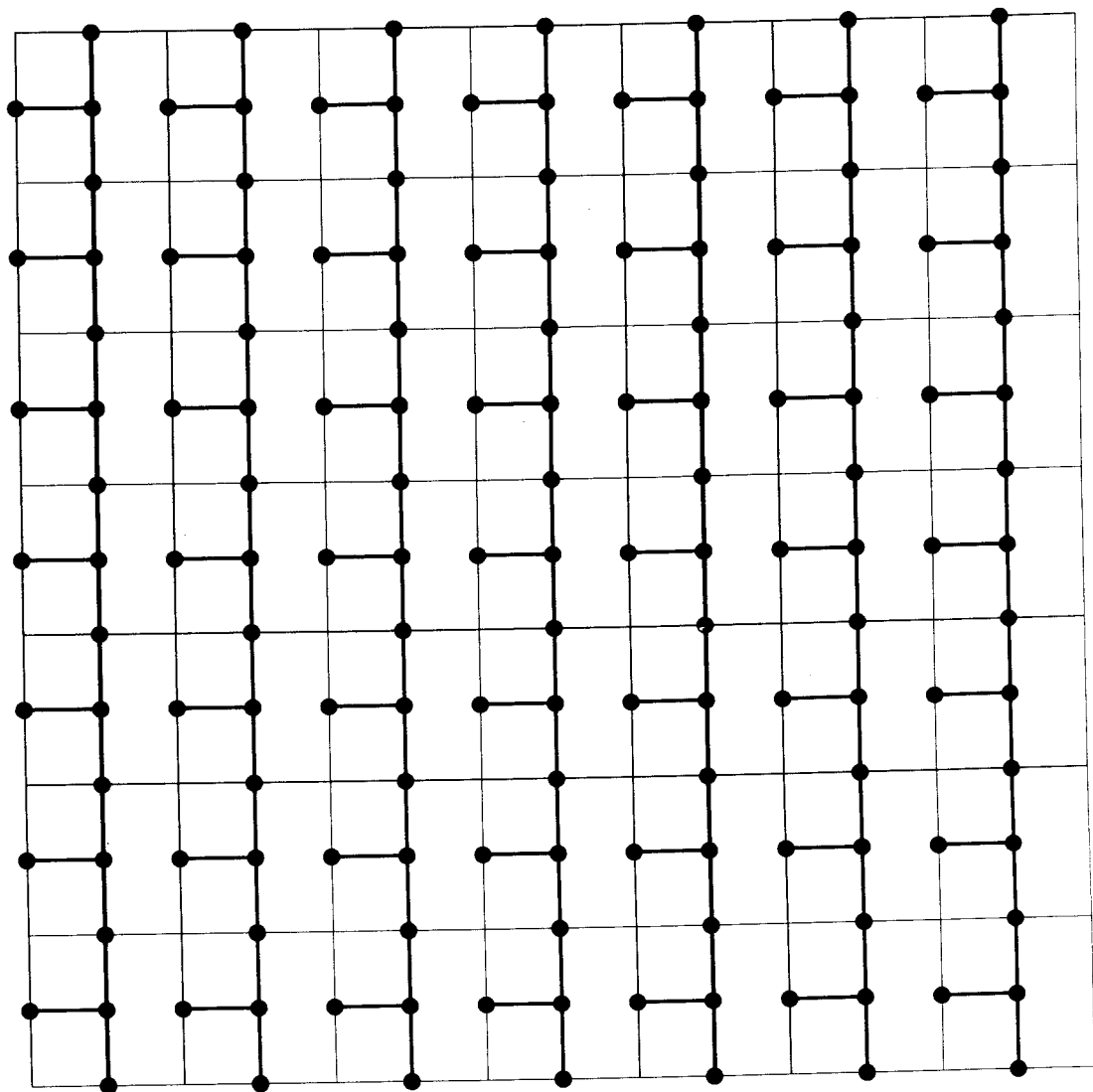


Figura 2.8

y después formamos una cadena de aristas uniendo las infinitas componentes conexas, resultando el siguiente árbol generador:

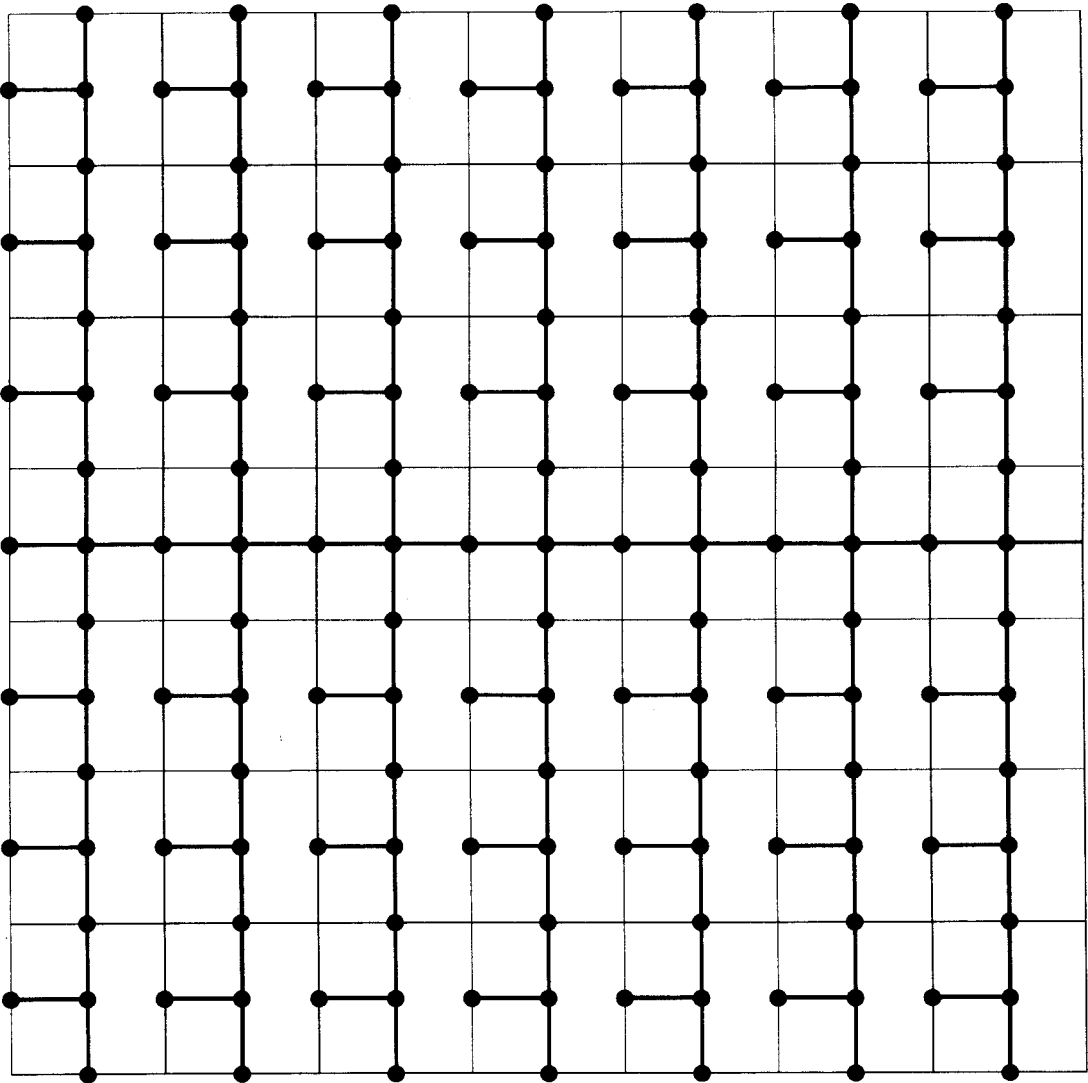


Figura 2.9

Tratemos de generalizar las operaciones aquí construidas.

Sea $G = \{A, E\}$ un grafo finito contenido en la baldosa $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ y sean $u = (0, 1)$ y $v = (1, 0)$. En la Definición 0.2.2 se definió el grafo periódico \mathcal{M}_G como el conjunto

$$(\mathbf{Z}_u + \mathbf{Z}_v)(G) = \{V', E'\}$$

en donde

$$V' = \{\tau_{\lambda u + \mu v}(p) : \lambda, \mu \in \mathbf{Z} \text{ y } p \in V\}$$

$$E' = \{\tau_{\lambda u + \mu v}(e) : \lambda, \mu \in \mathbf{Z} \text{ y } e \in E\}$$

Si consideramos dos vectores $u, v \in \mathbf{Z}^2$ cualesquiera y redefinimos el grafo periódico generado por un grafo finito G como anteriormente se tenía pero cambiando los vectores $(0, 1)$ y $(1, 0)$ por dos cualesquiera u y v podemos dar una generalización de grafo periódico como sigue:

Definición 2.3.1 Un grafo periódico generalizado es una unión finita de grafos periódicos, entendiéndose por unión finita de grafos periódicos el grafo cuyos vértices son la unión de los vértices de los grafos periódicos y las aristas la unión de las aristas de éstos.

En la nueva definición de grafo periódico no se da ninguna condición sobre los vectores u y v . Así, pueden ser linealmente dependientes o independientes, al igual que pueden ser ambos el vector $(0, 0) \in \mathbf{Z}^2$. Se obtiene pues un grafo infinito que recorre todas las direcciones de \mathbf{Z}^2 (Figura 2.10), un grafo infinito que recorre una dirección de \mathbf{Z}^2 (Figura 2.11) o el propio grafo G (Figura 2.12).

Ejemplo 2.3.1 Veamos algunos ejemplos. Sea G el grafo siguiente:

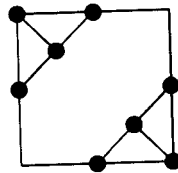


Figura 2.10

1. $(\mathbf{Z}_{(0,1)} + \mathbf{Z}_{(1,0)})(G)$ es el grafo

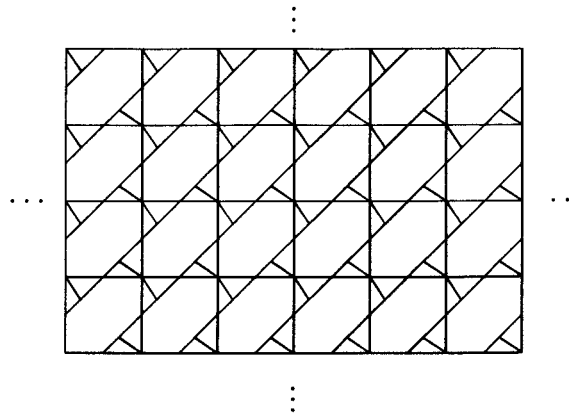


Figura 2.11

2. $(Z_{(1,0)} + Z_{(0,0)})(G)$ es el grafo

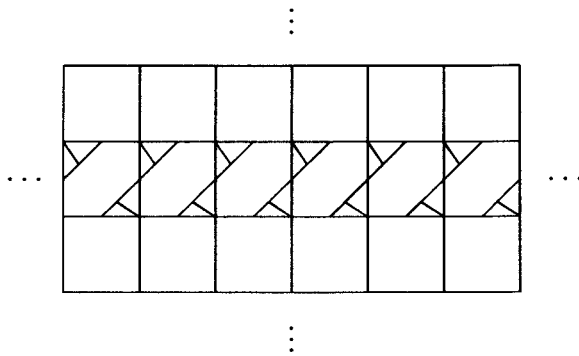


Figura 2.12

3. $(Z_{(0,0)} + Z_{(0,0)})(G)$ es el grafo

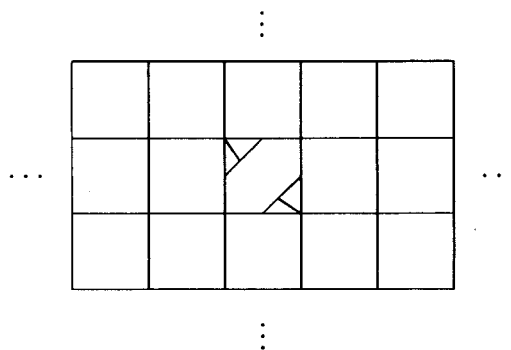


Figura 2.13

□

Según la definición de 8-vecino dada en [51], notaremos por $C^{(k)}$ la copia de $C \subset \mathcal{C}$ en el k -vecino, en donde $k = 1, \dots, 8$, como se muestra en la siguiente Figura 2.14:

| | | |
|---|---------------|---|
| 4 | 3 | 2 |
| 5 | \mathcal{C} | 1 |
| 6 | 7 | 8 |

Figura 2.14

2.4 Construcción del árbol generador

Dado un grafo G finito contenido en \mathcal{C} , podemos suponer que el grafo periódico que genera, \mathcal{M}_G , es conexo. Además, podemos suponer que G no tiene ciclos pues, de lo contrario, calcularíamos primero el bosque generador de G y se razonaría sobre el grafo periódico que genera dicho bosque generador, ya que éste seguiría siendo conexo. Notaremos por C_1, \dots, C_n las componentes conexas del grafo G .

Como se vio en el Teorema 2.2.2, ningún grafo periódico puede ser árbol, luego para dar el árbol generador de \mathcal{M}_G , lo que se hará será definir un grafo periódico generalizado sin ciclos, conexo, que contenga los mismos vértices de \mathcal{M}_G y que por aristas tenga aristas de \mathcal{M}_G .

Usaremos la misma notación que en [36]. Así, dado M un subgrafo de \mathcal{M}_G , se dirá que M tiene coordenadas $(m, n)_G$ si existe un subgrafo M' de G tal que $\tau_{(m,n)}(M') = M$.

De entre los vértices de G cabe recordar unos especiales que se definieron en el capítulo 0 de preliminares, que son los siguientes:

Definición 2.4.1 Sea G un grafo finito contenido en la baldosa \mathcal{C} . Un vértice p de G se dice que es de *juntura* si p está en el borde de \mathcal{C} y en p inciden aristas de G y de algún $G^{(k)}$ de cierto 8-vecino de \mathcal{C} .

Como ejemplo, sea G el grafo siguiente: $G = \{V, A\}$ contenido en la loseta $\mathcal{C} = [0, 10] \times [0, 10]$ definido como:

El conjunto de vértices es:

$$V = \{p_1 = (0, 8), p_2 = (2, 10), p_3 = (0, 2), p_4 = (5, 10), p_5 = (2, 0),$$

$$p_6 = (8, 10), p_7 = (10, 8), p_8 = (5, 0), p_9 = (8, 0), p_{10} = (10, 2), p_{11} = (5, 8)\}$$

Las aristas son:

$$A = \{(p_1, p_2), (p_3, p_4), (p_4, p_{11}), (p_5, p_6), (p_6, p_7), (p_7, p_8), (p_9, p_{10})\}$$

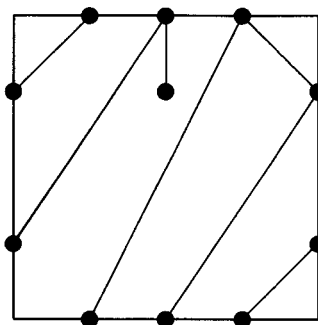


Figura 2.15

Se tiene claramente que todos los vértices, salvo p_{11} , son de juntura. Además, se observa que este grafo tiene 4 componentes conexas.

Definiremos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{A}_1 = \{C_1\}$$

$$\mathcal{A}_k = \{C : C \text{ es componente de } G \text{ y } C \text{ está unido por una arista}$$

$$\text{con alguna componente } (C')^{(k)} \text{ en donde } C' \in \mathcal{A}_{k-1}\} - \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{A}_i$$

que según el grafo de la Figura 2.16 son:

$$\mathcal{A}_1 = \{C_1 = \{(p_9, p_{10})\}\}$$

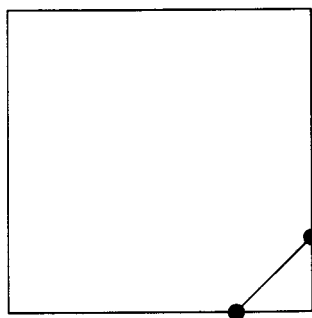


Figura 2.16

$$\mathcal{A}_2 = \{C_2 = \{(p_5, p_6), (p_6, p_7), (p_7, p_8)\}, C_3 = \{(p_3, p_4), (p_4, p_{11})\}\}$$

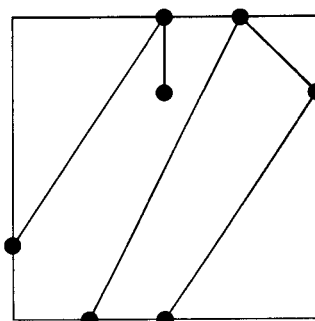


Figura 2.17

$$\mathcal{A}_3 = \{C_4 = \{(p_1, p_2)\}\}$$

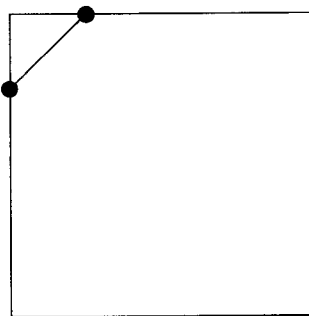


Figura 2.18

Proposición 2.4.1 Existe $m_0 \in \{1, \dots, n\}$ con $\mathcal{A}_m = \emptyset$ cualquiera que sea $m \geq m_0$ y $\mathcal{A}_k \neq \emptyset$ para todo $k \leq m_0$.

Demostración: Claramente se tiene que \mathcal{A}_1 no es vacío. Si $\mathcal{A}_2 = \emptyset$ es por que C_1 tan sólo está unido a una copia de sí mismo, luego \mathcal{M}_G no sería conexo, ya que no se podía unir C_1 con cualquier otra componente de G .

Supuesto que $\mathcal{A}_i \neq \emptyset$ en donde $i = 1, \dots, k$, veamos que o bien $\mathcal{A}_{k+1} \neq \emptyset$ o bien $\mathcal{A}_j = \emptyset$ cualquiera que sea $j \geq k+1$ y, por lo tanto, el m_0 de la proposición sería este k .

Tenemos pues que $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ son todos distintos del conjunto vacío.

- Si $\left| \bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i \right| < n$ entonces existe una componente C_{i_0} de G tal que $C_{i_0} \notin \bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i$. Como \mathcal{M}_G es conexo, existirá un camino α minimal que une C_1 con C_{i_0} . Este camino induce un orden en las copias de las componentes de G que atraviesa. Así, podemos suponer que este camino α atravesará copias de G en $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ (por este orden). Sea C la siguiente componente de G por la que el camino α pasa después de pasar por \mathcal{A}_k . Está claro que $C \in \mathcal{A}_{k+1}$, con lo que se tiene que $\mathcal{A}_{k+1} \neq \emptyset$.

- Si $\left| \bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i \right| = n$ se tiene que $\mathcal{A}_j = \emptyset$ cualquiera que sea $j > k$, pues por definición los \mathcal{A}_i son disjuntos y, por conexión de \mathcal{M}_G , se tiene que $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i = \{C_1, \dots, C_n\}$.

□

Más aún, como \mathcal{M}_G es conexo es fácil demostrar la siguiente proposición:

Proposición 2.4.2 $\bigcup_{i=1}^{m_0} \mathcal{A}_i = \{C_1, \dots, C_n\}$

2.5 Descripción del algoritmo

Sea $G = \{C_1, \dots, C_n\}$, en donde C_i son las componentes conexas de G , y supongamos que \mathcal{M}_G es conexo. Además, podemos suponer que cada componente de G no contiene ciclos, ya que si los tuviera consideraríamos el bosque generador de

G y tendríamos que el grafo periódico generado por dicho bosque seguiría siendo conexo.

Para ilustrar la construcción, sea G el grafo de la siguiente Figura 2.19:

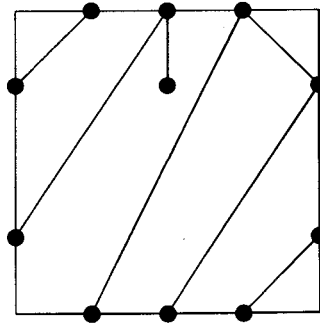


Figura 2.19

que genera el siguiente grafo periódico:

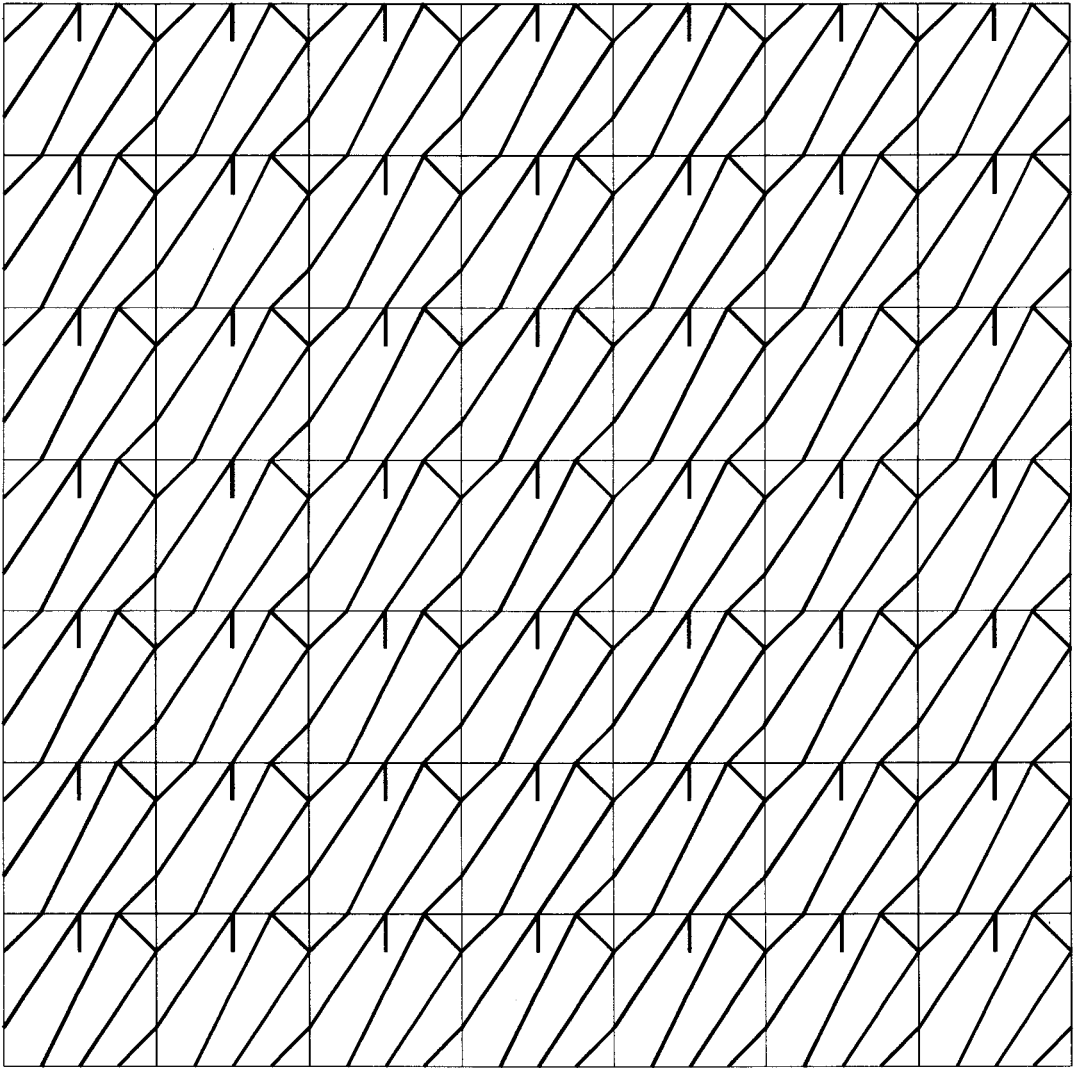
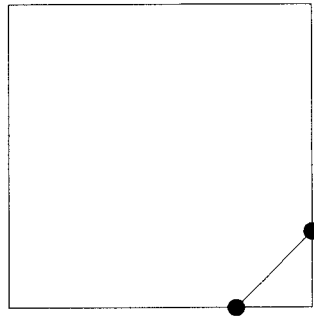
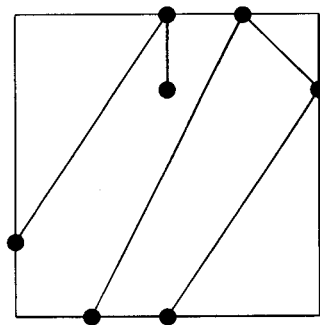
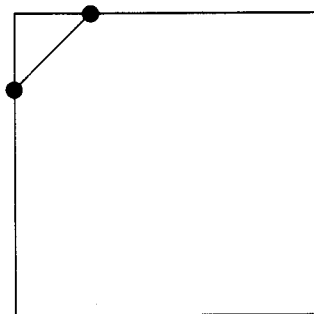


Figura 2.20

Sea \mathcal{A}_k , $k = 1, \dots, m_0$ la partición de G anteriormente definida. En nuestro ejemplo será:

Figura 2.21: \mathcal{A}_1 Figura 2.22: \mathcal{A}_2 Figura 2.23: \mathcal{A}_3

Una descripción del algoritmo sería la siguiente:

Sea \mathcal{A}_{m_0} . Cada componente C de G en \mathcal{A}_{m_0} está conectada mediante vértices de juntura a cierta copia $(C')^{(k)}$ en algún k -vecino de C' , en donde C' es una componente de G en $\mathcal{A}_{m_0-1} \cup \mathcal{A}_{m_0}$. Lo que se hará será quitar, por cada componente C , todas las aristas que inciden en vértices de juntura salvo una que la una con una copia de una componente de \mathcal{A}_{m_0-1} . Así, C estará unido a una

sola copia $(C')^{(k)}$, en el k -vecino, de una componente de G en \mathcal{A}_{m_0-1} . Repitiendo este proceso para cada componente de G en \mathcal{A}_{m_0} , sea $\mathcal{A}_{m_0}^*$ este nuevo conjunto en donde se han borrado dichas aristas.

Sea $k \in \{2, \dots, m_0 - 1\}$ y sea \mathcal{A}_k . Cada componente C de G en \mathcal{A}_k cumple que mediante vértices de junta, dicha componente C está unida a copias $(C')^{(k)}$, en algún k -vecino, de C' , en donde C' es una componente de G en $\mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_k$; y, además, estas componentes C también están unidas por una sola arista a alguna o algunas copias en algún k -vecino de componentes de G en \mathcal{A}_{k+1}^* . Dejamos las aristas que unen esta componente C con las copias de \mathcal{A}_{k+1}^* y, de las aristas de C que inciden en vértices de junta en los que también inciden aristas de copias de componentes de G en $\mathcal{A}_{k-1} \cup \mathcal{A}_k$, las quitamos todas menos salvo una por cada unión a cada copia de G en \mathcal{A}_{k-1} . Sea \mathcal{A}_k^* el conjunto formado por las componentes ya transformadas, es decir, sin las aristas que se han quitado.

En C_1 , que es la única componente de G en \mathcal{A}_1 , tan sólo inciden en sus vértices de junta una sola arista de cada componente de \mathcal{A}_2^* , o bien aristas de una copia de C_1 en algunos de los k -vecinos. Aquí sólo quitamos las aristas de C_1 que inciden en vértices de junta con copias de C_1 en los 8-vecinos.

Consideremos los conjuntos $\mathcal{A}_1^*, \dots, \mathcal{A}_{m_0}^*$ y sea $\bigcup_{i=1}^{m_0} \mathcal{A}_i^* = \{C_1^*, \dots, C_n^*\}$. Notemos por G^* el grafo cuyas componentes son $\{C_1^*, \dots, C_n^*\}$. Se tiene el siguiente:

Teorema 2.5.1 *Sea G^* el grafo construido anteriormente y sea \mathcal{M}_{G^*} el grafo periódico que genera. Sea \mathcal{H} la componente de \mathcal{M}_{G^*} que contiene a C_1^* . Entonces:*

- a) \mathcal{H} contiene copias de todas las componentes de G^* .
- b) En \mathcal{H} no se repiten copias de una misma componente de G^* .

Demostración:

- a) Por construcción, C_1^* está unido con copias de todas las componentes de G^* en \mathcal{A}_2^* . Así, cada copia de cada componente en \mathcal{A}_2^* está unida a alguna de \mathcal{A}_3^* . Así sucesivamente hasta G^* en $\mathcal{A}_{m_0-1}^*$. Como $\bigcup_{i=1}^{m_0} \mathcal{A}_i^* = \{C_1^*, \dots, C_n^*\}$

se tiene que la componente de \mathcal{M}_{G^*} que contiene a C_1^* contiene copias de todas las componentes de G^* en todos los $\mathcal{A}_i^*, i = 1, \dots, m_0$. Luego \mathcal{H} contiene copias de todas las componentes de G^* , ya que $\bigcup_{i=1}^{m_0} \mathcal{A}_i^* = G^*$

- b) Si en \mathcal{H} hay dos copias distintas D_i y D_j de una misma componente $C_{i_0}^*$, consideramos α un camino minimal en \mathcal{H} que une estas copias. El camino α induce un orden en las componentes que son atravesadas por él. Si $C_{i_0}^* \in \mathcal{A}_l^*$ para cierto l , este camino pasará de D_i a D_k , copia de otra componente en \mathcal{A}_{l-1}^* o \mathcal{A}_{l+1}^* . Así, podemos suponer que D_j es copia de una componente de cierto $\mathcal{A}_{l'}$.

Si $l \neq l'$ se tiene que $C_{i_0}^* \in \mathcal{A}_l^* \cap \mathcal{A}_{l'}^*$, con lo que se tendría que $\mathcal{A}_l^* \cap \mathcal{A}_{l'}^* \neq \emptyset$ y, por lo tanto, sería contradictorio, ya que por construcción son disjuntos.

Si $l = l'$ se tiene que $D_i, D_j \in \mathcal{A}_l^*$ y, por lo tanto $D_i = D_j$, que no puede ocurrir pues estamos suponiendo que las dos copias son distintas.

□

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos:

Corolario 2.5.1 *La componente \mathcal{H} definida en el Teorema 2.5.1 es finita.*

Definición 2.5.1 Sea D una copia en \mathcal{M}_{G^*} de C_1^* y sea \mathcal{H} la componente finita que contiene a D . Se dirá que \mathcal{H} es la *estrella* de centro D .

Obsérvese que para la construcción de la estrella \mathcal{H} , se ha utilizado la *búsqueda en capas*. Sin embargo, también se podría haber utilizado la *búsqueda en profundidad* para obtener un resultado similar.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 2.5.2 \mathcal{M}_{G^*} es un bosque generador de \mathcal{M}_G con infinitas componentes finitas.

Demostración: El teorema es obvio, ya que las componentes son las estrellas cuyos centros son todas las copias de C_1^* en \mathcal{M}_{G^*} y, por construcción, estas estrellas no contienen ciclos. □

Siguiendo el procedimiento anteriormente descrito, la partición quedará:

$$\mathcal{A}_1^* = \{C_1^* = \{(p_1, p_2)\}\}$$

$$\mathcal{A}_2^* = \{C_2^* = \{(p_5, p_6), (p_7, p_8)\}\}$$

$$\mathcal{A}_3^* = \{C_3^* = \{(p_4, p_{11})\}, C_4^* = \{p_9\}\}$$

y, por lo tanto, el grafo G^* es el siguiente:

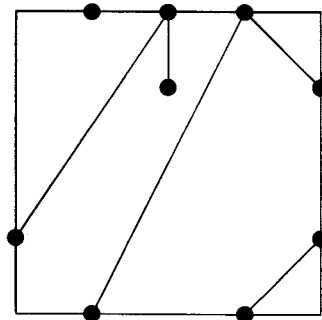


Figura 2.24

El grafo periódico generado por G^* sería:

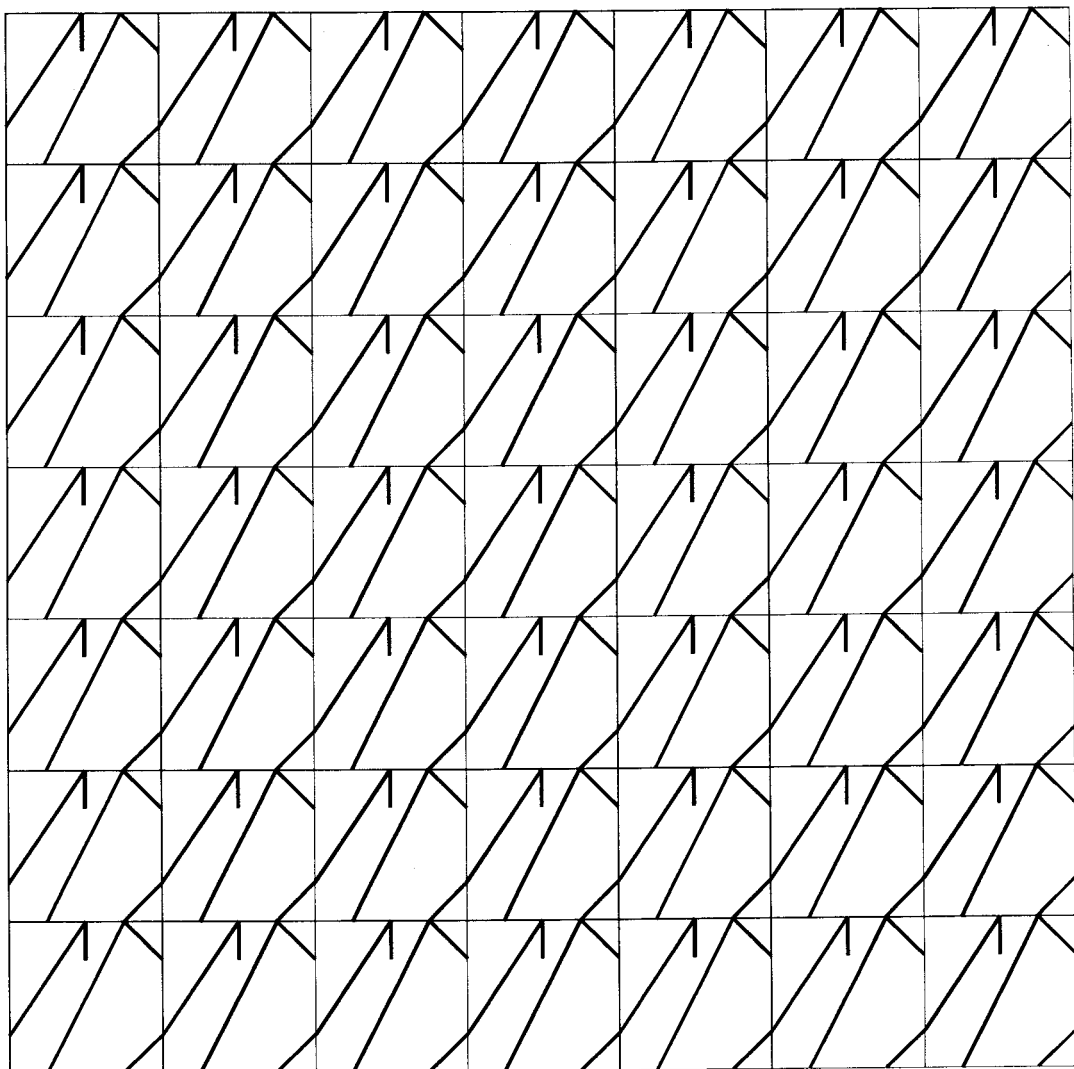


Figura 2.25

Nótese que el grafo periódico \mathcal{M}_{G^*} es un subgrafo de \mathcal{M}_G que contiene todos los vértices, ya que en proceso de construcción tan sólo se quitaron aristas incidentes a ciertos vértices de juntura.

Consideremos ahora C_1^* y una copia cualquiera, $(C_1^*)^k$, de esta componente de G^* en cualquier δ -vecino. Se tiene que la componente de \mathcal{M}_{G^*} que contiene a C_1^* , que es finita, no contiene a $(C_1^*)^k$, ya que este es el centro de otra estrella y todas las estrellas son disjuntas. Lo que si se tiene es que estas estrellas, como subgrafos de \mathcal{M}_G , están conectados por un camino minimal α en \mathcal{M}_G . Como

$\mathcal{M}_{\mathbf{G}^*}$ es bosque generador de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ y por lo tanto contiene a todos los vértices de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$, podemos suponer que este camino α va recorriendo en $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ estrellas de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}^*}$, además de otras aristas puentes entre dichas estrellas. De nuevo, este camino α induce un orden entre las estrellas que atraviesa. Podemos enumerarlas como E_1, \dots, E_l , en donde el centro de E_1 es C_1^* y el de E_l es $(C_1^*)^k$. Sea e la arista puente que está en α y que une las estrellas E_1 y E_2 . Supongamos que las coordenadas de los centros de las estrellas E_1 y E_2 son $(0, 0)_{\mathbf{G}}$ y $(p, q)_{\mathbf{G}}$, respectivamente. Sea $\mathcal{F} = \mathbf{G}^* \cup \{e\}$. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.5.3 $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ es un bosque generador de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ en donde $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ tiene infinitas componentes infinitas. Más aún, si D_1 es una copia de C_1^* de coordenadas $(m, n)_{\mathbf{G}}$ se tiene que la componente de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$ que contiene a D_1 contiene, y solamente contiene, a las estrellas cuyos centros tienen coordenadas $(m, n)_{\mathbf{G}} + k(p, q)_{\mathbf{G}}$, con $k \in \mathbf{Z}$. Es decir, rectas que pasan por $(m, n)_{\mathbf{G}}$ y con dirección $(p, q)_{\mathbf{G}}$.

Demostración: Haciendo distinción cuando $k \in \mathbf{N}$ o cuando $-k \in \mathbf{N}$, por inducción se demuestra fácilmente que las estrellas que tienen coordenadas de la forma $(m, n)_{\mathbf{G}} + k(p, q)_{\mathbf{G}}$ están unidas a D_1 .

Si existen dos estrellas E y E' unidas por un camino α , de coordenadas $(a, b)_{\mathbf{G}}$ y $(a', b')_{\mathbf{G}}$ respectivamente, se tiene que el camino α empieza recorriendo estrellas en la recta $(a, b)_{\mathbf{G}} + k(p, q)_{\mathbf{G}}$ y terminará recorriendo estrellas en la recta $(a', b')_{\mathbf{G}} + k(p, q)_{\mathbf{G}}$. Se tiene pues que existirá un entero k tal que $(a, b)_{\mathbf{G}} = (a', b')_{\mathbf{G}} + k(p, q)_{\mathbf{G}}$, por lo tanto E y E' están en la misma recta. \square

En el ejemplo que se ilustra, la arista puente puede ser $e = (p_6, p_7)$ y, por lo tanto, \mathcal{F} sería el grafo:

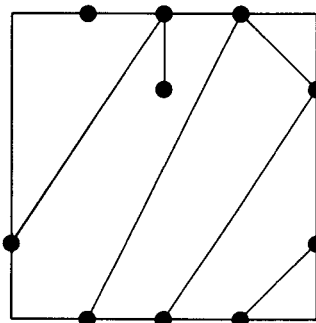


Figura 2.26

Nótese que la longitud del vector de coordenadas (p, q) , con la distancia inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$, es decir, $\max\{|p|, |q|\}$ no puede superar a $2n$, ya que al centro de E_1 y E_2 están unidas copias de cada componente de G , que son n .

Gráficamente se tiene una estructura como muestra la Figura 2.27:

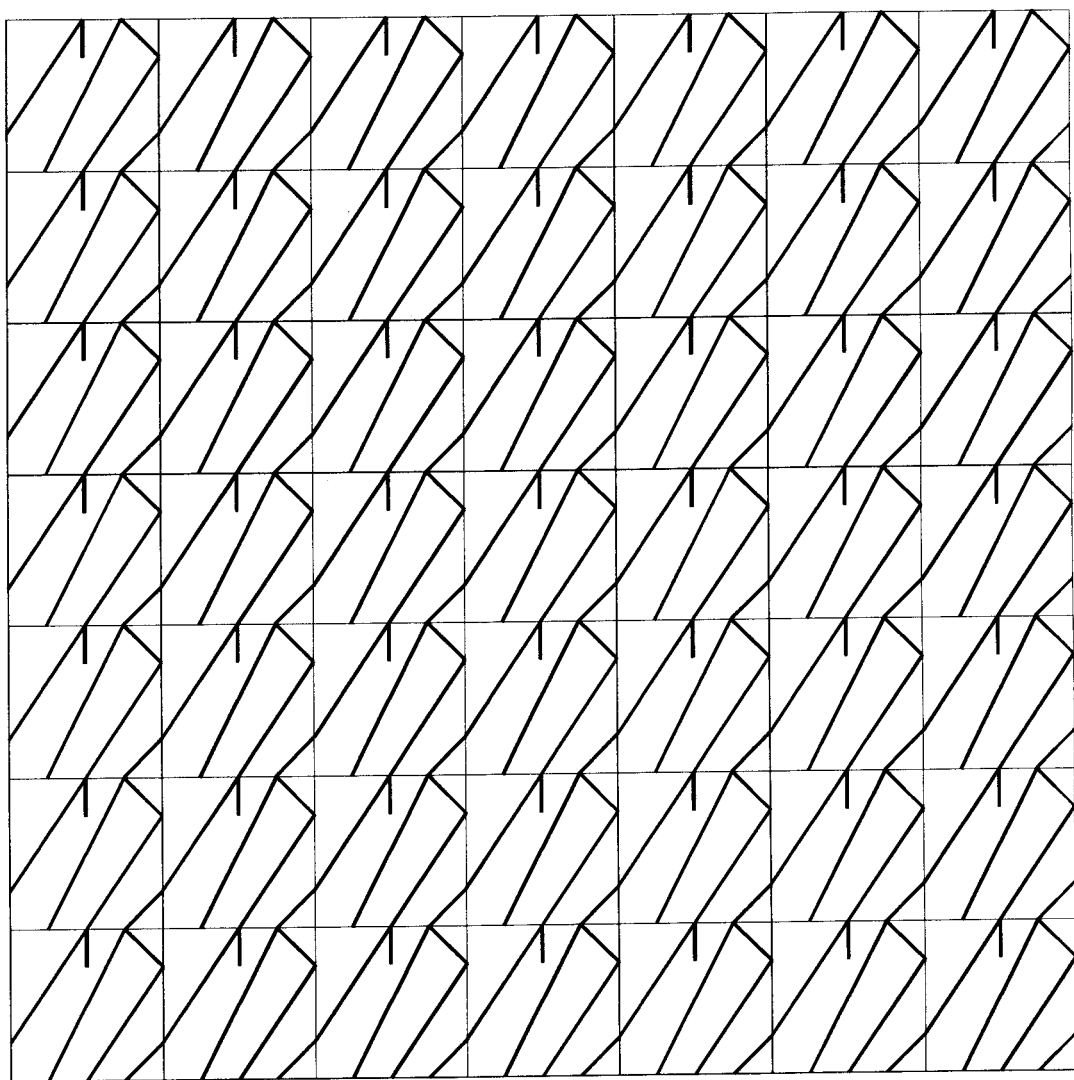


Figura 2.27

Una vez que se obtiene un subgrafo de \mathcal{M}_G con una estructura como muestra la Figura 2.27, el próximo paso es el siguiente:

Consideremos la estrella de centro C_1^* . Podemos suponer que las coordenadas de C_1^* son $(0, 0)_G$. Consideremos el vector (p, q) .

Según la Proposición 1.3.4 existe una estrella E_l unida en \mathcal{M}_G por un camino tal que existe una arista en dicho camino de coordenadas $(p', q')_G$ en donde (p, q) y (p', q') son linealmente independientes.

Sea α el camino que une E_1 con E_l . Se puede suponer que este camino recorre aristas en \mathcal{M}_F , además de aristas puentes en \mathcal{M}_G entre las estrellas de \mathcal{M}_F . Además, este camino induce un orden en las estrellas de \mathcal{M}_F que recorre. Sean estas E_1, \dots, E_l . Por el Lema 1.3.4 se tiene que este camino contiene una arista de coordenadas $(p', q')_G$ en donde (p, q) y (p', q') son linealmente independientes. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que dicha arista es la que une E_1 con E_2 . Además, también se puede suponer que E_1 y E_2 están en distintas componentes de \mathcal{M}_F , pues si no fuera así, sean E_1, \dots, E_{i_0} en la misma componente y sea E_{i_0+1} en otra; en vez de considerar E_1 con centro C_1^* , se considerará E_{i_0} con su centro, y se razonaría con dicha estrella.

Sea $\mathcal{M}_{\{e\}}$ el grafo periódico $(\mathbf{Z}_{(p', q')} + \mathbf{Z}_{(0, 0)}) (\{e\})$. Se tiene:

Teorema 2.5.4 $\mathcal{M}_F \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ es un bosque generador de \mathcal{M}_G con un número finito de componentes infinitas.

Demostración: Sea E_1, E_2 y E_3 las estrellas cuyos centros tienen coordenadas $(0, 0)_G$, $(p - 1, q - 1)_G$ y $(p' - 1, q' - 1)_G$ respectivamente.

Veamos que a lo más hay n^2 componentes en $\mathcal{M}_F \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$. Veremos más aún, que una estrella representante de cada componente está en el cuadrilátero que por esquinas tiene a E_1, E_2, E_3 y E_4 , en donde E_4 tiene por coordenadas $(p + p' - 2, q + q' - 2)$. Sea H una componente de $\mathcal{M}_F \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ y sea C el centro de una estrella contenida en H de coordenadas $(m, n)_G$. Existen $k, k' \in \mathbf{Z}$ tales que $(m, n)_G + k(p, q)_G + k'(p', q')_G = (m', n')_G$, en donde $0 \leq m' < p$ y $0 \leq n' < q$. Por el Teorema 2.5.3, la estrella de centro con coordenadas $(m, n)_G + k(p, q)_G$ está en la misma componente en \mathcal{M}_F que la estrella de centro $(m, n)_G$. Además, por construcción, la estrella de centro $(m, n)_G + k(p, q)_G + k'(p', q')_G$ está en la

misma componente de la de coordenadas $(m, n)_G$ en $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$, y claramente ésta está en el cuadrilátero anteriormente definido. Sabiendo que $\|(p, q)\|_{\infty} \leq n$ y $\|(p', q')\|_{\infty} \leq n$, pues cada estrella contiene n copias de las componentes de G , se tiene que a lo más hay n^2 representantes de cada componente de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$.

Se tiene también que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ no contiene ciclos, pues las copias de la arista e son puentes entre las componentes de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$. \square

En el ejemplo que seguimos quedará el grafo:

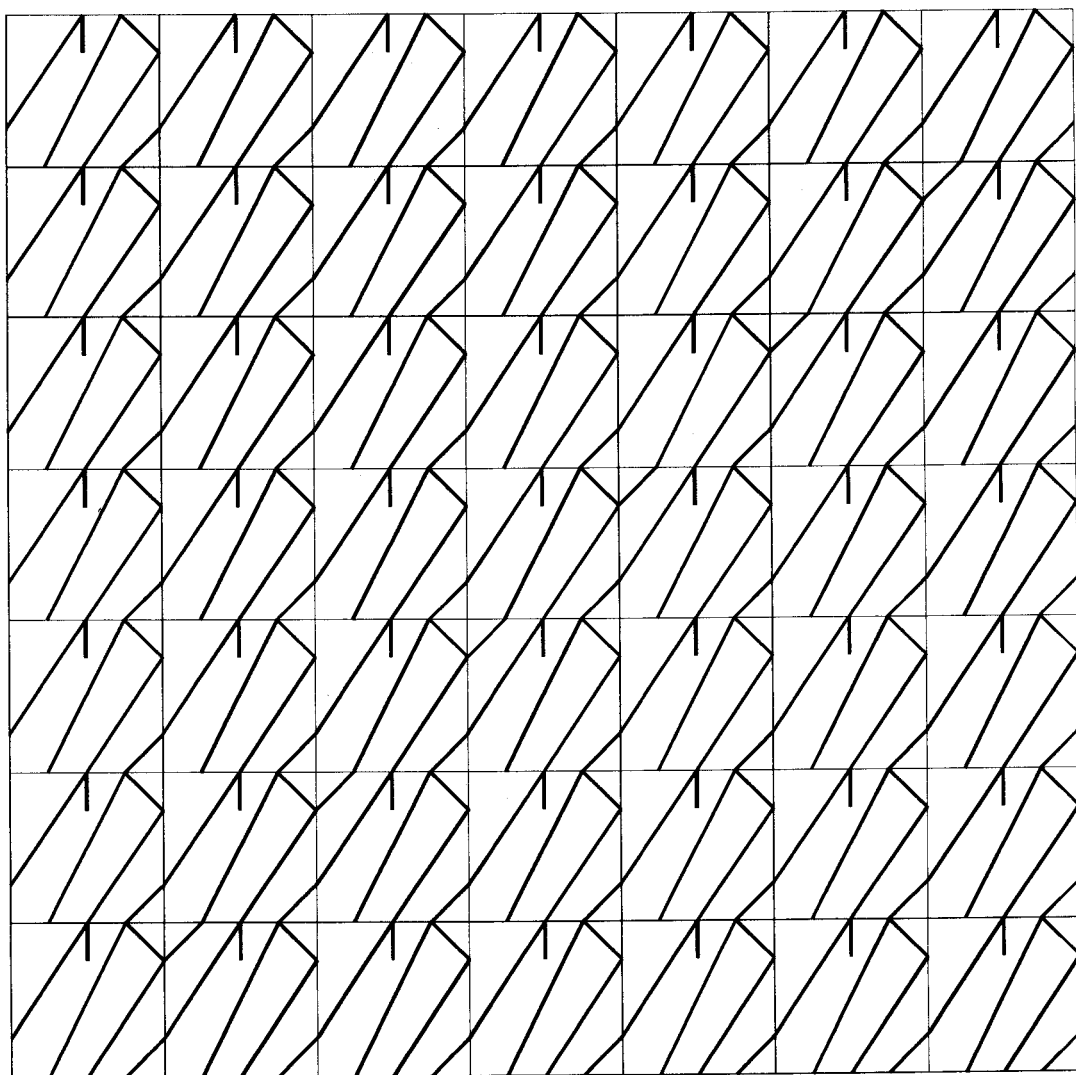


Figura 2.28

que tan sólo tiene una componente, por lo que ya tendríamos un árbol generador de \mathcal{M}_G .

Tenemos entonces que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ tendrá una estructura como el de la Figura 2.29

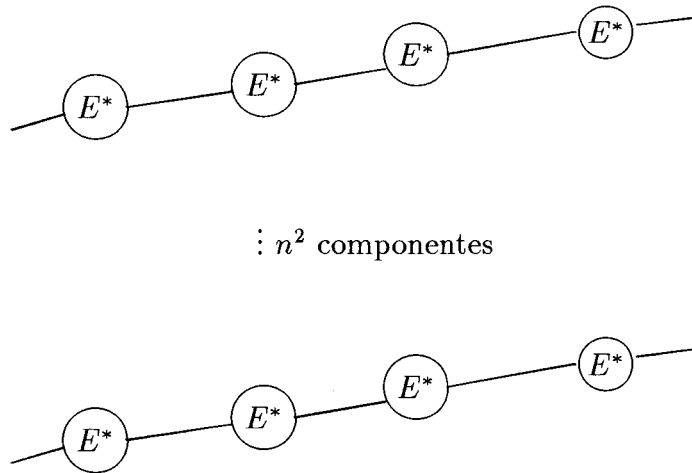


Figura 2.29

Sean E_1 una estrella en una componente de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ y sea E otra estrella en otra componente distinta a la anterior. En \mathcal{M}_G existe un camino α que une dichas estrellas. Este camino recorre estrellas, aristas puentes (copias de e) y otras aristas que no aparecen en $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$, induciendo un orden en dichas estrellas. Sean estas estrellas E_1, \dots, E_l . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que E_1 y E_2 están en distintas componentes de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$, pues si no fuera así, sean E_1, \dots, E_{i_0} en la misma componente y sea E_{i_0+1} en otra; en vez de considerar E_1 consideraríamos E_{i_0} . Sea e_1 la arista en \mathcal{M}_G que une E_1 con E_2 . Sea $\mathcal{M}_{\{e_1\}}$ el grafo periódico $(\mathbb{Z}_{(0,0)} + \mathbb{Z}_{(0,0)}) (\{e_1\})$. Se tiene

Lema 2.5.1 *El grafo periódico generalizado $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}} \cup \mathcal{M}_{\{e_1\}}$ es un bosque generador de \mathcal{M}_G con a lo más $n^2 - 1$ componente.*

Demostración: Que es un bosque es claro, pues tan solo se le ha añadido a $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ una arista puente entre dos componentes. Si $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}}$ a lo más tenía n^2 componentes, $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}} \cup \mathcal{M}_{e_1}$ tendrá a lo más $n^2 - 1$ componente.

□

Recursivamente en las componentes de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e\}} \cup \mathcal{M}_{\{e_1\}}$, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.5.5 *Sea $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ un grafo periódico conexo, entonces existe un grafo periódico generalizado que es un árbol generador de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$.*

Demostración: Siguiendo el razonamiento anterior en $n^2 - 1$ pasos más, y por el Lema 2.5.1 se tiene el teorema. □

Nota 2.5.1 Nótese que para la construcción de las estrellas centradas en una componente prefijada de \mathbf{G} se ha utilizado una *búsqueda por capas* en el grafo $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$. De igual forma se podría usar una búsqueda en profundidad, obteniéndose en el primer paso del algoritmo el siguiente subgrafo de la Figura 2.20:

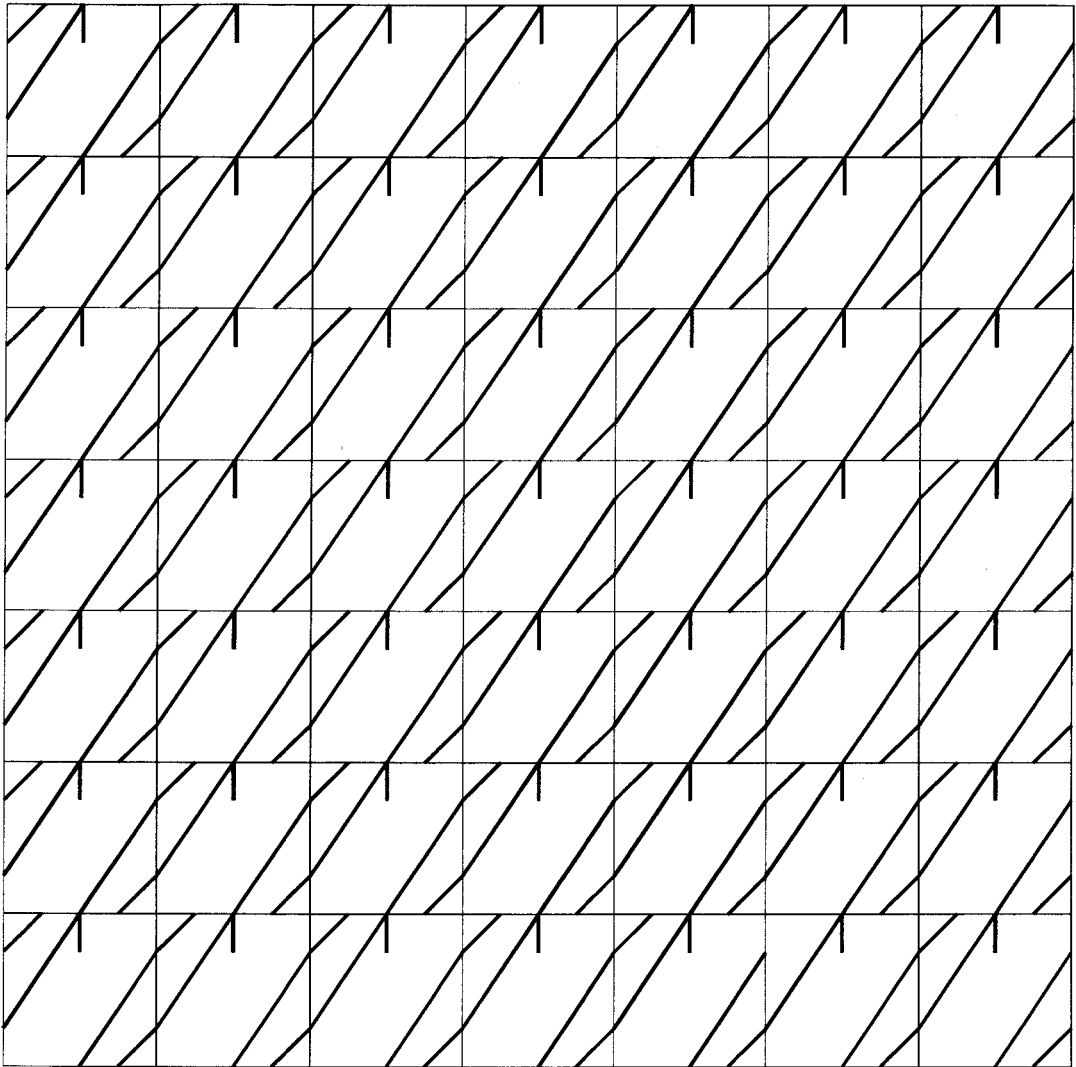


Figura 2.30

De nuevo añadimos periódicamente la arista conveniente y quedará:

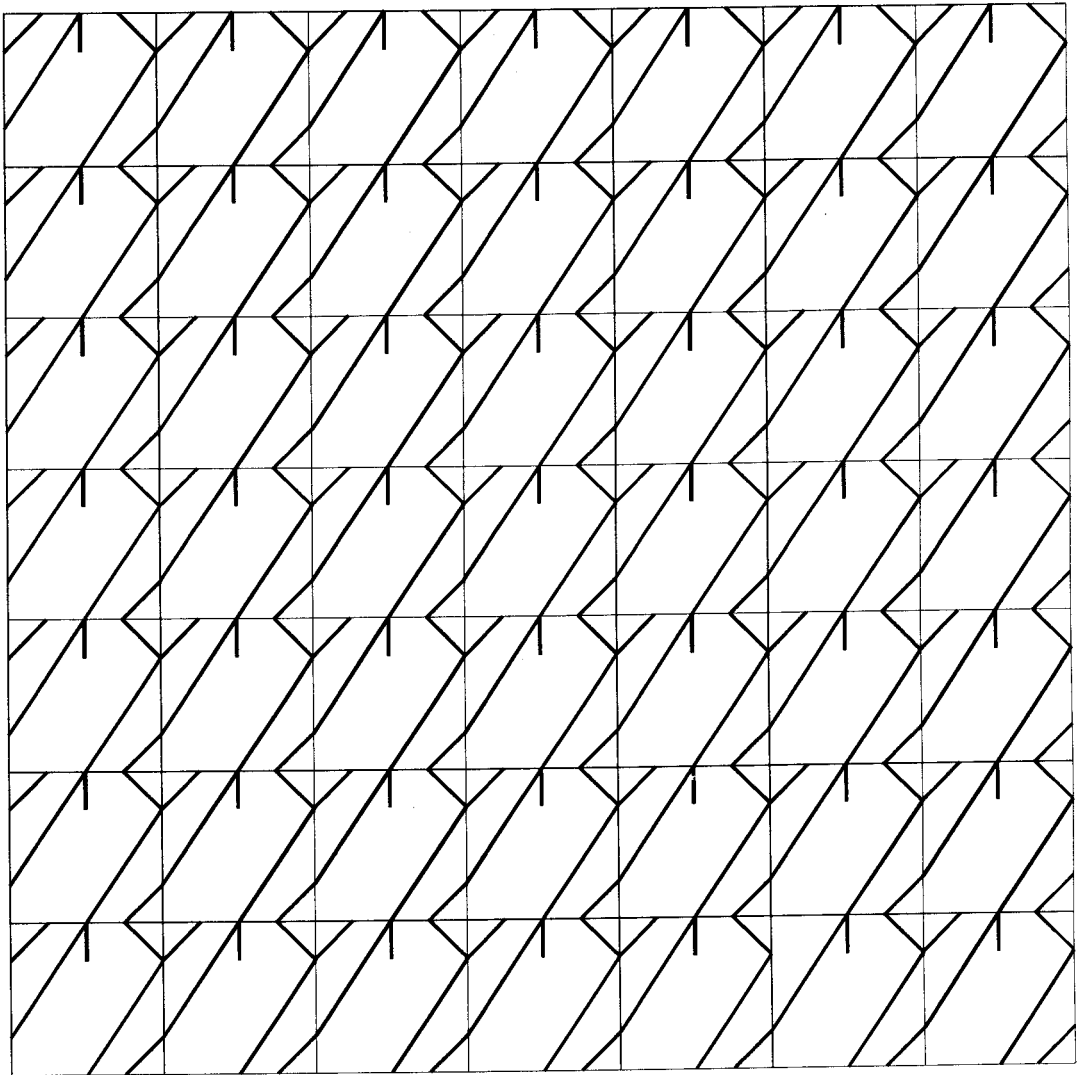


Figura 2.31

Para conectar todas estas componentes basta añadir otra arista y quedará el siguiente árbol:

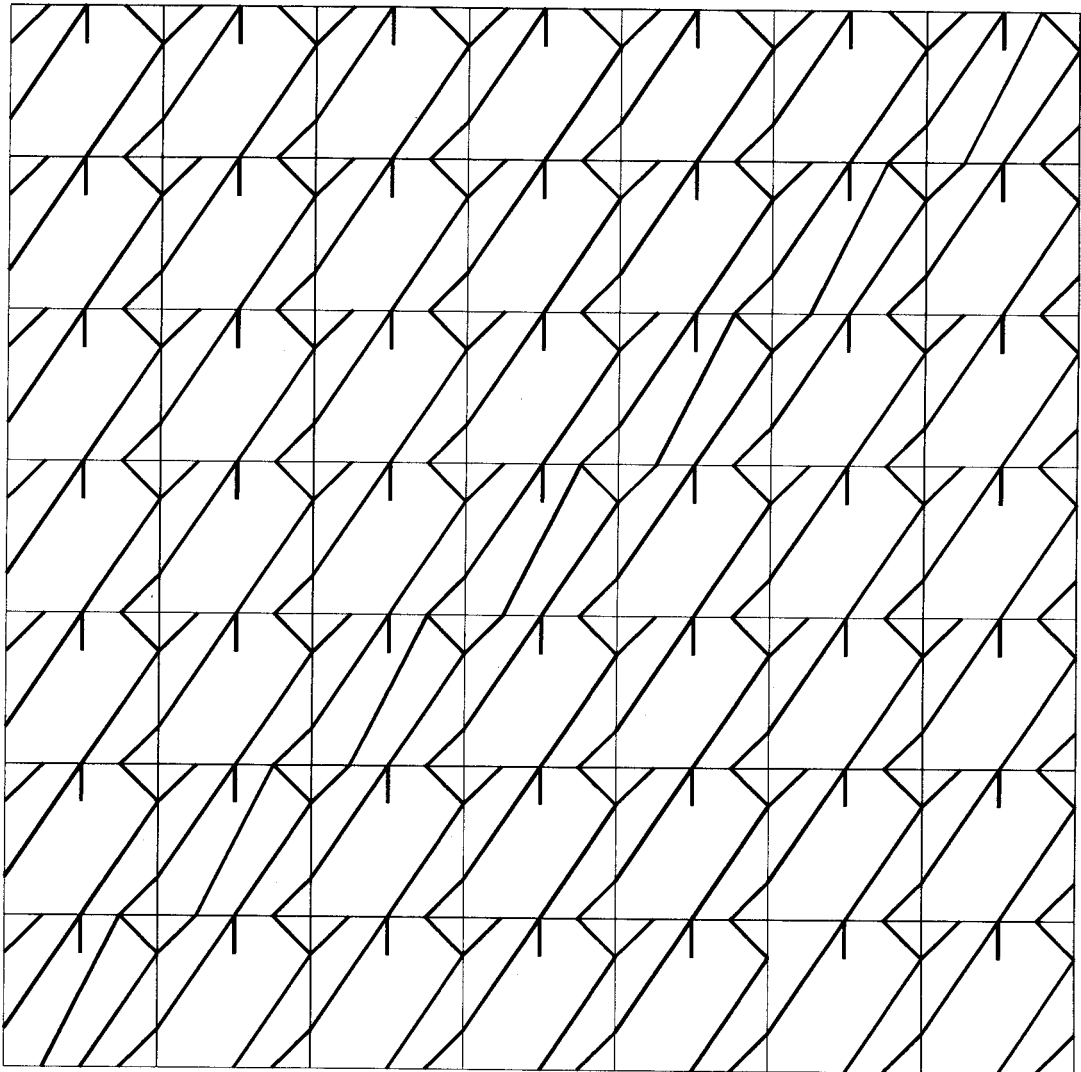


Figura 2.32

obteniéndose así otro árbol generador del grafo periódico \mathcal{M}_G .

2.5.1 Algoritmo “*SPANNING TREE*”

Una vez que se ha descrito la construcción del árbol generador de un grafo periódico en la sección anterior, y utilizando los resultados obtenidos en dicha sección, podemos dar un algoritmo que, en tiempo polinomial, construya el árbol generador de un grafo periódico conexo. El algoritmo podríamos describirlo como

sigue:

SPANNING TREE (G)

PASO 1 Se introduce el grafo finito $G = \{C_1, \dots, C_n\}$ en donde C_i son las componentes conexas de G . Se supondrá que \mathcal{M}_G es conexo.

PASO 2 Construir un bosque generador $BG_G = \{C'_1, \dots, C'_n\}$ de G .

$$G \leftarrow BG_G$$

PASO 3 1. Sea $\mathcal{A}_1 = \{C_1\}$

2. Mientras que $|\bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i| < n$ construir
 $\mathcal{A}_{k+1} = \{C : C \text{ es componente de } G$
 y C está unido por una arista
 con alguna componente $(C')^{(j)}$ en donde
 $C' \in \mathcal{A}_k\} - \bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i$

3. Sea m_0 tal que $|\bigcup_{i=1}^{m_0} \mathcal{A}_i| = n$

4. Sea $n_i = |\mathcal{A}_i|$. Se tiene que $n_1 + \dots + n_{m_0} = n$.

5. Notemos por $\mathcal{A}_i = \{C_{1,i}, \dots, C_{n_i,i}\}$, con $i = 1, \dots, m_0$.

PASO 4 1. Sea $\mathcal{A}_{m_0} = \{C_{1,m_0}, \dots, C_{n_{m_0},m_0}\}$.

Desde $i = 1, \dots, n_{m_0}$ hacer:

(a) Quitar de C_{i,m_0} todas las aristas, menos una, incidentes a vértices de juntura de copias en los 8-vecinos de componentes de \mathcal{A}_{m_0-1} .

(b) Notemos a este conjunto, una vez transformado, como

$$\mathcal{A}_{m_0}^* = \{C_{1,m_0}^*, \dots, C_{n_{m_0},m_0}^*\}$$

2. Desde $i = m_0 - 1$ hasta 2 hacer

(a) Dejar las aristas que unen cada componente de \mathcal{A}_i con las copias de las componentes de \mathcal{A}_{i+1}^* en sus 8-vecinos y quitar todas las aristas, menos una, de las componentes de \mathcal{A}_i inciden en vértices de juntura de copias de las componentes de \mathcal{A}_{i-1} .

(b) Notemos a este conjunto, una vez transformado, como

$$\mathcal{A}_i^* = \{C_{1,i}^*, \dots, C_{n_i,i}^*\}.$$

3. Sea $\mathcal{A}_1 = \{C_1\}$. De C_1 dejamos las aristas que inciden en componentes de \mathcal{A}_1^* y quitamos las aristas que inciden en copias, en los 8-vecinos, de C_1 . Notemos este conjunto como $\mathcal{A}_1^* = \{C_1^*\}$.

PASO 5 Desde $i = 1$ hasta n hacer:

1. Sea e una arista que, partiendo de \mathcal{A}_i^* , en \mathcal{M}_G incide con algún vértice de juntura de alguna copia en los 8-vecinos de alguna componente de \mathcal{A}_i^* .
2. Considerar $\mathcal{F} = G^* \cup \{e\}$, en donde $G^* = \bigcup_{k=1}^{m_0} \mathcal{A}_k^*$, y sea $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.
3. Sea $(p, q)_G$ las coordenadas de la arista $\{e\}$.

PASO 6 Consideremos $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$.

1. Sea $\{e'\}$ una arista en \mathcal{M}_G que une dos componentes de $\mathcal{M}_{\mathcal{F}}$, de coordenadas $(p', q')_G$, en donde $\{(p, q)_G, (p', q')_G\}$ son linealmente independientes.
2. Sea

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{M}_{\{e'\}}$$

en donde

$$\mathcal{M}_{\{e'\}} = \left(Z_{(p', q')} + Z_{(0,0)} \right) (\{e'\})$$

PASO 7 Sea E^* una estrella con centro C^* en el paralelogramo definido por los vectores $\{(p, q)_G, (p', q')_G\}$. Sean $\{e_2, \dots, e_l\}$ aristas que unen en \mathcal{M}_G las estrellas cuyos centros están en dicho paralelogramo y que, además, son copias de C^* , en donde l es el número de centros de estrellas que están contenidos en el paralelogramo.

PASO 8 Sea $\mathcal{M}_G^* = \mathcal{M}_{\mathcal{F}'} \cup \mathcal{M}_{\{e_2\}} \cup \dots \cup \mathcal{M}_{\{e_l\}}$, en donde para cada $i = 2, \dots, l$ es $\mathcal{M}_{\{e_i\}} = \left(Z_{(0,0)} + Z_{(0,0)} \right) (\{e_i\})$ situado en el cuadrado

$$[p_i, p_i + 1] \times [q_i, q_i + 1]$$

en donde $(p_i, q_i)_G$ son las coordenadas de las aristas e_i .

PASO 9 Responde “Un árbol generador de \mathcal{M}_G es \mathcal{M}_G^* ”.

FIN

2.5.2 Complejidad del Algoritmo

Para ver que la complejidad del algoritmo de la sección anterior es polinomial, la estudiaremos paso por paso para, posteriormente, calcular el tiempo total que se invierte en la construcción del árbol generador.

Paso 2 Como puede verse en [6], la construcción del bosque generador de un grafo finito se puede hacer en tiempo $O(m \log m)$, en donde m es el número de vértices del grafo.

Paso 3 Consideremos la partición $\{\mathcal{A}_i^* : i = 1, \dots, m_0\}$, en donde $|\mathcal{A}_i^*| = n_i$ y, por lo tanto, se tendrá que $n_1 + \dots + n_{m_0} = n$ en donde $n_1 = 1$.

Para construir \mathcal{A}_2^* está claro que habrá que comparar C_1^* con todas las copias de cada componente del conjunto $\{C_2^*, \dots, C_{m_0}^*\}$ en sus 8-vecinos, con el fin de qué componentes de éstas están unidas con C_1^* por aristas incidentes en vértices de junta comunes. Por lo tanto se harán $8(n-1)$ comparaciones.

Una vez construido \mathcal{A}_2^* con cardinal n_2 , para construir \mathcal{A}_3^* , cada componente de \mathcal{A}_2^* se tiene que comparar con las copias de las componentes de $\{C_2^*, \dots, C_{m_0}^*\} - \mathcal{A}_2^*$ en los 8-vecinos. Por lo tanto las comparaciones que se harán, en el peor de los casos, serán $8n_2(n-1-n_2)$.

Supuesto que se ha construido \mathcal{A}_k^* , con $k < m_0$, para construir \mathcal{A}_{k+1}^* se compararán las n_k componentes de \mathcal{A}_k^* con las copias en los 8-vecinos de componentes de $\{C_2^*, \dots, C_{m_0}^*\} - \left(\bigcup_{i=1}^k \mathcal{A}_i^*\right)$. Por lo tanto se realizarán $8n_k(n-1-n_2-\dots-n_k)$ comparaciones.

Las comparaciones que se han hecho en total han de ser

$$8(n-1) + 8n_2(n-1-n_2) + \dots + 8n_{m_0}(n-1-n_2-\dots-n_{m_0})$$

que, como $n_1 + \dots + n_{m_0} = n$ el número de comparaciones quedará $8(n_2 + \dots + n_{m_0} + n_2(n_3 + \dots + n_{m_0}) + \dots + n_{m_0-2}(n_{m_0-1} + n_{m_0}) + n_{m_0-1}n_{m_0})$.

Si consideramos la función $f : \mathbf{R}^{m_0} \rightarrow \mathbf{R}$ definida como

$$\begin{aligned} f(x_2, \dots, x_{m_0}) = & 8(x_2 + \dots + x_{m_0} + x_2(x_3 + \dots + x_{m_0}) + \\ & + \dots + x_{m_0-2}(x_{m_0-1} + x_{m_0}) + x_{m_0-1}x_{m_0}) \end{aligned}$$

sujeta a la condición $x_1 + \dots + x_{m_0} = n$, es fácil comprobar, por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, que dicha función restringida a la condición dada, alcanza su valor máximo cuando cada variable es de la forma $c(n-1)$, con c una constante. Se comprueba fácilmente que el valor máximo de la función f es del orden de n^2 .

Se tiene pues que este paso del algoritmo tiene una complejidad del orden de $O(n^2)$.

Además, dicha cota se alcanza, sin más que considerar el grafo de la Figura 2.33:

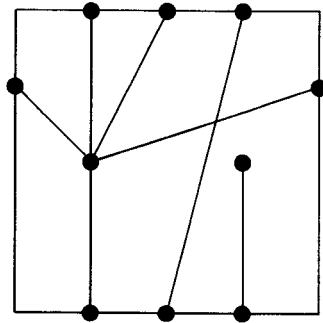


Figura 2.33

y el grafo periódico que genera.

Paso 4 Sea $k = m_0, \dots, 2$ contando en forma decreciente y en ese orden. Considerando \mathcal{A}_k^* , para quitar las aristas definidas en este paso se tendrá que comparar cada componente de este conjunto con las de $\mathcal{A}_k^* \cup \mathcal{A}_{k-1}^*$ menos la que se compara, luego se realizarán $n_k(n_k - 1 + n_{k-1})$.

En total se realizan $n_2(n_2 - 1 + n_1) + \dots + n_{m_0}(n_{m_0} - 1 + n_{m_0-1})$ comparaciones, que es igual que $n_2^2 + \dots + n_{m_0}^2 + n_2n_3 + n_3n_4 + \dots + n_{m_0-1}n_{m_0} - n_3 - \dots - n_{m_0}$. Una cota superior de esta suma puede ser $(n_2 + \dots + n_{m_0})^2 - (n - 1 - n_2) \leq (n - 1)^2 - n \in O(n^2)$.

Paso 5 Considerando los \mathcal{A}_k^* , con $k = 1, \dots, m_0$, la arista se buscará de entre las que en \mathcal{M}_G se unen una componente de \mathcal{A}_k^* con una copia en los 8-vecinos de componentes del mismo \mathcal{A}_k^* . Por lo tanto, las comparaciones son $1 + n_2n_2 + \dots + n_{m_0}n_{m_0}$, que se puede acotar superiormente por $(1 + n_2 + \dots + n_{m_0})^2 = n^2$, con lo que también sale $O(n^2)$.

Paso 6 En este paso, el proceso es análogo que el realizado en el Paso 5, sólo que se buscará una arista distinta a la que se encuentra en el paso anterior. Entonces, salvo constante, la complejidad de este paso es $O(n^2)$.

Paso 7 La cantidad de centros de estrellas en el paralelogramo definido por los vectores $\{(p, q)_{\mathbf{G}}, (p', q')_{\mathbf{G}}\}$, es a lo más n^2 , ya que dichos vectores tienen, en el peor de los casos, módulo n . Se fija un centro de una estrella y, con cada una de las $n^2 - 1$ restantes, se comparará para obtener la arista buscada. Esta comparación, como se observa en los Pasos 5 y 6, cuesta en tiempo n^2 , luego el tiempo invertido en encontrar dichas aristas es $n^2(n^2 - 1)$. Se tiene entonces que este paso se realiza en tiempo $O(n^4)$.

Una vez hecho el recuento de operaciones, se tiene el siguiente Teorema:

Teorema 2.5.6 *Sea \mathbf{G} un grafo finito, con n componentes conexas, contenido en el cuadrado $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$ el grafo periódico que genera. Se puede construir un grafo periódico generalizado, que es un árbol generador de $\mathcal{M}_{\mathbf{G}}$, en tiempo $O(n^4)$.*

2.6 Conclusiones y problemas abiertos

Se ha considerado en este Capítulo el problema de dar un algoritmo que construya el árbol generador (o el bosque generador, caso en que no sea conexo) de un grafo periódico.

Un primer problema que surge es que cualquier grafo periódico conexo contiene ciclos. Es más, contiene infinitos ciclos. Esto nos dice que no podemos dar una construcción de árbol generador definiéndolo como grafo periódico.

Así, se generaliza la definición de grafo periódico a grafo periódico generalizado, que no será más que una unión finita de grafos definidos a partir de ciertos grafos finitos \mathbf{G}_k y trasladándolos mediante vectores cualesquiera de \mathbf{Z}^2 . Claramente se tienen que estos tipos de grafos infinitos siguen siendo computables en el ordenador.

De suponer, dado un grafo finito \mathbf{G} sin ciclos y con n componentes conexas,

que el grafo periódico que genera es conexo, se obtiene que se puede construir la *estrella* de centro cualquier componente, siendo ésta un subgrafo de \mathcal{M}_G que contiene exactamente una copia de cada componente de G . Estas estrellas se pueden definir mediante un grafo periódico. Rompiendo ciclos en todas las estrellas posibles y uniéndolas mediante aristas puentes, se obtiene un bosque generador de \mathcal{M}_G con un número finito de componentes conexas.

Tan sólo resta unir adecuadamente estas componentes mediante ciertas aristas de \mathcal{M}_G para obtener, en tiempo $O(n^4)$, una construcción de un árbol generador; unión que es posible ya que \mathcal{M}_G es conexo.

Un primer problema que queda abierto es, obviamente, la reducción en el tiempo de ejecución, de esta construcción del árbol generador.

Es inevitable, de la forma en que se han definido las estrellas, construir éstas en tiempo $O(n^2)$. La complejidad de la construcción aumenta al comparar, en el paso 7, las n^2 posibles componentes, en el peor de los casos, que se han obtenido al aplicar hasta el paso 6. Si se consiguiera que los vectores (p, q) y (p', q') formaran ángulo lo más pequeño posible, en el mejor de los casos que el coseno de dicho ángulo sea inferior a $\frac{1}{n}$, el paralelogramo que forman dichos vectores contendría, a lo más, un número de centros de orden n , por lo que el algoritmo de construcción del árbol generador quedará de tiempo $O(n^3)$.

Para el caso en que el grafo periódico no sea conexo, pero el número de componentes conexas sea finito, para obtener el bosque generador, se aplicará el algoritmo a cada componente de \mathcal{M}_G . Se tenía, por la Proposición 1.3.4 del Capítulo 1, que \tilde{G} contiene generadores de cada componente de \mathcal{M}_G . Considerando por separado dichos generadores, ya se puede construir el bosque generador de \mathcal{M}_G .

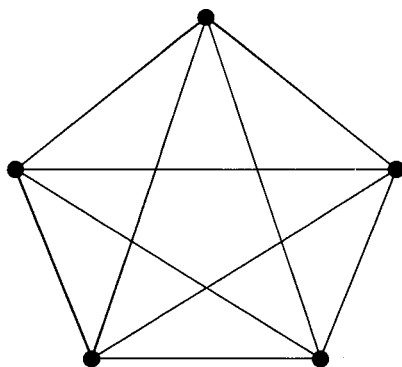
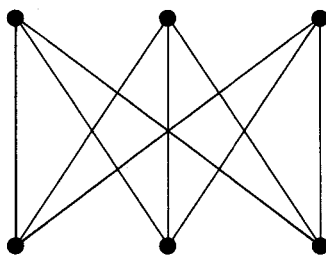
Capítulo 3

Planaridad en grafos periódicos

En este capítulo se estudiará el problema de la planaridad y la p-planaridad de un grafo periódico, ya sea éste conexo o no. Se darán algoritmos que, en tiempo polinomial, resolverán dichos problemas. Además, caso en que un grafo periódico \mathcal{M}_G generado por un grafo finito G sea plano, en este capítulo se da un grafo finito G^* plano, de forma que el grafo periódico \mathcal{M}_{G^*} es, por lo tanto, plano e isomorfo a \mathcal{M}_G .

3.1 Introducción y preliminares

Es bien conocido el teorema dado por Kuratowski [7] sobre planaridad en grafos finitos conexos que dice que un grafo es plano si y sólo si no contiene una subdivisión de K_5 y $K_{3,3}$, en donde estos grafos son los de la Figura 3.1 y la Figura 3.2

Figura 3.1: K_5 Figura 3.2: $K_{3,3}$

Además, se tiene que Hopcroft y Tarjan [30] dan un algoritmo que, en tiempo lineal, determina si un grafo finito es plano o no (para más detalles ver [30] y [43]).

En [20], G. A. Dirac y S. Schuster generalizan este resultado para grafos infinitos, estableciendo que un grafo infinito conexo es plano si y sólo si cada subgrafo suyo finito es plano.

Por un grafo plano G se entenderá que puede ser inmerso en el plano, y por p-plano, si puede ser inmerso de forma localmente finita; entendiéndose por inmersión localmente finita una aplicación $\phi : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ continua de forma que para cada compacto K de \mathbf{R}^2 se tiene que $\phi^{-1}(K)$ es un subgrafo finito de G . Por lo tanto podemos dar la siguiente definición:

Definición 3.1.1 Un grafo se dice que es *plano* si puede ser inmerso en el plano, y *propiamente plano* (p-plano) si puede ser inmerso en el plano de forma localmente finita.

En la literatura el concepto de p-planaridad podemos encontrarlo como *VAP-free* (inmersión libre de puntos de acumulación), como usa, entre otros, Thomassen en [49].

Se puede comprobar fácilmente que los grafos de las Figuras 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 son planos pero no p-planos:

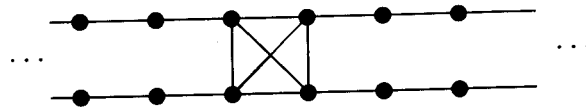


Figura 3.3: K_5^∞

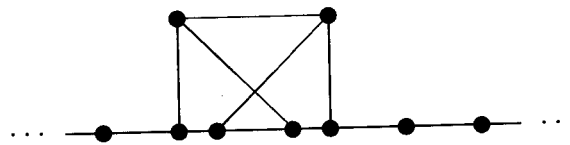


Figura 3.4: $L_{3,3}^\infty$

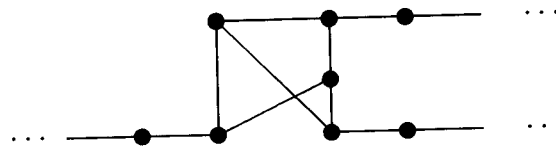
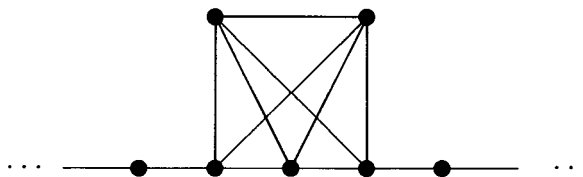
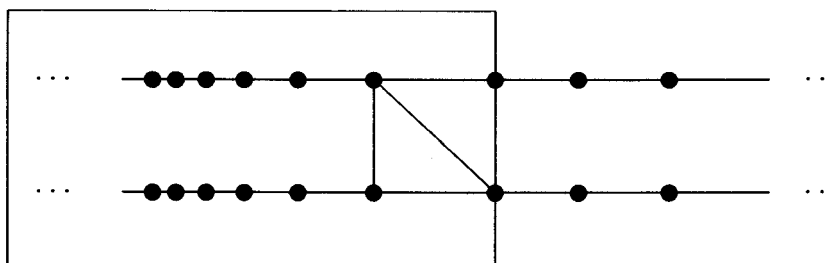
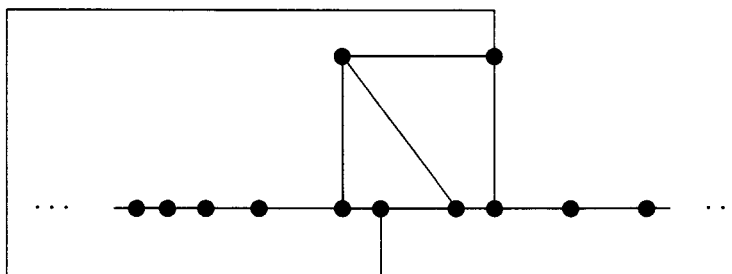
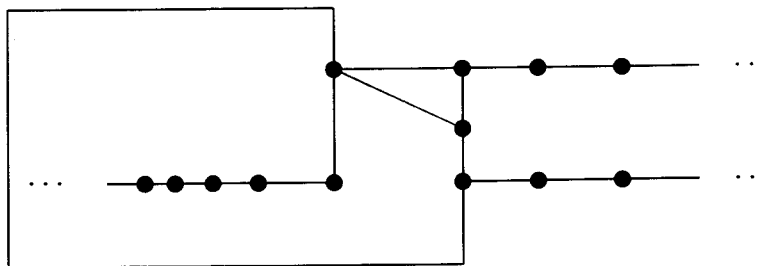
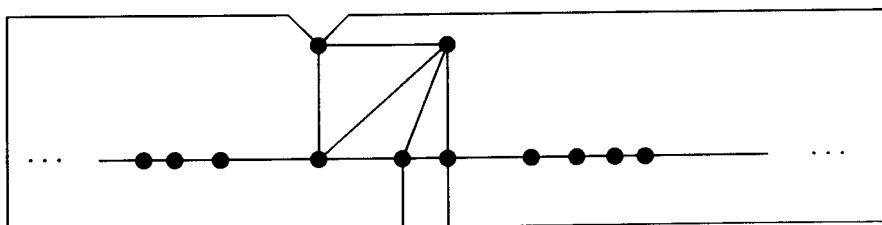


Figura 3.5: $K_{3,3}^\infty$

Figura 3.6: L_5^∞

Son planos pues admiten una inmersión plana, que podría ser la de las Figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10:

Figura 3.7: K_5^∞ Figura 3.8: $L_{3,3}^\infty$

Figura 3.9: $K_{3,3}^{\infty}$ Figura 3.10: L_5^{∞}

y no son p -planos pues cada rama infinita de las anteriores figuras, que están acotadas, por ϕ se transformarían en conjuntos infinitos y acotados. Considerando K uno de estos conjuntos con su punto de acumulación, se tiene que K es compacto en \mathbf{R}^2 , mientras que $\phi^{-1}(K)$ no lo es (para más detalle ver [3]).

Además se observa que si consideramos los espacios topológicos subyacentes a cada uno de los grafos de las Figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10, y consideramos la compactificación por un punto de dichos espacios tendrían que ser también grafos planos, pero los espacios topológicos resultantes de dicha compactificación son homeomorfos a los espacios topológicos subyacentes de K_5 y $K_{3,3}$, que se saben que no son planos.

En los ejemplos de la Figura anterior se tiene que todos los finales son estables.

Un primer resultado importante, dado por Halin en [25], es el siguiente:

Teorema 3.1.1 *Sea G un grafo infinito. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. G es p -plano.
2. G no contiene subgrafos homeomorfos a L_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, K_5^∞ ó $K_{3,3}^\infty$.

De ahí la importancia de los grafos de la Figura anterior, que reciben el nombre de grafos no p -planos minimales.

3.2 Planaridad en grafos periódicos conexos

Para estudiar la planaridad en grafos periódicos no conexos, se necesita de una noción más restrictiva como es la noción de W -periplanaridad (en la literatura, W -outerplanarity). Los resultados que se necesitan los enunciaremos en la siguiente subsección.

3.2.1 W -periplanaridad

Una generalización del concepto de *periplanaridad* y de W -periplanaridad puede verse en [44]. Un grafo finito se dice que es *periplano* si puede ser inmerso en el plano de tal forma que los vértices de G quedan en el exterior, es decir, considerando el cierre convexo de los vértices de G , ninguno de ellos queda en el interior de dicho cierre convexo.

Dado un grafo G y K un subgrafo suyo, y sean v un vértice de K y v' un vértice de G , se dice que v está K -periconectado con v' si existe un camino por aristas en G tal que dicho camino no contiene vértices de K , salvo v .

Sea G un grafo finito y sea W un subconjunto no vacío de vértices de G . Se dice que G es W -periplano si existe una inmersión de G en el plano en donde los vértices de W están en la cara exterior de dicha inmersión.

Sea G un grafo W -periplano y sea p un punto de \mathbf{R}^2 que no es vértice de G . Se notará por G^p el grafo cuyos vértices son $V(G) \cup \{p\}$ y por aristas tiene

las de G a las que se les une una arista que une p con cada vértice de W . En [50] y en [48] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1 G es W -periplano si y sólo si G^p es plano.

Consideremos los grafos de la Figura 3.11:

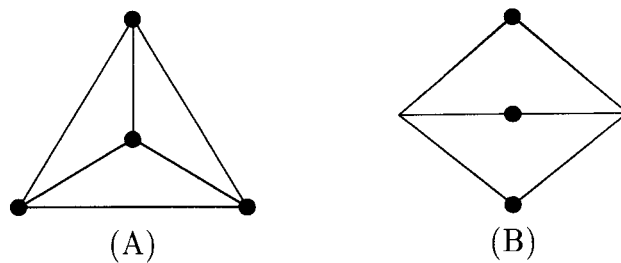


Figura 3.11

en donde los vértices señalados en negrita se les llaman *vértices distinguidos*.

En [44] se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2.2 Sea G un grafo finito y conexo y sea W un subconjunto de vértices de G no vacío. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. G no es W -periplano.
2. G tiene una subdivisión K de los grafos (A) ó (B) de la Figura anterior en donde los vértices distinguidos están en W o están K -periconectados con un vértice de W .

Está claro que los grafos de la Figura 3.11 no son periplanos, ya que si K es uno de dichos grafos, el grafo resultante K^p es homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.

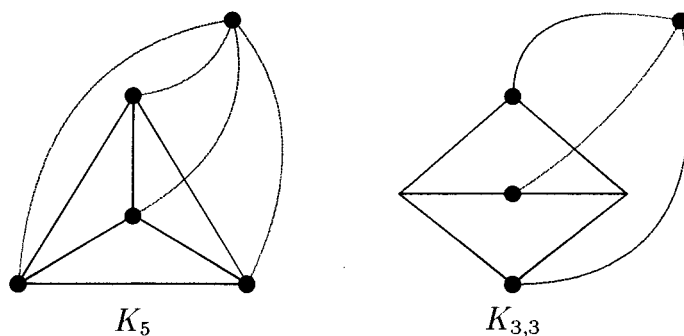


Figura 3.12

y, por el Teorema 3.2.1 ya se tendría.

Se tiene que la W -periplanaridad no es una propiedad que pueda ser considerada por separado por bloques (para más detalles ver [27]).

Sea G un grafo finito y sea W un subconjunto no vacío de vértices de G . Sea p_i un punto de corte de G . Sea G_i un bloque de G conteniendo a p_i . Si p_i está G_i -periconectado con un vértice de W , diremos que p_i es W -esencial en G_i . Sea \mathcal{A}_i el conjunto de vértices W -esenciales de G_i , y sea $W_i = W \cap V(G_i)$. En [44] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.2.3 *En el contexto anterior, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. G no es W -periplano.
2. G tiene una subdivisión K de los grafos (A) ó (B) de la Figura anterior en donde los vértices distinguidos están en W o están K -periconectados con un vértice de W .
3. Existe un bloque G_i en G que tiene una subdivisión K de los grafos (A) ó (B) de la Figura anterior en donde los vértices distinguidos están en $W_i \cap \mathcal{A}_i$ o están K -periconectados con un vértice de $W_i \cap \mathcal{A}_i$.
4. Existe un bloque G_i en G que no es $W_i \cap \mathcal{A}_i$ -periplano.

En [44], dado un grafo finito G y un subconjunto no vacío de vértices W , se da un algoritmo constructivo que responde, en tiempo lineal a los vértices del

grafo, si es o no es dicho grafo W -periplano y, caso que lo sea, da una inmersión de G en el plano en donde los vértices de W quedan en el exterior de dicha inmersión.

3.2.2 Planaridad en grafos periódicos conexos

Se puede demostrar fácilmente el siguiente resultado:

Teorema 3.2.4 *Si G es plano, entonces \mathcal{M}_G es plano.*

Veamos ahora una propiedad similar a la que se tiene en el Teorema de la curva de Jordan, en el contexto en que nos ocupa.

Lema 3.2.1 *Sea G un grafo finito contenido en el cuadrado $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$, y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Supongamos que \mathcal{M}_G es conexo. Sea K un subgrafo de \mathcal{M}_G compacto. Entonces existe un subgrafo \mathcal{B} de \mathcal{M}_G finito, conexo y disjunto con K tal que existe una partición de \mathcal{M}_G tal que K está contenido en una unión finita de componentes finitas de $\mathcal{M}_G \setminus \mathcal{B}$.*

Demostración: Consideremos un compacto K de \mathcal{M}_G . Se tiene que existe un natural m de forma que $K \subseteq [-m, m] \times [-m, m]$. Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 las copias de \mathcal{C} de coordenadas $(m+2, m+2)$, $(m+3, m+2)$ y $(m+2, m+3)$ respectivamente. Está claro que dichas copias de \mathcal{C} no cortan al cuadrado $[-m, m] \times [-m, m]$, y por lo tanto, tampoco a K . Si suponemos que $\{C_1, \dots, C_n\}$ son las n componentes conexas de G , en $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 existirán las respectivas copias de dichas componentes. Notemos estas copias por $\{C_{1,i}, \dots, C_{n,i}\}$, contenidas en \mathcal{C}_i , en donde $i = 1, 2, 3$. Como \mathcal{M}_G es conexo, existen caminos α_i, β_i y γ_i , con $i = 1, \dots, n$, en donde α_i une la componente $C_{1,1}$ con las restantes $C_{i,1}$, β_i une $C_{1,1}$ con las copias $C_{i,2}$ y los caminos γ_i unen $C_{1,1}$ con las restantes copias $C_{i,3}$. Puesto que estos caminos son finitos, podemos encontrar un vector u de \mathbb{N}^2 tal que los trasladados por dicho vector de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y \mathcal{C}_3 , y de los caminos α_i, β_i y γ_i , con $i = 1, \dots, n$ quedan fuera del cuadrado $[-m, m] \times [-m, m]$. Sean dichos trasladados $\mathcal{C}_1^*, \mathcal{C}_2^*$ y \mathcal{C}_3^* , y los caminos trasladados α_i^*, β_i^* y γ_i^* , con $i = 1, \dots, n$. Si (p, q) son las coordenadas de \mathcal{C}_1^* , se puede comprobar que cualquier par de copias de cualquier

componente de G de coordenadas $(p+k, q+k')$, con $k, k' \in \mathbf{N}$, están unidas por copias de los caminos α_i^* , β_i^* y γ_i^* , con $i = 1, \dots, n$, quedando dichas copias por fuera del cuadrado $[-m, m] \times [-m, m]$ (ver Figura 3.13).

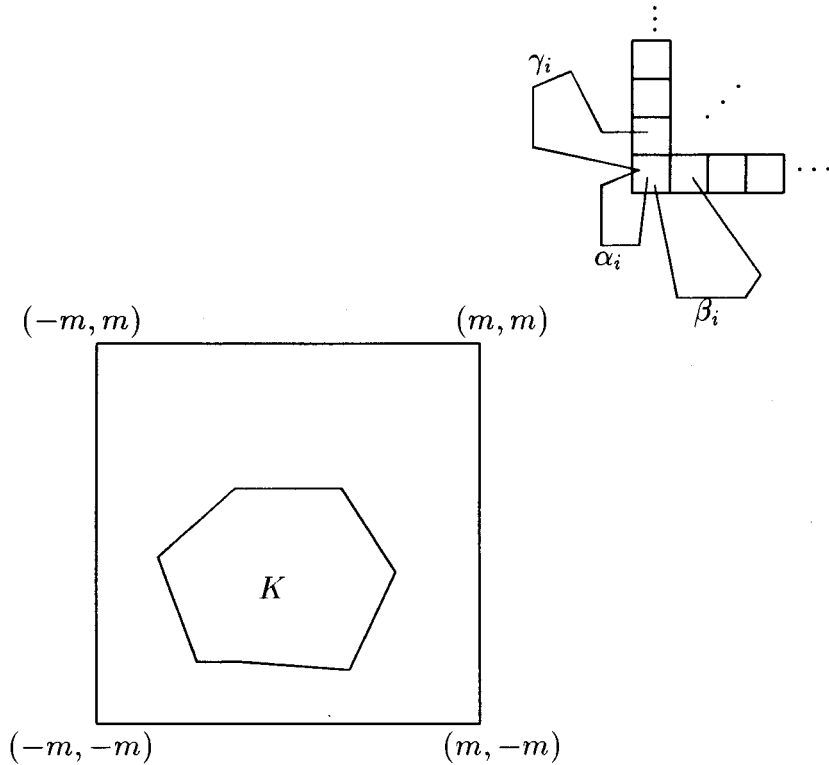


Figura 3.13

De forma análoga podemos razonar con las copias de C de coordenadas $(m+2, -m-2)$, $(-m-2, m+2)$ y $(-m-2, -m-2)$ (ver Figura 3.14).

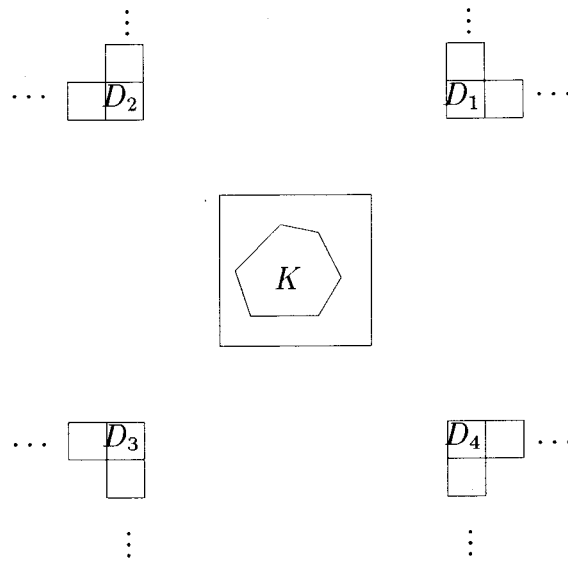


Figura 3.14

Sean D_1 , D_2 , D_3 y D_4 las copias de \mathcal{C} en la Figura anterior. Sean (p_1, q_1) , (p_2, q_2) , (p_3, q_3) y (p_4, q_4) sus coordenadas, respectivamente. Sean $\{E_1, \dots, E_n\}$ las copias de las componentes de \mathcal{G} en D_1 . y consideremos las copias de \mathcal{C} de coordenadas $(p_1 - k, q_1)$, con $k = 0, \dots, p_1 - p_2$. Para $k = 1$ existen en $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ caminos que unen las componentes E_i con las copias de estas componentes en el cuadrado de coordenadas $(p_1 - 1, q_1)$. Además, existen copias de estos caminos que unen las componentes de los cuadrados de coordenadas $(p_1 - k, q_1)$ con los de coordenadas $(p_1 - k - 1, q_1)$. Basta encontrar un vector de la forma $(a, 0)$, con $a \in \mathbf{N}$ de forma que los trasladados de las copias de dichos caminos queden por fuera de $[-m, m] \times [-m, m]$ (ver Figura 3.15).

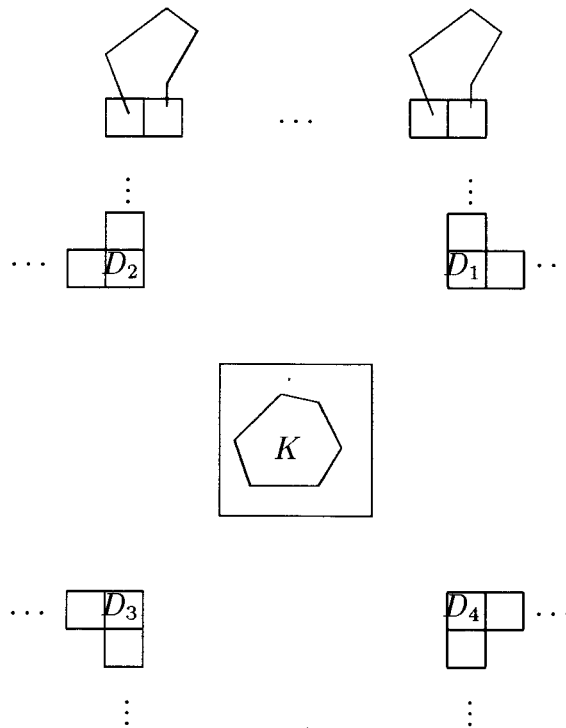


Figura 3.15

Sean (a_i, b) las coordenadas de dichos cuadrados, en donde $a_i = p_2, \dots, p_1$ y $b \geq \max\{q_2, q_1\}$.

Repitiendo el mismo razonamiento, se obtiene un grafo como muestra la Figura 3.16

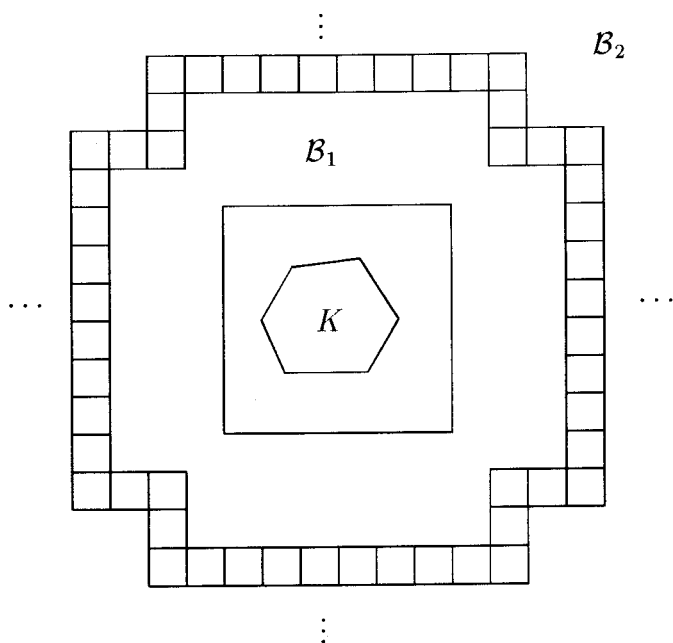


Figura 3.16

con lo que ya tendríamos el resultado sin más que llamar \mathcal{B} al subgrafo formado por las copias de estos cuadrados y por los caminos que unen las componentes que se encuentran en dichos cuadrados. \square

Como consecuencia de este resultado se tiene lo siguiente:

Teorema 3.2.5 *Sea G un grafo finito contenido en $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. \mathcal{M}_G es conexo.
2. \mathcal{M}_G sólo tiene un final.

Demostración: Si \mathcal{M}_G tiene un sólo final, es obvio que es conexo, ya que si no lo fuera tendría al menos dos componentes infinitas, y por lo tanto al menos dos finales; o tendría infinitas componentes finitas y, por lo tanto, infinitos finales.

De suponer que \mathcal{M}_G es conexo, por el Lema 3.2.1 se puede construir la partición $\mathcal{M}_G = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}$. Si tuviera dos finales, por [4] se tienen que

cada final puede venir definido por un árbol homeomorfo a $[0, +\infty)$, partiendo del borde del compacto. Sean estos árboles F_1 y F_2 (ver Figura 3.17).

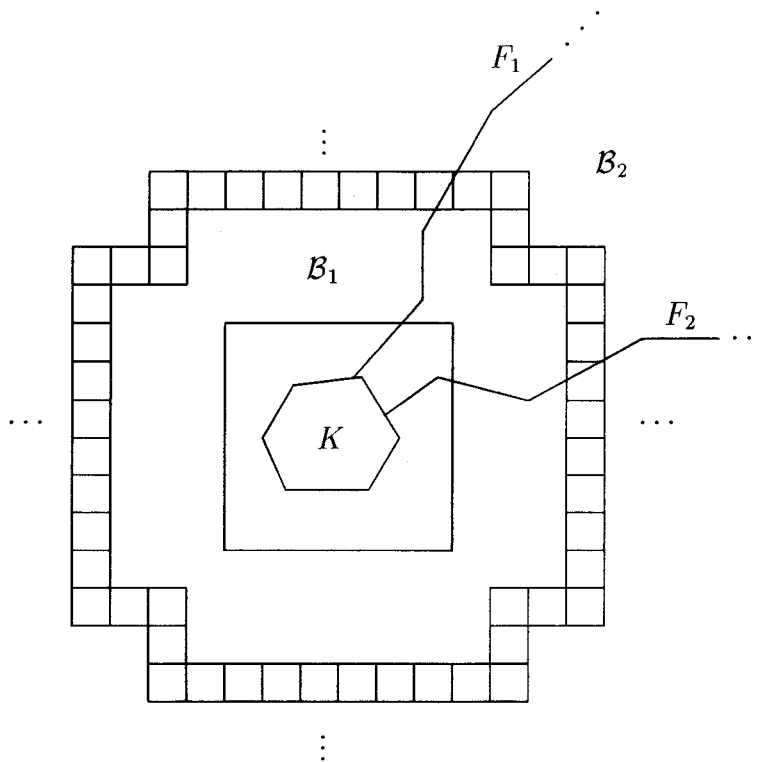


Figura 3.17

Está claro que dichos árboles cortarían al subgrafo B definido en el Lema 3.2.1, y por lo tanto definirían al mismo final. \square

Teorema 3.2.6 Sea G un grafo finito contenido en $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Sean p_1, \dots, p_l los vértices de juntura del grafo G que cumplen que si \mathcal{H}_i son las componentes conexas de $(\mathcal{M}_G \setminus G) \cup \{p_i\}$ que contienen a p_i , entonces todas estas componentes son finitas y planas, las condiciones siguientes son equivalentes:

1. \mathcal{M}_G es plano.
2. $(\mathcal{M}_G - \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}) \cup \{p_1, \dots, p_l\}$ es plano.

Demostración: Si \mathcal{M}_G es plano está claro que cualquier subgrafo suyo es plano. El recíproco también es simple, pues $(\mathcal{M}_G - \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}) \cup \{p_1, \dots, p_l\}$ y $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}$ no comparten ningún vértice salvo los de $\{p_1, \dots, p_l\}$ y no hay aristas que unan vértices de $(\mathcal{M}_G - \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}) \cup \{p_1, \dots, p_l\}$ con vértices de $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}$, ya que cada elemento del conjunto $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}$ es una componente conexa. Por lo tanto, de suponer que $(\mathcal{M}_G - \{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}) \cup \{p_1, \dots, p_l\}$ y $\{\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_l\}$ son planos, se tiene que \mathcal{M}_G es plano. \square

Nótese que el problema de ver si la componente conexa que contiene a un vértice de junta es finita, es un problema recursivo, ya que por la Proposición 1.3.4, una componente finita no puede contener dos copias de alguna componente de G ; por lo tanto, dicha componente finita estará, a lo más, contenida en un cuadrado de lado n , en donde n es el número de componentes conexas de G .

Además, en [20] se tiene un algoritmo que, en tiempo lineal, responde si un grafo finito conexo es plano o no lo es.

Definición 3.2.1 Sea G un grafo finito contenido en $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera.

- El reflejo de \mathcal{M}_G es el grafo infinito \mathcal{M}_G^* homeomorfo a \mathcal{M}_G en donde cada vértice de junta de G que en \mathcal{M}_G está en una componente conexa finita, se retrae dicho vértice y su componente al interior de \mathcal{C} .
- Se define G^* como el grafo finito que genera al reflejo de \mathcal{M}_G .
- Se define $\partial\mathcal{C}^*$ como el conjunto de vértices de junta de G^* .

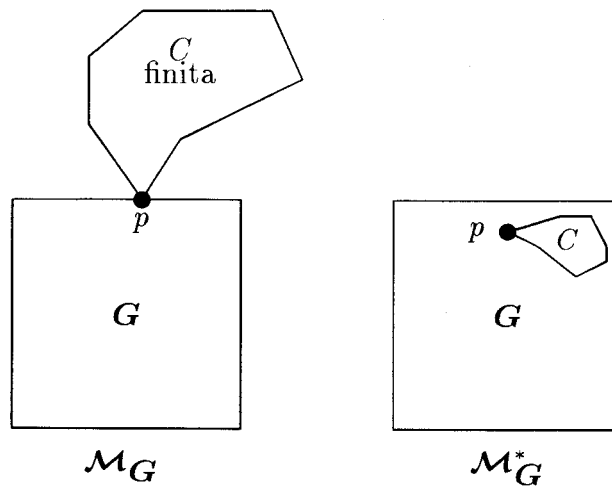


Figura 3.17: Grafo \mathcal{M}_G y su reflejo \mathcal{M}_G^* .

Teorema 3.2.7 Sea G un grafo finito contenido en $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Sea \mathcal{M}_G^* el grafo reflejo de \mathcal{M}_G . Sea G^* el grafo de genera a \mathcal{M}_G^* y sea ∂V^* el conjunto formado por los vértices de juntura de G^* . Sea $\partial \mathcal{C}^*$ el conjunto de nuevas aristas, contenidas en $\partial \mathcal{C}$, que unen los vértices de ∂V^* . Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. \mathcal{M}_G es plano.
2. $G^* \cup \{\partial V^*, \partial \mathcal{C}^*\}$ es ∂V^* -periplano.

Demostración: Supongamos que $G^* \cup \{\partial V^*, \partial \mathcal{C}^*\}$ no es ∂V^* -periplano. Entonces, por el Teorema 3.2.3 existe en $G^* \cup \{\partial V^*, \partial \mathcal{C}^*\}$ una subdivisión de los grafos de la Figura 3.18

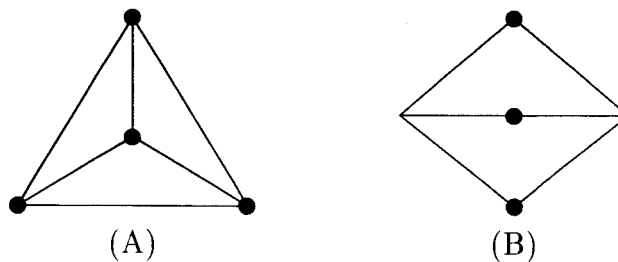


Figura 3.18

en donde los vértices distinguidos están en ∂V^* o están ∂V^* -periconectados con algún vértice de juntura de G^* . Si se da esto segundo, se tiene en $G^* \cup \{\partial V^*, \partial C^*\}$ una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$ (ver Figura 3.19).

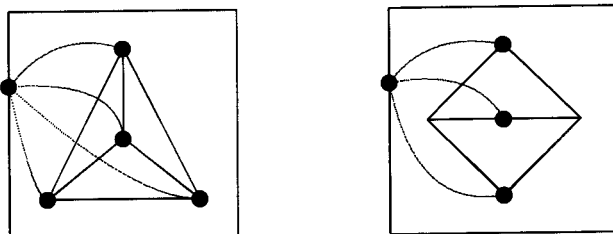


Figura 3.19

Si lo que se tiene es que los vértices distinguidos están en ∂V^* , consideramos un compacto K que contenga a $G^* \cup \{\partial V^*, \partial C^*\}$, por [24] existe un rayo infinito que parte de cada vértice distinguido, tales que dichos rayos no se intersectan en K . Por el Lema 3.2.1 existe fuera de K un camino que une estos rayos entre sí, por lo tanto tenemos de nuevo una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$, según los casos (ver Figuras 3.20 y 3.21).

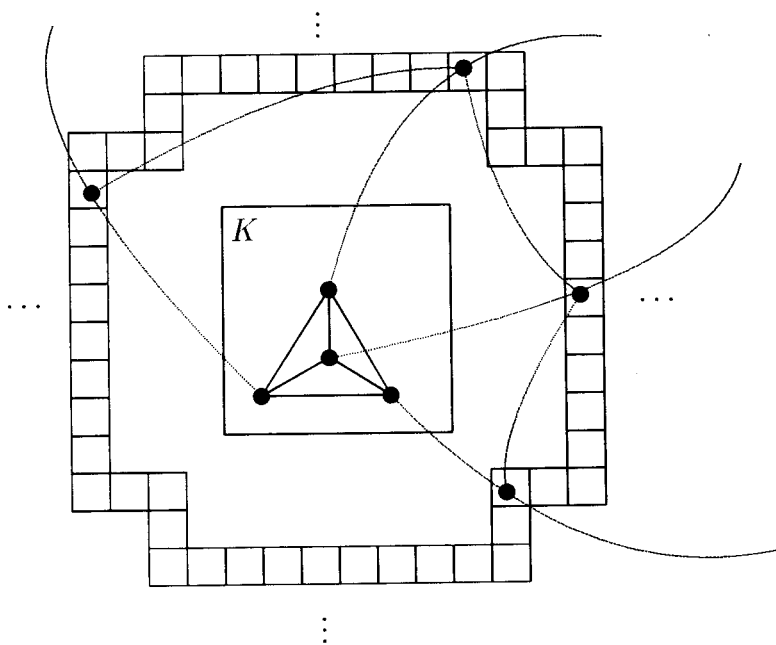


Figura 3.20

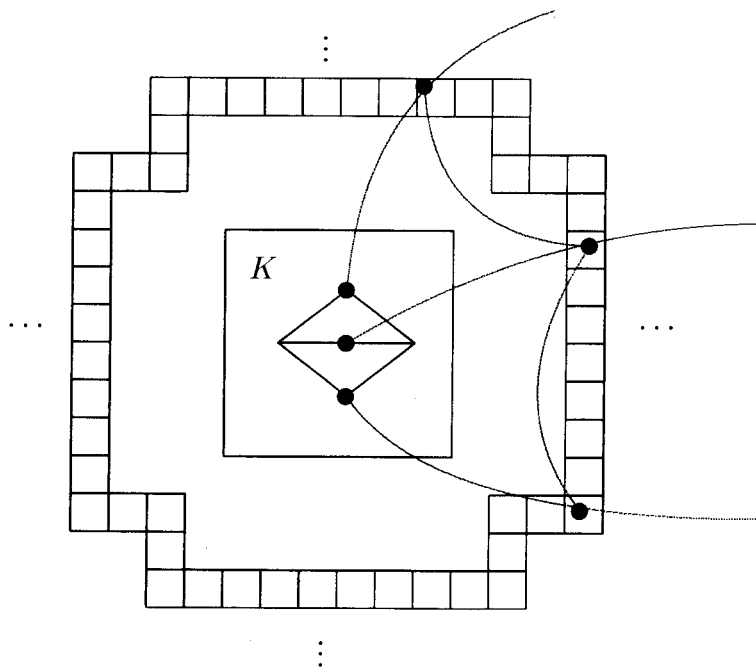


Figura 3.21

□

Nota 3.2.1 La condición necesaria y suficiente que se exige en el Teorema 3.2.7 para que \mathcal{M}_G sea plano es que $G^* \cup \{\partial V^*, \partial C^*\}$ es ∂V^* -periplano. Es necesario unirle a G^* las aristas uniéndolo los vértices de juntura de G^* , pues, si consideramos el grafo de la Figura 3.22

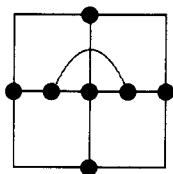


Figura 3.22

y llamamos W a sus vértices de juntura, se tiene que G es W -periplano, siendo una posible inmersión la de la Figura 3.23.

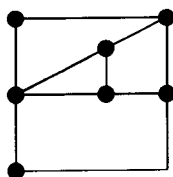


Figura 3.23

Sin embargo, como se puede observar en la Figura 3.24, \mathcal{M}_G no es plano.

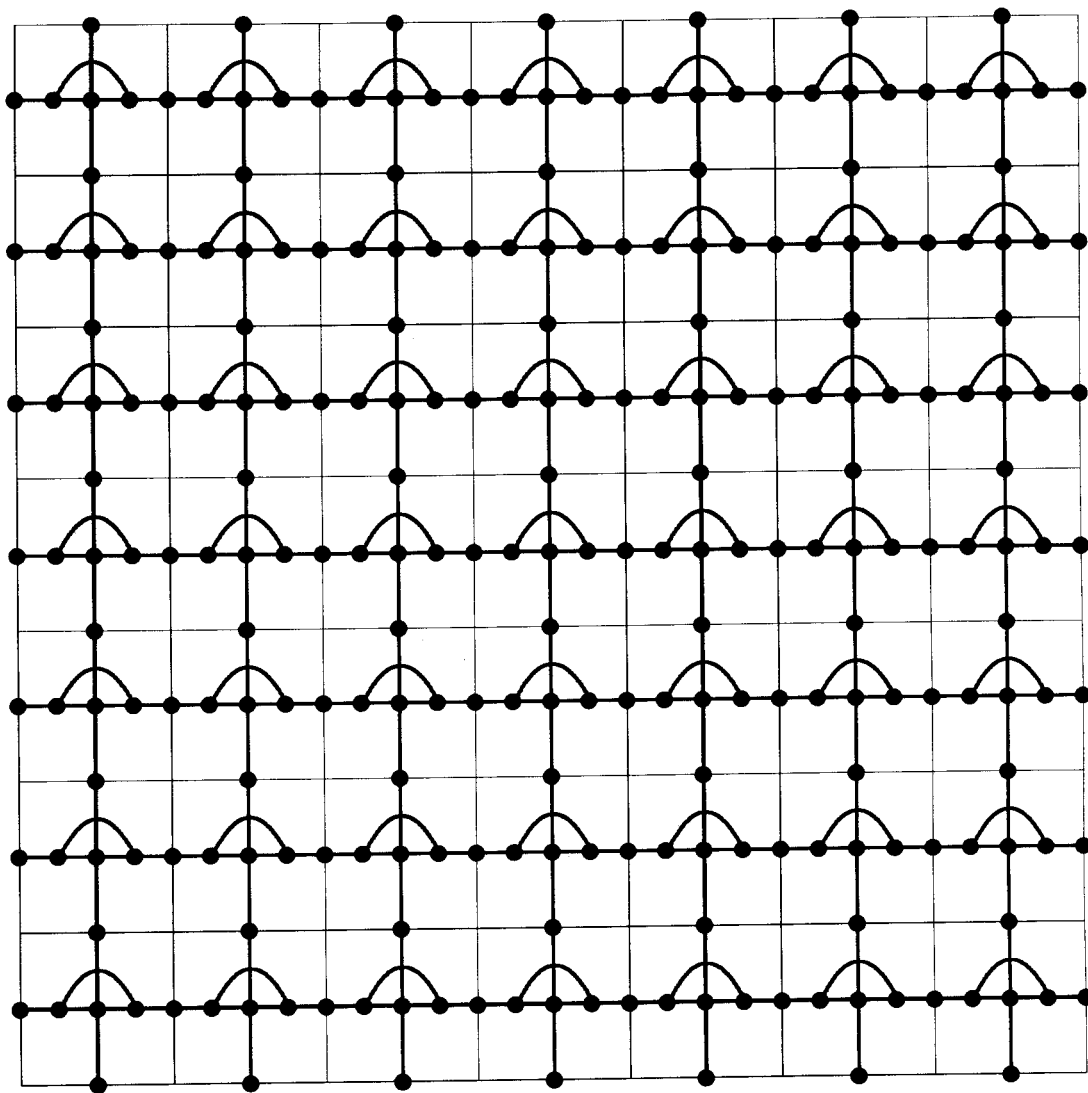


Figura 3.24

3.2.3 Algoritmo de planaridad

Algoritmos que testean si un grafo finito es plano en tiempo lineal, aparecen en [30] y en [9]. Además, T. Nishizeki y N. Chiba [43] presentan un algoritmo que, en tiempo lineal, resuelve el problema de la planaridad para los grafos finitos. La entrada de este algoritmo es un grafo finito G y la salida, si este grafo es plano o no. Caso que lo sea, da una inmersión en el plano de dicho grafo.

Por otro lado, L. Oubiña y R. Zucchelo [44] también presentan un algoritmo que resuelve el problema de la W -periplanaridad. La entrada de este algoritmo es un grafo finito G y un subconjunto W no vacío de vértices de G y, la salida, si este grafo es W -periplano o no y caso que lo sea da una inmersión del grafo G en el plano en donde los vértices de W quedan en una cara exterior de dicha inmersión.

Estos algoritmos son necesarios para construir el de planaridad para grafos periódicos. Como entrada de este algoritmo tendremos un grafo G finito contenido en $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ en donde el grafo periódico que genera es conexo, y la salida será si dicho grafo es plano o no, dando un grafo finito G^* de tal forma que el grafo mosaico que genera \mathcal{M}_{G^*} es plano.

El algoritmo de planaridad de un grafo periódico \mathcal{M}_G conexo estudiará los vértices de juntura que, fuera de G están en componentes conexas finitas. Estas componentes no pueden sobrepasar en tamaño la longitud n , en donde n es el número de componentes conexas del grafo G . Además, el conjunto de vértices de juntura que están en componentes conexas infinitas fuera de G es distinto del vacío, ya que como \mathcal{M}_G es conexo basta considerar un vértice de juntura y otro vértice en \mathcal{M}_G que diste más de n , el camino que los une atravesará al menos dos copias de una misma componente y, por lo tanto, la componente será infinita. Se les puede aplicar el algoritmo de planaridad para grafos finitos [43] a estas componentes finitas. Si alguna no es plana, el grafo periódico no es plano. En otro caso, se calcularía G^* el reflejo de G , y el grafo $G^* \cup \mathcal{C}^*$ de la Definición 3.2.1. A este grafo le aplicamos el algoritmo de W -periplanaridad [44], en donde W es el conjunto de los vértices de juntura de G^* . Si es W -periplano, se tiene

que \mathcal{M}_G es plano, dando una inmersión en el plano de \mathcal{M}_G .

El algoritmo es:

PLANAR(\mathcal{M}_G)

PASO 1 Introduce el grafo G en donde \mathcal{M}_G es conexo.

PASO 2 Por cada vértice p de juntura de G , ver si la componente de $(\mathcal{M}_G \setminus G) \cup \{p\}$ que contiene a p es finita o no.

PASO 3 Estudiar la planaridad de estas componentes finitas. Si alguna no es plana responde “ \mathcal{M}_G no es plano” y ve a FIN.

PASO 4 Construir $G^* \cup \mathcal{C}^*$ en donde G^* es el reflejo de G y \mathcal{C}^* son los vértices de juntura de G^* a los que se les une las posibles aristas en el borde del cuadrado \mathcal{C} .

PASO 5 Sea W el conjunto de vértices de juntura de G^* .

PASO 6 Ver si $G^* \cup \mathcal{C}^*$ es W -periplano. Caso en que no lo sea responde “ \mathcal{M}_G no es plano” y ve a FIN.

PASO 7 Dar una inmersión de $G^* \cup \mathcal{C}^*$ en el plano dejando a los vértices de W en una cara exterior. Sea \tilde{G} dicha inmersión.

PASO 8 Responde “ \mathcal{M}_G es plano y una inmersión plana es $\mathcal{M}_{\tilde{G}}$ ”.

FIN

3.2.4 Complejidad del algoritmo

En esta subsección procederemos a estudiar la complejidad del algoritmo presentado en la subsección anterior. Dicha complejidad se estudiará en función del número de vértices del grafo finito G . Se estudiará la complejidad de cada uno de los pasos descritos en el algoritmo para, así, obtener la total. El estudio es el siguiente:

Paso 2 El Paso 2 se resuelve en tiempo $O(|VJ(\mathbf{G})|n^2)$, en donde $|VJ(\mathbf{G})|$ es el número de vértices de juntura de \mathbf{G} , ya que, por cada componente C_i de \mathbf{G} , si k_i es el número de vértices de juntura de C_i , se tendrá que ver si cada vértice de juntura es también vértice de juntura de alguna copia en los 8-vecinos de las componentes de \mathbf{G} . Por lo tanto, se harán $k_i(8 + \dots + 8n)$, que es del orden de $k_i n^2$. Repitiendo esto en cada componente quedará del orden de $(k_1 + \dots + k_n)n^2 = |VJ(\mathbf{G})|n^2$.

Paso 3 Se puede comprobar fácilmente, puesto que se tiene un algoritmo de planaridad para grafos finitos de complejidad lineal (ver [43]), que el Paso 3 se resuelve en tiempo $O(|VJ(\mathbf{G})||V(\mathbf{G})|)$.

Paso 4 Es fácil ver que el Paso 4 es lineal, ya que tan solo hay que añadir algunas aristas entre los vértices de juntura e introducir las componentes finitas dentro del cuadrado \mathcal{C} .

Paso 6 Los Pasos 6 y 7 se resuelven en tiempo lineal, ya que el algoritmo de W -periplanaridad y el de W -inmersión periplana [44] es lineal.

Por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.2.8 *Sea G un grafo finito con m vértices y sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera. Supongamos que \mathcal{M}_G es conexo. Se puede decidir en tiempo $O(m^3)$ si dicho grafo periódico es plano o no.*

Nota 3.2.2 Obsérvese que una de las hipótesis de este teorema es que el grafo periódico es conexo. En el Capítulo 1 se vió que decidir si un grafo periódico es conexo tiene una complejidad del orden $O(n^9)$, con lo que si el dato de entrada del algoritmo $\text{PLANAR}(\mathcal{M}_G)$ es un grafo finito G , y se quiere estudiar la planaridad del grafo periódico que genera, el tiempo de ejecución sería $O(m^3) + O(n^9)$, en donde m es el número de vértices y n el número de componentes conexas de G .

3.3 P-planaridad en grafos periódicos conexos

Estudiaremos el problema de la p-planaridad para grafos periódicos conexos. Recuerdese que el concepto de p-planaridad particularizaba al de planaridad exigiendo que la inmersión que debiera existir en el plano, no podía tener acumulación de vértices.

Como consecuencia del Teorema 3.1.1, en [3] se prueban los siguientes resultados:

Teorema 3.3.1 *Sea G un grafo infinito, plano y conexo con k finales. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. G es p-plano.
2. G no contiene subgrafos homeomorfos a los grafos no p-planos minimales con un número de finales menor o igual a k .

y, de este Teorema se deduce el siguiente resultado:

Corolario 3.3.1 *Sea G un grafo infinito con un solo final. Entonces, G es plano si y sólo si G es p-plano.*

Basándose en el Corolario 3.3.1 y en el Teorema 3.2.5, se tiene que para grafos periódicos conexos, el problema de la planaridad y el de la p-planaridad son equivalentes.

Por lo tanto, el algoritmo $\text{PLANAR}(\mathcal{M}_G)$, en el caso en que \mathcal{M}_G sea conexo, soluciona la cuestión de la p-planaridad en este tipo de grafos periódicos.

3.4 P-planaridad en grafos periódicos no conexos

Anteriormente se ha estudiado el problema de la p-planaridad para grafos periódicos conexos. En esta sección, se estudiará dicho problema en el caso en que el grafo periódico tenga más de una componente conexa.

3.4.1 Grafos Spanning

Todos los resultados de este párrafo están básicamente recogidos en [3].

Si tenemos un grafo infinito G , localmente finito, y tenemos una inmersión $\phi : G \rightarrow \mathbf{R}^2$, se dirá que esta inmersión es *spanning* si las componentes conexas de $\mathbf{R}^2 - \phi(G)$ son acotadas.

Las Figuras 3.25 y 3.26 muestran un grafo inmerso en el plano de forma no *spanning*, y otra inmersión de dicho grafo que sí lo es.

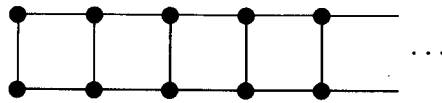


Figura 3.25

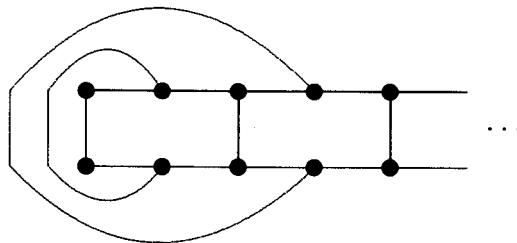


Figura 3.26

Un grafo infinito, localmente finito, se dice que es *spanning* si cualquier inmersión en el plano es *spanning*.

En [3] se demuestran los siguientes resultados:

Lema 3.4.1 *Si G admite una inmersión spanning, entonces tiene un sólo final y, además, este final es inestable.*

Lema 3.4.2 Si G es un grafo con un sólo final y se tiene una inmersión $\phi : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ que no es spanning, entonces $\mathbf{R}^2 - \phi(G)$ tan sólo tiene una componente no acotada.

Como consecuencia de estos resultados se prueba la siguiente propiedad:

Proposición 3.4.1 Sea G un grafo plano con un sólo final y este final inestable. Si G contiene como subgrafo a un árbol T con dos finales, entonces G admite una inmersión spanning.

En general, no es posible dar una caracterización de grafos que admitan una inmersión spanning en términos de grafos minimales que cumplen dicha propiedad, ya que como podemos observar en la Figura 3.27

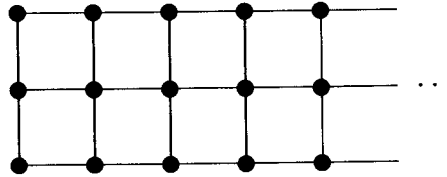


Figura 3.27

es fácil ver que no existe una inmersión spanning de este grafo, pero contiene un subgrafo homeomorfo al de la Figura 3.25.

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4.1 Sea G un grafo plano con un sólo final, en donde este final es inestable. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. G no admite una inmersión spanning.
2. Existe una inmersión propia $\alpha : \mathbf{R}^+ \rightarrow G$ tal que el número de finales de $G - N(\alpha)$ es mayor o igual a 2, para cierto entorno $N(\alpha)$ de $\alpha(\mathbf{R}^+)$.

Como consecuencia del Teorema 3.4.1 se tiene:

Corolario 3.4.1 Sea G como en (3.4.1) y supongamos que existe un árbol T , subgrafo de G , con 3 finales. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. G admite una inmersión spanning.
2. G es un grafo spanning.

Este Corolario se demuestra encontrando como subgrafo de G el grafo de la Figura 3.28.

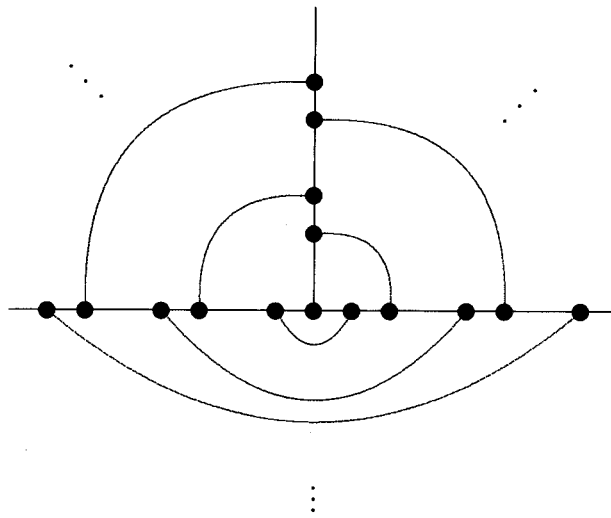


Figura 3.28

Consideremos los grafos de la Figuras 3.29 y 3.30

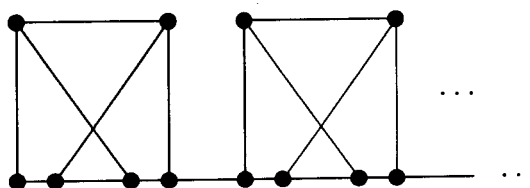


Figura 3.29: $P(K_{3,3})$

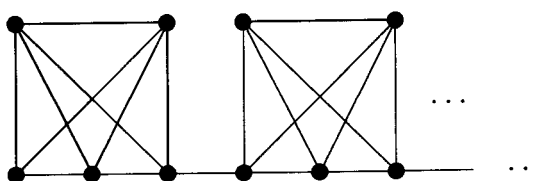


Figura 3.30: $P(K_5)$

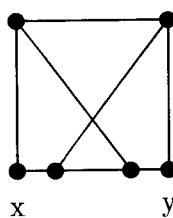


Figura 3.31: $K_{3,3}^*$

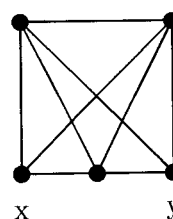


Figura 3.32: K_5^*

En [3] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.4.2 *Un grafo G es spanning si y sólo si es plano, con un sólo final y contiene subgrafos homeomorfos a $P(K_5)$ o $P(K_{3,3})$.*

y, como corolario de este resultado se tiene:

Corolario 3.4.2 *Dado un grafo G , G es un grafo Tiling si y sólo si es 2-conexo, plano, con un final y conteniendo un subgrafo homeomorfo a $P(K_5)$ o $P(K_{3,3})$ (para más detalles ver [23]).*

Halin [25] caracterizó los grafos infinitos, localmente finitos, conexos que eran p -planos, demostrando que estos eran los que no contenían subdivisiones de K_5 , $K_{3,3}$, $K_{3,3}^\infty$, K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$ ó L_5^∞ . Además, era necesaria la hipótesis de la conexión, pues cuando el grafo infinito no es conexo, en general este resultado no es cierto, como podemos observar en el siguiente ejemplo:

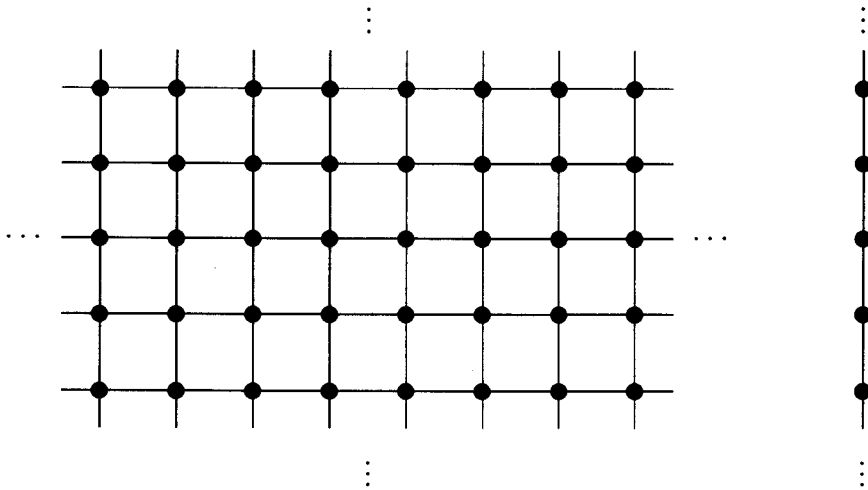


Figura 3.33: La unión de estos grafos forman un grafo no p -plano.

En [3] se generaliza este resultado para grafos no conexos, estableciendo el siguiente teorema:

Teorema 3.4.3 *Sea G un grafo no conexo infinito. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. G es p -plano.
2. G no contiene subgrafos homeomorfos a K_5 , $K_{3,3}$, $K_{3,3}^\infty$, K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, L_5^∞ , $P(K_5)$ o $P(K_{3,3})$.

3.4.2 P-planaridad

En esta sección se estudiará el problema de la p-planaridad de un grafo periódico \mathcal{M}_G en el caso en que \mathcal{M}_G no sea conexo. Estudiaremos dicho problema dependiendo de cómo sean las componentes de \mathcal{M}_G .

Si el grafo \mathcal{M}_G no tuviera componentes infinitas, se tiene que todas sus componentes serían finitas. Además, a lo más existen n componentes que, por traslaciones de éstas, se obtienen todas las de \mathcal{M}_G . Por la Proposición 1.3.4 existe un grafo finito \tilde{G} que contiene a estas componentes que generan \mathcal{M}_G . Se trataría de encontrar en dichos generadores a K_5 o $K_{3,3}$, ya que por el Teorema 3.4.3 la p-planaridad viene caracterizada por la existencia de subgrafos homeomorfos a K_5 , $K_{3,3}$, $K_{3,3}^\infty$, K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, L_5^∞ , $P(K_5)$ o $P(K_{3,3})$. Está claro que, de estos grafos, los que sean infinitos no pueden ser subgrafos de las componentes de \mathcal{M}_G .

En el caso en que \mathcal{M}_G tenga una cantidad finita de componentes infinitas, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4.4 *Sea \mathcal{M}_G un grafo periódico, no conexo, con una cantidad finita de componentes. Entonces \mathcal{M}_G no es p-plano.*

Demostración: Veamos que si \mathcal{M}_G tiene una cantidad finita de componentes, entonces contiene como subgrafo a $P(K_{3,3})$.

Por la Proposición 1.3.4 sabemos que existe en G una componente B y dos copias B_1 y B_2 en la componente J de $\prod_{2n} G$ que contiene a B , tales que si u y v son los vectores que trasladan B a B_1 y B_2 respectivamente, se tiene que u y v son linealmente independientes. Consideremos un vértice p de B y los trasladados p_1 y p_2 por u y v a B_1 y B_2 , respectivamente. Sean α y β caminos en J que unen p con p_1 y p con p_2 . Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el único vértice común entre estos caminos es el propio p , ya que si no ocurriera esto, como α induce un orden en los vértices por los que pasa, consideraríamos p el último vértice común entre α y β .

Sean $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ y sea \mathcal{H} el subgrafo de \mathcal{M}_G cuyos vértices son los que atraviesan todas las copias posibles de α y β de la forma $\tau_{\lambda u + \mu v}(\alpha)$ y $\tau_{\lambda u + \mu v}(\beta)$,

y cuyas aristas son las que atraviesan estas copias trasladadas de estos caminos (ver Figura 3.33).

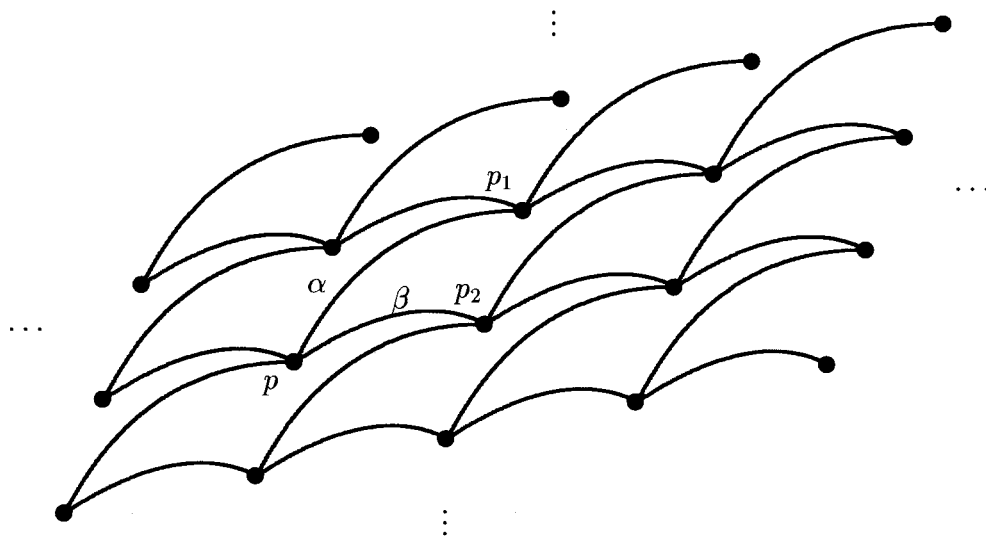


Figura 3.33

Sea T el árbol, subgrafo de \mathcal{H} , que define las copias trasladadas $\tau_{\mu u}(\alpha)$ y $\tau_{\lambda v}(\beta)$ en donde $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ con $\mu \geq 0$ (ver Figura 3.34).

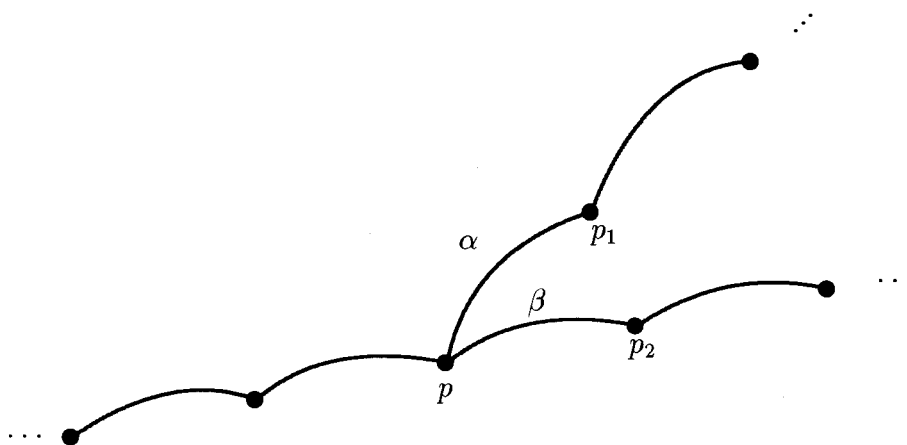


Figura 3.34

Claramente se tiene que \mathcal{T} tiene tres finales. Por el corolario 3.4.1 se tiene que podemos encontrar como subgrafo inmerso en \mathcal{H} el grafo de la Figura 3.35.

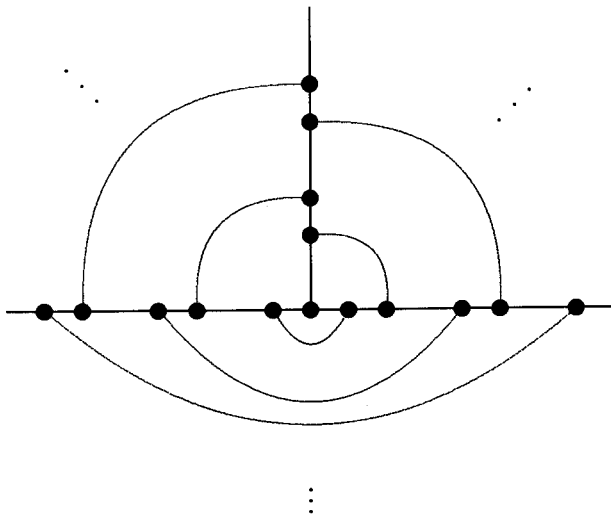


Figura 3.35

Se puede comprobar fácilmente que este subgrafo contiene una inmersión de $P(K_{3,3})$. \square

Nota 3.4.1 En general, si \mathcal{M}_G contiene una componente que es tiling, se tiene que razonando de igual forma que en el Teorema anterior, se podría encontrar una inmersión de $P(K_{3,3})$ (ver [23] y [47] para más detalles).

En el caso en que \mathcal{M}_G tuviera una cantidad infinita de componentes conexas, es obvio que cada una de dichas componentes deben tener al menos dos copias de cierta componente de G .

Además existirán, a lo más, n componentes de \mathcal{M}_G (una por cada componente de G) que generan mediante traslaciones las restantes componentes de \mathcal{M}_G . Por cada componente C_i de G en estos generadores, se comprobará si está unida en sus 8-vecinos a alguna otra. De existir dos copias C_j, C_k unidas en distintos vecinos, se podría razonar, de igual forma que en el Teorema 3.4.4, para encontrar inmerso el subgrafo $P(K_{3,3})$. De la misma forma, si en la componente de \mathcal{M}_G que contiene a C_i , existieran dos copias de otras dos componentes de G con coordenadas linealmente independiente, se tendría el mismo resultado.

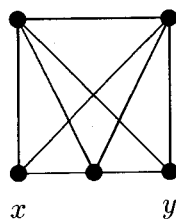


Figura 3.38

y los vértices distinguidos son los señalados como x e y en dichas figuras.

3.4.3 Algoritmo de p-planaridad

Una vez descrito los pasos a seguir para estudiar la p-planaridad de un grafo periódico \mathcal{M}_G no conexo, el algoritmo es el siguiente:

P-PLANARIDAD(\mathcal{M}_G)

PASO 1 Introduce un grafo finito G contenido en $\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$ en donde el grafo periódico que genera \mathcal{M}_G no es conexo.

PASO 2 Por cada componente C_i de G ver si existen dos copias, en la componente de \mathcal{M}_G que contiene a C_i , de una misma componente de G . Si no, construir \tilde{G} y testear si sus componentes son planas. Caso que sean planas responde " \mathcal{M}_G es p-plano", y ve a FIN. Caso en que una de ellas no sea plana responde " \mathcal{M}_G no es p-plano", y ve a FIN.

PASO 3 Estudiando $D(G)_n$ ver si las componentes de \mathcal{M}_G son traslaciones de una de ellas. Si no lo es, ve al PASO 6.

PASO 4 Estudiando $\prod_{2^n} G$, ver si \mathcal{M}_G tiene un número finito de componentes. Caso que lo tenga, contiene una inmersión de $P(K_{3,3})$ y por lo tanto responde " \mathcal{M}_G no es p-plano". Ve a FIN.

PASO 5 Buscar en las n componentes posibles que generan las restantes de \mathcal{M}_G si alguna es Tiling. Si alguna lo es, entonces contiene una inmersión de $P(K_{3,3})$ y por lo tanto responde " \mathcal{M}_G no es p-plano". Ve a FIN.

PASO 6 Buscar en las n componentes posibles que generan las restantes de \mathcal{M}_G los núcleos de $L_{3,3}^\infty$ o L_5^∞ en donde los vértices distinguidos sean de juntura. Caso que existan, responde " \mathcal{M}_G no es p-plano". Ve a FIN.

PASO 7 Responde " \mathcal{M}_G es p-plano".

FIN

3.4.4 Complejidad del algoritmo de p-planaridad

Estudiaremos la complejidad del algoritmo en cada uno de los pasos.

Paso 2 En el Paso 2 se hace una búsqueda por capas para localizar las estrellas de centro las componentes de G . Por cada componente de G , el tiempo invertido en crear su estrella es el mismo que el del Paso 3 del algoritmo que construye el árbol generador de un grafo periódico conexo. Luego el tiempo total invertido es del orden de $nO(n^2) = O(n^3)$. Si existen las copias de la componente de G , hay que examinar el grafo finito (\tilde{G}), y comprobar si sus componentes son planas. Además, como a lo más se tiene que \mathcal{M}_G tiene n generadores de todas sus componentes, y se puede estudiar si un grafo es plano en tiempo lineal [43], en el peor de los casos se invertirá un tiempo $nO(n) = O(n^2)$.

En definitiva, este Paso 2 requiere un tiempo $O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$.

Paso 3 En $D(G)_n$ hay $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ copias de la baldosa \mathcal{C} , luego hay en total del orden de n^2 copias de componentes de G .

Hay que construir las n estrellas de las componentes de G . Como el tiempo que se invierte en construir una estrella es del orden $O(n^2)$, este paso se resuelve en tiempo $O(n^3)$.

Paso 4 En $\prod_{2n} G$ hay del orden de $4n^2$ copias de G . Por cada componente de G , hay que construir la estrella de centro esa componente en el cuadrado $\prod_{2n} G$. Cada estrella requiere un tiempo de, a lo más, $O(4n^2)$, luego este paso invierte un tiempo $nO(4n^2) = O(n^3)$.

Paso 5 Es equivalente ver si una componente de \mathcal{M}_G es tiling a que existen B, B_1, B_2 copias de una componente de G de tal forma que si $u, v \in \mathbf{Z}^2$ son los vectores que cumplen que $\tau_u(B) = B_1$ y $\tau_v(B) = B_2$, tienen que ser linealmente independientes.

Por lo tanto, el Paso 5 requiere el mismo tiempo que el Paso 4, es decir, $O(n^3)$.

Paso 6 Hay que localizar los núcleos de $L_{3,3}^\infty$ o L_5^∞ como subgrafos inmersos en las n estrellas que generan a los generadores de las componentes de \mathcal{M}_G , en donde los vértices distinguidos de dichos núcleos deben de ser vértices de juntura. Notese que si añadimos una arista que una esos vértices distinguidos, obtenemos K_5 o $K_{3,3}$. Por cada par de vértices de juntura en las n estrellas, podemos añadir una arista nueva que los una. Si al añadir dicha arista, las estrellas son planas, no contiene ni a K_5 ni a $K_{3,3}$. Si no fueran planas a causa de que se le ha añadido una arista nueva (es decir, que antes sí eran planas) se tiene que sí contiene a K_5 o $K_{3,3}$ y, por lo tanto, contendrá a los núcleos de $L_{3,3}^\infty$ o L_5^∞ .

Estudiar la planaridad de un grafo finito requiere un tiempo lineal en el número m de vértices [43]. Crear aristas nuevas entre los vértices de juntura requiere un tiempo $O(p^2)$, siendo p el número de vértices de juntura del grafo G . Por lo tanto, se requerirá un tiempo $p^2 O(m) \leq m^2 O(m) = O(m^3)$. Como a lo más hay n generadores, una cota superior puede ser $nO(m^3) \leq mO(m^3) = O(m^4)$.

Podemos enunciar el siguiente resultado:

Teorema 3.4.5 *Sea G un grafo finito con m vértices y n componentes conexas. Sea \mathcal{M}_G el grafo periódico que genera, de tal forma que no es conexo. Sea $N = \max \{n^3, m^4\}$. Se puede responder si \mathcal{M}_G es p -plano en tiempo, a lo más, $O(N)$.*

3.5 Conclusiones y problemas abiertos

Tanto Kuratowski [7] (en el caso en que un grafo sea finito) como G. A. Dirac y S. Schuster [20] (para el caso infinito) caracterizan los grafos que son planos (es

decir, que admiten una inmersión en el plano de tal forma que no se crucen sus aristas) como los que no contienen subgrafos homeomorfos a K_5 ó $K_{3,3}$.

Se puede ampliar el concepto de grafo plano al de grafo p-plano (que admiten una inmersión en el plano de tal forma que no se crucen sus aristas y que los vértices no se acumulen). Halin en [25] caracteriza dichos grafos, en el caso infinito, como aquellos que no admiten subgrafos homeomorfos a L_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, K_5^∞ ó $K_{3,3}^\infty$.

Estrechamente relacionado con el concepto y el problema de la p-planaridad (y en particular con el de la planaridad) son los conceptos periplanos y W-periplanos ([27] y [44]).

En este Capítulo, se ha estudiado la planaridad y la p-planaridad haciendo distinción de si \mathcal{M}_G es conexo o no.

Cuando \mathcal{M}_G sea conexo, el concepto de planaridad y el de p-planaridad son equivalentes, y se resuelve el estudio comprobando si $G^* \cup \{\partial V^*, \partial C^*\}$ es ∂V^* -periplano; dando un algoritmo que, en tiempo $O(m^3)$, con m el número de vértices de G , responde a dicho problema dando un grafo \tilde{G} de tal forma que $\mathcal{M}_{\tilde{G}}$ es planio (y, por lo tanto p-plano) siendo $\mathcal{M}_{\tilde{G}}$ una inmersión de \mathcal{M}_G en el plano.

Para cuando \mathcal{M}_G no es conexo, se distinguen todos los casos posibles que se pudieran presentar dependiendo de cómo son las componentes de \mathcal{M}_G , y se da un algoritmo que *testea* en tiempo $O(N)$ (en donde $N = \max\{n^3, m^4\}$, con n el número de componentes y m el número de vértices de G) si \mathcal{M}_G es p-plano.

Ni que decir tiene que el primer problema que queda abierto es la reducción de la complejidad de los algoritmos que se presentan en esta sección; así como, en el caso en que \mathcal{M}_G no sea conexo, dar un algoritmo que calcule, caso en que sea p-plano, la inmersión en el plano de \mathcal{M}_G .

Otro problema que se podría estudiar es el género de un grafo infinito. No sólo se puede estudiar la inmersión de un grafo en el plano, sino que se podría estudiar su inmersión en otra superficie abierta. La superficie de mínimo género en la que se puede dar una inmersión de \mathcal{M}_G definiría el género de un grafo.

Bibliografía

- [1] J. E. Hopcroft A. V. Aho and J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [2] W. Ahrens. Über das Gleichungssystem einer Kirchhoffschen galvanischen Stromverzweigung. *Mathematische Annalen*, 49:311–324, 1897.
- [3] R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez, and A. Quintero. On the graphs which are the edge of a plane tiling. Preprint.
- [4] R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez, and A. Quintero. Proper homotopy classification of graphs. *Bull. London Math. Soc.*, 22:417–421, 1990.
- [5] M. Bauderon. *On System of Equations Defining Infinite Graphs*. C.N.R.S. prc. Mathematiques et Informatique.
- [6] N. L. Biggs. *Discrete Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [7] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, and R. J. Wilson. *Graph Theory 1736-1936*. Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [8] J. A. Bondy. On kelly's congruence theorem for trees. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 65:1–11, 1969.
- [9] K. S. Booth and G. S. Lueker. Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graphs planarity using PQ-trees algorithms. *J. Comput. Syst. Sci.*, 13:335–379, 1976.
- [10] B. Carr . *Graphs and Networks*. Clarendon Press. Oxford, 1979.
- [11] A. Cayley. On the theory of analytical forms called trees. *Philosophical Magazine*, 47:242–246, 1857.

- [12] A. Cayley. On the mathematical theory of isomers. *Philosophical Magazine*, 47:444–446, 1874.
- [13] A. Cayley. On the theory of analytical forms called trees, with application to the theory of chemical combinations. *Report of the British Association for the Advancement of Science.*, pages 257–305, 1875.
- [14] A. Cayley. Solutions of problem 5208. *Mathematical Questions with Solutions from the Educational Times*, 27:81–83, 1877.
- [15] A. Cayley. On the analytical forms called trees. *American Journal of Mathematics*, 4:266–268, 1881.
- [16] A. Cayley. A theorem on trees. *Quarterly Journal of Mathematics*, 23:376–378, 1889.
- [17] A. Cayley. The theory of groups, graphical representation. *Mathematical Papers, Cambridge*, 10:26–28, 1895.
- [18] Gary Chartrand and L. Lesniak. *Graphs and Digraphs*. Wadsworth and Brooks/Cole, 1986.
- [19] Gary Chartrand and Ortrud R. Oellermann. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. McGraw-Hill, Inc., 1993.
- [20] G. A. Dirac and S. Schuster. A Theorem of Kuratowski. *Indag Math.*, 16:343–348, 1954.
- [21] H. Freudenthal. Über die Enden Topologischer Räume und Gruppen. *Math. Zeit*, 33:692–713, 1931.
- [22] R. Frucht. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe. *Compositio Math.*, 6:239–250, 1938.
- [23] B. Grünbaum and G.C. Shephard. *Tilings and Patterns*. Freeman. New York, 1987.
- [24] R. Halin. Über Trennende Eckenmengen in Graphen und den Mengerschen Satz. *Math. Ann.*, 157:34–41, 1964.
- [25] R. Halin. Zur häufungspunktfreien Darstellung adzählbarer Graphen in der Ebene. *Arch. Math.*, 17:239–242, 1966.

- [26] F. Harary. On the reconstruction of graph from collection of subgraph. *Theory of graph and its applications (M. Fiedler, ed.) Prague.*, pages 47–52, 1964.
- [27] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [28] F. Harary and E.M. Palmer. The reconstruction of a tree from its maximal proper subtrees. *Canada J. Math.*, 18:803–810, 1966.
- [29] H. Hermes. Enumerability, decidability, computability. *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.*, page 127, 1965.
- [30] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. Efficient planarity testing. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 21:549–568, 1974.
- [31] C. Jordan. Sur les assemblages de lignes. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70:185–190, 1869.
- [32] P.J. Kelly. A congruence theorem for trees. *Pacific Journal Math.*, 7:961–968, 1957.
- [33] G. Kirchhoff. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik und Chemie*, 72:497–508, 1847.
- [34] D.E. Knuth. Big omicron and big omega and big theta. *SIGACT News.*, 8(2):18–24, 1976.
- [35] D. König. *Theory of Finite and Infinite Graphs*. Birkhäuser, 1990.
- [36] A. Diáñez y A. Márquez L. Boza, J.C. Dana. *Grafos Mosaicos Infinitos: Conexión*. Por aparecer.
- [37] J.B. Listing. *Vorstudien zur topologie*. Göttingen Studien, 1847.
- [38] B. Manvel. *Reconstruction of trees*.(Canad. J. Math.). To appear.
- [39] B. Manvel. *Reconstruction of unicyclic graphs (Proof Techniques in Graph Theory)*. Academic Press, New York, 1969.
- [40] J.A. McHugh. *Algorithmic Graph Theory*). Prentice Hall., 1990.

-
- [41] K. Menger. *Kurventheorie (unter Mitarbeit von G. Nöbeling)*. Leipzig und Berlin, 1932.
- [42] C. St. J. A. Nash-Williams. Infinite Graphs. A survey. *Journal of Combinatorial Theory*, 3:286–301, 1967.
- [43] T. Nishizeki and N. Chiba. *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, volume 32 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1988.
- [44] L. Oubiña and R. Zucchello. A generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics, North-Holland*, 1(51):243–249, 1984.
- [45] R. Rado. Universal graphs and universal functions. *Acta Arich.*, 9:331–340, 1964.
- [46] A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *J. Assoc. Comput.*, 17:146–160, 1970.
- [47] P. M. Soardi. Recurrence and transience of the edge graph of a tiling of the euclidean plane. *Math. Ann.*, 287:613–626, 1990.
- [48] C. Thomassen. Kuratowski's theorem. Preprint Series Aarhus Universitet 17, Denmark, 1981.
- [49] C. Thomassen. Infinite graphs. In *Selected Topics in Graph Theory*, volume 2, pages 129–160. Academic Press, 1983.
- [50] M.C. van Lier y R.H.J.M. Otten. C.a.d. of masks and wiring. T.H. Rept. 74-e-44, Dept. Elect. Engrg., Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1974.
- [51] A. Rosenfeld y A. C. Kak. *Digital Pictures Processing*, volume 2. Academic Press. New York, 1982.
- [52] F.P. Preparata y M.I. Shamos. *Computational Geometry. An Introduction*. Springer-Verlag., 1985.
- [53] Ann Yasuhara. *Recursive Function Theory and Logic*. Academic Press, Inc., 1970.