CURSO PRÁCTICO DE TEORÍA DE CONJUNTOS

José A. Alonso Jiménez

Joaquín Borrego Díaz

Mario de Jesús Pérez Jiménez

José L. Ruiz Reina

Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla

Sevilla, 10 de Julio de 2007 (versión de 11 de julio de 2007)

Prólogo

Este libro es fruto y consecuencia de la amplia experiencia docente en Teoría de Conjuntos que sus autores han desarrollado en las Facultades de Matemáticas de la Universidad Central de Barcelona y de la Universidad de Sevilla.

Todos los que hemos impartido tópicos diversos relativos a la Teoría de Conjuntos, en primer o segundo ciclo universitario, hemos echado de menos, en mayor o menor medida, un texto en el que apareciera un amplio espectro de "problemas resueltos" estructurados de manera sistemática.

El único libro que conocemos desarrollando parcialmente esos objetivos es el de L.E. Sigler [28], cuya primera edición data de 1966 (reimpreso en 1972) y se dedica básicamente a proponer y resolver los problemas del texto "Naive Set Theory"de P.R. Halmos [13].

El *Curso Práctico de Teoría de Conjuntos* que presentamos, trata de cubrir ese vacío bibliográfico y consideramos que puede ser de interés tanto para profesores como para alumnos universitarios que necesiten trabajar con elementos varios de la Teoría de Conjuntos (órdenes, funciones, inducción, recursión, ordinales, finitud, numerabilidad, cardinales, ...). Por tanto, puede ser un buen libro de consulta sobre estos temas a niveles de primer y/o segundo ciclo universitario.

El libro consta de doce temas que podríamos denominar básicos y de un capítulo complementario de recopilación. Los temas básicos están estructurados en tres partes: la primera está dedicada a presentar un breve resumen teórico de los conceptos y resultados más importantes que se abordan en el tema; en la segunda parte se describen exhaustivamente soluciones de problemas relativos al contenido del mismo (en donde prestamos especial importancia a la presentación misma de la solución); para finalizar proponiendo ejercicios, algunos de los cuales aparecen con indicaciones explícitas que pueden ser de utilidad al lector a fin de valorar el grado de asimilación del contenido desarrollado hasta entonces (por cierto, hemos creido interesante incluir indicaciones en algunos problemas resueltos que tienen alguna dificultad especial, por si el lector desea intentar su resolución con la pista que aportamos, antes de comprobar la solución que se le presenta).

Acerca de los problemas resueltos y propuestos queremos significar que si bien un gran porcentaje de los mismos aparecen en textos habituales de Teoría de Conjuntos, muchos otros son originales de los propios autores.

Hemos considerado oportuno añadir un capítulo complementario dedicado a problemas de recapitulación, en los cuales suelen utilizarse conceptos y resultados de diversos temas.

Respecto a los temas relativos a cardinales (10, 11 y 12) hemos de indicar que se han desarrollado en la teoría de Zermelo–Fraenkel con el axioma de regularidad y sin el axioma de elcción (es decir, en **ZF**). Los resultados básicos de cardinales podrían obtenerse de manera más simple prescindiendo del axioma de regularidad y admitiendo el axioma de elección (es decir, trabajando en la teoría $\mathbf{ZFC}^-$, en donde todo conjunto es bien ordenable). Este "atajo.es el que aconsejamos a quienes estudien por vez primera y de manera sistemática la teoría de cardinales.

Queremos hacer constar nuestro agradecimiento a los profesores A. Fernández Margarit, A. Riscos Fernández y F.F. Lara Martín, con quienes hemos compartido tareas docentes en Teoría de Conjuntos, y a A. Romero Jiménez por el trabajo dedicado a la revisión del texto y sus atinadas críticas al mismo.

Si estas páginas consiguen motivar, estimular y aproximar a algún lector a los problemas de fundamentación de las Matemáticas, con ello nos daríamos por satisfecho.

Los autores

Sevilla, enero de 1998

Índice general

Introducción histórica

A diferencia de otras áreas de las Matemáticas, la Teoría de Conjuntos ha sido obra, básicamente, de una persona: el matemático alemán G. Cantor.

1. Antecedentes de la Teoría de Conjuntos.

Durante los siglos XVII y XVIII se produjo una creciente generalización de conceptos en Matemáticas (función, infinitésimo, derivada, integral, sucesión, serie, ...) que provocaron grandes controversias, especialmente acerca del significado de los conceptos de derivada e integral introducidos por Newton, y por el uso de técnicas que, en principio, parecían contradictorias (sobre todo, aquellas que manejaban infinitésimos).

No obstante, el hecho de que los resultados obtenidos a partir de estos conceptos fuesen aparentemente correctos y con el fin de analizar las causas que habían permitido obtenerlos, se produjo a principios del siglo XIX un movimiento encaminado a fundamentar las Matemáticas, como un camino indirecto para clarificar y justificar dichas nociones.

En la década de 1870–1880, B. Bolzano, R. Dedekind, G. Cantor y K. Weierstrass hacen notar que para trabajar con derivadas e integrales es indispensable manejar de forma clara y precisa los conjuntos infinitos. Además llevan a cabo una tarea fundamental en el devenir de la Ciencia, en general, y de la matemática en particular: la *Aritmetización del Análisis Matemático*.

En el proceso de aritmetización, se definen los números complejos a partir de los números reales; los números racionales a través de los números enteros y éstos a través de los números naturales. El resultado final que cierra la “cadena"se obtiene al definir los números reales a partir de los racionales (mediante sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy o cortaduras de Dedekind).

De esta forma todo el Análisis Matemático queda reducido a la axiomatización de la Aritmética.

Ahora bien, en el proceso antes citado, además de los números naturales juegan un papel clave conceptos tales como par ordenado, relación, clase de equivalencia, aplicación, sucesión, etc.

En este contexto R. Dedekind, G. Frege y G. Peano materializan sus preocupaciones acerca de la fundamentación de la Aritmética:

- Entre 1872 (“Continuidad y números irracionales") y 1888 (“¿Qué son y qué deben ser los números?"), Dedekind desarrolló su teoría de números basándola en los conceptos de conjunto y aplicación, presentó una primera definición de conjunto infinito (los primeros estudios relativos a estos conjuntos, se atribuyen a Bolzano[1]) y mostró una caracterización de los números naturales a partir de unas pocas propiedades.
- Frege trata de fundamentar la Aritmética[2] sobre la base de una lógica formalizada a través de una escritura conceptual[3], desarrollando el concepto general de cardinal y haciendo un estudio de los cardinales finitos.

  Sus trabajos se caracterizan por su extraordinaria precisión y minuciosidad aunque utiliza una terminología excesivamente compleja.
- Entre 1894 y 1903, Peano publicó su “Formulaire de Mathmatiques.escrito en un lenguaje formalizado, y que pretendía abarcar todas las Matemáticas. Para ello, utiliza un lenguaje mucho más simple y asequible que Frege (algunas notaciones de Peano son usadas actualmente: $\in$, $\supset$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\ldots$) y se limita a enumerar las leyes lógicas sin ánimo de estructurarlas propiamente en el marco de un sistema deductivo.

  Además, Peano presentó una axiomatización de la Aritmética[4], independiente aunque equivalente a la desarrollada por Dedekind. En ella, describe los axiomas a través de postulados como reglas simples o evidentes que no son susceptibles de ser demostradas.

De esta forma el estudio de los números naturales y, en consecuencia, todos los conceptos del Análisis Matemático, quedan reducidos al estudio del concepto de conjunto.

Durante la primera mitad del siglo XIX, las series trigonométricas y los desarrollos en series de potencias, jugaron un importante papel en el estudio de las funciones reales de una variable real.

En los primeros años de la década 1870–1880, el estudio de ciertos problemas relativos a series trigonométricas, condujo nuevamente a Cantor al análisis de propiedades de ciertos conjuntos infinitos de números reales.

[1] “Paradoxien des Unendlichen", ed. F. Prihonski, Leipzig, 1851.
[2] “Die Grundlagen der Arithmetik", 1884, y “Die Grundgesetze der Arithmetik, 1893–1903.
[3] “Begrisffschrift", 1879
[4] “Arithmetices Principia, nova methodo exposita", 1879.

Parece ser que fue éste el germen que daría origen a la Teoría de Conjuntos que Cantor desarrollaría, inicialmente, entre 1873 y 1894. No obstante, hay que citar a Bozano, Dedekind, Frege y Peano como precursores de una teoría lógica de los números finitos e infinitos (transfinitos según la nomenclatura cantoriana).

Desde la antigedad, las cuestiones acerca del infinito habían estado presente de manera constante en los trabajos y discusiones de matemáticos, científicos en general, filósofos y teólogos.

En el siglo IV a. C., Aristóteles distinguió por primera vez el *infinito potencial*, como posibilidad de considerar procesos *ad infinitum*, del *infinito actual* que permite considerar al infinito como una entidad, como un objeto dado; aceptando la primera idea y rechazando la segunda.

En el siglo XVIII, Kant considera el infinito actual como una de las *ideas de la razón* y, a diferencia de Aristóteles, su postura ante el mismo no es de rechazo.

Las paradojas del infinito (entre las que destacamos la de Galileo, 1632, obtenida al establecer una biyección entre los números naturales pares y los números naturales) aparecen al pretender extender a conjuntos infinitos las propiedades válidas para conjuntos finitos.

Bolzano, Dedekind, Frege, Peano y el propio Cantor reivindican el infinito actual con la existencia del conjunto de los números naturales. En el caso de Cantor, la cuestión llegaría mucho más lejos al desarrollar una aritmética de los números transfinitos así como una teoría del orden.

A principios de 1870, E. Heine le propuso a Cantor un problema relativo a la unicidad de la representación de una función real a través de una serie trigonométrica (el propio Heine había obtenido un teorema de unicidad en el que imponía restricciones a la función real y a la serie trigonométrica). Para abordar dicho problema, en 1872 Cantor definió los números reales en términos de series convergentes de números racionales[5]. Además, a principios de 1873 obtiene su primer gran descubrimiento: la numerabilidad del conjunto, $\mathbb{Q}$, de los números racionales. Así Cantor había conseguido demostrar que un conjunto denso sobre una línea tenía tantos elementos como un conjunto de puntos aislados sobre una línea, el de los números naturales.

A partir de aquí se preguntó, primero, si todo conjunto infinito era numerable y, en segundo lugar, cuál era la diferencia cualitativa entre el conjunto de los números racionales (*denso* con “huecos") y el de los números reales (*continuo*).

2. Los comienzos de la Teoría de Conjuntos.

El 29 de noviembre de 1873, Cantor escribe a Dedekind planteándole el problema

[5]“ber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", Math. Ann., **5** (1872), 122–132.

de la no numerabilidad del conjunto, $\mathbb{R}$, de los números reales (explicitando una idea sobre sucesiones finitas de números naturales que le inducía a pensar en una respuesta afirmativa). Dedekind le contestó indicándole que no había encontrado una respuesta satisfactoria a dicha cuestión, y, en cambio, le envió una prueba de la numerabilidad del conjunto de los números algebraicos.

El 2 de diciembre de 1873, Cantor le responde a Dedekind que esa prueba era básicamente la contenida en su carta anterior. Tan convencido estaba Cantor de lo que afirmaba que en 1874 publicó dicho resultado sin tener la delicadeza de citar al propio Dedekind (lo que provocó en éste un justificado malestar, con lo que su relación con Cantor pasó por momentos muy delicados).

Pocos días después, el 7 de diciembre de 1873, Cantor escribe nuevamente a Dedekind y le envía una demostración de la no numerabilidad de $\mathbb{R}$, y éste le contestó rápidamente dando el visto bueno a la prueba.

Seguidamente Cantor le comenta a Weierstrass los resultados obtenidos: numerabilidad del conjunto de los números algebraicos y no numerabilidad de $\mathbb{R}$. Curiosamente Weierstrass le da especial relevancia al resultado menos importante, el relativo a los números algebraicos, quizás porque siempre se había negado a aceptar la existencia de números transfinitos cualitativamente distintos, desde el punto de vista de la cardinalidad.

La opinión de Weierstrass influyó en Cantor hasta tal punto que el trabajo publicado en 1874 tenía por título "Sobre una propiedad del conjunto de los números algebraicos"[6], sin que ni siquiera dejara entrever el resultado fundamental del trabajo: la no numerabilidad del continuo.

En 1851, J. Liouville había establecido la existencia de los números trascendentes (números reales que no son algebraicos). Pues bien, tras el trabajo publicado por Cantor en 1874 resultaba que, en cierto sentido, "casi todos"los números reales eran trascendentes (lo que proporcionaba una prueba indirecta de un teorema de Liouville que garantizaba la existencia de infinitos números trascendentes en todo intervalo abierto no vacío).

En el trabajo de Cantor de 1874 nace implícitamente el concepto de *cardinal* de un conjunto, si bien sería en su trabajo de 1878 ("Una contribución a la teoría de variedades"[7]) donde define dicho concepto, utilizando la terminología de *potencia* – debida a Steiner – como una medida del "tamaño"del conjunto. Además, en ese trabajo probó la equipotencia de los continuos (es decir que todos los conjuntos $\mathbb{R}^n$ tenían la misma potencia) y que el conjunto de los números irracionales era no numerable.

Hacia 1878 todos los conjuntos estudiados hasta entonces tenían o bien la potencia

[6] "ber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", Journal rei.ang. Math, **77** (1874), 258–262.

[7] "Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre", Journal rei. ang. Math, **84** (1878), 242–258.

de los números naturales o la potencia de los números reales. De manera natural, Cantor se planteó las siguientes cuestiones:

- Todo conjunto infinito de números reales ¿o es numerable o tiene la potencia del continuo?
- ¿Cuál es la potencia del continuo? (*problema del continuo*).

Entre 1879 y 1884, Cantor publicó unos trabajos[8] relativos a los conjuntos derivados (conjuntos que ya había utilizado en sus investigaciones acerca de las series trigonométricas). No obstante, ahora los estudió como método indirecto para resolver el problema del continuo. En ese trabajo introdujo los "símbolos infinitos"simplemente para identificar los conjuntos derivados y poder distinguir unos de otros.

En 1883 publicó sus "Fundamentos de una teoría general de conjuntos"[9] presentando de manera sistemática algunas nociones básicas de la Teoría de Conjuntos y desarrollando una teoría de los números transfinitos, considerados como objetos matemáticos de la misma entidad que los números finitos.

La Teoría de Conjuntos pasa a ser, básicamente, una teoría de conjuntos ordenados y los ordinales transfinitos vienen a ser un modelo de los "símbolos infinitosütilizados en la descripción de los conjuntos derivados.

3. Consolidación de la Teoría de Conjuntos.

Entre 1884 y 1885, Cantor desarrolla una teoría de tipos de orden. De esta manera consigue establecer un análisis general de los conjuntos sobre la base de las nociones de potencia y de orden, interrelacionadas por los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados (ordinales transfinitos).

Hacia finales de la década de 1880–1890 el problema del continuo sigue abierto, a pesar del titánico esfuerzo realizado por Cantor para su resolución. Otra cuestión que aún estaba sin respuesta era la existencia de conjuntos cuya potencia fuese estríctamente mayor que la del continuo.

En un intento de contrarrestar el rechazo que su obra sufría por parte de L. Kronecker y sus seguidores (parece ser que Kronecker quiso publicar en Acta Mathematica, cuyo editor fundador era M.G. Mittag–Leffler, un breve artículo en el que "demostraba que la moderna teoría de funciones y de conjuntos no tenían importancia real"), Cantor promueve una sociedad de matemáticos alemanes (Deutsche Mathematiker–Vereinigung) que celebró su reunión fundacional en 1891 y, como era de prever, lo eligieron como primer presidente.

[8]"ber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten", Math. Ann., **17**, (1880), 355-358; **20** (1882), 113–121; y **23** (1884), 453–488.

[9]"Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltig keitslehre", Math. Ann., **21** (1883), 545–591.

En dicha reunión, Cantor presentó un trabajo de extraodinaria importancia no sólo por el resultado obtenido (“dado un conjunto, a, es posible construir otro a partir de él cuya potencia sea estríctamente mayor que la de a") y por las consecuencias que se deducían del mismo (existencia de conjuntos infinitos no numerables), sino por el método de prueba que aportaba (el *método diagonal*).

La demostración del resultado citado utilizando el método diagonal era extremadamente simple. Además utilizó dicho método para dar una nueva prueba, mucho más sencilla que la dada en 1873, de la no numerabilidad de los números reales[10] y para demostrar que todo conjunto tiene una potencia estríctamente menor que su conjunto de partes (*teorema de Cantor*).

Parece ser que a partir de este resultado, Cantor dedujo en 1899 que la colección, **V**, de todos los conjuntos no podía ser un conjunto pues, en tal caso, su correspondiente conjunto de partes tendría más elementos que **V**, lo que sería contradictorio.

En el trabajo antes citado, Cantor identificó las potencias de los conjuntos infinitos con los números cardinales transfinitos.

Entre 1895 y 1897 publica sus “Contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinitos"[11], en donde presenta de manera sistemática una aritmética y una teoría del orden de los números transfinitos, siguiendo el modelo de la aritmética ordinal. En dichas publicaciones hace una introducción de la Teoría de Conjuntos que parece un libro actual, definiendo los conceptos de conjunto, subconjunto, potencia, etc. Además, introdujo la notación de los álef para representar los cardinales transfinitos $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ en donde $\aleph_0$ representa el cardinal de los conjuntos numerables. Cantor afirmó que existía un mínimo cardinal mayor que $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$, que notó $\aleph_\omega$, y observó que a partir de él se podía generar una nueva serie.

Fue entonces cuando se replanteó el problema del continuo preguntándose qué lugar ocuparía la potencia del continuo, $\mathfrak{c}$, en dicha sucesión. Tras haber probado que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, conjeturó que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (*hipótesis del continuo*, **HC**).

En 1883, en sus Grundlagen, Cantor había formulado por primera vez como conjetura el siguiente problema: si un conjunto a es equipotente a una parte de un conjunto b y el propio b es equipotente a una parte de a, entonces los conjuntos a y b son equipotentes.

En 1896, E. Schröder proporcionó una prueba incompleta de dicho resultado. Independientemente, F. Bernstein publicó en 1898 una prueba correcta del hoy conocido por

[10]Probó por reducción al absurdo que el intervalo $]0,1[$ era no numerable, demostrando que una aplicación inyectiva, f, de $\mathbb{N}$ en $]0,1[$ no puede ser suprayectiva. Para ello, construye un número real $x \in]0,1[$ que difiere de $f(1)$ en el primer decimal, de $f(2)$ en el segundo decimal, y así sucesivamente. De ese modo, x no es imagen por f de ningún número natural.

[11]“Beitrge zur Begrndung der transfiniten Mengenlehre", Math. Ann., **36** (1895), 481–512 y Math. Ann., **49** (1897), 207–246.

teorema de Schröder–Bernstein–Cantor.

4. Las paradojas en la Teoría de Conjuntos.

En los años sucesivos, dos hechos notables vendrían a alterar sustancialmente el devenir de la Teoría de Conjuntos y, en consecuencia, de las Matemáticas, a saber:

(1) La aparición de las paradojas[12] en la Teoría de Conjuntos (1897 y siguientes).

(2) La prueba de Zermelo del teorema del buen orden.

En 1897, C. Burali–Forti hizo pública[13] la primera paradoja de la Teoría de Conjuntos (en realidad presentó una prueba de que el conjunto de todos los álefs no podía ser bien ordenado, y B. Russell formuló el resultado en términos de paradoja). Parece ser que en 1895 el propio Cantor había descubierto dicha paradoja y se la comentó a D. Hilbert en 1896[14].

Esta paradoja no afectó en demasía a Cantor ya que, desde un principio, había hecho una distinción entre lo que denominó *infinito absoluto* (que en el plano teológico se identifica con Dios y en el contexto matemático permitiría considerar colecciones arbitrariamente grandes) y el *absoluto transfinito* (nombre que introdujo para designar la potencia de conjuntos como el de los números naturales o el de los números reales).

En 1899, en una carta a Dedekind, propone la modificación de algunas definiciones para soslayar la paradoja de Burali–Forti y mantener intacta su obra. Así transformó la distinción entre el infinito absoluto y el absoluto transfinito en una diferenciación entre *multiplicidades* (variedades o totalidad) *consistentes* y *multiplicidades inconsistentes*. Posteriormente, en 1925, J. von Neumann codificaría dicha diferencia utilizando la terminología de conjuntos y *clases*.

Sorprende, no obstante, la virulencia con la que Cantor recibió la publicación del trabajo de Burali–Forti. Incluso se permitió el lujo de criticarle públicamente por haber obviado la diferencia entre multiplicidades consistentes e inconsistentes.

En 1901 Russell publicó un trabajo[15] en el que afirmaba que si bien no existía un cardinal máximo, como afirmaba Cantor, en cambio el cardinal de la colección universal de todos los conjuntos debería ser máximo. Así obtuvo una nueva paradoja al considerar la colección de todos los álef (en realidad, Russell estaba convencido de la existencia de algún error en el enunciado o en la prueba del teorema de Cantor, lo que le llevó a analizar

[12] Una paradoja permite deducir dos resultados tales que uno de ellos es la negación del otro.

[13] “Una questioni sui numeri trasfiniti", Rend. Circol. Mat. Palermo, **11** (1897), 83–101.

[14] Obsesionado por el problema del continuo, Cantor quería probar el teorema del buen orden como método indirecto para concluir que la potencia del continuo era un álef. Para ello, pretendía usar el hecho de que la colección de todos los ordinales no es un conjunto; a lo que Hilbert respondió “justificando"que dicha colección era un conjunto bien definido.

[15] “Recent work on the principles of mathematics", Int. montly, **4** (1901), 83–101.

detalladamente la demostración dada por Cantor en algunas colecciones especialmente grande: ese análisis le condujo a descubrir esta paradoja y la famosa de 1903).

Las paradojas de la Teoría de Conjuntos conocidas hasta 1902 afectaban a los conceptos de ordinales y cardinales, quizás por ello su aparición no provocó gran alarma entre la comunidad matemática, con independencia de los ataques recibidos de los detractores a ultranza, encabezados por Kronecker y H. Poincaré, que la Teoría de Conjuntos tuvo desde sus albores y que aprovechaban cualquier resquicio para atacar a la obra cantoriana. Se pensaba que las paradojas aparecidas podían ser solventadas realizando algunos retoques en definiciones que no afectaran al grueso de la teoría.

Esta situación cambió por completo en 1903 con la publicación[16] de la denominada paradoja de Russell[17] (obtenida al considerar la colección de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos) que apuntaba directamente al corazón mismo de la Teoría de Conjuntos: el principio admitido por Cantor (e incluso por Frege, que lo incluyó como esquema de axiomas en el sistema que propuso para fundamentar lógicamente la Aritmética) mediante el cual asociaba a cada “propiedadün conjunto cuyos elementos eran todos los objetos que verificaban dicha “propiedad"(la *extensión* de una *propiedad* proporciona un objeto de la teoría).

No sólo los cimientos sino también otras partes importantes del gran edificio matemático parecieron tambalearse: la Teoría de Conjuntos había comenzado a aplicarse en diversas áreas (en 1901 H. Lebesgue introdujo el concepto de medida y en 1902 la integral de Lebesgue, usando términos conjuntistas).

5. El teorema del buen orden de Zermelo.

Cuando Russell comunicó a Frege, en 1902, la existencia de contradicciones en su sistema lógico (y, en concreto, en su esquema de axiomas de comprehensión de 1893), éste manifestó en 1903 su desdicha al comprobar el desmoronamiento de uno de los pilares centrales de su obra, cuando estaba a punto de terminar la impresión y publicarla. Ello echaba por tierra el programa logicista de Frege de reducir la Aritmética a la Lógica, hasta el punto de hacer que abandonara el proyecto al que le dedicó gran parte de su vida.

Recordemos que Cantor intentó probar el teorema del buen orden (todo conjunto es bien ordenable) con el fin de resolver el problema del continuo. En un principio había admitido el resultado como verdadero (como postulado) y, finalmente lo propuso como problema abierto tras fallidos intentos por demostrarlo a partir de unos supuestos más simples (incluso hizo una prueba que envió a Dedekind en 1899 pero que no le convencía, y menos aún después de haber recibido la callada por respuesta).

En el I Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en 1900, Hilbert dio una

[16]“The principles of Mathematics", Cambridge University Press, 1903.

[17]La paradoja de Russell fue descubierta independientemente por Zermelo, que no llegaría a publicarla.

lista de los veintitrés problemas que, a su juicio, centrarían la investigación matemática del presente siglo. El primero de ellos, quizás como reconocimiento público a la obra cantoriana, era el problema del continuo. Además, en su intervención Hilbert destacó la importancia de dar un buen orden "efectivo.en el conjunto de los números reales.

En 1904, J. Köning participó en el III Congreso Internacional de Matemáticos dando una demostración de que la potencia del continuo no era un álef. Cantor, que estaba presente en la exposición, intervino afirmando que el resultado era falso y que encontraría el error (parece ser que fue Hausdorff el que encontró el fallo en la prueba de Köning).

Poco después, aún en 1904, E. Zermelo publicó[18] una prueba del teorema del buen orden, refutando indirectamente el resultado de Köning. En dicho trabajo se explicitaba por primera vez el axioma de elección (**AC**) y se hacía hincapié en que dicho axioma era necesario para demostrar el teorema del buen orden.

En realidad, el axioma de elección había sido utilizado implícitamente por muchos matemáticos (Cantor, Dedekind y Russell entre ellos). Parece ser que fue Peano en 1890 quien por primera vez cita explícitamente dicho axioma, rechazándolo, en una prueba de existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. También Beppo Levi en 1902 alude al axioma de elección y E. Schmidt pensaba que un proceso de selección uniforme debía ser necesario para probar el teorema del buen orden.

La salida a escena del axioma de elección y, por tanto, de la prueba del teorema del buen orden de Zermelo, provocó una gran controversia entre los matemáticos de la época, encabezados por Peano y E. Borel[19]. Se trataba de un principio de tipo existencial mediante el cual se aseguraba la existencia de un objeto sin ofrecer método alguno para obtenerlo.

Con todos estos ingredientes (la aparición de paradojas, el axioma de elección y la prueba de Zermelo del teorema del buen orden) se había creado, a principios de este siglo, el caldo de cultivo apropiado para que apareciera la tercera gran crisis de fundamentos en la historia de las Matemáticas: la primera se situa en el siglo V. a. C. con los números irracionales (descubrimiento de las cantidades inconmensurables) y la segunda a comienzos del siglo XIX con los infinitésimos.

Como respuesta a la crisis de fundamentos de las Matemáticas, aparecen básicamente tres proyectos:

– El proyecto *logicista* que propone una reducción de las Matemáticas a una "Lógica coherente". Las nociones matemáticas han de ser definidas en términos de nociones lógicas y los teoremas matemáticos han de ser establecidos como teoremas de

[18] "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)", Math. Ann., **59** (1904), 514–516.

[19] Peano argumentaba, en primer lugar, la falta de prueba de dicho axioma y, en segundo lugar, que ese resultado no se obtenía a partir de sus postulados y, por tanto, debía ser rechazado.

la lógica en el marco de un cálculo. Este proyecto se esboza en los *Principles of Mathematics* de Russell de 1903 y se completa entre 1903 y 1913 con la aparición de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, en donde se formula una teoría que soslaya las paradojas, pero a un precio muy elevado de complejidad técnica. Otros representantes insignes de este proyecto son Dedekind, Frege y Peano, aunque reducidos más bien al ámbito de la Aritmética.

- El proyecto *formalista* que propone una solución definitiva a todos los problemas de fundamentación, mediante una axiomatización que impida la existencia de contradicciones. Entre sus representantes más significativos destacan Hilbert, Zermelo, P. Bernays y von Neumann.

- El proyecto *intuicionista* que rechaza la Lógica clásica (el principio del tercio excluso para conjuntos infinitos) y el infinito actual, postulando una nueva Lógica y una nueva Matemática. Son representantes cualificados de este proyecto Kronecker, Poincaré, Brouwer, Lebesgue y Borel.

Las controversias originadas por el axioma de elección se debían, en parte, a las diferentes tomas de postura ante el significado matemático del término “existencia". Mientras para logicistas y formalistas era lícito la utilización de un axioma de tipo existencial siempre y cuando no diera lugar a contradicciones, para los intuicionistas, la existencia de un conjunto sólo podía garantizarse, bien si cada uno de sus elementos pueden ser designados explícitamente o, en su defecto, si se dispone de una “ley", “procedimiento.º “método"que permita “construirlos".

6. Axiomatización de la Teoría de Conjuntos.

Tras la reacción suscitada por la publicación de su trabajo de 1904, Zermelo se centra en la tarea de fundamentar la Teoría de Conjuntos y opta por la vía axiomática con el fin de eliminar las paradojas y salvar lo más posible del gran edificio creado por Cantor. En palabras del propio Zermelo:

> *“A partir de la Teoría de Conjuntos hay que buscar los principios que permitan fundamentar esta disciplina; por ello, por una parte hay que restringir estos principios para evitar contradicciones y, por otra, hay que considerarlos lo suficientemente amplio con el fin de conservar lo más valioso de la Teoría.”*

En 1908 Zermelo proporciona la primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos[20] (como aseguraba en su trabajo: *toda la Teoría creada por Cantor y Dedekind se reduce a unas pocas definiciones y a siete principios o axiomas*[21])

[20]“Untersuchungen ber die Grundlagen der Mengenlhere I", Math. Ann., **65** (1908), 261–281.

[21]El método axiomático–deductivo fue utilizado por primera vez por los griegos en el siglo V a.C. como

Ese mismo año y en el mismo número de la revista[22], Zermelo presentó una nueva prueba del teorema del buen orden en la que clarificó el concepto de clase, y aprovechó la ocasión para poner de manifiesto, con ejemplos concretos, que muchos matemáticos que habían criticado con dureza el axioma de elección, habían hecho uso del mismo, quizás al considerar intuitivamente evidente el proceso de selección que proporciona una función de elección sobre un conjunto arbitrario. Además le envió un recado a Peano indicándole que *la falta de prueba no equivale a la falta de validez*.

En la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo, los conceptos de conjunto y pertenencia eran elementos primitivos o indefinibles en la teoría. Bajo esta perspectiva, todos los objetos de la teoría son conjuntos y, por tanto, dados x e y, la cuestión acerca de si la relación $x \in y$ es verdadera o no, sólo tiene sentido plantearla en el caso en que x e y sean conjuntos.

En dicho sistema axiomático se trataba de construir conjuntos a partir de otros más simples, tales como el conjunto vacío o el conjunto de los números naturales, a través de unas operaciones bien formadas, de tal manera que se evitara la formación de colecciones “demasiado grandes"que pudieran dar lugar a paradojas.

En 1922, Fraenkel advierte que hay algunos resultados interesantes de la teoría cantoriana que no se obtienen a partir de la axiomática de Zermelo (por ejemplo, la existencia de conjuntos tales como $\{\omega + n : \ n \in \omega\}$). Como alternativa para resolver esta dificultad, Fraenkel formula con más precisión el esquema de axiomas de separación de Zermelo y propone añadir un nuevo esquema de axiomas (el de reemplazamiento).

Ahora bien, tanto Zermelo como Fraenkel habían expresado los axiomas en lenguaje natural, en el lenguaje “usual de los matemáticos", utilizando términos como el de “propiedad definida", que da un margen de ambigedad poco deseable a esos axiomas. Ante esa tesitura, T. Skolem propone en 1922[23] el uso de un lenguaje de primer orden como marco de referencia para describir la axiomática de Zermelo–Fraenkel y para conseguir una mayor precisión. En ese contexto, una “propiedad definida"se identifica con una fórmula de un lenguaje de primer orden (el lenguaje de la Teoría de Conjuntos).

Si tenemos presente que a Skolem se le atribuye también la paternidad del esquema de axiomas de reemplazamiento, así como el axioma de regularidad (introducido explícitamente por von Neumann en 1925), no podemos dejar de reconocer lo injusta que, a veces, es la historia: la recién nacida teoría axiomática de conjuntos es bautizada con el nombre de Zermelo–Fraenkel, ignorando injustamente, en la propia denominación, la

salida a la primera gran crisis de fundamentos. Recordemos, asímismo, que Peano y Dedekind habían proporcionado axiomatizaciones de la Aritmética y Hilbert, en 1899, proporcionó una axiomatización de la Geometría Euclídea (“Grundlagen der Geometrie").

[22]“Neuer Beweis fr die Möglichkeit einer Wohlordnung", Math. Ann., **65** (1908), 107–128.

[23]“Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begrndung der Mengenlehre", Skand. Mat. Kongr., **5** (1922), 217–232.

aportación de Skolem.

7. La axiomatización von Neumann–Bernays–Gödel.

Cantor había dado una definición de conjunto en 1895 (*se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien definidos y diferenciados de nuestra intuición o de nuestro pensamiento*) en un intento de precisar la idea de que toda propiedad determina de manera unívoca un conjunto.

En su sistema axiomático, Zermelo consideró como conceptos primitivos los de conjunto y pertenencia. Así eludió la necesidad de definir lo que era un conjunto, evitando las situaciones paradójicas a las que habían conducido la definición de Cantor. Según Zermelo, se llegó a muchas de estas situaciones debido a que la teoría cantoriana permitía considerar conjuntos demasiado grandes (idea de la limitación del tamaño).

En 1925, von Neumann observó que muchas de las paradojas aparecidas se debían más bien al hecho de admitir la posibilidad de considerar conjuntos demasiado grandes como *elementos* de otros conjuntos. Con estas ideas desarrolló una teoría axiomática de conjuntos[24] en la que admitía como objetos cualquier colección por grande que ésta fuese. Distinguió entre esos objetos, los que podían ser elementos de otros objetos (los conjuntos), de aquellos que no lo podían ser (las clases). De esta forma, von Neumann retomaba las ideas de Cantor de 1899 cuando proponía diferenciar las multiplicidades inconsistentes de las consistentes.

No obstante, la materialización práctica de la axiomática de von Neumann fue sorprendentemente engorrosa, quizás por haber usado como concepto primitivo el de función en lugar del de conjunto o clase.

Entre 1937 y 1954[25] P. Bernays desarrolló el sistema de von Neumann con una terminología parecida a la de la teoría de Zermelo–Fraenkel–Skolem. Así, Bernays distingue entre clases y conjuntos (una clase nunca puede ser un conjunto), considerando dos tipos de clases: las *normales* (a cada una de las cuales le “correspondeün conjunto) y las *últimas* (o no normales).

En 1940, Gödel[26] simplificó la exposición del sistema axiomático de von Neumann y Bernays, al identificar cada clase normal con el conjunto que “le corresponde". Así surgió la teoría axiomática de conjuntos von Neumann–Bernays–Gödel (**NBG**)[27].

---

[24] “Eine Axiomatisierung der Mengenlehre". J.f. Math. **154** (1925), 219–240; corrections, ibid. **155** (1926), 128.

[25] “A system of axiomatic set theory, I, II, III, IV, V, VI, VII", Journal of Symbolic Logic, **2** (1937), 65–67; **6** (1941), 1–17; **7** (1942), 65–89 y 133–145; **8** (1943), 89–106; **13** (1948), 65–79; **19** (1954), 81–96.

[26] “The consistency of the axiom of choice and of the continuum–hypothesis with the axioms of set theory", Annals of Math. Studies, Vol 3 (1940), Princeton University Press.

[27] Conviene hacer notar que en la teoría axiomática **NBG**, inicialmente las fórmulas que determinan clases deben tener relativizadas a conjuntos las variables ligadas que en ella aparecen. En 1940, W. Quine eliminó dicha restricción del sistema axiomático.

La aparición de distintos sistemas axiomáticos de la Teoría de Conjuntos motivó un estudio metamatemático de las propiedades de los mismos, así como de algunas relaciones interesantes entre ellos.

Los sistemas axiomáticos **ZF** y **NBG** proporcionan teorías de conjuntos básicamente equivalentes: todo axioma de la teoría **ZF** es un teorema en **NBG**. Por tanto, la consistencia de la teoría **NBG** implica la de **ZF**. Más aún, la teoría **NBG** es una extensión conservativa de **ZF**; es decir, toda fórmula cerrada de **ZF** que sea un teorema en **NBG** lo es en **ZF**. En consecuencia, la consistencia de la teoría **ZF** implica la consistencia de **NBG**.

No obstante, conviene destacar algunas diferencias cualitativas entre ambas teorías: mientras **NBG** es finitamente axiomatizable (es decir, puede ser descrita de manera “equivalente"mediante un sistema finito de axiomas), la teoría **ZF** no lo es.

8. El axioma de elección y la hipótesis del continuo.

Desde que en 1904 Zermelo enunciara de forma explícita el axioma de elección y lo utilizara en su primera prueba del teorema del buen orden, y desde que Zermelo (1908) y Fraenkel (1922) presentaran su sistema axiomático, quedaban pendiente dos cuestiones que permitieran zanjar, casi definitivamente, las controversias suscitadas en torno a dicho axioma.

Admitiendo que el sistema axiomático de Zermelo–Fraenkel, prescindiendo del axioma de elección, sea consistente,

(1) ¿Es *compatible* el axioma de elección con los restantes axiomas de la teoría? (es decir, al añadir **AC** a dicho sistema axiomático ¿es consistente la teoría resultante?).

(2) ¿Es *independiente* el axioma de elección de los restantes axiomas de la teoría? (es decir, ¿se puede deducir **AC** de los restantes axiomas del sistema?).

Hoy es usual designar por **ZF** al sistema axiomático de Zermelo–Fraenkel prescindiendo del axioma de elección; por $\mathbf{ZF}^-$ al sistema de Zermelo–Fraenkel prescindiendo del axioma de elección y del axioma de regularidad; por **ZFC** al sistema axiomático de Zermelo–Fraenkel (incluyendo, por tanto, el axioma de elección y el de regularidad) y por $\mathbf{ZFC}^-$ al sistema axiomático de Zermelo–Fraenkel incluyendo el axioma de elección y prescindiendo del axioma de regularidad.

Con estas notaciones, las cuestiones planteadas anteriormente se pueden reformular en los siguientes términos:

(1) Si la teoría **ZF** es consistente, ¿se tiene que $\mathbf{ZF} \nvdash \neg\mathbf{AC}$? (*compatibilidad o consistencia relativa* de **AC** con la teoría **ZF**).

(2) Si la teoría **ZF** es consistente, ¿se tiene que $\mathbf{ZF} \nvdash \mathbf{AC}$? (*independencia relativa* de **AC** con la teoría **ZF**).

Recordemos que el problema del continuo (determinar la potencia, $\mathfrak{c}$, del conjunto de los números reales) fue una pesadilla para Cantor, desde que la formulara allá por el año 1878. Sin lugar a dudas, el estudio de dicho problema permitió obtener nuevos e importantes métodos y resultados en la Teoría de Conjuntos.

En su famoso teorema de 1891, Cantor había probado que $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. Pues bien, Cantor estudió diversos subconjuntos de $\mathbb{R}$ con la esperanza de encontrar alguno no numerable y de potencia menor que la del continuo (lo cual sólo permitiría asegurar que $\mathfrak{c} > \aleph_1$). Sus intentos fueron baldíos, todos los subconjuntos no numerables de $\mathbb{R}$ que estudió (perfectos, cerrados, etc.) tenían la potencia del continuo. Ello le llevó a conjeturar que $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (*hipótesis del continuo*, **HC**). Más aún, hacia 1883 conjeturó implícitamente que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$

La *hipótesis generalizada del continuo* (**HGC**) es la siguiente conjetura: *Sean a un conjunto infinito y b un conjunto cuya potencia está comprendida entre las potencias de a y de* $\mathbf{P}(a)$*. Entonces, o bien b es equipotente al conjunto a o bien es equipotente a* $\mathbf{P}(a)$ *(es decir, para cada cardinal infinito,* κ*, no existe un cardinal* λ *tal que* $\kappa < \lambda < 2^{\kappa}$*).*

En la teoría **ZFC** resulta que la **HGC** es equivalente a esta proposición: $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$ (que es conocida por el nombre de *hipótesis de los álefs*, **HA**, y fue formulada por F. Hausdorff en 1908).

A. Tarski y A. Lindenbaum conjeturan en 1926 que en la teoría **ZFC**$^-$ la **HGC** implica el **AC**. Esta conjetura sería demostrada y publicada por W. Sierpínski en 1947, de quien hay que resaltar la importante labor realizada explicitando el uso del **AC** en distintas ramas de las Matemáticas, incluidas la propia Teoría de Conjuntos.

En 1938, Gödel[28] anunció que había probado la *consistencia relativa* del **AC** y de la **HGC** con la teoría **ZF** (en 1939 publicó una demostración abreviada de ese resultado y en 1940 presentó una prueba detallada en un curso que impartió en Princeton). Por tanto, si la teoría **ZF** es consistente, entonces sigue siéndolo si le añadimos el axioma de elección y/o la hipótesis generalizada del continuo.

En 1963, P. Cohen[29] probó que si **ZF** es consistente, entonces en esa teoría el **AC** no implica la **HC**, luego tampoco implica la **HGC** y demostró la *independencia relativa* del **AC** y de la **HGC** con los restantes axiomas de la teoría. Por tanto, si la teoría **ZF** es consistente, entonces sigue siéndolo si le añadimos la negación del axioma de elección y/o la negación de la hipótesis generalizada del continuo.

Por tanto, admitiendo la consistencia de la teoría **ZF**, resulta que ésta no puede demostrar ni refutar el **AC** ni la **HC**.

[28] “The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum–hypothesis". Acad. U.S.A. **24** (1938), 556–557.

[29] “The independence of the continuum hypothesis". Acad. U.S.A. I **50** (1963), 1143–1148; II **51** (1963), 105–110.

En consecuencia, si la teoría **ZFC** es consistente, entonces no puede demostrar ni refutar la **HC** (se dice que la **HC** es *indecidible* en dicha teoría). Lo que no deja de ser una solución poco satisfactoria del problema del continuo y deja en el aire esta nueva cuestión

> *Admitiendo que* **ZFC** *sea consistente, ¿existe una extensión consistente de dicha teoría en la que sea decidible la* **HC**?

9. Los teoremas de incompletitud de Gödel.

En 1888 Hilbert resolvió un problema planteado por Gordan en 1868, demostrando por reducción al absurdo que todo ideal de un cierto anillo posee una base. La prueba no proporcionaba, ni en los casos más simples, una base del anillo. Ello provocó el rechazo de algunos matemáticos al cuestionar si la prueba dada por Hilbert resolvía o no el problema de Gordan.

La cuestión quedaba planteada en los siguientes términos: ¿qué significa probar un aserto de carácter existencial? Ya hemos indicado en el apartado 5 las diferentes tomas de posturas ante esta cuestión.

En 1924 Hilbert enuncia su famoso *Programa* en el que propone:

(1) Formalizar completamente las Matemáticas, y

(2) Demostrar la consistencia del sistema diseñado, por métodos finitistas (métodos que pueden ser descritos a través de ecuaciones numéricas y, por tanto, son "constructivos").

Para Hilbert es posible conjugar la matemática finitista con la transfinita de Cantor, vía el concepto de infinito actual en el sentido kantiano.

El programa de Hilbert se derrumbó cuando, en 1931, Gödel[30] publicó los teoremas de incompletitud. Así se desvaneció la antiquísima aspiración del hombre de presentar todo el conocimiento humano y, en particular, las Matemáticas, como un sistema axiomático–deductivo.

Los teoremas de incompletitud de Gödel marcaron las limitaciones inherentes al método axiomático:

> Primer teorema de incompletitud: *Toda teoría consistente que contenga una teoría "elemental"de números es incompleta (es decir, existe una fórmula cerrada que es indecidible en la teoría).*

[30]"ber formal unentscheidbare Stze der Prinicipia Mathematica und verwandter System I", Monatsh. fr Meth. und Phys. **38**, 173–198.

Segundo teorema de incompletitud: *Si una teoría consistente contiene una teoría "elemental" de números, entonces no puede probar su propia consistencia.*

Además de herir de muerte al Programa de Hilbert, de los resultados de Gödel se deduce que la teoría **ZFC**, así como cualquier extensión "razonable"de la misma, es incompleta.

Por tanto, aunque se encuentre una teoría consistente, **T**, que extienda a **ZFC** y decida la **HC** (lo que nos daría una respuesta más "tranquilizadora.ªcerca del problema del continuo), planearía en el firmamento de **T** el riesgo potencial de que el genial Cantor de turno encuentre su peculiar "problema del continuo para **T**"que sea indecidible en esa teoría. Lo que, con independencia de cuándo y cómo se halle una buena solución para el nuevo problema planteado, en ese largo caminar se enriquecerían las Matemáticas, en particular, y se engrandecería un poco más el espíritu humano.

"El descubrimiento de los irracionales, lejos de lamentarlo por haber revelado una contradicción en las matemáticas pitagóricas, lo consideramos hoy como una de las grandes victorias del espíritu humano ..."

J. Dieudonné

Capítulo 1

Conjuntos y clases

1.1. El lenguaje de la Teoría de Conjuntos. Clases.

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos que verifican una "propiedad". En esta sección se trata de precisar el concepto de "propiedadz describir el marco en el que se va a desarrollar la Teoría de Conjuntos de Zermelo–Fraenkel.

Definición 1.1.1. Un *lenguaje de primer orden* consta de

1. Un conjunto de símbolos lógicos (comunes a todos los lenguajes de primer orden):
   - Variables individuales: $x, y, z, \ldots$ (con o sin subíndices).
   - Conectivas lógicas (básicas): $\neg$, $\vee$, $\exists$.
   - Predicado binario de igualdad: $=$.
2. Un conjunto de símbolos no lógicos (específicos de cada lenguaje).

El *lenguaje* de la Teoría de Conjuntos (**LTC**) es un lenguaje de primer orden que posee un único símbolo no lógico: $\in$, el predicado binario de pertenencia.

Definición 1.1.2. Una *expresión* del **LTC** es una sucesión finita de símbolos de dicho lenguaje.

Definición 1.1.3. Las *fórmulas* del lenguaje de la teoría de conjuntos se definen recursivamente como sigue:

1. Si x, y son variables, entonces $x = y$ y $x \in y$ son fórmulas.
2. Si φ y ψ son fórmulas, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \vee \psi$ son fórmulas.
3. Si x es una variable y φ una fórmula, entonces $(\exists x)\varphi$ es una fórmula.

El concepto intuitivo de “propiedad"se corresponde con el de “fórmula.$^{\text{en}}$ el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

A partir de las conectivas lógicas básicas $(\neg, \vee, \exists)$ podemos definir nuevas conectivas como sigue: si φ, ψ son fórmulas y x es una variable, entonces

1. $\varphi \wedge \psi$ es la fórmula $\neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$.
2. $\varphi \to \psi$ es la fórmula $(\neg\varphi) \vee \psi$.
3. $\varphi \leftrightarrow \psi$ es la fórmula $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.
4. $(\forall x)\varphi$ es la fórmula $\neg((\exists x)(\neg\varphi))$.

Usaremos las letras φ, ψ, θ como metavariables sobre fórmulas.

Escribiremos $x \neq y$, $x \notin y$ como abreviaturas de $\neg(x = y)$ y $\neg(x \in y)$, respectivamente.

A veces relajaremos la notación prescindiendo de algunos paréntesis en los cuantificadores existencial, $\exists$, y universal, $\forall$. Así, escribiremos $\exists x \forall y\ \varphi(x, y)$ en lugar de $(\exists x)(\forall y)\ \varphi(x, y)$.

Definición 1.1.4. Una *estancia* de una variable x en una fórmula φ es una aparición u ocurrencia de x en φ. Diremos que una estancia de una variable x en una fórmula φ es *ligada* si dicha estancia aparece en una parte de φ de la forma $\exists x \psi$. Caso contrario, la estancia se dice *libre*. Una variable se dice que es ligada (resp. libre) en una fórmula si existe, al menos, una estancia ligada (resp. libre) de dicha variable en la fórmula.

Definición 1.1.5. Diremos que una fórmula es *cerrada* si carece de variables libres y se dice *abierta* si carece de cuantificadores.

Representaremos por $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula cuyas variables libres son $x_1, \ldots, x_n$.

Definición 1.1.6. Una *teoría*, **T**, de primer orden, sobre un lenguaje de primer orden, **L**, consta de:

1. Unos axiomas lógicos: identidad, igualdad, proposicional y de sustitución (comunes a todas las teorías de primer orden sobre **L**).
2. Unos axiomas no lógicos (específicos de la teoría).

3. Unas reglas de inferencia (modus ponens y regla de introducción del cuantificador $\exists$).

Definición 1.1.7. Sea **T** una teoría de primer orden sobre un lenguaje **L**. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ fórmulas de **L**. Diremos que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una *prueba* de φ en **T** si $\varphi_n = \varphi$ y para cada i ($1 \leqslant i \leqslant n$) se tiene que: o bien φ_i es un axioma de **T**; o bien φ_i se obtiene de fórmulas anteriores mediante una regla de inferencia.

Definición 1.1.8. Diremos que φ es un *teorema* en una teoría **T** si existe una prueba de φ en **T**.

Nuestro objetivo es introducir una teoría de primer orden (la Teoría de Conjuntos) sobre un lenguaje de primer orden (el lenguaje de la Teoría de Conjuntos). Por cuestiones metodológicas iremos introduciendo de forma gradual, los axiomas no lógicos (correspondientes a la axiomática de Zermelo–Fraenkel), haremos las consideraciones pertinentes y estableceremos los primeros resultados (teoremas de la **TC**) que se deducen de los mismos.

1.2. Primeros axiomas.

Axioma del conjunto vacío: $(\exists y)(\forall x)(x \notin y)$.
Es decir, *existe un conjunto que no tiene elementos*.

Axioma de extensionalidad: $(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$.
Es decir, *si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales*.

Escribiremos $(\exists! x)\varphi(x)$ (que leeremos "existe un único x tal que $\varphi(x)$"), en lugar de $(\exists x)(\varphi(x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y)$.

Con frecuencia, escribiremos $\forall x \in a\ (\varphi(x))$ en lugar de $\forall x\ (x \in a \rightarrow \varphi(x))$, y $\exists x \in a\ (\varphi(x))$ en lugar de $\exists x\ (x \in a \wedge \varphi(x))$.

Proposición 1.2.1. $(\exists! y)(\forall x)(x \notin y)$.

Definición 1.2.2. El único conjunto cuya existencia garantiza el lema anterior, se denomina *conjunto vacío*, y lo notaremos por $\emptyset$.

Sea $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ una fórmula del **LTC**. Sean $b_1, \ldots, b_n$ conjuntos. Entonces representaremos por $\{x : \varphi(x, b_1, \ldots, b_n)\}$ para expresar la idea intuitiva de la "colección"de todos los conjuntos x que satisfacen la propiedad $\varphi(x, \vec{b})$ (y leeremos "la *clase* de los x tales que $\varphi(x, \vec{b})$"). Usaremos letras latinas mayúsculas para representar clases.

- Todo conjunto a puede ser considerado como una clase (la asociada a la fórmula $\varphi(x, a) \equiv x \in a$).
- Existen clases que no son conjuntos (que se denominan *clases propias*); por ejemplo, la clase $\mathcal{R} = \{x : \ x \notin x\}$.

Si A es la clase $\{x : \varphi(x)\}$, entonces la expresión "A es un conjuntorepresenta a la siguiente fórmula del **LTC**: $(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$.

Téngase presente que los objetos de nuestra Teoría van a ser los conjuntos (y sólo los conjuntos). Por tanto, las clases propias no son objetos "propios.º "genuinos"de la Teoría sino un modo de abreviar la notación ("objetos fantasmas").

Notación. Sean A y B las clases $\{x : \varphi(x)\}$ y $\{x : \psi(x)\}$.

(1) $x \in A$ representará $\varphi(x)$ ($x \notin A$ representará $\neg\varphi(x)$).

(2) $A = B$ representará $\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$ ($A \neq B$ representará $\neg(A = B)$).

(3) $A \subseteq B$ representará $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (A es *subclase* de B).

(4) $A \subsetneqq B$ representará $A \neq B \wedge A \subseteq B$.

(5) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ y $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

(6) $A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

(7) $\bigcup A = \{x : (\exists y)(y \in A \wedge x \in y)\}$.

(8) $\bigcap A = \{x : (\forall y)(y \in A \rightarrow x \in y)\}$.

Esquema de axiomas de separación: Sea $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ una fórmula en la que u no ocurre libre. Entonces $(\forall \vec{y})(\forall z)(\exists u)(\forall x)(x \in u \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi(x, \vec{y}))$.
Es decir, *dados los conjuntos $b_1, \ldots, b_n$, para cada conjunto z existe un conjunto u cuyos elementos son exactamente los $x \in z$ que satisfacen $\varphi(x, \vec{b})$.*

Obsérvese que se ha introducido un axioma para cada fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ del lenguaje **LTC**. De ahí que hablemos de un esquema de axiomas.

Nota: Si en el esquema de axioma de separación se permite que la variable u ocurra libre en $\varphi(x)$, entonces $(\forall x)(x = \emptyset)$.

Teorema 1.2.3. *El axioma del conjunto vacío es consecuencia del esquema de axiomas separación.*

Proposición 1.2.4. *Sean $\varphi(x, \vec{y})$ una fórmula, $b_1, \ldots, b_n$ conjuntos y $A = \{x : \varphi(x, \vec{b})\}$. Supongamos que $\exists y \forall x (\varphi(x, \vec{b}) \to x \in y)$. Entonces, la clase A es un conjunto (toda subclase de un conjunto, es un conjunto).*

Con frecuencia, escribiremos $\{x \in z : \varphi(x)\}$ en lugar de $\{x : x \in z \wedge \varphi(x)\}$. La proposición anterior nos garantiza que si z es un conjunto, entonces la clase $\{x \in z : \varphi(x)\}$ es un conjunto.

Definición 1.2.5. La *clase universal* es $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$.

Teorema 1.2.6. *La clase universal, $\mathbf{V}$, es propia.*

Proposición 1.2.7. *Sean a y b conjuntos. Entonces, las siguientes clases son conjuntos: $\{x : x \in a \wedge x \in b\}$ y $\{x : x \in a \wedge x \notin b\}$.*

Definición 1.2.8. Sean a y b conjuntos. El conjunto *intersección* de a y b, que notaremos $a \cap b$, es la clase $\{x : x \in a \wedge x \in b\}$.

Definición 1.2.9. Dos conjuntos a y b son *disjuntos* si $a \cap b = \emptyset$.

Definición 1.2.10. Sean a y b conjuntos. El conjunto *diferencia* de a y b, que notaremos $a - b$, es la clase $\{x : x \in a \wedge x \notin b\}$.

Proposición 1.2.11. *Sea a un conjunto no vacío. Entonces la clase*

$$\{z : (\forall u)(u \in a \to z \in u)\}$$

es un conjunto (que notaremos $\bigcap a$ y denominaremos el conjunto intersección de los elementos de a).

Proposición 1.2.12. *Si A es una clase no vacía, entonces la clase $\bigcap A$ es un conjunto.*

Proposición 1.2.13. *Se verifica que $\emptyset = \{x : x \neq x\}$ e $\bigcap \emptyset = V$.*

Nota: Con los axiomas introducidos hasta ahora, únicamente podemos garantizar la existencia del conjunto vacío.

Axioma del par: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$.
Es decir, *si x e y son conjuntos, entonces la clase $\{u : u = x \vee u = y\}$ es un conjunto.*

Definición 1.2.14. Sean a y b conjuntos. Entonces el *par no ordenado* de componentes a y b, que notaremos $\{a, b\}$, es la clase $\{x : x = a \vee x = b\}$.

El axioma del par establece que dados dos conjuntos a y b, la clase $\{a, b\}$ es un conjunto.

Definición 1.2.15. Sea a un conjunto. Entonces el *conjunto unitario* de componente a, que notaremos $\{a\}$, es la clase $\{a, a\}$.

Proposición 1.2.16. *Sean a y b conjuntos. Entonces* $\bigcap\{a, b\} = a \cap b$*. En particular,* $\bigcap\{a\} = a$*.*

Nota: Con los axiomas anteriores se puede demostrar la existencia de infinitos conjuntos; ahora bien, todos ellos tienen, a lo sumo, dos elementos. $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$. El siguiente axioma nos va a permitir tener en nuestra teoría conjuntos que poseen más de dos elementos.

Axioma de la unión: $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(u \in x \wedge z \in u))$.
Es decir, *para cada conjunto x, la clase $\{z : (\exists u)(z \in u \wedge u \in x)\}$ es un conjunto.*

Definición 1.2.17. Sea a un conjunto. Entonces la *unión de los elementos* de a, que notaremos $\bigcup a$, es la clase $\{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \in y)\}$.

Definición 1.2.18. Sean a y b conjuntos. Entonces la *unión* de los conjuntos a y b, que notaremos $a \cup b$, es la clase $\bigcup\{a, b\}$.

El axioma de la unión establece que para cada conjunto a, la clase $\bigcup a$ es un conjunto.

Proposición 1.2.19. *Sean a y b conjuntos. Entonces,*

$$\forall x(x \in a \cup b \leftrightarrow x \in a \vee x \in b) \text{ y } \bigcup\{a\} = a$$

Nota: Con los axiomas introducidos hasta ahora, podemos garantizar la existencia de conjuntos que tienen $0, 1, 2, \ldots$ elementos. Basta considerar $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $\ldots$

Definición 1.2.20. Sean a y b conjuntos. Diremos que a es un *subconjunto* de b, y notaremos $a \subseteq b$, si $(\forall x)(x \in a \rightarrow x \in b)$. Diremos que a es un *subconjunto propio* de b, y notaremos $a \subsetneq b$, si $a \subseteq b \wedge a \neq b$.

Axioma de las partes: $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$.
Es decir, *para todo conjunto x, la clase $\{z : z \subseteq x\}$ es un conjunto.*

Definición 1.2.21. Si a es un conjunto, entonces el *conjunto partes* de a, que notaremos $\mathbf{P}(a)$, es la clase $\{z : z \subseteq x\}$.

El axioma de las partes nos permite asegurar que dado un conjunto a, la clase $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto.

Obsérvese que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto a; por tanto, es elemento del conjunto $\mathbf{P}(a)$. En consecuencia, para cada conjunto a se tiene que $\mathbf{P}(a) \neq \emptyset$.

1.3. Problemas resueltos

Ejercicio 1. *Se definen* $0 = \emptyset$, $1 = 0 \cup \{0\}$, $2 = 1 \cup \{1\}$, $3 = 2 \cup \{2\}$.
(1) *Probar que* $0, 1, 2, 3$ *son conjuntos.*
(2) *Sea* $x = \{\{\{1,2\},\{1\}\},\{2\}\}$. *Calcular:*

$$\bigcup x, \quad \bigcup\bigcup x, \quad \bigcap x, \quad \bigcap\bigcap x, \quad \bigcap\bigcup x, \quad \bigcup\bigcap x$$

(3) *Sea* $x = \{1,2\}$. *Calcular:*

$$\bigcup\bigcup x, \quad \bigcap\bigcap x, \quad (\bigcap\bigcup x) \cup (\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x), \quad \bigcup(\bigcup x - \bigcap x)$$

(4) $\bigcap\bigcup(\mathbf{P}(2) - 2)$.

(1) Por el axioma del conjunto vacío, $0 = \emptyset$ es un conjunto. Del axioma del par y de lo anterior, resulta que $\{0\}$ es un conjunto. Del axioma de la unión y de lo anterior, se deduce que $1 = 0 \cup \{0\}$ es un conjunto.

Análogamente se prueba que 2 y 3 son conjuntos.

(2) Se verifica que:

$$\begin{array}{lcl}
\bigcup x & = & \{\{1,2\},\{1\}\} \cup \{2\} = \{\{1,2\},\{1\},2\} \\
\bigcup\bigcup x & = & \{1,2\} \cup \{1\} \cup 2 = \{0,1,2\} = 3 \\
\bigcap x & = & \{\{1,2\},\{1\}\} \cap \{2\} = \emptyset \\
\bigcap\bigcap x & = & \bigcap\emptyset = \mathbf{V} \\
\bigcap\bigcup x & = & \{1,2\} \cap \{1\} \cap 2 = \{1\} \\
\bigcup\bigcap x & = & \bigcup\emptyset = \emptyset
\end{array}$$

(3) Se tiene que:

$$\begin{array}{lcl}
\bigcup\bigcup x & = & \bigcup(1 \cup 2) = \bigcup(\{0,1\}) = 1 \\
\bigcap\bigcap x & = & \bigcap(1 \cap 2) = \bigcap(\{0\}) = 0 \\
\bigcap\bigcup x & = & \bigcap(1 \cup 2) = \bigcap 2 = 0 \cap 1 = 0 \\
\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x & = & 1 - \bigcup(1 \cap 2) = 1 - 0 = 1 \\
(\bigcap\bigcup x) \cup (\bigcup\bigcup x - \bigcup\bigcap x) & = & 0 \cup 1 = 1 \\
\bigcup(\bigcup x - \bigcap x) & = & \bigcup(2 - 1) = \bigcup(\{1\}) = 1
\end{array}$$

(4) Se verifica que

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{P}(2) & = & \mathbf{P}(\{0,1\}) = \{0,\{0\},\{1\},\{0,1\}\} \\
\mathbf{P}(2) - 2 & = & \{\{1\},\{0,1\}\} \\
\bigcup(\mathbf{P}(2) - 2) & = & \{1\} \cup \{0,1\} = \{0,1\} = 2 \\
\bigcap\bigcup(\mathbf{P}(2) - 2) & = & \bigcap\{0,1\} = 0
\end{array}$$

Ejercicio 2. *Probar que para cada conjunto x, existe algún y tal que $y \notin x$.*

Caso contrario, existiría un conjunto a tal que $\forall y\ (y \in a)$. De donde resultaría que $a = \mathbf{V}$. Lo que contradice que la clase universal, $\mathbf{V}$, sea propia.

Ejercicio 3. *Demostrar que:*
(1) $\neg(\exists y)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow \neg(\exists z)(x \in z \land z \in x))$.
(2) *La clase* $A = \{x : \neg(\exists z)(x \in z \land z \in x)\}$ *es propia.*

(1) Supongamos lo contrario. Sea a un conjunto tal que
$$\forall x(x \in a \leftrightarrow \neg\exists z(x \in z \land z \in x)) \qquad (\star)$$
Por tanto, se verifica que $\forall x(x \notin a \leftrightarrow \exists z(x \in z \land z \in x)) \qquad (\star\star)$.

Aserto: $a \notin a$.

Caso contrario, $a \in a$. De $(\star)$ resultaría que
$$\neg\exists z(a \in z \land z \in a)$$
Es decir, $\forall z(a \notin z \lor z \notin a)$. En particular, para $z = a$ deduciríamos que $a \notin a \lor a \notin a$. Lo que es una contradicción.

Teniendo presente que $a \notin a$, de $(\star\star)$ resulta que $\exists z(a \in z \land z \in a)$. Sea b un conjunto tal que $a \in b \land b \in a \quad (\star\star\star)$. Como $b \in a$, de $(\star)$ deducimos que $\forall z(b \notin z \lor z \notin b)$. En particular, para $z = a$ resultaría que $b \notin a \lor a \notin b$. Lo que contradice $(\star\star\star)$.

(2) Supongamos que la clase $\{x : \neg(\exists z)(x \in z \land z \in x)\}$ fuese un conjunto. Entonces $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \neg(\exists z)(x \in z \land z \in x))$. Lo que contradice el apartado (1).

Ejercicio 4. *Para cada fórmula, $\varphi(x)$, del* **LTC** *consideramos la clase*
$$A_\varphi = \{x : \ \forall y(y \in x \to \varphi(y))\}$$
Se pide:
(1) *¿Existe una fórmula $\varphi(x)$ tal que $A_\varphi = \{x : \ \varphi(x)\}$?*
(2) *Sea $\varphi(x)$ una fórmula tal que $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi(x))$. Determinar A_φ.*

(1) Se verifica que $x = x \leftrightarrow \forall y(y \in x \to y = y)$. Consideremos la fórmula $\varphi(x) \equiv x = x$. Entonces

$x \in A_\varphi \leftrightarrow \forall y(y \in x \to \varphi(y)) \leftrightarrow \forall y(y \in x \to y = y) \leftrightarrow x = x \leftrightarrow \varphi(x)$. Luego, $A_\varphi = \{x : \ \varphi(x)\} = \{x : \ x = x\} = \mathbf{V}$.

(2) Sea $\varphi(x)$ una fórmula y a un conjunto tal que $\forall x(x \in a \leftrightarrow \varphi(x))$ $(\star)$. Entonces

$$x \in A_\varphi \leftrightarrow \forall y(y \in x \to \varphi(y)) \overset{(\star)}{\leftrightarrow} \forall y(y \in x \to y \in a) \leftrightarrow x \subseteq a$$

Luego, $A_\varphi = \mathbf{P}(a)$.

Ejercicio 5. *Para cada fórmula, $\varphi(x)$, del* **LTC** *consideramos la clase*

$$S_\varphi = \{x : \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(z)) \to \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))\}$$

Determinar S_φ para las fórmulas $\varphi(x)$ que satisfacen las propiedades que se indican a continuación:

(1) $\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$.

(2) $\neg \exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$.

(1) Sea a un conjunto tal que $\forall y(y \in a \leftrightarrow \varphi(y))$. Entonces

$$\begin{array}{rcll} x \in S_\varphi & \leftrightarrow & [\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(z)) \to \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))] & \\ & \leftrightarrow & \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y)) & [\![\text{ hip. (1) }]\!] \\ & \leftrightarrow & \forall y(y \in x \leftrightarrow y \in a) & [\![\text{ ax. extensionalidad }]\!] \\ & \leftrightarrow & x = a & \end{array}$$

Luego, $S_\varphi = \{a\}$.

(2) Teniendo presente que $\neg \exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))$ resulta que

$\forall x\, [(\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(z)) \to \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi(y))) \leftrightarrow x = x]$.

Es decir, $x \in S_\varphi \leftrightarrow x = x$. Luego, $S_\varphi = \mathbf{V}$.

Ejercicio 6. *Sean a y b conjuntos. Probar que:*

(1) $b \in a \to \bigcap a \subseteq b \subseteq \bigcup a$.

(2) $a \subseteq b \to \bigcup a \subseteq \bigcup b$.

(3) $(\forall x(x \in a \to x \subseteq b)) \to \bigcup a \subseteq b$.

(1) Supongamos que $b \in a$. Entonces

- $\bigcap a \subseteq b$: Sea $x \in \bigcap a$. Por definición de $\bigcap a$, $\forall y(y \in a \to x \in y)$. Teniendo presente que $b \in a$, resulta que $x \in b$.
- $b \subseteq \bigcup a$: Sea $x \in b$. Puesto que $b \in a$, se tiene que $x \in b \wedge b \in a$. Luego, $x \in \bigcup a$.

(2) Supongamos que $a \subseteq b$. Entonces

$\forall x(x \in \bigcup a \to \exists y(y \in a \wedge x \in y) \to \exists y(y \in b \wedge x \in y) \to x \in \bigcup b)$.

(3) Supongamos que $\forall x(x \in a \to x \subseteq b)$. Entonces

$\forall x(x \in \bigcup a \to \exists y(y \in a \wedge x \in y) \to \exists y(y \subseteq b \wedge x \in y) \to x \in b)$.

Ejercicio 7. *Sean a y b conjuntos. Probar que:*

(1) $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$.

(2) *Si a y b son no vacíos, entonces $\bigcap(a \cup b) = (\bigcap a) \cap (\bigcap b)$. ¿Qué podemos asegurar si a ó b coinciden con el conjunto vacio?*

(1) Se verifica que

$$\begin{array}{rcl}
\forall x(x \in \bigcup(a \cup b) & \leftrightarrow & \exists y(y \in a \cup b \wedge x \in y) \\
& \leftrightarrow & \exists y((y \in a \vee y \in b) \wedge x \in y) \\
& \leftrightarrow & \exists y((y \in a \wedge x \in y) \vee (y \in b \wedge x \in y)) \\
& \leftrightarrow & (\exists y(y \in a \wedge x \in y)) \vee (\exists y(y \in b \wedge x \in y)) \\
& \leftrightarrow & x \in \bigcup a \vee x \in \bigcup b \\
& \leftrightarrow & x \in (\bigcup a) \cup (\bigcup b))
\end{array}$$

<u>Nota 1:</u> Se tiene que $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributividad de la disyunción respecto de la conjunción. También es válida la distributividad de la conjunción respecto de la disyunción).

<u>Nota 2:</u> Se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
\exists y(p(y) \vee q(y)) & \leftrightarrow & (\exists y(p(y)) \vee (\exists y(q(y)) \\
\exists y(p(y) \wedge q(y)) & \rightarrow & (\exists y(p(y)) \wedge (\exists y(q(y)) \\
(\exists y p(y)) \wedge (\exists y q(y)) & \not\rightarrow & \exists y(p(y) \wedge q(y))
\end{array}$$

(2) Se verifica que

$$\begin{array}{rcl}
\forall x(x \in \bigcap(a \cup b) & \leftrightarrow & \forall y(y \in a \cup b \rightarrow x \in y) \\
& \leftrightarrow & \forall y(y \notin a \cup b \vee x \in y) \\
& \leftrightarrow & \forall y((y \notin a \wedge y \notin b) \vee x \in y) \\
& \leftrightarrow & \forall y((y \notin a \vee x \in y) \wedge (y \notin b \vee x \in y)) \\
& \leftrightarrow & \forall y((y \in a \rightarrow x \in y) \wedge (y \in b \rightarrow x \in y)) \\
& \leftrightarrow & (\forall y(y \in a \rightarrow x \in y)) \wedge (\forall y(y \in b \rightarrow x \in y)) \\
& \leftrightarrow & x \in \bigcap a \wedge x \in \bigcap b \\
& \leftrightarrow & x \in (\bigcap a) \cap (\bigcap b))
\end{array}$$

Si $a = \emptyset$, entonces vale la igualdad ya que

$$\bigcap(a \cup b) = \bigcap b \text{ é } (\bigcap a) \cap (\bigcap b) = \mathbf{V} \cap (\bigcap b) = \bigcap b$$

Lo mismo ocurre en el caso $b = \emptyset$ (De hecho, en la prueba no se ha utilizado que los conjuntos a ó b sean no vacíos).

Nota 1: Se tiene que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ y que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ (Leyes de Morgan).

Nota 2: Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \forall y(p(y) \wedge q(y)) & \leftrightarrow & (\forall y(p(y)) \wedge (\forall y(q(y)) \\ (\forall y p(y)) \vee (\forall y q(y)) & \rightarrow & \forall y(p(y) \vee q(y)) \\ \forall y(p(y) \vee q(y)) & \not\rightarrow & (\forall y(p(y)) \vee (\forall y(q(y)) \end{array}$$

Ejercicio 8. *Sean a, b y c conjuntos tales que $a \cup b = a \cup c$ y $a \cap b = a \cap c$. Demostrar que $b = c$.*

Para probar que dos conjuntos b y c son iguales basta probar, por el axioma de extensionalidad, que tienen los mismos elementos. Es decir, que $\forall x(x \in b \leftrightarrow x \in c)$. O lo que es lo mismo, que $b \subseteq c$ y que $c \subseteq b$.

Veamos que $b \subseteq c$ (análogamente se prueba la otra inclusión).

Sea $x \in b$. Entonces

- O bien $x \in a$, en cuyo caso $x \in a \cap b = a \cap c$ y, por tanto, $x \in c$.
- O bien $x \notin a$, en cuyo caso $x \in c$, ya que al ser $x \in b$ resulta que $x \in a \cup b = a \cup c$.

Ejercicio 9. *Sean a y b conjuntos. Estudiar en qué condiciones es cierta la siguiente igualdad:*

$$a \cup (\bigcup b) = \bigcup \{a \cup x : x \in b\}$$

Indicación: *Distínganse casos según b sea o no vacío y pruébese que se verifica la igualdad si y sólo si $(b = \emptyset \wedge a = \emptyset) \vee (b \neq \emptyset)$.*

Distingamos dos casos:

Caso 1º: Supongamos que $b = \emptyset$.

En este caso

$$\begin{array}{c} a \cup (\bigcup b) = a \cup (\bigcup \emptyset) = a \cup \emptyset = a \\ \bigcup \{a \cup x : \ x \in b\} = \bigcup \{a \cup x : \ x \in \emptyset\} = \bigcup \emptyset = \emptyset \end{array}$$

Por tanto, en este caso se verifica la igualdad si y sólo si $a = \emptyset$.

Caso 2º: Supongamos que $b \neq \emptyset$.

Veamos que en este caso se verifica **siempre** la igualdad.

Sea $c \in b$ y notemos $d = \bigcup \{a \cup x : \ x \in b\}$. Entonces

- $a \cup (\bigcup b) \subseteq d$, ya que si $x \in a \cup (\bigcup b)$, entonces
  - O bien $x \in a$, en cuyo caso $x \in a \cup c \wedge c \in b$ y, por tanto, $x \in d$.
  - O bien $x \in \bigcup b$, en cuyo caso $\exists y (y \in b \wedge x \in a \cup y)$ y, por tanto, $x \in d$.
- $d \subseteq a \cup (\bigcup b)$, ya que si $x \in d$, entonces existe $y \in b$ tal que $x \in a \cup y$. Luego,
  - O bien $x \in a$, en cuyo caso $x \in a \cup (\bigcup b)$.
  - O bien $x \in y$, en cuyo caso $x \in \bigcup b$ y, por tanto, $x \in a \cup (\bigcup b)$

Conclusión: La igualdad propuesta en el enunciado se verifica si y sólo si $(b = \emptyset \wedge a = \emptyset) \vee (b \neq \emptyset)$.

Ejercicio 10. *Sea a un conjunto. Estudiar en qué condiciones las siguientes clases son propias:*
(1) $A = \{x : (\exists y)(y \in a \wedge x \notin y)\}$.
(2) $B = \{x : (\exists y)(\exists z)(y \in a \wedge z \in y \wedge x \notin z)\}$.
Indicación: *En (2) distínganse los siguientes casos: $a = \emptyset$, $a = \{\emptyset\}$ y $(a \neq \emptyset \wedge a \neq \{\emptyset\})$.*

(1) Dado un conjunto arbitrario x se verifica:

$$\begin{aligned} \exists y (y \in a \wedge x \notin y) &\leftrightarrow \neg \forall y (y \notin a \vee x \in y) \\ &\leftrightarrow \neg \forall y (y \in a \to x \in y) \\ &\leftrightarrow x \notin \bigcap a \end{aligned}$$

Por tanto, $A = \mathbf{V} - \bigcap a$. En consecuencia:

- Si $a = \emptyset$, entonces $A = \mathbf{V} - \bigcap \emptyset = \mathbf{V} - \mathbf{V} = \emptyset$. Es decir, la clase A es un conjunto.
- Si $a \neq \emptyset$, entonces la clase $A = \mathbf{V} - \bigcap a$ es propia (ya que de lo contrario resultaría, por el axioma de la unión, que la clase $\mathbf{V} = A \cup (\bigcap a)$ es un conjunto).

(2) Distingamos tres casos:

Caso 1º: Supongamos que $a = \emptyset$.
En este caso, $B = \{x : (\exists y)(\exists z)(y \in \emptyset \wedge z \in y \wedge x \notin z)\} = \emptyset$. Luego, B sería un conjunto.

Caso 2º: Supongamos que $a = \{\emptyset\}$.
En este caso,

$$\begin{aligned} B &= \{x : (\exists y)(\exists z)(y \in \{\emptyset\} \wedge z \in y \wedge x \notin z)\} \\ &= \{x : \exists z (z \in \emptyset \wedge z \in y)\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Luego, B sería un conjunto.

Caso 3º: Supongamos que $a \neq \emptyset$ y $a \neq \{\emptyset\}$.
Sea $b \in a$ tal que $b \neq \emptyset$. Consideremos la clase
$$C = \{x : \exists z(z \in b \land x \notin z)\}$$
Entonces $C \subseteq B$ y, por el apartado (1), la clase C es propia. Por el esquema de axiomas de separación deducimos que la clase B es propia.

Otra forma de probar (2) sería la siguiente:

$B = \{x : \exists z(\exists y(y \in a \land z \in y) \land x \notin z)\} = \{x : \exists z(z \in \bigcup a \land x \notin z)\}$.

Del apartado (1) resulta que B es un conjunto si y sólo si $\bigcup a = \emptyset$. Es decir, si y sólo si $a = \emptyset \lor a = \{\emptyset\}$.

Ejercicio 11. *Sean a y b conjuntos. Probar que:*
(1) $\bigcup \mathbf{P}(a) = a$.
(2) $a \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. *¿Cuándo se verifica la igualdad?*
(3) *Si* $a \in b$, *entonces* $\mathbf{P}(a) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\bigcup b))$.
(4) $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b) \iff a = b$.
(5) *No existe un conjunto x tal que* $\mathbf{P}(x) \subseteq x$.
Indicación: *En (2) pruébese que* $a = \mathbf{P}(\bigcup a) \iff \exists x(a = \mathbf{P}(x))$.

(1) Se tiene que

- $\forall x(x \in \bigcup \mathbf{P}(a) \to \exists y(y \in \mathbf{P}(a) \land x \in y)$
  $\to \exists y(y \subseteq a \land x \in y) \to x \in a)$
- $\forall x(x \in a \to x \in a \land a \in \mathbf{P}(a) \to x \in \bigcup \mathbf{P}(a))$

(2) Para probar que $a \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$ consideremos $x \in a$. Entonces del ejercicio 6, apartado 1, resulta que $x \subseteq \bigcup a$. Luego, $x \in \mathbf{P}(\bigcup a)$.

Veamos que $a = \mathbf{P}(\bigcup a) \leftrightarrow \exists x(a = \mathbf{P}(x))$.

– Supongamos que $a = \mathbf{P}(\bigcup a)$. Entonces considerando $x = \bigcup a$ se tiene que $a = \mathbf{P}(x)$.
– Sea b un conjunto tal que $a = \mathbf{P}(b)$. Entonces

$$\mathbf{P}(\bigcup a) = \mathbf{P}(\bigcup \mathbf{P}(b)) \overset{(1)}{=} \mathbf{P}(b) = a$$

(3) Supongamos que $a \in b$. Entonces $a \subseteq \bigcup b$. De donde resulta inmediatamente que $\mathbf{P}(a) \subseteq \mathbf{P}(\bigcup b)$. Por tanto, $\mathbf{P}(a) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\bigcup b))$.

(4) Supongamos que $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}(b)$. Como $a \in \mathbf{P}(a) \land b \in \mathbf{P}(b)$ se tiene que $a \in \mathbf{P}(b) \land b \in \mathbf{P}(a)$. Luego, $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$.

(5) Veamos que **no** existe un conjunto x tal que $\mathbf{P}(x) \subseteq x$. Para ello, sea a un conjunto arbitrario. Veamos que $\exists x(x \in \mathbf{P}(a) \wedge x \notin a)$.

Consideremos la clase $b = \{x : \ x \in a \wedge x \notin x\}$. Por el esquema de axiomas de separación, b es un conjunto. Como $b \subseteq a$, resulta que $b \in \mathbf{P}(a)$. Veamos que, en cambio, $b \notin a$.

En efecto, de lo contrario resultaría que $b \in a$. En tal situación:

– O bien $b \in b$, en cuyo caso, teniendo presente la definición de b, resultaría que $b \notin b$.

– O bien $b \notin b$, en cuyo caso, teniendo presente la definición de b y que $b \in a$, resultaría que $b \in b$.

Por tanto, $b \in \mathbf{P}(a) - a$. Es decir: $\mathbf{P}(a) \not\subseteq a$.

Ejercicio 12. *Sea a un conjunto. Probar que:*
(1) *Si* $a \neq \emptyset$, *entonces* $\mathbf{P}(\bigcap a) = \bigcap\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\}$.
(2) $\bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\} \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. *¿Cuándo se verifica la igualdad?*
Indicación: *En (2) pruébese que la igualdad se verifica si y sólo si*

$$\exists x \ (x \in a \wedge x = \bigcup a)$$

(1) Supongamos que a es un conjunto no vacío. Si x es un conjunto arbitrario, entonces:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{P}(\bigcap a) &\leftrightarrow x \subseteq \bigcap a \leftrightarrow \forall y(y \in a \rightarrow x \subseteq y) \\ &\leftrightarrow \forall y(y \in a \rightarrow x \in \mathbf{P}(y)) \leftrightarrow x \in \bigcap\{\mathbf{P}(y) : \ y \in a\} \end{aligned}$$

(2) Veamos que $\bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\} \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$.

Sea $y \in \bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\}$. Entonces existe $b \in a$ tal que $y \in \mathbf{P}(b)$. Veamos que $y \in \mathbf{P}(\bigcup a)$.

- Como $b \in a$, resulta que $b \subseteq \bigcup a$. Luego, $\mathbf{P}(b) \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$. Por tanto, $y \in \mathbf{P}(\bigcup a)$.

Veamos ahora que $\bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\} = \mathbf{P}(\bigcup a) \leftrightarrow \bigcup a \in a$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Sea $b = \bigcup\{(\bigcup a) - x : \ x \in a\}$. Entonces

$$\forall y(y \in b \rightarrow \exists z(z \in a \wedge y \in (\bigcup a) - z) \rightarrow y \in \bigcup a)$$

Luego $b \in \mathbf{P}(\bigcup a)$ y, por tanto, $b \in \bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\}$.
Sea $c \in a$ tal que $b \in \mathbf{P}(c)$. Basta ver que $c = \bigcup a$.

- $c \in a \rightarrow c \subseteq \bigcup a$.

- $\bigcup a \subseteq c$, ya que $\bigcup a - c = \emptyset$, pues

$$b \in \mathbf{P}(c) \to \bigcup\{(\bigcup a) - x : \ x \in a\} \subseteq c \to (\bigcup a) - c \subseteq c$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

Como $\bigcup a \in a$, resulta que $\mathbf{P}(\bigcup a) \in \{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\}$. Luego,

$$\mathbf{P}(\bigcup a) \subseteq \bigcup\{\mathbf{P}(x) : \ x \in a\}$$

Ejercicio 13. *Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:*

(1) $A = \{\{\{x\}\} : x \in a \cup b\}$.

(2) $B = \{a \cup x : x \in b\}$.

(3) $C = \{\mathbf{P}(x) : x \in a\}$.

(4) $D = \{x \cup y : x \in a \wedge y \in b\}$.

(1) Sea $y \in A$. Entonces existe $x \in a \cup b$ tal que $y = \{\{x\}\}$. Ahora bien

$$\begin{array}{rcl} x \in a \cup b & \to & \{x\} \subseteq a \cup b \to \{x\} \in \mathbf{P}(a \cup b) \\ & \to & \{\{x\}\} \subseteq \mathbf{P}(a \cup b) \to \{\{x\}\} \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(a \cup b)) \\ & \to & y \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(a \cup b)) \end{array}$$

Luego, $A \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{P}(a \cup b))$. Por tanto, la clase A es un conjunto.

Nota: Obsérvese que hemos probado que A es un conjunto demostrando que A es subclase de un conjunto obtenido a partir de otros dos conjuntos, mediante operaciones “cerradas"para conjuntos.

(2) Sea $y \in B$. Entonces existe $x \in b$ tal que $y = a \cup x$. Pero

$$\begin{array}{rcl} x \in b & \to & x \subseteq \bigcup b \to a \cup x \subseteq a \cup (\bigcup b) \\ & \to & a \cup x \in \mathbf{P}(a \cup (\bigcup b)) \to y \in \mathbf{P}(a \cup (\bigcup b)) \end{array}$$

Luego, $B \subseteq \mathbf{P}(a \cup (\bigcup b))$. Por tanto, la clase B es un conjunto.

(3) Sea $y \in C$. Entonces existe $x \in a$ tal que $y = \mathbf{P}(x)$. Ahora bien

$$x \in a \to x \subseteq \bigcup a \to \mathbf{P}(x) \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a) \to y = \mathbf{P}(x) \in \mathbf{P}(\mathbf{P}(\bigcup a))$$

Luego, $C \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{P}(\bigcup a))$. Por tanto, la clase C es un conjunto.

(4) Sea $z \in D$. Entonces existen $x \in a$ e $y \in b$ tales que $z = x \cup y$. Ahora bien

$$\begin{aligned} x \in a \wedge y \in b &\rightarrow x \subseteq \bigcup a \wedge y \subseteq \bigcup b \rightarrow x \cup y \subseteq (\bigcup a) \cup (\bigcup b) \\ &\rightarrow x \cup y \in \mathbf{P}((\bigcup a) \cup (\bigcup b)) \rightarrow z \in \mathbf{P}((\bigcup a) \cup (\bigcup b)) \end{aligned}$$

Luego, $D \subseteq \mathbf{P}((\bigcup a) \cup (\bigcup b))$. Por tanto, la clase D es un conjunto.

Ejercicio 14. *Demostrar o refutar:*
(1) *Si a es un conjunto, la clase $B = \{x : \exists y(y \subseteq a \wedge x \notin y)\}$ es propia.*
(2) *Si $\bigcap A$ es un conjunto, entonces A es un conjunto.*

(1) Verdadero. Vamos a probar que la clase B es propia. Y lo vamos a hacer de tres formas diferentes.

1ª Solución: Veamos que $B = \mathbf{V}$.

En efecto: si $x \in \mathbf{V}$, entonces $\emptyset \subseteq a \wedge x \notin \emptyset$. Luego, $x \in B$. Por tanto, $\mathbf{V} \subseteq B$. La otra inclusión se tiene siempre.

2ª Solución: Veamos que $\mathbf{V} - a \subseteq B$.

En efecto: si $x \in \mathbf{V} - a$, entonces $a \subseteq a \wedge x \notin a$. Luego, $x \in B$. Por tanto, $\mathbf{V} - a \subseteq B$.

Como $\mathbf{V}$ es clase propia y a es un conjunto, del axioma de la unión resulta que la clase $\mathbf{V} - a$ es propia. Teniendo presente que $\mathbf{V} - a \subseteq B$, resulta que la clase B es propia.

3ª Solución: Veamos que $B = \mathbf{V} - \bigcap \mathbf{P}(a)$ (de donde concluiremos que $B = \mathbf{V}$).

En efecto: se verifica que

$$\begin{aligned} x \in B &\leftrightarrow \exists y(y \subseteq a \wedge x \notin y) \leftrightarrow \exists y(y \in \mathbf{P}(a) \wedge x \notin y) \\ &\leftrightarrow \neg \forall y(y \in \mathbf{P}(a) \rightarrow x \in y) \leftrightarrow x \in \mathbf{V} - \bigcap \mathbf{P}(a) \end{aligned}$$

Ahora bien, $\emptyset \in \mathbf{P}(a)$. Luego, $\bigcap \mathbf{P}(a) = \emptyset$. Por tanto,

$$B = \mathbf{V} - \bigcap \mathbf{P}(a) = \mathbf{V} - \emptyset = \mathbf{V}$$

(2) Falso. Sea $A = \mathbf{V}$. Entonces $\bigcap A = \emptyset$ ya que $\emptyset \in \mathbf{V}$. Por tanto, $\bigcap A$ es un conjunto y, en cambio, la clase A es propia.

Ejercicio 15. *Sea a un conjunto. Determinar, en función de a, cuándo es conjunto la clase $B = \bigcap \bigcup \bigcup a$.*

Recordemos que la clase $\bigcap C$ es un conjunto si y sólo si C es un conjunto no vacío. Por tanto, la clase $B = \bigcap \bigcup \bigcup a$ es un conjunto si y sólo si $\bigcup \bigcup a$ es un conjunto no vacío. Ahora bien,

$$\bigcup\bigcup a \neq \emptyset \iff \exists x(x \in \bigcup a \wedge x \neq \emptyset) \iff \exists x \exists y(y \in a \wedge x \in y \wedge x \neq \emptyset)$$

Por tanto, la clase $B = \bigcap\bigcup\bigcup a$ es un conjunto si y sólo si a posee, al menos, un elemento, y, que posee, al menos, un elemento, x, no vacío.

Ejercicio 16. *Probar que es propia la clase*

$$A = \{x : \ \forall y \ (x \in y \to \exists z \in y \ (z \cap y = \emptyset))\}$$

Supongamos que la clase A fuese un conjunto. Distingamos dos casos.

<u>Caso 1º:</u> Supongamos que $A \in A$.

Como A es un conjunto, resulta que $\{A\}$ es un conjunto (consecuencia del axioma del par) y $A \in \{A\}$. De la definición de la clase A se deduciría la existencia de un elemento $z \in \{A\}$ tal que $z \cap \{A\} = \emptyset$. De donde resultaría que $z = A$ y $A \notin z$. Lo que es una contradicción.

<u>Caso 2º:</u> Supongamos que $A \notin A$.

Como A es un conjunto, se verificaría que

$$\exists y(A \in y \wedge \forall z \in y \ (z \cap y \neq \emptyset))$$

Sea b un conjunto tal que

$$A \in b \wedge \forall z \in b \ (z \cap b \neq \emptyset) \ (\star)$$

Entonces, $A \cap b \neq \emptyset$. Sea $c \in A \cap b$. Se tendría que

$$c \in A \to \forall y \ (c \in y \to \exists z \in y \ (z \cap y = \emptyset))$$

Como $c \in b$ resultaría que $\exists z \in b \ (z \cap b = \emptyset)$. Lo que contradice $(\star)$.

1.4. Problemas propuestos

Ejercicio 1.1. Formalizar con una fórmula del lenguaje de la Teoría de Conjuntos, las siguientes frases:

1. "Existe un conjunto tal que sus elementos son elementos de algún elemento suyo".
2. "Dada una colección de conjuntos, la colección de todos los conjuntos que tienen algún elemento de la colección de partida, es un conjunto".

3. “Para cualquier conjunto, existe otro conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos del primero".
4. “La colección de los conjuntos que son elementos de algún conjunto, no es un conjunto".
5. “Para cualquier conjunto, existe otro conjunto cuyos elementos son todos los conjuntos verificando que todos sus elementos lo son también del primero".
6. “La colección de los conjuntos que son elementos de un conjunto que no es elemento de dicho conjunto, es un conjunto".

Ejercicio 1.2. Encontrar el error del siguiente razonamiento:

> “*Consideremos la clase* $A = \{x : \varphi(x)\}$*, siendo*
> $$\varphi(x) \equiv x \in \emptyset \to x = \emptyset$$
> *Se tiene que* $\mathbf{V} \in \emptyset \to \mathbf{V} = \emptyset$ *ya que el antecedente es falso. Es decir, se verifica* $\varphi(\mathbf{V})$*. Luego,* $\mathbf{V} \in A$*. Por tanto, la clase universal* $\mathbf{V}$ *es un conjunto*".

Ejercicio 1.3. Expresar el conjunto 3 utilizando sólo los símbolos $\{$, $\}$ y $\emptyset$.

Ejercicio 1.4. Determinar los elementos de las siguientes clases:

$$\bigcup 3, \qquad \bigcup\bigcup 3, \qquad \bigcup\bigcup\bigcup 3, \qquad \bigcap 3$$

Ejercicio 1.5. Sea $x = \{\{1,2,3\},\{1,2\},\{0,1,3\}\}$. Calcular los conjuntos

$$\bigcup\bigcap x \qquad \text{e} \qquad \bigcap\bigcap x - \bigcup\bigcup x$$

Ejercicio 1.6. De los siguientes conjuntos, decidir si 2 es un elemento, un subconjunto, ambas cosas o ninguna de ellas:

$$3, \qquad \bigcup\{0,1,2,3\}, \qquad \{\{0,1\}\} - 2, \qquad \{0,1\} - 2$$

Ejercicio 1.7. Sean x, y, z conjuntos tales que $x, y \subseteq z$. Probar que $x \subseteq y \leftrightarrow z - y \subseteq z - x$.

Ejercicio 1.8. Sean x e y conjuntos. Probar que:

$$\exists! z(\forall u(u \in z \leftrightarrow ((u \in x \wedge u \notin y) \vee (u \in y \wedge u \notin x))))$$

<u>Nota:</u> El único conjunto z cuya existencia y unicidad garantiza el ejercicio, se denomina conjunto *diferencia simétrica* de x e y, que notaremos $x \oplus y$.

Indicación: Para la existencia, úsese el esquema de axiomas de separación y el axioma de la unión. Para la unicidad, úsese el axioma de extensionalidad.

Ejercicio 1.9. Sean x e y conjuntos. Probar que:

(1) $x \oplus y = y \oplus x$.

(2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

(3) $x = y \leftrightarrow x \oplus y = \emptyset$.

(4) $x \oplus y = z \oplus y \leftrightarrow x = z$.

Ejercicio 1.10. Sean x e y conjuntos. Probar que $\mathbf{P}(x \oplus y) \subseteq \mathbf{P}(x \cup y)$. ¿Cuándo se tiene la igualdad?

Indicación: Para ver cuándo se tiene la igualdad, Pruébese que $x \oplus y = (x \cup y) - (x \cap y)$, aplíquese el apartado 4 del ejercicio 11 y concluir que $x \cap y$ debe ser vacío.

Ejercicio 1.11. Sean a y b conjuntos tales que $b \neq \emptyset$. Probar que:

(1) La clase $C = \{y : \exists x \in b(y = a \cap x)\}$ es un conjunto.

(2) $a \cap (\bigcup b) = \bigcup C$.

Ejercicio 1.12. Probar que:

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v \exists w (u \in w \wedge w \in v \wedge (v \in x \vee v \in y)))$$

Indicación: Aplíquese repetidas veces el axioma de la unión.

Ejercicio 1.13. Sea a un conjunto. Estudiar en qué condiciones la clase A es un conjunto, siendo $A = \{x : \forall z (z \in a \rightarrow x \notin z)\}$.

Indicación: Pruébese que $A = \mathbf{V} - \bigcup a$.

Ejercicio 1.14. Sean a y b conjuntos. Probar que la clase

$$A = \{x : (x \notin x) \wedge (\exists w (x \in w \wedge (w \in a \vee w \in b)))\}$$

es un conjunto.

Indicación: Pruébese que A está contenida en un conjunto.

Ejercicio 1.15. Probar que la clase

$$A = \{x : \forall y (\exists z \forall u (u \notin z \wedge y \in z) \rightarrow x \in y)\}$$

es propia.

Indicación: Pruébese que $A = \bigcap \emptyset = \mathbf{V}$.

Ejercicio 1.16. Consideremos la siguiente versión debilitada del axioma de la unión:

$$\forall x \exists y \forall u (\exists v (u \in v \wedge v \in x) \rightarrow u \in y)$$

Probar que el axioma de la unión se puede deducir a partir de dicha versión debilitada y del resto de los axiomas hasta ahora vistos.

Indicación: Utilícese el esquema de axiomas de separación.

Ejercicio 1.17. Análogamente al ejercicio anterior, enunciar una versión debilitada del axioma de las partes y probar que el axioma de las partes se deduce a partir de la misma y de los restantes axiomas hasta ahora vistos.

Ejercicio 1.18. Sean a y b conjuntos. Demostrar que las siguientes clases son conjuntos:

$$A = \{\mathbf{P}(x) \cup \mathbf{P}(y) : x \in a \wedge y \in b\} \text{ y } B = \{a \cup \{\{x\}\} : x \in b\}$$

Indicación: Pruébese que $A \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{P}(\bigcup a) \cup \mathbf{P}(\bigcup b))$ y $B \subseteq \mathbf{P}(a \cup \mathbf{P}(b))$.

Ejercicio 1.19. Demostrar que $\forall x\ (\bigcup x = \bigcap x \leftrightarrow x$ es un conjunto unitario).

Indicación: Para la implicación directa, pruébese que x es no vacío y que si $y, z \in x$, entonces $y = z$.

Ejercicio 1.20. Con los axiomas introducidos hasta ahora, demostrar o refutar:

(1) $\exists x\ (x \subseteq \{x\}) \wedge \forall x (\{x\} \subseteq x)$.

(2) $\forall x \forall y\ (x \cup y = x \cap y \leftrightarrow x = y)$.

(3) $\exists x\ (\bigcap \mathbf{P}(x) \neq \emptyset)$.

Capítulo 2

Relaciones y aplicaciones

2.1. Par ordenado y producto cartesiano

Definición 2.1.1. (KURATOWSKI 1921) Sean x e y conjuntos. El *par ordenado* de componentes x e y, que notaremos $\langle x, y\rangle$, es la clase $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Obsérvese que todo par ordenado es un conjunto no vacío tal que posee, a lo sumo, dos elementos (que son conjuntos no vacíos).

Teorema 2.1.2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)(\langle x, y\rangle = \langle z, t\rangle \leftrightarrow x = z \wedge y = t)$.

El concepto de par ordenado puede generalizarse al de *n–tupla ordenada* (con $n \geqslant 2$) como sigue:

1. $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle\langle x_1, x_2\rangle, x_3\rangle$.
2. $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle = \langle\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$.

Si $\varphi(x, y)$ es una fórmula, entonces escribiremos $\{\langle x, y\rangle : \varphi(x, y)\}$ en lugar de $\{z : (\exists x)(\exists y)[z = \langle x, y\rangle \wedge \varphi(x, y)]\}$.

Definición 2.1.3. Sean a y b conjuntos. El *producto cartesiano* de a y b, que notaremos $a \times b$, es la clase $\{\langle x, y\rangle : x \in a \wedge y \in b\}$.

Proposición 2.1.4. *Sean a y b conjuntos. Entonces $a \times b \subseteq \mathbf{P}(\mathbf{P}(a \cup b))$ y, por tanto, $a \times b$ es un conjunto.*

La definición de producto cartesiano de **dos** conjuntos puede generalizarse al caso de n conjuntos (con $n \geqslant 2$), de manera natural, a través de las n–tuplas ordenadas

Si a es un conjunto, notaremos $a^1 = a$, $a^2 = a \times a$, $a^3 = a \times a \times a$, y así sucesivamente.

Nota: Sean A y B clases. Entonces, la clase producto cartesiano de A y B, que notaremos $A \times B$, es la clase: $\{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$.

2.2. Relaciones

Definición 2.2.1. Diremos que una clase R es una *relación* (binaria) si todos sus elementos son pares ordenados (una relación n–aria es una clase cuyos elementos son n–tuplas ordenadas).

Notación: Si R es una relación, con frecuencia escribiremos xRy en lugar de $\langle x, y\rangle \in R$ (y diremos que x está relacionado con y por R).

Ejemplos: Dados dos conjuntos a y b, cualquier subconjunto de $a \times b$ es una relación. En cambio, los conjuntos $\{\emptyset\}$ y $\{\{\emptyset\}\}$ no son relaciones.

Definición 2.2.2. Sea R una relación. Entonces

(a) El *dominio* de R es $\text{dom}\,(R) = \{x : (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$.

(b) El *rango* o *recorrido* de R es $\text{rang}\,(R) = \{y : (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$.

(c) El *campo* de R es campo(R)=dom(R)$\cup$ rang(R).

Proposición 2.2.3. *Si R es una relación, entonces $R \subseteq \text{dom}\,(R) \times \text{rang}\,(R)$. Además, si R es un conjunto, las clases dom (R) y rang (R) son conjuntos.*

Definición 2.2.4. Diremos que una relación R es *funcional* si

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(\langle x, y\rangle \in R \;\wedge\; \langle x, z\rangle \in R \to y = z)$$

Definición 2.2.5. Diremos que una relación R es *inyectiva unívoca* si

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in R \to x = z)$$

Ejemplos: La relación de *identidad* en un conjunto a, que notaremos I_a, es la clase $\{\langle x, x\rangle : x \in a\}$. Obviamente, I_a es una relación funcional e inyectiva (de manera similar se puede definir la relación identidad, I_A, en una clase A). La relación de *pertenencia* en un conjunto a, que notaremos $\in_a$, es la clase $\{\langle x, y\rangle :\; x \in a \wedge y \in a \wedge x \in y\}$. Obviamente, $\in_a$ es una relación que, en general, no es funcional ni inyectiva.

Definición 2.2.6. Sea R una relación. La relación *inversa* de R, que notaremos R^{-1}, es la clase $\{\langle x, y\rangle :\; \langle y, x\rangle \in R\}$.

Definición 2.2.7. Sea R una relación y A una clase. Entonces

1. La *clase imagen* de A por R, que notaremos $R[A]$, es la clase
$$\{x : (\exists y)(y \in A \wedge \langle y, x\rangle \in R)\}$$

2. La *clase imagen inversa* de A por R es, por definición, $R^{-1}[A]$.

Definición 2.2.8. Sean R y S relaciones. Entonces la *composición* de R y S (en ese orden!), que notaremos $S \circ R$ es la clase
$$\{\langle x, y\rangle : \exists z\ (\langle x, z\rangle \in R \wedge \langle z, y\rangle \in S)\}$$

Proposición 2.2.9. *Sean R, S y T relaciones. Se verifica:*

(1) *dom* $(R^{-1}) =$ *rang* (R), *rang* $(R^{-1}) =$ *dom* (R) *y* $(R^{-1})^{-1} = R$.

(2) *dom* $(S \circ R) \subseteq$ *dom* (R) *y rang* $(S \circ R) \subseteq$ *rang* (S).

(3) $S \circ R \subseteq$ *dom* $(R)\times$ *rang* (S).

(4) *R y S conjuntos* $\Longrightarrow S \circ R$ *conjunto.*

(5) *R y S funcionales* $\Longrightarrow S \circ R$ *funcional.*

(6) *R inyectiva* $\Longleftrightarrow R^{-1}$ *funcional.*

(7) *R y S inyectivas* $\Longrightarrow S \circ R$ *inyectiva.*

(8) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

(9) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$, $(S \cup R)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ *y* $(S \cap R)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

Definición 2.2.10. Una *relación* (binaria) R *en un conjunto* a (resp. en una clase A) es un subconjunto de $a \times a$ (resp. una subclase de $A \times A$).

De manera análoga se define el concepto de relación n–aria en un conjunto o en una clase.

Definición 2.2.11. Sean R una relación y a un conjunto. La *restricción* de R al conjunto a, que notaremos $R \restriction a$ es la clase $\{\langle x, y\rangle : \langle x, y\rangle \in R \wedge x \in a\}$.

Proposición 2.2.12. *Si R es funcional (resp. inyectiva) y a es un conjunto, entonces $R \restriction a$ es funcional (resp. inyectiva).*

2.3. Aplicaciones

Definición 2.3.1. Una *aplicación* es una relación funcional. Una aplicación inyectiva es una relación funcional inyectiva.

Sean f una aplicación y $x \in \operatorname{dom}(f)$. Entonces existe un único conjunto y tal que $\langle x, y\rangle \in f$ (se dice que y es la *imagen* o el *valor* de x por f, y se representa así: $y = f(x)$).

Definición 2.3.2. Una aplicación de un conjunto a en un conjunto b (notaremos $f : a \longrightarrow b$) es una aplicación cuyo dominio es a y cuyo rango está contenido en b. Si, además, el rango es b, entonces se dice que la aplicación es *suprayectiva*.

Definición 2.3.3. Diremos que una aplicación de un conjunto a en un conjunto b es *biyectiva* si es inyectiva y suprayectiva de a en b.

Nota: Las definiciones anteriores se pueden extender a clases. Así, una aplicación de una clase A en una clase B (notaremos $F : A \longrightarrow B$) es una aplicación tal que $\operatorname{dom}(F) = A$ y $\operatorname{rang}(F) \subseteq B$.

Sean a y b conjuntos. Notaremos por ${}^a b$ a la clase cuyos elementos son las aplicaciones de a en b. Obsérvese que

– Para cada conjunto a se tiene que ${}^{\emptyset} a = \{\emptyset\}$.

– Si a es un conjunto no vacío, entonces ${}^a \emptyset = \emptyset$.

Proposición 2.3.4. *Se verifica:*

(1) *Si una aplicación es inyectiva, entonces su relación inversa es una aplicación (que, además, es inyectiva).*

(2) *La composición de dos aplicaciones (resp. aplicaciones inyectivas) es una aplicación (resp. aplicación inyectiva).*

(3) *Si $f : a \longrightarrow b$ (resp. suprayectiva o biyectiva) y $g : b \longrightarrow c$ (resp. suprayectiva o biyectiva), entonces $g \circ f : a \longrightarrow c$ (resp. suprayectiva o biyectiva).*

(4) *Si a y b son conjuntos, entonces la clase ${}^a b$ es un conjunto.*

(5) *Si $f : a \longrightarrow b$ es biyectiva, entonces la relación f^{-1} es una aplicación biyectiva de b en a.*

(6) *Sea $f : a \longrightarrow b$ una aplicación tal que la relación f^{-1} es una aplicación de b en a. Entonces f es biyectiva (y, por tanto, f^{-1} también).*

(7) *Sean $f : a \longrightarrow b$ y $c \subseteq a$. Entonces $f \upharpoonright c$ es una aplicación de c en b.*

(8) *Si f es una aplicación y a es un conjunto, entonces* $f[a] = \{f(x) : x \in a \wedge x \in dom(f)\}$ *y* $f^{-1}[a] = \{x : x \in dom(f) \wedge f(x) \in a\}$.

(9) *Si $f : a \longrightarrow b$ es biyectiva, entonces* $f^{-1} \circ f = I_a$ *y* $f \circ f^{-1} = I_b$.

(10) *Sean $f : a \longrightarrow b$, $c \subseteq a$, $d \subseteq a$, $c' \subseteq b$, $d' \subseteq b$. Entonces*

- ⋆ $f[c \cup d] = f[c] \cup f[d]$.
- ⋆ $f[c \cap d] \subseteq f[c] \cap f[d]$.
- ⋆ $f^{-1}[c' \cup d'] = f^{-1}[c'] \cup f^{-1}[d']$.
- ⋆ $f^{-1}[c' \cap d'] = f^{-1}[c'] \cap f^{-1}[d']$.

(11) *Sea $f : a \longrightarrow b$. Entonces f es inyectiva si para cada $c \subseteq a$, $d \subseteq a$ se tiene que* $f[c \cap d] = f[c] \cap f[d]$.

(12) *Sea $f : a \longrightarrow b$. Si $c \subseteq a$ y $d \subseteq b$, entonces* $c \subseteq f^{-1}[f[c]]$ *y* $f[f^{-1}[d]] \subseteq d$.

(13) *Sea $f : a \longrightarrow b$. Entonces*

- ⋆ *f es inyectiva si para cada $c \subseteq a$ se tiene que* $c = f^{-1}[f[c]]$.
- ⋆ *f es suprayectiva si para cada $d \subseteq b$ se tiene que* $d = f[f^{-1}[d]]$.

(14) *Sean $f : a \longrightarrow b$ y $g : b \longrightarrow c$. Si $g \circ f$ es inyectiva (resp. suprayectiva), entonces f es inyectiva (resp. g es suprayectiva).*

(15) *Sean $f : a \longrightarrow b$ y $g : b \longrightarrow a$ tales que $g \circ f = I_a$ y $f \circ g = I_b$. Entonces f y g son biyectivas y, además,* $f = g^{-1}$.

(16) *Sea $f : a \longrightarrow b$. Entonces f es biyectiva si existe una única aplicación $g : b \longrightarrow a$ tal que* $g \circ f = I_a$ *y* $f \circ g = I_b$.

2.4. Familias de conjuntos

Las familias de conjuntos permiten generalizar algunos conceptos (unión, intersección, producto cartesiano) definidos para dos conjuntos, al caso de “un número arbitrario de conjuntos".

Definición 2.4.1. Sea I un conjunto. Una *familia de conjuntos con conjunto de índices I* es una aplicación, f, cuyo dominio es I.

En tal situación, para cada $j \in I$ notaremos f_j en lugar de $f(j)$. Asímismo, la familia f será representada por $(f_i)_{i \in I}$.

Definición 2.4.2. Sean I un conjunto no vacío y a un conjunto. Una *familia de partes de a con conjunto de índices I*, es una aplicación de I en $\mathbf{P}(a)$.

Definición 2.4.3. Sea $(a_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces

1. La *unión* de los conjuntos de la familia $(a_i)_{i\in I}$, que notaremos $\bigcup\limits_{i\in I} a_i$, es la clase $\{x : \exists j(j \in I \wedge x \in a_j)\}$.
2. La *intersección* de los conjuntos de la familia $(a_i)_{i\in I}$, que notaremos $\bigcap\limits_{i\in I} a_i$, es la clase $\{x : \forall j(j \in I \to x \in a_j)\}$.
3. El *producto* de los conjuntos de la familia $(a_i)_{i\in I}$, que notaremos $\prod\limits_{i\in I} a_i$, es la clase

$$\{x : (x \text{ es una aplicación }) \wedge \text{dom }(x) = I \wedge (\forall j(j \in I \to x(j) \in a_j))\}$$

Observación: Se tiene que $\bigcup\limits_{i\in\{0,1\}} a_i = a_0 \cup a_1$ y que $\bigcap\limits_{i\in\{0,1\}} a_i = a_0 \cap a_1$. En cambio, $\prod\limits_{i\in\{0,1\}} a_i \neq a_0 \times a_1$, si bien existe una biyección natural entre ellos.

Proposición 2.4.4. *Sea $a = (a_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces*

(1) $\bigcup\limits_{i\in I} a_i = \bigcup \textit{rang }(a)$.

(2) $\bigcap\limits_{i\in I} a_i = \bigcap \textit{rang }(a)$.

Corolario 2.4.5. *Sea $a = (a_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que a es un conjunto. Entonces*

(1) *La clase $\bigcup\limits_{i\in I} a_i$ es un conjunto.*

(2) *Si $I = \emptyset$, la clase $\bigcap\limits_{i\in I} a_i$ es la clase universal* $\mathbf{V}$.

(3) *Si $I \neq \emptyset$, la clase $\bigcap\limits_{i\in I} a_i$ es un conjunto.*

(4) *Se tiene que $\prod\limits_{i\in I} a_i \subseteq \mathbf{P}(I \times \bigcup\limits_{i\in I} a_i)$. Luego, la clase $\prod\limits_{i\in I} a_i$ es un conjunto.*

Comentario: Es obvio que si $\prod_{i \in I} a_i \neq \emptyset$, entonces $\forall j(j \in I \to a_j \neq \emptyset)$. En cambio, con los axiomas que hemos introducido hasta ahora no podemos probar ni refutar el recíproco (como veremos más adelante, para probarlo es suficiente que admitamos el axioma de elección).

Definición 2.4.6. Una *partición* en un conjunto b es una familia $(a_i)_{i \in I}$ de conjuntos tal que:

1. $\forall j(j \in I \to a_j \subseteq b \wedge a_j \neq \emptyset)$.
2. $\forall j \forall k(j \in I \wedge k \in I \wedge j \neq k \to a_j \cap a_k = \emptyset)$.
3. $\bigcup_{i \in I} a_i = b$.

Nota: La intersección de aplicaciones siempre es una aplicación. En cambio, la unión de aplicaciones no tiene por qué ser una aplicación (puede fallar la funcionalidad).

Ahora bien, supongamos que a y b son conjuntos, que $(a_i)_{i \in I}$ es una partición de a y que $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de aplicaciones de a_i en b. Entonces $g = \bigcup_{i \in I} f_i$ es una aplicación de a en b (verificando la condición siguiente: para cada $i \in I$ se tiene que $g \restriction a_i = f_i$; más aún, g es la única aplicación de a en b verificando la condición anteriormente descrita).

2.5. Relaciones de equivalencia

Definición 2.5.1. Sea A una clase y R una relación binaria en A (es decir, $R \subseteq A \times A$). Diremos que

1. R es *reflexiva* en A si $\forall x \in A(\langle x, x \rangle \in R)$.
2. R es *simétrica* en A si $\forall x, y \in A(\langle x, y \rangle \in R \to \langle y, x \rangle \in R)$.
3. R es *transitiva* en A si $\forall x, y, z \in A(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \to \langle x, z \rangle \in R)$.
4. R es de *equivalencia* en A si es reflexiva, simétrica y transitiva en A.

Definición 2.5.2. Diremos que una relación R es reflexiva (respectivamente, simétrica, transitiva o de equivalencia), si lo es en la clase campo(R).

Ejemplos: El conjunto vacío es una relación de equivalencia en el conjunto vacío (pero no lo es en un conjunto no vacío). La relación de identidad en un conjunto, es de equivalencia en dicho conjunto. En cambio, en general, la relación de pertenencia no verifica dicha propiedad.

Proposición 2.5.3. *Sea R una relación de equivalencia en una clase A. Entonces R^{-1} es de equivalencia en A y para cada $B \subseteq A$, la relación $R \cap (B \times B)$ es de equivalencia en B.*

Definición 2.5.4. Sea R una relación de equivalencia en una clase A y sea $x \in A$. La *clase de equivalencia* de x por la relación R, que notaremos $\overline{x}^R$ o simplemente $\overline{x}$, es la clase $\{y : y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R\}$.

Proposición 2.5.5. *Sea R una relación de equivalencia en una clase A. Se verifica:*

(1) $\forall x(x \in A \rightarrow \overline{x}^R \subseteq A \wedge \overline{x}^R \neq \emptyset)$.

(2) $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \rightarrow (\langle x, y\rangle \in R \leftrightarrow \overline{x}^R = \overline{y}^R))$.

(3) $\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \rightarrow (\overline{x}^R = \overline{y}^R \leftrightarrow \overline{x}^R \cap \overline{y}^R \neq \emptyset))$.

Definición 2.5.6. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto a. El *conjunto cociente* de a por R, que notaremos a/R, es la clase $\{\overline{x}^R : x \in a\}$.

Proposición 2.5.7. *Si R una relación de equivalencia en un conjunto a, entonces la clase a/R es un conjunto.*

Proposición 2.5.8. *Sea R una relación de equivalencia en un conjunto a. Entonces la familia $(\overline{x}^R)_{\overline{x}^R \in (a/R)}$ es una partición del conjunto a.*

A cada partición Δ en un conjunto a se le puede asociar una relación de equivalencia R_Δ en a (dos elementos están relacionados si pertenecen al mismo conjunto de la partición), de tal manera que la partición en a asociada a R_Δ, de acuerdo con la proposición anterior, es precisamente la partición inicial Δ.

Definición 2.5.9. Sea $\Delta = (a_i)_{i \in I}$ una partición de un conjunto a. Diremos que un conjunto $b \subseteq a$ es un *conjunto de representantes* de Δ si

$$\forall j\ (j \in I \rightarrow \exists x\ (a_j \cap b = \{x\}))$$

Nota: Con los axiomas introducidos hasta ahora, no se puede demostrar, ni refutar, que para cada partición Δ de un conjunto a, exista un conjunto de representantes de Δ.

2.6. Problemas resueltos

Ejercicio 17. *Sean a y b conjuntos. Probar que:*

(1) $\bigcap \bigcap \langle a, b\rangle = a$.

(2) $a \neq b \implies \bigcap(\bigcup \langle a, b\rangle - \bigcap \langle a, b\rangle) = b$.

(3) $(\bigcap \bigcup \langle a, b\rangle) \cup (\bigcup \bigcup \langle a, b\rangle - \bigcup \bigcap \langle a, b\rangle) = b$.

(1) Se verifica que:

$$\bigcap\bigcap\langle a,b\rangle = \bigcap\bigcap(\{\{a\},\{a,b\}\}) = \bigcap(\{a\}\cap\{a,b\}) = \bigcap\{a\} = a$$

(2) Supongamos que $a \neq b$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\bigcap(\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcap\langle a,b\rangle) = \\
&\bigcap(\bigcup\{\{a\},\{a,b\}\} - \bigcap\{\{a\},\{a,b\}\}) = \\
&\bigcap(\{a\}\cup\{a,b\}) - (\{a\}\cap\{a,b\})) = \\
&\bigcap(\{a,b\} - \{a\}) \overset{a\neq b}{=} \bigcap\{b\} = b
\end{aligned}$$

(3) Se tiene que:

$$\begin{aligned}
&(\bigcap\bigcup\langle a,b\rangle)\cup(\bigcup\bigcup\langle a,b\rangle - \bigcup\bigcap\langle a,b\rangle) = \\
&\bigcap(\{a\}\cup\{a,b\})\cup(\bigcup(\{a\}\cup\{a,b\}\}) - \bigcup(\{a\}\cap\{a,b\})) = \\
&\bigcap\{a,b\}\cup(\bigcup\{a,b\} - \bigcup\{a\}) = \\
&(a\cap b)\cup((a\cup b) - a) = (a\cap b)\cup(b-a) = b
\end{aligned}$$

Ejercicio 18. *Demostrar o refutar:*

(1) *La clase* $A = \{\langle x,y\rangle \ : \ \langle x,y\rangle \neq x\times y\}$ *es propia.*

(2) *Si R es una relación y a es un conjunto, entonces $R[a]$ es un conjunto.*

(3) *R es una relación transitiva* $\iff R\circ R = R$.

(1) **Verdadero.** Veamos que $\mathbf{V} \subseteq \bigcup\bigcup A$.

- Sea $x \in \mathbf{V}$. Entonces $\langle x,\emptyset\rangle \neq \emptyset = x\times\emptyset$. Luego, $\langle x,\emptyset\rangle \in A$. Ahora bien:
$$x \in \{x\} \in \{\{x\},\{x,\emptyset\}\} = \langle x,\emptyset\rangle \in A$$
Es decir, $x \in \bigcup\bigcup A$.

Por tanto, la clase A es propia.

(2) **Falso.** Consideremos la relación $R = \{x\}\times\mathbf{V}$ y el conjunto $a = \{x\}$. Entonces $R[a] = \mathbf{V}$. Luego, la clase $R[a]$ es propia.

(3) **Falso.** En efecto: $R = \{\langle 0,1\rangle\}$ es una relación transitiva y
$$R\circ R = \emptyset \neq R$$

Ejercicio 19. *Demostrar que la clase* $A = \{f : f \text{ es una aplicación}\}$ *es propia.*

Veamos que $\mathbf{V} \subseteq \bigcup\bigcup\bigcup A$. Para ello, sea $x \in \mathbf{V}$. Entonces $\{\langle x, x\rangle\} \in A$. Ahora bien

$$\left.\begin{array}{r} \langle x, x\rangle \in \bigcup A \\ \{x\} \in \{\{x\}, \{x, x\}\} = \langle x, x\rangle \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \{x\} \in \bigcup\bigcup A$$

Teniendo presente que $x \in \{x\} \wedge \{x\} \in \bigcup\bigcup A$, deducimos que $x \in \bigcup\bigcup\bigcup A$.

En consecuencia, la clase A es propia pues, de lo contrario, la clase $\bigcup\bigcup\bigcup A$ sería un conjunto y, por tanto, también lo sería la clase universal $\mathbf{V}$.

Ejercicio 20. *Demostrar que la clase*

$$A = \{z : (\exists x)(\exists y)(z = \langle x, y\rangle)\}$$

es propia.

En este ejercicio, vamos a utilizar el siguiente método para probar que una clase es propia:

> *"Para probar que una clase A es propia, basta hallar una clase propia B que esté contenida en una clase obtenida a partir de A, mediante operaciones cerradas para conjuntos*".

Vamos a ver que $\mathbf{V} \subseteq \bigcup\bigcup A$.

Sea x un conjunto arbitrario. Entonces

$$x \in \{x\} \;\wedge\; \{x\} \in \{\{x\}, \{x, x\}\} = \langle x, x\rangle \in A$$

Luego, $x \in \bigcup\bigcup A$.

Por tanto, la clase A tiene que ser propia ya que, de lo contrario, la clase $\bigcup\bigcup A$ sería un conjunto (por el axioma de la unión). Luego, por el esquema de axiomas de separación, también lo sería la clase universal $\mathbf{V}$.

Ejercicio 21. *Sean a un conjunto no vacío y b, c conjuntos. Probar que :*

$$b \subseteq c \iff a \times b \subseteq a \times c \iff b \times a \subseteq c \times a$$

Veamos que $b \subseteq c \implies a \times b \subseteq a \times c$. Para ello, sea $\langle x, y\rangle \in a \times b$. Entonces $x \in a \wedge y \in b$. Luego, $x \in a \wedge y \in c$. Por tanto, $\langle x, y\rangle \in a \times c$.

Veamos que $a \times b \subseteq a \times c \implies b \times a \subseteq c \times a$. Para ello, sea $\langle x, y\rangle \in b \times a$. Entonces $\langle y, x\rangle \in a \times b$. Luego, $\langle y, x\rangle \in a \times c$. Por tanto, $\langle x, y\rangle \in c \times a$.

Veamos que $b \times a \subseteq c \times a \implies b \subseteq c$. Para ello, teniendo presente que $a \neq \emptyset$ existe un conjunto $d \in a$. Luego,

$$\forall x(x \in b \to \langle x, d\rangle \in b \times a \to \langle x, d\rangle \in c \times a \to x \in c)$$

Ejercicio 22. *Sean a y b conjuntos. Probar que es un conjunto la clase siguiente:* $A = \{\{z\} \times b : z \in a\}$.

Veamos que $A \subseteq \mathbf{P}(a \times b)$. Para ello, sea $x \in A$. Entonces existe $z \in a$ tal que $x = \{z\} \times b$. Se verifica que:

$$z \in a \to \{z\} \subseteq a \to \{z\} \times b \subseteq a \times b \to \{z\} \times b \in \mathbf{P}(a \times b) \to x \in \mathbf{P}(a \times b)$$

Como a y b son conjuntos, resulta del axioma de las partes que $\mathbf{P}(a \times b)$ es un conjunto. Teniendo presente que $A \subseteq \mathbf{P}(a \times b)$, del esquema de axiomas de separación deducimos que la clase A es un conjunto.

Ejercicio 23. *Dado un conjunto x definimos* $x^{-1} = \{\langle y, z\rangle : \langle z, y\rangle \in x\}$. *Si a y b son conjuntos, probar que:*

(1) $(a \cup b)^{-1} = a^{-1} \cup b^{-1}$.

(2) $(a \cap b)^{-1} = a^{-1} \cap b^{-1}$.

(3) $(a - b)^{-1} = a^{-1} - b^{-1}$.

Sean x e y conjuntos arbitrarios. Se verifica que:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (a \cup b)^{-1} &\leftrightarrow \langle y, x\rangle \in a \cup b \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in a \vee \langle y, x\rangle \in b \\
&\leftrightarrow \langle x, y\rangle \in a^{-1} \vee \langle x, y\rangle \in b^{-1} \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in a^{-1} \cup b^{-1} \\
\langle x, y\rangle \in (a \cap b)^{-1} &\leftrightarrow \langle y, x\rangle \in a \cap b \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in a \wedge \langle y, x\rangle \in b \\
&\leftrightarrow \langle x, y\rangle \in a^{-1} \wedge \langle x, y\rangle \in b^{-1} \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in a^{-1} \cap b^{-1} \\
\langle x, y\rangle \in (a - b)^{-1} &\leftrightarrow \langle y, x\rangle \in a - b \leftrightarrow \langle y, x\rangle \in a \wedge \langle y, x\rangle \notin b \\
&\leftrightarrow \langle x, y\rangle \in a^{-1} \wedge \langle x, y\rangle \notin b^{-1} \leftrightarrow \langle x, y\rangle \in a^{-1} - b^{-1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 24. *Sean R y S relaciones. Probar que* $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Sean x e y conjuntos arbitrarios. Se verifica que:

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (R \circ S)^{-1} &\leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R \circ S \leftrightarrow \exists z(\langle y, z\rangle \in S \wedge \langle z, x\rangle \in R) \\
&\leftrightarrow \exists z(\langle z, y\rangle \in S^{-1} \wedge \langle x, z\rangle \in R^{-1}) \\
&\leftrightarrow \langle x, y\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 25. *Calcular todos los pares ordenados de* $\mathbf{P}(2)$, *y el conjunto* $\mathbf{P}(2)^{-1} \circ (\mathbf{P}(2) \upharpoonright 1)$.

En primer lugar, hallemos todos los pares ordenados que pertenecen al conjunto

$$\mathbf{P}(2) = \mathbf{P}(\{0,1\}) = \{0, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

⋆ Recordemos que un par ordenado es un conjunto no vacío, que posee uno o dos elementos y tal que todos sus elementos son no vacíos. Luego, los conjuntos 0, $\{0\}$ y $\{0,1\}$ no son pares ordenados. ¿Lo es el conjunto $\{1\}$? Veamos que sí.

$$\{1\} = \{\{0\}\} = \{\{0\}, \{0,0\}\} = \langle 0,0\rangle$$

Así pues, $\mathbf{P}(2)^{-1} = \{\langle 0,0\rangle\} = \{\{1\}\}$ y $\mathbf{P}(2) \upharpoonright 1 = \mathbf{P}(2) \upharpoonright \{0\} = \{\langle 0,0\rangle\}$.
Además, $\mathbf{P}(2)^{-1} \circ (\mathbf{P}(2) \upharpoonright 1) = \{\langle 0,0\rangle\}$.

Ejercicio 26. *Sean a y b conjuntos y F una aplicación. Probar que:*

(1) $F^{-1}[\cup a] = \bigcup\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.

(2) *Si a es un conjunto no vacío, entonces* $F^{-1}[\cap a] = \bigcap\{F^{-1}[c] : c \in a\}$.

(3) $F^{-1}[a - b] = F^{-1}[a] - F^{-1}[b]$.

(1) Sea x un conjunto arbitrario. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} x \in F^{-1}[\bigcup a] & \leftrightarrow & F(x) \in \bigcup a \leftrightarrow \exists y(y \in a \wedge F(x) \in y) \\ & \leftrightarrow & \exists y(y \in a \wedge x \in F^{-1}[y]) \leftrightarrow x \in \bigcup\{F^{-1}[y] :\ y \in a\} \end{array}$$

(2) Supongamos que a es un conjunto no vacío. Sea x un conjunto arbitrario. Entonces

$$\begin{array}{rcll} x \in F^{-1}[\bigcap a] & \leftrightarrow & x \in \ \mathrm{dom}(F) \wedge F(x) \in \bigcap a & \\ & \leftrightarrow & x \in \ \mathrm{dom}(F) \wedge \forall y(y \in a \rightarrow F(x) \in y) & \\ & \leftrightarrow & \forall y(y \in a \rightarrow x \in \ \mathrm{dom}(F) \wedge F(x) \in y) & [\![a \neq \emptyset]\!] \\ & \leftrightarrow & \forall y\ (y \in a \rightarrow F^{-1}[y]) & \\ & \leftrightarrow & x \in \bigcap\{F^{-1}[y] :\ y \in a\} & \end{array}$$

Nota: Si el conjunto a es vacío, entonces el resultado anterior no tiene porqué ser cierto. En efecto:

$$F^{-1}[\bigcap \emptyset] = F^{-1}[\mathbf{V}] = \mathrm{dom}\ (F)$$

y, en cambio, $\bigcap\{F^{-1}[c] :\ c \in \emptyset\} = \bigcap \emptyset = \mathbf{V}$.

(3) Sea x un conjunto arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} x \in F^{-1}[a-b] &\leftrightarrow F(x) \in a-b \leftrightarrow F(x) \in a \wedge F(x) \notin b \\ &\leftrightarrow x \in F^{-1}[a] \wedge x \notin F^{-1}[b] \leftrightarrow x \in F^{-1}[a] - F^{-1}[b] \end{aligned}$$

Ejercicio 27. *Sean a un conjunto no vacío y F una aplicación. Probar que son equivalentes:*

(1) $\forall x \exists y\ (\langle x,y\rangle \in F \wedge \forall z \in a\ (y \in z))$.

(2) $\forall x \forall z \in a\ \exists y\ (\langle x,y\rangle \in F \wedge y \in z)$.

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

– Sean x un conjunto y $z \in a$. Por (1) existe un conjunto y_0 tal que $\langle x, y_0\rangle \in F \wedge \forall z \in a\ (y_0 \in z)$. Entonces, $y_0 \in z$. Luego, se tiene (2).

$\boxed{(2) \Longrightarrow (1)}$

– Sea x un conjunto. Como $a \neq \emptyset$, existe $z_0 \in a$. De la hipótesis (2), resulta que existe y_0 tal que $\langle x, y_0\rangle \in F \wedge y_0 \in z_0$.

  Veamos que $\forall z \in a\ (y_0 \in z)$. En efecto: si $z \in a$ por (2) existe y_z tal que $\langle x, y_z\rangle \in F \wedge y_z \in z$. Ahora bien, como F es funcional se tiene que $y_z = y_0$. Luego, $y_0 \in z$.

Ejercicio 28. *Sean $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que $I \neq \emptyset$ y b un conjunto. Probar que:*

(1) $b \cap (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b \cap a_i)$.

(2) $b \cup (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b \cup a_i)$.

(3) $b \cap (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b \cap a_i)$.

(4) $b \cup (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b \cup a_i)$.

(5) $b - (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b - a_i)$.

(6) $b - (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b - a_i)$.

(7) $b \times (\bigcap_{i\in I} a_i) = \bigcap_{i\in I}(b \times a_i)$.

(8) $b \times (\bigcup_{i\in I} a_i) = \bigcup_{i\in I}(b \times a_i)$.

Sean x, z conjuntos arbitrarios. Se verifica que:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{1})\ x \in b \cap (\bigcap_{i\in I} a_i) &\leftrightarrow x \in b \wedge x \in \bigcap_{i\in I} a_i \leftrightarrow x \in b \wedge \forall i \in I\ (x \in a_i)\\
&\overset{(I\neq\emptyset)}{\leftrightarrow} \forall i \in I\ (x \in b \wedge x \in a_i)\\
&\leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in b \cap a_i)\\
&\leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(b \cap a_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{2})\ x \in b \cup (\bigcup_{i\in I} a_i) &\leftrightarrow x \in b \vee x \in \bigcup_{i\in I} a_i \leftrightarrow x \in b \vee \exists i \in I\ (x \in a_i)\\
&\overset{(I\neq\emptyset)}{\leftrightarrow} \exists i \in I\ (x \in b \vee x \in a_i) \leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in b \cup a_i)\\
&\leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(b \cup a_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{3})\ x \in b \cap (\bigcup_{i\in I} a_i) &\leftrightarrow x \in b \wedge x \in \bigcup_{i\in I} a_i \leftrightarrow x \in b \wedge \exists i \in I\ (x \in a_i)\\
&\leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in b \wedge x \in a_i) \leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in b \cap a_i)\\
&\leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(b \cap a_i)
\end{aligned}
$$

(4) Razonamiento análogo al realizado en (3).

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{5})\ x \in b - (\bigcap_{i\in I} a_i) &\leftrightarrow x \in b \wedge x \notin \bigcap_{i\in I} a_i \leftrightarrow x \in b \wedge \exists i \in I\ (x \notin a_i)\\
&\leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in b \wedge x \notin a_i) \leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in b - a_i)\\
&\leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(b - a_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{6})\ x \in b - (\bigcup_{i\in I} a_i) &\leftrightarrow x \in b \wedge x \notin \bigcup_{i\in I} a_i \leftrightarrow x \in b \wedge \forall i \in I\ (x \notin a_i)\\
&\overset{(I\neq\emptyset)}{\leftrightarrow} \forall i \in I\ (x \in b \wedge x \notin a_i) \leftrightarrow \forall i \in I\ (x \in b - a_i)\\
&\leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(b - a_i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{7})\ \langle x, z\rangle \in b \times \bigcap_{i\in I} a_i &\leftrightarrow x \in b \wedge z \in \bigcap_{i\in I} a_i\\
&\leftrightarrow x \in b \wedge \forall i \in I\ (z \in a_i)\\
&\overset{(I\neq\emptyset)}{\leftrightarrow} \forall i \in I\ (x \in b \wedge z \in a_i)\\
&\leftrightarrow \forall i \in I\ (\langle x, z\rangle \in b \times a_i)\\
&\leftrightarrow \langle x, z\rangle \in \bigcap_{i\in I}(b \times a_i)
\end{aligned}
$$

(8) Razonamiento análogo al realizado en (7).

2.7. Problemas propuestos

Ejercicio 2.1. Sea R una clase. Probar que $(R^{-1})^{-1} = R \leftrightarrow R$ relación.

Indicación: Pruébese que si $X = Y^{-1}$, entonces X es una relación.

Ejercicio 2.2. Sean R una relación y a, b conjuntos. Probar que:

(1) $R[a \cup b] = R[a] \cup R[b]$.

(2) $R[a \cap b] \subseteq R[a] \cap R[b]$.

(3) $R[a] - R[b] \subseteq R[a - b]$.

(4) Si $a \subseteq \text{dom}(R)$, entonces $a \subseteq R^{-1}[R[a]]$.

(5) Si $a \subseteq \text{rang}(R)$, entonces $a \subseteq R[R^{-1}[a]]$.

(6) ¿Son válidas las igualdades en (2), (3), (4) y (5)?

Ejercicio 2.3. Sean R y S relaciones tales que $\text{rang}(R) \subseteq \text{dom}(S)$. Probar que

$$\text{dom}(S \circ R) = \text{dom}(R)$$

Ejercicio 2.4. Calcular $(\bigcup 1) \times 2$ e $(\bigcap 1) \times 2$.

Ejercicio 2.5. Sea $x = \mathbf{P}(2)$. Calcular $\text{dom}(\in_x)$ y $\text{rang}(\in_x)$.

Ejercicio 2.6. Sea x un conjunto. Probar que x^2 es una aplicación si y sólo si x es vacío o unitario.

Ejercicio 2.7. Sean a, b, c y d conjuntos tales que $a \times b = c \times d$. ¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que $a = c$ y $b = d$?

Ejercicio 2.8. Sean x, y y z conjuntos. Demostrar o refutar:

(1) $\text{dom}(x \cup y) = \text{dom}(x) \cup \text{dom}(y)$.

(2) $\text{dom}(x \cap y) = \text{dom}(x) \cap \text{dom}(y)$.

(3) $x \circ (y \cup z) = (x \circ y) \cup (x \circ z)$.

Nota: Sean A y B clases. Se definen $\text{dom}(A) = \text{dom}(A \cap (\mathbf{V} \times \mathbf{V}))$ y $A \circ B = (A \cap (\mathbf{V} \times \mathbf{V})) \circ (B \cap (\mathbf{V} \times \mathbf{V}))$.

Ejercicio 2.9. Probar que la clase $A = \{f \circ g : f, g \in {}^2 2\}$ es un conjunto y calcular todos sus elementos.

Ejercicio 2.10. Con los axiomas introducidos hasta ahora, demostrar o refutar:

(1) $\forall x\ (\{x\} \times \{x\} = \{\{\{x\}\}\})$.

(2) $\forall x\ \exists! f\ (f : x \to x \wedge f \circ f^{-1} = f)$.

Ejercicio 2.11. Sean a y b dos conjuntos y $f : a \to b$. Probar que f es inyectiva si y sólo si para cualquier conjunto c y aplicaciones $g : c \to a$, $h : c \to a$ tales que $f \circ g = f \circ h$, se tiene que $g = h$.

Indicación: Para la implicación $\Longleftarrow$, supóngase que existen $x, y \in a$ tales que $f(x) = f(y)$ y considérese $c = \{\emptyset\}$, $g(\emptyset) = x$ y $h(\emptyset) = y$.

Ejercicio 2.12. Sean a y b dos conjuntos y $f : a \to b$. Probar que:

(1) f es suprayectiva si y sólo si para todo $x \subseteq a$, $b - f[x] \subseteq f[a - x]$.

(2) f es suprayectiva si y sólo si para cualquier conjunto d y aplicaciones $g : b \to d$, $h : b \to d$ tales que $g \circ f = h \circ f$, se tiene que $g = h$.

Indicación:(1) Para la implicación $\Longleftarrow$, tómese $x = \emptyset$. (2) Para la implicación $\Longleftarrow$, pruébese el contrarrecíproco buscando un cotraejemplo adecuado.

Ejercicio 2.13. Sean a y b dos conjuntos y $f : a \to b$. Probar que f es biyectiva si y sólo si para todo $x \subseteq a$ se tiene que $f[a - x] = b - f[x]$.

Indicación: Pruébese un resultado análogo al del apartado (1) del problema 2.12, para la inyectividad.

Ejercicio 2.14. Sean a, b, c y d conjuntos, $f : a \to b$, $g : b \to c$ y $h : c \to d$. Probar que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces f, g y h también lo son.

Ejercicio 2.15. Sean x e y dos conjuntos y $f : x \to y$. Definimos la relación R en x: $\langle a, b\rangle \in R \leftrightarrow f(a) = f(b)$, para cualesquiera $a, b \in x$.

(1) Probar que R es una relación de equivalencia en x.

(2) Probar que $g = \{\langle u, b\rangle : u \in x/R \wedge \exists a(a \in x \wedge u = \overline{a}^R \wedge b = f(a))\}$ es una aplicación.

(3) Probar que g es inyectiva.

Ejercicio 2.16. Encontrar el error en el siguiente razonamiento:

> *"Sea R una relación simétrica y transitiva en A. Sean $x, y \in A$ tales que xRy. De la simetría de R se deduce que yRx. Luego, $xRy \wedge yRx$. De la transitividad de R resulta que xRx. Por tanto, la relación R es reflexiva en A".*

Ejercicio 2.17. Sea R una relación en una clase A. Probar que:

(1) R es reflexiva en A si y sólo si $I_A \subseteq R$.

(2) R es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

(3) R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.

(4) Si R es reflexiva en A y transitiva, entonces $R \circ R = R$ ¿Es cierto el recíproco?

(5) R es de equivalencia en A si y sólo si $R \circ R^{-1} = R$ y $\mathrm{dom}(R) = A$.

Indicación:(5) Aplíquense los apartados anteriores.

Ejercicio 2.18. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en una clase A. Probar que $R_1 \circ R_2$ es de equivalencia en A si y sólo si $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Indicación: Utilícese el ejercicio 2.17.

Ejercicio 2.19. Sea S una clase no vacía cuyos elementos son relaciones de equivalencia en un conjunto x. Probar que $\bigcap S$ es una relación de equivalencia en x.

Ejercicio 2.20. Sea x un conjunto. Probar que es un conjunto la clase

$$A = \{R : R \text{ es una relación de equivalencia en } x\}$$

Ejercicio 2.21. Sea R una relación que es un conjunto. Demostrar que:

(1) La clase $A = \{S : S \text{ relación transitiva y } R \subseteq S\}$ es propia.

(2) La relación $R^t = \bigcap A$ es un conjunto tal que $R \subseteq R^t$ y R^t es una relación transitiva.

(3) Si S es una relación transitiva tal que $R \subseteq S$, entonces $R^t \subseteq S$.

(4) Si x es un conjunto tal que $\mathrm{campo}(R) \subseteq x$ y $R^*_x = R^t \cup I_x$, entonces R^*_x es una relación reflexiva y transitiva en x, y, además, está contenida en cualquier relación reflexiva y transitiva en x que contenga a R.

Nota: R^*_x se denomina *clausura reflexiva–transitiva* de R en x.

Capítulo 3

Relaciones de orden

3.1. Órdenes parciales

Definición 3.1.1. Sean A una clase y R una relación en A. Diremos que:

1. R es *irreflexiva* en A si $\forall x \in A(\langle x, x\rangle \notin R)$.

2. R es *transitiva* en A si $\forall x, y, z \in A(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \to \langle x, z\rangle \in R)$.

3. R es *conexa* en A si $\forall x, y \in A(\langle x, y\rangle \in R \vee x = y \vee \langle y, x\rangle \in R)$.

4. R es un *orden parcial* en A si R es irreflexiva y transitiva en A.

5. R es un *orden total* en A si R es irreflexiva, transitiva y conexa en A.

6. $\langle A, R\rangle$ es una clase parcialmente ordenada (p.o.) si R es un orden parcial en la clase A.

7. $\langle A, R\rangle$ es una clase totalmente ordenada (t.o.) si R es un orden total en la clase A.

Ejemplos:

(1) La relación $\emptyset$ es un orden total en $\emptyset$ y en cualquier conjunto unitario.

(2) La relación $\emptyset$ es un orden parcial no total en cualquier conjunto que posea más de un elemento.

(3) Si a es un conjunto no vacío, entonces la relación de identidad, I_a, no es un orden parcial en a.

(4) Si a es un conjunto no vacío, entonces la relación $a \times a$ no es un orden parcial en a.

(5) Si A es una clase, entonces la relación $\subsetneqq$ definida así:

$$x \subsetneqq y \leftrightarrow x \in A \wedge y \in A \wedge x \subsetneqq y$$

es un orden parcial en A que, en general, no es total.

Notas: Con frecuencia, usaremos el símbolo $<$ para representar genéricamente una relación de orden en una clase A. Si $x < y \vee y < x$, entonces diremos que los conjuntos x e y son *comparables* por la relación $<$.

Representaremos por $x > y$ la expresión $y < x$.

Representaremos por $x \not< y$ la expresión $\neg(x < y)$.

Representaremos por $x \leqslant y$ la expresión $(x < y \ \vee x = y)$.

Representaremos por $x \geqslant y$ la expresión $(y < x \ \vee x = y)$.

Proposición 3.1.2. *Sea $\langle A, < \rangle$ una clase p.o. Sean x, y elementos de A. Entonces*

(1) *Las condiciones $x < y$, $x = y$ e $y < x$ son excluyentes.*

(2) *Si $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, entonces $x = y$ (propiedad antisimétrica).*

Proposición 3.1.3. *Sea R un orden parcial (resp. total) en una clase A. Entonces*

(1) *R^{-1} es un orden parcial (resp. total) en A (orden inverso).*

(2) *Si $B \subseteq A$, entonces $R \cap (B \times B)$ es un orden parcial (resp. total) en B (orden inducido por R en B).*

Elementos notables en una clase parcialmente ordenada

Definición 3.1.4. Sean $\langle A, < \rangle$ una clase p.o. y $B \subseteq A$. Sea $x \in A$. Entonces

1. x es una *cota superior* de B en $\langle A, < \rangle$ si $\forall y \ (y \in B \rightarrow y \leqslant x)$.

2. x es una *cota inferior* de B en $\langle A, < \rangle$ si $\forall y \ (y \in B \rightarrow x \leqslant y)$.

3. Diremos que B está *acotada superiormente* (resp. *acotada inferiormente*) en $\langle A, < \rangle$, si B posee, al menos, una cota superior (resp. inferior) en $\langle A, < \rangle$.

4. Diremos que B está *acotada* en $\langle A, < \rangle$ si lo está superior e inferiormente.

5. x es el *supremo* de B en $\langle A, < \rangle$ (y notaremos $x = \sup B$) si x es cota superior de B y $\forall y$ (y cota superior de $B \rightarrow x \leqslant y$).

6. x es el *ínfimo* de B en $\langle A, <\rangle$ (y notaremos $x = \text{ínf } B$) si x es cota inferior de B y $\forall y$ (y cota inferior de $B \to y \leqslant x$).

7. x es el *máximo* o *último elemento* de B en $\langle A, <\rangle$ si $x = \sup B$ y $x \in B$. Notaremos $x = \text{máx } B$.

8. x es el *mínimo* ó *primer elemento* de B en $\langle A, <\rangle$ si $x = \text{ínf } B$ y $x \in B$. Notaremos $x = \text{mín } B$.

9. x es un elemento *maximal* de B en $\langle A, <\rangle$ si $x \in B$ y $\forall y\ (y \in B \to x \not< y)$.

10. x es un elemento *minimal* de B en $\langle A, <\rangle$ si $x \in B$ y $\forall y\ (y \in B \to y \not< x)$.

Intervalos en una clase parcialmente ordenada

Definición 3.1.5. Sean $\langle A, <\rangle$ una clase p.o. y x, y elementos de A.

(a) El *intervalo cerrado* de extremos x e y, que notaremos $[x, y]$, es la clase $\{z \in A : x \leqslant z \wedge z \leqslant y\}$.

(b) El *intervalo abierto* de extremos x e y, que notaremos $]x, y[$, es la clase $\{z \in A : x < z \wedge z < y\}$.

(c) El *intervalo abierto a la izquierda* y *cerrado a la derecha* de extremos x e y, que notaremos $]x, y]$, es la clase $\{z \in A : x < z \wedge z \leqslant y\}$.

(d) El *intervalo cerrado a la izquierda* y *abierto a la derecha* de extremos x e y, que notaremos $[x, y[$, es la clase $\{z \in A : x \leqslant z \wedge z < y\}$.

(e) El *intervalo abierto a la izquierda* e *ilimitado a la derecha* de extremo x, que notaremos $]x, \to[$, es la clase $\{z \in A : x < z\}$.

(f) El *intervalo cerrado a la izquierda* e *ilimitado a la derecha* de extremo x, que notaremos $[x, \to[$, es la clase $\{z \in A : x \leqslant z\}$.

(g) El *intervalo ilimitado a la izquierda* y *abierto a la derecha* de extremo x, que notaremos $]\leftarrow, x[$, es la clase $\{z \in A : z < x\}$.

(h) El *intervalo ilimitado a la izquierda* y *cerrado a la derecha* de extremo x, que notaremos $]\leftarrow, x]$, es la clase $\{z \in A : z \leqslant x\}$.

(i) El *intervalo ilimitado a la izquierda* y *a la derecha*, es la clase A y notaremos $]\leftarrow, \to[$.

Segmentos y secciones iniciales en una clase parcialmente ordenada

Definición 3.1.6. Sean $\langle A, <\rangle$ una clase p.o. y $x \in A$.

(a) La *sección inicial* de $\langle A, <\rangle$ de extremo x (que notaremos $S^A_<(x)$, o bien A_x) es el intervalo $]\leftarrow, x[$; es decir, es la clase $\{y \in A: \; y < x\}$.

(b) Diremos que una subclase B de A es una *sección inicial* de $\langle A, <\rangle$ si

$$\exists x \; (x \in A \wedge B = S^A_<(x))$$

(c) Diremos que una subclase B de A es un *segmento inicial* de $\langle A, <\rangle$ si

$$\forall x \forall y \; (x \in A \wedge y \in B \wedge x < y \to x \in B)$$

Observaciones:

(1) Toda sección inicial es un segmento inicial.

(2) Existen segmentos iniciales que no son secciones iniciales.

(3) Todo intervalo ilimitado a la izquierda es un segmento inicial.

(4) Existen segmentos iniciales que no son intervalos ilimitados a la izquierda.

Definición 3.1.7. Sea $\langle A, <\rangle$ una clase p.o. y $x, y \in A$. Diremos que

(a) x es un *predecesor* de y (y es un *sucesor* de x) en $\langle A, <\rangle$ si $x < y$.

(b) x es un *predecesor inmediato* ó *anterior* de y (o bien, y es un *sucesor inmediato* ó *siguiente* de x) en $\langle A, <\rangle$ si $x < y$ y $]x, y[= \emptyset$.

Homomorfismos entre clases parcialmente ordenadas

Definición 3.1.8. Sean $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ clases p.o. Sea F una aplicación tal que dom $(F) = A$ y rang $(F) \subseteq B$ (es decir, F es una aplicación de la clase A en la clase B). Diremos que

(a) F es un *homomorfismo* (y notaremos $F: \; A \; \simeq \; B$) si

$$\forall x, y \in A \; (xRy \to F(x)SF(y))$$

(b) F es una aplicación *creciente* si $\forall x, y \in A(xRy \leftrightarrow F(x)SF(y))$.

(c) F es una *inmersión* si F es creciente e inyectiva.

(d) F es un *isomorfismo* (y notaremos $F: \; A \; \cong \; B$) si F es creciente y biyectiva.

(e) Dos clases p.o. son isomorfas si existe, al menos, un isomorfismo de una en otra.

Observaciones:

(1) Inmersión $\Longrightarrow$ Creciente $\Longrightarrow$ Homomorfismo.

(2) La composición de homomorfismos es un homomorfismo.

(3) La aplicación inversa de un isomorfismo es un isomorfismo. Luego la definición dada en el apartado **(e)** no contiene ambigedad alguna.

(4) La relación "ser isomorfos.[es] de equivalencia entre clases p.o.

3.2. órdenes totales

En esta sección se trata de probar algunas propiedades válidas para órdenes totales que, en cambio, no lo son, en general, para órdenes parciales.

Es fácil dar ejemplos de clases p.o. en las que haya subclases que posean varios elementos minimales. Pues bien, en una clase t.o. si una subclase posee algún elemento minimal, entonces éste es el mínimo y, a posteriori, es el único minimal de la subclase (análoga consideración para los elementos maximales).

Proposición 3.2.1. *Sean $\langle A, < \rangle$ una clase t.o., $B \subseteq A$ y $x \in B$. Entonces*

(1) *x es un elemento maximal de B si y sólo si $x =$máx(B).*

(2) *x es un elemento minimal de B si y sólo si $x =$mín(B).*

En una clase p.o. pueden existir dos secciones iniciales que tengan extremos distintos y, en cambio, sean iguales las secciones (¿un ejemplo?). Esto no ocurre en las clases t.o.

Proposición 3.2.2. *Sean $\langle A, < \rangle$ una clase t.o. Entonces*

$$\forall x \in A \; \forall y \in A \; (S^A_<(x) = S^A_<(y) \leftrightarrow x = y)$$

Existen clases p.o. que poseen segmentos iniciales tales que ninguno de ellos está contenido en el otro (dar algún ejemplo). Esto no ocurre en las clases t.o.

Proposición 3.2.3. *Sea $\langle A, < \rangle$ una clase t.o. Si B y C son segmentos iniciales de $\langle A, < \rangle$, entonces $B \subseteq C \vee C \subseteq B$.*

Entre clases p.o. un homomorfismo no tiene por qué ser una aplicación creciente (¿un ejemplo?). Asímismo, una aplicación creciente entre clases p.o. no tiene por qué ser una inmersión entre dichas clases (dar un ejemplo). Pues bien, los conceptos "homomorfismo", "aplicación creciente.[e]'inmersión"son equivalentes entre clases t.o.

Proposición 3.2.4. *Sean $\langle A, R\rangle$,$\langle B, S\rangle$ clases t.o. Sea F una aplicación tal que $dom(F) = A$ y $rang(F) \subseteq B$. Son equivalentes:*

(1) *F es un homomorfismo de $\langle A, R\rangle$ en $\langle B, S\rangle$.*

(2) *F es una aplicación creciente de $\langle A, R\rangle$ en $\langle B, S\rangle$.*

(3) *F es una inmersión de $\langle A, R\rangle$ en $\langle B, S\rangle$.*

En realidad, en la proposición anterior únicamente se necesita la propiedad conexa para la relación R.

Proposición 3.2.5. *Sean $\langle A, R\rangle$ y $\langle B, S\rangle$ clases p.o isomorfas. Entonces $\langle A, R\rangle$ es t.o. si y sólo si $\langle B, S\rangle$ es t.o.*

3.3. Buenos órdenes

Definición 3.3.1. Sean A una clase y R una relación en A. Diremos que R es un *buen orden* (b.o.) en A si satisface las propiedades siguientes:

(a) R es irreflexiva y transitiva en A (es decir, R es un orden parcial en A).

(b) $\forall x(x \in A \to S_R^A(x)$ es un conjunto) (diremos que R es *adecuada* en A).

(c) $\forall x(x \subseteq A \wedge x \neq \emptyset \to \exists y(y = \text{mín}_R(x)))$. (diremos que R satisface el *principio de minimización* o *del menor elemento* en A).

Si R es un buen orden en una clase A, entonces diremos que $\langle A, R\rangle$ es una clase bien ordenada.

Así pues, un buen orden en una clase A es un orden parcial, adecuado en dicha clase y por el que cada subconjunto no vacío de la clase posee elemento mínimo.

Ejemplos:

(1) La relación $\emptyset$ es un buen orden en el conjunto $\emptyset$.

(2) El "orden usual"del conjunto ω de los números naturales (que se estudiará en el tema 5), es un buen orden en ω.

(3) El "orden usual"del conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un orden total que no es un buen orden en $\mathbb{Z}$.

Consideraciones:

(1) Toda clase bien ordenada es una clase totalmente ordenada.

(2) Existen clases totalmente ordenadas que no son bien ordenadas.

(3) Toda relación en un conjunto es adecuada.

(4) Si R es un b.o. en una clase A, entonces R^{-1} no tiene por qué ser un b.o. en A.

(5) Si R es un b.o. en una clase A y B es una subclase de A, entonces la relación $R \cap (B \times B)$ es un b.o. en B (Normalmente escribiremos $\langle B, R\rangle$ en lugar de $\langle B, R \cap (B \times B)\rangle$).

Proposición 3.3.2. *Sea $\langle A, <\rangle$ una clase b.o. y B una subclase no vacía de A. Entonces, B posee elemento mínimo en $\langle A, <\rangle$.*

Nota: La proposición anterior justifica que, dada una fórmula $\varphi(x)$, se describa el *principio de minimización* ó *del menor elemento* para dicha fórmula como sigue:

$$\exists x \varphi(x) \rightarrow (\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \rightarrow x \leqslant y)))$$

En una clase totalmente ordenada pueden existir elementos distintos del máximo, que carezcan de elemento siguiente (ver ejercicio propuesto 3.17, apartado 2). Esa situación no se da en las clases bien ordenadas.

Proposición 3.3.3. *(Existencia de elemento siguiente en una clase b.o.)*

Sean $\langle A, <\rangle$ una clase b.o. y $x \in A$ tal que $\exists y(y \in A \wedge x < y)$. Entonces x posee un único siguiente en $\langle A, <\rangle$.

¿Será cierto una especie de recíproco de la proposición anterior? Es decir, si en una clase totalmente ordenada todo elemento distinto del máximo (si lo hubiere) posee siguiente ¿podemos asegurar que dicha clase es bien ordenada? La respuesta es negativa (ver ejercicio propuesto 3.18, apartado 1).

Por otra parte, en una clase totalmente ordenada pueden existir segmentos iniciales propios que no sean secciones iniciales (ver ejercicio 37). Pues bien, esto no ocurre en las clases bien ordenadas.

Proposición 3.3.4. *Sean $\langle A, <\rangle$ una clase b.o. y B un segmento inicial de A tal que $B \neq A$. Entonces existe $x \in A$ tal que $B = S^A_<(x)$.*

Al igual que antes, podemos plantearnos si será cierto una especie de recíproco de la proposición anterior. Es decir, si en una clase totalmente ordenada todo segmento inicial propio, es una sección inicial ¿podemos asegurar que dicha clase es bien ordenada? La respuesta es negativa (ver ejercicio propuesto 3.18, apartado 3).

Teorema 3.3.5. *(de inducción en una clase b.o.)*

Sea $\langle A, < \rangle$ una clase b.o. Sea B una suclase de A tal que

$$\forall x (x \in A \wedge \,] \leftarrow, x[\subseteq B \rightarrow x \in B)$$

Entonces $B = A$.

Nota: El teorema de inducción se puede expresar en términos de fórmulas del **LTC**. Sean $\langle A, < \rangle$ una clase b.o. y $\varphi(x)$ una fórmula. Entonces

$$(\forall x \in A \; (\forall y \in A \; (y < x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x))) \rightarrow \forall x \in A \; \varphi(x)$$

Definición 3.3.6. Sean $\langle A, < \rangle$ una clase p.o. y $B \subseteq A$. Diremos que *B satisface la hipótesis de inducción* en $\langle A, < \rangle$ si $\forall x \in A \; (] \leftarrow, x[\subseteq B \rightarrow x \in B)$.

Proposición 3.3.7. *Sea $\langle A, < \rangle$ una clase t.o. Si A es la única subclase de A que satisface la hipótesis de inducción, entonces, $\langle A, < \rangle$ es un clase b.o.*

Teorema 3.3.8. *Sean $\langle A, < \rangle$ y $\langle B, <' \rangle$ clases b.o. Sean F y G homomorfismos de $\langle A, < \rangle$ en $\langle B, <' \rangle$. Si $\mathrm{rang}(G)$ es un segmento inicial de $\langle B, <' \rangle$, entonces $\forall x (x \in A \rightarrow G(x) \leqslant' F(x))$.*

Corolario 3.3.9. *Sean $\langle A, < \rangle$ una clase b.o. y F una aplicación creciente de $\langle A, < \rangle$ en $\langle A, < \rangle$. Entonces $\forall x (x \in A \rightarrow x \leqslant F(x))$.*

Corolario 3.3.10. *Sean $\langle A, < \rangle$ y $\langle B, <' \rangle$ clases b.o. isomorfas. Entonces existe un único isomorfismo entre dichas clases b.o.*

Del corolario anterior resulta que el único isomorfismo que existe de una clase b.o. en sí misma, es la identidad.

Corolario 3.3.11. *Sean $\langle A, < \rangle$ una clase b.o. y $x \in A$. Si B es una subclase de $S^A_<(x)$, entonces $\langle A, < \rangle$ no es isomorfa a $\langle B, < \rangle$.*

Recordemos que en una clase t.o., si dos secciones iniciales son iguales, entonces tienen que coincidir sus extremos. Pues bien, en las clases b.o. se verifica aún más.

Corolario 3.3.12. *Sean $\langle A, < \rangle$ una clase b.o. y $x, y \in A$. Si $S^A_<(x) \cong S^A_<(y)$, entonces $x = y$.*

Proposición 3.3.13. *Sean $\langle A, < \rangle$ y $\langle B, <' \rangle$ clases b.o. Sea F un isomorfismo de $\langle A, < \rangle$ en $\langle B, <' \rangle$. Entonces*

$$\forall x (x \in A \rightarrow F \upharpoonright S^A_<(x) : \langle S^A_<(x), < \rangle \cong \langle S^B_{<'}(F(x)), <' \rangle)$$

Proposición 3.3.14. *Sean $\langle A, < \rangle$ y $\langle B, <' \rangle$ clases b.o. y $x, y \in A$. Sea F un isomorfismo de $\langle S^A_<(x), < \rangle$ en $\langle S^B_{<'}(y), <' \rangle$. Entonces, para cada $z \in A$ tal que $z < x$ se verifica:*

$$F \upharpoonright S^A_<(z) : \langle S^A_<(z), < \rangle \cong \langle S^B_{<'}(F(z)), <' \rangle$$

Teorema 3.3.15. *(de comparación de buenos órdenes) (Cantor, 1897).*

Sean $\langle A, < \rangle$ y $\langle B, <' \rangle$ clases b.o. Se verifica una, y sólo una, de las siguientes condiciones :

(1) $\langle A, < \rangle \cong \langle B, <' \rangle$.

(2) $\exists! x \in A(\langle S^A_<(x), < \rangle \cong \langle B, <' \rangle)$.

(3) $\exists! y \in B(\langle A, < \rangle \cong \langle S^B_{<'}(y), <' \rangle)$.

Definición 3.3.16. Diremos que una clase A es **bien ordenable** si existe una relación R que es un buen orden en A.

Nota: Con los axiomas estudiados hasta ahora, no se puede demostrar ni refutar que todo conjunto sea bien ordenable.

3.4. Problemas resueltos

Nota: En los ejercicios de este tema que lo necesiten, admitiremos las propiedades usuales de los números naturales (ω) y enteros ($\mathbb{Z}$), así como algunas propiedades “intuitivas"de los conjuntos finitos e infinitos.

Ejercicio 29. *Diremos que una clase p.o. verifica la propiedad del supremo (resp. propiedad del ínfimo) si toda subclase no vacía de la clase que esté acotada superiormente (resp. inferiormente), posee supremo (resp. ínfimo). Probar que una clase p.o. verifica la propiedad del supremo si y sólo si verifica la propiedad del ínfimo.*

Sea $\langle A, < \rangle$ una clase p.o que verifica la propiedad del supremo. Sea B una subclase no vacía de A acotada inferiormente en $\langle A, < \rangle$. Entonces,

$$C = \{x : \ x \text{ es cota inferior de } B \text{ en } \langle A, < \rangle\}$$

es una subclase no vacía de A acotada superiormente en $\langle A, < \rangle$ (cualquier elemento de B es cota superior de dicha clase). Luego, existe $d = \sup(C)$.

Veamos que $d = \text{ínf}(B)$

– d es cota inferior de B. En efecto: sea $x \in B$. Entonces x es cota superior de C y, por tanto, $d \leqslant x$.

– d es la mayor de las cotas inferiores de B. En efecto: si x es cota inferior de B, entonces $x \in C$ y, por tanto, $x \leqslant d$.

La prueba de la otra implicación es análoga.

Ejercicio 30. *Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto t.o. Consideremos el conjunto b caracterizado por la siguiente condición:*

$$\begin{aligned} x \in b \quad \leftrightarrow \quad & x \text{ segmento de } \langle a, < \rangle \wedge \emptyset \neq x \neq a \wedge \\ & x \text{ carece de elemento máximo en } \langle a, < \rangle \end{aligned}$$

Demostrar que:

(1) *Todo elemento de b está acotado superiormente en $\langle a, < \rangle$.*

(2) *Si $x, y \in b$, entonces $x \subsetneqq y \leftrightarrow y - x \neq \emptyset$.*

(3) *El conjunto p.o. $\langle b, \subsetneqq \rangle$ verifica la propiedad del supremo.*

Obsérvese que b es un conjunto ya que $b \subseteq \mathbf{P}(a)$.

(1) Sea $c \in b$. Veamos que c está acotado superiormente en $\langle a, < \rangle$. Como $c \neq a$, existe $x \in a - c$. Entonces $\forall y \in c\ (y < x)$ pues, de lo contrario, existiría $y \in c$ tal que $x \leqslant y$. Como c es un segmento e $y \in c$ resultaría que $x \in c$. Lo que es una contradicción.

(2) Sean $x, y \in b$ tales que $y - x \neq \emptyset$. Sea $z \in y - x$.Veamos que $x \subsetneqq y$. Para ello, sea $t \in x$. Como $z \in y - x \subseteq a - x$, por lo visto en (1) se deduce que $t < z$. Como $z \in y$ e y es un segmento, resulta que $t \in y$.

(3) Sea c un subconjunto no vacío de b que está acotado superiormente en $\langle b, \subsetneqq \rangle$. Sea d una cota superior de c en dicho conjunto. Entonces, $\forall x \in c (x \subseteq d)$. Luego $\bigcup c \subseteq d \subsetneqq a$. Luego, $\bigcup c$ es un segmento de $\langle a, < \rangle$, no vacío, distinto de a. Teniendo presente que cada elemento de c carece de máximo en $\langle a, < \rangle$, resulta que $\bigcup c$ es un segmento de a que carece de máximo en $\langle a, < \rangle$. Es decir, $\bigcup c \in b$. Entonces, es inmediato que $\bigcup c$ es el supremo de c en $\langle b, \subsetneqq \rangle$.

Ejercicio 31. *Sean $\langle a, R \rangle$ y $\langle b, S \rangle$ conjuntos p.o. (resp. t.o. ó b.o.) tales que $a \cap b = \emptyset$. Sea $R \oplus S = R \cup S \cup (a \times b)$. Demostrar que $\langle a \cup b, R \oplus S \rangle$ es un conjunto p.o. (resp. t.o. ó b.o.). $[\![$ Diremos que $R \oplus S$ es la ordenación suma lexicográfica de R y S y notaremos $\langle a \cup b, R \oplus S \rangle = \langle a, R \rangle \oplus \langle b, S \rangle$ $]\!]$*

En primer lugar, observemos que la relación $R \oplus S$ en $a \cup b$ puede expresarse equivalentemente como sigue:

$$\langle x, y \rangle \in R \oplus S \iff (x \in a \wedge y \in a \wedge xRy) \vee (x \in b \wedge y \in b \wedge xSy) \vee (x \in a \wedge y \in b)$$

Es decir, “en primer lugarçolocamos todos los elementos del conjunto a, según la ordenación R, y “a continuación"todos los elementos de b, según la ordenación S. Su representación gráfica es:

$$\xrightarrow{\qquad\langle A, R\rangle\qquad} \quad \xrightarrow{\qquad\langle B, S\rangle\qquad} \quad \langle A \cup B, R \oplus S\rangle$$

(1) $R \oplus S$ es una relación binaria en $a \cup b$.

En efecto: teniendo presente que $R \subseteq a \times a$ y $S \subseteq b \times b$ resulta que

$$R \oplus S = R \cup S \cup (a \times b) \subseteq (a \cup b) \times (a \cup b)$$

(2) Si R es irreflexiva en a y S es irreflexiva en b, entonces $R \oplus S$ es irreflexiva en $a \cup b$.

En efecto: si $x \in a \cup b$, entonces

- O bien $x \in a$, en cuyo caso $\langle x, x\rangle \notin R$ y $x \notin b$, de donde se deduce que $\langle x, x\rangle \notin R \oplus S$.
- O bien $x \in b$, en cuyo caso $\langle x, x\rangle \notin S$ y $x \notin a$, de donde se deduce que $\langle x, x\rangle \notin R \oplus S$.

(3) Si R es transitiva en a y S es transitiva en b, entonces $R \oplus S$ es transitiva en $a \cup b$.

En efecto: sean $x, y, z \in a \cup b$ tales que $\langle x, y\rangle \in R \oplus S$ e $\langle y, z\rangle \in R \oplus S$. Entonces

<u>Caso 1:</u> $x \in a$ e $y \in a$.

En este caso $\langle x, y\rangle \in R$. Luego,

- O bien $z \in a$, en cuyo caso $\langle y, z\rangle \in R$ y, por tanto, $\langle x, z\rangle \in R$. De donde resulta que $\langle x, z\rangle \in R \oplus S$.
- O bien $z \in b$, en cuyo caso $\langle x, z\rangle \in a \times b \subseteq R \oplus S$.

<u>Caso 2:</u> $x \in b$ e $y \in b$.

En este caso: $x, y, z \in b$. Luego, de la transitividad de S en b resulta que xSz. Es decir, $\langle x, z\rangle \in R \oplus S$.

<u>Caso 3:</u> $x \in a$ e $y \in b$.

En este caso, $\langle y, z\rangle \in S \Longrightarrow z \in b$. Luego, $\langle x, z\rangle \in a \times b \subseteq R \oplus S$.

(4) Si R es conexa en a y S es conexa en b, entonces $R \oplus S$ es conexa en $a \cup b$.

En efecto: sean $x, y \in a \cup b$ tales que $x \neq y$. Entonces

– O bien $x \in a$ e $y \in a$, en cuyo caso $(xRy) \vee (yRx)$ y, por tanto,

$$\langle x, y\rangle \in R \oplus S \vee \langle y, x\rangle \in R \oplus S$$

– O bien $x \in a$ e $y \in b$, en cuyo caso $\langle x, y\rangle \in R \oplus S$.

– O bien $x \in b$ e $y \in a$, en cuyo caso $\langle y, x\rangle \in R \oplus S$.

– O bien $x \in b$ e $y \in b$, en cuyo caso $(xSy) \vee (ySx)$ y, por tanto,

$$\langle x, y\rangle \in R \oplus S \vee \langle y, x\rangle \in R \oplus S$$

(5) Si R satisface el principio de minimización en a y S satisface dicho principio en b, entonces $R \oplus S$ satisface el principio citado en $a \cup b$.

En efecto: sea c un subconjunto no vacío de $a \cup b$.

Caso 1º: Supongamos que $c \cap a \neq \emptyset$.
En este caso, $c \cap a$ es un subconjunto no vacío de a. Luego existe $p = \text{mín}_R\,(c \cap a)$. Veamos que $p = \text{mín}_{R\oplus S}\, c$.

– Obviamente, $p \in c$.
– Para ver que p es una cota inferior de c en $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle$, consideramos $x \in c$ tal que $x \neq p$. Entonces, o bien $x \in b$ (en cuyo caso, $\langle p, x\rangle \in a \times b \subseteq R \oplus S$); o bien $x \notin b$ (en cuyo caso, $x \in c \cap a$ y, por tanto, $\langle p, x\rangle \in R \subseteq R \oplus S$).

Caso 2º: Supongamos que $c \cap a = \emptyset$.
En este caso, c es un subconjunto no vacío de b. Luego existe $q = \text{mín}_S\, c$. Veamos que $q = \text{mín}_{R\oplus S}\, c$.

– Obviamente, $q \in c$.
– Para ver que q es una cota inferior de c en $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle$, consideramos $x \in c$ tal que $x \neq p$. Entonces, $x \in c \Longrightarrow x \in b$. Luego, $\langle q, x\rangle \in S \subseteq R \oplus S$.

Conclusión: si $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ son conjuntos p.o. (resp. t.o. ó b.o.), entonces $\langle a \cup b, R \oplus S\rangle$ es, asímismo, un conjunto p.o. (respectivamente, t.o. ó b.o.).

Nota: Recuérdese que toda relación definida sobre un conjunto es adecuada. Usaremos este resultado sin hacer mención explícita del mismo.

Ejercicio 32. *Sean $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ conjuntos p.o. (resp. t.o. ó b.o.). Sea $R \otimes S$ la relación definida en el conjunto $a \times b$ como sigue:*

$$< x, y > R \otimes S < z, t > \Longleftrightarrow ySt \vee (y = t \wedge xRz)$$

Demostrar que $\langle a \times b, R \otimes S\rangle$ es un conjunto p.o. (resp. t.o. ó b.o.). $\llbracket$ Diremos que $R \otimes S$ es la ordenación producto lexicográfico hebreo de R y S y notaremos $\langle a \times b, R \otimes S\rangle = \langle a, R\rangle \otimes \langle b, S\rangle$ $\rrbracket$

(1) Si R es irreflexiva en a y S es irreflexiva en b, entonces $R \otimes S$ es irreflexiva en $a \times b$.

En efecto: si $\langle x, y\rangle \in a \times b$, entonces $\langle x, x\rangle \notin R$ e $\langle y, y\rangle \notin S$. Luego, $\langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \notin R \otimes S$.

(2) Si R es transitiva en a y S es transitiva en b, entonces $R \otimes S$ es transitiva en $a \times b$.

En efecto: sean $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle, \langle u, v\rangle \in a \times b$ tales que $\langle x, y\rangle R \otimes S\langle z, t\rangle$ y $\langle z, t\rangle R \otimes S\langle u, v\rangle$.

Se tiene que $(ySt \vee y = t) \wedge (tSv \vee t = v)$. Por tanto, $(ySv \vee y = v)$.

Caso 1º: Supongamos que ySv.
En este caso, $\langle x, y\rangle R \otimes S\langle u, v\rangle$.

Caso 2º: Supongamos que $y = v$.
En este caso, $y = t = v$. Luego, $xRz \wedge zRu$. De donde resulta que xRu. En consecuencia, $\langle x, y\rangle R \otimes S\langle u, v\rangle$.

(3) Si R es conexa en a y S es conexa en b, entonces $R \otimes S$ es conexa en $a \times b$.

En efecto: sean $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle \in a \times b$ tales que $\langle x, y\rangle \neq \langle z, t\rangle$. Entonces

Caso 1º: Supongamos que $y \neq t$.
En este caso, resulta que $(ySt) \vee (tSy)$. Por tanto,

$$(\langle x, y\rangle R \otimes S\langle z, t\rangle) \vee (\langle z, t\rangle R \otimes S\langle x, y\rangle)$$

Caso 2º: Supongamos que $y = t$.
En este caso, resulta que $x \neq z$. Luego, $(xRz) \vee (zRx)$. Por tanto,

$$(\langle x, y\rangle R \otimes S\langle z, t\rangle) \vee (\langle z, t\rangle R \otimes S\langle x, y\rangle)$$

(4) Si R satisface el principio de minimización en a y S satisface dicho principio en b, entonces $R \otimes S$ satisface el principio citado en $a \times b$.

En efecto: sea c un subconjunto no vacío de $a \times b$. Consideremos el conjunto

$$d = \text{ rang } (c) = \{y \in b : \exists x \in a(\langle x, y\rangle \in c)\}$$

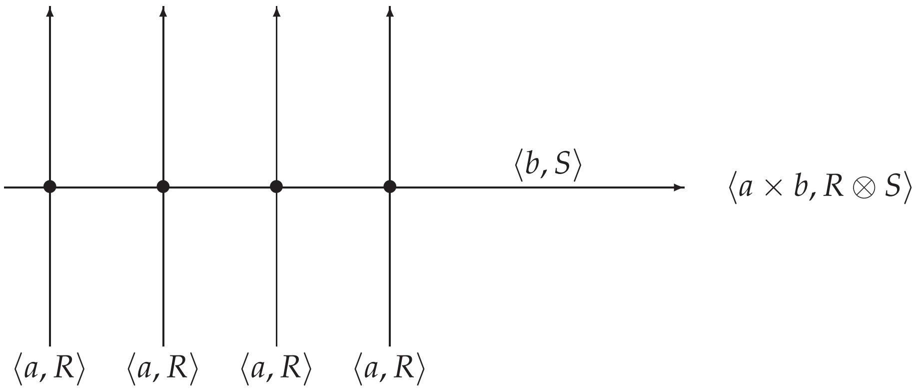
Entonces d es un subconjunto no vacío de b. Luego existe $p = \text{mín}_S\, d$. Consideremos ahora el conjunto $e = \{x \in a : \langle x, p\rangle \in c\}$. Entonces e es un subconjunto no vacío de a (ya que $p \in \text{rang}(c)$). Luego existe $q = \text{mín}_R\, e$. Veamos que $\langle q, p\rangle = \text{mín}_{R\otimes S}\, c$.

– Obviamente, $\langle q, p\rangle \in c$, ya que $q \in e$.
– Para ver que $\langle q, p\rangle$ es una cota inferior de c en $\langle a \times b, R \otimes S\rangle$, consideramos $\langle x, y\rangle \in c$ tal que $\langle x, y\rangle \neq \langle q, p\rangle$. Entonces,

Caso 1º: Supongamos que $p = y$.
En este caso debe verificarse que $q \neq x$. Luego
$$\langle x, y\rangle \in c \wedge y = p \Longrightarrow x \in e \overset{q\neq x}{\Longrightarrow} qRx$$
Es decir, $(p = y \wedge qRx)$. Por tanto, $\langle q, p\rangle R \otimes S\langle x, y\rangle$.
Caso 2º: Supongamos que $p \neq y$.
En este caso:
$$\langle x, y\rangle \in c \Longrightarrow y \in d \overset{p\neq y}{\Longrightarrow} pSy$$
Por tanto, $\langle q, p\rangle R \otimes S\langle x, y\rangle$.

Conclusión: si $\langle a, R\rangle$ y $\langle b, S\rangle$ son conjuntos p.o. (resp. t.o. ó b.o.), entonces $\langle a \times b, R \otimes S\rangle$ es, asímismo, un conjunto p.o. (resp. t.o. ó b.o.).

Terminamos describiendo gráficamente la relación $R \otimes S$ en el conjunto $a \times b$.



Es decir, en la ordenación $R \otimes S$:

- deciden, en primer lugar, las segundas componentes (se van ordenando los pares ordenados en función de la segunda componente, según S);
- entre todos los pares ordenados con la misma segunda componente, “ordeno"según R (por tanto, para cada elemento de b se obtiene una “copia"de $\langle a, R\rangle$) y las copias se “ordenan.entre sí según S.

Ejercicio 33. *(Transporte de órdenes mediante aplicaciones inyectivas) Sean a y b conjuntos, S una relación en b y F una aplicación inyectiva de a en b. Sea R la relación definida en a como sigue:*
$$xRy \Longleftrightarrow F(x)SF(y)$$
Demostrar que si S es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en b, entonces R es un orden parcial (respectivamente, total o buen orden) en a.

(1) Veamos que si S es irreflexiva en b, entonces R es irreflexiva en a.

– Sea $x \in a$. No se verifica que xRx, pues en tal caso resultaría que $F(x)SF(x)$, lo que contradice la irreflexividad de S.

(2) Veamos que si S es transitiva en b, entonces R es transitiva en a.

– Sean $x, y, z \in a$ tales que xRy e yRz. Entonces $F(x)SF(y)$ y $F(y)SF(z)$. De la transitividad de S en b resulta que $F(x)SF(z)$. Luego xRz.

(3) Veamos que si S es conexa en b, entonces R es conexa en a.

– Sean $x, y \in a$ tales que $x \neq y$. Como F es inyectiva, resulta que $F(x) \neq F(y)$. Como S es conexa, resulta que $F(x)SF(y)$ ó $F(y)SF(x)$. Por tanto, xRy ó yRx.

(4) Veamos que si S satisface el principio de minimización en b, entonces R satisface el principio de minimización en a.

– Sea c un subconjunto no vacío de a. Entonces $F[c]$ es un subconjunto no vacío de b. Sea $x = \text{mín}_S\, F[c]$. Como F es inyectiva existe un único $y \in c$ tal que $F(y) = x$. Veamos que $y = \text{mín}_R\, c$.

  ⋆ Obviamente, $y \in c$. Además, si $z \in c$ es tal que $z \neq y$, entonces $F(z) \in F[c]$ y $F(z) \neq F(y) = x$. Luego, $x = F(y)SF(z)$. Es decir, yRz.

Conclusión: Si F es una aplicación biyectiva de a en b, entonces tales propiedades relativas al orden son “trasladables"de un conjunto al otro. Por tanto, si queremos probar una cierta propiedad relativa al orden en un conjunto dado, entonces bastará probar la existencia de una biyección de ese conjunto en otro que, a priori, sabemos verifica la propiedad que se estudia.

Ejercicio 34. *Determinar si las siguientes relaciones son órdenes parciales, órdenes totales o buenos órdenes en los conjuntos, a, que se indican.*

(1) *La relación $xRy \iff x < y$, en los conjuntos $a = \omega$ y $a = \mathbb{Z}$ (siendo $<$ el "orden usual").*

(2) *La relación $xRy \iff (x \text{ divide a } y) \wedge x \neq y$, en el conjunto $a = \omega$.*

(3) *La relación $R = \emptyset$, en el conjunto $a = \emptyset$ y en cualquier conjunto a no vacío.*

(4) *La relación $fRg \iff \exists n \in \omega\ (f(n) < g(n) \wedge \forall m < n\ (f(m) = g(m)))$, en $a = {}^{\omega}2$.*

(5) *La relación $xRy \iff \exists n \in \omega\ (n \cap x = n \cap y \wedge n \in x \wedge n \notin y)$, en el conjunto $a = \mathbf{P}(\omega)$.*

Indicación: *En (4) y (5) pruébese que R es un orden total pero no un buen orden, en los conjuntos considerados.*

(1) La ordenación usual en ω es un buen orden. La ordenación usual en $\mathbb{Z}$ es un orden total que no es un buen orden (ya que $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 0\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}$ que carece de elemento mínimo).

(2) La relación "*divide a*."en ω es orden parcial que no es total, ya que dos números primos entre sí no son comparables por dicha relación.

(3) Vamos a estudiar las propiedades de la relación vacía, $R = \emptyset$, en un conjunto a.

- Sea $a = \emptyset$. Veamos que R es un buen orden en a.
  - R es irreflexiva, ya que $\forall x(x \in \emptyset \to \langle x, x\rangle \notin R)$, pues no existen elementos en $\emptyset$ y el antecedente de la implicación siempre será falso.
  - R es transitiva, ya que si $x, y, z \in \emptyset$ son tales que $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$, entonces $\langle x, z\rangle \in R$. (pues el antecedente de la implicación siempre es falso).
  - R es conexa, ya que
    $\forall x \forall y(x \in \emptyset \wedge y \in \emptyset \wedge x \neq y \to (\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R))$
    (pues el antecedende de la implicación siempre es falso).
  - R satisface el principio de minimización en $\emptyset$ ya que el conjunto vacío carece de subconjuntos no vacíos.
- Sea $a \neq \emptyset$. Veamos que R es un orden parcial en a.
  - R es irreflexiva, ya que $\forall x(x \in a \to \langle x, x\rangle \notin R)$ (pues no existen elementos en R y, por tanto, el consecuente de la implicación siempre será verdadero).

– R es transitiva, ya que si $x, y, z \in a$ son tales que $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$, entonces $\langle x, z\rangle \in R$. (pues no existen elementos en R y el antecedente de la implicación siempre será falso).

Además, si a tiene un único elemento, entonces R es conexa en a (y un buen orden en a). En cambio, si a posee más de un elemento, entonces R no es conexa en a (pues si $x, y \in a$ y $x \neq y$, entonces $\langle x, y\rangle \notin R$ e $\langle y, x\rangle \notin R$).

(4) Vamos a probar que la relación R es un orden total en ${}^{\omega}2$, pero no es un buen orden en dicho conjunto.

- R es irreflexiva en ${}^{\omega}2$, ya que para cada $f \in {}^{\omega}2$ se tiene que

$$\forall n \in \omega (f(n) \not< f(n))$$

- R es transitiva en ${}^{\omega}2$. En efecto: sean $f, g \in {}^{\omega}2$ tales que fRg y gRh. Sean $p, q \in \omega$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} f(p) < g(p) \wedge \forall m < p\ (f(m) = g(m) \\ g(q) < h(q) \wedge \forall m < q\ (g(m) = h(m) \end{array}\right\}$$

Si $r =$mín $\{p, q\}$, entonces

– Para cada $m < r$ se tiene que $m < p$ y $m < q$, luego $f(m) = g(m) = h(m)$.

– Veamos que $f(r) < g(r)$.

⋆ No puede verificarse que $p = q$, pues en tal caso $r = p = q$ y $f(r) = f(p) < g(p) = g(q) < h(q) = h(r)$. Lo que es imposible ya que rang(f), rang(g) y rang$(h) \subseteq \{0, 1\}$.

⋆ Si $p < q$, entonces $r = p$. Luego,

$$f(r) = f(p) < g(p) \overset{p<q}{=} h(p) = h(r)$$

⋆ Si $q < p$, entonces se razona de manera análoga al caso anterior.

- R es conexa en ${}^{\omega}2$. En efecto: sean $f, g \in {}^{\omega}2$ tales que $f \neq g$. Sea

$$p = \text{ mín}\{n \in \omega : \ f(n) \neq g(n)\}$$

(dicho mínimo existe ya que $f \neq g$).
Entonces $\forall m < p\ (f(m) = g(m))$. Además

⋆ O bien se tiene que $f(p) < g(p)$, en cuyo caso fRg.

⋆ O bien se tiene que $g(p) < f(p)$, en cuyo caso gRf.

- R **no** satisface el principio de minimización en ${}^{\omega}2$. En efecto: sea

$$a = \{f : f \in^{\omega} 2 \wedge \exists x (x \in \omega \wedge f(x) = 1)\}$$

Entonces a es un subconjunto no vacío de ${}^{\omega}2$. Veamos que el conjunto a carece de elemento mínimo en $\langle {}^{\omega}2, R \rangle$.

  – Para ello, basta probar que $\forall f \ (f \in a \to \exists g (g \in a \wedge gRf))$. Veámoslo.
    Sea $f \in a$. Consideremos $p = \text{mín}\,\{n \in \omega : f(n) = 1\}$. Definimos la aplicación $g : \omega \to 2$ como sigue

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq p+1 \\ 1 & \text{si} \quad x = p+1 \end{cases}$$

    Entonces $g \in a$. Además gRf ya que $g(p) = 0$, $f(p) = 1$ y, para cada $m < p$ se tiene que $g(m) = 0 = f(m)$.

Conclusión: $\langle {}^{\omega}2, R \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado que no es bien ordenado.

(5) Vamos a probar que la relación R es un orden total en $\mathbf{P}(\omega)$, pero no es un buen orden en dicho conjunto (si bien se verá en el tema 5, conviene adelantar que si $n \in \omega$, entonces $n = \{m \in \omega : m < n\}$, siendo $<$ el orden usual de ω).

- R es irreflexiva en $\mathbf{P}(\omega)$, ya que si $a \in \mathbf{P}(\omega)$ entonces

$$\forall n \ (n \in \omega \to n \notin a - a)$$

- R es transitiva en $\mathbf{P}(\omega)$, ya que si $a, b, c \in \mathbf{P}(\omega)$ satisfacen que aRb y bRc consideramos $n_1, n_2 \in \omega$ verificando que

$$n_1 \cap a = n_2 \cap b \wedge n_1 \in a - b \wedge n_2 \cap b = n_2 \cap c \wedge n_2 \in b - c$$

Entonces $n_1 \neq n_2$, ya que $n_1 \notin b$ y $n_2 \in b$.

  ⋆ Supongamos que $n_1 < n_2$ (es decir, que $n_1 \cap n_2 = n_1$). En este caso, se tiene que

$$\begin{aligned} n_1 \cap a &= n_1 \cap b = (n_1 \cap n_2) \cap b \\ &= n_1 \cap (n_2 \cap c) = (n_1 \cap n_2) \cap c = n_1 \cap c \end{aligned}$$

  Además, $n_1 \in a - c$ ya que $n_1 \in a - b \to n_1 \in a$ y si se verificase que $n_1 \in c$ resultaría que $n_1 \in n_2 \cap c$ (pues $n_1 < n_2 \to n_1 \in n_2$). Luego, $n_1 \in n_2 \cap b$. Lo que contradice que $n_1 \notin b$.

  ⋆ En el caso $n_2 < n_1$ el razonamiento es análogo al anterior.

- R es conexa en $\mathbf{P}(\omega)$. En efecto: sean $a, b \in \mathbf{P}(\omega)$ tales que $a \neq b$. Entonces $(a-b) \cup (b-a)$ es un subconjunto no vacío de ω. Sea p el elemento mínimo de dicho conjunto, respecto de la ordenación usual de ω.
  - ⋆ Veamos que $p \cap a = p \cap b$. En efecto: $p \cap a \subseteq p \cap b$, ya que

$$\begin{aligned} x \in p \cap a &\implies x \in p \wedge x \in a \implies x < p \wedge x \in a \\ &\implies x \notin (a-b) \cup (b-a) \wedge x < p \wedge x \in a \\ &\implies x \in a \cap b \wedge x \in p \implies x \in p \cap b \end{aligned}$$

    Análogamente se prueba que $p \cap b \subseteq p \cap a$.

  Teniendo presente que $p \in (a-b) \cup (b-a)$ resulta que
  - ⋆ O bien $p \in a - b$, en cuyo caso deducimos que aRb.
  - ⋆ O bien $p \in b - a$, en cuyo caso deducimos que bRa.
- R **no** satisface el principio de minimización en $\mathbf{P}(\omega)$. En efecto: ω es un subconjunto no vacío de $\mathbf{P}(\omega)$ y vamos a probar que ω carece de elemento mínimo en $\langle \mathbf{P}(\omega), R \rangle$. Para ello, basta probar que $\forall n \; (n \in \omega \to (n+1)Rn)$.
  - ⋆ Sea $n \in \omega$. Entonces

$$(n+1) \cap n = n = n \cap n \;\text{ y }\; n \in (n+1) - n$$

    Por tanto, $(n+1)Rn$.

Finalizamos proponiendo al lector como ejericio, algunas propiedades que satisface la relación R en el conjunto $\mathbf{P}(\omega)$.

(a) La relación restricción $R \upharpoonright \omega$ es la ordenación inversa de la usual.

(b) El elemento máximo de $\langle \mathbf{P}(\omega), R \rangle$ es 0.

(c) El elemento mínimo de $\langle \mathbf{P}(\omega), R \rangle$ es ω.

Ejercicio 35. *Consideremos la aplicación $f : \omega \to \omega$ definida como sigue :*

$$f(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \leqslant 1 \\ \text{número de factores primos de } n \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

Sea $<$ la ordenación usual de ω y consideremos la relación R definida por :

$$pRq \iff f(p) < f(q) \vee (f(p) = f(q) \wedge p < q)$$

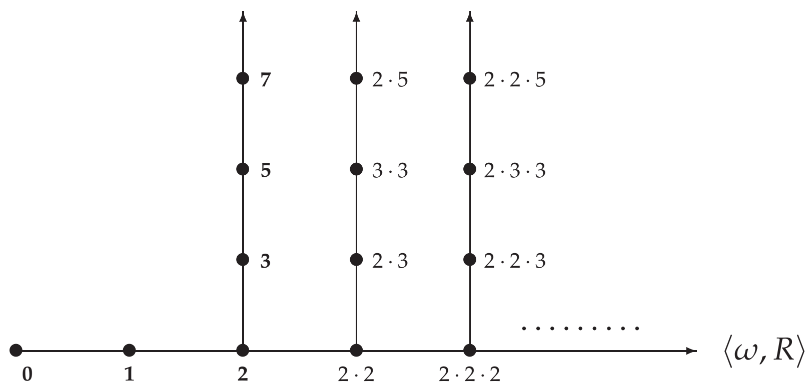
Se pide:

(1) *Probar que $\langle \omega, R \rangle$ es un conjunto bien ordenado.*

(2) *Demostrar que $\langle \omega, < \rangle \ncong \langle \omega, R \rangle$.*

Indicación: *Para probar que $\langle \omega, < \rangle \ncong \langle \omega, R \rangle$, téngase presente que todo subconjunto de ω acotado superiormente, por la ordenación usual, es finito.*

(1) Podemos describir gráficamente la ordenación R como sigue:



- R es irreflexiva en ω, ya que si $n \in \omega$ entonces $f(n) = f(n) \wedge n \not< n$.
- R es transitiva en ω. En efecto: sean $a, b, c \in \omega$ tales que aRb y bRc. Se tiene que $f(a) \leqslant f(b) \leqslant f(c)$. Distinguimos dos casos:
  - Supongamos que $f(a) < f(c)$.
    En este caso, aRc.
  - Supongamos que $f(a) = f(c)$. Entonces, $f(a) = f(b) = f(c)$. Luego, $a < b < c$. Por tanto, aRc.
- R satisface el principio de minimización en ω. Para probarlo, sea a un subconjunto no vacío de ω. Entonces $b = \{f(n) : n \in a\}$ es un subconjunto no vacío de ω. Sea p el elemento mínimo de b respecto de la ordenación usual de ω.

Por definición de p, resulta que $p \in b$ y, por tanto, $c = \{n \in a : f(n) = p\}$ es un subconjunto no vacío de ω. Sea q el elemento mínimo de c respecto de la ordenación usual de ω. Veamos que q es el elemento mínimo de a en $\langle \omega, R \rangle$.

- ⋆ Se tiene que $q \in a$, ya que $q \in c \subseteq a$.
- ⋆ Veamos que q es una cota inferior de a en $\langle \omega, R \rangle$. Para ello, sea $x \in a$ tal que $x \neq q$. Hemos de ver que qRx.

  Como $x \in a$ resulta que $f(x) \in b$. Luego $p \leqslant f(x)$. Teniendo presente que $q \in c \rightarrow f(q) = p$, se deduce que $f(q) \leqslant f(x)$.
  - Si $f(q) < f(x)$, entonces qRx.
  - Si $f(q) = f(x)$, entonces $f(x) = p$. Luego $x \in c$ y, por tanto, $q \leqslant x$. De donde resulta que $q < x$. Es decir, qRx.

(2) Veamos que $\langle \omega, < \rangle \not\cong \langle \omega, R \rangle$. Caso contrario, existiría un isomorfismo $F : \langle \omega, R \rangle \cong \langle \omega, < \rangle$. Consideremos el conjunto $a = \{n \in \omega : nR4\}$. Entonces resulta que:

- El conjunto a es infinito, ya que contiene a todos los números primos.
- El conjunto a está acotado superiormente en $\langle \omega, R \rangle$, ya que 4 es una cota superior de dicho conjunto.
- El conjunto $F[a]$ está acotado superiormente en $\langle \omega, < \rangle$, ya que por ser F un isomorfismo resulta que $F(4)$ es una cota superior de dicho conjunto.
- El conjunto $F[a]$ es infinito, ya que a es infinito y F es una aplicación inyectiva.

Así llegamos a una contradicción, pues todo subconjunto de ω acotado superiormente por la ordenación usual, debe de ser finito.

Ejercicio 36. *Demostrar que :*

(1) *Si $a \times a$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.*

(2) *Si $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto bien ordenable, entonces a también lo es.*

(1) Sea R un buen orden en el conjunto $a \times a$. Si $a = \emptyset$, entonces la relación $S = \emptyset$ es un b.o. en a. Supongamos que $a \neq \emptyset$.

Sea b un elemento de a y consideremos la relación S definida en a como sigue:

$$xSy \iff \langle x, b \rangle R \langle y, b \rangle$$

Veamos que S es un buen orden en el conjunto a.

- S es irreflexiva en a. En efecto: sean $x, y \in a$ tales que xSy. Entonces $\langle x,b\rangle R\langle y,b\rangle$. Luego, $x \neq y$.
- S es transitiva en a. En efecto: sean $x, y, z \in a$ tales que xSy e ySz. Entonces $\langle x,b\rangle R\langle y,b\rangle$ e $\langle y,b\rangle R\langle z,b\rangle$. Luego, $\langle x,b\rangle R\langle z,b\rangle$ y, por tanto, xSz.
- S satisface el principio de minimización en a. En efecto: sea c un subconjunto no vacío de a. Entonces $d = \{\langle x,b\rangle : x \in c\}$ es un subconjunto no vacío de $a \times a$. Luego existe $\langle p,b\rangle = \text{mín}_R\, d$. Veamos que $p = \text{mín}_S\, c$.
  - Obviamente, $p \in c$ ya que $\langle p,b\rangle \in d$.
  - Para ver que p es una cota inferior de c en $\langle a,S\rangle$, sea $x \in c$ tal que $x \neq p$. Entonces $\langle x,b\rangle \in d$ y $\langle x,b\rangle \neq \langle p,b\rangle$. Luego, $\langle p,b\rangle R\langle x,b\rangle$. Por tanto, pSx.

Otra manera de resolver este apartado es la siguiente. Considérese la relación S definida en a como sigue: $xSy \iff \langle x,x\rangle R\langle y,y\rangle$. Como la aplicación $F : a \to a \times a$ definida por $F(x) = \langle x,x\rangle$ es inyectiva y R es un b.o. en $a \times a$, del ejercicio 33 se deduce que S es un b.o. en a.

(2) Sea R un buen orden en el conjunto $\mathbf{P}(a)$. Consideremos la relación S definida en el conjunto a como sigue:

$$xSy \iff \{x\}R\{y\}$$

Veamos que S es un buen orden en el conjunto a.

- S es irreflexiva en a. En efecto: si $x \in a$, entonces $\langle \{x\},\{x\}\rangle \notin R$. Luego, $\langle x,x\rangle \notin S$.
- S es transitiva en a. En efecto: sean $x, y, z \in a$ tales que xSy e ySz. Entonces $\{x\}R\{y\}$ e $\{y\}R\{z\}$. Luego, $\{x\}R\{z\}$. Por tanto, xSz.
- S satisface el principio de minimización en a. En efecto: sea c un subconjunto no vacío de a. Entonces $d = \{\{x\} : x \in c\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbf{P}(a)$. Luego existe $p = \text{mín}_R\, d$. Sea $q \in c$ tal que $p = \{q\}$. Entonces, de la definición de S resulta, inmediatamente, que $q = \text{mín}_S\, c$.

Otra manera de resolver este apartado es la siguiente. Considérese la relación S definida en a como sigue: $xSy \iff \{x\}R\{y\}$. Como la aplicación $F : a \to \mathbf{P}(a)$ definida por $F(x) = \{x\}$ es inyectiva y R es un b.o. en $\mathbf{P}(a)$, del ejercicio 33 se deduce que S es un b.o. en a.

Ejercicio 37. *Para cada una de las siguientes condiciones, hallar un conjunto totalmente ordenado, $\langle a, < \rangle$, que la verifique.*

(1) *El conjunto $\langle a, < \rangle$ tiene un segmento inicial b tal que $a \neq b$ y, en cambio, b no es una sección inicial de $\langle a, < \rangle$.*

(2) *Existe una aplicación $F : a \to a$ creciente tal que $F(x) < x$, para algún $x \in a$.*

(3) *Existe $x \in a$ tal que $\langle a, < \rangle \;\cong\; \langle a_x, < \rangle$.*

(4) *Existe $F : \langle a, < \rangle \;\cong\; \langle a, < \rangle$ tal que $F \neq I_a$.*

(1) Consideremos en ω la relación R definida como sigue:

$$\begin{aligned} xRy \quad \leftrightarrow \quad & (x \in \mathbb{P} \wedge y \in \mathbb{P} \wedge x < y) \vee (x \in \mathbb{I} \wedge y \in \mathbb{I} \wedge y < x) \vee \\ & (x \in \mathbb{P} \wedge y \in \mathbb{I}) \end{aligned}$$

siendo $\mathbb{P}$ e $\mathbb{I}$ los conjuntos de números naturales pares e impares, respectivamente, y $<$ la ordenación usual de ω.

(Obsérvese que $\langle \omega, R \rangle = \langle \mathbb{P}, < \rangle \oplus \langle \mathbb{I}, <^{-1} \rangle$).

Obviamente, $\langle \omega, R \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, por el ejercicio 34. Además, $\mathbb{P}$ es un segmento inicial de $\langle \omega, R \rangle$, ya que

$$x \in \mathbb{P} \wedge y \in \omega \wedge yRx \Longrightarrow y \in \mathbb{P}$$

Veamos que $\mathbb{P} \neq \omega$ **no** es una sección inicial de $\langle \omega, R \rangle$.

– Caso contrario, existiría $n \in \omega$ tal que $\mathbb{P} = S_R^{\omega}(n)$. Entonces $n \notin \mathbb{P}$ y, por tanto, $n \in \mathbb{I}$. En tal situación, resultaría que

$$n + 2 \in \mathbb{I} \wedge n + 2 \in S_R^{\omega}(n)$$

Lo cual es imposible ya que, entonces $n + 2 \in \mathbb{I} \cap S_R^{\omega}(n) = \mathbb{I} \cap \mathbb{P} = \emptyset$.

(2) Consideremos la ordenación usual $<$ en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Entonces $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado. Consideremos la aplicación $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $F(x) = x - 1$ ($\forall x \in \mathbb{Z}$). Se tiene que

– F es una aplicación creciente de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ en $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, ya que para cada $x, y \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$x < y \leftrightarrow x - 1 < y - 1 \leftrightarrow F(x) < F(y)$$

– Para cada $x \in \mathbb{Z}$ se verifica que $F(x) < x$.

(3) Consideremos el conjunto $a = \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \leqslant 0\}$, siendo $<$ el orden usual de $\mathbb{Z}$. Entonces, a está totalmente ordenado por $<$. Notemos por a_0 la sección inicial de $\langle a, < \rangle$ de extremo 0. Es decir, $a_0 = \{x \in \mathbb{Z} : \ x < 0\}$.

Consideremos la aplicación $F : a \to a_0$ definida así:

$$F(x) = x - 1 \ (\forall x \in a)$$

Se tiene que

- F es una aplicación creciente de $\langle a, < \rangle$ en $\langle a_0, < \rangle$ (razonamiento análogo al visto en el apartado anterior). Luego, al estar trabajando con conjuntos totalmente ordenados, la aplicación F será una inmersión (es decir, además de creciente es inyectiva).
- F es un isomorfismo de $\langle a, < \rangle$ en $\langle a_0, < \rangle$, ya que rang $(F) = a_0$.

(4) Consideremos nuevamente la ordenación usual $<$ en el conjunto $\mathbb{Z}$. Entonces $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado. Sea $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la aplicación definida por $F(x) = x + 1 \ (\forall x \in \mathbb{Z})$. Se tiene que

- F es una aplicación creciente de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ en $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$, ya que para cada $x, y \in \mathbb{Z}$ se verifica que
$$x < y \leftrightarrow x + 1 < y + 1 \leftrightarrow F(x) < F(y)$$
- F es suprayectiva, ya que para cada $x \in \mathbb{Z}$ se tiene que $F(x - 1) = x$.

Por tanto, F es un isomorfismo de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ en $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ tal que $F \neq I_{\mathbb{Z}}$.

Ejercicio 38. *Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Probar que son equivalentes:*

(1) *Todo subconjunto no vacío de a posee algún elemento minimal de b.*

(2) *Si $\varphi(x)$ es una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos, tal que*

$$\forall x \in a \ ((\forall y \in a(y < x \to \varphi(y))) \to \varphi(x))$$

entonces $\forall x \in a(\varphi(x))$.

Para probar una equivalencia del tipo $p \leftrightarrow q$, basta probar que $\neg q \leftrightarrow \neg p$, ya que $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$.

Veamos que $\neg(2) \implies \neg(1)$.

- $\star$ Supongamos cierto $\neg(2)$. Sea $\varphi(x)$ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos tal que

  $$\forall x \in a\ (\forall y \in a(y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \quad (\star)$$

  y, en cambio, existe $x \in a$ tal que $\neg\varphi(x)$.

  Consideremos el conjunto $b = \{x :\ x \in a \land \neg\varphi(x)\}$. Entonces b es un subconjunto no vacío de a. Veamos que b carece de elementos minimales.

  - Si c fuese un elemento minimal de b, entonces

    $$\forall y\ (y \in a \land y < c \to y \notin b)$$

    Pero $(y \in a \land y \notin b \to \varphi(y))$. Es decir, c sería un elemento de a tal que los menores que él verificarían φ. De la hipótesis $(\star)$ resultaría que se verifica $\varphi(c)$. Lo que contradice que $c \in b$.

Veamos que $\neg(1) \implies \neg(2)$.

- $\star$ Supongamos cierto $\neg(1)$. Sea b un subconjunto no vacío de a que carece de elementos minimales. Consideremos la fórmula $\psi(x, b) \equiv x \notin b$.

  - Veamos que $\forall x \in a\ (\forall y \in a(y < x \to \psi(y, b)) \to \psi(x, b))$.
    - Sea $x \in a$ y supongamos que $\forall y \in a\ (y < x \to \psi(y, b))$. Entonces
      $$\forall y \in a\ (y < x \to y \notin b)$$
      De donde resultaría que $x \notin b$ (pues si $x \in b$, entonces x sería un elemento minimal de b). Por tanto, se verifica $\psi(x, b)$.
  - Veamos ahora que existe $x \in a$ tal que $\neg\psi(x, b)$ (es decir, que existe $x \in a$ tal que $x \in b$).
    - Como $b \neq \emptyset$ resulta que $\exists x(x \in b)$. Como $b \subseteq a$ deducimos que $\exists x \in a(x \in b)$. Por tanto, $\exists x \in a(\neg\psi(x, b))$.

Ejercicio 39. *(Inducción sobre conjuntos bien fundamentados) Sea A una clase y R una relación en A. Diremos que R es bien fundamentada sobre A si todo subconjunto no vacío, x, de A posee elemento R–minimal; es decir,* $\exists y(y \in x \land \forall z(z \in x \to \langle z, y\rangle \notin R))$.
Sea a un conjunto y R una relación bien fundamentada sobre a. Sea b un subconjunto de a tal que

$$\forall x \in a\ ((\forall y \in a\ (\langle y, x\rangle \in R \to y \in b)) \to x \in b)$$

Probar que $b = a$.

Vamos a probar este resultado por el método de reducción al absurdo. Sea b un subconjunto de a tal que $b \neq a$ y

$$\forall x \in a\ ((\forall y \in a\ (\langle y, x\rangle \in R \to y \in b)) \to x \in b) \qquad (\star)$$

Como $b \neq a$, resulta que $a - b$ es un subconjunto no vacío de a. Sea c un elemento R–minimal de $a - b$. Entonces

$$c \in a - b \ \text{ y } \ \forall z\ (z \in a - b \to \langle z, c\rangle \notin R)$$

De donde resulta que

$$\forall y \in a\ (\langle y, c\rangle \in R \to y \notin a - b)$$

Luego, $\forall y \in a\ (\langle y, c\rangle \in R \to y \in b)$.

En tal situación, de la hipótesis $(\star)$ deduciríamos que $c \in b$. Lo que es una contradicción.

3.5. Problemas propuestos

Ejercicio 3.1. Sean x un conjunto y R un orden parcial en x. Probar que:

(1) $\text{campo}(R) \subseteq x$ y, en general, no se da la igualdad.

(2) Si R es un orden total sobre x, entonces $\text{campo}(R) = x$ si y sólo si x no es un conjunto unitario.

Ejercicio 3.2. Sea $<$ un orden parcial sobre un conjunto x. Probar que $y \in x$ es minimal en $\langle x, <\rangle$ si y sólo si $y \notin \text{rang}(<)$.

Ejercicio 3.3. Sean $\langle a, R\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $b \subseteq a$. Probar que c es el mínimo de b si y sólo si $c \in b \wedge \text{rang}(R \cap (\{c\} \times b)) = b$.

Ejercicio 3.4. Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Consideremos el conjunto

$$b = \{x \subseteq a :\ \forall y, z \in x (y \neq z \to y \not< z \wedge z \not< y)\}$$

Sea $c \in b$. Probar que son equivalentes:

(1) c es un elemento maximal de $\langle b, \subsetneq\rangle$.

(2) Todo elemento de $a - c$ es comparable, por la relación $<$, con algún elemento de c.

Indicación: (1) $\Longrightarrow$ (2) Téngase presente que si $x \in a - c$, entonces $c \cup \{x\} \notin b$. (2) $\Longrightarrow$ (1) Pruébese por reducción al absurdo.

Ejercicio 3.5. Sea a un conjunto. Consideremos la clase

$$B = \{x : \exists y \in a\ (x \subseteq y)\}$$

Demostrar que:

(1) La clase B es un conjunto.

(2) Un conjunto x es elemento maximal de $\langle B, \subsetneqq \rangle$ si y sólo si x es elemento maximal de $\langle a, \subsetneqq \rangle$.

Indicación: (1) Pruébese que $B \subseteq \mathbf{P}(\bigcup a)$.

Ejercicio 3.6. Sea R un orden total sobre un conjunto a. Decimos que $b \subseteq a$ es *cofinal* en $\langle a, < \rangle$ si $\forall x \in a \exists y \in b(xRy \vee x = y)$. Probar:

(1) b es cofinal en a si y sólo si $b \cup R^{-1}[b] = a$.

(2) Sea b cofinal en a. Entonces b tiene máximo (respecto a R) si y sólo si a lo tiene (y es el mismo).

(3) Supongamos que $c \subseteq b \subseteq a$, b cofinal en $\langle a, R \rangle$ y c cofinal en $\langle b, R \restriction b \rangle$. Entonces c es cofinal en $\langle a, R \rangle$.

Indicación:(3) úsese la transitividad de R.

Ejercicio 3.7. Sea $\langle x, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $\langle x, < \rangle$ es un *retículo* si para cualesquiera $y, z \in x$ existen $\text{ínf}\{y, z\}$ y $\sup\{y, z\}$. Diremos que $\langle x, < \rangle$ es un retículo *completo* si $\forall a \subseteq x$, existen $\text{ínf}(a)$ y $\sup(a)$. Probar que $\langle x, < \rangle$ es un retículo completo si y sólo si $\forall a \subseteq x$, existe $\text{ínf}(a)$.

Indicación: Obsérvese que el supremo de un conjunto es el ínfimo de sus cotas superiores.

Ejercicio 3.8. Sea a un conjunto . Probar que $\langle \mathbf{P}(a), \subsetneqq_a \rangle$ es un retículo completo.

Indicación: Si $x \subseteq \mathbf{P}(a)$ no es vacío, entonces $\bigcap x$ es su ínfimo. Si x es vacío, el ínfimo es a. Entonces, utilícese el ejercicio 3.7.

Ejercicio 3.9. Sean a un conjunto y $RE(a)$ el conjunto de las relaciones de equivalencia en a (ver ejercicio 2.20). Probar que $\langle RE(a), \subsetneqq \rangle$ es un retículo completo.

Indicación: (2) Si $x \subseteq RE(a)$ y $x \neq \emptyset$, entonces $\bigcap x$ es una relación de equivalencia en a y es el ínfimo de x. Si x es vacío, entonces $\inf(x) = a \times a$. Entonces, utilícese el ejercicio 3.7.

Ejercicio 3.10. Sea a un conjunto.

(1) Probar que la clase de las particiones de a (que notaremos $Pt(a)$) es un conjunto.

(2) Definamos la relación $\prec$ en $Pt(a)$ de la siguiente manera:

$$p \prec q \leftrightarrow (p \neq q \wedge \forall x \in p \exists y \in q(x \subseteq y))$$

Probar que $\langle Pt(a), \prec\rangle \cong \langle RE(a), \subsetneqq\rangle$.

(3) Deducir del apartado anterior que $\langle Pt(a), \prec\rangle$ es un retículo completo. Intentar hacer una prueba directa de tal afirmación.

Indicación:(2) Téngase presente que a cada partición, el isomorfismo debe asociar la relación de equivalencia inducida. (3) Utilícese la conclusión del ejercicio 33.

Ejercicio 3.11. Sea $\precsim$ una relación en un conjunto a. Diremos que $\precsim$ es un *preorden* sobre a si es una relación transitiva y reflexiva sobre a. Definamos la siguiente relación en el conjunto a:

$$x \sim y \leftrightarrow x \precsim y \wedge y \precsim x$$

Probar que:

(1) $\sim$ es una relación de equivalencia sobre a (llamada la *relación de equivalencia asociada* a $\precsim$).

(2) Definamos la siguiente relación $\prec$ en el conjunto cociente $a/\sim$:

$$\forall x \in a\, \forall y \in a\, (\overline{x}^{\sim} \prec \overline{y}^{\sim} \leftrightarrow x \precsim y \wedge y \not\precsim x)$$

Probar que es una buena definición (es decir, que la relación no depende de los representes elegidos en cada clase de equivalencia).

(3) Probar que $\prec$ es un orden parcial en el conjunto cociente $a/\sim$ (la relación $\prec$ se denomina *orden parcial asociado* a $\precsim$).

Ejercicio 3.12. Sean $a = {}^{3}2$ y R la relación en a definida por

$$\langle f, g\rangle \in R \iff f(0) \leqslant g(0)$$

Probar que R es un preorden en a y describir la relación de equivalencia asociada y el orden parcial asociado.

Ejercicio 3.13. Sea $\langle A, <\rangle$ una clase bien ordenada y $B \subseteq A$. Demostrar que $\langle B, <\rangle$ es isomorfa a $\langle A, <\rangle$, o bien a una sección inicial de $\langle A, <\rangle$.

Indicación: Por el teorema de comparación de buenos órdenes, basta ver que $\langle A, <\rangle$ no puede ser isomorfo a una sección inicial de $\langle B, <\rangle$. Si existiera un isomorfismo F entre $\langle A, <\rangle$ y la sección inicial determinada por un cierto $x \in B$ en $\langle B, <\rangle$, entonces $x \leqslant F(x) < x$.

Ejercicio 3.14. Sea $\langle A, R\rangle$ una clase bien ordenada. Sea F la aplicación cuyo dominio es A, definida para todo $a \in A$ por $F(a) = S_R^A(a) \cup \{a\}$. Sea B =rang(F). Probar que $F : \langle A, R\rangle \cong \langle B, \subsetneqq_B\rangle$.

Ejercicio 3.15. Sea R una relación sobre un conjunto x. Probar que si en $\langle x, R\rangle$ se verifica la propiedad de inducción bien fundamentada (ver ejercicio 39), entonces R es bien fundamentada en x.

Indicación: La prueba es análoga a la realizada para buenos órdenes (véase ejercicio 38).

Ejercicio 3.16. Probar que toda relación bien fundamentada es irreflexiva.

Ejercicio 3.17. Consideremos en ω la relación R caracterizada por la siguiente condición:

$$xRy \iff (x \text{ e } y \text{ par } \wedge y < x) \vee (x \text{ e } y \text{ impar} \wedge y < x) \vee (x \text{ par} \wedge y \text{ impar })$$

siendo $<$ el orden usual de ω.

Probar que:

(1) $\langle \omega, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado que carece de elemento mínimo y posee elemento máximo.

(2) Existe un número natural, distinto del máximo, que carece de siguiente en $\langle \omega, R\rangle$.

(3) Todo subconjunto no vacío de ω posee elemento máximo.

Ejercicio 3.18. Sea $<$ el orden usual del conjunto, $\mathbb{Z}$, de los números enteros (hemos visto en el ejercicio 34 que $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado, pero no bien ordenado). Probar que:

(1) Todo número entero posee siguiente y anterior en $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$.

(2) $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ verifica la propiedad del supremo (ver ejercicio 29).

(3) Todo segmento inicial propio de $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ es una sección inicial de $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$.

Ejercicio 3.19. Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales positivos (supondremos un conocimiento “intuitivo"del mismo). Sea R la relación definida en $\mathbb{Q}^+$ de la siguiente manera:

> *“Sean r y s racionales positivos. Sean $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ (con $n, q > 0$) las fracciones irreducibles correspondientes a r y s, respectivamente. Entonces $\langle r, s\rangle \in R$ si y sólo si $m < p \vee (m = p \wedge n < q)$ donde $<$ es el orden usual entre números naturales."*

Probar que:

(1) R es un buen orden en $\mathbb{Q}^+$.

(2) $\langle \mathbb{Q}^+, R\rangle \not\cong \langle \omega, <\rangle$.

Indicación: Supóngase que existe un isomorfismo F y compárese las secciones iniciales de 2 y de $F(2)$ en $\langle Q^+, R\rangle$ y $\langle \omega, <\rangle$, respectivamente.

Ejercicio 3.20. Sea $\langle a, <\rangle$ un conjunto totalmente ordenado. Consideremos el conjunto

$$b = \{s \subseteq a : s \text{ segmento inicial de } \langle a, <\rangle\}$$

Probar que:

(1) $s, s' \in b \implies s \subseteq s' \vee s' \subseteq s$.

(2) $x, y \in a \wedge x \neq y \implies \exists s \in b\ ((x \in s \wedge y \notin s) \vee (x \notin s \wedge y \in s))$

(3) $c \subseteq b \implies \bigcup c \in b$.

(4) $c \subseteq b \implies a \cap (\bigcap c) \in b$.

Indicación:(2) Tómese $s = \{y \in a : y \leqslant m\}$, en donde $m = \text{mín}\{x, y\}$.

Ejercicio 3.21. Sean a un conjunto y $b \subseteq \mathbf{P}(a)$ tales que:

$$\begin{aligned}
&\forall s, s' \in b\ (s \subseteq s' \vee s' \subseteq s)\\
&\forall x, y \in a\ (x \neq y \to \exists s \in b\ ((x \in s \wedge y \notin s) \vee (x \notin s \wedge y \in s)))
\end{aligned}$$

(1) Probar que existe una única relación de orden total, $<$, sobre a tal que:

$$\forall s \in b\ (s \text{ es segmento inicial de } \langle a, <\rangle)$$

(2) Supongamos que

(a) $c \subseteq b \implies \bigcup c \in b$.

(b) $c \subseteq b \implies a \cap (\bigcap c) \in b$.

Probar que, si $<$ es la relación de orden total sobre a considerada en el apartado **(1)**, entonces $b = \{s : s \text{ es segmento inicial de } \langle a, <\rangle\}$.

(3) Buscar ejemplos que prueben que las condiciones (2.a) y (2.b) son necesarias para la igualdad anterior.

Indicación:(1) Tómese como $<$ la relación en a definida así

$$x < y \leftrightarrow \exists s \in b\ (x \in s \wedge y \notin s)$$

(2) Dado un segmento s de $\langle a, < \rangle$, considérese para cada $x \in a$ los conjuntos $a^x = \{y \in a : y \leqslant x\}$ y $b^x = \{s' \in B : x \in s'\}$. Pruébese que $a \cap (\bigcap b^x) \in b$ y que $a \cap (\bigcap b^x) = a^x$. A continuación, pruébese que $\bigcup\{a^x : x \in s\} \in b$ y que $\bigcup\{a^x : x \in s\} = s$.

Ejercicio 3.22. Sea $\langle a, R\rangle$ un conjunto bien ordenado. Notemos

$$S(\langle a, R\rangle) = \{b \subseteq a : b \text{ es segmento inicial de } \langle a, R\rangle\}$$

Se pide:

(1) Probar que $\langle S(\langle a, R\rangle), \subsetneqq\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

(2) Probar que la aplicación $f : a \to S(\langle a, R\rangle) - \{a\}$ definida por $f(x) = S_R^a(x)$, para cada $x \in a$, es un isomorfismo entre los conjuntos citados. Concluir que $\langle S(\langle a, R\rangle), \subsetneqq\rangle$ es un conjunto bien ordenado.

(3) Sea $b \subseteq S(\langle a, R\rangle)$ verificando:

- $\emptyset \in b$.
- $\forall x\ (x \subseteq b \to \bigcup_{y \in x} y \in b)$.
- $\forall x \in a\ (S_R^a(x) \in b \to S_R^a(x) \cup \{x\} \in b)$.

Probar que $b = S(\langle a, R\rangle)$.

Indicación:(2) Para probar el principio de minimización en $\langle S(\langle a, R\rangle), \subsetneqq\rangle$, considérese un subconjunto, b, no vacío de $S(\langle a, R\rangle)$ y distínganse tres casos: $(b = \{a\})$; $(a \in b \wedge b \neq \{a\})$ y $(a \notin b)$. (3) Supóngase que $b \neq S(\langle a, R\rangle)$. Considérese $c = \text{mín}(S(\langle a, R\rangle) - b)$ y distíngase casos según c posea o no elemento máximo en $\langle a, R\rangle$.

Capítulo 4

Ordinales

Entre 1879 y 1884, G. Cantor introduce los primeros eslabones de la teoría de ordinales que era, básicamente, una teoría relativa a conjuntos ordenados.

En 1915, E. Zermelo describe por primera vez una teoría de ordinales independiente de los conjuntos ordenados. Pero al no usar el esquema de axiomas de reemplazamiento, no pudo obtener ciertas propiedades importantes de los mismos. La teoría de Zermelo sería completada, posteriormente, hacia 1937, por R.M. Robinson y J. von Neumann utilizando ya el esquema de axiomas de reemplazamiento (que había sido esbozado y usado por Mirimanoff en 1917, si bien fue Zermelo el que lo incorporó a la axiomática de la Teoría de Conjuntos, en 1922).

4.1. Clases transitivas

Definición 4.1.1. Diremos que una clase A es *transitiva* si todo elemento de la clase es un subconjunto de ella; es decir, si $\forall x(x \in A \rightarrow x \subseteq A)$.

Ejemplos:

(1) La clase universal **V** es transitiva.

(2) Los conjuntos $0, 1$ y 2 son transitivos.

(3) El conjunto $\{1\}$ no es transitivo.

Consideraciones:

(1) Si A y B son clases transitivas, entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ son clases transitivas.

(2) La unión e intersección de una familia de conjuntos transitivos (con conjunto de índices no vacío), es un conjunto transitivo.

(3) Sea A una clase transitiva tal que todos sus elementos son conjuntos transitivos. Entonces $\bigcup A$ es una clase transitiva. Además, si $A \neq \emptyset$, entonces $\bigcap A$ es un conjunto transitivo.

(4) Sea a un conjunto. Entonces a es transitivo $\Longleftrightarrow \bigcup a \subseteq a \Longleftrightarrow a \subseteq \mathbf{P}(a)$.

Definición 4.1.2. Sea x un conjunto. Entonces el *conjunto siguiente* de x, que notaremos x^+, es el conjunto $x \cup \{x\}$. Para facilitar la expresión de algunos resultados, convendremos que la *clase siguiente* de una clase propia es $\mathbf{V}$.

Definición 4.1.3. $0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 1^+, \ldots,$ y “así sucesivamente".

Se verifica que $1 = \{0\}, 2 = \{0,1\}, \ldots, n+1 = \{0,1,\ldots,n\}$.

Consideraciones:

(1) Si A es una clase transitiva, entonces A^+ es transitiva.

(2) Si a es un conjunto transitivo, entonces $a \in a^+ \wedge a \subseteq a^+$.

4.2. La clase Ord

Definición 4.2.1. Diremos que un conjunto a es un *ordinal* si es un conjunto transitivo y está bien ordenado por la relación $\in_a$ de pertenencia en a.

Notaremos por **Ord** la clase cuyos elementos son todos los ordinales. Es decir, $\mathbf{Ord} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$.

Ejemplos:

(1) Los conjuntos $0, 1$ y 2 son ordinales.

(2) El conjunto $\{1\}$ no es un ordinal, ya que no es transitivo.

(3) El conjunto $a = \{0, 1, \{1\}\}$ es transitivo pero no es un ordinal, pues $\in_a$ no es conexa en a.

Notación: Usualmente, utilizaremos letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \ggg, \ldots$ como variables sobre ordinales, y escribiremos

$$\forall\alpha\varphi(\alpha) \text{ en lugar de } \forall\alpha(\alpha \in \mathbf{Ord} \to \varphi(\alpha))$$
$$\exists\alpha\varphi(\alpha) \text{ en lugar de } \exists\alpha(\alpha \in \mathbf{Ord} \wedge \varphi(\alpha))$$

4.3. Primeras propiedades de los ordinales

Proposición 4.3.1.

(1) $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}(\alpha \notin \alpha)$.

(2) *Todo elemento de un ordinal es un ordinal.*

(3) *Si* $\alpha \in \mathbf{Ord}$*, entonces* $\alpha = \{x : \ x \in \mathbf{Ord} \wedge x \in \alpha\}$.

(4) *Si* $\alpha \in \mathbf{Ord}$*, entonces* $\alpha^+ \in \mathbf{Ord}$.

(5) *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$*. Entonces* $\alpha^+ = \beta^+ \Longleftrightarrow \alpha = \beta$.

Proposición 4.3.2. *Sean* $\alpha \in \mathbf{Ord}$ *y* x *un conjunto. Entonces*

$$x \in \alpha \Longleftrightarrow x \text{ es un conj. transitivo tal que } x \subsetneq \alpha$$

Corolario 4.3.3. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$*. Sea* x *un subconjunto transitivo de* α*. Entonces* $x \in \mathbf{Ord}$.

4.4. Ordenación usual de los ordinales

Definición 4.4.1. Consideramos en **Ord** la relación $<$ definida como sigue:

$$\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$$

Proposición 4.4.2. *La relación* $<$ *es un orden parcial en la clase* **Ord** *(que se denomina orden usual de* **Ord***).*

Así pues, la ordenación usual de **Ord** es la relación de pertenencia en dicha clase.

Proposición 4.4.3. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$*. Entonces, la sección inicial de extremo* α*, en* $\langle \mathbf{Ord}, < \rangle$*, es* α *(en consecuencia, la relación* $<$ *es adecuada en* **Ord***).*

Proposición 4.4.4. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$*. Entonces,*

(1) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \beta \Longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.

(2) $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha^+ \leqslant \beta$.

(3) $\alpha^+ = \text{mín}\{x : \ x \in \mathbf{Ord} \wedge \alpha < x\}$.

Proposición 4.4.5. *Sea A una subclase no vacía de* **Ord**. *Entonces*

$$\bigcap A \in \mathbf{Ord} \ \ e \ \ \bigcap A = \ mín_{<}(A)$$

Proposición 4.4.6. *Sea a un subconjunto de $\langle \mathbf{Ord}, < \rangle$. Entonces*

$$\bigcup a \in \mathbf{Ord} \ \ y \ \bigcup a = \ sup_{<}(a)$$

Proposición 4.4.7. *La clase* **Ord** *es transitiva y, además, $\langle \mathbf{Ord}, < \rangle$ es una clase bien ordenada.*

Corolario 4.4.8. *(Resolución de la paradoja de Burali–Forti) La clase* **Ord** *es propia.*

Corolario 4.4.9. *Todo subconjunto transitivo de* **Ord**, *es un ordinal.*

4.5. Tipo ordinal de un conjunto b.o.

Se trata de asociar a cada conjunto b.o. un único ordinal tal que, respecto de la ordenación usual, sea isomorfo al conjunto ordenado de partida. Además, se pretende que dicho ordinal caracterice, salvo isomorfismos, al conjunto b.o.

Para conseguir este objetivo, se necesita introducir un nuevo axioma en la teoría; en realidad, se trata de un esquema de axiomas.

Esquema de axiomas de reemplazamiento: Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula en la que no aparece libre la variable v. Entonces
$(\forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z)) \rightarrow (\forall u \exists v \forall z(z \in v \leftrightarrow \exists t(t \in u \wedge \varphi(t, z))))$.
Es decir, *si F es una aplicación y a es un conjunto, entonces la clase $F[a] = \{x : \exists y \in a(F(y) = x)\}$ es un conjunto.*

Proposición 4.5.1.

(1) *El esquema de axiomas de separación es consecuencia del esquema de axiomas de reemplazamiento.*

(2) *El axioma del par es consecuencia del esquema de axiomas de reemplazamiento y del axioma de las partes.*

Teorema 4.5.2. *(*MIRIMANOFF*, 1917) Si $\langle a, < \rangle$ es un conjunto b.o., entonces existe un único ordinal α tal que $\langle a, < \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$ (diremos que α es el tipo ordinal o número ordinal del conjunto b.o. $\langle a, < \rangle$, y notaremos $\alpha =$t.o.$(\langle a, < \rangle)$).*

Teorema 4.5.3. *Sea $\langle A, < \rangle$ una clase propia bien ordenada. Entonces,*

$$\langle A, < \rangle \ \cong \ \langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$$

4.6. Problemas resueltos

Ejercicio 40. *Sea a un conjunto transitivo. Probar que los conjuntos $\bigcup a$ y $\mathbf{P}(a)$ también son transitivos. ¿Puede afirmarse que si $\bigcup a$ ó $P(a)$ es transitivo, lo sea el conjunto a?*

(1) Supongamos que a es un conjunto transitivo.

- Veamos que $\bigcup a$ es un conjunto transitivo.

  Sean $x \in \bigcup a$ e $y \in x$. Entonces existe $z \in a$ tal que $x \in z$. Como a es transitivo resulta que $x \in a$. Por tanto, $y \in \bigcup a$.

- Veamos que $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto transitivo.

  Sean $x \in \mathbf{P}(a)$ e $y \in x$. Entonces $x \subseteq a$. Luego $y \in a$. Como a es un conjunto transitivo resulta que $y \subseteq a$. Por tanto, $y \in \mathbf{P}(a)$.

(2) Veamos que existen conjuntos, a, **no** transitivos tales que $\bigcup a$ es transitivo.

En efecto: consideremos el conjunto $a = \{1\}$. Entonces a no es transitivo, ya que $0 \in 1 \wedge 1 \in a$, pero $0 \notin a$. Ahora bien, $\bigcup a = 1 = \{0\}$ es, obviamente, un conjunto transitivo.

(3) Veamos que si $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto transitivo, entonces a es transitivo.

En efecto: supongamos que $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto transitivo y sea $x \in a$. Teniendo presente que $a \in \mathbf{P}(a)$ y que $\mathbf{P}(a)$ es transitivo, deducimos que $x \in \mathbf{P}(a)$. Por tanto, $x \subseteq a$.

Ejercicio 41. *Sea a un conjunto. Demostrar que a es transitivo si y sólo si $\bigcup a^+ = a$.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que a es un conjunto transitivo. Veamos que $\bigcup a^+ = a$.

- Sea $x \in \bigcup a^+$. Entonces existe $y \in a^+$ tal que $x \in y$.
  - O bien $y \in a$ y, por tanto, $x \in a$, ya que a es transitivo.
  - O bien $y = a$, en cuyo caso $x \in a$.
- Sea $x \in a$. Teniendo presente que $a \in a^+$ deducimos que $x \in \bigcup a^+$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $\bigcup a^+ = a$. Veamos que el conjunto a es transitivo. Se tiene que $a \subseteq a^+ \Longrightarrow \bigcup a \subseteq \bigcup a^+ \Longrightarrow \bigcup a \subseteq a$. De donde resulta inmediatamente que a es transitivo.

Ejercicio 42. *Dar ejemplos de:*

(a) *Un conjunto transitivo que no sea un ordinal.*

(b) *Un conjunto bien ordenado por la relación de pertenencia que no sea un ordinal.*

(a) Consideremos el conjunto $a = \{0, 1, \{1\}\}$. Entonces a es transitivo, ya que $\bigcup a = \{0, 1\} \subseteq a$.

En cambio, a **no** es un ordinal, ya que la relación de pertenencia no es conexa en a ($0 \in a$ y $\{1\} \in a$, pero $0 \notin \{1\}$, $\{1\} \notin 0$ y $0 \neq \{1\}$).

(b) Cualquier conjunto unitario que no sea transitivo y cuya componente sea un ordinal, proporciona un ejemplo que satisface las condiciones requeridas.

Consideremos el conjunto $a = \{1\}$. Entonces a no es transitivo y, en cambio, está bien ordenado por la relación $\in$.

Ejercicio 43. *Sea A una clase transitiva tal que $A \subsetneqq$ **Ord**. Probar que A es un conjunto*

Sea A una clase transitiva tal que $A \subsetneqq$ **Ord**. Como A es transitiva, resulta que A es un segmento inicial de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$. Luego, A es un segmento inicial propio de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$. Por tanto, será una sección inicial de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$. En consecuencia, A será un conjunto (más aún, la clase A será un ordinal).

Ejercicio 44. *Sea a un conjunto. Consideremos:*

$$\bigcup{}^0 a = a \ \wedge \ \forall n \in \omega \ (\bigcup{}^{n+1} a = \bigcup(\bigcup{}^n a))$$

Notemos $CT(a) = \bigcup_{n\in\omega} (\bigcup{}^n a))$. Se pide:

(1) *Probar que $CT(a)$ es un conjunto transitivo tal que $a \subseteq CT(a)$.*

(2) *Probar que $CT(a)$ es el menor conjunto transitivo (por la relación de inclusión) que contiene al conjunto a.*

($CT(a)$ se denomina clausura transitiva del conjunto a).

Del axioma de la unión, resulta que $\forall n \in \omega$ ($\bigcup^n a$ es un conjunto). Por tanto, es un conjunto la clase

$$\mathrm{CT}(a) = \bigcup_{n\in\omega} (\bigcup{}^n a))$$

Además, $a = \bigcup^0 a \subseteq \mathrm{CT}(a)$.

Veamos que $\mathrm{CT}(a)$ es un conjunto transitivo. En efecto: si $x \in \mathrm{CT}(a)$, entonces existe $p \in \omega$ tal que $x \in \bigcup^p a$. Luego, $x \subseteq \bigcup^{p+1} a \subseteq \mathrm{CT}(a)$.

Veamos que $\mathrm{CT}(a)$ es el menor conjunto transitivo (por la relación de inclusión) que contiene al conjunto a. Para ello, sea b un conjunto transitivo tal que $a \subseteq b$.

- Veamos que $\forall n \in \omega\ (\bigcup^n a \subseteq b)$. Por inducción débil en ω.
  - Para $n = 0$ el resultado es trivial.
  - Sea $n \in \omega$ tal que $\bigcup^n a \subseteq b$. Si $x \in \bigcup^{n+1} a$, entonces existe $y \in \bigcup^n a$ tal que $x \in y$. Como $y \in b$ y b es un conjunto transitivo, resulta que $x \in b$.

En consecuencia, $\mathrm{CT}(a) \subseteq b$.

Ejercicio 45. *Sea a un conjunto tal que $a \subseteq$ **Ord**. Determinar el menor ordinal que contiene al conjunto a.*

Sea a un conjunto tal que $a \subseteq$ **Ord**. Como **Ord** es una clase transitiva, resulta que $\mathrm{CT}(a) \subseteq$ **Ord**. Luego, $\mathrm{CT}(a)$ es un subconjunto transitivo de **Ord** y, por tanto, es un ordinal.

Además, si $\alpha \in$ **Ord** es tal que $a \subseteq \alpha$, entonces α es un conjunto transitivo que contiene al conjunto a. Luego, $\mathrm{CT}(a) \subseteq \alpha$. Es decir, $\mathrm{CT}(a) \leqslant \alpha$.

Ejercicio 46. *Demostrar que si a es un conjunto, entonces son equivalentes:*

(1) *a es un ordinal.*

(2) *La relación de inclusión estrícta en a (es decir, $\{\langle x, y\rangle \in a \times a : x \subsetneqq y\}$) es un buen orden en a y, además,*

$$\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \subsetneqq x\})$$

(3) *Existe un buen orden R en a tal que $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : yRx\})$.*

(4) *$\in_a$ es un buen orden en a y $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \in x\})$.*

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supongamos que a es un ordinal. Entonces la relación $\subsetneqq_a$ coincide con $\in_a$. Luego, $\subsetneqq_a$ es un b.o. en a y, además, para cada $x \in a$ se tiene que $x \subseteq a$. Luego $x = \{y \in a : y \in x\} = \{y \in a : y \subsetneqq x\}$.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$

Trivial, basta considerar como R la relación $\subsetneqq_a$.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (4)}$

Sea R un b.o. en a tal que $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : yRx\})$. Veamos que $R = \in_a$.

- Sean $z, t \in a$ tales que $\langle z, t\rangle \in R$. Entonces $z \in \{y \in a : yRt\} = t$. Luego, $z \in t$.
- Sean $z, t \in a$ tales que $\langle z, t\rangle \in \in_a$. Entonces $t = \{y \in a : yRt\}$. Por tanto, zRt.

$\boxed{(4) \Longrightarrow (1)}$

Supongamos que $\in_a$ es un b.o. en a y que $\forall x \in a\ (x = \{y \in a : y \in x\})$. Se tiene que el conjunto a es transitivo, ya que $x \in a \Longrightarrow x = \{y \in a : y \in x\} \subseteq a$.

Ejercicio 47. *Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Probar que $\alpha^+ = \text{mín}\,\{\beta \in \text{Ord} : \alpha < \beta\}$.*

Sea α un ordinal y notemos $a = \{\beta \in \text{Ord} : \alpha < \beta\}$.

- Se tiene que $\alpha^+ \in a$, ya que $\alpha \in \mathbf{Ord} \Longrightarrow \alpha^+ \in \mathbf{Ord} \wedge \alpha < \alpha^+$.
- Se tiene que α^+ es una cota inferior de a en $\langle \mathbf{Ord}, \in\rangle$, ya que si $x \in a$ entonces $x \in \mathbf{Ord}$ y $\alpha < x$. Luego, $\alpha^+ \leqslant x$.

Ejercicio 48. *Demostrar que si α y β son ordinales tales que $\alpha < \beta$, entonces $\alpha^+ < \beta^+$.*

Sean α y β ordinales tales que $\alpha < \beta$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha < \beta &\Longrightarrow \alpha \in \beta \wedge \alpha \subsetneqq \beta \Longrightarrow \alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta \subsetneqq \beta^+ \\ &\Longrightarrow \alpha^+ \subsetneqq \beta^+ \Longrightarrow \alpha^+ < \beta^+ \end{aligned}$$

Ejercicio 49. *Sean a y b conjuntos de ordinales. Supongamos que*

$$\forall \alpha \in a \, \exists \beta \in b \, (\alpha < \beta)$$

Probar que $\bigcup a \in \bigcup b$ ó $\bigcup a = \bigcup b$.

Sean a y b conjuntos de ordinales verificando las condiciones del enunciado (por tanto $\bigcup a$ y $\bigcup b$ son ordinales). Se tiene que

$$\begin{aligned}
\forall \alpha \in a \, \exists \beta \in b \, (\alpha < \beta) &\Longrightarrow \forall \alpha \in a \, \exists \beta \in b \, (\alpha \in \beta) \Longrightarrow \forall \alpha \in a \, (\alpha \in \textstyle\bigcup b) \\
&\Longrightarrow \forall \alpha \in a \, (\alpha \subsetneqq \textstyle\bigcup b) \Longrightarrow \bigcup a \subseteq \bigcup b \\
&\Longrightarrow (\textstyle\bigcup a \subsetneqq \bigcup b) \vee (\bigcup a = \bigcup b) \\
&\Longrightarrow (\textstyle\bigcup a \in \bigcup b) \vee (\bigcup a = \bigcup b)
\end{aligned}$$

Ejercicio 50. *Sea A una clase de ordinales. Probar que son equivalentes:*

(1) *A es una clase propia.*

(2) *A no está acotada superiormente en $\langle Ord, \in \rangle$.*

(3) *$\bigcup A = Ord$.*

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supongamos que A es una clase propia. Si A estuviese acotada superiormente en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$, existiría un ordinal α tal que $\forall \beta (\beta \in A \to \beta \leqslant \alpha)$. Entonces $\forall \beta (\beta \in A \to \beta < \alpha^+)$. Luego, $A \subseteq \alpha^+$ y, en consecuencia, la clase A sería un conjunto.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$

Supongamos que la clase A no está acotada superiormente en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$. Entonces $\forall \alpha \in \mathbf{Ord} \, \exists \beta \in A \, (\alpha < \beta)$. Es decir, $\forall \alpha \in \mathbf{Ord} \, (\alpha \in \bigcup A)$. Luego, $\mathbf{Ord} \subseteq \bigcup A$. Por otra parte $A \subseteq \mathbf{Ord} \Longrightarrow \bigcup A \subseteq \mathbf{Ord}$. Por tanto, $\bigcup A = \mathbf{Ord}$.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (1)}$

Supongamos que $\bigcup A = \mathbf{Ord}$. Entonces la clase A es propia, ya que, de lo contrario, la clase $\bigcup A$ (y, por tanto, $\mathbf{Ord}$) sería un conjunto.

Ejercicio 51. *Sean a y b conjuntos. Usando el esquema de axiomas de reemplazamiento, probar que las siguientes clases son conjuntos:*

(1) $A = \{\{\{x\}\} : x \in a \cup b\}$.

(2) $B = \{a \cup x : x \in b\}$.

(3) $C = \{\mathbf{P}(x) : x \in a\}$.

(4) $D = \{x \cup y : x \in a \wedge y \in b\}$.

(1) Consideremos la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $F(x) = \{\{x\}\}$, para cada $x \in \mathbf{V}$.

Entonces $F[a \cup b] = A$. Como F es una aplicación y $a \cup b$ es un conjunto, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduce que es un conjunto la clase $F[a \cup b] = A$.

(2) Consideremos la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $F(x) = a \cup x$, para cada $x \in \mathbf{V}$.

Entonces $F[b] = B$. Como F es una aplicación y b es un conjunto, del esquema de axiomas de reemplazamiento resulta que la clase $F[b] = B$ es un conjunto.

(3) Consideremos la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $F(x) = \mathbf{P}(x)$, para cada $x \in \mathbf{V}$.

Entonces $F[a] = C$. Como F es una aplicación y a es un conjunto, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduce que la clase $F[a] = C$ es un conjunto.

(4) En primer lugar, consideremos las aplicaciones $\Pi_1, \Pi_2 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definidas como sigue:

- Si $x \in \mathbf{V}$ no es un par ordenado, entonces $\Pi_1(x) = \Pi_2(x) = 0$.
- Si $x = \langle z, t\rangle \in \mathbf{V}$, entonces $\Pi_1(x) = z$ y $\Pi_2(x) = t$.

Entonces consideramos la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$F(x) = \Pi_1(x) \cup \Pi_2(x), \text{ para cada } x \in \mathbf{V}$$

Veamos que $F[a \times b] = D$.

$$\begin{aligned} F[a \times b] &= \{F(z) : z \in a \times b\} = \{F(\langle x, y\rangle) : x \in a \wedge y \in b\} \\ &= \{\Pi_1(\langle x, y\rangle) \cup \Pi_2(\langle x, y\rangle) : x \in a \wedge y \in b\} = D \end{aligned}$$

Como F es una aplicación y $a \times b$ es un conjunto, del esquema de axiomas de reemplazamiento resulta que la clase $F[a \times b] = D$ es un conjunto.

Ejercicio 52. *Sea F una aplicación. Probar que F es un conjunto si y sólo si $\mathrm{dom}(F)$ es un conjunto.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea F una aplicación. Como F es una relación, resulta que

$$\mathrm{dom}(F) \subseteq \bigcup\bigcup F \quad (\star)$$

Teniendo presente que F es un conjunto, del axioma de la unión se deduce que $\bigcup\bigcup F$ es un conjunto. Por tanto, de $(\star)$ y del esquema de axiomas de separación se concluye que $\mathrm{dom}(F)$ es un conjunto.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $\mathrm{dom}(F)$ es un conjunto. Como F es una aplicación y $F[\mathrm{dom}(F)] = \mathrm{rang}(F)$, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduce que $\mathrm{rang}(F)$ es un conjunto. Teniendo presente que

$$F \subseteq \mathrm{dom}(F) \times \mathrm{rang}(F)$$

concluimos que la clase F es un conjunto.

Ejercicio 53. *Sea F una aplicación. Demostrar o refutar:*

(1) *Si x es un conjunto, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.*

(2) *Si x es un conjunto y F es inyectiva, entonces $F^{-1}[x]$ es un conjunto.*

(1) **Falso.** Consideremos la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $F(x) = 0$, para cada $x \in \mathbf{V}$. Si $a = \{0\}$, entonces $F^{-1}[a] = \mathbf{V}$. Luego, a es un conjunto y $F^{-1}[a]$ no lo es.

(2) **Verdadero.** Sea x un conjunto y F una aplicación inyectiva. Entonces F^{-1} es una aplicación. Luego, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduce que $F^{-1}[x]$ es un conjunto.

Ejercicio 54. *Probar que:*

$$(\forall z)(\exists u)(\forall y)[y \in u \leftrightarrow (\exists x \in z)(\forall v)[v \in y \leftrightarrow (\exists w \in x)(v \in w)]]$$

Queremos probar que para cada conjunto z, la clase

$$A_z = \{y : \ \exists x \in z \forall v \ [v \in y \leftrightarrow \exists w \in x(v \in w)]\}$$

es un conjunto.

Se tiene que $A_z = \{\bigcup x : \; x \in z\}$. En efecto:

$$\begin{array}{rcl} y \in A_z & \leftrightarrow & \exists x \in z \, \forall v \, (v \in y \leftrightarrow \exists w \in x \, (v \in w)) \\ & \leftrightarrow & \exists x \in z \, \forall v \, (v \in y \leftrightarrow v \in \bigcup x) \\ & \leftrightarrow & \exists x \in z \, (y = \bigcup x) \end{array}$$

Veamos que para cada conjunto z, la clase A_z es un conjunto.

> Consideremos la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $F(x) = \bigcup x$, para cada $x \in \mathbf{V}$. Entonces, $F[z] = A_z$. Por tanto, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduce que A_z es un conjunto.

Ejercicio 55. *Demostrar que si $\langle a, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado y $a \neq \emptyset$, entonces $t.o.(\langle a, < \rangle) = \{t.o.(\langle S^a_<(x), < \rangle) : x \in a\}$.*

Sea α =t.o.$(\langle a, < \rangle)$. Sea h un isomorfismo de $\langle a, < \rangle$ en $\langle \alpha, \in \rangle$. Según la proposición 3.3.13, para cada $x \in a$ se tiene que $h \restriction S^a_<(x)$ es un isomorfismo de $\langle S^a_<(x), < \rangle$ en $\langle S^\alpha_\in(h(x)), \in \rangle$. Luego,

$$\begin{array}{l} \forall x \, (x \in a \to \text{t.o.}(\langle S^a_<(x), < \rangle) = S^\alpha_\in(h(x))) \\ \forall x \, (x \in a \to \text{t.o.}(\langle S^a_<(x), < \rangle) = h(x)) \end{array}$$

Por tanto, se verifica que

$$\{\text{t.o.}(\langle S^a_<(x), < \rangle) : \; x \in a\} = \{h(x) : \; x \in a\} = h[a] = \alpha = \text{ t.o.}(\langle a, < \rangle)$$

Ejercicio 56. *Sea a un conjunto. Estudiar en qué condiciones es un conjunto la clase*

$$B = \{x : \; \textit{Existe una aplic. supray. no inyect. de } x \textit{ en } a\ \}$$

Distingamos dos casos:

> <u>Caso1º:</u> Supongamos que $a = \emptyset$.
>
> En este caso, para que exista una aplicación de un conjunto x en a debe verificarse que $x = \emptyset$ (además, en tal situación, la única aplicación de x en a es la aplicación vacía, que es biyectiva). Por tanto, en este caso, la clase B es la clase vacía y, en consecuencia, es un conjunto.
>
> <u>Caso2º:</u> Supongamos que $a \neq \emptyset$.
>
> Sean $c \in a$ y $d \notin a$. Consideremos la aplicación $f : \mathbf{V} \to B$ definida como sigue: $f(y) = (a \cup \{d\}) \times \{y\}$, para cada $y \in \mathbf{V}$. Entonces f es una aplicación bien definida de $\mathbf{V}$ en B ya que

- $\star$ Para cada $y \in \mathbf{V}$, se tiene que $(a \cup \{d\}) \times \{y\} \in B$ ya que la aplicación $g : (a \cup \{d\}) \times \{y\} \to a$ definida por

$$g(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} x & \text{si } x \in a \\ c & \text{si } x = d \end{cases}$$

es suprayectiva y no inyectiva.

- $\star$ $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{V}$, por definición.

Además, la aplicación f es inyectiva ya que

$$f(y) = f(z) \Longrightarrow (a \cup \{a\}) \times \{y\} = (a \cup \{a\}) \times \{z\} \Longrightarrow y = z$$

Así pues, f^{-1} es una aplicación de B en $\mathbf{V}$ cuyo rango es $\mathbf{V}$. Luego si B fuese un conjunto, del esquema de axiomas de reemplazamiento, deduciríamos que la clase $f^{-1}[B] = \mathbf{V}$ es un conjunto. En consecuencia, en este caso la clase B debe ser propia.

Ejercicio 57. *Sea A una clase propia y b un conjunto. Demostrar que la clase $A \times b$ es propia si y sólo si el conjunto b es no vacío.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $b = \emptyset$, entonces $A \times b = A \times \emptyset = \emptyset$. Luego, la clase $A \times b$ no sería propia.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $b \neq \emptyset$. Sea $c \in b$. Entonces $A \times \{c\} \subseteq A \times b$. Consideremos la aplicación $f : A \to A \times \{c\}$ definida así: $f(x) = \langle x, c \rangle$, para cada $x \in A$. Obviamente, f es una aplicación bien definida entre las clases citadas. Además

- $\star$ f es inyectiva, ya que si $x, y \in A$ satisfacen que $f(x) = f(y)$, entonces $\langle x, c \rangle = \langle y, c \rangle$. Luego, $x = y$.
- $\star$ f es suprayectiva de A en $A \times \{c\}$, ya que si $\langle x, c \rangle \in A \times \{c\}$, entonces $x \in A$ y $f(x) = \langle x, c \rangle$.

Veamos que la clase $A \times b$ es propia. Caso contrario, del esquema de axiomas de separación resulta que la clase $A \times \{c\}$ sería un conjunto. Como f^{-1} es una aplicación y $f^{-1}[A \times \{c\}] = A$, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduciría que la clase A es un conjunto. Lo que es una contradicción.

4.7. Problemas propuestos

Ejercicio 4.1. Sea $\langle a, R \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Probar que es propia la clase

$$A = \{\langle x, S \rangle : \langle x, S \rangle \text{ es un conjunto parcialmente ordenado} \wedge \langle a, R \rangle \cong \langle x, S \rangle\}$$

Indicación: Dado $b \in \mathbf{V}$, considérese $\langle x, S \rangle$ de manera que $x = a \times \{b\}$ y S es la relación transportada por la aplicación $f : x \to a$ definida por $f(\langle y, b \rangle) = y$.

Ejercicio 4.2. ¿Existe algún par ordenado que sea un ordinal ? ¿Existe algún par no ordenado que sea un ordinal ?

Ejercicio 4.3. Sean $\alpha \in \mathbf{Ord}$ y a un subconjunto de α. Sea R el orden inducido en a por $\in_\alpha$. Probar que t.o.$(\langle a, R \rangle) \leqslant \alpha$.

Indicación: Utilícese el resultado del ejercicio 3.13.

Ejercicio 4.4. Probar que $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\langle \alpha, \beta \rangle \neq \{\alpha, \beta\})$.

Indicación:Téngase presente que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha \notin \alpha)$.

Ejercicio 4.5. Demostrar o refutar:

(1) Si $x \subseteq y$ e y es un conjunto transitivo, entonces x es transitivo.

(2) Si x es un conjunto transitivo e $y \subseteq \mathbf{P}(x)$, entonces $x \cup y$ es transitivo.

Ejercicio 4.6. Determinar, para cada uno de los conjuntos a siguientes, si son transitivos, si $\in_a$ es un buen orden y si son ordinales:

(1) $a = \{1, 2, 3\}$.

(2) $a = \{\{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$.

(3) $a = \{0, \{0\}, 2, \{0, 1, \{0, \{0\}\}\}\}$.

Ejercicio 4.7. Sean x e y dos conjuntos. Probar que $x \times y$ es conjunto usando el esquema de axiomas de reemplazamiento, pero sin usar el axioma de las partes.

Indicación: Para cada $c \in x$, la clase $\{c\} \times y$ es conjunto por el esquema de axiomas de reemplazamiento. Además, $x \times y = \bigcup \{\{c\} \times y : c \in x\}$.

Ejercicio 4.8. Demostrar o refutar:

(1) Si A es una clase transitiva, entonces la relación $\in_A$ es transitiva.

(2) Sean A, B clases y $F : A \to B$ sobreyectiva. Entonces A es conjunto si y sólo si B lo es.

Ejercicio 4.9. Demostrar o refutar:

(1) $\forall u \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x \in u (y \subseteq x))$.

(2) $\forall u \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow \exists x \in u (x \subseteq y))$.

Ejercicio 4.10. Sean a y b conjuntos. Demostrar, usando el esquema de axiomas de reemplazamiento, que las siguientes clases son conjuntos:

(1) $A = \{\mathbf{P}(x) \cup \mathbf{P}(y) : x \in a \wedge y \in b\}$.

(2) $B = \{a \cup \{\{x\}\} : x \in b\}$.

Ejercicio 4.11. Dar ejemplos de conjuntos a, b, c, d y e tales que sean transitivos los siguientes conjuntos: $\{\{\{\emptyset\}\}, a, b\}$ y $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}, c, d, e\}$. ¿Es posible obtenerlos de manera que, además, sean ordinales ?

Ejercicio 4.12. Probar que existe un conjunto transitivo que contiene a $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ y que es el menor conjunto transitivo (respecto de la relación de inclusión) que verifica tal propiedad.

Indicación: Utilícese el ejercicio 44.

Ejercicio 4.13. Sea x un conjunto no vacío de ordinales. Diremos que y es una *cota superior estricta* de x si $\forall z \in x(z < y)$. La menor cota superior estricta de x se denomina *supremo estricto* de x, y la notamos por $\sup^+(x)$. Probar que:

(1) Si x no tiene máximo, entonces $\sup^+(x) = \sup(x)$ y, además, $\sup^+(x)$ es un ordinal que no es sucesor.

(2) Si x tiene máximo y éste es el ordinal α, entonces $\sup^+(x) = \alpha = \sup(x)^+$.

Indicación: (1) Probar que $\sup(x)$ es cota superior estricta.

Ejercicio 4.14. Con los axiomas hasta ahora vistos, ¿cuáles son los ordinales cuya existencia podemos asegurar?

Ejercicio 4.15. Sean a y b conjuntos y R, S buenos órdenes en a y b respectivamente. Probar que $\text{t.o.}(\langle a, R\rangle) = \text{t.o.}(\langle b, S\rangle) \leftrightarrow \langle a, R\rangle \cong \langle b, S\rangle$.

Ejercicio 4.16. Sean $\langle x, R\rangle$, $\langle x', R'\rangle$, $\langle y, S\rangle$ y $\langle y', S'\rangle$ conjuntos bien ordenados tales que $\langle x, R\rangle \cong \langle x', R'\rangle$ e $\langle y, S\rangle \cong \langle y', S'\rangle$. Probar que:

(1) Si $x \cap y = \emptyset$ y $x' \cap y' = \emptyset$, entonces $\text{t.o.}(\langle x \cup y, R \oplus S\rangle) = \text{t.o.}(\langle x' \cup y', R' \oplus S'\rangle)$

(2) $\text{t.o.}(\langle x \times y, R \otimes S\rangle) = \text{t.o.}(\langle x' \times y', R' \otimes S'\rangle)$

Indicación: Utilícese el ejercicio anterior.

Capítulo 5

El conjunto de los números naturales

Se trata de definir los números naturales en términos de la Teoría de Conjuntos, de tal manera que los conjuntos específicos que se identifiquen con los números naturales, satisfagan las “propiedades usuales"que se les suelen exigir a dichos números y que se conocen clásicamente por el nombre de *axiomas* o *postulados de Peano*. Además, para poder garantizar que sea un conjunto la clase cuyos elementos son los números naturales, hemos de introducir un nuevo axioma en nuestra teoría: *el axioma del infinito*.

5.1. Ordinales sucesores, límites y finitos

Definición 5.1.1. Sea α un ordinal. Diremos que:

(1) α es un *ordinal sucesor* si existe $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\alpha = \beta^+$.

(2) α es un *ordinal límite* si $\alpha \neq 0$ y α no es sucesor.

Consideraciones:

(1) Existen ordinales sucesores: $1, 2, 3, \ldots$.

(2) ¿Existen ordinales límites? Para poder asegurar su existencia necesitaremos el axioma del infinito.

Proposición 5.1.2. *Sea α un ordinal no nulo. Son equivalentes:*

(1) *α es un ordinal límite.*

(2) $\bigcup \alpha = \alpha$.

(3) $\forall\beta(\beta < \alpha \to \beta^+ < \alpha)$.

Definición 5.1.3. Diremos que un ordinal α es *finito* (o un *número natural*) si $\forall\beta$ ($\beta \leqslant \alpha \to \beta = 0 \vee \beta$ es un ordinal sucesor).

Notaremos por $\mathbb{N}$ a la clase cuyos elementos son los números naturales; es decir, $\mathbb{N} = \{\alpha : \alpha \text{ es un número natural}\}$. Se tiene que los ordinales $0, 1, 2, \ldots$, son números naturales. Usaremos $m, n, p, \ldots$ como variables para los números naturales. Con los axiomas estudiados hasta ahora no puede demostrarse que la clase $\mathbb{N}$ sea un conjunto.

Axioma del infinito: $\exists x(0 \in x \wedge (\forall y(y \in x \to y^+ \in x)))$
Es decir, *existe un conjunto al que pertenece el conjunto vacío y, además, es cerrado por el paso al siguiente*.

Definición 5.1.4. Diremos que una clase A es **inductiva** si

$$0 \in A \wedge (\forall y(y \in A \to y^+ \in A))$$

Así pues, el axioma del infinito garantiza la existencia de, al menos, un conjunto inductivo.

5.2. Propiedades de $\mathbb{N}$

Proposición 5.2.1. *La clase* $\mathbb{N}$ *es transitiva e inductiva.*

Proposición 5.2.2. *Sea a un conjunto inductivo. Entonces,* $\mathbb{N} \subseteq a$.

Corolario 5.2.3. *La clase* $\mathbb{N}$ *es un conjunto y, además,*

$$\mathbb{N} = \bigcap\{x : \ x \text{ es un conjunto inductivo}\}$$

Proposición 5.2.4. *El conjunto* $\mathbb{N}$ *es un ordinal.*

Cuando queramos resaltar del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales que es un ordinal, lo representaremos por ω.

Proposición 5.2.5. ω *es el menor ordinal no finito y, además, es el menor ordinal límite.*

Teorema 5.2.6. *(Postulados de Peano)*
Se verifica:

(1) $0 \in \mathbb{N}$.

(2) $\forall x(x \in \mathbb{N} \to x^+ \in \mathbb{N})$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}(n^+ \neq 0)$.

(4) $\forall m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}(m \neq n \to m^+ \neq n^+)$.

(5) *Sea $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $0 \in a \wedge \forall x \in a(x^+ \in a)$. Entonces, $a = \mathbb{N}$ (principio de inducción débil o completa en ω).*

5.3. Problemas resueltos

Ejercicio 58. *Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto bien ordenado no vacío de tipo ordinal α. Demostrar que el ordinal α es límite si y sólo si $\langle a, < \rangle$ carece de elemento máximo.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que α es un ordinal límite. Como $\alpha = \text{t.o.}(\langle a, < \rangle)$, existe un isomorfismo, f de $\langle \alpha, < \rangle$ en $\langle a, < \rangle$. Veamos que $\langle a, < \rangle$ carece de elemento máximo.

– Sea $x \in a$. Entonces existe $\beta \in \alpha$ tal que $f(\beta) = x$. Ahora bien, como α es límite resulta que $\beta^+ \in \alpha$. Por tanto, si $f(\beta^+) = y$ entonces resulta que $y \in a \wedge x = f(\beta) < f(\beta + 1) = y$. Es decir, x no es cota superior de $\langle a, < \rangle$. Por tanto, $\langle a, < \rangle$ carece de elemento máximo.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que α no es un ordinal límite. En tal situación, teniendo presente que $\alpha \neq 0$ (pues $a \neq \emptyset$) resultaría que $\exists \beta \in \mathbf{Ord}\ (\alpha = \beta^+)$. Sea f un isomorfismo de $\langle \beta^+, < \rangle$ en $\langle a, < \rangle$. Como $\beta \in \beta^+$ resulta que $f(\beta) \in a$. Veamos que $f(\beta) = \text{máx}_<(a)$. Para ello, basta probar que $f(\beta)$ es una cota superior de $\langle a, < \rangle$.

⋆ Sea $x \in a$. Entonces existe $y \in \beta^+$ tal que $x = f(y)$. Ahora bien

$$y \in \beta^+ \Longrightarrow y < \beta^+ \Longrightarrow y \leqslant \beta \Longrightarrow f(y) \leqslant f(\beta) \Longrightarrow x \leqslant f(\beta)$$

Ejercicio 59. *Sea a un conjunto no vacío de ordinales. Demostrar o refutar:*

(1) *Si los elementos de a son límites, entonces $\bigcup a$ es límite.*

(2) *Si los elementos de a son sucesores, entonces $\bigcup a$ es sucesor.*

(1) **Verdadero**. Sea a un conjunto no vacío de ordinales. Supongamos que

$$\forall x \in a(x \text{ es ordinal límite})$$

Veamos que $\bigcup a$ es un ordinal límite.

- ⋆ Como $a \subseteq \mathbf{Ord}$ resulta que $\bigcup a \in \mathbf{Ord}$.
- ⋆ Como a es un conjunto no vacío y todos sus elementos son, también, no vacíos, resulta que $\bigcup a \neq \emptyset$.
- ⋆ Veamos que $\forall x(x \in \bigcup a \to x^+ \in \bigcup a)$.

  En efecto: si $x \in \bigcup a$, entonces existe $y \in a$ tal que $x \in y$. Como y es un ordinal límite resulta que $x^+ \in y$. Por tanto, $x^+ \in \bigcup a$.

(2) **Falso**. Sea $a = \omega - \{0\}$. Entonces

- ⋆ $\forall x(x \in \omega - \{0\} \to x \text{ es ordinal sucesor})$.
- ⋆ $\bigcup a = \omega$ (luego $\bigcup a$ no es un ordinal sucesor).

Ejercicio 60. *Sean $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Probar que α es un número natural si y sólo si todo subconjunto no vacío de α posee elemento máximo (respecto del orden usual de α).*

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\alpha \in \mathbb{N}$. Sea a un subconjunto no vacío de α. Teniendo presente que $\bigcup a = \sup(a)$, para probar que $\bigcup a = \text{máx}(a)$, bastará demostrar que $\bigcup a \in a$. Veámoslo.

Se tiene que $\bigcup a \subseteq \alpha$. Luego, $\bigcup a \leqslant \alpha$. Como $\bigcup a \in \mathbf{Ord}$ y $\alpha \in \mathbb{N}$, resulta que $(\bigcup a = 0 \vee \bigcup a$ es ordinal sucesor).

- Si $\bigcup a = 0$, entonces $a = \{0\}$. Luego, $\bigcup a = 0 \in a$.
- Si $\bigcup a$, es un ordinal sucesor, sea $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\bigcup a = \beta^+$. Veamos que $\bigcup a \in a$.
  - ⋆ Caso contrario, resultaría que $\beta^+ = \bigcup a \notin a$. Como $\bigcup a$ es cota superior de a, también lo sería β. Pero $\beta < \beta^+$ y $\beta^+ = \sup(a)$. Lo que es una contradicción.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que todo subconjunto no vacío de α tiene elemento máximo. Sea $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\beta \leqslant \alpha \wedge \beta \neq 0$. Veamos que β es un ordinal sucesor.

- Como β es un subconjunto no vacío de α, existirá $\ggg \in \mathbf{Ord}$ tal que $\ggg = \text{máx}(\beta)$. Se tiene que
  - ▪ $x \in \beta \Longrightarrow x \leqslant \ggg \Longrightarrow x < \ggg^+ \Longrightarrow x \in \ggg^+$.
  - ▪ $x \in \ggg^+ \Longrightarrow x < \ggg^+ \Longrightarrow x \leqslant \ggg \overset{\ggg < \beta}{\Longrightarrow} x < \beta \Longrightarrow x \in \beta$.

Luego, $\beta = \ggg^{+}$.

Ejercicio 61. *Sea a un subconjunto no vacío de ω que está acotado superiormente en $\langle \omega, \in \rangle$. Probar que a posee elemento máximo (teorema del extremo).*

Sea b el conjunto de cotas superiores de a en $\langle \omega, \in \rangle$. Entonces, b es un subconjunto no vacío de ω. Luego, existe $c = \text{mín}(b)$.

Si $c = 0$, entonces resulta que $a = \{0\}$ y, por tanto, $0 = \text{máx}(a)$.

Supongamos que $c \neq 0$. Sea $n \in \omega$ tal que $c = n^{+}$. Como $n < n^{+} = c$, resulta que $n \notin b$. Luego, existe $d \in a$ tal que $n < d$. Entonces, $c = n^{+} \leqslant d$. Como $c \in b$ y $d \in a$ resulta que $d \leqslant c$. Por tanto, $c = d \in a$.

Es decir, c es un elemento de a que, además, es cota superior de a. En consecuencia, $c = \text{máx}(a)$.

Ejercicio 62. *Sea a un subconjunto no vacío de ω tal que $a = \bigcup a$. Probar que a no está acotado superiormente en $\langle \omega, \in \rangle$ y concluir que $a = \omega$.*

En primer lugar, obsérvese que el conjunto a es transitivo, ya que $a = \bigcup a$. Veamos que el conjunto a no está acotado superiormente en $\langle \omega, \in \rangle$.

– En efecto: caso contrario, por el teorema del extremo, existirá $n \in \omega$ tal que $n = \text{máx}(a)$. Se tiene que

  - $x \in a \Longrightarrow x \leqslant n \Longrightarrow x < n^{+} \Longrightarrow x \in n^{+}$.
  - $x \in n^{+} \Longrightarrow x \leqslant n \Longrightarrow x \in a$ (pues a es transitivo y $n \in a$).

  Luego, $a = n^{+}$. De donde resultaría que $a = \bigcup a = \bigcup n^{+} = n$. Lo que es una contradicción (se prueba fácilmente que $\bigcup n^{+} = n$).

Finalmente, veamos que $\omega \subseteq a$. Para ello, sea $n \in \omega$. Como a no está acotado superiormente en $\langle \omega, \in \rangle$, existe $p \in a$ tal que $n < p$. Luego, $n \in \bigcup a$. Es decir, $n \in a$.

Ejercicio 63. *Sea a un conjunto inductivo. Probar que $a \cap \mathbf{P}(a)$ es un conjunto inductivo ¿Existe un conjunto no inductivo, b tal que $b \cap \mathbf{P}(b)$ sea inductivo?*

Sea a un conjunto inductivo. Veamos que $a \cap \mathbf{P}(a)$ es un conjunto inductivo.

- $\emptyset \in a \cap \mathbf{P}(a)$, ya que $\emptyset \in a$ y $\emptyset \subseteq a$.
- Sea $x \in a \cap \mathbf{P}(a)$. Como $x \in a$, resulta que $x^{+} \in a$. Además, $x^{+} \subseteq a$, pues $y \in x^{+} \Longrightarrow (y \in x \vee y = x) \overset{x \subseteq a}{\Longrightarrow} y \in a$.

Veamos que existe un conjunto no inductivo, b tal que $b \cap \mathbf{P}(b)$ es inductivo. En efecto: sea $b = \omega \cup \{\{\omega\}\}$. Entonces, b no es inductivo, ya que $\{\omega\} \in b$ y $\{\omega\}^+ \notin b$.

Veamos que $b \cap \mathbf{P}(b) = \omega$.

- $\omega \subseteq \mathbf{P}(b)$, ya que $n \in \omega \Longrightarrow n \subseteq \omega \subseteq b \Longrightarrow n \in \mathbf{P}(b)$.
- $\{\omega\} \notin \mathbf{P}(b)$, ya que $\omega \notin b$ y, por tanto, $\{\omega\} \nsubseteq b$.

En consecuencia, el conjunto $b \cap \mathbf{P}(b)$ es inductivo.

Ejercicio 64. *Sea a un conjunto inductivo. Probar que son inductivos los conjuntos que se indican a continuación:*

(1) $b = \{x \in a : \ x \textit{ transitivo } \}$.

(2) $c = \{x \in a : \ x \textit{ transitivo } \wedge x \notin x\}$.

(3) $d = \{x \in a : \ x \textit{ transitivo } \wedge \forall z \subseteq x \, (z \neq \emptyset \to \exists u \in z \forall y \in z \, (y \notin u))\}$.

(1) Como $\emptyset \in a$ y $\emptyset$ es un conjunto transitivo, resulta que $\emptyset \in b$.

Sea $x \in b$. Entonces, $x \in a$ y x es un conjunto transitivo. Luego, $x^+ \in a$ y, además, x^+ es transitivo. Es decir, $x^+ \in b$.

(2) Como $\emptyset \in a$, $\emptyset$ es un conjunto transitivo y $\emptyset \notin \emptyset$, resulta que $\emptyset \in c$.

Sea $x \in c$. Entonces, $x \in a$, x es un conjunto transitivo y $x \notin x$. Luego, $x^+ \in a$ y x^+ es un conjunto transitivo. Veamos que $x^+ \notin x^+$.

- Caso contrario, resultaría que $x^+ \in x^+$. Por definición de x^+ resultaría que $x^+ \in x \vee x^+ = x$. Si $x^+ \in x$, entonces $x \in x^+ \subseteq x$ (pues x es transitivo) y, por tanto, $x \in x$. Si $x^+ = x$, entonces $x \in x^+ = x$. En ambos casos, se contradice que $x \notin x$.

Por tanto, $x^+ \in c$.

(3) En primer lugar, observemos que si $x \in d$ y $x \in x$, entonces $\{x\}$ es un subconjunto no vacío de x, luego $x \notin x$. Por tanto, $x \in d \Longrightarrow x \notin x$.

Se tiene que $\emptyset \in d$, ya que $\emptyset \in a$, $\emptyset$ es un conjunto transitivo y, además,

$$\forall z \subseteq \emptyset \, (z \neq \emptyset \to \exists u \in z \forall y \in z \, (y \notin u))$$

(pues el antecedente es falso).

Sea $x \in d$. Entonces, $x \in a$ y x es transitivo. Luego, $x^+ \in a$ y x^+ es un conjunto transitivo. Para ver que x^+ satisface la tercera propiedad que caracteriza a los elementos de d, sea z un subconjunto no vacío de x^+. Entonces,

- O bien $z \cap x = \emptyset$, en cuyo caso $z = \{x\}$ y $\exists u \in z \forall y \in z\ (y \notin u)$ (basta tomar $u = x$).
- O bien $z \cap x \neq \emptyset$, en cuyo caso (teniendo presente que $z \cap x$ es un subconjunto no vacío de x y que $x \in d$), existe $t \in z \cap x$ tal que $\forall y \in z \cap x\ (y \notin t)$. Entonces, es inmediato que
$$\forall y \in z\ (y \notin t)$$
Sea $v \in z$. Como $z \subseteq x^+$, resulta que $v \in x^+$. Si $v \in x$, entonces $v \in z \cap x$ y, por tanto, $v \notin t$. Si $v = x$, entonces $v \notin t$ (pues $x \in t \overset{t \subseteq x}{\Longrightarrow} x \in x$).

Ejercicio 65. *Demostrar que un ordinal es límite si y sólo si es un conjunto inductivo.*

Sea α un ordinal.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que α es límite. Entonces $\alpha \neq 0$. Luego, $0 \in \alpha$. Además, si $x \in \alpha$, entonces $x < \alpha$. Luego, $x^+ < \alpha$. Por tanto, $x^+ \in \alpha$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que α es un conjunto inductivo. Entonces α es un conjunto no vacío (ya que $0 \in \alpha$). Además, si $x \in \alpha$, entonces $x^+ \in \alpha$. Luego, $x^+ < \alpha$. Por tanto, α es un ordinal límite.

Ejercicio 66. *Dar un ejemplo de un conjunto inductivo que no sea un ordinal.*

Consideremos el conjunto a descrito informalmente como sigue:
$$a = \omega \cup \{\omega^+, (\omega^+)^+, ((\omega^+)^+)^+, \dots\}$$

- Veamos que a es un conjunto inductivo.

  Obviamente, $0 \in a$. Sea $x \in a$. Entonces

  – O bien, $x \in \omega$, en cuyo caso $x^+ \in \omega \subseteq a$.

  – O bien, existe $p \in \omega - \{0\}$ tal que $x = \omega^{++\overset{(p)}{\cdots}+}$, en cuyo caso
  $$x^+ = \omega^{++\overset{(p+1)}{\cdots}+} \in a$$

- Veamos que a **no** es un ordinal.

  Basta tener presente que a no es un conjunto transitivo, ya que
  $$\omega^+ \in a, \omega \in \omega^+ \text{ y } \omega \notin a$$

Ejercicio 67. *Sea R la relación definida en el conjunto, $\mathbb{Z}$, de los números enteros, como sigue:*
$xRy \iff |x| < |y| \vee (|x| = |y| \wedge x < y)$.
Se pide:

(1) *Demostrar que R es un buen orden en $\mathbb{Z}$.*

(2) *Calcular t.o.$(\langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle)$.*

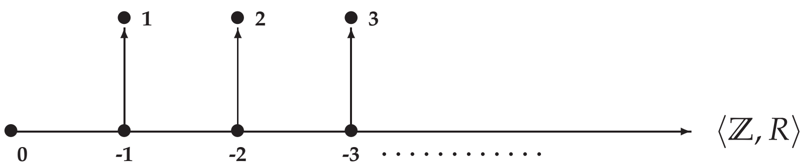
La solución de este problema vamos a estructurarla como sigue:

(a) Probaremos que $\langle \mathbb{Z}, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

(b) Demostraremos que $\langle \mathbb{Z}, R\rangle$ es isomorfo a $\langle \omega, <\rangle$ (encontrando el único isomorfismo, f, que existe entre dichos conjuntos ordenados). De donde resultará que $\langle \mathbb{Z}, <\rangle$ es un conjunto bien ordenado (por serlo $\langle \omega, <\rangle$).

(c) A partir de (b), mediante la restricción de f a $S_R^{\mathbb{Z}}(x)$, hallaremos el t.o.$(\langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle)$.

En primer lugar, hagamos una descripción gráfica de dicha relación.



(a) $\langle \mathbb{Z}, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

- R es **irreflexiva** en $\mathbb{Z}$.

  En efecto: si $x, y \in \mathbb{Z}$ verifican que xRy, entonces $x \neq y$.

- R es **transitiva** en $\mathbb{Z}$.

  En efecto: sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tales que xRy e yRz.

  Caso 1º: Supongamos que $|x| < |y|$.
  En este caso, teniendo presente que $|y| \leqslant |z|$ resulta que $|x| < |z|$. Luego, xRz.

  Caso 2º: Supongamos que $|x| = |y| \wedge x < y$ (luego, $y > 0$).
  Entonces

  – O bien $|y| < |z|$, en cuyo caso $|x| < |z|$ y, por tanto, xRz.
  – O bien $|y| = |z| \wedge y < z$: este caso no se puede dar pues $y > 0$.

- R es **conexa** en $\mathbb{Z}$.

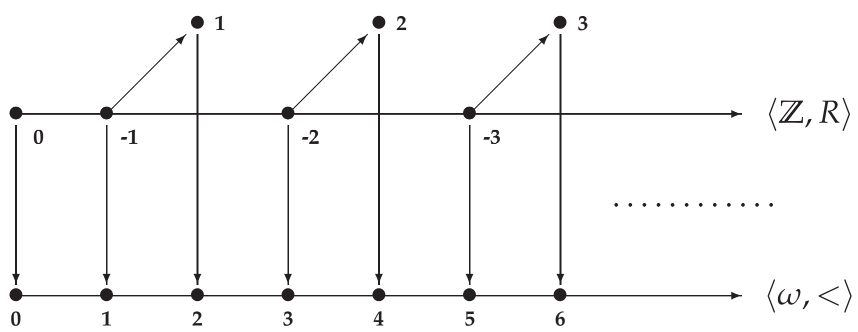
  En efecto: sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \neq y$. Entonces

  – O bien $|x| < |y|$, en cuyo caso xRy.
  – O bien $|y| < |x|$, en cuyo caso yRx.
  – O bien $|x| = |y| \wedge x < y$, en cuyo caso xRy.
  – O bien $|x| = |y| \wedge y < x$, en cuyo caso yRx.

(b) Veamos que $\langle \mathbb{Z}, < \rangle \cong \langle \omega, < \rangle$.

Vamos a determinar el único isomorfismo que existe de $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$. Para ello, vamos a justificar cómo conseguir el candidato adecuado.

En la descripción gráfica de $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ podemos imaginar que los elementos de $\mathbb{Z}$ están distribuidos en "columnas", de tal manera que la "columna k–ésimaçonsta de los elementos k y $-k$. La imagen gráfica de un isomorfismo de $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$ podría ser la siguiente:



¿Quién debería ser $f(x)$, para cada $x \in \mathbb{Z}$? Desde luego, $f(0) = 0$. Supongamos que $x \neq 0$. Entonces, $f(x)$ debería coincidir con el número de elementos de $\mathbb{Z}$ que son estríctamente menores que x por la relación R ($f(0) = 0, f(-1) = 1, f(1) = 2, f(-2) = 3, f(2) = 4, \ldots$).

– Caso 1º: Supongamos que $x > 0$.
  En este caso:

$$\begin{aligned} f(x) &= (n^{\underline{o}}\ elementos\ col.\ 0) + (n^{\underline{o}}\ elementos\ col.\ 1) + \cdots + \\ &\quad + (n^{\underline{o}}\ elementos\ col.\ (x-1)) + 1 = \\ &= 1 + (2 + 2 + \overset{(x-1)}{\ldots} + 2) + 1 = 1 + 2 \cdot (x-1) + 1 = 2x \end{aligned}$$

– Caso 2º: Supongamos que $x < 0$.
En este caso:

$$\begin{aligned} f(x) &= (n^{\underline{o}}\ elementos\ col.\ 0) + (n^{\underline{o}}\ elementos\ col.\ 1) + \cdots + \\ &\quad + (n^{\underline{o}}\ elementos\ col.\ (|x|-1)) = \\ &= 1 + (2 + 2 + \overset{(-x-1)}{\ldots} + 2) = \\ &= 1 + 2 \cdot (-x-1) = -2x - 1 \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de conjeturar que la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \omega$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -2x-1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

es un isomorfismo de $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$. Para probar dicha conjetura, y teniendo presente que se trata de conjuntos totalmente ordenados, basta probar que f es un **homomorfismo suprayectivo** de $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$.

- f es un **homomorfismo** de $\langle \mathbb{Z}, R \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$.

  Para ello, sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que xRy.

  ⋆ Caso 1º: Supongamos que $|x| < |y|$.
  – Subcaso 1º: Supongamos que $x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0$.
  Entonces $x < y$. Luego, $f(x) = 2x < 2y = f(y)$.
  – Subcaso 2º: Supongamos que $x \geqslant 0 \wedge y < 0$.
  Entonces $x < -y$. Luego,
  $f(x) = 2x < -2y \Longrightarrow 2x < -2y - 1 \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
  – Subcaso 3º: Supongamos que $x < 0 \wedge y \geqslant 0$.
  Entonces $-x < y$. Luego,
  $f(x) = -2x < 2y \Longrightarrow -2x - 1 < 2y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
  – Subcaso 4º: Supongamos que $x < 0 \wedge y < 0$.
  Entonces $-x < -y$. Luego, $f(x) = -2x - 1 < -2y - 1 = f(y)$.

  ⋆ Caso 2º: Supongamos que $|x| = |y| \wedge x < y$.
  En este caso, se tiene que $x < 0 \wedge y > 0 \wedge y = -x$. Luego,
  $$f(x) = -2x - 1 = 2y - 1 < 2y = f(y)$$

- f es una aplicación **suprayectiva** de $\mathbb{Z}$ en ω.

  Sea $p \in \omega$. Entonces

  – O bien existe $n \in \omega$ tal que $p = 2n$ (p par), en cuyo caso $f(n) = p$.

  – O bien existe $n \in \omega - \{0\}$ tal que $p = 2n - 1$ (p impar), en cuyo caso $f(-n) = p$.

(c) Hallemos el t.o. $(\langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle)$. Teniendo presente que $f : \langle \mathbb{Z}, R\rangle \cong \langle \omega, <\rangle$, para cada $x \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$f \upharpoonright S_R^{\mathbb{Z}}(x) : \langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle \cong \langle S_<^{\omega}(f(x)), <\rangle$$

Luego,

$$\text{t.o.}(\langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle) = S_<^{\omega}(f(x)) = f(x)$$

En consecuencia

$$\text{t.o.}(\langle S_R^{\mathbb{Z}}(x), R\rangle) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -2x-1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 68. *Sea R la relación definida en $\omega \times \omega$ como sigue:*

$$\langle x, y\rangle R \langle x', y'\rangle \iff x + y < x' + y' \vee (x + y = x' + y' \wedge x < x')$$

(1) *Demostrar que R es un buen orden en $\omega \times \omega$.*

(2) *Calcular t.o.$(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x, y\rangle), R\rangle)$.*

(3) *Probar que la aplicación $f : \omega \times \omega \to \omega$ definida por*

$$f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x, \ (\forall \langle x, y\rangle \in \omega \times \omega)$$

es un isomorfismo de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.

Vamos a resolver este ejercicio siguiendo la pauta del anterior. Es decir, estructuramos la resolución como sigue:

(a) Probaremos que $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

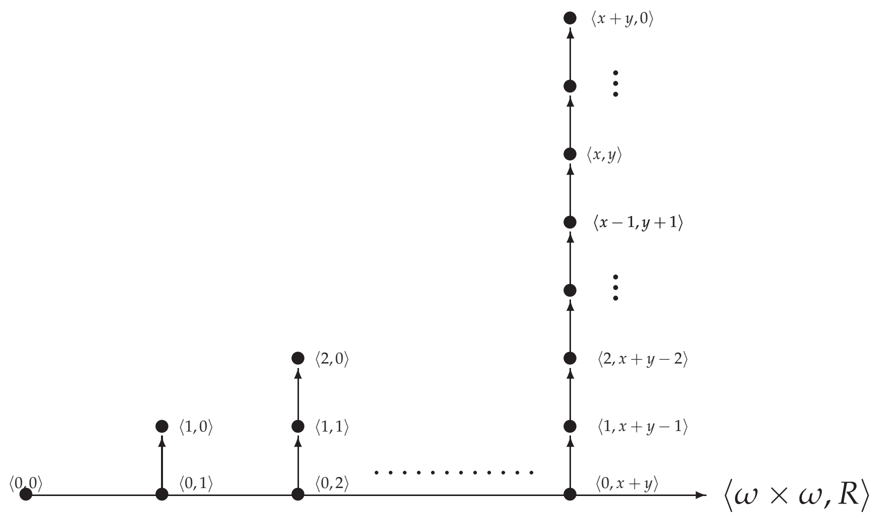
(b) Demostraremos que la aplicación $f : \omega \times \omega \to \omega$ definida por

$$f(x, y) = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x, \ (\forall \langle x, y\rangle \in \omega \times \omega)$$

es un isomorfismo de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$. De donde resultará que $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ es conjunto bien ordenado.

(c) A partir de (b), mediante la restricción de f a $S_R^{\omega\times\omega}(\langle x, y\rangle)$, hallaremos el t.o.$(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x, y\rangle), R\rangle)$

Comenzamos haciendo una descripción gráfica de dicha relación.



(a) Veamos que $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

- R es **irreflexiva** en $\omega \times \omega$.

  En efecto: si $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$ entonces $(x+y \not< x+y) \wedge (x+y = x+y \wedge x \not< x)$. Luego, $\langle\langle x,y\rangle, \langle x,y\rangle\rangle \notin R$.

- R es **transitiva** en $\omega \times \omega$.

  En efecto: sean $\langle x,y\rangle, \langle z,t\rangle, \langle u,v\rangle \in \omega\times\omega$ tales que $\langle x,y\rangle R\langle z,t\rangle$ y $\langle z,t\rangle R\langle u,v\rangle$.

  Caso 1º: Supongamos que $x+y < z+t$.

  En este caso, teniendo presente que $z+t \leqslant u+v$ resulta que $x+y < u+v$. Luego, $\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$.

  Caso 2º: Supongamos que $x+y = z+t \wedge x < z$.

  Entonces

  – O bien $z+t < u+v$, en cuyo caso $x+y < u+v$ y, por tanto, $\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$.
  – O bien $z+t = u+v \wedge z < u$, en cuyo caso $x+y = u+v \wedge x < u$ y, por tanto, $\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$.

- R es **conexa** en $\omega \times \omega$.

  En efecto: sean $\langle x,y\rangle, \langle z,t\rangle \in \omega\times\omega$ tales que $\langle x,y\rangle \neq \langle z,t\rangle$. Entonces

  Caso 1º: Supongamos que $x+y = z+t$.

  En este caso, ha de ser $x \neq z$. Luego,

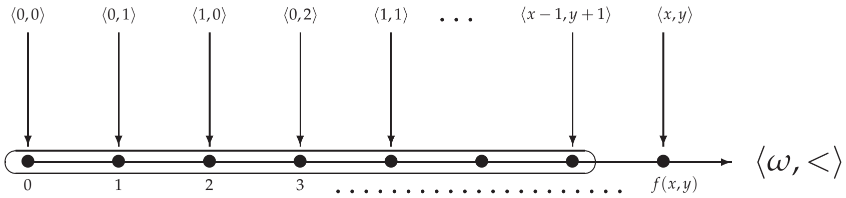
– O bien $x < z$, en cuyo caso $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$.
– O bien $z < x$, en cuyo caso $\langle z, t\rangle R\langle x, y\rangle$.

<u>Caso 2º:</u> Supongamos que $x + y < z + t$.
En este caso $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$.

<u>Caso 3º:</u> Supongamos que $z + t < x + y$.
En este caso $\langle z, t\rangle R\langle x, y\rangle$.

(b) Veamos que $\langle \omega \times \omega, R\rangle \ \cong \ \langle \omega, <\rangle$.

Comenzamos este apartado, justificando porqué f es el candidato idóneo para ser el isomorfismo de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$. Para ello, recordemos que en la descripción gráfica de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ tenemos distribuido el orden según unas determinadas “columnas". De tal manera que la “columna k–ésimaçonsta de todos aquellos pares ordenados $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$ tales que $x + y = k$. Así pues, en la “columna k–ésima.$^{\text{ex}}$isten, exactamente, $(k + 1)$ pares ordenados. ¿Cómo definir $f(x, y)$, para cada $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$?



Es decir, $f(x, y)$ debe coincidir con el número de pares ordenados estríctamente menores que $\langle x, y\rangle$ por R (obviamente, $f(0, 0) = 0$). Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (n^{\underline{o}}\ pares\ orden.\ col.\ 0) + (n^{\underline{o}}\ pares\ orden.\ col.\ 1) + \cdots + \\ &\quad (n^{\underline{o}}\ pares\ orden.\ col.\ (x+y-1)) + \\ &\quad (n^{\underline{o}}\ pares\ orden.\ col.\ (x+y)\ menores\ que\ \langle x,y\rangle) \\ &= \sum_{k=0}^{x+y-1} (k+1) + x = (1 + 2 + \cdots + (x+y)) + x \\ &= \tfrac{1+(x+y)}{2} \cdot (x+y) + x = \tfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x \end{aligned}$$

Teniendo presente que se trata de conjuntos totalmente ordenados, basta probar que f es un **homomorfismo suprayectivo** de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.

- f es un **homomorfismo** de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.

  Para ello, establecemos previamente el siguiente resultado:

Aserto: $x+y<z+t \Longrightarrow f(x,y)<f(z,t)$.

Prueba:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \tfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x<\tfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x+(y+1+z) \\ &= \tfrac{(x+y)(x+y+1)+2(x+y+1)}{2}+z=\tfrac{(x+y+1)(x+y+2)}{2}+z \\ &\leqslant \tfrac{(z+t)(z+t+1)}{2}+z=f(z,t) \end{aligned}$$

Para ver que f es un homomorfismo, sean $\langle x,y\rangle, \langle z,t\rangle \in \omega\times\omega$ tales que $\langle x,y\rangle R\langle z,t\rangle$. Distingamos dos casos:

Caso 1º: Supongamos que $x+y<z+t$.
En este caso, del aserto deducimos que $f(x,y)<f(z,t)$.

Caso 1º: Supongamos que $x+y=z+t\wedge x<z$.
En este caso, se tiene que $\langle x,y\rangle\neq\langle 0,0\rangle$ y $\langle z,t\rangle\neq\langle 0,0\rangle$. Luego,

$$\left.\begin{array}{r} f(x,y)=(1+2+\cdots+(x+y))+x \\ f(z,t)=(1+2+\cdots+(z+t))+z \\ x+y=z+t\wedge x<z \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x,y)<f(z,t)$$

- f es una aplicación **suprayectiva** de $\omega\times\omega$ en ω.

Sea $n\in\omega$. Veamos que existe $\langle x,y\rangle\in\omega\times\omega$ tal que $f(x,y)=n$.

Para ello, consideremos la aplicación $g:\ \omega\to\omega$ definida por

$$g(z)=\frac{z(z+1)}{2},(\forall z\in\omega)$$

Entonces g es una aplicación estríctamente creciente de $\langle\omega,<\rangle$ en $\langle\omega,<\rangle$ y $\operatorname{rang}(g)$ no está acotado superiormente. Por tanto, dado $n\in\omega$ existe un único $z\in\omega$ tal que $g(z)\leqslant n<g(z+1)$. Sea $x=n-g(z)$ e $y=z-x$. Entonces

$$g(z)\leqslant n\Longrightarrow n-g(z)\geqslant 0\Longrightarrow x\in\omega$$

De la definición de g resulta inmediatamente que

$$g(z+1)=g(z)+z+1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} g(z+1)>n &\Longrightarrow g(z)+z+1>n\Longrightarrow g(z)+z\geqslant n \\ &\Longrightarrow g(z)+z-n\geqslant 0\Longrightarrow y=z-x\geqslant 0\Longrightarrow y\in\omega \end{aligned}$$

Luego, $\langle x,y\rangle\in\omega$. Además

$$f(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x=\frac{z(z+1)}{2}+x=g(z)+x=n$$

(c) Finalmente, vamos a hallar el tipo ordinal de $\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle$, para cada $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$.

Si $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$, entonces

$$f \restriction S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle) : \langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle \cong \langle S_<^{\omega}(f(x,y)), <\rangle$$

Luego,

$$\text{t.o.}(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle) = S_<^{\omega}(f(x,y)) = f(x,y)$$

Por tanto,

$$\text{t.o.}(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle) = \tfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

Ejercicio 69. *Sea R la relación definida en $\omega\times\omega$ como sigue:*

$$\langle x,y\rangle R\langle x',y'\rangle \iff \begin{cases} \text{máx}(x,y) < \text{máx}(x',y') \vee \\ (\text{máx}(x,y) = \text{máx}(x',y') \wedge x < x') \vee \\ (\text{máx}(x,y) = \text{máx}(x',y') \wedge x = x' \wedge y < y') \end{cases}$$

(1) *Demostrar que R es un buen orden en $\omega\times\omega$.*

(2) *Calcular t.o.$(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle 0,y\rangle), R\rangle)$, para cada $y \in \omega$.*

(3) *Calcular t.o.$(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle)$, para cada $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$.*

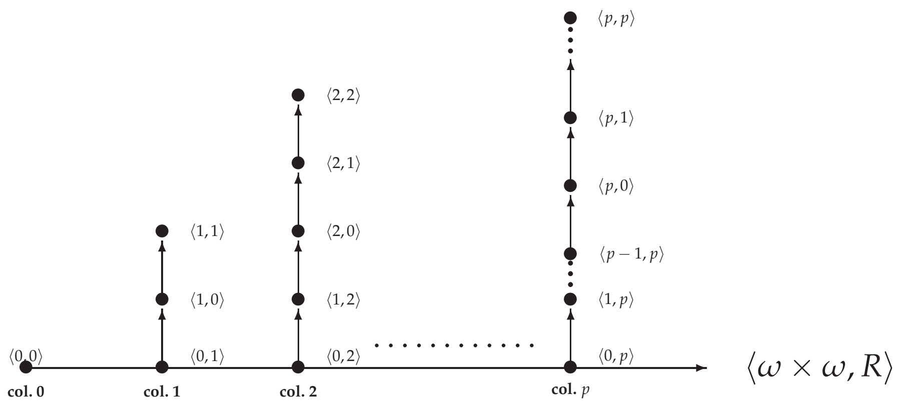
Resolveremos este ejercicio siguiendo la línea de los dos anteriores. Es decir,

(a) Probaremos que $\langle \omega\times\omega, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

(b) Obtendremos una aplicación $f : \omega\times\omega \to \omega$ que sea un isomorfismo de $\omega\times\omega$ en ω. De donde concluiremos que $\langle \omega\times\omega, R\rangle$ es conjunto bien ordenado.

(c) A partir de (b), mediante la restricción de f a $S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle)$, hallaremos el t.o.$(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle)$ para cada $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$.

En primer lugar, describimos gráficamente la relación R.



(a) $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

- R es **irreflexiva** en $\omega \times \omega$.
  En efecto: si $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$ entonces $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(x, y) \wedge x \not< x \wedge y \not< y$. Luego, $\langle\langle x, y\rangle, \langle x, y\rangle\rangle \notin R$.
- R es **transitiva** en $\omega \times \omega$.
  En efecto: sean $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle, \langle u, v\rangle \in \omega \times \omega$ tales que $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$ y $\langle z, t\rangle R\langle u, v\rangle$.

  Caso 1º: Supongamos que $\text{máx}(x, y) < \text{máx}(z, t)$.
  En este caso, $\text{máx}(x, y) < \text{máx}(z, t) \leqslant \text{máx}(u, v)$. Luego,

  $$\text{máx}(x, y) < \ \text{máx}(u, v)$$

  Por tanto, $\langle x, y\rangle R\langle u, v\rangle$.

  Caso 2º: Supongamos que $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(z, t) \wedge x < z$.
  En este caso
  - O bien $\text{máx}(z, t) < \text{máx}(u, v)$, en cuyo caso $\text{máx}(x, y) < \text{máx}(u, v)$ y por tanto, $\langle x, y\rangle R\langle u, v\rangle$.
  - O bien $\text{máx}(z, t) = \text{máx}(u, v) \wedge z \leqslant u$, en cuyo caso $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(u, v) \wedge x < u$ y por tanto, $\langle x, y\rangle R\langle u, v\rangle$.

  Caso 3º: Supongamos que $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(z, t) \wedge x = z \wedge y < t$.
  En este caso
  - O bien $\text{máx}(z, t) < \text{máx}(u, v)$, en cuyo caso $\text{máx}(x, y) < \text{máx}(u, v)$ y por tanto, $\langle x, y\rangle R\langle u, v\rangle$.
  - O bien $\text{máx}(z, t) = \text{máx}(u, v) \wedge z < u$, en cuyo caso $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(u, v) \wedge x < u$ y por tanto, $\langle x, y\rangle R\langle u, v\rangle$.
  - O bien $\text{máx}(z, t) = \text{máx}(u, v) \wedge z = u \wedge t < v$, en cuyo caso

    $$\text{máx}(x, y) = \ \text{máx}(u, v) \wedge x = u \wedge y < v$$

    Por tanto, $\langle x, y\rangle R\langle u, v\rangle$.
- R es **conexa** en $\omega \times \omega$.
  En efecto: sean $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle \in \omega \times \omega$ tales que $\langle x, y\rangle \neq \langle z, t\rangle$. Entonces

  Caso 1º: Supongamos que $\text{máx}(x, y) \neq \text{máx}(z, t)$.
  En este caso,
  - O bien $\text{máx}(x, y) < \text{máx}(z, t)$, en cuyo caso $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$.
  - O bien $\text{máx}(z, t) < \text{máx}(x, y)$, en cuyo caso $\langle z, t\rangle R\langle x, y\rangle$.

  Caso 2º: Supongamos que $\text{máx}(x, y) = \text{máx}(z, t)$.
  - O bien $x < z$, en cuyo caso $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$.
  - O bien $x = z \wedge y < t$, en cuyo caso $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$.

– O bien $x = z \wedge t < y$, en cuyo caso $\langle z, t\rangle R\langle x, y\rangle$.
– O bien $z < x$, en cuyo caso $\langle z, t\rangle R\langle x, y\rangle$.
(El caso $x = z \wedge y = t$ no se puede dar).

(b) $\langle \omega \times \omega, <\rangle \;\cong\; \langle \omega, <\rangle$.

Si f es un isomorfismo de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$, entonces para cada $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$, la imagen $f(x, y)$ debe coincidir con el número de pares ordenados de $\omega \times \omega$ que son estríctamente menores que $\langle x, y\rangle$ por R. Con esta premisa, veamos cuánto tendría que valer $f(x, y)$ (observando que el número de pares ordenados de la columna k–ésima es $2k + 1$).

Caso 1º: Supongamos que $x < y$.
En este caso, $\text{máx}(x, y) = y$. Luego $\langle x, y\rangle$ "estará.en la "columna y–ésima". Por tanto,

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{y-1}(2k + 1) + x = y^2 + x$$

Caso 2º: Supongamos que $y \leqslant x$.
En este caso, $\text{máx}(x, y) = x$. Luego $\langle x, y\rangle$ "estará.en la "columna x–ésima". Por tanto,

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{x-1}(2k + 1) + (x + y) = x^2 + x + y$$

Por tanto, estamos en condiciones de hacer la siguiente conjetura:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y^2 & \text{si} \quad x < y \\ x^2 + x + y & \text{si} \quad y \leqslant x \end{cases}$$

Veamos que f es un **homomorfismo suprayectivo** de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.

- f es un **homomorfismo** de $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$.
  Sean $\langle x, y\rangle, \langle z, t\rangle \in \omega \times \omega$ tales que $\langle x, y\rangle R\langle z, t\rangle$. Veamos que $f(x, y) < f(z, t)$. Para ello, distingamos cuatro casos:

  Caso 1º: Supongamos que $x < y \wedge z < t$.

  Subcaso 1,1: Supongamos que $y < t$.
  Entonces, $f(x, y) = x + y^2 < y + y^2 < t^2 \leqslant z + t^2 = f(z, t)$.

  Subcaso 1,2: Supongamos que $y = t \wedge x < z$.
  Entonces, $f(x, y) = x + y^2 < z + t^2 = f(z, t)$.

  Subcaso 1,3: Supongamos que $y = t \wedge x = z \wedge y < t$.
  Obviamente, este caso no se puede dar.

  Caso 2º: Supongamos que $x \geqslant y \wedge z < t$.

Subcaso 2,1: Supongamos que $x < t$.
Entonces,
$f(x,y) = x^2 + x + y \leqslant x^2 + x + x < t^2 \leqslant t^2 + z = f(z,t)$.
Subcaso 2,2: Supongamos que $x = t \wedge x < z$.
Obviamente, este caso no se puede dar.
Subcaso 2,3: Supongamos que $x = t \wedge x = z \wedge y < t$.
Este caso tampoco se da.
Caso 3º: Supongamos que $x < y \wedge z \geqslant t$.
Subcaso 3,1: Supongamos que $y < z$.
Entonces,
$f(x,y) = x + y^2 < y + y^2 < z^2 \leqslant z^2 + z + t = f(z,t)$.
Subcaso 3,2: Supongamos que $y = z \wedge x < z$.
Entonces,
$f(x,y) = x + y^2 < z + z^2 \leqslant z^2 + z + t = f(z,t)$.
Subcaso 3,3: Supongamos que $y = z \wedge x = z \wedge y < t$.
Este caso no se puede dar.
Caso 4º: Supongamos que $x \geqslant y \wedge z \geqslant t$.
Subcaso 4,1: Supongamos que $x < z$.
Entonces,
$f(x,y) = x^2 + x + y \leqslant x^2 + 2x < z^2 \leqslant z^2 + z + t = f(z,t)$.
Subcaso 4,2: Supongamos que $x = z \wedge x < z$.
Este caso no se puede dar.
Subcaso 4,3: Supongamos que $x = z \wedge x = z \wedge y < t$.
Entonces,
$f(x,y) = x^2 + x + y < z^2 + z + t = f(z,t)$.

- f es una aplicación **suprayectiva** de $\omega \times \omega$ en ω.
Sea $n \in \omega$. Veamos que existe $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$ tal que $f(x,y) = n$.
Caso 1º: Supongamos que $n = 0$.
En este caso, $f(0,0) = 0 = n$.
Caso 2º: Supongamos que existe $p \in \omega - \{0\}$ tal que $n = p^2$.
En este caso, $f(0,p) = 0 + p^2 = n$.
Caso 3º: Supongamos que para cada $p \in \omega$ se tiene que $n \neq p^2$.
En este caso, consideramos el único número natural q tal que $q^2 < n < (q+1)^2$. Sea $r = n - q^2$. Entonces, $q^2 + r < (q+1)^2$. Luego, $r < 2q + 1$.
Subcaso 3,1: Supongamos que $r < q$.
Entonces, $f(r,q) = r + q^2 = n$.
Subcaso 3,2: Supongamos que $q \leqslant r$.
Notemos $s = r - q$. Entonces, $s = r - q \leqslant 2q - q = q$. Por tanto, $f(q,s) = q^2 + q + s = q^2 + r = n$.

(c) Finalmente, vamos a hallar el tipo ordinal de $\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle$, para cada $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$.

Si $\langle x,y\rangle \in \omega\times\omega$, entonces

$$f \restriction S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle) : \langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle \;\cong\; \langle S_<^{\omega}(f(x,y)), <\rangle$$

Luego,

$$\text{t.o.}(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle x,y\rangle), R\rangle) = \begin{cases} x+y^2 & \text{si} \quad x<y \\ x^2+x+y & \text{si} \quad y\leqslant x \end{cases}$$

En particular, para cada $y\in\omega$ resulta que $\text{t.o.}(\langle S_R^{\omega\times\omega}(\langle 0,y\rangle), R\rangle) = y^2$.

Ejercicio 70. *Sean R y S las relaciones sobre $2\times\omega$ definidas como sigue:*

$$\langle x,y\rangle R\langle x',y'\rangle \leftrightarrow x+y < x'+y' \vee (x+y = x'+y' \wedge x < x')$$
$$\langle x,y\rangle S\langle x',y'\rangle \leftrightarrow x < x' \vee (x = x' \wedge y < y')$$

Demostrar que :

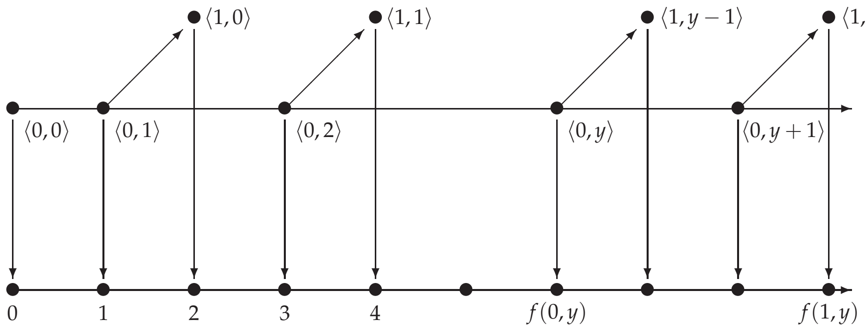
(1) *t.o.*$(\langle 2\times\omega, R\rangle) = \omega$.

(2) *t.o.*$(\langle 2\times\omega, S\rangle)$ *es un ordinal límite.*

(3) *t.o.*$(\langle 2\times\omega, S\rangle) > \omega$.

(1) Obsérvese que R es, precisamente, la relación inducida en el conjunto $2\times\omega$ por la relación en $\omega\times\omega$ considerada en el ejercicio 68. Por tanto, $\langle 2\times\omega, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado.

A continuación vamos a hallar **el** candidato idóneo para el isomorfismo f de $\langle 2\times\omega, R\rangle$ en $\langle\omega,<\rangle$ (observando que dicha aplicación no va a coincidir con la restricción a $2\times\omega$ del isomorfismo que existía de $\omega\times\omega$ en ω, en el ejercicio 68).



Es decir, debe verificarse que:

$$\begin{array}{rcl} f(0,0) & = & 0 \\ f(0,y) & = & (n^{\underline{o}}\ pares\ col.\ 0) + (n^{\underline{o}}\ pares\ col.\ 1) + \cdots + \\ & & (n^{\underline{o}}\ pares\ col.\ (y-1)) = 1 + (2 + \overset{(y-1)}{\cdots} + 2) = 2y - 1 \\ f(1,y) & = & f(0,y) + 3 = 2y + 2 \end{array}$$

Estamos en disposición de conjeturar que la aplicación $f : 2 \times \omega \to \omega$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \wedge y = 0 \\ 2y - 1 & \text{si} \quad x = 0 \wedge y > 0 \\ 2y + 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

es un isomorfismo de $\langle 2 \times \omega, R \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$.

noi Probemos dicha conjetura.

- f es un homomorfismo de $\langle 2 \times \omega, R \rangle$ en $\langle \omega, < \rangle$.
  Para ello, sean $\langle x, y \rangle, \langle z, t \rangle \in 2 \times \omega$ tales que $\langle x, y \rangle R \langle z, t \rangle$.

  Caso 1º: Supongamos que $x = 0$ y $z = 0$.
  En este caso, $y < t$. Luego,
  $f(x,y) = f(0,y) = 2y - 1 < 2t - 1 = f(0,t) = f(z,t)$.
  Caso 2º: Supongamos que $x = 1$ y $z = 1$.
  En este caso, $y < t$. Luego,
  $f(x,y) = f(1,y) = 2y + 2 < 2t + 2 = f(1,t) = f(z,t)$.
  Caso 3º: Supongamos que $x = 0$ y $z = 1$.
  En este caso, $y \leqslant 1 + t$. Luego,

  $$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & f(0,y) = 2y - 1 \leqslant 2(1+t) - 1 = 2t + 1 \\ & < & 2t + 2 = f(1,t) = f(z,t) \end{array}$$

  Caso 4º: Supongamos que $x = 1$ y $z = 0$.
  En este caso, $1 + y < t$. Luego
  $$f(x,y) = f(1,y) = 2y + 2 < 2(t-1) + 2 = 2t$$
  Pero $2y + 2 < 2t \Longrightarrow 2y + 2 < 2t - 1$. Por tanto,
  $$f(x,y) < f(0,t) = f(z,t)$$

- f es una aplicación suprayectiva de $2 \times \omega$ en ω.
  Sea $n \in \omega$. Entonces
  - O bien, $n = 0$, en cuyo caso $f(0,0) = 0 = n$.
  - O bien, n es par y > 0, en cuyo caso $f(1, \frac{n-2}{2}) = 2 \cdot \frac{n-2}{2} + 2 = n$.
  - O bien, n es impar, en cuyo caso $f(0, \frac{n+1}{2}) = 2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1 = n$.

(2) Para demostrar que el tipo ordinal de $\langle 2\times\omega, S\rangle$ es un ordinal límite, teniendo presente el ejercicio 58 y que $2\times\omega\neq\emptyset$, bastará probar que el conjunto b.o. $\langle 2\times\omega, S\rangle$ carece de elemento máximo. Veámoslo.

– Si $\langle x,y\rangle\in 2\times\omega$, entonces $\langle 1,y+1\rangle\in 2\times\omega$. Además $x\leqslant 1\wedge y<y+1$. Luego, $\langle x,y\rangle S\langle 1,y+1\rangle$.

(3) Para demostrar que el t.o.$\langle 2\times\omega, S\rangle>\omega$ vamos a probar que

$$\text{t.o.}(\langle S_S^{2\times\omega}(\langle 1,0\rangle), S\rangle)=\omega \qquad (\star)$$

De $(\star)$ resultará que $\text{t.o.}(\langle 2\times\omega, S\rangle)\neq\text{t.o.}(\langle S_S^{2\times\omega}(\langle 1,0\rangle), S\rangle)=\omega$ y, teniendo presente que $\text{t.o.}(\langle 2\times\omega, S\rangle)$ es un ordinal límite, concluiremos que $\text{t.o.}(\langle 2\times\omega, S\rangle)>\omega$.

Para probar $(\star)$, consideremos la aplicación $g: S_S^{2\times\omega}(\langle 1,0\rangle)\to\omega$ definida por $g(0,y)=y$, para cada $y\in\omega$ (téngase presente que $S_S^{2\times\omega}(\langle 1,0\rangle)=\{\langle 0,y\rangle : y\in\omega\}$).

Entonces g es una aplicación creciente de $\langle S_S^{2\times\omega}(\langle 1,0\rangle), S\rangle$ en $\langle\omega,<\rangle$, ya que

$$\langle 0,y\rangle S\langle 0,z\rangle\leftrightarrow y<z\leftrightarrow g(0,y)<g(0,z)$$

Obviamente g es una aplicación biyectiva entre los conjuntos citados.

En consecuencia, g es un isomorfismo de $\langle S_S^{2\times\omega}(\langle 1,0\rangle), S\rangle$ en $\langle\omega,<\rangle$.

5.4. Problemas propuestos

Ejercicio 5.1. Sea a un conjunto no vacío cuyos elementos son ordinales. Probar que si a no tiene máximo (respecto del orden entre ordinales), entonces $\bigcup a$ es límite.

Indicación: Pruébese que $\forall\beta\in\bigcup a(\beta^+\in\bigcup a)$.

Ejercicio 5.2. Probar que en la teoría de conjuntos que resulta al prescindir del axioma del infinito, son equivalentes:

(1) El axioma del infinito (es decir, $\exists x(x\text{ es inductivo})$).

(2) $\exists\alpha\in\mathbf{Ord}(\alpha\text{ es límite })$.

Ejercicio 5.3. Sean $n\in\omega$ y $x\in n$ tales que $x^+\notin n$. Probar que $x^+=n$.

Indicación Téngase presente que si $x\in n$, entonces x es un ordinal, y que la relación de pertenencia es total entre ordinales.

Ejercicio 5.4. Un conjunto a es *P–finito* si y sólo si para cualquier $x \subseteq \mathbf{P}(a), x \neq \emptyset$, se tiene que x posee algún elemento maximal respecto a la relación de inclusión estricta (es decir, $\exists u \in x \forall v \in x \neg(u \subsetneq v)$). Se pide:

(1) Probar que ω no es P–finito.

(2) Probar que $b = \{n : n \in \omega \wedge n \text{ es } P\text{–finito}\}$ es inductivo.

(3) Probar que todo número natural es P–finito.

Indicación: (1) Tómese ω como contraejemplo. (2) Para probar que si $n \in b$, entonces $n^+ \in b$, tómese $\emptyset \neq x \subseteq \mathbf{P}(n^+)$ y considérese

$$y = \{u - \{n\} : u \in x \wedge n \in u\}$$

(3) Recuérdese que ω es el menor conjunto inductivo.

Ejercicio 5.5. Si x es un conjunto inductivo ¿puede afirmarse que $\mathbf{P}(x)$ sea un conjunto inductivo?

Ejercicio 5.6. Se pide:

(1) Demostrar que si x es inductivo, entonces también lo es el conjunto

$$c = \{y \in x : y = \emptyset \vee \exists z \in x(y = z \cup \{z\})\}$$

(2) Probar que para cualquier número natural $n \neq 0$, existe otro natural cuyo sucesor es n.

Indicación:(2) Aplíquese **(1)** para $x = \omega$ y recuérdese que ω es el menor conjunto inductivo.

Ejercicio 5.7. Probar que si x es un conjunto inductivo, entonces $x \cap \mathbf{Ord}$ es inductivo. Deducir de lo anterior que ω es el menor ordinal límite.

Ejercicio 5.8. Sea R la relación definida en $\omega \times \omega$ por

$$< x, y > R < x', y' > \iff \begin{cases} y + x' < y' + x \vee \\ (y + x' = y' + x \wedge x < x') \end{cases}$$

Probar que:

(1) $\langle \omega \times \omega, R \rangle$ no es un conjunto bien ordenado.

(2) Si $a = \{\langle x, y \rangle \in \omega \times \omega : y \geqslant x\}$, entonces $\langle a, R \restriction a \rangle$ es un conjunto b.o.

(3) t.o.$(\langle a, R \upharpoonright a\rangle) > \omega$.

Indicación: En primer lugar, represéntese gráficamente el orden en el plano cartesiano. Obsérvese el papel de las rectas de ecuación $y = x + h$. (1) El conjunto $\{\langle x, 0\rangle : x \in \omega\}$ no tiene mínimo. (2) Obsérvese que $y + x' < y' + x$ si y sólo si $y - x < y' - x'$. (3) Pruébese que $\{\langle x, x\rangle : x \in \omega\}$ es isomorfo a ω. Además, nótese que en $\langle \omega \times \omega, R\rangle$ existen conjuntos infinitos y acotados.

Ejercicio 5.9. Sea $2^\star = \bigcup_{n\in\omega} {}^n2$ y S la relación definida en $2^\star$ como sigue:

$$\begin{aligned} fSg \iff & (\mathrm{dom}(f) < \mathrm{dom}(g)) \vee (\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \wedge \\ & \wedge \exists k \in \mathrm{dom}(f)\ \forall j < k\ (f(j) = g(j) \wedge f(k) < g(k)) \end{aligned}$$

Probar que:

(1) $\langle 2^*, S\rangle$ es un conjunto bien ordenado.

(2) t.o.$(\langle 2^*, S\rangle) = \omega$.

Indicación: (2) Pruébese que la aplicación $F : 2^* \to \omega$ definida por $F(f) = (2^n - 1) + 2^{n-1} \cdot f(0) + 2^{n-2} \cdot f(1) + \cdots + f(n-1)$ (en donde $n = \mathrm{dom}(f)$), es un isomorfismo de $\langle 2^*, S\rangle$ en $\langle \omega, <\rangle$. Alternativamente, se puede probar que no existen aplicaciones biyectivas de $2^\star$ en n, para $n \in \omega$, y además las secciones iniciales de $\langle 2^\star, R\rangle$ son isomorfas a algún número natural.

Ejercicio 5.10. Dar ejemplo de una relación R en ω tal que $\langle \omega, R\rangle$ posea un único elemento maximal y, en cambio, carezca de elemento máximo.

Indicación: Considérese la relación R definida así $xRy \iff (x \neq 0 \wedge x < y)$, siendo $<$ el orden usual de ω.

Ejercicio 5.11. Encontrar el error del razonamiento siguiente (una "presunta"prueba que permite establecer que ω es un conjunto, sin utilizar el axioma del infinito):

> *"La clase ω de los números naturales es un segmento inicial propio de $\langle \mathbf{Ord}, <\rangle$. Luego de la proposición 3.3.4 (que no usa el axioma del infinito) se deduce que la clase ω es una sección inicial de $\langle \mathbf{Ord}, <\rangle$. Por tanto, la clase ω es un conjunto."*

Indicación: Determínese la clase **Ord** en la teoría $\mathbf{ZF}^-$, prescindiendo del axioma del infinito.

Capítulo 6

Teoremas de inducción y de recursión

En la primera parte de este tema, se trata de obtener distintas versiones del teorema de inducción para clases bien ordenadas, para la clase **Ord** y para el conjunto $\mathbb{N}$.

En la segunda parte, se trata de formalizar en el marco de la Teoría de Conjuntos, los denominados *procesos recurrentes*. Dichos procesos consisten en “construir.ªplicaciones de una clase bien ordenada no vacía $\langle A, <\rangle$ en $\mathbf{V}$ mediante el siguiente esquema:

(1) Se define la imagen, a, del primer elemento m de $\langle A, <\rangle$.

(2) Si $b \in A - \{m\}$, entonces suponiendo conocidas las imágenes de los elementos estríctamente menores que b, se define (“mediante una ley de recurrencia") la imagen de b, a partir de las imágenes ya conocidas.

En realidad, los pasos (1) y (2) del esquema describen una aplicación H tal que para cada $x \in A$ y cada aplicación g_x de $S^A_<(x)$ en $\mathbf{V}$, se tiene que $H(g_x) \in \mathbf{V}$. Pues bien, el teorema de recursión garantizará la existencia de una única aplicación de A en $\mathbf{V}$ que verifica las dos condiciones exigidas en el proceso.

6.1. Teoremas de inducción

Teorema de inducción en una clase bien ordenada.

Sean $\langle A, <\rangle$ una clase bien ordenada y B una subclase de A tal que

$$\forall x\,(x \in A \wedge S^A_<(x) \subseteq B \rightarrow x \in B)$$

Entonces, $B = A$.

Teoremas de inducción en la clase Ord.

- *Versión 1. Inducción fuerte en la clase Ord.*

  Sea $A \subseteq \mathbf{Ord}$. Supongamos que $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha \subseteq A \to \alpha \in A)$. Entonces, $A = \mathbf{Ord}$.

- *Versión 2. Expresión mediante fórmulas de la versión 1.*

  Sea $\varphi(x)$ una fórmula. Supongamos que

  $$\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ ((\forall\beta \in \mathbf{Ord}(\beta < \alpha \to \varphi(\beta))) \to \varphi(\alpha))$$

  Entonces, $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\varphi(\alpha))$.

- *Versión 3. Inducción débil en la clase Ord.*

  Sea $A \subseteq \mathbf{Ord}$. Supongamos que

  (1) $0 \in A$.

  (2) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha \in A \to \alpha^+ \in A)$.

  (3) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha$ límite $\wedge\, \alpha \subseteq A \to \alpha \in A)$.

  Entonces, $A = \mathbf{Ord}$.

- *Versión 4. Expresión mediante fórmulas de la versión 3.*

  Sea $\varphi(x)$ una fórmula. Supongamos que

  (1) $\varphi(0)$.

  (2) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\varphi(\alpha) \to \varphi(\alpha^+))$.

  (3) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha$ límite $\wedge\, (\forall\beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta < \alpha \to \varphi(\beta))) \to \varphi(\alpha))$.

  Entonces $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\varphi(\alpha))$.

Teoremas de inducción en el conjunto $\mathbb{N}$.

- *Versión 1. Inducción fuerte en $\mathbb{N}$.*

  Sea $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \subseteq a \to n \in a)$. Entonces, $a = \mathbb{N}$.

- *Versión 2. Expresión mediante fórmulas de la versión 1.*

  Sea $\varphi(x)$ una fórmula. Supongamos que

  $$\forall n \in \mathbb{N}\ ((\forall p \in \mathbb{N}(p < n \to \varphi(p))) \to \varphi(n))$$

  Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}\ (\varphi(n))$.

- *Versión 3. Inducción débil o completa en $\mathbb{N}$.*

  Sea $a \subseteq \mathbb{N}$. Supongamos que

(1) $0 \in a$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \in a \to n^+ \in a)$.

Entonces, $a = \mathbb{N}$.

- *Versión 4. Expresión mediante fórmulas de la versión 3.*

  Sea $\varphi(x)$ una fórmula. Supongamos que

  (1) $\varphi(0)$.

  (2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (\varphi(n) \to \varphi(n^+))$.

  Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}\ (\varphi(n))$.

6.2. Teoremas de recursión

Teorema de recursión en una clase bien ordenada.

Sean $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada y H una aplicación de **V** en **V**. Entonces **existe** una **única** aplicación $F : A \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall x \in A\ (F(x) = H(F \restriction S^A_<(x)))$$

Teoremas de recursión en la clase Ord.

- *Versión 1.*

  Sea H una aplicación de **V** en **V**. Entonces **existe** una **única** aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que

  $$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = H(F \restriction \alpha))$$

- *Versión 2.*

  Sean $\alpha \in \mathbf{Ord}$ y H una aplicación de **Ord** en **Ord**. Entonces **existe** una **única** aplicación $\Phi_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ tal que

  (1) $\Phi_\alpha(0) = \alpha$.

  (2) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_\alpha(\beta^+) = H(\Phi_\alpha(\beta)))$.

  (3) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ límite } \to \Phi_\alpha(\beta) = \sup \{\Phi_\alpha(\ggg) : \ggg < \beta\})$.

Teoremas de recursión en el conjunto $\mathbb{N}$.

- *Versión 1.*

  Sean a un conjunto y H una aplicación de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}$. Entonces **existe** una **única** aplicación $F: \mathbb{N} \to \mathbf{V}$ tal que

  (1) $F(0) = a$.

  (2) $\forall n \in \mathbb{N}\ (F(n^+) = H(F(n)))$.

- *Versión 2.*

  Sean $m \in \mathbb{N}$, $[m, \to [= \{n \in \mathbb{N} :\ m \leqslant n\}$, B un conjunto no vacío y $a \in B$. Sea g una aplicación de B en B. Entonces **existe** una **única** aplicación $F : [m, \to [\ \to B$ tal que

  (1) $F(m) = a$.

  (2) $(\forall n \in [m, \to [)\ (F(n^+) = g(F(n)))$.

6.3. Problemas resueltos

Ejercicio 71. *Dado un conjunto x se define por recursión $\bigcup^n x$, para cada $n \in \mathbb{N}$, como sigue:*

$$\bigcup^0 x = x \ \wedge\ \forall n \in \mathbb{N}\ (\bigcup^{n+1} x = \bigcup(\bigcup^n x))$$

Probar que si x es un conjunto y n es un número natural tal que $\bigcup^n x = \emptyset$, entonces $x \notin x$.

Vamos a demostrar el resultado del ejercicio por la ley del contrarrecíproco.

Para ello, sea x un conjunto tal que $x \in x$. Veamos, por inducción débil en ω que $\forall n(n \in \mathbb{N} \to \bigcup^n x \neq \emptyset)$.

$\boxed{n = 0}$

Trivial, ya que $x \in x \to x \in \bigcup^0 x$.

$\boxed{n \to n+1}$

Supongamos que $x \in \bigcup^n x$. Entonces

$$x \in x \wedge x \in \bigcup^n x \to x \in \bigcup(\bigcup^n x) = \bigcup^{n+1} x$$

Ejercicio 72. *Demostrar que si a es un conjunto y $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, entonces existe una única aplicación $f : \omega \to \mathbf{V}$ tal que*

(1) $f(0) = a$.

(2) $\forall n \in \omega\ (f(n^+) = G(< f(n), n >))$.

Existencia: Consideremos la aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$H(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = \emptyset \\ G(\langle x(n), n\rangle) & \text{si } x \text{ es una aplicación de dominio } n^+, \text{ con } n \in \omega \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso (e.c.o.c.)} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión en **Ord** (versión 1) aplicado a H, existe una única aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = H(F \restriction \alpha))$. Consideremos $f = F \restriction \omega$. Entonces f es una aplicación de ω en $\mathbf{V}$ verificando:

– $f(0) = F(0) = H(F \restriction 0) = H(\emptyset) = a$.

– Si $n \in \omega$, entonces

$$f(n^+) = F(n^+) = H(F \restriction n^+) = G(\langle F(n), n\rangle) = G(\langle f(n), n\rangle)$$

Unicidad: Sean f, g aplicaciones de ω en $\mathbf{V}$ verificando:

(1) $f(0) = a \wedge g(0) = a$.

(2) $\forall n \in \omega\ (f(n^+) = G(\langle f(n), n\rangle) \wedge g(n^+) = G(\langle g(n), n\rangle))$.

Veamos que $\forall n \in \omega\ (f(n) = g(n))$. Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$

Trivial, ya que $f(0) = a = g(0)$.

$\boxed{n \to n^+}$

Sea $n \in \omega$ tal que $f(n) = g(n)$ (hipótesis de inducción). Entonces

$$f(n^+) = G(\langle f(n), n\rangle) \overset{h.i.}{=} G(\langle g(n), n\rangle) = g(n^+)$$

Ejercicio 73. *Sean a un conjunto y $G, G' : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Demostrar que existe una única aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que*

$$F(\alpha) = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 0; \\ G(F(\beta)), & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ G'(F \restriction \alpha), & \text{si } \alpha \text{ es límite} \end{cases}$$

Existencia: Consideremos la aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$H(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = \emptyset \\ G(x(\beta)) & \text{si } x \text{ es una aplicación de dominio } \beta^+, \text{ con } \beta \in \mathbf{Ord} \\ G'(x) & \text{si } x \text{ es una aplicación de dominio un ordinal límite} \\ \emptyset & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión en **Ord** (versión 1) aplicado a H, existe una única aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = H(F \restriction \alpha))$. Por tanto, se tiene que:

– $F(0) = H(F \restriction 0) = H(\emptyset) = a$.

– Si $\beta \in \mathbf{Ord}$, entonces $F(\beta^+) = H(F \restriction \beta^+) = G(F(\beta))$.

– Si α es límite, entonces $F(\alpha) = H(F \restriction \alpha) = G'(F \restriction \alpha)$.

Unicidad: Sean F, F_1 aplicaciones de **Ord** en **V** verificando:

– $F(0) = \alpha \wedge F_1(0) = \alpha$.

– Si $\beta \in \mathbf{Ord}$, entonces $F(\beta^+) = G(F(\beta)) \wedge F_1(\beta^+) = G(F_1(\beta))$.

–Si α es límite, entonces $F(\alpha) = G'(F \restriction \alpha) \wedge F_1(\alpha) = G'(F_1 \restriction \alpha)$.

Veamos que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = F_1(\alpha))$. Por inducción débil en **Ord**.

$\boxed{\alpha = 0}$

Trivial, ya que $F(0) = \alpha = F_1(0)$.

$\boxed{\beta \to \beta^+}$ $(\alpha = \beta^+)$

Supongamos que $F(\beta) = F_1(\beta)$ (hipótesis de inducción). Entonces

$$F(\beta^+) = G(F(\beta)) \overset{h.i.}{=} G(F_1(\beta)) = F_1(\beta^+)$$

$\boxed{(\alpha \text{ límite} \wedge < \alpha) \to \alpha}$

Supongamos que $\forall \beta < \alpha\ (F(\beta) = F_1(\beta))$ (hipótesis de inducción). Entonces

$$F(\alpha) = G'(F \restriction \alpha) \overset{h.i.}{=} G'(F_1 \restriction \alpha) = F_1(\alpha)$$

Ejercicio 74. *Demostrar que si* $G : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, *entonces existe una única aplicación* $F : \mathbf{V} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ *tal que*

$$\forall a \in \mathbf{V}\ \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(a, \alpha) = G(a, F_a \restriction \alpha))$$

donde $F_a : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ *está definida por* $F_a(\beta) = F(a, \beta)$.

Indicación: *Para establecer la existencia, dado* $a \in \mathbf{V}$ *considérese la aplicación* $G_a : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *definida por* $G_a(x) = G(a, x)$, *para cada* $x \in \mathbf{V}$, *y aplíquese el teorema de recursión en* **Ord**.

Existencia: Sea $a \in \mathbf{V}$. Consideremos la aplicación $G_a : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida por $G_a(x) = G(a, x)$, para cada $x \in \mathbf{V}$. Por el teorema de recursión en **Ord** (versión 1), existe una única aplicación $F_a : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ verificando:

$$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F_a(\alpha) = G_a(F_a \upharpoonright \alpha))$$

Consideremos la aplicación $F : \mathbf{V} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ definida por $F(a, \alpha) = F_a(\alpha)$, para cada $a \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces si $a \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se tiene que

$$F(a, \alpha) = F_a(\alpha) = G_a(F_a \upharpoonright \alpha) = G(a, F_a \upharpoonright \alpha)$$

Unicidad: Sean F', F'' aplicaciones de $\mathbf{V} \times \mathbf{Ord}$ en $\mathbf{V}$ tales que para cada $a \in \mathbf{V}$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se tiene que:

$$F'(a, \alpha) = G(a, F'_a \upharpoonright \alpha) \land F''(a, \alpha) = G(a, F''_a \upharpoonright \alpha)$$

siendo $F'_a(\beta) = F'(a, \beta)$ y $F''_a(\beta) = F''(a, \beta)$ para cada $\beta \in \mathbf{Ord}$.

Para cada conjunto a se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F'_a(\alpha) = G_a(F'_a \upharpoonright \alpha) \\ \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F''_a(\alpha) = G_a(F''_a \upharpoonright \alpha) \end{array}\right\}$$

Teniendo presente que existe una única aplicación aplicación $F_a : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ verificando que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F_a(\alpha) = G_a(F_a \upharpoonright \alpha))$, se deduce que $F'_a = F''_a$.

Por tanto, $F' = F''$.

Ejercicio 75. *Sean a un conjunto, $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y $f : \omega \to \mathbf{V}$ definida como sigue:*

$$f(0) = a \ \ y \ \ \forall n \in \omega\ (f(n^+) = G(f(n)))$$

Demostrar que si G es inyectiva y $a \notin rango(G)$, entonces f es inyectiva.

Vamos a probar que $\forall n \in \omega \forall p \in \omega\ (f(n) = f(p) \to n = p)$. Por inducción débil en ω sobre la variable n (es decir, aplicaremos inducción débil a la fórmula $\varphi(n) \equiv \forall p \in \omega\ (f(n) = f(p) \to n = p)$).

$\boxed{n = 0}$

Hemos de ver que $\forall p \in \omega\ (f(0) = f(p) \to 0 = p)$. Para ello, sea $p \in \omega$ tal que $f(0) = f(p)$. Entonces $f(0) = f(p) \Longrightarrow a = f(p) \Longrightarrow p = 0$ (ya que $p \neq 0 \land f(p) = a \Longrightarrow a \in \text{rang}(G)$).

$\boxed{n \to n^+}$ Sea $n \in \omega$ tal que $\forall p \in \omega\ (f(n) = f(p) \to n = p)$. Veamos que $\forall q \in \omega\ (f(n^+) = f(q) \to n^+ = q)$.

Para ello, sea $q \in \omega$ tal que $f(n^+) = f(q)$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(n^+) = f(q) &\Longrightarrow G(f(n)) = f(q) \overset{a \notin rang(G)}{\Longrightarrow} q \neq 0 \\
&\Longrightarrow \exists r \in \omega\ (q = r^+) \\
&\Longrightarrow \exists r \in \omega\ (G(f(n) = f(r^+)) \\
&\Longrightarrow \exists r \in \omega\ (G(f(n) = G(f(r))) \\
&\overset{G\ iny.}{\Longrightarrow} \exists r \in \omega\ (f(n) = f(r)) \overset{h.i.}{\Longrightarrow} \exists r \in \omega\ (n = r) \\
&\Longrightarrow \exists r \in \omega\ (n^+ = r^+) \Longrightarrow q = n^+
\end{aligned}$$

Ejercicio 76. *Demostrar o refutar:*

Sean $G_1, G_2 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tales que $G_1 \restriction \mathbf{Ord} = G_2 \restriction \mathbf{Ord}$. Entonces las funciones F_1 y F_2 que obtenemos aplicando el teorema de recursión sobre ordinales a G_1 y G_2, respectivamente, son iguales.

Falso. Consideremos las aplicaciones $G_1, G_2 : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definidas como sigue:

$$G_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbf{Ord} \\ 0 & \text{e.c.o.c.} \end{cases} \qquad G_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbf{Ord} \\ 1 & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Entonces $G_1 \restriction \mathbf{Ord} = G_2 \restriction \mathbf{Ord}$. Sean $F_1, F_2 : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ las aplicaciones obtenidas de G_1 y G_2, respectivamente, aplicando el teorema de recursión en $\mathbf{Ord}$. Entonces

$$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F_1(\alpha) = G_1(F_1 \restriction \alpha) \wedge F_2(\alpha) = G_2(F_2 \restriction \alpha))$$

Veamos que $F_1(1) \neq F_2(1)$. En efecto, teniendo presente que el conjunto $\{\langle 0, 0\rangle\}$ no es transitivo (y, por tanto, no es un ordinal), resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(1) = G_1(F_1 \restriction 0^+) = G_1(\{\langle 0,0\rangle\}) = 0 \\ F_2(1) = G_2(F_2 \restriction 0^+) = G_2(\{\langle 0,0\rangle\}) = 1 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 77. *(Versión 2 del teorema de recursión en ω) Sea $m \in \omega$ y notemos $[m, \to [= \{n \in \omega : m \leqslant n\}$. Sea B un conjunto no vacío y $a \in B$. Sea g una aplicación de B en B. Demostrar que existe una única aplicación $F : [m, \to [\ \to B$ tal que*

(1) $F(m) = a$.

(2) $\forall n \in [m, \to [\ (F(n^+) = g(F(n)))$.

Existencia: Consideremos la clase bien ordenada $\langle [m, \to [, < \rangle = \langle A, < \rangle$, en donde $<$ es la restricción del orden usual de los naturales. Consideremos la aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$

definida como sigue:

$$H(z) = \begin{cases} a & \text{si } z = \emptyset \\ g(z(n)) & \text{si } n \in \omega, n \geqslant m, z \text{ es una aplicación tal que} \\ & \text{dom}(z) = \{t \in \omega : \ m \leqslant t < n^+\} \ \text{ y } \ z(n) \in B \\ \emptyset & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión en la clase b.o. $\langle [m, \rightarrow \ [, < \rangle$, existe una única aplicación $F : [m, \rightarrow [\rightarrow \mathbf{V}$ verificando:

$$\forall x \in [m, \rightarrow [\ (F(x) = H(F \restriction S^A_<(x)))$$

siendo, en este caso, $S^A_<(x) = \{t \in \omega : \ m \leqslant t < x\}$.

Se verifica:

(a) $F(m) = H(F \restriction S^A_<(m)) = H(\emptyset) = a$.

(b) $\forall x \in [m, \rightarrow [\ (F(x) \in B \wedge F(x^+) = g(F(x)))$. Probémoslo por inducción débil en $[m, \rightarrow [$.

$\boxed{x = m}$

Por una parte se tiene que $F(m) = H(\emptyset) = a \in B$.

Por otra, resulta que $F(m^+) = H(F \restriction S^A_<(m^+))$. Ahora bien, $f = F \restriction S^A_<(m^+)$ es una aplicación cuyo dominio es $S^A_<(m^+) = \{m\}$ y $f(m) = F(m) = a \in B$. Luego,

$$F(m^+) = H(f) = g(f(m)) = g(F(m))$$

$\boxed{x \geqslant m \rightarrow x^+}$

Sea $x \geqslant m$ tal que $F(x) \in B$ y $F(x^+) = g(F(x))$.

Como $F(x^+) \in \text{rang}(g)$ y $\text{rang}(g) \subseteq B$ resulta que $F(x^+) \in B$.

Notemos $y = x^+$. Entonces $f = F \restriction S^A_<(y^+)$ es una aplicación cuyo dominio es $S^A_<(y^+) = \{t \in \omega : \ m \leqslant t < y^+\}$ y, además, $f(y) = F(y) = F(x^+) \in B$. Luego,

$$F(y^+) = H(F \restriction S^A_<(y^+)) = H(f) = g(f(y)) = g(F(y))$$

Unicidad: Sean F, F' aplicaciones de $[m, \rightarrow [$ en B tales que:

(1) $F(m) = a = F'(m)$.

(2) $\forall x \in [m, \rightarrow [\ (F(x^+) = g(F(x)) \wedge (F'(x^+) = g(F'(x)))$

Veamos que $\forall x \in [m, \rightarrow [\ (F(x) = F'(x))$. Por inducción débil en la clase b.o. $\langle [m, \rightarrow [, < \rangle$.

$\boxed{x = m}$

Trivial, ya que $F(m) = a = F'(m)$.

$\boxed{x \geqslant m \rightarrow x^+}$

Sea $x \geqslant m$ tal que $F(x) = F'(x)$ (hipótesis de inducción). Entonces

$$F(x^+) = g(F(x)) \overset{h.i.}{=} g(F'(x)) = F'(x^+)$$

Ejercicio 78. *(***Suma de números naturales***)*

(1) *Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\varphi_n : \omega \rightarrow \omega$ tal que*

- $\varphi_n(0) = n$.
- $\forall x \in \omega\ (\varphi_n(x^+) = (\varphi_n(x))^+)$.

(2) *Demostrar que existe una única aplicación $\varphi : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ tal que*

- $\forall m \in \omega\ (\varphi(m, 0) = m)$.
- $\forall m \forall n \in \omega\ (\varphi(m, n^+) = (\varphi(m, n))^+)$.

Notación: $\varphi(m, n) = m + n$, para cada $m, n \in \omega$.
Indicación: *Pruébese (1) aplicando el ejercicio 77 a un esquema adecuado.*

(1) Basta aplicar el ejercicio 77 al siguiente esquema: $B = \omega$, $a = n$, $m = 0$ y la aplicación $g : B \rightarrow B$ definida por $g(x) = x^+$ $(\forall x \in \omega)$.

Por el ejercicio citado, existe una única aplicación

$$F \equiv \varphi_n : [m, \rightarrow [= \omega \rightarrow B = \omega$$

tal que

- $\varphi_n(0) = n$.
- $\forall x \in \omega\ (\varphi_n(x^+) = g(\varphi_n(x)) = (\varphi_n(x))^+)$.

(2) **Existencia:** Basta considerar la aplicación $\varphi : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ definida como sigue: $\varphi(m, n) = \varphi_m(n)$, para cada $\langle m, n \rangle \in \omega \times \omega$.

Unicidad: Sean $f, g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ aplicaciones tales que

- $\forall m \in \omega\ (f(m,0) = m \wedge g(m,0) = m)$.
- $\forall m, n \in \omega\ (f(m,n^+) = (f(m,n))^+ \wedge g(m,n^+) = (g(m,n))^+)$.

Para cada $n \in \omega$, consideremos las aplicaciones f_n, g_n de ω en ω definidas así:

$$\left.\begin{array}{l} f_n(m) = f(n,m)\ (\forall m \in \omega) \\ g_n(m) = g(n,m)\ (\forall m \in \omega) \end{array}\right\}$$

De la unicidad de las aplicaciones φ_n, resulta que $f_n = g_n$.

Por tanto, $f = g$.

Ejercicio 79. *(***Producto de números naturales***)*

(1) *Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\psi_n : \omega \to \omega$ tal que*

- $\psi_n(0) = 0$.
- $\forall x \in \omega\ (\psi_n(x^+) = n + \psi_n(x))$.

(2) *Demostrar que existe una única aplicación $\psi : \omega \times \omega \to \omega$ tal que*

- $\forall m \in \omega\ (\psi(m,0) = 0)$.
- $\forall m \forall n \in \omega\ (\psi(m,n^+) = m + \psi(m,n))$.

Notación: $\psi(m,n) = m \cdot n$, para cada $m, n \in \omega$.

(1) Basta aplicar el ejercicio 77 al siguiente esquema: $B = \omega$, $a = 0$, $m = 0$ y la aplicación $g : B \to B$ definida por $g(x) = \varphi_n(x)\ (\forall x \in \omega)$.

Por el ejercicio citado, existe una única aplicación

$$F \equiv \psi_n : [m, \to [= \omega \to B = \omega$$

tal que

- $\psi_n(0) = 0$.
- $\forall x \in \omega\ (\psi_n(x^+) = g(\psi_n(x)) = \varphi_n(\psi_n(x)) = n + \psi_n(x))$.

(2) Existencia: Basta considerar la aplicación $\psi : \omega \times \omega \to \omega$ definida como sigue: $\psi(m,n) = \psi_m(n)$, para cada $\langle m, n \rangle \in \omega \times \omega$.

Unicidad: Sean $f, g : \omega \times \omega \to \omega$ aplicaciones tales que

- $\forall m \in \omega\ (f(m,0) = 0 \wedge g(m,0) = 0)$.

- $\forall m, n \in \omega\ (f(m, n^+) = m + f(m, n) \land g(m, n^+) = m + g(m, n))$.

Para cada $n \in \omega$, consideremos las aplicaciones f_n, g_n de ω en ω definidas así:

$$\left.\begin{array}{l} f_n(m) = f(n, m)\ (\forall m \in \omega) \\ g_n(m) = g(n, m)\ (\forall m \in \omega) \end{array}\right\}$$

De la unicidad de las aplicaciones ψ_n, resulta que $f_n = g_n$.

Por tanto, $f = g$.

Ejercicio 80. (La función factorial) *Demostrar que existe una única aplicación $f : \omega \to \omega$ tal que*

- $f(0) = 1$.
- $\forall n\ (f(n+1) = (n+1)f(n))$.

Existencia: Consideremos la aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \emptyset \\ n^+ \cdot x(n) & \text{si } x \text{ es una aplicación de } n^+ \text{ en } \omega, \text{ con } n \in \omega \\ \emptyset & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión en **Ord** (versión 1) aplicado a H, existe una única aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = H(F \upharpoonright \alpha))$$

Consideremos $f = F \upharpoonright \omega$. Entonces f es una aplicación de ω en $\mathbf{V}$. Además, rang $(f) \subseteq$ rang$(H) \subseteq$ rang$(F) \subseteq \omega$. Luego, f es una aplicación de ω en ω que verifica:

- $f(0) = F(0) = H(F \upharpoonright 0) = H(\emptyset) = 1$.
- Si $n \in \omega$, entonces $f(n^+) = F(n^+) = H(F \upharpoonright n^+) = n^+ \cdot F(n) = n^+ \cdot f(n)$.

Unicidad: Sean f, g aplicaciones de ω en ω verificando:

1. $f(0) = 1 \land g(0) = 1$.
2. $\forall n \in \omega\ (f(n^+) = n^+ \cdot f(n) \land g(n^+) = n^+ \cdot g(n))$.

Veamos que $\forall n \in \omega\ (f(n) = g(n))$. Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$

Trivial, ya que $f(0) = 1 = g(0)$.

$\boxed{n \to n^+}$
Sea $n \in \omega$ tal que $f(n) = g(n)$ (hipótesis de inducción). Entonces

$$f(n^+) = n^+ \cdot f(n) \overset{h.i.}{=} n^+ \cdot g(n) = g(n^+)$$

Ejercicio 81. *Sea A un conjunto no vacío y $a \in A$. Sea f una aplicación inyectiva de A en A verificando:*

1. *$a \notin f[A]$.*
2. *Si $B \subseteq A$ es tal que $a \in B$ y $f[B] \subseteq B$, entonces $B = A$.*

Se pide:

(1) *Probar que existe una única aplicación $g : \omega \to A$ que satisface*

- *$g(0) = a$.*
- *$\forall n \in \omega\ (g(n+1) = f(g(n)))$.*

(2) *Probar que la aplicación g del apartado a) es biyectiva.*

(1) Existencia: Consideremos la aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$H(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = \emptyset \\ f(x(n)) & \text{si } x \text{ es una aplicación de dominio } n^+ \\ & \text{con } n \in \omega \text{ y } x(n) \in A \\ \emptyset & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión en **Ord** (versión 1) aplicado a H, existe una única aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = H(F \restriction \alpha))$$

Sea $g = F \restriction \omega$. Entonces g es una aplicación cuyo dominio es ω. Se verifica

- $g(0) = F(0) = H(F \restriction 0) = H(\emptyset) = a$.
- $\forall n \in \omega\ (g(n) \in A \wedge g(n^+) = f(g(n)))$. Probémoslo por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$
  Por una parte, $g(0) = a \in A$.
  Por otra, $g(0^+) = H(g \restriction 0^+)$. Pero $g \restriction 0^+$ es una aplicación cuyo dominio es 0^+ y, además, $g(0) \in A$. Luego,

$$g(0^+) = H(g \restriction 0^+) = f(g(0))$$

$\boxed{n \to n^+}$ Sea $n \in \omega$ tal que $g(n) \in A$ y $g(n^+) = f(g(n))$. Como $g(n^+) \in \text{rang}(f) \subseteq A$, resulta que $g(n^+) \in A$.
Notemos $p = n^+$. Entonces $g \restriction p^+$ es una aplicación cuyo dominio es p^+ y, además, $g(p) = g(n^+) \in A$. Luego,

$$g(p^+) = H(g \restriction p^+) = f(g(p))$$

Unicidad: Sean g, h aplicaciones de ω en A tales que

- $g(0) = a \wedge h(0) = a$.
- $\forall n \in \omega\ (g(n^+) = f(g(n)) \wedge h(n^+) = f(h(n)))$.

Veamos que $\forall n \in \omega\ (g(n) = h(n))$. Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$
Trivial, ya que $g(0) = a = h(0)$.

$\boxed{n \to n^+}$
Supongamos que $g(n) = h(n)$ (hipótesis de inducción). Entonces

$$g(n^+) = f(g(n)) \overset{h.i.}{=} f(h(n)) = h(n^+)$$

(2) Veamos que la aplicación g es **inyectiva**. Concretamente vamos a ver que $\forall p \in \omega \forall n \in \omega\ (g(p) = g(n) \Longrightarrow p = n)$.

Por inducción débil en ω sobre la variable p.

$\boxed{p = 0}$
Sea $n \in \omega$ tal que $g(n) = g(0)$. Entonces $g(n) = a$. Como $a \notin f[A]$ y $g(n + 1) = f(g(n)) \in f[A]$, se deduce que $n = 0$. Luego, $p = n$.

$\boxed{p \to p^+}$
Supongamos que $\forall n \in \omega\ (g(p) = g(n) \Longrightarrow p = n)$. Sea $q \in \omega$ tal que $g(p + 1) = g(q)$. Como $g(q) = f(g(p))$ resulta que $q \neq 0$. Sea $r \in \omega$ tal que $q = r + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} g(p+1) = g(q) &\Longrightarrow g(p+1) = g(r+1) \Longrightarrow f(g(p)) = f(g(r)) \\ &\overset{finy.}{\Longrightarrow} g(p) = g(r) \overset{h.i.}{\Longrightarrow} p = r \Longrightarrow p + 1 = r + 1 = q \end{aligned}$$

Veamos que la aplicación g es **suprayectiva**. Para ello, teniendo presente la hipótesis (2), basta probar que $a \in g[\omega]$ y $f[g[\omega]] \subseteq g[\omega]$.

Por una parte, es inmediato que $a \in g[\omega]$. Veamos que $f[g[\omega]] \subseteq g[\omega]$.

- Para ello, sea $x \in f[g[\omega]]$. Entonces existe $y \in g[\omega]$ tal que $x = f(y)$. Sea $n \in \omega$ tal que $y = g(n)$. Se verifica que:

$$x = f(y) \wedge y = g(n) \Longrightarrow x = f(g(n) \Longrightarrow x = g(n+1) \Longrightarrow x \in g[\omega]$$

6.4. Problemas propuestos

Ejercicio 6.1. (*Potencia de números naturales*)

(1) Demostrar que para cada $n \in \omega$ existe una única aplicación $\eta_n : \omega \to \omega$ tal que

- $\eta_n(0) = 1$.
- $\forall x \in \omega \ (\eta_n(x^+) = \eta_n(x) \cdot n)$.

(2) Demostrar que existe una única aplicación $\eta : \omega \times \omega \to \omega$ tal que

- $\forall m \in \omega \ (\eta(m, 0) = 1)$.
- $\forall m, n \in \omega \ (\eta(m, n^+) = \eta(m, n) \cdot n)$.

Notación: $\eta(m, n) = m^n$, para cada $m, n \in \omega$.

Indicación: Resuélvase como los ejercicios 78 y 79.

Ejercicio 6.2. Las dos siguientes “versiones"del teorema de recursión en clases bien ordenadas son erróneas. Encontrar el error y explicarlo.

(a) Sea $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada. Sea H una aplicación de A en $\mathbf{V}$. Entonces, existe una única aplicación $F : A \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall x \in A(F(x) = H(F \restriction S^A_<(x)))$$

(b) Sea $\langle A, < \rangle$ una clase bien ordenada. Sea H una aplicación de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}$. Entonces, existe una única aplicación $F : A \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall x \in A(F(x) = H(S^A_<(x)))$$

Ejercicio 6.3. Sea R una relación sobre un conjunto a. Probar que existe una única aplicación $f : \omega \to \mathbf{P}(a \times a)$, tal que

(1) $f(0) = \{\langle x, x \rangle : x \in a\}$.

(2) $f(n + 1) = R \circ f(n)$.

Sea R^* la clausura reflexiva–transitiva de R en el conjunto a, tal y como se definió en el ejercicio propuesto 2.21. Probar que $R^* = \bigcup_{i \in \omega} f(i)$.

Indicación: Aplicar recursión en ω, versión 2. Probar, además, que $\bigcup_{i \in \omega} f(i)$ es transitiva y reflexiva en a, y que si S es una relación transitiva y reflexiva en a que contiene a R, entonces se tiene que $\forall n \in \omega \ (f(n) \subseteq S)$.

Ejercicio 6.4. Dar un ejemplo de una clase totalmente ordenada $\langle A, <\rangle$ y una aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ tal que no existe una única aplicación $F : A \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall x \in A \ (F(x) = H(F \restriction S^A_<(x)))$$

Concluir que el teorema de recursión no es cierto, en general, para órdenes totales que no son buenos órdenes.

Ejercicio 6.5. (*Recursión en clases bien fundamentadas*). Sea $\langle A, <\rangle$ una clase bien fundamentada (ver definición en el ejercicio 39) tal que la relación $<$ es adecuada en A; es decir,

$$\forall x \in A \ (S^A_<(x) = \{y : \ y < x\} \ \text{ es un conjunto})$$

Si G es una aplicación de $\mathbf{V}$ en $\mathbf{V}$, probar que existe una única aplicación $F : A \to \mathbf{V}$ tal que

$$\forall x \in A(F(x) = G(F \restriction S^A_<(x)))$$

Indicación: La prueba es análoga a la del teorema de recursión en clases bien ordenadas.

Ejercicio 6.6. (*Sucesión de Fibonacci*). Probar que existe una única aplicación $f : \omega \to \omega$ tal que

(1) $f(0) = f(1) = 1$.

(2) $\forall n \in \omega \ (f(n+2) = f(n) + f(n+1))$.

Ejercicio 6.7. Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula. Sea $R = < \otimes <$ la relación producto lexicográfico (ver ejercicio 32) del orden usual en ω consigo mismo. Supongamos que se verifica la siguiente propiedad:

> *"Sea $\langle n, m\rangle \in \omega \times \omega$. Supongamos que para todo $\langle p, q\rangle \in \omega \times \omega$ tales que $\langle p, q\rangle R \langle n, m\rangle$ se verifica $\varphi(p, q)$. Entonces $\varphi(n, m)$".*

Probar que $\forall n \in \omega \ \forall m \in \omega \ (\varphi(n, m))$.

Ejercicio 6.8. Sean a y b dos conjuntos, $g : a \times b \times \omega \to b$ y $h : a \to b$. Probar que existe una única aplicación $f : a \times \omega \to b$ tal que

- $f(x, 0) = h(x)$ $(\forall x \in a)$.
- $f(x, n+1) = g(x, f(x, n), n)$ $(\forall x \in a\ ,\ \forall n \in \omega)$.

Indicación: Para cada $x \in a$, aplicar recursión con la función g_x definida como $g_x(y, n) = g(x, y, n)$.

Ejercicio 6.9. Usando el esquema de recursión del ejercicio anterior, probar la existencia de las operaciones, suma, producto y exponenciación de números naturales.

Ejercicio 6.10. Sea $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Probar que existe una única aplicación F de $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ en $\mathbf{V}$ tal que

$$\forall\alpha\forall\beta(F(\alpha,\beta) = G(F \upharpoonright \alpha \times \beta))$$

Indicación: Usar recursion en clases bien fundamentadas, ejercicio 6.5.

Ejercicio 6.11. (*Inducción en conjuntos finitos*). Sea $\varphi(x)$ una fórmula y $n \in \omega$. Supongamos que $\varphi(0)$ y que $\forall k < n(\varphi(k) \to \varphi(k+1))$. Probar que $\forall k \leqslant n$ se tiene $\varphi(k)$.

Indicación: Usar inducción en el conjunto bien ordenado $\langle n^+, <\rangle$.

Ejercicio 6.12. Sea $\langle a, \prec\rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $f : \omega \to a$ tal que $\forall n \in \omega(f(n) \prec f(n+1))$. Probar que $\forall n, m \in \omega\ (n < m \to f(n) \prec f(m))$.

Ejercicio 6.13. Sean x un conjunto, $a \in x$ y g una aplicación cuyo dominio está contenido en $x \times \omega$ y cuyo rango está contenido en x. Probar que existe una única aplicación f tal que:

(1) $\mathrm{rang}(f) \subseteq x$.

(2) $\mathrm{dom}(f) \in \omega$ o $\mathrm{dom}(f) = \omega$.

(3) $f(0) = a$.

(4) $f(n+1) = g(f(n), n)$, si $n+1 \in \mathrm{dom}(f)$.

(5) Si $\mathrm{dom}(f) = k+1, k \in \omega$, entonces g no está definida en $\langle f(k), k\rangle$.

Indicación: Considérese $u \notin x$ y defínase $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ como sigue:

$$G(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = \emptyset \\ g(x(n), n) & \text{si } x \text{ es una aplicación de dominio } n^+, \\ & \text{con } n \in \omega \text{ y } \langle x(n), n\rangle \in \mathrm{dom}(g) \\ u & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Por el teorema de recursión en $\mathbf{Ord}$, versión 1, aplicado a G, obténgase una cierta aplicación $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$.

Finalmente, si $\beta = \min\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ F(\alpha) = u\}$, considérese $f = F \upharpoonright \beta$.

Ejercicio 6.14. Sea a un subconjunto de ω. Probar que existe una aplicación biyectiva cuyo dominio o bien es un número natural o es ω, y cuyo rango es a.

Indicación: Definir la función inversa a la que se pide por recursión en el conjunto bien ordenado $\langle a, <\rangle$.

Ejercicio 6.15. Sean $G : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ y a un conjunto. Probar que existe una aplicación $F : \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{V}$ tal que

(1) $F(0,0) = a$.

(2) $F(\beta+1, \ggg +1) = G(F(\beta, \ggg))$.

(3) $F(\alpha, \beta) = \sup\{F(\delta, \ggg) : \delta < \alpha \wedge \ggg < \beta\}$ si α y β son límites.

¿Es única? Si no es así, dar un ejemplo.

Indicación: Usar recursión en clases bien fundamentadas (ejercicio 6.5).

Ejercicio 6.16. Demostrar que un conjunto x es un ordinal si y sólo si se verifican todas las condiciones siguientes:

(1) $\emptyset \in x$ ó $\emptyset = x$.

(2) Si $y \in x$, entonces $y^+ \in x \vee y^+ = x$.

(3) Si y es un subconjunto de x, entonces $\bigcup y \in x \vee \bigcup y = x$.

Indicación: Si x es un conjunto que no es un ordinal y verifica las condiciones (1), (2) y (3), entonces pruébese por inducción débil en **Ord** que $\mathbf{Ord} \subseteq x$.

Capítulo 7

Aritmética Ordinal

El objetivo de este tema consiste en establecer la existencia y unicidad de las operaciones usuales con ordinales: la suma, el producto y la exponenciación; así como algunas de las propiedades más interesantes de cada una de dichas operaciones.

7.1. Funciones normales

Definición 7.1.1. Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$. Diremos que:

1. F es *continua* si para todo ordinal límite α, se verifica que

$$F(\alpha) = \sup\{F(\beta) : \beta < \alpha\}$$

2. F es *normal* si F es creciente y continua.

Ejemplos: La función identidad en **Ord** es una aplicación continua. Las funciones constantes en **Ord** son aplicaciones continuas pero no normales. La función "paso al siguiente", $F(\alpha) = \alpha^+$, es creciente pero no es continua.

Proposición 7.1.2. *Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ una aplicación continua. Entonces,*

$$F \ \ normal \iff \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) < F(\alpha^+))$$

Proposición 7.1.3. *Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ una aplicación normal. Si α es un ordinal límite, entonces $F(\alpha)$ es un ordinal límite.*

Proposición 7.1.4. *Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ una aplicación normal. Sea α un ordinal tal que $F(0) \leqslant \alpha$. Entonces, existe máx $\{\beta \in \mathbf{Ord} : F(\beta) \leqslant \alpha\}$.*

Proposición 7.1.5. *Sea* $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *una aplicación normal. Si* a *es un subconjunto no vacío de* **Ord**, *entonces*

$$F(sup(a)) = sup\left(\{F(\alpha) : \alpha \in a\}\right)$$

Proposición 7.1.6. *Sean* $F, G : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *aplicaciones normales. Entonces,* $F \circ G$ *es una aplicación normal.*

Teorema 7.1.7. *(Teorema del punto fijo (Veblen, 1907))*

Sea $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *una aplicación normal. Para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord}$, *existe* $\beta \in \mathbf{Ord}$ *tal que* $\beta \geqslant \alpha$ *y* $F(\beta) = \beta$.

7.2. Existencia y unicidad de las operaciones usuales con ordinales

Suma de ordinales.

- **Teorema 1.** Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ existe una única aplicación $\Sigma_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ verificando:

  (1) $\Sigma_\alpha(0) = \alpha$.

  (2) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Sigma_\alpha(\beta^+) = (\Sigma_\alpha(\beta))^+)$.

  (2) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ límite } \to \Sigma_\alpha(\beta) = \sup\{\Sigma_\alpha(\ggg) : \ggg < \beta\})$.

- **Teorema 2.** Existe una única aplicación $\Phi_+ : \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ verificando: **(1)** $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_+(\alpha, 0) = \alpha)$.

  (2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Phi_+(\alpha, \beta^+) = (\Phi_+(\alpha, \beta))^+)$.

  (3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ límite } \to \Phi_+(\alpha, \beta) = \sup\{\Phi_+(\alpha, \ggg) : \ggg < \beta\})$.

- **Notación:** $\Phi_+(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$.

Producto de ordinales.

- **Teorema 1.** Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ existe una única aplicación $\Pi_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ verificando:

  (1) $\Pi_\alpha(0) = 0$.

  (2) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\Pi_\alpha(\beta^+) = \Pi_\alpha(\beta) + \alpha)$.

  (3) $\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \text{ límite } \to \Pi_\alpha(\beta) = \sup\{\Pi_\alpha(\ggg) : \ggg < \beta\})$.

- **Teorema 2.** Existe una única aplicación $\Phi_\bullet$: **Ord** $\times$ **Ord** $\rightarrow$ **Ord** verificando: **(1)** $\forall\alpha \in$ **Ord** $(\Phi_\bullet(\alpha, 0) = 0)$.

  (2) $\forall\alpha, \beta \in$ **Ord** $(\Phi_\bullet(\alpha, \beta^+) = \Phi_\bullet(\alpha, \beta) + \alpha)$.

  (3) $\forall\alpha, \beta \in$ **Ord** $(\beta$ límite $\rightarrow \Phi_\bullet(\alpha, \beta) =$ sup $\{\Phi_\bullet(\alpha, \ggg) : \ggg < \beta\})$.

- **Notación:** $\Phi_\bullet(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$.

Exponenciación ordinal.

- Definimos la aplicación E_0 : **Ord** $\rightarrow$ **Ord** así: $E_0(0) = 1$ y $E_0(\beta) = 0$, para cada $\beta \in$ **Ord** $- \{0\}$.

- **Teorema 1.** Para cada $\alpha \in$ **Ord** $- \{0\}$ existe una única aplicación E_α : **Ord** $\rightarrow$ **Ord** verificando: **(1)** $E_\alpha(0) = 1$.

  (2) $\forall\beta \in$ **Ord** $(E_\alpha(\beta^+) = E_\alpha(\beta) \cdot \alpha)$.

  (3) $\forall\beta \in$ **Ord** $(\beta$ límite $\rightarrow E_\alpha(\beta) =$ sup $\{E_\alpha(\ggg) : \ggg < \beta\})$.

- **Teorema 2.** Existe una única aplicación $\Phi_{\mathbf{exp}}$: **Ord** $\times$ **Ord** $\rightarrow$ **Ord** verificando: **(1)** $\forall\alpha \in$ **Ord** $(\Phi_{\mathbf{exp}}(\alpha, 0) = 1)$.

  (2) $\forall\alpha, \beta \in$ **Ord** $(\Phi_{\mathbf{exp}}(\alpha, \beta^+) = \Phi_{\mathbf{exp}}(\alpha, \beta) \cdot \alpha)$.

  (3) $\forall\alpha, \beta \in$ **Ord**$(\alpha \neq 0 \wedge \beta$ límite $\rightarrow \Phi_{\mathbf{exp}}(\alpha, \beta) = \sup\{\Phi_{\mathbf{exp}}(\alpha, \ggg) : \ggg < \beta\})$.

  (4) $\forall\beta \in$ **Ord** $(\beta \neq 0 \rightarrow \Phi_{\mathbf{exp}}(0, \beta) = 0)$.

- **Notación:** $\Phi_{\mathbf{exp}}(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$.

7.3. Propiedades de la suma de ordinales

(1) Para cada $\alpha \in$ **Ord** la aplicación Σ_α : **Ord** $\rightarrow$ **Ord** definida por $\Sigma_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ es normal.

(2) $\forall\alpha\ (0 + \alpha = \alpha)$.

(3) $\forall\alpha, \beta\ (\beta$ límite $\rightarrow \alpha + \beta$ límite $)$.

(4) *Monotonía*

  (a) $\alpha < \beta \rightarrow \ggg + \alpha < \ggg + \beta$.

  (b) $\alpha \leqslant \beta \rightarrow \alpha + \ggg \leqslant \beta + \ggg$.

(5) *Ley de simplificación para* $<$

(a) $\ggg +\alpha <\ggg +\beta \to \alpha < \beta$.

(b) $\alpha+ \ggg< \beta+ \ggg\to \alpha < \beta$.

(6) *Ley de simplificación para* $=$

(a) $\ggg +\alpha =\ggg +\beta \to \alpha = \beta$.

(b) $\alpha+ \ggg= \beta+ \ggg\not\to \alpha = \beta$.

(7) *Asociatividad.* $(\alpha + \beta)+ \ggg= \alpha + (\beta+ \ggg)$.

(8) *Teorema de la resta.* Sean α, β ordinales tales que $\alpha \leqslant \beta$. Entonces, existe un único ordinal $\ggg$ tal que $\alpha+ \ggg= \beta$.

(9) *La suma de ordinales no es conmutativa.*

7.4. Propiedades del producto de ordinales

(1) Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\}$ la aplicación $\Pi_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $\Pi_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ es normal.

(2) $\forall\alpha\ (\alpha \cdot 1 = \alpha\ \wedge\ 1 \cdot \alpha = \alpha\ \wedge\ 0 \cdot \alpha = 0)$.

(3) $\forall\alpha, \beta\ (\alpha \neq 0 \wedge \beta$ límite $\to \alpha \cdot \beta$ límite $)$.

(4) *Monotonía*

(a) $\alpha < \beta\wedge \ggg\neq 0 \to\ggg \cdot\alpha <\ggg \cdot\beta$.

(b) $\alpha \leqslant \beta \to \alpha\cdot \ggg\leqslant \beta\cdot \ggg$.

(5) $\alpha \neq 0 \wedge 1 < \beta \to \alpha < \alpha \cdot \beta$.

(6) $\alpha \neq 0 \wedge 1 < \beta \not\to \alpha < \beta \cdot \alpha$.

(7) $\alpha \neq 0 \to \beta \leqslant \alpha \cdot \beta$.

(8) $\alpha \cdot \beta = 0 \leftrightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0$.

(9) *Ley de simplificación para* $<$

(a) $\ggg\neq 0\wedge \ggg \cdot\alpha <\ggg \cdot\beta \to \alpha < \beta$.

(b) $\ggg\neq 0 \wedge \alpha\cdot \ggg< \beta\cdot \ggg\to \alpha < \beta$.

(10) *Ley de simplificación para* $=$

(a) $\ggg \neq 0 \wedge \ggg \cdot \alpha = \ggg \cdot \beta \to \alpha = \beta$.

(b) $\ggg \neq 0 \wedge \alpha \cdot \ggg = \beta \cdot \ggg \not\to \alpha = \beta$.

(11) *Distributividad del producto respecto de la suma*

(a) $\alpha \cdot (\beta + \ggg) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \ggg)$.

(b) En general, $(\alpha + \beta) \cdot \ggg \neq (\alpha \cdot \ggg) + (\beta \cdot \ggg)$.

(12) *Asociatividad.* $(\alpha \cdot \beta) \cdot \ggg = \alpha \cdot (\beta \cdot \ggg)$.

(13) *Teorema de la división con resto.* Sean α, β ordinales tales que $\beta \neq 0$. Entonces, existen unos únicos ordinales $\ggg, \delta$ tales que $\alpha = \beta \cdot \ggg + \delta \wedge \ggg \leqslant \alpha \wedge \delta < \beta$.

(14) $\forall \alpha$ (α límite $\leftrightarrow \exists \beta(\beta \neq 0 \wedge \alpha = \omega \cdot \beta))$.

(15) *El producto de ordinales no es conmutativo.*

7.5. Propiedades de la exponenciación ordinal

(1) Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0, 1\}$ la aplicación $E_\alpha : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$ es normal.

(2) $\forall \alpha\ (1^\alpha = 1 \wedge \alpha^1 = \alpha \wedge \alpha \cdot \alpha = \alpha^2)$.

(3) $\forall \alpha, \beta$ ($\alpha > 1 \wedge \beta$ límite $\to \alpha^\beta$ límite).

(4) *Monotonía*

(a) $\alpha < \beta \wedge \ggg > 1 \to \ggg^\alpha < \ggg^\beta$.

(b) $\alpha \leqslant \beta \to \alpha^{\ggg} \leqslant \beta^{\ggg}$.

(5) $\beta > 0 \to \alpha \leqslant \alpha^\beta$.

(6) *Ley de simplificación para* $<$

(a) $\ggg > 1 \wedge \ggg^\alpha < \ggg^\beta \to \alpha < \beta$.

(b) $\ggg \neq 0 \wedge \alpha^{\ggg} < \beta^{\ggg} \to \alpha < \beta$.

(7) *Ley de simplificación para* $=$

(a) $\ggg > 1 \wedge \ggg^\alpha = \ggg^\beta \to \alpha = \beta$.

(b) $\ggg > 1 \wedge \alpha^{\ggg} = \beta^{\ggg} \not\to \alpha = \beta$.

(8) $\alpha^\beta \cdot \alpha^{\ggg} = \alpha^{\beta + \ggg}$.

(9) $(\alpha^{\beta})^{\ggg} = \alpha^{\beta\cdot\ggg}$.

(10) *Propiedades del ordinal* ε_0 (menor punto fijo de la función normal E_ω).

(a) ε_0 es un ordinal límite.

(b) $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$.

(11) *Teorema del logaritmo.* Sean $\alpha \neq 0, \beta > 1$. Entonces, existen unos únicos ordinales $\ggg, \delta, \rho$ tales que $\alpha = \beta^{\ggg} \cdot \delta + \rho \ \wedge\ 0 < \delta < \beta \ \wedge\ \rho < \beta^{\ggg}$.

(12) Sean $\beta > 1$ y $k \in \omega$. Sean $\ggg_0, \dots, \ggg_k, \delta_0, \dots, \delta_k$ ordinales tales que $\ggg_0 > \dots > \ggg_k$ $\wedge$ $(\forall i \leqslant k)\ (\delta_i < \beta)$. Entonces, para cada ordinal $\ggg$ tal que $\ggg_0 < \ggg$ se verifica que

$$\beta^{\ggg_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \beta^{\ggg_k} \cdot \delta_k < \beta^{\ggg}$$

(13) Sea $\beta > 1$. Entonces para cada ordinal $\alpha \neq 0$ existen unos únicos $k \in \omega$ y $\ggg_0$ $, \dots, \ggg_k, \delta_0, \dots, \delta_k$ ordinales verificando que

$$\alpha = \beta^{\ggg_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \beta^{\ggg_k} \cdot \delta_k \wedge\ \ggg_0 > \dots > \ggg_k\ \wedge (\forall i \leqslant k)\ (0 < \delta_i < \beta)$$

(13) *Teorema de la forma normal de Cantor.* Para cada ordinal $\alpha \neq 0$ existen unos únicos $k \in \omega, n_0, \dots, n_k \in \omega$ y ordinales $\ggg_0, \dots, \ggg_k$ verificando que

$$\alpha = \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k \wedge\ \ggg_0 > \dots > \ggg_k\ \wedge (\forall i \leqslant k)\ (0 < n_i)$$

7.6. Problemas resueltos

Ejercicio 82. *Sea* $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *normal. Probar que:*

(1) *La clase* $A = \{\alpha \ :\ F(\alpha) = \alpha\}$ *es propia.*

(2) *Dado un ordinal* α*, el punto fijo* β *de* F *que proporciona la prueba del teorema de Veblen es el* **menor** *de los puntos fijos de* F *que es mayor o igual que* α*.*

(1) Sea F una función normal. Entonces por el teorema de Veblen se verifica que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ \exists \beta \in \mathbf{Ord}\ (\alpha + 1 \leqslant \beta \wedge F(\beta) = \beta)$.

Es decir, $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ \exists \beta \in A\ (\alpha < \beta)$. Por tanto, la clase A no está acotada superiormente en $\langle \mathbf{Ord}, < \rangle$ y, en consecuencia, A es una clase propia.

(2) En primer lugar, debido a la importancia del resultado y al interés específico de la prueba constructiva que, usualmente, se da del teorema de Veblen, vamos a detallar dicha prueba.

Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces aplicamos la versión 1 del teorema de recursión en ω, tomando como conjunto a el ordinal α y como H una aplicación tal que $H \upharpoonright \mathbf{Ord} = F$. Del teorema citado, se deduce la existencia de una única aplicación $g : \omega \to \mathbf{Ord}$ verificando:

- $g(0) = \alpha$.
- $\forall n \in \omega(g(n+1) = F(g(n)))$.

Sea $\beta = \sup(\text{rang}(g))$. Vamos a ver que dicho ordinal satisface la tesis del teorema de Veblen; es decir, $\alpha \leqslant \beta \ \wedge \ F(\beta) = \beta$.

- $\alpha \leqslant \beta$. En efecto: $\alpha = g(0) \in \text{rang}(g)$. Luego, $\alpha \leqslant \sup(\text{rang}(g))$.
- $F(\beta) = \beta$. En efecto:

$$\begin{array}{rcl} F(\beta) & = & F(\sup\,(\text{rang}(g)) \\ & = & \sup\{F(\alpha) : \ \alpha \in \text{rang}(g)\} \ [\![\ \text{prop.7.1.5, } \text{rang}(g) \neq \emptyset\ ]\!] \\ & = & \sup\{F(\alpha) : \ \exists n \in \omega\ (\alpha = g(n))\} \\ & = & \sup\{F(g(n)) : \ n \in \omega\} = \sup\{g(n+1) : \ n \in \omega\} \\ & = & \sup\,(\text{rang}(g)) = \beta \ [\![\ \text{pues } g(0) \leqslant F(g(0)) = g(1)\ ]\!] \end{array}$$

En consecuencia, $\beta = \sup\,\{g(n) : \ n \in \omega\}$ es un punto fijo de F mayor o igual que α.

Obsérvese que la prueba que se ha dado es constructiva; es decir, que no sólo prueba la existencia de un cierto punto fijo de F, sino que, además, proporciona un método para obtenerlo.

A continuación, vamos a demostrar que el punto fijo, β, obtenido en la prueba descrita, es el *menor* punto fijo de F que es mayor o igual que α. Es decir, vamos a demostrar que si $\ggg$ es otro punto fijo de F que es mayor o igual que α, entonces $\beta \leqslant \ggg$. Para ello, teniendo presente que $\beta = \sup\,\{g(n) : \ n \in \omega\}$, basta probar que $\forall n \in \omega(g(n) \leqslant \ggg)$. Veámoslo por inducción débil en ω.

- ⋆ Para $n = 0$ el resultado es trivial, ya que $g(0) = \alpha \leqslant \ggg$.
- ⋆ Si $n \in \omega$ es tal que $g(n) \leqslant \ggg$, entonces $F(g(n)) \leqslant F(\ggg) = \ggg$. Luego, $g(n^+) \leqslant \ggg$.

En consecuencia, $\beta = \sup\,\{g(n) : \ n \in \omega\} \leqslant \ggg$.

Ejercicio 83. *Sea* $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *una función normal. Sean*

$$A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F(\alpha) = \alpha\}$$

y G el único isomorfismo de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$ *en* $\langle A, \in \rangle$.
Se pide:

(1) *Probar que la aplicación G, considerada de* **Ord** *en* **Ord**, *es normal.*

(2) *Interpretar los valores* $G(\alpha)$, *para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

(1) Vamos a probar que la aplicación G es normal. Obviamente, $\mathrm{dom}(G) = \mathbf{Ord}$ y $\mathrm{rang}(G) = A \subseteq \mathbf{Ord}$. Como G es un isomorfismo, resulta que dicha aplicación es creciente. Por tanto, falta probar que G es continua. Veámoslo.

⋆ Para ello, sea α un ordinal límite y veamos que

$$G(\alpha) = \sup\{G(\beta) : \beta < \alpha\}$$

Notemos $\ggg = \sup\{G(\beta) : \beta < \alpha\}$.

- **Aserto:** $F(\ggg) = \ggg$.

  Prueba:

$$\begin{array}{rcl} F(\ggg) & = & F(\sup\{G(\beta) : \beta < \alpha\}) \\ & = & \sup\{F(G(\beta)) : \beta < \alpha\} \\ & = & \sup\{G(\beta) : \beta < \alpha\} = \ggg \end{array}$$

Del aserto resulta que $\ggg \in A$. Luego existe $\delta \in \mathbf{Ord}$ tal que $G(\delta) = \ggg$. Veamos que $\delta = \alpha$.

– $\delta \leqslant \alpha$, ya que $\forall \beta < \alpha\ (G(\beta) < G(\alpha))$. Luego

$$\ggg = \sup\{G(\beta) : \beta < \alpha\} \leqslant G(\alpha)$$

Es decir, $G(\delta) \leqslant G(\alpha)$ y, por tanto, $\delta \leqslant \alpha$.

– $\alpha \leqslant \delta$, ya que de lo contrario $\delta < \alpha \to \delta + 1 < \alpha$ (pues α es límite). Luego

$$\ggg = G(\delta) < G(\delta + 1) \leqslant \ggg$$

(2) Teniendo presente que G es un isomorfismo de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$ en $\langle A, \in \rangle$, resulta que $G(0)$ será el menor elemento de A; es decir, el menor punto fijo de F.

$G(1)$ será el siguiente de $G(0)$ en $\langle A, < \rangle$; es decir, es el segundo punto fijo de F. Además, se puede hallar dicho valor a partir de $G(0)$ usando el método constructivo de la prueba del teorema de Veblen ($G(1)$ es el menor punto fijo estríctamente mayor que $G(0)$).

$G(\alpha+1)$ será el punto fijo de F que "viene a continuación"de $G(\alpha)$. Por tanto, se puede hallar dicho valor a partir de $G(\alpha)$ usando el método constructivo de la prueba del teorema de Veblen ($G(\alpha+1)$ es el menor punto fijo estríctamente mayor que $G(\alpha)$).

Si α es un ordinal límite, entonces $G(\alpha)$ es el punto fijo de F que "viene a continuación"de todos los puntos fijos de la forma $G(\ggg)$, con $\ggg < \alpha$. Como G es una función normal, el valor de $G(\alpha)$ coincide con el supremo del conjunto $\{G(\ggg) : \ggg < \alpha\}$.

Ejercicio 84. *Sea* $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *una función normal. Sean*

$$A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F(\alpha) = \alpha\}$$

y G el único isomorfismo de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$ *en* $\langle A, \in \rangle$.
Probar que $F = G$ *si y sólo si* $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = \alpha)$.

En primer lugar vamos a establecer un resultado previo.

Aserto: Si $\forall \alpha \in \operatorname{rang}(F)\ (F(\alpha) = \alpha)$, entonces $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = \alpha)$.

⋆ Supongamos que $\forall \alpha \in \operatorname{rang}(F)\ (F(\alpha) = \alpha)$
Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces

$$F(\alpha) \in \operatorname{rang}(F) \Longrightarrow F(F(\alpha)) = F(\alpha) \stackrel{Finy.}{\Longrightarrow} F(\alpha) = \alpha$$

Probemos ahora que $F = G \iff \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = \alpha)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $F = G$. Sea $\alpha \in \operatorname{rang}(F)$. Como $F = G$ resulta que $\alpha \in \operatorname{rang}(G)$. Luego, por definición de G deducimos que $F(\alpha) = \alpha$. En consecuencia, del aserto concluimos que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (F(\alpha) = \alpha)$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}(F(\alpha) = \alpha)$. Entonces

$$\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ F(\alpha) = \alpha\} = \mathbf{Ord}$$

Luego, la aplicación G es un isomorfismo de $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$ en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$. Por tanto, $G = Id \restriction \mathbf{Ord}$. Es decir, $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (G(\alpha) = \alpha)$. En consecuencia, $F = G$.

Ejercicio 85. *Estudiar el crecimiento y la continuidad de las siguientes funciones F_i :* **Ord** $\to$ **Ord** *$(i = 1, 2, 3, 4)$:*

(1) $F_1(\alpha) = \alpha + 1$.

(2) $F_2(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha < \omega. \\ \omega, & \text{si } \alpha \geqslant \omega. \end{cases}$

(3) $F_3(\alpha) = \begin{cases} \alpha + 1, & \text{si } \alpha \text{ no es límite.} \\ \alpha, & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$

(4) $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha$.

(1) La aplicación F_1 es creciente, ya que

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha + 1 < \beta + 1 \Longleftrightarrow F_1(\alpha) < F_1(\beta)$$

En cambio, F_1 no es continua, ya que $F_1(\omega) = \omega + 1$ y

$$\sup\{F_1(n) : n < \omega\} = \sup\{n + 1 : n < \omega\} = \omega$$

(2) La aplicación F_2 no es creciente, ya que $\omega < \omega^+$ y $F_2(\omega) = \omega = F_2(\omega^+)$.

En cambio, F_2 es continua, ya que si α es un ordinal límite, entonces $F_2(\alpha) = \omega$. Además:

- $\omega < \alpha \Longrightarrow \sup \{F_2(\beta) : \beta < \alpha\} = \omega$.
- $\omega = \alpha \Longrightarrow \sup \{F_2(n) : n < \omega\} = \sup \{n : n < \omega\} = \omega$.

(3) La aplicación F_3 es continua, ya que si α es un ordinal límite, entonces $F_3(\alpha) = \alpha$. Además:

- $\sup \{F_3(\beta) : \beta < \alpha\} \leqslant \alpha$, pues $\beta < \alpha \Longrightarrow F_3(\beta) \leqslant \beta + 1 < \alpha$.
- $\alpha \leqslant \sup \{F_3(\beta) : \beta < \alpha\}$, ya que

$$\beta < \alpha \Longrightarrow \beta < \beta + 2 = F_3(\beta + 1) \Longrightarrow \beta < \sup\{F_3(\ggg) : \ggg < \alpha\}$$

Veamos que la aplicación F_3 es creciente. Para ello, teniendo presente que dicha aplicación es continua, bastará probar que

$$\forall \alpha(\alpha \in \textbf{Ord} \Longrightarrow F_3(\alpha) < F_3(\alpha^+))$$

- Si α es un ordinal límite, entonces $F_3(\alpha) = \alpha < \alpha + 2 = F_3(\alpha + 1)$.

- Si α no es un ordinal límite, entonces

$$F_3(\alpha) = \alpha + 1 < \alpha + 2 = F_3(\alpha + 1)$$

(4) La aplicación F_4 es continua, ya que si α es un ordinal límite, entonces $F_4(\alpha) = \bigcup \alpha = \alpha$. Además:

- $\sup \{F_4(\beta) : \beta < \alpha\} \leqslant \bigcup \alpha$, pues

$$\beta < \alpha \Longrightarrow \beta \subsetneqq \alpha \Longrightarrow \bigcup \beta \subseteq \bigcup \alpha \Longrightarrow F_4(\beta) \leqslant \bigcup \alpha$$

- $\bigcup \alpha \leqslant \sup \{F_4(\beta) : \beta < \alpha\}$, ya que al ser α un ordinal límite se tiene que $\alpha = \bigcup \alpha$ y $\alpha \not\subseteq \sup \{F_4(\beta) : \beta < \alpha\}$ pues

$$\beta < \alpha \Longrightarrow \beta + 2 < \alpha \wedge \beta < \beta + 1 = \bigcup (\beta + 2) = F_4(\beta + 2)$$

En cambio la aplicación F_4 no es creciente, ya que

$$\omega < \omega^+ \text{ y } F_4(\omega) = \bigcup \omega = \omega = \bigcup \omega^+ = F_4(\omega^+)$$

Ejercicio 86. *Probar que la clase $\{\alpha \in \mathbf{Ord} : \alpha$ es límite$\}$ es una clase propia.*

En el apartado 3 del ejercicio 85, hemos probado que es normal la aplicación $F_3 : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ definida por $F_3(\alpha) = \alpha$ si α es límite y $F_3(\alpha) = \alpha + 1$, en caso contrario.

Por tanto, del apartado 1 del ejercicio 82 deducimos que es propia la clase

$$A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F_3(\alpha) = \alpha\}$$

Finalmente, basta observar que de la definición de F_3 se deduce que

$$A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \alpha \text{ es límite } \}$$

Ejercicio 87. *¿Existe algún ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$?*

No puede existir un ordinal α tal que $\alpha + \omega = \alpha^+$, ya que si α es un ordinal, teniendo presente que la aplicación Σ_α es normal y ω es límite, se deduciría que $\Sigma_\alpha = \alpha + \omega$ es límite y, en consecuencia, resultaría que $\alpha + \omega \neq \alpha^+$.

Ejercicio 88. *Dar ejemplos de ordinales α, β tales que*

(1) *$\alpha < \beta$ y $\alpha + \beta < \beta + \alpha$.*

(2) *$\alpha < \beta$ y $\beta + \alpha < \alpha + \beta$.*

(1) Sean $\alpha = 1$ y $\beta = \omega$. Entonces

$$\alpha = 1 < \omega = \beta \wedge \alpha + \beta = 1 + \omega = \omega < \omega + 1 = \beta + \alpha$$

(2) Sean $\alpha = \omega$ y $\beta = \omega + 1$. Entonces $\alpha = \omega < \omega + 1 = \beta$. Además

$$\begin{array}{rcl} \beta + \alpha & = & (\omega + 1) + \omega = \omega + (1 + \omega) = \omega + \omega \\ & < & (\omega + \omega) + 1 = \omega + (\omega + 1) = \alpha + \beta \end{array}$$

Ejercicio 89. *Hallar una permutación de los ordinales* $1, 2, \omega$ *tal que su suma sea, respectivamente:*

$$\omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \omega + 3$$

- $1 + 2 + \omega \overset{asoc.}{=} (1 + 2) + \omega = 3 + \omega = \omega$
- $2 + \omega + 1 \overset{asoc.}{=} (2 + \omega) + 1 = \omega + 1$
- $1 + \omega + 2 \overset{asoc.}{=} (1 + \omega) + 2 = \omega + 2$
- $\omega + 1 + 2 \overset{asoc.}{=} \omega + (1 + 2) = \omega + 3$

Ejercicio 90. *Dar ejemplos de un conjunto* $A \subseteq \mathbb{Q}$ *tal que el tipo ordinal de* $\langle A, <_{\mathbb{Q}} \rangle$ *sea, respectivamente:*

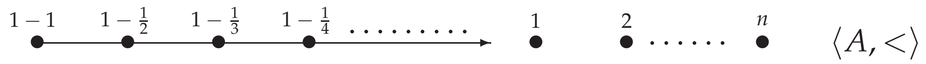
(a) $\omega + n$, *para cada* $n \in \omega - \{0\}$.

(b) $\omega \cdot 2$.

(c) $\omega \cdot \omega$.

(a) Sea n un número natural distinto de cero. Vamos a dar un ejemplo de un conjunto $A \subseteq \mathbb{Q}$ tal que t.o.$(\langle A, < \rangle) = \omega + n$.

De manera intuitiva y gráfica el conjunto A podría describirse como sigue:



Con la idea anterior, consideramos el conjunto

$$A = \{1 - 1/p : \ p \in \omega - \{0\}\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$$

Entonces, $\langle A, < \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado (ya que el orden usual de $\mathbb{Q}$ es total y, por tanto, induce un orden total en todo subconjunto suyo).

Consideremos la aplicación $f : A \to \omega + n$ definida como sigue:

$$\left.\begin{array}{rcll} f(1-1/p) & = & p-1 & \text{si } p \in \omega - \{0\} \\ f(k) & = & \omega + k - 1 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n \end{array}\right\}$$

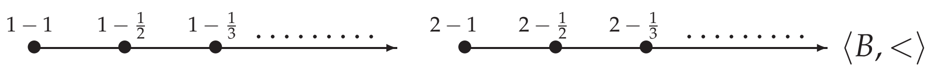
Obviamente, f es una aplicación biyectiva de A en $\omega + n$. Veamos que f es un homomorfismo de $\langle A, < \rangle$ en $\langle \omega + n, \in \rangle$.

- $1 - 1/p < 1 - 1/q \Longrightarrow f(1-1/p) = p - 1 < q - 1 = f(1-1/q)$.
- $1 - 1/p < k \Longrightarrow f(1-1/p) = p - 1 < \omega + k - 1 = f(k)$.
- $k < k' \Longrightarrow f(k) = \omega + k - 1 < \omega + k' - 1 = f(k')$.

En consecuencia, t.o.$(\langle A, < \rangle) = \omega + n$.

(b) Demos un ejemplo de un conjunto $B \subseteq \mathbb{Q}$ tal que t.o.$(\langle B, < \rangle) = \omega \cdot 2$.

De manera intuitiva y gráfica el conjunto B podría describirse como sigue:



Con la idea anterior, consideramos el conjunto

$$B = \{1 - 1/p : \ p \in \omega - \{0\}\} \cup \{2 - 1/q : \ q \in \omega - \{0\}\}$$

Como hemos observado anteriormente, $\langle B, < \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

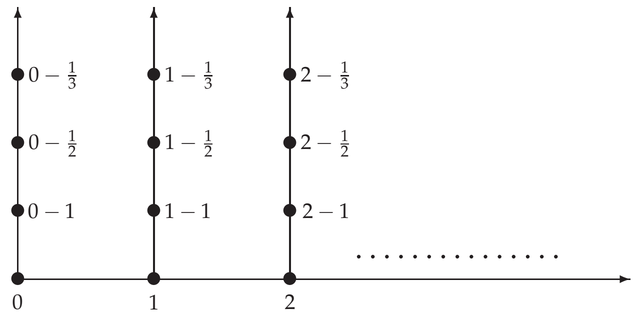
Consideremos la aplicación $f : B \to \omega + \omega$ definida como sigue:

$$\left.\begin{array}{rcll} f(1-1/p) & = & p-1 & \text{si } p \in \omega - \{0\} \\ f(2-1/q) & = & \omega + q - 1 & \text{si } q \in \omega - \{0\} \end{array}\right\}$$

Obviamente, f es una aplicación biyectiva de B en $\omega + \omega$. Además, al igual que en el apartado (a), se prueba que f es un homomorfismo de $\langle B, < \rangle$ en $\langle \omega + \omega, \in \rangle$. Por tanto, t.o.$(\langle B, < \rangle) = \omega + \omega$.

(c) Demos un ejemplo de un conjunto $C \subseteq \mathbb{Q}$ tal que t.o.$(\langle C, < \rangle) = \omega \cdot \omega$.

De manera intuitiva y gráfica el conjunto C podría describirse así:



$\langle C, < \rangle$

Con la idea anterior, consideramos el conjunto

$$C = \bigcup_{n\in\omega} \{n - 1/p : \ p \in \omega - \{0\}\}$$

Entonces, $\langle C, < \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

Consideremos la aplicación $f : C \to \omega \cdot \omega$ definida como sigue:

$$f(n - 1/p) = \omega \cdot n + p - 1 \text{ si } \ n \in \omega \wedge p \in \omega - \{0\}$$

Obviamente, f es una aplicación biyectiva de C en $\omega \cdot \omega$. Entonces, al igual que en el apartado (a), se prueba que f es un homomorfismo de $\langle C, < \rangle$ en $\langle \omega \cdot \omega, \in \rangle$. Por tanto, t.o.$(\langle C, < \rangle) = \omega \cdot \omega$.

Ejercicio 91. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** con $\beta \neq 0$. Demostrar que $\alpha + \beta$ es límite si y sólo si β es límite.*

Sean α, β ordinales tales que $\beta \neq 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\alpha + \beta$ es límite. Entonces β debe ser límite ya que, caso contrario, como $\beta \neq 0$, existiría un ordinal $\ggg$ tal que $\beta = \ggg^+$; en cuyo caso, $\alpha + \beta = \alpha + \ggg^+ = (\alpha + \ggg)^+$. Lo que es una contradicción.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que β es límite. Teniendo presente que la aplicación Σ_α es normal, deducimos que $\Sigma_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ es un ordinal límite.

Ejercicio 92. *Calcular razonadamente el tipo ordinal del conjunto*

$$\{\alpha \in \textbf{Ord} : \ \alpha \leqslant \omega^4 \ \wedge \ \exists \beta \ (\beta^2 = \alpha)\}$$

Notemos $a = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \ \alpha \leqslant \omega^4 \ \wedge \ \exists\beta\ (\beta^2 = \alpha)\}$. Vamos a probar que el tipo ordinal de $\langle a, < \rangle$ es $\omega^2 + 1$.

Para ello, consideremos la aplicación $f : \omega^2 + 1 \to a$ definida así: $f(\beta) = \beta^2$, para cada $\beta \in \omega^2 + 1$. Veamos que f es un isomorfismo de $\langle \omega^2 + 1, < \rangle$ en $\langle a, < \rangle$.

Como estamos trabajando con buenos órdenes (por tanto, totales), basta ver que f es un homomorfismo suprayectivo entre los conjuntos ordenados citados.

- $\mathrm{rang}(f) \subseteq a$. En efecto: sea $\alpha \in \mathrm{rang}(f)$. Entonces existe $\beta \in \omega^2 + 1$ tal que $\alpha = f(\beta) = \beta^2$. Como $\beta < \omega^2 + 1 \Longrightarrow \beta \leqslant \omega^2$, resulta que $\alpha = \beta^2 \leqslant \omega^4$. Luego, $\alpha \in a$.
- f es un homomorfismo de $\langle \omega^2 + 1, < \rangle$ en $\langle a, < \rangle$.

  Sean $\beta, \ggg \in \mathbf{Ord}$ tales que $\beta < \ggg$.

  - Si $\beta = 0$, entonces $f(\beta) = 0 < \ggg^2 = f(\ggg)$.
  - Si $\beta > 0$, entonces por la monotonía fuerte (por la derecha) del producto se tiene que
  $$f(\beta) = \beta^2 = \beta \cdot \beta < \beta \cdot \ggg$$
  Por la monotonía débil (por la izquierda) del producto se tiene que $\beta \cdot \ggg \leqslant \ggg \cdot \ggg = \ggg^2$. Luego, $f(\beta) = \beta^2 < \beta \cdot \ggg \leqslant \ggg^2 = f(\ggg)$.
- f es una aplicación suprayectiva de $\omega^2 + 1$ en a.

  En efecto: sea $\alpha \in a$. Entonces, $\alpha \leqslant \omega^4$ y existe β tal que $\beta^2 = \alpha$.

  - No puede verificarse que $\beta > \omega^2$ pues, en tal caso, razonando como hemos hecho antes, obtendríamos que $\beta^2 > \omega^4$. Lo que contradice la condición que satisface β.

  Por tanto, $\beta \leqslant \omega^2$. Es decir, $\beta \in \omega^2 + 1$ y $f(\beta) = \beta^2 = \alpha$.

Ejercicio 93. *Sean α y β ordinales tales que $\alpha > 1$ y $\beta \neq 0$.*

(1) *Consideremos la clase $A = \{\rho \in \mathbf{Ord} : \ \beta < \alpha^\rho\}$. Probar que existe $\ggg = \text{mín}_< A$, que $A = \mathbf{Ord} - \ggg$, y concluir que la clase A es propia.*

(2) *Probar que el ordinal $\ggg$ del apartado anterior, es sucesor.*

(3) *Probar que existe un único ordinal δ verificando que $\alpha^\delta \leqslant \beta < \alpha^{\delta+1}$.*

(1) Teniendo presente que $A \subseteq \mathbf{Ord}$, resulta que A está bien ordenada por el orden inducido por el usual de **Ord**. Luego, para probar que existe $\ggg = \text{mín}_< A$ es suficiente demostrar que $A \neq \emptyset$. Veámoslo.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > 1 \Longrightarrow \beta \leqslant \alpha^\beta \\ \alpha > 1 \Longrightarrow \alpha^\beta < \alpha^{\beta+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta < \alpha^{\beta+1} \Longrightarrow \beta + 1 \in A \Longrightarrow A \neq \emptyset$$

Veamos que $A = \mathbf{Ord} - \ggg$.

- Si $x \in A$, entonces $x \in \mathbf{Ord}$ y $\ggg \leqslant x$. Luego, $x \in \mathbf{Ord}$ y $x \notin \ggg$. Es decir, $x \in \mathbf{Ord} - \ggg$.
- Si $x \in \mathbf{Ord} - \ggg$, entonces $x \in \mathbf{Ord}$ y $x \notin \ggg$. Luego, $\ggg \leqslant x$. Por tanto, o bien $x = \ggg$ (en cuyo caso, $x \in A$), o bien $x > \ggg$ (en cuyo caso, $\alpha^x > \alpha^{\ggg} > \beta$ y $x \in A$)

Veamos que la clase A es propia. En efecto: si la clase A fuese un conjunto, teniendo presente que $\mathbf{Ord} = (\mathbf{Ord} - \ggg) \cup \ggg = A \cup \ggg$, del axioma de la unión resultaría que la clase **Ord** sería un conjunto.

(2) Sea $\ggg = \text{mín}_< A$. Veamos que $\ggg$ es un ordinal sucesor.

- $\ggg$ es no nulo, ya que $1 \leqslant \beta < \alpha^{\ggg}$.
- Veamos que $\ggg$ no es un ordinal límite.

  En efecto: si $\ggg$ fuese un ordinal límite, entonces

  $$\alpha^{\ggg} = \sup\{\alpha^\rho : \rho < \ggg\}$$

  Como $\beta < \alpha^{\ggg}$, existiría $\sigma \in \mathbf{Ord}$ tal que $\sigma < \ggg$ y $\beta < \alpha^\sigma$. Es decir, $\sigma < \ggg$ y $\sigma \in A$. Lo que es una contradicción.

(3) <u>Existencia:</u>

Como $\ggg = \text{mín}_< A$ es un ordinal sucesor, existe $\delta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\ggg = \delta + 1$. Entonces

- Como $\ggg = \delta + 1 \in A$, resulta que $\beta < \alpha^{\delta+1}$.
- Como $\ggg = \text{mín}_< A$ y $\delta < \ggg$, se tiene que $\delta \notin A$. Luego, $\alpha^\delta \leqslant \beta$.

<u>Unicidad:</u> Sean $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{Ord}$ tales que

$$\alpha^{\delta_1} \leqslant \beta < \alpha^{\delta_1+1} \text{ y } \alpha^{\delta_2} \leqslant \beta < \alpha^{\delta_2+1}$$

- No puede verificarse que $\delta_1 < \delta_2$ pues, en tal caso,

  $$\delta_1 < \delta_2 \Longrightarrow \delta_1 + 1 \leqslant \delta_2 \Longrightarrow \beta < \alpha^{\delta_1+1} \leqslant \alpha^{\delta_2} \leqslant \beta$$

  Lo que es una contradicción.

– No puede verificarse que $\delta_1 < \delta_2$ (razonamiento similar al anterior).

Conclusión: $\delta_1 = \delta_2$.

Ejercicio 94. *Para cada* $n \in \omega$*, se definen* $A_n = \{\alpha : n + \alpha = \alpha\}$ *y* $A'_n = \{\alpha : n \cdot \alpha = \alpha\}$. *Demostrar que:*

(1) $A_0 = \mathbf{Ord} = A'_1$ *y* $A'_0 = 1$.

(2) *Si* $n \neq 0$*, entonces* $A_n = \mathbf{Ord} - \omega$.

(3) *Si* $n > 1$*, entonces* $A'_n = \{\omega \cdot \beta : \beta \geqslant 0\}$.

(1) Se tiene que

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ 0 + \alpha = \alpha\} = \mathbf{Ord} \\ A'_1 &= \{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ 1 \cdot \alpha = \alpha\} = \mathbf{Ord} \\ A'_0 &= \{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ 0 \cdot \alpha = \alpha\} = \{0\} = 1 \end{aligned}$$

(2) Supongamos que $n \in \omega - \{0\}$.

- $A_n \subseteq \mathbf{Ord} - \omega$, ya que si α es un ordinal que no pertenece a $\mathbf{Ord} - \omega$, entonces $\alpha \in \omega$. Luego $n + \alpha \neq \alpha$ (pues $n \neq 0$). Por tanto, $\alpha \notin A_n$.
- $\mathbf{Ord} - \omega \subseteq A_n$, ya que si $\alpha \in \mathbf{Ord} - \omega$, entonces $\omega \leqslant \alpha$. Por el teorema de la resta, existe un ordinal β tal que $\omega + \beta = \alpha$. Luego

  $$\alpha = \omega + \beta = (n + \omega) + \beta = n + (\omega + \beta) = n + \alpha$$

  Por tanto, $\alpha \in A_n$.

(3) Supongamos que $n \in \omega - \{0, 1\}$.

- Veamos que $A'_n \subseteq \{\omega \cdot \beta :\ \beta \geqslant 0\}$.
  Sea α un ordinal que no pertenece al conjunto $\{\omega \cdot \beta :\ \beta \geqslant 0\}$. Por el teorema de la división con resto (“dividimos"α por ω) existen $\ggg \in \mathbf{Ord}$ y $m \in \omega$ tales que $\alpha = \omega \cdot \ggg + m \wedge \ggg \leqslant \alpha \wedge m < \omega$. Entonces, $m > 0$. Luego,

  $$n \cdot \alpha = n \cdot (\omega \cdot \ggg + m) = n \cdot (\omega \cdot \ggg) + n \cdot m = \omega \cdot \ggg + n \cdot m > \omega \cdot \ggg + m = \alpha$$

  Por tanto, $\alpha \notin A'_n$.
- Veamos que $\{\omega \cdot \beta :\ \beta \geqslant 0\} \subseteq A'_n$.
  Si $\beta \in \mathbf{Ord}$, entonces $n \cdot (\omega \cdot \beta) = (n \cdot \omega) \cdot \beta = \omega \cdot \beta$. Por tanto, $\omega \cdot \beta \in A'_n$.

Ejercicio 95. *Probar por inducción débil en* **Ord** *que si $\alpha > 1$, entonces $\forall \beta \in$* **Ord** *$(\beta \leqslant \alpha^{\beta})$.*

Probemos el resultado por inducción débil en **Ord**, sobre la variable β.

Para ello, sea

$$A = \{\beta \in \mathbf{Ord} :\ \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha > 1 \to \beta \leqslant \alpha^{\beta})\}$$

$\boxed{0 \in A}$

Si $\alpha > 1$, entonces $0 \leqslant 1 = \alpha^0$.

$\boxed{\beta \in A \to \beta^+ \in A}$

Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\alpha > 1$. Entonces

$$\left.\begin{aligned} &\beta \in A \Longrightarrow \beta \leqslant \alpha^{\beta} \Longrightarrow \beta^+ \leqslant (\alpha^{\beta})^+ \\ &\beta < \beta^+ \overset{\alpha>1}{\Longrightarrow} \alpha^{\beta} < \alpha^{\beta^+} \Longrightarrow (\alpha^{\beta})^+ \leqslant \alpha^{\beta^+} \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, $\beta^+ \leqslant \alpha^{\beta^+}$.

$\boxed{\beta \text{ límite } \wedge \beta \subseteq A \to \beta \in A}$

Sea β un ordinal límite tal que $\beta \subseteq A$. Veamos que $\beta \in A$.

Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\alpha > 1$. Entonces

$$\alpha^{\beta} = \sup\{\alpha^{\ggg} : \ggg < \beta\} \overset{h.i.}{\geqslant} \sup\{\ggg : \ggg < \beta\} = \beta$$

Por tanto, $A =$ **Ord**.

Nota: Este resultado puede probarse directamente como sigue.

Si $\alpha > 1$, entonces la aplicación E_{α} es normal. Por tanto, E_{α} es creciente. Luego

$$\forall \beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \leqslant E_{\alpha}(\beta) = \alpha^{\beta})$$

Ejercicio 96. *Demostrar que si $n > 1$, entonces $n^{\omega} = \omega$.*

Supongamos que $n > 1$.

- Veamos que $\forall p \in \omega\ (n^p \in \omega)$.

  Por inducción débil en ω, sobre la variable p.

  $\boxed{p = 0}$

  Se tiene que $n^p = n^0 = 1 \in \omega$.

$\boxed{p \to p+1}$

Supongamos que $n^p \in \omega$. Entonces $n^{p+1} = n^p \cdot n \in \omega$.

- Veamos que $n^\omega = \omega$.

  Se verifica que $n^\omega = \sup\{n^p : p \in \omega\}$. Ahora bien, como hemos visto antes, ω es una cota superior del conjunto $\{n^p : p \in \omega\} = \omega$.

  Además, si $q \in \omega$, entonces

  $$q < q+1 \overset{n>1}{\leqslant} n^{q+1}$$

  Luego q no es cota superior de $\{n^p : p \in \omega\} = \omega$. En consecuencia,

  $$n^\omega = \sup\{n^p : p \in \omega\} = \omega$$

Ejercicio 97. *Demostrar que*

(1) $2^{\omega \cdot n} = \omega^n \qquad (\forall n \in \omega)$.

(2) $2^{\omega^{n+1}} = \omega^{\omega^n} \qquad (\forall n \in \omega)$.

(3) *Si $\alpha \in$ **Ord** es tal que $\alpha \geqslant \omega$, entonces $2^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}$.*

(1) Sea $n \in \omega$. Entonces,

$$2^{\omega \cdot n} = (2^\omega)^n = \omega^n$$

(2) Sea $n \in \omega$. Entonces,

$$2^{\omega^{n+1}} = 2^{\omega^{1+n}} = 2^{\omega \cdot \omega^n} = (2^\omega)^{\omega^n} = (\omega)^{\omega^n}$$

(3) Sea $\alpha \geqslant \omega$. Entonces existe $\beta \in$ **Ord** tal que $\alpha = \omega + \beta$. Luego

$$1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha$$

Por tanto

$$2^{\omega^\alpha} = 2^{\omega^{1+\alpha}} = 2^{\omega \cdot \omega^\alpha} = (2^\omega)^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}$$

Ejercicio 98. *Sean $p, q, n \in \omega$. Demostrar que:*

$$(\omega \cdot p + q) \cdot n = \begin{cases} q \cdot n, & si\ p = 0 \\ 0, & si\ p \neq 0 \wedge n = 0 \\ \omega \cdot p \cdot n + q, & si\ p \neq 0 \wedge n \neq 0 \end{cases}$$

Indicación: *Para $p > 0$ pruébese el resultado por inducción sobre n.*

Distingamos tres casos.

<u>Caso 1º:</u> Supongamos que $p = 0$.

En este caso, $(\omega \cdot p + q) \cdot n = (\omega \cdot 0 + q) \cdot n = (0 + q) \cdot n = q \cdot n$.

<u>Caso 2º:</u> Supongamos que $p \neq 0$ y $n = 0$.

En este caso, $(\omega \cdot p + q) \cdot n = (\omega \cdot p + q) \cdot 0 = 0$.

<u>Caso 3º:</u> Supongamos que $p \neq 0$ y $n \neq 0$.

En este caso, vamos a probar que

$$\forall n > 0 \, \forall p > 0 \, \forall q \, ((\omega \cdot p + q) \cdot n = (\omega \cdot p \cdot n + q))$$

Lo haremos por inducción débil en $\omega - \{0\}$, sobre la variable n.

$\boxed{n = 1}$

Sean $p > 0$ y $q \in \omega$. Entonces

$$(\omega \cdot p + q) \cdot 1 = \omega \cdot p + q = \omega \cdot p \cdot 1 + q$$

$\boxed{n \to n + 1}$

Sean $p > 0$ y $q \in \omega$. Entonces

$$\begin{aligned} (\omega \cdot p + q) \cdot (n + 1) &\overset{distrib.}{=} (\omega \cdot p + q) \cdot n + (\omega \cdot p + q) \cdot 1 \\ &\overset{h.i.}{=} (\omega \cdot p \cdot n + q) + (\omega \cdot p + q) \\ &\overset{asoc.}{=} \omega \cdot p \cdot n + (q + \omega \cdot p) + q \\ &= \omega \cdot p \cdot n + \omega \cdot p + q \\ &= (\omega \cdot p \cdot n + \omega \cdot p) + q \\ &\overset{distrib.}{=} \omega \cdot p \cdot (n + 1) + q \end{aligned}$$

Ejercicio 99. *Demostrar que si $\alpha < \beta$ y γ es sucesor, entonces $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.*

Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que $\alpha < \beta$. Sea $\ggg \in$ **Ord** tal que existe $\delta \in$ **Ord** verificando que $\ggg = \delta^+$. Entonces

$$\alpha \cdot \ggg = \alpha \cdot \delta^+ = \alpha \cdot \delta + \alpha \overset{\alpha<\beta}{<} \alpha \cdot \delta + \beta \leqslant \beta \cdot \delta + \beta = \beta \cdot \delta^+ = \beta \cdot \ggg$$

Notas:

1. Se tiene que $\alpha < \beta \wedge \ggg \neq 0 \Longrightarrow \ggg \cdot \alpha < \ggg \cdot \beta$ (monotonía fuerte del producto de ordinales, por la izquierda). Pues bien, en el presente ejercicio, hemos probado la monotonía fuerte del producto por la derecha, para ordinales sucesores.

2. Obviamente, el resultado del ejercicio es falso para $\ggg = 0$.

3. El resultado del ejercicio es falso para ordinales límites, en general, ya que $1 < 2 \wedge 1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega$.

Ejercicio 100. *Demostrar que si $\alpha > 1$ y $\beta > 1$, entonces $\alpha + \beta \leqslant \alpha \cdot \beta$.*

Probaremos dicho resultado por inducción débil en la clase **Ord** $- \{0, 1\}$, sobre la variable β. Es decir, aplicaremos inducción débil a la fórmula

$$\varphi(\beta) \equiv \forall \alpha > 1 \; (\alpha + \beta \leqslant \alpha \cdot \beta)$$

$\boxed{\beta = 2}$

Sea $\alpha > 1$. Entonces

$$\alpha + \beta = \alpha + 2 \overset{1<\alpha}{\leqslant} \alpha + \alpha = \alpha \cdot 2 = \alpha \cdot \beta$$

$\boxed{\beta \geqslant 2 \to \beta^+}$

Sea $\beta \geqslant 2$ y supongamos cierto $\varphi(\beta)$. Veamos que se verifica $\varphi(\beta^+)$. Para ello, sea $\alpha > 1$. Entonces,

$$\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+ \overset{h.i.}{\leqslant} (\alpha \cdot \beta)^+ = \alpha \cdot \beta + 1 \overset{1<\alpha}{<} \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot \beta^+$$

$\boxed{\beta \geqslant 2, \beta \text{ límite }, < \beta \to \beta}$

Sea $\beta \geqslant 2$ un ordinal límite y supongamos cierto $\varphi(\ggg)$, para cada $\ggg$ tal que $1 < \ggg < \beta$. Veamos que se verifica $\varphi(\beta)$. Para ello, sea $\alpha > 1$. Entonces

$$\alpha + \beta = \sup \{\alpha + \ggg : \ggg < \beta\} \overset{h.i.}{\leqslant} \sup \{\alpha \cdot \ggg : \ggg < \beta\} = \alpha \cdot \beta$$

Ejercicio 101. *Hallar, en cada caso, el cociente y resto de dividir α por β:*

(1) $\alpha = \omega^2 + \omega \cdot 5 + 3$ *y* $\beta = \omega^2 + 1$.

(2) $\alpha = \omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2$ *y* $\beta = \omega^5$.

(1) Se tiene que $\omega^2 + \omega \cdot 5 + 3 = (\omega^2 + 1) \cdot 1 + (\omega \cdot 5 + 3)$. Luego, al dividir $\omega^2 + \omega \cdot 5 + 3$ por $\omega^2 + 1$, el cociente es 1 y el resto es $\omega \cdot 5 + 3$.

(2) Se tiene que $\omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2 = \omega^5 \cdot \omega^\omega + (\omega^3 + \omega \cdot 3 + 2)$. Luego, al dividir $\omega^\omega + \omega^3 + \omega \cdot 3 + 2$ por ω^5, el cociente es ω^ω y el resto es $\omega^3 + \omega \cdot 3 + 2$.

Ejercicio 102. *Demostrar que si $\alpha > 0$ y β es límite, entonces $\alpha^+ \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$.*

Veamos que $\alpha^+ \cdot \beta \leqslant \alpha \cdot \beta$.

$$\begin{aligned} 0 < \alpha \quad &\overset{mon.fuerte}{\Longrightarrow} \quad \alpha + 0 < \alpha + \alpha \Longrightarrow \alpha^+ \leqslant \alpha \cdot 2 \\ &\overset{mon.debil}{\Longrightarrow} \quad \alpha^+ \cdot \beta \leqslant (\alpha \cdot 2) \cdot \beta = \alpha \cdot (2 \cdot \beta) = \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

Veamos que $\alpha \cdot \beta \leqslant \alpha^+ \cdot \beta$. Se tiene que

$$\alpha < \alpha^+ \overset{mon.debil}{\Longrightarrow} \alpha \cdot \beta \leqslant \alpha^+ \cdot \beta$$

Ejercicio 103. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Probar que si α es límite y $\beta \neq 0$, entonces α^β es límite ¿Es cierto el recíproco?*

Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que α es límite y $\beta \neq 0$.

Caso 1º: Supongamos que β es un ordinal límite.

En este caso, al ser la aplicación E_α normal (pues $\alpha > 1$, ya que α es límite) resulta que $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$ es límite.

Caso 2º: Supongamos que β es un ordinal sucesor.

Sea $\ggg$ un ordinal tal que $\beta = \ggg^+$. Entonces

$$\alpha^\beta = \alpha^{\ggg^+} = \alpha^{\ggg} \cdot \alpha = \Pi_{\alpha^{\ggg}}(\alpha)$$

Ahora bien, la aplicación $\Pi_{\alpha^{\ggg}}$ es normal ya que $\alpha^{\ggg} \neq 0$, por ser α límite. En consecuencia, $\Pi_{\alpha^{\ggg}}(\alpha) = \alpha^\beta$ es un ordinal límite.

Veamos que, en cambio, el recíproco es **falso**. Es decir, veamos que existen ordinales α, β tales que α^β es límite y α es sucesor.

En efecto: sean $\alpha = 2$ y $\beta = \omega$. Entonces $\alpha^\beta = 2^\omega = \omega$ es un ordinal límite, pero $\alpha = 2$ es un ordinal sucesor.

Ejercicio 104. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que $\alpha < \beta$. Sean $p, q \in \omega$ tales que $q > 0$. Probar que $\omega^\alpha \cdot p + \omega^\beta \cdot q = \omega^\beta \cdot q$.*

Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que $\alpha < \beta$ y $p, q \in \omega$ tales que $q > 0$. Distingamos dos casos:

Caso 1º: Supongamos que $p = 0$.

En este caso, $\omega^\alpha \cdot p + \omega^\beta \cdot q = \omega^\alpha \cdot 0 + \omega^\beta \cdot q = \omega^\beta \cdot q$.

Caso 2º: Supongamos que $p \neq 0$.

Como $\alpha < \beta$, por el teorema de la resta existe $\ggg > 0$ tal que $\alpha + \ggg = \beta$. Luego,

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha} \cdot p + \omega^{\beta} \cdot q &= \omega^{\alpha} \cdot p + \omega^{\alpha + \ggg} \cdot q = \omega^{\alpha} \cdot p + \omega^{\alpha} \cdot \omega^{\ggg} \cdot q \\ &= \omega^{\alpha} \cdot (p + \omega^{\ggg} \cdot q) \end{aligned}$$

Ahora bien, $\omega^{\ggg} \cdot q \geqslant \omega \Longrightarrow \omega^{\ggg} \cdot q \in \mathbf{Ord} - \omega = A_p$ (ejercicio 94, apartado 2). Por tanto,

$$\begin{aligned} \omega^{\alpha} \cdot p + \omega^{\beta} \cdot q &= \omega^{\alpha} \cdot (p + \omega^{\ggg} \cdot q) = \omega^{\alpha} \cdot \omega^{\ggg} \cdot q \\ &= \omega^{\alpha + \ggg} \cdot q = \omega^{\beta} \cdot q \end{aligned}$$

Ejercicio 105. *Sean $k \in \omega - \{0\}$, $\gamma_0, \ldots, \gamma_k \in \mathbf{Ord}$ y $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ tales que $\gamma_0 > \ldots > \gamma_k$ y $n_i > 0$ $(\forall i \leqslant k)$. Demostrar que :*

(1) *Si $p \in \omega - \{0\}$, entonces*

$$(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot p = \omega^{\gamma_0} \cdot n_0 \cdot p + \omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k$$

(2) *Si $\gamma \in \mathbf{Ord} - \{0\}$, entonces*

$$(\omega^{\gamma_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k) \cdot \omega^{\gamma} = \omega^{\gamma_0 + \gamma}$$

(1) Vamos a probar este resultado por inducción débil en $\omega - \{0\}$, sobre la variable p.

$\boxed{p = 1}$

En este caso, el resultado es trivial.

$\boxed{p \to p + 1}$

Se verifica que:

$$\begin{aligned} &(\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k) \cdot (p+1) = \\ &(\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k) \cdot p + \\ &(\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k) \overset{h.i.}{=} \\ &\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 \cdot p + (\omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k + \omega^{\ggg_0} \cdot n_0) + \\ &\omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k = \\ &\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 \cdot p + \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k = \\ &\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 \cdot (p+1) + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k. \end{aligned}$$

(2) Probemos este resultado estableciendo las dos desigualdades.

Por una parte,

$$\begin{aligned}(\omega^{\ggg_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\ggg_k}\cdot n_k)\cdot\omega^{\ggg} &\leqslant (\omega^{\ggg_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\ggg_0}\cdot n_k)\cdot\omega^{\ggg}\\ &= \omega^{\ggg_0}\cdot(n_0+\cdots+n_k)\cdot\omega^{\ggg}\\ &= \omega^{\ggg_0}\cdot\omega^{\ggg}=\omega^{\ggg_0+\ggg}\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$(\omega^{\ggg_0}\cdot n_0+\cdots+\omega^{\ggg_k}\cdot n_k)\cdot\omega^{\ggg}\geqslant(\omega^{\ggg_0}\cdot n_0)\cdot\omega^{\ggg}=\omega^{\ggg_0}\cdot\omega^{\ggg}=\omega^{\ggg_0+\ggg}$$

Nota: Es interesante observar que, a partir de este ejercicio y el anterior, es posible sumar y multiplicar ordinales expresados en forma normal de Cantor, de tal manera que el resultado se obtiene en la forma normal de Cantor.

Ejercicio 106. *Simplificar las siguientes expresiones:*

(1) $(\omega^2+\omega\cdot 2+2)+(\omega+1)$.

(2) $(\omega^7+\omega^5+\omega^3\cdot 2+\omega\cdot 10+3)+(\omega^4+\omega^2\cdot 2+2)$.

(1)

$$\begin{aligned}(\omega^2+\omega\cdot 2+2)+(\omega+1) &= \omega^2+\omega\cdot 2+(2+\omega)+1\\ &= \omega^2+\omega\cdot 2+\omega+1\\ &= \omega^2+\omega\cdot(2+1)+1\\ &= \omega^2+\omega\cdot 3+1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(\omega^7+\omega^5+\omega^3\cdot 2+\omega\cdot 10+3)+(\omega^4+\omega^2\cdot 2+2)=\\ &\omega^7+\omega^5+(\omega^3\cdot 2+\omega\cdot 10+3+\omega^4)+\omega^2\cdot 2+2=\\ &\omega^7+\omega^5+\omega^4+\omega^2\cdot 2+2\end{aligned}$$

Ejercicio 107. *Expresar los siguientes ordinales en la forma normal de Cantor:*

(**1**)	$(\omega+1)^2$	(**2**)	$(\omega+1)(\omega^2+1)$
(**3**)	$(\omega^2+1)(\omega+1)$	(**4**)	$(\omega^3+\omega)^5$
(**5**)	$(\omega^5+\omega^3)^3$	(**6**)	$(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)^2+\omega^5+3$

(1)

$$\begin{aligned}(\omega+1)^2 &= (\omega+1)\cdot(\omega+1)=(\omega+1)\cdot\omega+(\omega+1)\cdot 1\\ &= \omega^{1+1}+(\omega+1)=\omega^2+\omega+1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(\omega+1)\cdot(\omega^2+1) &= (\omega+1)\cdot\omega^2+(\omega+1)\cdot 1\\ &= \omega^{1+2}+(\omega+1)=\omega^3+\omega+1\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(\omega^2+1)\cdot(\omega+1) &= (\omega^2+1)\cdot\omega+(\omega^2+1)\cdot 1\\ &= \omega^{2+1}+(\omega^2+1)=\omega^3+\omega^2+1\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(\omega^3+\omega)^5 &= (\omega\cdot(\omega^2+1))^5\\ &= \omega\cdot((\omega^2+1)\cdot\omega))^4\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega\cdot\omega^3\cdot\omega^3\cdot\omega^3\cdot\omega^3\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega^{13}\cdot(\omega^2+1)=\omega^{15}+\omega^{13}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}(\omega^5+\omega^3)^3 &= (\omega^3\cdot(\omega^2+1))^3\\ &= \omega^3\cdot(\omega^2+1)\cdot\omega^3\cdot(\omega^2+1)\cdot\omega^3\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega^3\cdot\omega^5\cdot\omega^5\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega^{13}\cdot(\omega^2+1)=\omega^{15}+\omega^{13}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}&(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)^2+\omega^5+3=\\ &(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)\cdot(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)+\omega^5+3=\\ &(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)\cdot\omega^3\cdot 4+(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)\cdot\omega^2\cdot 5+\\ &(\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 5+2)\cdot 2+\omega^5+3=\\ &\omega^6\cdot 4+\omega^5\cdot 5+(\omega^3\cdot 4\cdot 2+\omega^2\cdot 5+2)+\omega^5+3=\\ &\omega^6\cdot 4+\omega^5\cdot 5+\omega^5+3=\omega^6\cdot 4+\omega^5\cdot 6+3\end{aligned}$$

Ejercicio 108. *Calcular la forma normal de Cantor de*

$$(\omega^4\cdot 2+\omega^2)^2+(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega\cdot(\omega^2\cdot 2+\omega)^2+(\omega^2\cdot 2+\omega)^2\cdot(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega$$

Calculemos $(\omega^4\cdot 2+\omega^2)^2$

$$\begin{aligned}(\omega^4\cdot 2+\omega^2)^2 &= (\omega^4\cdot 2+\omega^2)\cdot(\omega^4\cdot 2+\omega^2)\\ &= (\omega^4\cdot 2+\omega^2)\cdot\omega^4\cdot 2+(\omega^4\cdot 2+\omega^2)\cdot\omega^2\\ &= \omega^{4+4}\cdot 2+\omega^{4+2}=\omega^8\cdot 2+\omega^6\end{aligned}$$

Calculemos $(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega$

Se tiene que $(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega=(\omega^3+\omega)^\omega$. Ahora bien

$$\begin{aligned}(\omega^3+\omega)^\omega\leqslant(\omega^4)^\omega=\omega^{4\cdot\omega}=\omega^\omega\\ (\omega^3+\omega)^\omega\geqslant(\omega^3)^\omega=\omega^{3\cdot\omega}=\omega^\omega\end{aligned}$$

Por tanto, $(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega = \omega^\omega$.

Calculemos $(\omega^2\cdot 2+\omega)^2$

$$\begin{aligned}(\omega^2\cdot 2+\omega)^2 &= (\omega^2\cdot 2+\omega)\cdot(\omega^2\cdot 2+\omega)\\ &= (\omega^2\cdot 2+\omega)\cdot\omega^2\cdot 2+(\omega^2\cdot 2+\omega)\cdot\omega\\ &= \omega^{2+2}\cdot 2+\omega^{2+1}=\omega^4\cdot 2+\omega^3\end{aligned}$$

Calculemos la forma normal de Cantor del ordinal del enunciado

$$\begin{aligned}&(\omega^4\cdot 2+\omega^2)^2+(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega(\omega^2\cdot 2+\omega)^2+(\omega^2\cdot 2+\omega)^2(\omega^2+\omega^3+\omega)^\omega=\\ &\omega^8\cdot 2+\omega^6+\omega^\omega\cdot(\omega^4\cdot 2+\omega^3)+(\omega^4\cdot 2+\omega^3)\cdot\omega^\omega=\\ &\omega^8\cdot 2+\omega^6+\omega^{\omega+4}\cdot 2+\omega^{\omega+3}+\omega^{4+\omega}=\\ &\omega^{\omega+4}\cdot 2+\omega^{\omega+3}+\omega^{4+\omega}=\omega^{\omega+4}\cdot 2+\omega^{\omega+3}+\omega^\omega\end{aligned}$$

Ejercicio 109. *Hallar la forma normal de Cantor del ordinal* $(\omega+1)^{\omega+1}\cdot 3^\omega$

En primer lugar, recordemos que $3^\omega = \sup\{3^n :\ n\in\omega\}=\omega$.

Vamos a hallar $(\omega+1)^{\omega+1}$.

– Se tiene que $(\omega+1)^\omega=\omega$, ya que $\omega^\omega \leqslant (\omega+1)^\omega \leqslant (\omega^2)^\omega=\omega^{2\cdot\omega}=\omega^\omega$.
  Luego, $(\omega+1)^{\omega+1}=(\omega+1)^\omega\cdot(\omega+1)=\omega^\omega\cdot(\omega+1)=\omega^{\omega+1}+\omega^\omega$.

Por tanto, $(\omega+1)^{\omega+1}\cdot 3^\omega=(\omega^{\omega+1}+\omega^\omega)\cdot\omega \overset{ej.\ 105}{=} \omega^{\omega+1+1}=\omega^{\omega+2}$.

Ejercicio 110. *Hallar la forma normal de Cantor del ordinal*

$$(\omega^3+\omega)^\omega\cdot(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)^2+\omega^4+5$$

En primer lugar, veamos que $(\omega^3+\omega)^\omega=\omega^\omega$.

– En efecto: se tiene que

$$\left.\begin{aligned}(\omega^3+\omega)^\omega \geqslant (\omega^3)^\omega=\omega^{3\cdot\omega}=\omega^\omega\\ (\omega^3+\omega)^\omega \leqslant (\omega^4)^\omega=\omega^{4\cdot\omega}=\omega^\omega\end{aligned}\right\}$$

A continuación vamos a hallar $(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)^2$.

$$\begin{aligned}&(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)^2=(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)\cdot(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)=\\ &(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)\cdot\omega^2\cdot 3+(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)\cdot\omega\cdot 4+(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)=\\ &\omega^{2+2}\cdot 3+\omega^{2+1}\cdot 4+(\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1)=\\ &\omega^4\cdot 3+\omega^3\cdot 4+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 4+1.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&(\omega^3 + \omega)^\omega \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 4 + 1)^2 + \omega^4 + 5 = \\
&\omega^\omega \cdot (\omega^4 \cdot 3 + \omega^3 \cdot 4 + \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 4 + 1) + \omega^4 + 5 = \\
&\omega^{\omega+4} \cdot 3 + \omega^{\omega+3} \cdot 4 + \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 4 + \omega^\omega + \omega^4 + 5.
\end{aligned}$$

Ejercicio 111. *Hallar la forma normal de Cantor del ordinal*

$$\bigcap\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$$

En primer lugar vamos a ver que la clase $\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$ es no vacía (concretamente vamos a probar que ϵ_0 es un elemento de dicha clase).

En efecto: como $1 < \epsilon_0$, de la monotonía fuerte de la exponenciación resulta que $\epsilon_0 < \epsilon_0^{\epsilon_0}$. Pero ϵ_0 es un ordinal límite, luego $\epsilon_0 + 1 < \epsilon_0^{\epsilon_0}$. Por tanto, $\epsilon_0 \in \{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$.

En consecuencia,

$$\bigcap\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\} = \ \min\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$$

Pues bien, vamos a probar que dicho mínimo es, precisamente, ϵ_0.

Hemos visto ya que $\epsilon_0 \in \{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$. Veamos que ϵ_0 es un cota inferior de la clase $\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$. Para ello, basta probar que

$$\alpha < \epsilon_0 \Longrightarrow \alpha \notin \{\alpha \ :\alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$$

Sea $\alpha < \epsilon_0$. Por definición de ϵ_0 existirá $p \in \omega$ tal que

$$\alpha < \omega^{\boxed{\omega^{\overset{(p)}{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}}$$

Notaremos por δ_p el ordinal

$$\boxed{\omega^{\overset{(p)}{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}}$$

Así pues, con esta notación, se tiene que $\alpha < \omega^{\delta_p}$.

- **Aserto 1:** $\beta <\ggg \Longrightarrow \beta^\beta \leqslant \ggg^{\ggg}$.

  Prueba: Supongamos que $\beta <\ggg$. Entonces, de la monotonía débil de la exponenciación resulta que $\beta^\beta \leqslant \ggg^\beta$. Por otra parte, se tiene que $\ggg^\beta \leqslant \ggg^{\ggg}$ (si $\ggg = 1$ se verifica la igualdad, y si $\ggg > 1$ entonces el resultado sigue de la monotonía fuerte de la exponenciación). En consecuencia, $\beta^\beta \leqslant \ggg^\beta \leqslant \ggg^{\ggg}$.

Teniendo presente que $\alpha < \omega^{\delta_p}$, del aserto 1 resulta que $\alpha^\alpha \leqslant (\omega^{\delta_p})^{\omega^{\delta_p}}$ $(\star)$.

- **Aserto 2:** Para cada $p \in \omega$ se tiene que $(\omega^{\delta_p})^{\omega^{\delta_p}} \leqslant \omega^{\delta_{p+1}}$.

  Prueba: Por inducción débil en ω, sobre la variable p.
  Para $p = 0$ el resultado es trivial, ya que $(\omega^0)^{\omega^0} = 1 < \omega^\omega = \omega^{\delta_1}$.
  Supongamos que el resultado es cierto para p. Entonces

$$\begin{aligned}(\omega^{\delta_{p+1}})^{\omega^{\delta_{p+1}}} &= \omega^{\delta_{p+1}\cdot\omega^{\delta_{p+1}}} = \omega^{\omega^{\delta_p}\cdot\omega^{\delta_{p+1}}} = \omega^{\omega^{\delta_p+\delta_{p+1}}} \\ &\leqslant \omega^{\omega^{\delta_p\cdot\delta_{p+1}}} = \omega^{(\omega^{\delta_p})^{\delta_{p+1}}} = \omega^{(\omega^{\delta_p})^{\omega^{\delta_p}}} \\ &\overset{h.i.}{\leqslant} \omega^{\omega^{\delta_{p+1}}} = \omega^{\delta_{p+2}}\end{aligned}$$

Del aserto (2) y de la relación $(\star)$ se deduce que $\alpha^\alpha \leqslant \omega^{\delta_{p+1}} < \epsilon_0 < \epsilon_0 + 1$.
Así pues, hemos probado que

$$\bigcap\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\} = \epsilon_0$$

Como $\epsilon_0 = \omega^{\epsilon_0}$, la forma normal de Cantor del ordinal $\bigcap\{\alpha \ : \ \alpha^\alpha > \epsilon_0 + 1\}$ es ω^{ϵ_0}.

Ejercicio 112. *Probar la veracidad o falsedad de las siguientes fórmulas:*

(1) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha < \omega^2 \to \alpha + \omega^2 = \omega^2)$.

(2) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha < \omega^2 + 1 \to \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + 1)$.

(1) **Verdadera.** En efecto: si $\alpha < \omega^2$, entonces por el teorema de la división (de α por ω) existen $p, q \in \omega$ tales que $\alpha = \omega \cdot p + q$. Luego,

$$\alpha + \omega^2 = (\omega \cdot p + q) + \omega^2 = \omega^2$$

(2) **Falsa.** En efecto: consideremos $\alpha = \omega^2$. Entonces

$$\alpha < \omega^2 + 1 \wedge \alpha + \omega^2 + 1 = \omega^2 + \omega^2 + 1 = \omega^2 \cdot 2 + 1 \neq \omega^2 + 1$$

Ejercicio 113. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. *Consideremos el conjunto*

$$a = \{f : (f : \beta \to \alpha) \land (\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\} \text{ es finito})\}$$

y la relación R *en* a *definida por*

$$fRg \leftrightarrow \exists\gamma(\gamma = sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\} \land f(\gamma) < g(\gamma))$$

Demostrar que:

(1) $\langle a, R\rangle$ *es un conjunto bien ordenado.*

(2) $t.o.(\langle a, R\rangle) = \alpha^\beta$.

Indicación: *En* **(2)** *pruébese que la aplicación* $F : a \longrightarrow \alpha^\beta$ *definida por*

$$F(f) = \alpha^{\ggg_f} \cdot f(\ggg_f) + \cdots + \alpha \cdot f(1) + f(0)$$

en donde $\ggg_f = sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq 0\}$ *es un isomorfismo de* $\langle a, R\rangle$ *en* $\langle \alpha^\beta, \in\rangle$.

Resolveremos este ejercicio de la siguiente manera:

(a) Probaremos que $\langle a, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

(b) Obtendremos un isomorfismo, F, de $\langle a, R\rangle$ en $\langle \alpha^\beta, \in\rangle$ (de donde se deduce que $\langle a, R\rangle$ es un conjunto bien ordenado).

(c) Del apartado (b) se concluye que el t.o.$(\langle a, R\rangle) = \alpha^\beta$.

Desde luego, podemos suponer que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$ (ya que si $\beta = 0$, entonces $a = \{0\}$ y si $\alpha = 0 \land \beta \neq 0$, entonces $a = \emptyset$: en ambos casos, el resultado es trivial).

(a) Veamos que $\langle a, R\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado.

- R es irreflexiva en a. En efecto: sea $f \in a$. Entonces

$$\sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq f(\delta)\} = \sup(\emptyset) = 0$$

Además, $f(0) \not< f(0)$. Luego $\langle f, f\rangle \notin R$.

- R es transitiva en a. En efecto: sean $f, g, h \in a$ tales que fRg y gRh. Sean

$$\ggg = \sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\} \text{ y } \ggg' = \sup\{\delta \in \beta : g(\delta) \neq h(\delta)\}$$

Se tiene que $f(\ggg) < g(\ggg)$ y $g(\ggg') < h(\ggg')$.

Caso 1º: Supongamos que $\ggg \leqslant \ggg'$.
En este caso, $\sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq h(\delta)\} = \ggg'$. Además, $f(\ggg') \leqslant g(\ggg') < h(\ggg')$. Por tanto, fRh.

Caso 2º: Supongamos que $\ggg' < \ggg$.
En este caso, $\sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq h(\delta)\} = \ggg$. Además, $f(\ggg) < g(\ggg) = h(\ggg)$. Por tanto, fRh.

- R es conexa en a. En efecto: sean $f, g \in a$ tales que $f \neq g$. Entonces $\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\}$ es un subconjunto no vacío y finito de β. Luego existe $\ggg = \sup\{\delta \in \beta : f(\delta) \neq g(\delta)\}$ y $\ggg \in \beta$. Por tanto,
  - O bien $f(\ggg) < g(\ggg)$, en cuyo caso fRg.
  - O bien $g(\ggg) < f(\ggg)$, en cuyo caso gRf.

(b) Vamos a probar que $\langle a, R\rangle \cong \langle \alpha^\beta, \in\rangle$. Para ello, si $f \in a$, entonces notaremos $\ggg_f = \sup\{\delta \in \beta :\ f(\delta) \neq 0\}$. Teniendo presente que el conjunto $\{\delta \in \beta :\ f(\delta) \neq 0\}$ es finito, resulta que $\ggg_f \in \beta$.

Consideremos la aplicación $F : a \to \alpha^\beta$ definida así

$$F(f) = \alpha^{\ggg_f} \cdot f(\ggg_f) + \cdots + \alpha^2 \cdot f(2) + \alpha \cdot f(1) + f(0)$$

- F es un homomorfismo de $\langle a, R\rangle$ en $\langle \alpha^\beta, \in\rangle$. En efecto: sean $f, g \in a$ tales que fRg.

  Aserto: $\ggg_f \leqslant \ggg_g$.

  Prueba: Supongamos que $\ggg_g < \ggg_f$. Entonces $f(\ggg_f) > 0 = g(\ggg_f)$. Además, $\ggg' > \ggg_f \Longrightarrow f(\ggg') = 0 = g(\ggg')$. Luego, $\ggg_f = \sup\{\delta \in \beta :\ f(\delta) \neq g(\delta)\}$. Por tanto, resultaría que gRf. Lo que no es posible por la irreflexividad y transitividad de R.

  Si $\ggg_f < \ggg_g$, entonces

$$\begin{aligned} F(f) &= \alpha^{\ggg_f} \cdot f(\ggg_f) + \cdots + \alpha \cdot f(1) + f(0) < \alpha^{\ggg_g} \\ &\leqslant \alpha^{\ggg_g} \cdot g(\ggg_g) + \cdots + \alpha \cdot g(1) + g(0) = F(g). \end{aligned}$$

  Si $\ggg_f = \ggg_g$ y notamos $\ggg = \sup\{\delta \in \beta :\ f(\delta) \neq g(\delta)\}$, entonces $\ggg \leqslant \ggg_f$ y $f(\ggg) < g(\ggg)$. Luego,

$$\begin{aligned} &F(f) = \\ &= \alpha^{\ggg_f} \cdot f(\ggg_f) + \cdots + \alpha^{\ggg} \cdot f(\ggg) + \cdots + \alpha \cdot f(1) + f(0) \\ &= \alpha^{\ggg_g} \cdot g(\ggg_g) + \cdots + \alpha^{\ggg+1} \cdot g(\ggg+1) + \alpha^{\ggg} \cdot f(\ggg) + \cdots + \alpha \cdot f(1) + f(0) \\ &< \alpha^{\ggg_g} \cdot g(\ggg_g) + \cdots + \alpha^{\ggg+1} \cdot g(\ggg+1) + \alpha^{\ggg} \cdot g(\ggg) \\ &\leqslant \alpha^{\ggg_g} \cdot g(\ggg_g) + \cdots + \alpha^{\ggg+1} \cdot g(\ggg+1) + \alpha^{\ggg} \cdot g(\ggg) + \cdots + \alpha \cdot g(1) + g(0) \\ &= F(g) \end{aligned}$$

- F es una aplicación suprayectiva de a en α^β. Observemos en primer lugar que si φ es la aplicación idénticamente nula de β en α, entonces $F(\varphi) = 0$.
  Sea $\lambda \in \alpha^\beta - \{0\}$. Entonces existen $k \in \omega$ y $\ggg_0, \dots, \ggg_k$, $\delta_0, \dots, \delta_k$ tales que $\lambda = \alpha^{\ggg_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\ggg_k} \cdot \delta_k \wedge \ggg_0 > \ldots > \ggg_k \wedge (\forall i \leqslant k)\ (0 < \delta_i < \alpha)$.
  Se tiene que $\ggg_0 < \beta$, ya que
  $$\alpha^{\ggg_0} \leqslant \alpha^{\ggg_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\ggg_k} \cdot \delta_k = \lambda < \alpha^\beta \Longrightarrow \ggg_0 < \beta$$
  Consideremos la aplicación $g : \beta \to \alpha$ definida así
  $$\begin{cases} g(\ggg_i) = \delta_i & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ g(\rho) = 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$
  Entonces $\ggg_g = \ggg_0$ y
  $$\begin{aligned} F(g) &= \alpha^{\ggg_g} \cdot g(\ggg_g) + \cdots + \alpha \cdot g(1) + g(0) \\ &= \alpha^{\ggg_0} \cdot \delta_0 + \cdots + \alpha^{\ggg_k} \cdot \delta_k = \lambda \end{aligned}$$

En consecuencia, la aplicación F es un isomorfismo de $\langle a, R\rangle$ en $\langle \alpha^\beta, \in\rangle$.

Ejercicio 114. *Consideremos las funciones $F, G : Ord \to Ord$ definidas por $F(\alpha) = \bigcup\{\beta \in \alpha : \beta \notin \omega\}$ y $G(\alpha) = \omega^{1+\alpha}$, para cada $\alpha \in$* **Ord**.

(1) *Determinar si dichas funciones son o no crecientes, continuas y normales.*

(2) *Sean $A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F(\alpha) = \alpha\}$ y $B = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : G(\alpha) = \alpha\}$. Calcular $\bigcup A$, $\bigcup B$, $\bigcap A$ e $\bigcap B$.*

(3) *Sea $C = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F(\alpha) = G(\alpha)\}$. Hallar $\bigcup C$ e $\bigcap C$.*

(1) Vamos a ver que F no es creciente pero, en cambio, sí es continua.

- F no es creciente, ya que $F(1) = \bigcup\{\beta \in 1 : \beta \notin \omega\} = \bigcup(1 - \omega) = \emptyset$ y $F(2) = \bigcup(2 - \omega) = \emptyset$ (obsérvese que $F(n) = \bigcup(n - \omega) = \emptyset$, para cada $n \in \omega$).
- Veamos que F es continua. En efecto: sea α un ordinal límite.
  Caso 1º: Supongamos que $\alpha = \omega$. Entonces
  $$F(\alpha) = \bigcup(\omega - \omega) = \emptyset = \sup\{F(n) : n \in \omega\}$$
  Caso 2º: Supongamos que $\alpha > \omega$.
  Entonces, por una parte $F(\alpha) = \bigcup(\alpha - \omega) = \alpha$. Por otra, calculemos $\sup\{F(\beta) : \beta \in \alpha\} = \sup\{\bigcup(\beta - \omega) : \beta \in \alpha\}$.

- $\star$ $\sup\{\bigcup(\beta-\omega) : \beta\in\alpha\}\subseteq\alpha$. En efecto: si $\beta<\alpha$, entonces $\beta-\omega\subseteq\alpha-\omega$. Luego, $\bigcup(\beta-\omega)\subseteq\bigcup(\alpha-\omega)=\alpha$.
- $\star$ $\alpha\subseteq\sup\{\bigcup(\beta-\omega) : \beta\in\alpha\}$. En efecto: sea $\ggg\in\alpha$.
  - Si $\ggg<\omega$ entonces $\ggg\in\bigcup((\omega+1)-\omega)=\bigcup\{\omega\}=\omega$. Como $\omega+1\in\alpha$ se deduce que $\ggg\in\sup\{\bigcup(\beta-\omega) : \beta\in\alpha\}$.
  - Si $\ggg\geqslant\omega$, entonces $\ggg\in\bigcup((\ggg+2)-\omega)$ (pues $\ggg\in\ggg+1\in\ggg+2\wedge\ggg+1\notin\omega$) y $\ggg+2<\alpha$. Luego,

$$\ggg\in\ \sup\{\bigcup(\beta-\omega) : \beta\in\alpha\}$$

La función G es normal. En efecto, para cada ordinal α se verifica que

$$G(\alpha)=\omega^{1+\alpha}=E_\omega(1+\alpha)=E_\omega(\Sigma_1(\alpha))$$

Es decir, $G=E_\omega\circ\Sigma_1$. Luego, al ser composición de funciones normales, G es normal.

(2) Respecto de la función F, hemos observado anteriormente que si $\alpha\leqslant\omega$, entonces $F(\alpha)=0$. Además

- $\star$ Si $\alpha=\beta+1>\omega$, entonces $F(\alpha)=\bigcup(\alpha-\omega)=\bigcup((\beta+1)-\omega)=\beta$.
- $\star$ Si α es un ordinal límite, $\alpha>\omega$, entonces

$$F(\alpha)=\bigcup(\alpha-\omega)=\bigcup(\alpha)=\alpha$$

Por tanto,

$$A=\{\alpha\in\mathbf{Ord} :\ F(\alpha)=\alpha\}=\{0\}\cup\{\alpha:\alpha>\omega\wedge\alpha\ \text{ ordinal límite}\}$$

En consecuencia, $\bigcap A=\emptyset$ y $\bigcup A=\mathbf{Ord}$.

Por otra parte, como la función G es normal resulta que la clase de puntos fijos de G es propia (ejercicio 82, apartado 1). Por tanto, $\bigcup B=\mathbf{Ord}$ (ejercicio 50). Además, como la clase B es no vacía resulta que $\bigcap B=\text{mín}B$. Es decir, $\bigcap B=\text{mín}B$ es el menor punto fijo de G.

Consideremos la aplicación $h:\omega\to\mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0)=0$
$h(1)=G(h(0))=G(0)=\omega^1=\omega$
$h(2)=G(h(1))=\omega^{1+\omega}=\omega^\omega$
$h(3)=G(h(2))=\omega^{1+\omega^\omega}=\omega^{\omega^\omega}$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

Es fácil ver, por inducción débil en ω, que para cada $n \in \omega$ se verifica:

$$h(n+1) = \omega^{\boxed{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}\,(n)}}$$

Por tanto, el menor punto fijo de G es $\sup\{h(n) : n \in \omega\} = \epsilon_0$. Es decir, $\bigcap B = \epsilon_0$.

(3) Vamos a calcular

$$C = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F(\alpha) = G(\alpha)\} = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \bigcup(\alpha - \omega) = \omega^{1+\alpha}\}$$

Para ello, sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces

- Si $\alpha \leqslant \omega$, entonces $F(\alpha) = 0 \neq \omega^{1+\alpha} = G(\alpha)$. Luego, $\alpha \notin C$.
- Si $\alpha > \omega$, entonces
  - $\star$ O bien α es sucesor ($\alpha = \beta + 1$), en cuyo caso,

    $$F(\alpha) = \bigcup(\alpha - \omega) = \beta < \beta + 1 \leqslant \omega^{\beta+1} = \omega^{\alpha} \leqslant \omega^{1+\alpha} = G(\alpha)$$

    Por tanto, $\alpha \notin C$.
  - $\star$ O bien α es límite, en cuyo caso, $F(\alpha) = \bigcup(\alpha - \omega) = \alpha$. Luego, $\alpha \in C \iff \alpha \in B$

En consecuencia, $\bigcup C = \mathbf{Ord}$ e $\bigcap C = \epsilon_0$.

Ejercicio 115. *Diremos que un ordinal $\alpha > 1$ es primo si*

$$\forall \beta, \ggg \ (\alpha = \beta \cdot \ggg \Longrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha = \ggg)$$

(1) *Para cada uno de los ordinales siguientes, demostrar que es primo, o encontrar una descomposición que muestre que no lo es:*

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega^2 + \omega,\ \omega^{\omega},\ \omega^{\omega} + 1$$

(2) *Demostrar que si $\alpha > 1$, entonces existen ordinales primos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tales que $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_n$. Dar algún ejemplo que muestre que esta descomposición no es única.*

(1) En primer lugar, veamos que si $\alpha, \beta, \ggg$ son ordinales estríctamente mayores que 1, entonces $\alpha = \beta \cdot \ggg \Longrightarrow \beta \leqslant \alpha \wedge \ggg \leqslant \alpha$.

- Supongamos que $\alpha = \beta \cdot \ggg$ y que $\alpha < \beta$. Entonces $\alpha < \beta < \beta \cdot \ggg = \alpha$. Lo que es una contradicción.

– Supongamos que $\alpha = \beta\cdot \ggg$ y que $\alpha < \ggg$. Entonces $\alpha < \ggg \leqslant \beta\cdot \ggg = \alpha$. Lo que es una contradicción.

De la relación anterior se deduce que para probar que un ordinal $\alpha > 1$ es primo, basta demostrar que el producto de dos ordinales estríctamente menores que α es, también, estríctamente menor que α.

- El ordinal ω es primo, ya que si $\alpha, \beta < \omega$, entonces $\alpha \cdot \beta \in \omega$.
- El ordinal $\omega + 1$ es primo. En efecto: supongamos que existieran ordinales $\beta, \ggg < \omega + 1$ tales que $\omega + 1 = \beta\cdot \ggg$. Como la aplicación Π_β es normal (pues $\beta \neq 0$) y $\Pi_\beta(\ggg) = \beta\cdot \ggg = \omega + 1$ es un ordinal sucesor, resulta que $\ggg$ es sucesor. Luego, $\ggg < \omega$. Entonces,
  - O bien $\beta < \omega$, en cuyo caso $\beta\cdot \ggg < \omega < \omega + 1$. Lo que es una contradicción.
  - O bien $\beta = \omega$, en cuyo caso $\beta\cdot \ggg = \omega\cdot \ggg \geqslant \omega \cdot 2 > \omega + 1$. Lo que es una contradicción.
- El ordinal $\omega^2 + \omega$ no es primo ya que

$$\omega^2 + \omega = \omega \cdot (\omega + 1) \text{ y } \omega < \omega^2 + \omega, \omega + 1 < \omega^2 + \omega$$

- El ordinal ω^ω es primo. En efecto: sean $\beta, \ggg$ ordinales estríctamente menores que ω^ω tales que $\beta\cdot \ggg = \omega^\omega$. Entonces

$$\beta, \ggg < \omega^\omega = \sup\{\omega^n : n \in \omega\}$$

  Luego, existen números naturales p, q tales que $\beta < \omega^p$ y $\ggg < \omega^q$. Por tanto, $\beta\cdot \ggg < \beta \cdot \omega^q \leqslant \omega^p \cdot \omega^q < \omega^\omega$.
- El ordinal $\omega^\omega + 1$ es primo. En efecto: sean $\beta, \ggg$ ordinales estríctamente menores que $\omega^\omega + 1$ tales que $\beta\cdot \ggg = \omega^\omega + 1$. Como la aplicación Π_β es normal y $\Pi_\beta(\ggg) = \beta\cdot \ggg = \omega^\omega + 1$ es un ordinal sucesor, resulta que $\ggg$ es sucesor. Luego, $\ggg < \omega^\omega$. Entonces,
  - O bien $\beta < \omega^\omega$, en cuyo caso (como acabamos de ver) $\beta\cdot \ggg < \omega^\omega$.
  - O bien $\beta = \omega^\omega$, en cuyo caso $\beta\cdot \ggg = \omega^\omega\cdot \ggg \geqslant \omega^\omega \cdot 2 > \omega^\omega + 1$.

(2) El resultado de este apartado sabemos que es cierto para los números naturales. Vamos a probarlo para ordinales mayores o iguales que ω, por inducción fuerte en $\mathbf{Ord} - \omega$.

Sea $\alpha \in \mathbf{Ord} - \omega$ y supongamos que el resultado es cierto para todo ordinal mayor o igual que ω que es estríctamente menor que α (y, por tanto, para todo ordinal estríctamente menor que α). Entonces

– O bien α es primo, en cuyo caso α lo tenemos descompuesto en un producto de ordinales primos (con un sólo factor: el propio α).

– O bien α no es primo, en cuyo caso existen ordinales $\beta, \ggg < \alpha$ tales que $\alpha = \beta \cdot \ggg$. Luego, por hipótesis de inducción fuerte, existen ordinales primos $\beta_1, \ldots, \beta_n$ y $\ggg_1, \ldots, \ggg_m$ verificando que

$$\begin{cases} \beta = \beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_n \\ \ggg = \ggg_1 \cdot \cdots \cdot \ggg_m \end{cases}$$

Por tanto, $\alpha = \beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_n \cdot \ggg_1 \cdot \cdots \cdot \ggg_m$.

A continuación damos un ejemplo que prueba la no unicidad de la descomposición de un ordinal en producto de ordinales primos.

$$\omega^{\omega \cdot 2} = \omega^{\omega} \cdot \omega^{\omega} = \omega^{\omega} \cdot \omega \cdot \omega^{\omega}$$

Ejercicio 116. *Diremos que un ordinal α es aditivamente indescomponible si no puede expresarse como suma de dos ordinales estríctamente menores.*

(1) *Probar que un ordinal α es aditivamente indescomponible si y sólo si*

$$\forall \beta < \alpha \ (\beta + \alpha = \alpha)$$

(2) *Probar que un ordinal* **no nulo** *α es aditivamente indescomponible si y sólo si $\exists \delta \in$* **Ord** *$(\alpha = \omega^{\delta})$.*

(1) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que el ordinal α es aditivamente indescomponible y sea $\beta < \alpha$. Por el teorema de la resta, existe un ordinal $\ggg$ tal que $\alpha = \beta + \ggg$. De la hipótesis de partida se deduce que $\ggg \geqslant \alpha$. Ahora bien

$$\ggg > \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta + \ggg \geqslant \ggg > \alpha$$

Por tanto, $\ggg = \alpha$. Es decir, $\alpha = \beta + \alpha$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $\forall \beta < \alpha \ (\beta + \alpha = \alpha)$. Veamos que α es aditivamente indescomponible. En efecto: caso contrario existirían ordinales $\beta, \ggg < \alpha$ tales que $\alpha = \beta + \ggg$. Entonces $\alpha = \beta + \ggg < \beta + \alpha = \alpha$. Lo que es una contradicción.

(2) $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea α un ordinal **no nulo** que es aditivamente indescomponible. Sean $k \in \omega$, $\ggg_0, \ggg_1, \ldots, \ggg_k$ y $n_0, n_1, \ldots, n_k$ tales que

$$\alpha = \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k$$

con $\ggg_0 > \ggg_1 > \ldots > \ggg_k \wedge \forall i \leqslant k \ (0 < n_i < \omega)$.

- Veamos que $\omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k = 0$. En efecto: Caso contrario resultaría que
$$\begin{cases} \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 < \alpha \\ \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k < \alpha \\ \alpha = \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \omega^{\ggg_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k \end{cases}$$
Lo que contradice que α sea aditivamente indescomponible.
- Veamos que $n_0 = 1$. En efecto: caso contrario
$$\begin{cases} \omega^{\ggg_0} < \alpha \\ \omega^{\ggg_0} \cdot (n_0 - 1) < \alpha \\ \alpha = \omega^{\ggg_0} + \omega^{\ggg_0} \cdot (n_0 - 1) \end{cases}$$
Lo que contradice que α sea aditivamente indescomponible.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea $\ggg \in$ **Ord** tal que $\alpha = \omega^{\ggg}$. Si $\beta < \alpha$, entonces existen $k \in \omega$, $\ggg_0, \ggg_1, \ldots, \ggg_k$ y $n_0, n_1, \ldots, n_k$ tales que

$\beta = \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k \wedge \ggg > \ggg_0 > \ldots > \ggg_k \wedge \forall i \leqslant k \, (0 < n_i < \omega)$.

Luego, $\beta + \alpha = (\omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k) + \omega^{\ggg} \overset{ej.\ 104}{=} \omega^{\ggg} = \alpha$.

Ejercicio 117. *Demostrar que ω^ω es el menor ordinal $\alpha > \omega$ tal que*
$$\forall \beta \neq 0 \, (\beta < \alpha \Longrightarrow \beta \cdot \alpha = \alpha)$$

Notemos $A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \alpha > \omega \wedge \forall \beta \neq 0 \, (\beta < \alpha \Longrightarrow \beta \cdot \alpha = \alpha)\}$.

Veamos que $\omega^\omega = \text{mín}_< A$.

- Veamos que ω^ω es una cota inferior de A. Para ello, basta ver que si α es un ordinal tal que $\alpha > \omega$ y $\alpha < \omega^\omega$, entonces existe $\beta \in$ **Ord** tal que $\beta \cdot \alpha \neq \alpha$. En efecto: sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\alpha > \omega$ y $\alpha < \omega^\omega$. Entonces existen $k \in \omega$, $n_0, \ldots, n_k$ y $m_0, \ldots, m_k$ tales que
$\alpha = \omega^{n_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{n_k} \cdot m_k \wedge \omega > n_0 > \ldots > n_k \wedge \forall i \leqslant k \, (0 < m_i < \omega)$.
Entonces $\omega \cdot \alpha = \omega^{n_0+1} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{n_k+1} \cdot m_k \neq \alpha$.
- Veamos que $\omega^\omega \in A$.
Desde luego, es obvio que $\omega^\omega > \omega$. Sea $\beta \in \mathbf{Ord} - \{0\}$ tal que $\beta < \omega^\omega$. Sean $k \in \omega$, $n_0, \ldots, n_k$ y $m_0, \ldots, m_k$ tales que
$\beta = \omega^{n_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{n_k} \cdot m_k \wedge \omega > n_0 > \ldots > n_k \wedge \forall i \leqslant k \, (0 < m_i < \omega)$.
Entonces $\beta \cdot \omega^\omega = (\omega^{n_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{n_k} \cdot m_k) \cdot \omega^\omega \overset{ej.\ 105}{=} \omega^{n_0+\omega} = \omega^\omega$.

Ejercicio 118. *Demostrar o refutar:*

(1) *Si β es un ordinal límite, entonces sup$\{\bigcup \alpha : \alpha \in \beta\} = \beta$.*

(2) *Si $\beta \in$ **Ord**, $\beta \geqslant \omega$, entonces sup$\{\bigcup \alpha : \alpha \in \beta\} = \beta$.*

(1) Verdadero. En primer lugar, observemos que

$$\sup\{\bigcup \alpha : \alpha \in \beta\} = \bigcup\{\bigcup \alpha : \alpha \in \beta\} = \bigcup_{\alpha \in \beta}(\bigcup \alpha)$$

- Veamos que $\beta \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \beta}(\bigcup \alpha)$. Para ello, sea $\ggg \in \beta$. Entonces

$$\ggg \in \beta \Longrightarrow \ggg +1 \in \beta \Longrightarrow \ggg +2 \in \beta$$

  Luego, $\ggg \in \bigcup(\ggg +2)$. Como $\ggg +2 \in \beta$, resulta que $\ggg \in \bigcup\limits_{\alpha \in \beta}(\bigcup \alpha)$.

- Veamos que $\bigcup\limits_{\alpha \in \beta}(\bigcup \alpha) \subseteq \beta$. Para ello, sea $\alpha \in \beta$. Entonces $\bigcup \alpha \subseteq \beta$. Luego, $\bigcup\limits_{\alpha \in \beta}(\bigcup \alpha) \subseteq \beta$.

(2) Falso. Sea β un ordinal **sucesor** que es mayor o igual que ω. Sea $\ggg \in$ **Ord** tal que $\beta = \ggg +1$. Entonces

$$\sup\{\bigcup \alpha : \alpha \in \beta\} = \bigcup_{\alpha \in \ggg +1}(\bigcup \alpha) \subseteq \bigcup(\ggg +1) = \ggg < \ggg +1 = \beta$$

Ejercicio 119. *Dar ejemplos de dos buenos órdenes R y S sobre ω tales que t.o.$(\langle \omega, R\rangle) = \omega + \omega$ y t.o.$(\langle \omega, S\rangle) = \omega \cdot 3$.*

Sea $<$ la ordenación usual de ω. Consideremos la relación R definida en ω como sigue:

$$pRq \iff (p \text{ es par } \wedge q \text{ es impar }) \vee (p \text{ y } q \text{ tienen la misma paridad } \wedge p < q)$$

Es decir, la ordenación R está caracterizada por las condiciones siguientes:

- ⋆ Todo número par es menor que cualquier número impar.
- ⋆ Los números pares están ordenados entre sí con la ordenación usual.
- ⋆ Los números impares están ordenados entre sí con la ordenación usual.

Gráficamente podría describirse la relación R de la siguiente manera:

$\langle \omega, R \rangle$

Definimos una aplicación $f : \omega \to \omega + \omega$ así:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ \omega + \frac{n-1}{2} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$$

Obviamente, f es una aplicación biyectiva de ω en $\omega + \omega$. Veamos que f satisface la siguiente condición: para cada $p, q \in \omega$ se tiene que

$$pRq \iff f(p) < f(q)$$

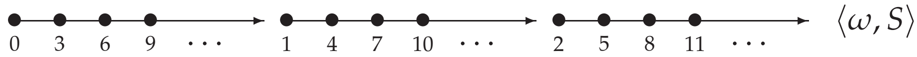
- Sean $p, q \in \omega$ tales que pRq. Entonces
  - ⋆ O bien p es par y q es impar, en cuyo caso
    $$f(p) = \frac{p}{2} < \omega + \frac{q-1}{2} = f(q)$$
  - ⋆ O bien p y q son pares, en cuyo caso $pRq \Longrightarrow p < q$ y, por tanto,
    $$f(p) = \frac{p}{2} < \frac{q}{2} = f(q)$$
  - ⋆ O bien p y q son impares, en cuyo caso $pRq \Longrightarrow p < q$ y, por tanto,
    $$f(p) = \omega + \frac{p-1}{2} < \omega + \frac{q-1}{2} = f(q)$$
- Sean $p, q \in \omega$ tales que $f(p) < f(q)$. Entonces
  - ⋆ O bien p es par y q es impar, en cuyo caso pRq.
  - ⋆ O bien p y q son pares, en cuyo caso $p < q$ (ya que si $p \geqslant q$, entonces $f(p) = \frac{p}{2} \geqslant \frac{q}{2} = f(q)$). Luego, pRq.
  - ⋆ O bien p y q son impares, en cuyo caso $p < q$ (ya que si $p \geqslant q$, entonces $f(p) = \omega + \frac{p-1}{2} \geqslant \omega + \frac{q-1}{2} = f(q)$). Luego, pRq.

En consecuencia, R es la ordenación en ω trasportada de la usual de $\omega+\omega$, por la aplicación biyectiva f^{-1}. Por tanto, R es un buen orden en ω y, además, t.o.$(\langle\omega, R\rangle) = \omega+\omega$.

Consideremos la relación S definida en ω como sigue:

$$\begin{array}{rcl} pSq & \iff & (p \text{ es múltiplo de } 3 \wedge q \text{ no es múltiplo de } 3)\vee \\ & & \exists n, m \in \omega\ (p = 3n+1 \wedge q = 3m+2)\vee \\ & & (p < q \wedge q - p \text{ es múltiplo de } 3)) \end{array}$$

Gráficamente podría describirse la relación S de la siguiente manera:



Definimos una aplicación $g : \omega \to \omega\cdot 3$ así:

$$g(p) = \begin{cases} \frac{p}{3} & \text{si} \quad p \text{ es múltiplo de } 3 \\ \omega + \frac{p-1}{3} & \text{si} \quad \exists n\ (p = 3n+1) \\ \omega\cdot 2 + \frac{p-2}{3} & \text{si} \quad \exists n\ (p = 3n+2) \end{cases}$$

Obviamente, g es una aplicación biyectiva de ω en $\omega\cdot 3$. Se deja como ejercicio al lector que, procediendo de manera similar a como se hizo con la relación R, demuestre que g satisface la siguiente condición: para cada $p, q \in \omega$ se tiene que $pSq \iff g(p) < g(q)$.

En consecuencia, S es la ordenación en ω trasportada de la usual de $\omega\cdot 3$, por la aplicación biyectiva g^{-1}. Por tanto, S es un buen orden en ω y, además, t.o.$(\langle\omega, S\rangle) = \omega\cdot 3$.

Ejercicio 120. *Consideremos las aplicaciones*

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbf{Ord} & \to & \mathbf{Ord} \\ \alpha & \to & 2^{\omega+\alpha} \end{array} \qquad G : \begin{array}{ccc} \mathbf{Ord} & \to & \mathbf{Ord} \\ \alpha & \to & \omega^2\cdot\alpha + \alpha\cdot\omega \end{array}$$

Se pide:

(1) *Probar que F es normal y que G no lo es.*

(2) *Calcular el menor punto fijo de F.*

(1) Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se verifica que

$$F(\alpha) = 2^{\omega+\alpha} = E_2(\omega + \alpha) = E_2(\Sigma_\omega(\alpha)) = (E_2 \circ \Sigma_\omega)(\alpha)$$

Luego, $F = E_2 \circ \Sigma_\omega$. Teniendo presente que E_2 y Σ_ω son funciones normales, se deduce que F es una función normal.

Veamos que la aplicación G no es normal. En efecto: por una parte se tiene que

$$G(\omega) = \omega^2 \cdot \omega + \omega \cdot \omega = \omega^3 + \omega^2$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sup\{G(n) : n \in \omega\} &= \sup\{\omega^2 \cdot n + n \cdot \omega : n \in \omega\} \\ &= \sup\{\omega^2 \cdot n + \omega : n \in \omega\} \leqslant \omega^3 + \omega < G(\omega) \end{aligned}$$

(2) Para hallar el menor punto fijo de la función normal F, aplicamos el método constructivo que se desarrolla en la demostración del teorema de Veblen. Para ello, consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = 0$
$h(1) = F(h(0)) = F(0) = 2^{\omega+0} = 2^\omega = \omega$
$h(2) = F(h(1)) = F(\omega) = 2^{\omega+\omega} = 2^{\omega\cdot 2} = (2^\omega)^2 = \omega^2$
$h(3) = F(h(2)) = 2^{\omega+\omega^2} = 2^{\omega^2} = (2^\omega)^\omega = \omega^\omega$
$h(4) = F(h(3)) = 2^{\omega+\omega^\omega} = 2^{\omega^\omega} \overset{ej.\,?}{=} \omega^{\omega^\omega}$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

- **Aserto:** $\forall n \in \omega\ (n \geqslant 2 \Longrightarrow h(n+1) = \delta_n)$ (recordemos que de acuerdo con la notación del ejercicio 111, δ_n es el ordinal $\boxed{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}$ con (n))

  Prueba: Por inducción débil en $\omega - \{0, 1\}$.

  $\boxed{n = 2}$
  Trivial, ya que $h(3) = \omega^\omega = \delta_2$.

  $\boxed{n \geqslant 2 \to n+1}$
  Supongamos que $n \geqslant 2$ y que $h(n+1) = \delta_n$. Entonces,
  $h(n+2) = F(h(n+1)) \overset{h.i.}{=} 2^{\omega+\delta_n} = 2^{\delta_n} = \omega^{\delta_n} = \delta_{n+1}$.

Por tanto, el menor punto fijo de F es

$\sup\{h(n) : n \in \omega\} = \sup\{h(n+1) : n \in \omega\} = \sup\{\delta_n : n \in \omega\} = \epsilon_0$.

Ejercicio 121. *Consideremos la aplicación $F : Ord \to Ord$ definida por $F(\alpha) = \omega^3 + \omega^2 \cdot \alpha$. Se pide:*

(1) *Probar que F es una función normal.*

(2) *Hallar el menor punto fijo de F.*

(3) *Sea G el único isomorfismo de $\langle Ord, \in\rangle$ en $\langle A, \in\rangle$, siendo A la clase de los puntos fijos de F. Hallar $G(\omega)$.*

(1) Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se tiene que

$$F(\alpha) = \omega^3 + \omega^2 \cdot \alpha = \omega^2 \cdot (\omega + \alpha) = \Pi_{\omega^2}(\omega + \alpha) = \Pi_{\omega^2}(\Sigma_\omega(\alpha))$$

Es decir, $F = \Pi_{\omega^2} \circ \Sigma_\omega$. Por tanto, F es una aplicación normal por ser una composición de dos funciones normales.

(2) Consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = 0$
$h(1) = F(h(0)) = \omega^3 + \omega^2 \cdot 0 = \omega^3$
$h(2) = F(h(1)) = \omega^3 + \omega^2 \cdot \omega^3 = \omega^3 + \omega^5 = \omega^5$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

- **Aserto:** $\forall n \in \omega - \{0\}\ (h(n) = \omega^{2n+1})$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 1}$
  Trivial, ya que $h(1) = \omega^3$.
  $\boxed{n \geqslant 1 \to n+1}$
  Se tiene que

$$\begin{aligned} h(n+1) &= F(h(n)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^{2n+1}) = \omega^3 + \omega^2 \cdot \omega^{2n+1} \\ &= \omega^3 + \omega^{2n+3} \overset{n\geqslant 1}{=} \omega^{2n+3} \end{aligned}$$

Por tanto, el menor punto fijo de F es

$\sup\{h(n) :\ n \in \omega\} = \sup\{\omega^{2n+1} :\ n \in \omega\} = \omega^\omega$.

Otra forma de resolver este apartado sería la siguiente.

Teniendo presente que $F(\alpha) = \omega^3 + \omega^2\alpha \geqslant \omega^3$ resulta que el menor punto fijo de F debe ser estríctamente mayor que ω^3. Ahora bien si $n \in \omega$ y $n > 3$, entonces

$$\begin{aligned} F(\omega^n) &= \omega^3 + \omega^2 \cdot \omega^n = \omega^3 + \omega^{n+2} \overset{n+2>3}{=} \omega^{n+2} \\ F(\omega^\omega) &= \sup\{F(\omega^n) :\ n \in \omega\} = \sup\{\omega^{n+2} :\ n \in \omega\} = \omega^\omega \end{aligned}$$

En consecuencia, el menor punto fijo de F es ω^ω.

(3) Teniendo presente que la aplicación G es normal y que ω es un ordinal límite, resulta que $G(\omega) = \sup\{G(n) : n \in \omega\}$. Vamos a hallar $G(n)$, para cada $n \in \omega$.

- ⋆ $G(0) = \omega^\omega$.
- ⋆ Para hallar $G(1)$ consideremos la aplicación $h : \omega \to$ **Ord** definida como sigue:

  $$\begin{array}{l} h(0) = G(0) + 1 = \omega^\omega + 1 \\ h(1) = F(h(0)) = \omega^3 + \omega^2 \cdot (\omega^\omega + 1) = \omega^3 + \omega^\omega + \omega^2 = \omega^\omega + \omega^2 \\ h(2) = F(h(1)) = \omega^3 + \omega^2 \cdot (\omega^\omega + \omega^2) = \omega^3 + \omega^\omega + \omega^4 = \omega^\omega + \omega^4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

  Por inducción débil en ω es fácil probar que $h(p) = \omega^\omega + \omega^{2p}$. Luego,

  $$\begin{array}{rcl} G(1) & = & \sup\{h(p) : p \in \omega\} = \sup\{\omega^\omega + \omega^{2p} : p \in \omega\} \\ & = & \omega^\omega + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot 2 \end{array}$$

- ⋆ Veamos que $G(n) = \omega^\omega \cdot (n+1)$, para cada $n \in \omega$. Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$

  Trivial, ya que $G(0) = \omega^\omega$.

  $\boxed{n \to n+1}$

  Supongamos que $G(n) = \omega^\omega \cdot (n+1)$. Para calcular $G(n+1)$ consideramos la aplicación $h : \omega \to$ **Ord** definida como sigue:

  $$\begin{array}{l} h(0) = G(n) + 1 = \omega^\omega \cdot (n+1) \\ h(1) = F(h(0)) = \omega^3 + \omega^2 \cdot (\omega^\omega \\ h(2) = F(h(1)) = \omega^3 + \omega^2 \cdot (\omega^\omega \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

  Por inducción débil en ω es fácil probar que

  $$h(p) = \omega^\omega \cdot (n+1) + \omega^{2p}, \quad \text{para cada } n \in \omega$$

  Luego,

  $$\begin{array}{rcl} G(n+1) & = & \sup\{h(p) : p \in \omega\} \\ & = & \sup\{\omega^\omega \cdot (n+1) + \omega^{2p} : p \in \omega\} \\ & = & \omega^\omega \cdot (n+1) + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot (n+2) \end{array}$$

En consecuencia,

$$\begin{array}{rcl} G(\omega) & = & \sup\{G(n) : n \in \omega\} = \sup\{\omega^\omega \cdot (n+1) : n \in \omega\} \\ & = & \omega^\omega \cdot \omega = \omega^{\omega+1} \end{array}$$

Ejercicio 122. *Sea* $F : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ *definida por* $F(\alpha) = (\omega^2 + \omega) \cdot \alpha$. *Se pide:*

(1) *Probar que F es normal.*

(2) *Calcular los* <u>*tres menores*</u> *puntos fijos de F.*

(3) *Dadas las clases*

$$C = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : \ F(\alpha) = \alpha\} \qquad D = \{\omega^\omega \cdot \beta : \ \beta \in \mathbf{Ord}\}$$

demostrar o refutar las siguientes relaciones: $C \subseteq D$, $D \subseteq C$.

(1) Se tiene que $F = \Pi_{\omega^2+\omega}$, pues para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se verifica:

$$F(\alpha) = (\omega^2 + \omega) \cdot \alpha = \Pi_{\omega^2+\omega}(\alpha)$$

Como $\omega^2 + \omega \neq 0$, resulta que F es una aplicación normal.

(2) Como $F(0) = 0$ resulta que el **menor** punto fijo de F es 0.

Para calcular el **segundo** punto fijo, consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$$\begin{array}{lcl} h(0) & = & 0 + 1 = 1 \\ h(1) & = & F(h(0)) = F(1) = (\omega^2 + \omega) \cdot 1 = \omega^2 + \omega \\ h(2) & = & F(h(1)) = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^2 + \omega) = (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^2 + (\omega^2 + \omega) \cdot \omega \\ & = & \omega^{2+2} + \omega^{2+1} = \omega^{2\cdot 2} + \omega^{2\cdot 2-1} \\ \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

- **Aserto:** $\forall n \in \omega - \{0\} \ (h(n) = \omega^{2n} + \omega^{2n-1})$.

  <u>Prueba:</u> Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 1}$

  Trivial, ya que $h(1) = \omega^2 + \omega$.

  $\boxed{n \geqslant 1 \to n + 1}$

  Se tiene que

$$\begin{array}{lcl} h(n+1) & = & F(h(n)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^{2n} + \omega^{2n-1}) \\ & = & (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^{2n} + \omega^{2n-1}) \\ & = & (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^{2n} + (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^{2n-1} \\ & = & \omega^{2+2n} + \omega^{2+2n-1} \\ & = & \omega^{2(n+1)} + \omega^{2(n+1)-1} \end{array}$$

Por tanto, el segundo punto fijo de F es

$$\sup\{h(n) : \ n \in \omega\} = \ \sup\{\omega^{2n} + \omega^{2n-1} : \ n \in \omega\} = \omega^\omega$$

Para calcular el **tercer** punto fijo de F, consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
h(0) & = & \omega^\omega + 1 \\
h(1) & = & F(h(0)) = F(\omega^\omega + 1) = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega + 1) \\
 & = & (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^\omega + (\omega^2 + \omega) \cdot 1 \\
 & = & \omega^{2+\omega} + \omega^2 + \omega = \omega^\omega + \omega^2 + \omega \\
h(2) & = & F(h(1)) = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega + \omega^2 + \omega) \\
 & = & (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^\omega + (\omega^2 + \omega) \cdot \omega^2 + (\omega^2 + \omega) \cdot \omega) \\
 & = & \omega^{2+\omega} + \omega^{2+2} + \omega^{2+1} \\
 & = & \omega^\omega + \omega^{2\cdot 2} + \omega^{2\cdot 2-1} \\
\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

- **Aserto:** $\forall n \in \omega - \{0\}\ (h(n) = \omega^\omega + \omega^{2n} + \omega^{2n-1})$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 1}$

  Trivial, ya que $h(1) = \omega^\omega + \omega^2 + \omega$.

  $\boxed{n \geqslant 1 \to n + 1}$

  Se tiene que

  $$\begin{array}{rl}
h(n+1) & = F(h(n)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^\omega + \omega^{2n} + \omega^{2n-1}) \\
 & = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega + \omega^{2n} + \omega^{2n-1}) \\
 & = (\omega^2 + \omega)\omega^\omega + (\omega^2 + \omega)\omega^{2n} + (\omega^2 + \omega)\omega^{2n-1} \\
 & = \omega^{2+\omega} + \omega^{2+2n} + \omega^{2+2n-1} \\
 & = \omega^{2+\omega} + \omega^{2(n+1)} + \omega^{2(n+1)-1} \\
 & = \omega^\omega + \omega^{2(n+1)} + \omega^{2(n+1)-1}
\end{array}$$

Por tanto, el tercer punto fijo de F es

$$\begin{array}{rcl}
\sup\{h(n) :\ n \in \omega\} & = & \sup\{\omega^\omega + \omega^{2n} + \omega^{2n-1} :\ n \in \omega\} \\
 & = & \omega^\omega + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot 2
\end{array}$$

(3) Veamos que $D \subseteq C$. En efecto: sea $\alpha \in D$. Entonces existe $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\alpha = \omega^\omega \cdot \beta$. Luego,

$$F(\alpha) = F(\omega^\omega \cdot \beta) = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega \cdot \beta) = \omega^{2+\omega} \cdot \beta = \omega^\omega \cdot \beta = \alpha$$

Por tanto, $\alpha \in C$.

Veamos que $C \subseteq D$. En efecto: sea $\alpha \in C$. Si $\alpha = 0$, entonces $\alpha \in D$. Supongamos que $\alpha \neq 0$. Entonces por el teorema de la división con resto ("dividimos α por ω^ω") existen ordinales $\beta, \ggg$ tales que $\alpha = \omega^\omega \cdot \beta + \ggg$, con $\ggg < \omega^\omega$. Se tiene que

$$\begin{array}{rcl}
F(\alpha) & = & (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega \cdot \beta + \ggg) = (\omega^2 + \omega) \cdot (\omega^\omega \cdot \beta) + (\omega^2 + \omega) \cdot \ggg \\
 & = & F(\omega^\omega \cdot \beta) + F(\ggg) = \omega^\omega \cdot \beta + F(\ggg)
\end{array}$$

Como $\alpha \in C$ resulta que $\omega^\omega \cdot \beta + \ggg = \omega^\omega \cdot \beta + F(\ggg)$. Luego, $F(\ggg) = \ggg$. Por tanto, $\ggg$ es un punto fijo de F que es estríctamente menor que ω^ω. Del apartado anterior se deduce que $\ggg = 0$. Luego, $\alpha = \omega^\omega \cdot \beta$. Es decir, $\alpha \in D$.

En consecuencia, las relaciones $C \subseteq D$ y $D \subseteq C$ son, ambas, verdaderas.

Ejercicio 123. *Consideremos la aplicación $F : Ord \to Ord$ definida por $F(\alpha) = (\omega^\omega + \omega) \cdot \alpha$. Se pide:*

(1) *Probar que F es una función normal.*

(2) *Sea $A = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : F(\alpha) = \alpha\}$. Probar que existe un único isomorfismo, G, de $\langle Ord, \in \rangle$ en $\langle A, \in \rangle$.*

(3) *Hallar $G(0), G(1), G(2)$ y $G(\omega)$.*

(1) Se tiene que $F = \Pi_{\omega^\omega + \omega}$, pues para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se verifica:

$$F(\alpha) = (\omega^\omega + \omega) \cdot \alpha = \Pi_{\omega^\omega + \omega}(\alpha)$$

Como $\omega^\omega + \omega \geqslant 1$, resulta que la aplicación F es normal.

(2) Del ejercicio 82 (apartado 1) se deduce que la clase A es propia. Por tanto, existe un único isomorfismo, G, de $\langle \mathrm{Ord}, \in \rangle$ en $\langle A, \in \rangle$. Más aún, hemos visto que G es una aplicación normal.

(3) Por definición de G resulta que $G(0)$ es el menor punto fijo de la función normal F. Teniendo presente que $F(0) = 0$, resulta que $G(0) = 0$.

El valor $G(1)$ coincide con el segundo punto fijo de F. Para hallarlo vamos a utilizar el procedimiento constructivo que se desarrolla en la prueba del teorema de Veblen.

Para ello, consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = G(0) + 1 = 1$
$h(1) = F(h(0)) = F(1) = (\omega^\omega + \omega) \cdot 1 = \omega^\omega + \omega$
$h(2) = F(h(1)) = (\omega^\omega + \omega) \cdot (\omega^\omega + \omega) = \omega^{\omega \cdot 2} + \omega^{\omega + 1}$
$h(3) = F(h(2)) = (\omega^\omega + \omega) \cdot (\omega^{\omega \cdot 2} + \omega^{\omega + 1}) = \omega^{\omega \cdot 3} + \omega^{\omega \cdot 2 + 1}$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

- **Aserto 1:** $\forall n \in \omega - \{0\} \; (h(n) = \omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1) + 1})$.

  Prueba: Por inducción débil en $\omega - \{0\}$.

  $\boxed{n = 1}$
  Trivial, ya que $h(1) = \omega^\omega + \omega$.

$\boxed{n \geqslant 1 \to n+1}$
Sea $n \in \omega - \{0\}$ tal que $h(n) = \omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1)+1}$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} h(n+1) & = & F(h(n)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1)+1}) \\ & = & (\omega^{\omega} + \omega) \cdot (\omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1)+1}) \\ & = & (\omega^{\omega} + \omega) \cdot \omega^{\omega \cdot n} + (\omega^{\omega} + \omega) \cdot \omega^{\omega \cdot (n-1)+1} \\ & = & \omega^{\omega + \omega \cdot n} + \omega^{\omega + \omega \cdot (n-1)+1} = \omega^{\omega \cdot (n+1)} + \omega^{\omega \cdot n+1} \end{array}$$

Por tanto, el segundo punto fijo de F es

$$\begin{array}{rcl} G(1) & = & \sup\{h(n) : \ n \in \omega\} \\ & = & \sup\{\omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1)+1}) : \ n \in \omega - \{0\}\} \\ & = & \omega^{\omega^2} \end{array}$$

(Se deja como ejercicio al lector que pruebe que ω^{ω^2} es el supremo del conjunto considerado).

El valor $G(2)$ coincide con el tercer punto fijo de F. Vamos a proceder como antes.

Consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = G(1) + 1 = \omega^{\omega^2} + 1$
$h(1) = F(h(0)) = (\omega^{\omega} + \omega) \cdot (\omega^{\omega^2} + 1) = \omega^{\omega^2} + \omega^{\omega} + \omega$
$h(2) = F(h(1)) = (\omega^{\omega} + \omega) \cdot (\omega^{\omega^2} + \omega^{\omega} + \omega) = \omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot 2} + \omega^{\omega+1}$
$h(3) = F(h(2)) = (\omega^{\omega} + \omega) \cdot (\omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot 2} + \omega^{\omega+1}) = \omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot 3} + \omega^{\omega \cdot 2+1}$
....

- **Aserto 2:** $\forall n \in \omega - \{0\}$ $(h(n) = \omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1)+1})$.

  Prueba: Se hace de manera análoga a la del aserto anterior (por inducción débil en $\omega - \{0\}$) y se deja como ejercicio al lector.

Por tanto, el tercer punto fijo de F es

$$\begin{array}{rcl} G(2) & = & \sup\{h(n) : \ n \in \omega\} \\ & = & \sup\{\omega^{\omega^2} + \omega^{\omega \cdot n} + \omega^{\omega \cdot (n-1)+1} : \ n \in \omega - \{0\}\} \\ & = & \omega^{\omega^2} \cdot 2 \end{array}$$

(Se deja como ejercicio al lector que pruebe que $\omega^{\omega^2} \cdot 2$ es el supremo del conjunto considerado).

Finalmente, vamos a probar que $G(\omega) = \omega^{\omega^2} \cdot \omega$. Para ello, establecemos previamente el siguiente resultado:

- **Aserto 3:** $\forall n \in \omega$ $(G(n) = \omega^{\omega^2} \cdot n)$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 1}$

Trivial, ya que $G(1) = \omega^{\omega^2}$.

$\boxed{n \to n + 1}$

Sea $n \in \omega$ tal que $G(n) = \omega^{\omega^2} \cdot n$. Para hallar $G(n+1)$ consideramos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = G(n) + 1 = \omega^{\omega^2} \cdot n + 1$
$h(1) = F(h(0)) = \omega^{\omega^2} \cdot n + \omega^{\omega} + \omega$
$h(2) = F(h(1)) = \omega^{\omega^2} \cdot n + \omega^{\omega \cdot 2} + \omega^{\omega+1}$
$h(3) = F(h(2)) = \omega^{\omega^2} \cdot n + \omega^{\omega \cdot 3} + \omega^{\omega \cdot 2+1}$
....

Siguiendo la línea de los asertos 1 y 2 se prueba que, para cada $p \in \omega - \{0\}$, se tiene que

$$h(p) = \omega^{\omega^2} \cdot n + \omega^{\omega \cdot p} + \omega^{\omega \cdot (p-1)+1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} G(n+1) &= \sup\{\omega^{\omega^2} \cdot n + \omega^{\omega \cdot p} + \omega^{\omega \cdot (p-1)+1} : p \in \omega - \{0\}\} \\ &= \omega^{\omega^2} \cdot n + \omega^{\omega^2} = \omega^{\omega^2} \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Teniendo presente que la función G es normal y que ω es un ordinal límite, resulta que

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sup\{G(n) : n \in \omega\} \\ &= \sup\{\omega^{\omega^2} \cdot n : n \in \omega\} \\ &= \omega^{\omega^2} \cdot \omega = \omega^{\omega^2+1} \end{aligned}$$

Ejercicio 124. *Consideremos las funciones $F, G : Ord \to Ord$ definidas por $F(\alpha) = \alpha^2$ y $G(\alpha) = 2^{\alpha}$, para cada $\alpha \in$ **Ord**. Determinar si dichas funciones son o no crecientes, continuas y normales. En su caso, hallar el menor punto fijo.*

- Veamos que la función F **no** es continua. En efecto:
  $$\begin{cases} F(\omega) = \omega^2 \\ \sup\{F(n) : n \in \omega\} = \sup\{n^2 : n \in \omega\} = \omega \end{cases}$$
- Veamos que la función F es creciente. En efecto: sean α, β ordinales tales que $\alpha < \beta$. Entonces
  - O bien $\alpha = 0$, en cuyo caso, $F(\alpha) = 0 < F(\beta)$.
  - O bien $\alpha \neq 0$, en cuyo caso, $F(\alpha) = \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha < \alpha \cdot \beta \leqslant \beta \cdot \beta = F(\beta)$.
- Por tanto, la función F **no** es normal.

- La función G es normal ya que $G = E_2$ y $2 > 1$.
- Hallemos el menor punto fijo de la función normal G.

  En primer lugar, observemos que ω es un punto fijo de G, ya que

  $$G(\omega) = 2^\omega = \sup\{G(n) :\ n \in \omega\} = \sup\{2^n :\ n \in \omega\} = \omega$$

  Por otra parte, ningún número natural es punto fijo de G, ya que si $n \in \omega$, entonces $G(n) = 2^n > n$.

  En consecuencia, el menor punto fijo de G es ω.

Ejercicio 125. *Sean F : **Ord** $\to$ **Ord** la aplicación definida por $F(\alpha) = \omega \cdot \alpha$ y $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$.*

(1) *Probar que existe un único isomorfismo $G : \langle \mathbf{Ord}, \in\rangle \cong \langle A, \in\rangle$.*

(2) *Hallar $G(0)$, $G(1)$ y probar que $G(n) = \omega^\omega \cdot n(\ \forall n \in \omega)$.*

(3) *Calcular $G(\omega)$ y demostrar que $G(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha$ $(\forall \alpha \in \mathbf{Ord})$.*

(4) *Hallar el menor punto fijo no nulo de G.*

(1) Teniendo presente que $F = \Pi_\omega$ y que $\omega \neq 0$, deducimos que la aplicación F es normal. Por tanto, del ejercicio 82, apartado 1, deducimos que la clase $A = \{\alpha : F(\alpha) = \alpha\}$ es propia.

En consecuencia, del teorema de comparación de buenos órdenes resulta que existe un único isomorfismo G de $\langle \mathbf{Ord}, \in\rangle$ en $\langle A, \in\rangle$.

(2) Por definición de la clase A, resulta que $G(0)$ es el **menor** punto fijo de la función normal F. Por tanto, $G(0) = 0$.

A continuación, vamos a calcular $G(1)$ que, recordemos, es el menor punto fijo de F que es mayor o igual que 1 (es decir, estríctamente mayor que $G(0) = 0$). Para ello, consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = G(0) + 1 = 1$
$h(1) = F(h(0)) = F(1) = \omega$
$h(2) = F(h(1)) = F(\omega) = \omega \cdot \omega = \omega^2$
....

- **Aserto:** $\forall n \in \omega\ (h(n) = \omega^n)$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$
Trivial, ya que $h(0) = 1 = \omega^0$.
$\boxed{n \to n+1}$ Se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} h(n+1) & = & F(h(n)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^n) \\ & = & \omega \cdot \omega^n = \omega^{1+n} = \omega^{n+1} \end{array}$$

Por tanto, $G(1) = \sup\{h(n) : n \in \omega\} = \sup\{\omega^n : n \in \omega\} = \omega^\omega$.

Seguidamente vamos a demostrar que $\forall n \in \omega\ (G(n) = \omega^\omega \cdot n)$. Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$
Trivial, ya que $G(0) = 0 = \omega^\omega \cdot 0$.
$\boxed{n \to n+1}$
Supongamos que $G(n) = \omega^\omega \cdot n$. Para calcular $G(n+1)$ (es decir, el $(n+1)$–ésimo punto fijo de F) consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:
$h(0) = G(n) + 1 = \omega^\omega \cdot n + 1$
$h(1) = F(h(0)) = \omega \cdot (\omega^\omega \cdot n + 1) = \omega^{1+\omega} \cdot n + \omega = \omega^\omega \cdot n + \omega$
$h(2) = F(h(1)) = \omega \cdot (\omega^\omega \cdot n + \omega) = \omega^{1+\omega} \cdot n + \omega \cdot \omega = \omega^\omega \cdot n + \omega^2$
. . . .

- **Aserto:** $\forall p \in \omega\ (h(p) = \omega^\omega \cdot n + \omega^p)$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.
  $\boxed{p = 0}$
  Trivial, ya que $h(0) = \omega^\omega \cdot n + 1 = \omega^\omega \cdot n + \omega^0$.
  $\boxed{p \to p+1}$

$$\begin{array}{rcl} h(p+1) & = & F(h(p)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^\omega \cdot n + \omega^p) \\ & = & \omega \cdot (\omega^\omega \cdot n + \omega^p) = \omega^\omega \cdot n + \omega^{1+p} \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcl} G(n+1) & = & \sup\{h(p) : p \in \omega\} \\ & = & \sup\{\omega^\omega \cdot n + \omega^p : p \in \omega\} \\ & = & \omega^\omega \cdot n + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot (n+1) \end{array}$$

(3) Teniendo presente que la aplicación G es normal (ver ejercicio 83) y que ω es un ordinal límite, resulta que

$$\begin{array}{rcl} G(\omega) & = & \sup\{G(n) : n \in \omega\} = \sup\{\omega^\omega \cdot n : n \in \omega\} \\ & = & \omega^\omega \cdot \omega = \omega^{\omega+1} \end{array}$$

Veamos ahora que para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ se tiene que $G(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha$. Por inducción débil en la clase **Ord** sobre la variable α.

$\boxed{\alpha = 0}$
Trivial, ya que $G(0) = 0 = \omega^\omega \cdot 0$.

$\boxed{\alpha \to \alpha + 1}$
Supongamos que $G(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha$. Para calcular $G(\alpha + 1)$ consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = G(\alpha) + 1 = \omega^\omega \cdot \alpha + 1$
$h(1) = F(h(0)) = \omega \cdot (\omega^\omega \cdot \alpha + 1) = \omega^\omega \cdot \alpha + \omega$
$h(2) = F(h(1)) = \omega \cdot (\omega^\omega \cdot \alpha + \omega) = \omega^\omega \cdot \alpha + \omega^2$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- **Aserto:** $\forall n \in \omega\ (h(n) = \omega^\omega \cdot \alpha + \omega^n)$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$
  Trivial, ya que $h(0) = \omega^\omega \cdot \alpha + 1 = \omega^\omega \cdot \alpha + \omega^0$.

  $\boxed{n \to n + 1}$

$$\begin{aligned} h(n+1) &= F(h(n)) \overset{h.i.}{=} F(\omega^\omega \cdot \alpha + \omega^n) \\ &= \omega \cdot (\omega^\omega \cdot \alpha + \omega^n) = \omega^\omega \cdot \alpha + \omega^{1+n} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} G(\alpha+1) &= \sup\{h(n) :\ n \in \omega\} = \sup\{\omega^\omega \cdot \alpha + \omega^n :\ n \in \omega\} \\ &= \omega^\omega \cdot \alpha + \omega^\omega = \omega^\omega \cdot (\alpha + 1) \end{aligned}$$

$\boxed{\alpha \text{ límite } \wedge < \alpha \to \alpha}$
Sea α un ordinal límite y supongamos que $G(\beta) = \omega^\omega \cdot \beta$, para cada $\beta < \alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= \sup\{G(\beta) :\ \beta < \alpha\} = \sup\{\omega^\omega \cdot \beta :\ \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{\Pi_{\omega^\omega}(\beta) :\ \beta < \alpha\} = \Pi_{\omega^\omega}(\alpha) = \omega^\omega \cdot \alpha \end{aligned}$$

(4) Finalmente, vamos a hallar el menor punto fijo no nulo de G. Para ello, consideremos la aplicación $h : \omega \to \mathbf{Ord}$ definida como sigue:

$h(0) = G(0) + 1 = 1$
$h(1) = G(h(0)) = G(1) = \omega^\omega$
$h(2) = G(h(1)) = G(\omega^\omega) = \omega^\omega \cdot \omega^\omega = \omega$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- **Aserto:** $\forall n \in \omega\ (h(n) = \omega^{\omega \cdot n})$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$
  Trivial, ya que $h(0) = 1 = \omega^{\omega \cdot 0}$.

$\boxed{n \to n+1}$

$$\begin{aligned} h(n+1) &= G(h(n)) \overset{h.i.}{=} G(\omega^{\omega \cdot n}) = \omega^{\omega} \cdot \omega^{\omega \cdot n} \\ &= \omega^{\omega + \omega \cdot n} = \omega^{\omega \cdot (1+n)} = \omega^{\omega \cdot (n+1)} \end{aligned}$$

Por tanto, el menor punto fijo no nulo de G es

$$\sup\{h(n) : n \in \omega\} = \sup\{\omega^{\omega \cdot n} : n \in \omega\} = \omega^{\omega \cdot \omega} = \omega^{\omega^2}$$

7.7. Problemas propuestos

Ejercicio 7.1. Sean $F, G : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ funciones normales. Demostrar o refutar:

(1) Si $\ggg$ es un ordinal límite y $\delta = \sup\{F(\beta) : \beta < \ggg\}$, entonces

$$\sup\{G(\beta) : \beta < \delta\} = \sup\{G(F(\beta)) : \beta < \ggg\}$$

(2) $\sup\{F(\beta) + G(\beta) : \beta < \alpha\} = \sup\{F(\beta) : \beta < \alpha\} + \sup\{G(\beta) : \beta < \alpha\}$.

(3) $\sup\{F(\beta) \cdot \ggg : \beta < \alpha\} = \sup\{F(\beta) : \beta < \alpha\} \cdot \ggg$.

Indicación: (1) Recuérdese que la composición de funciones normales es normal.

Ejercicio 7.2. Sean $\alpha, \beta, \ggg$ ordinales tales que $\alpha < \beta + \ggg$. Probar que

$$\alpha < \beta \vee \exists \delta\, (\delta < \ggg \wedge \alpha = \beta + \delta)$$

Ejercicio 7.3. (*Caracterización intuitiva de la suma ordinal*). Sean $\langle a, R \rangle$ y $\langle b, S \rangle$ dos conjuntos bien ordenados tales que $a \cap b = \emptyset$, $\alpha = \text{t.o.}(\langle a, R \rangle)$ y $\beta = \text{t.o.}(\langle b, S \rangle)$. Probar que $\alpha + \beta = \text{t.o.}(\langle a, R \rangle \oplus \langle b, S \rangle)$ (véase definición de suma lexicográfica en el ejercicio 31).

Indicación: Defínase $f : \alpha + \beta \to a \cup b$ de la siguiente manera: si $\ggg < \alpha$, entonces $f(\ggg) = g(\ggg)$ (en donde g es un isomorfismo de $\langle \alpha, < \rangle$ en $\langle a, R \rangle$); si $\ggg \geqslant \alpha$, entonces $f(\ggg) = h(\delta)$ (en donde h es un isomorfismo de $\langle \beta, < \rangle$ en $\langle b, S \rangle$ y $\alpha + \delta = \ggg$). Pruébese que f es un isomorfismo de $\langle \alpha + \beta, < \rangle$ en $\langle a, R \rangle \oplus \langle b, S \rangle$.

Alternativamente, se puede probar el resultado por inducción débil en **Ord** sobre la variable β.

Ejercicio 7.4. Sean α y β ordinales no nulos tales que $\alpha + \beta = \omega$. Probar que $\alpha \in \omega$ y $\beta = \omega$.

Ejercicio 7.5. Sean α y β dos ordinales tales que $\alpha \leqslant \beta$. Probar que la ecuación $\alpha + x = \beta$ tiene una única solución en **Ord** y que la ecuación $x + \alpha = \beta$ tiene $0, 1$ o infinitas soluciones en **Ord**.

Indicación: Pruébese que si $\alpha \geqslant \omega$ y x es solución, entonces $x, x^+, x^{++}, \ldots$ son infinitas soluciones de la ecuación.

Ejercicio 7.6. Encontrar el menor $\alpha > \omega$ tal que $\beta + \alpha = \alpha$, para cualquier $\beta < \alpha$.

Ejercicio 7.7. Encontrar tres ordinales tales que, en las seis posibles sumas que se pueden hacer con ellos (cambiando el orden), sólo se obtengan tres resultados distintos.

Indicación:Tómense dos de ellos iguales.

Ejercicio 7.8. Un ordinal límite α se dice *simple* si no existe un ordinal β tal que $\alpha = \beta + \omega$. Demostrar que α es simple si y sólo si para cualquier $\beta < \alpha$ existe un ordinal límite $\ggg$ tal que $\beta < \ggg < \alpha$. Dar un ejemplo de ordinal simple.

Indicación: Para ambas implicaciones, usar el teorema de la resta.

Ejercicio 7.9. Sea $\ggg \in$ **Ord**, $\ggg > 0$. Probar que son equivalentes:

(1) $\forall \alpha, \beta < \ggg \ (\alpha + \beta < \ggg)$.

(2) $\forall \alpha < \ggg \ (\alpha < \ggg - \alpha)$.

Indicación: $(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})$: Pruébese que $\ggg - \alpha = \ggg$. $(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$: Si λ es el mayor de α y β, acótese $\alpha + \beta$ por $\lambda + \lambda$ y pruébese que dicha suma es estríctamente menor que $\ggg$.

Ejercicio 7.10. Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord**. Probar que:

(1) Si $\ggg < \beta \cdot \alpha$, entonces existen unos únicos ordinales δ y ε tales que $\ggg = \beta \cdot \delta + \varepsilon$, $\delta < \alpha$ y $\varepsilon < \beta$.

(2) $\alpha \cdot \beta$ es un ordinal límite si y sólo si α es límite o β es límite.

Indicación: Usar el teorema de la división con resto.

Ejercicio 7.11. (*Caracterización intuitiva del producto ordinal*). Sean $\langle a, R \rangle$ y $\langle b, S \rangle$ dos conjuntos bien ordenados tales que $\alpha = \text{t.o.}(\langle a, R \rangle)$ y $\beta = \text{t.o.}(\langle b, S \rangle)$. Probar que $\alpha \cdot \beta = \text{t.o.}(\langle a, R \rangle \otimes \langle b, S \rangle)$ (ver definición de producto lexicográfico en el ejercicio 32).

Indicación: Defínase $f : \alpha \cdot \beta \to a \times b$ de la siguiente manera: dado $\ggg \in \alpha \cdot \beta$, sea $\ggg = \alpha \cdot \delta + \mu$ con $\delta \in \beta$ y $\mu \in \alpha$; entonces $f(\ggg) = \langle g(\mu), h(\delta) \rangle$ (en donde g es un isomorfismo de $\langle \alpha, < \rangle$ en $\langle a, R \rangle$ y h es un isomorfismo de $\langle \beta, < \rangle$ en $\langle b, S \rangle$). Pruébese que f es un isomorfismo de $\langle \alpha \cdot \beta, < \rangle$ en $\langle a, R \rangle \otimes \langle b, S \rangle$.

Alternativamente, se puede probar el resultado por inducción débil en **Ord** sobre la variable β (usando también el ejercicio 7.3).

Ejercicio 7.12. Probar que $\alpha + 1 + \alpha = 1 + \alpha \cdot 2$, para todo ordinal α.

Indicación: Para $\alpha \geqslant \omega$, dividir (con resto) α entre ω.

Ejercicio 7.13. Encontrar tres ordinales tales que, en las seis posibles multiplicaciones que se pueden hacer con ellos (cambiando el orden), se obtengan seis resultados distintos.

Ejercicio 7.14. Diremos que un ordinal α es *multiplicativamente indescomponible* si $\alpha > 1$ y $\beta, \ggg < \alpha \rightarrow \beta \cdot \ggg < \alpha$. Probar que todo ordinal multiplicativamente indescomponible es primo (véase ejercicio 115). ¿Todo ordinal primo es multiplicativamente indescomponible? Si no es así, encontrar un contraejemplo.

Ejercicio 7.15. Probar que son equivalentes:

(1) α es multiplicativamente indescomponible.

(2) $\alpha = \omega^{\omega^{\ggg}}$ para cierto ordinal $\ggg$.

(3) $\beta \cdot \alpha = \alpha$ para cualquier $\beta < \alpha$.

Indicación: $(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})$ Utilícese el teorema del logaritmo y la caracterización de ordinales aditivamente indescomponible, del ejercicio 116. $(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$ Si existiesen $\beta, \ggg < \alpha$ tales que $\beta \cdot \ggg \geqslant \alpha$, entonces pruébese que el mayor de β y $\ggg$ no satisface (3).

Ejercicio 7.16. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$, $\alpha > 0$ y $n \in \omega - \{0\}$. Probar que:

(1) Si $\alpha \geqslant \omega$, entonces $(\alpha + 1) \cdot n = \alpha \cdot n + 1$.

(2) $(\alpha + 1) \cdot n > \alpha \cdot n$.

(3) Si β es sucesor, entonces $(\alpha + 1) \cdot \beta > \alpha \cdot \beta$.

(4) Si $\alpha \geqslant \omega$ y β es sucesor, entonces $(\alpha + 1) \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 1$.

Indicación: Para **(3)** y **(4)**, úsese el ejercicio 102.

Ejercicio 7.17. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$.

(1) Probar que si α^{β} es límite, entonces para cualquier $\ggg \geqslant \beta$ se tiene que $\alpha^{\ggg}$ es límite.

(2) Probar que α^{β} es límite si y sólo si $(\alpha > 1 \wedge \beta \geqslant \omega) \vee (\alpha \text{ límite } \wedge \beta > 0)$.

Indicación: (2) Para la implicación directa, pruébese que si $\beta \in \omega$ y α es sucesor, entonces α^{β} es sucesor. Para la implicación recíproca úsese (1).

Ejercicio 7.18. Demostrar que $2^\alpha + 3^\alpha = 3^\alpha + 2^\alpha$, para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$.

Indicación: Divídase α por ω y úsese que $2^\omega = 3^\omega = \omega$.

Ejercicio 7.19. Probar que si $\alpha, \beta \neq 0$, entonces $\alpha \cdot \omega^\beta = \alpha^+ \cdot \omega^\beta$.

Ejercicio 7.20. Encontrar el menor $\alpha > \omega$ tal que para todo β verificando $1 < \beta < \alpha$ se tiene que $\beta^\alpha = \alpha$.

Ejercicio 7.21. Probar que si $\beta > 1$, existe un ordinal α tal que $\alpha^\beta > \beta$.

Ejercicio 7.22. Sea $\alpha = \omega^{\omega \cdot 4} \cdot 4 + \omega^{\omega+1} \cdot 2 + \omega^9 + 1$ y $\beta = \omega^{\omega+1} \cdot 2 + \omega^9 + 1$. Hallar la forma normal de Cantor de los siguientes ordinales:

(1) $\alpha + \beta$ y $\beta + \alpha$.

(2) $\alpha \cdot \beta$ y $\beta \cdot \alpha$.

(3) $(\alpha + \beta) \cdot \beta$ y $\alpha \cdot \beta + \beta \cdot \beta$.

Ejercicio 7.23. Expresar los siguientes ordinales en forma normal de Cantor:

(1) $(\omega^2 + \omega + 3)^{10}$

(2) $(\omega^3 + \omega^4 + \omega^2)^{4 \cdot \omega}$

(3) 3^{ω^2+2}

(4) $(\omega^{\omega^2+1})^{\omega \cdot 3+2}$

Ejercicio 7.24. Sean $p, q, n, n_1, n_2 \in \omega$ tales que $p > q > 0$, $n_1 \neq 0$ y $n \neq 0$. Probar que:

$$(\omega^p \cdot n_1 + \omega^q \cdot n_2)^n = \omega^{p \cdot n} \cdot n_1 + \omega^{p \cdot (n-1)+q} \cdot n_2$$

Indicación: Pruébese el resultado por inducción débil en $\omega - \{0\}$, sobre la variable n.

Ejercicio 7.25. Probar que para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ y cada $\beta \in \mathbf{Ord}$, si existe un número natural n tal que $\alpha < \omega^n \leqslant \beta$, entonces $\alpha + \beta = \beta$.

Indicación: Considérense las formas normales de Cantor de los ordinales α y β.

Ejercicio 7.26. Probar que para cada ordinal α se verifica:

$$\omega \cdot \alpha = \alpha \Longleftrightarrow \exists \beta \in \mathbf{Ord}\ (\alpha = \omega^\omega \cdot \beta)$$

Indicación:$\boxed{\Longrightarrow}$ Supóngase que $\omega \cdot \alpha = \alpha$ y $\alpha \neq 0$. Como $\alpha > 0$, se tiene que $\alpha = \omega^{\ggg_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\ggg_k} \cdot n_k$, con $\ggg_0 > \ldots > \ggg_k$ y $0 < n_i < \omega$ $(\forall i \leqslant k)$. Dedúzcase de la unicidad de la forma normal de Cantor que $\ggg_i \geqslant \omega$ y aplíquese el teorema de la resta.

Ejercicio 7.27. Probar que:

(1) $\forall n \in \omega - \{0\}\ \forall p \in \omega\ \forall \alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\}\ ((\omega^\alpha \cdot p)^n = \omega^{\alpha \cdot n} \cdot p)$.

(2) $\forall n \in \omega - \{0\}\ \forall \alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\}\ ((\omega^\alpha)^n + (\omega^\alpha \cdot 2)^n = (\omega^\alpha \cdot 3)^n)$.

Indicación:(1) Pruébese por inducción débil en $\omega - \{0\}$. **(2)** Aplíquese (1).

Capítulo 8

El axioma de elección

A lo largo del siglo XIX, el axioma de elección es utilizado implícitamente por la mayoría de los matemáticos (Cantor incluido). Posiblemente, no hicieron especial hincapié en el mismo por considerar “intuitivamente evidente.el proceso que permite seleccionar un elemento de cada subconjunto no vacío de un conjunto dado.

Las primeras referencias explícitas al axioma de elección las proporcionan G. Peano en 1890 y B. Leví en 1902. No obstante, sería E. Zermelo quien, por primera vez, formulara explícitamente dicho axioma debido a que necesitaba ese resultado para probar “su"teorema del buen orden (todo conjunto admite, al menos, una buena ordenación) y no lo consideraba “matemáticamente evidente".

Este axioma ha provocado grandes controversias en el mundo matemático, debido a que se trata de un principio de carácter existencial y no necesariamente constructivo. Las fuertes polémicas que se suscitaron se debieron a las diferentes tomas de postura ante el significado matemático del concepto de “existencia". Así, mientras para unos matemáticos (*logicistas* y *formalistas*, como Hilbert, Peano, Hadamard y Russell entre otros) es lícito el uso de un axioma de tipo existencial siempre y cuando no dé lugar a contradicciones, para otros (*intuicionistas*, como Brouwer, Lebesgue, Borel y Lusin entre otros) rechazan de plano el uso del axioma de elección al considerar que la existencia de un conjunto únicamente se puede asegurar, “bien si cada uno de sus elementos pueden ser designados explícitamente o si, en su defecto, se dispone de una ley que permita construir sus elementos".

En 1938, K. Gdel probó que el axioma de elección era *compatible* con los restantes axiomas de la Teoría de Conjuntos (es decir, que no daba lugar a contradicciones cuando se le añadía a la Teoría).

En 1963, P. Cohen demostró que el axioma de elección era *independiente* de los restantes axiomas de la Teoría (es decir, que no se podía deducir a partir de los mismos).

8.1. El axioma de elección

Recordemos cuáles han sido los axiomas que se han introducido hasta ahora.

(1) Axioma del conjunto vacío: $(\exists y)(\forall x)(x \notin y)$.

(2) Axioma de extensionalidad: $\forall x \forall y((\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)) \to x = y)$.

(3) Esquema de axiomas de separación: Si $\varphi(x)$ es una fórmula e y es un conjunto, entonces la clase $\{x : x \in y \wedge \varphi(x)\}$ es un conjunto.

(4) Axioma del par: Si x e y son conjuntos, entonces la clase $\{z : z = x \vee z = y\}$ es un conjunto.

(5) Axioma de las partes: Si x es un conjunto, entonces la clase $\{y : y \subseteq x\}$ es un conjunto.

(6) Axioma de la unión: Si x es un conjunto, entonces la clase $\bigcup x$ es un conjunto.

(7) Esquema de axiomas de reemplazamiento: Si F es una aplicación y x es un conjunto, entonces la clase $F[x]$ es un conjunto.

(8) Axioma del infinito: $\exists x\ (\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$.

La teoría cuyos axiomas no lógicos son los anteriores, se representa por $\mathbf{ZF}^-$ (y se denomina teoría de Zermelo–Fraenkel sin el axioma de regularidad).

Definición 8.1.1. Sea x un conjunto. Una *función de elección*, f, sobre x es una aplicación tal que $\mathrm{dom}(f) = x$ y $\forall y \in x\ (y \neq \emptyset \to f(y) \in y)$.

Axioma de elección (ZERMELO 1904).
$\forall x \exists f\ (f \text{ es aplicación } \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \forall y(y \in x \wedge y \neq \emptyset \to f(y) \in y))$.
Es decir, *para cada conjunto x, existe una función de elección sobre x.*

Consideraciones:

1. El axioma de elección no es demostrable ni refutable a partir de $\mathbf{ZF}^-$.
2. La teoría obtenida añadiéndole a $\mathbf{ZF}^-$ el axioma de elección se representará por $\mathbf{ZFC}^-$.

8.2. El lema de Zorn y el axioma de Zermelo

Definición 8.2.1. Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que un subconjunto, b, de a es una *cadena* de $\langle a, < \rangle$, si b está totalmente ordenado por la ordenación inducida.

Lema de Zorn: Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena está acotada superiormente. Entonces, $\langle a, < \rangle$ posee, al menos, un elemento maximal.

Axioma de Zermelo: Todo conjunto posee, al menos, una buena ordenación.

Teorema 8.2.2. *(del buen orden,* ZERMELO 1904*)*

La teoría $\mathbf{ZFC}^-$ *prueba que todo conjunto posee, al menos, una buena ordenación.*

Teorema 8.2.3. *En la teoría* $\mathbf{ZF}^-$*, son equivalentes:*

(a) *El axioma de elección.*

(b) *El lema de Zorn.*

(c) *El axioma de Zermelo.*

8.3. Problemas resueltos

Nota: Si $\langle a, R \rangle$ es un conjunto p.o., entonces notaremos por $\mathcal{C}(a, R)$ al conjunto $\{x \subseteq a : x \text{ es una cadena de } \langle a, R \rangle\}$.

Ejercicio 126. *Demostrar en* $\mathbf{ZF}^-$ *que si* $\langle a, < \rangle$ *es un conjunto parcialmente ordenado y* b *es una cadena de* $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$*, entonces se verifica:*

(1) $\bigcup b \in \mathcal{C}(a, <)$.

(2) *b está acotada superiormente en* $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$.

Sea b una cadena de $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$.

(1) Sea $c = \bigcup b$.

– Veamos que $c \subseteq a$. En efecto: sea $x \in c$. Entonces, existe $y \in b$ tal que $x \in y$. Como $b \subseteq \mathcal{C}(a, <)$ resulta que $y \in \mathcal{C}(a, <)$. Luego, $y \subseteq a$ y, por tanto, $x \in a$.

– Veamos que c es una cadena de $\langle a, < \rangle$. Para ello, sean $x, y \in c$. Sean $z_1, z_2 \in b$ tales que $x \in z_1 \wedge y \in z_2$. Como b es una cadena de $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$, resulta que $z_1 = z_2 \vee z_1 \subsetneqq z_2 \vee z_2 \subsetneqq z_1$. Luego, existe $z \in b$ tal que $x \in z \wedge y \in z$. Como

$z \in b$, resulta que z es una cadena de $\langle a, < \rangle$ y, en consecuencia, $x = y \lor x < y \lor y < x$.

(2) Por el apartado (1) resulta que $\bigcup b \in \mathcal{C}(a, <)$. Además, se verifica que $\forall x\ (x \in b \implies x \subseteq \bigcup b)$. Luego, $\bigcup b$ es una cota superior de b en $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$.

Ejercicio 127. *Demostrar que en* $\mathbf{ZF}^-$ *son equivalentes las siguientes propiedades:*

(1) *El lema de Zorn.*

(2) *Si a es un conjunto, entonces el conjunto p.o. $\langle \mathcal{C}(a, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$ posee un elemento maximal.*

(3) *Si $\langle a, < \rangle$ es un conjunto p.o., entonces $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$ posee un elemento maximal (principio maximal de Hausdorff).*

(4) *Si $\langle a, < \rangle$ es un conjunto p.o. y b es una cadena de $\langle a, < \rangle$, entonces existe una cadena c de $\langle a, < \rangle$ que es maximal por la relación de inclusión estricta y, además, contiene a b.*

(5) *Sea a un conjunto no vacío. Supongamos que para cada cadena no vacía, b, de $\langle a, \subsetneqq \rangle$ se tiene que $\bigcup b \in a$. Entonces $\langle a, \subsetneqq \rangle$ posee, al menos, un elemento maximal (Lema de Kuratowski).*

$\boxed{(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})}$

Sea a un conjunto. Entonces $\langle \mathcal{C}(a, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. Del ejercicio anterior se deduce que toda cadena de $\langle \mathcal{C}(a, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$ está acotada superiormente. Por tanto, admitiendo el lema de Zorn concluimos que el conjunto p.o. $\langle \mathcal{C}(a, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$ posee, al menos, un elemento maximal.

$\boxed{(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{3})}$

Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto p.o. Consideremos el conjunto $b = \mathcal{C}(a, <)$. De (2) se deduce que existe un elemento maximal, m, de $\langle \mathcal{C}(b, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$. Sea $c = \bigcup m$. Veamos que c es un elemento maximal de $\langle \mathcal{C}(a, <), \subsetneqq \rangle$.

- $c \subseteq a$. En efecto: sea $x \in c$. Entonces existe $y \in m$ tal que $x \in y$. Como $m \in \mathcal{C}(b, \subsetneqq)$ resulta que $m \subseteq b$. Luego, $x \in y \land y \in b$. De la definición de b se deduce que $y \subseteq a$ y, por tanto, $x \in a$.
- c es una cadena de $\langle a, < \rangle$. En efecto: sean $x, y \in c$. Como $m \in \mathcal{C}(b, \subsetneqq)$, existe $z \in m$ tal que $x \in z \land y \in z$. Luego existe $z \in b$ tal que $x \in z \land y \in z$. Por tanto, $x = y \lor x < y \lor y < x$.
- No existe un elemento de $\mathcal{C}(a, <)$ que contenga estríctamente a c. Supongamos lo contrario, sea $x \in \mathcal{C}(a, <)$ tal que $c \subsetneqq x$. Entonces $m \cup \{x\} \in \mathcal{C}(b, \subsetneqq)$, ya que

$$y \in m \Longrightarrow y \subseteq \bigcup m = c \Longrightarrow y \subseteq c \subsetneqq x$$

Pero esto contradice la maximalidad de m en $\langle \mathcal{C}(b, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$, ya que $x \notin m$ (pues si $x \in m$, entonces $x \subseteq \bigcup m = c$, en contradicción con que $c \subsetneqq x$) y, por tanto, $m \subsetneqq m \cup \{x\} \in \mathcal{C}(b, \subsetneqq)$.

$\boxed{(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{2})}$

Sea a un conjunto. Entonces $\langle a, \subsetneqq \rangle$ es un conjunto p.o. Por (3), $\langle \mathcal{C}(a, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$ posee, al menos, un elemento maximal.

$\boxed{(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{4})}$

Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto p.o. y b una cadena de $\langle a, < \rangle$. Consideremos el conjunto $c = \{x \subseteq a : x \text{ es una cadena de } \langle a, < \rangle \wedge b \subseteq x\}$.

Por (2), $\langle \mathcal{C}(c, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$ posee, al menos, un elemento maximal, m. Entonces, es obvio que $\bigcup m$ es una cadena de $\langle a, < \rangle$ que contiene a b y es maximal por la relación de inclusión estricta.

$\boxed{(\mathbf{4}) \Longrightarrow (\mathbf{5})}$

Sea a un conjunto no vacío tal que para cada cadena no vacía b de $\langle a, \subsetneqq \rangle$ se verifica que $\bigcup b \in a$.

Sea $c \in a$. Por (4), existe una cadena, d, de $\langle a, \subsetneqq \rangle$ que contiene a $\{c\}$ y es maximal por la relación de inclusión estricta. Entonces, d es una cadena no vacía de $\langle a, \subsetneqq \rangle$. Luego, $\bigcup d \in a$. Veamos que $m = \bigcup d$ es un elemento maximal de $\langle a, \subsetneqq \rangle$.

- Caso contrario, existiría $x \in a$ tal que $m \subsetneqq x$. En tal situación, $d \cup \{x\}$ es una cadena de $\langle a, \subsetneqq \rangle$ tal que $d \subsetneqq d \cup \{x\}$ y $\{c\} \subseteq d \cup \{x\}$. Lo que contradice la maximalidad de la cadena d.

$\boxed{(\mathbf{5}) \Longrightarrow (\mathbf{1})}$

Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto p.o. tal que toda cadena de $\langle a, < \rangle$ está acotada superiormente. Sea $b = \mathcal{C}(a, <)$. Entonces b es un conjunto no vacío. Además, si c es una cadena no vacía de $\langle b, \subsetneqq \rangle$, entonces $\bigcup c \subseteq a$. Veamos que $\bigcup c \in b$.

- En efecto: como c es una cadena de $\langle b, \subsetneqq \rangle$, para cada $x, y \in \bigcup c$ existe $z \in c$ tal que $x \in z \wedge y \in z$. Como $c \subseteq b$, resulta que z es una cadena de $\langle a, < \rangle$ y, por tanto, $x = y \vee x < y \vee y < x$. Es decir, $\bigcup c \in b$.

De (5) se deduce que existe un elemento maximal, m, de $\langle b, \subsetneqq \rangle$. Como $m \in b$ resulta que m es una cadena y, por tanto, está acotada superiormente en $\langle a, < \rangle$. Sea d una cota superior de m en $\langle a, < \rangle$. Veamos que d es un elemento maximal de $\langle a, < \rangle$.

- Caso contrario, existiría $x \in a$ tal que $d < x$. Entonces, $e = m \cup \{x\}$ sería una cadena de $\langle a, < \rangle$ (pues $\forall y \in m(y \leqslant d)$, luego $\forall y \in m(y < x)$). Como $m \subsetneqq m \cup \{x\}$, esto contradice la maximalidad de m en $\langle b, \subsetneqq \rangle$.

Ejercicio 128. *Probar en* $\mathbf{ZF}^-$ *el siguiente resultado: Sea* $\langle a, < \rangle$ *un conjunto p.o. Consideremos el conjunto*

$$b = \{x \subseteq a : \ x \text{ es b.o. por el orden inducido}\}$$

Definimos en b *la relación* $<'$ *como sigue:*

$$x <' y \leftrightarrow x \subsetneqq y \wedge x \ \text{ es segmento de } \ \langle y, < \rangle$$

Se pide:

(1) *Probar que* $\langle b, <' \rangle$ *es un conjunto p.o.*

(2) *Probar que si* c *es una cadena de* $\langle b, <' \rangle$, *entonces* $\bigcup c \in b$.

(3) *Deducir de (2) que toda cadena de* $\langle b, <' \rangle$ *está acotada superiormente en* $\langle b, <' \rangle$.

(1) La relación $<'$ es **irreflexiva** en b, ya que $x <' y \Longrightarrow x \subsetneqq y \Longrightarrow x \neq y$.

Veamos que la relación $<'$ es **transitiva** en b. Para ello, sean $x, y, z \in b$ tales que $x <' y \wedge y <' z$. Se tiene que $x \subsetneqq z$, pues $x \subsetneqq y \wedge y \subsetneqq z$. Veamos que x es un segmento de $\langle z, < \rangle$.

– En efecto: sean $u \in x$ y $v \in z$ tales que $v < u$. Entonces, $u \in y$. Como $v \in z$, $v < u$ e y es un segmento de $\langle z, < \rangle$, resulta que $v \in y$. Como $u \in x$, $v < u$ y x es un segmento de $\langle y, < \rangle$, se deduce que $v \in x$.

En consecuencia, $x <' z$.

(2) Sea c una cadena de $\langle b, <' \rangle$. Sea $d = \bigcup c$. Veamos que $d \in b$.

En primer lugar, veamos que $d \subseteq a$. En efecto: sea $x \in d$. Entonces, existe $y \in c$ tal que $x \in y$. Como $y \in c$ y $c \subseteq b$, resulta que $y \in b$. Luego, $y \subseteq a$. Por tanto, $x \in a$.

En segundo lugar, veamos que d está bien ordenado por el orden inducido. Para ello, sea e un subconjunto no vacío de d. Sea $x \in e$. Entonces, $x \in e \subseteq d = \bigcup c$. Luego, existe $y \in c$ tal que $x \in y$. Por tanto, $e \cap y$ es un subconjunto no vacío de y. Ahora bien, $y \in c \Longrightarrow y \in b$. Es decir, y está bien ordenado por el orden inducido. Luego, existe $z = \text{mín}(e \cap y)$. Veamos que $z = \text{mín}(e)$.

- Obviamente $z \in e$.
- Veamos que z es una cota inferior de e en $\langle d, < \rangle$. Para ello, sea $t \in e$. Entonces,

– O bien $t \in y$, en cuyo caso $t \in e \cap y$ y, por tanto, $z \leqslant t$.

– O bien $t \notin y$, en cuyo caso, como $t \in e \subseteq \bigcup c$, existe $u \in c$ tal que $t \in u$. Ahora bien, $u \in c$, $y \in c$ y c es una cadena de $\langle b, <' \rangle$. Luego,

$$u = y \vee u <' y \vee y <' u \qquad (\star)$$

Como $t \in u$ y $t \notin y$, resulta que $\neg(u \subsetneqq y)$. Luego, $\neg(u <' y)$. De $(\star)$ se deduce que $y \leqslant' u$. Es decir, $y \subseteq u$ e y es un segmento de $\langle u, < \rangle$.
Luego,

$$z \in y \wedge y \subseteq u \Longrightarrow z \in u$$

Pero

$$u \in c \wedge c \subseteq b \Longrightarrow u \in b$$

Por tanto, u está bien ordenado por el orden inducido.
Como $z \in u \wedge t \in u$, deducimos que $t = z \vee t < z \vee z < t$. Ahora bien, no puede verificarse que $t < z$ pues, en tal caso, $t \in y$ (ya que $z \in y \wedge t \in u \wedge y$ es un segmento de $\langle u, < \rangle$). En consecuencia, $z \leq t$.

(3) Sea c una cadena de $\langle b, <' \rangle$. Hemos visto que $\bigcup c \in b$. Veamos que $\bigcup c$ es una cota superior de c en $\langle b, <' \rangle$.

– Para ello, sea $x \in c$. Entonces, $x \subseteq \bigcup c$. Veamos que x es un segmento de $\bigcup c$ (de donde se sigue que $x \leqslant' \bigcup c$).

  ■ Sean $u \in x$ y $v \in \bigcup c$ tales que $v < u$. Hemos de ver que $v \in x$.
  Sea $t \in c$ tal que $v \in t$. Como c es una cadena de $\langle b, <' \rangle$, resulta que $t = x \vee t <' x \vee x <' t$.
  Luego, o bien x es un segmento de $\langle t, < \rangle$, en cuyo caso $v \in x$ (pues $u \in x \wedge v \in t \wedge v < u$); o bien t es un segmento de $\langle x, < \rangle$, en cuyo caso $v \in t \Longrightarrow v \in x$.

Ejercicio 129. *Demostrar en* **ZFC**$^-$ *el siguiente resultado: Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto p.o. no vacío tal que todo subconjunto de a que sea b.o. por la ordenación inducida, está acotado superiormente en $\langle a, < \rangle$. Probar que $\langle a, < \rangle$ posee, al menos, un elemento maximal.*

Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto p.o. Consideremos el conjunto

$$b = \{x \subseteq a : \ x \text{ es b.o. por el orden inducido}\}$$

Definimos en b la relación $<'$ como sigue:

$$x <' y \leftrightarrow x \subsetneqq y \wedge x \ \text{ es un segmento de } \ \langle y, < \rangle$$

Hemos visto en el ejercicio anterior que $\langle b, <' \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena de $\langle b, <' \rangle$ está acotada superiormente en $\langle b, <' \rangle$. Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal, m, de $\langle b, <' \rangle$.

Como $m \in b$, por hipótesis existe una cota superior, c, de m en $\langle a, < \rangle$. Veamos que c es un elemento maximal de $\langle a, < \rangle$.

- Obviamente $c \in a$.
- No existe un elemento $x \in a$ tal que $c < x$. En efecto: si existiera un tal elemento x, resultaría que $m \cup \{x\} \in b$ (ya que todo elemento de m es menor o igual que c y, por tanto, estríctamente menor que x; luego $m \cup \{x\}$ está bien ordenado). Además $m \subsetneqq m \cup \{x\}$ y m es un segmento de $m \cup \{x\}$. Luego, $m <' m \cup \{x\}$. Lo que contradice la maximalidad de m en $\langle b, <' \rangle$.

Ejercicio 130. *Demostrar que en* $\mathbf{ZF}^-$ *son equivalentes:*

(1) *El axioma de elección.*

(2) *Para cada familia* $(a_i)_{i \in I}$ *de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano* $\prod_{i \in I} a_i$ *es no vacío.*

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supongamos cierto el axioma de elección. Sea $(a_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos; es decir, existe una aplicación f de I en $\mathbf{V}$ tal que

$$\forall i \in I \, (f(i) = a_i \neq \emptyset)$$

Por el esquema de axiomas de reemplazamiento, la clase $f[I]$ es un conjunto (por serlo I).

Sea g una función de elección de $f[I]$. Es decir, g es una aplicación cuyo dominio es $f[I]$ y, además,

$$\forall x (x \in f[I] \wedge x \neq \emptyset \rightarrow g(x) \in x)$$

Luego, para cada $i \in I$ se tiene que $g(f(i)) = g(a_i) \in a_i$. Es decir, $g \circ f \in \prod_{i \in I} a_i$

$\boxed{(2) \Longrightarrow (1)}$

Supongamos que para cada familia $(a_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos se verifica que $\prod_{i \in I} a_i \neq \emptyset$.

Sea b un conjunto y consideremos la aplicación $f : b \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in b \wedge x \neq \emptyset \\ 1 & \text{si} \quad x \in b \wedge x = \emptyset \end{cases}$$

Entonces $(f(x))_{x\in b}$ es una familia de conjuntos no vacíos. Luego, por hipótesis, $\prod_{x\in b} f(x) \neq \emptyset$. Sea $g \in \prod_{x\in b} f(x)$. Veamos que g es una función de elección de b.

– Obviamente, g es una aplicación cuyo dominio es b. Además, si $x \in b \wedge x \neq \emptyset$, entonces $g(x) \in f(x)$ (ya que $g \in \prod_{x\in b} f(x)$) y $f(x) = x$, por definición de f. En consecuencia, $g(x) \in x$.

Ejercicio 131. *Demostrar que en* **ZF**$^-$ *son equivalentes:*

(1) *El axioma de elección.*

(2) *Si a es un conjunto, entonces para cada partición de a existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada conjunto de la partición.*

Indicación: *En* $(2) \implies (1)$, *si a es un conjunto, considérese la partición*

$$\Delta = \{\{y\} \times y : y \in a - \{\emptyset\}\}$$

$\boxed{(1) \implies (2)}$

Supongamos (1); es decir, que es cierto el axioma de elección. Sean a un conjunto y g una partición de a (con conjunto de índices I). Notemos

$$\operatorname{rang}(g) = \Delta = \{a_i : i \in I\}$$

Sean f una función de elección de Δ y $b = f[\Delta]$. Veamos que b posee uno y sólo un elemento común con cada conjunto a_i de la partición g.

– En efecto: sea $a_i \in \Delta$. Como $a_i \in \Delta$ y $a_i \neq \emptyset$ resulta que $f(a_i) \in a_i \wedge f(a_i) \in b$.

  Sea $x \in b \cap a_i$. Veamos que $x = f(a_i)$.

    Como $x \in b$, existe $z \in \Delta$ tal que $x = f(z)$. Entonces $x \in z$. Puesto que $z, a_i \in \Delta$ y $z \cap a_i \neq \emptyset$, se deduce que $z = a_i$. Luego, $x = f(a_i)$.

$\boxed{(2) \implies (1)}$

Sean a un conjunto. Consideremos

$$\Delta = \{\{y\} \times y : \ y \in a - \{\emptyset\}\}$$

Obviamente, Δ es el rango de una partición del conjunto

$$\bigcup \{\{y\} \times y : \ y \in a - \{\emptyset\}\}$$

Luego, por la hipótesis (2) existe un conjunto b que posee uno y sólo un elemento en común con cada conjunto de dicha partición (es decir, con cada elemento de Δ).

Consideremos la aplicación $f : a \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$f(y) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad y \in a \wedge y = \emptyset \\ z & \text{si} \quad y \in a \wedge y \neq \emptyset \wedge \{\langle y, z\rangle\} = b \cap (\{y\} \times y) \end{cases}$$

Obviamente, f es una aplicación cuyo dominio es a (ya que si $y \in a - \{\emptyset\}$, entonces el conjunto $b \cap (\{y\} \times y)$ es unitario).

Además, si $y \in a \wedge y \neq \emptyset$, entonces $\{y\} \times y \in \Delta$. Luego existe $z \in \mathbf{V}$ tal que $\{\langle y, z\rangle\} = b \cap (\{y\} \times y)$. Entonces se tiene que $f(y) = z \wedge z \in y$. Es decir, $f(y) \in y$. Lo que prueba que f es una función de elección de a.

Ejercicio 132. *Demostrar que en* $\mathbf{ZF}^-$ *son equivalentes:*

(1) *El axioma de elección.*

(2) *Si a es un conjunto y R es una relación de equivalencia en a, entonces existe un conjunto b que tiene uno y sólo un elemento en común con cada clase de equivalencia de a por R $[\![$ se dice que b es un conjunto de Zermelo de a relativo a R $]\!]$.*

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supongamos cierto el axioma de elección. Sean a un conjunto y R una relación de equivalencia en a. Entonces $a/R = \{x :\ \exists y \in a\ (x = \overline{y}^R)\}$ es una partición de a. Del ejercicio 129 se deduce que existe un conjunto b que posee uno y sólo un elemento en común con cada conjunto de la partición; es decir, con cada clase de equivalencia de a por R.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (1)}$

Supongamos cierta la hipótesis (2). Sea a un conjunto. Consideremos el conjunto

$$c = \{\langle x, y\rangle :\ x \in a \wedge x \neq \emptyset \wedge y \in x\}$$

Definimos en c una relación R como sigue:

$$\langle x_1, y_1\rangle R \langle x_2, y_2\rangle \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

Obviamente, R es una relación de equivalencia en c. Sea b un conjunto de Zermelo de c relativo a R. Consideremos la aplicación $f : a \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad x \in a \wedge x = \emptyset \\ y & \text{si} \quad x \in a \wedge x \neq \emptyset \wedge \{\langle x, y\rangle\} = b \cap \{\langle x, z\rangle :\ z \in x\} \end{cases}$$

Obviamente, f es una aplicación cuyo dominio es a (ya que si $x \in a - \{\emptyset\}$, entonces el conjunto $b \cap \{\langle x, z\rangle :\ z \in x\}$ es unitario, por hipótesis).

Además, si $x \in a \wedge x \neq \emptyset$, entonces existe un conjunto $y \in \mathbf{V}$ tal que $\{\langle x,y\rangle\} = b \cap \{\langle x,z\rangle : z \in x\}$. Entonces se tiene que $y = f(x) \wedge y \in x$. Luego, $f(x) \in x$. Lo que prueba que f es una función de elección de a.

Ejercicio 133. *Demostrar que en* $\mathbf{ZF}^-$ *son equivalentes:*

(1) *El axioma de elección.*

(2) *Toda relación binaria que sea un conjunto, contiene una aplicación con el mismo dominio.*

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supongamos cierto el axioma de elección. Sea R una relación binaria que es un conjunto. Sean $a = \text{dom}(R)$ y $b = \text{rang}(R)$ (recuérdese que si una relación es un conjunto, entonces también lo son su dominio y su rango). Sea f una función de elección de $\mathbf{P}(b)$.

Consideremos la aplicación $g : a \to \mathbf{V}$ definida así: $g(x) = f(R[\{x\}])$ (para cada $x \in a$).

Como f es una aplicación cuyo dominio es $\mathbf{P}(b)$ y para cada $x \in a$ se tiene que $R[\{x\}] \subseteq b$, resulta que g es una aplicación cuyo dominio es a =dom(R).

Veamos que $g \subseteq R$. Para ello, sea $x \in a$. Entonces $R[\{x\}] \in P(b) - \{\emptyset\}$ (pues $x \in \text{dom}(R)$). Luego,

$$g(x) = f(R[\{x\}]) \in R[\{x\}] \subseteq \text{rang}(R)$$

Es decir, $\langle x, g(x)\rangle \in R$.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (1)}$

Supongamos cierta la hipótesis (2). Sea a un conjunto. Consideremos la ralación binaria R definida como sigue:

$$R = \begin{cases} \{\langle x,y\rangle : x \in a \wedge y \in x\} & \text{si} \quad \emptyset \notin a \\ \{\langle x,y\rangle : x \in a \wedge y \in x\} \cup \{\langle \emptyset,\emptyset\rangle\} & \text{si} \quad \emptyset \in a \end{cases}$$

Entonces existe una aplicación g tal que $g \subseteq R \wedge$ dom(g) =dom$(R) = a$.

Veamos que g es una función de elección de a. En efecto: sea $x \in a$ tal que $x \neq \emptyset$. Entonces

$$\langle x, g(x)\rangle \in g \subseteq R \Longrightarrow \langle x, g(x)\rangle \in R \Longrightarrow g(x) \in x$$

Ejercicio 134. *Sean a, b conjuntos y f una aplicación de a en b. Demostrar en* $\mathbf{ZFC}^-$ *que f es suprayectiva si y sólo si existe una aplicación h de b en a tal que $f \circ h = I_b$, siendo I_b la aplicación identidad en el conjunto b.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ **(AC)**

Supongamos que f es una aplicación suprayectiva de a en b. Sea g una función de elección de $\mathbf{P}(a)$.

Consideremos la aplicación $h : b \to a$ definida como sigue: $h(x) = g(f^{-1}[\{x\}])$, para cada $x \in b$. La aplicación h está bien definida ya que si $x \in b$, entonces $\emptyset \neq f^{-1}[\{x\}] \subseteq a$; por tanto, $g(f^{-1}[\{x\}]) \in f^{-1}[\{x\}] \subseteq a$

Veamos que $f \circ h = I_b$.

– Obviamente, $f \circ h$ es una aplicación de b en b.

– Además, para cada $x \in b$ se tiene que

$$h(x) = g(f^{-1}[\{x\}]) \in f^{-1}[\{x\}] \Longrightarrow f(h(x)) \in \{x\} \Longrightarrow f(h(x)) = x$$

Nota: Téngase presente que si el conjunto a es bien ordenable, entonces **no** hace falta el axioma de elección en esta implicación.

En efecto: sea R un buen orden en a. Consideremos la aplicación $h : b \to a$ definida como sigue: $h(x) = \text{mín}_R(f^{-1}[\{x\}])$, para cada $x \in b$. Entonces, h satisface los requisitos exigidos.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que f es una aplicación de a en b para la que existe una aplicación h de b en a tal que $f \circ h = I_b$. Entonces $f \circ h$ es biyectiva y, en consecuencia, la aplicación f es suprayectiva.

Ejercicio 135. *Sea $\langle A, < \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Demostrar que en* **ZFC**$^-$ *son equivalentes:*

(1) *Todo subconjunto no vacío de A posee algún elemento minimal.*

(2) *No existe una aplicación $f : \omega \to A$ tal que $\forall n \in \omega\ (f(n+1) < f(n))$.*

Indicación: *Probar (2) $\Longrightarrow$ (1) por el contrarrecíproco, usando el teorema de recursión sobre ω.*

$\boxed{\neg(2) \Longrightarrow \neg(1)}$

Supongamos que se verifica $\neg(2)$. Sea f una aplicación de ω en A tal que

$$\forall n \in \omega\ (f(n+1) < f(n))$$

En tal situación, $f[\omega]$ es un subconjunto no vacío de A que carece de elementos minimales. Por tanto, se verifica $\neg(1)$.

$\boxed{\neg(1) \Longrightarrow \neg(2)}$ **(AC)**

Supongamos que se verifica $\neg(1)$. Sea B un subconjunto no vacío de A que carece de elementos minimales. Sea f una función de elección de $\mathbf{P}(B)$.

Consideremos la aplicación $H : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definida como sigue:

$$H(x) = \begin{cases} f(S^A_<(x) \cap B) & \text{si} \quad x \in B \\ \emptyset & \text{si} \quad x \notin B \end{cases}$$

Sea $a \in B$. Entonces por el teorema de recursión en ω existe una única aplicación $g : \omega \to \mathbf{V}$ verificando:

$$g(0) = a \wedge \forall n \in \omega \ (g(n+1) = H(g(n)))$$

Veamos que $g[\omega] \subseteq B$. Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$

Trivial, ya que $g(0) = a \in B$

$\boxed{n \to n+1}$

Sea $n \in \omega$ tal que $g(n) \in B$. Se verifica que

$$g(n+1) = H(g(n)) \overset{h.i.}{=} f(S^A_<(g(n)) \cap B)$$

Ahora bien, se tiene que $S^A_<(g(n)) \cap B \neq \emptyset$, pues de lo contrario resultaría que $g(n)$ sería elemento minimal de B. Luego

$$S^A_<(g(n)) \cap B \in \mathbf{P}(B) - \{\emptyset\}$$

Como f es una función de elección de $\mathbf{P}(B)$, se deduce que $g(n+1) = f(S^A_<(g(n)) \cap B) \in B$.

En consecuencia, g es una aplicación de ω en B (y, por tanto, aplicación de ω en A) tal que

$$\forall n \in \omega \ (g(n+1) = f(S^A_<(g(n)) \cap B))$$

Luego

$$\forall n \in \omega \ (g(n+1) \in S^A_<(g(n)) \cap B)$$

Es decir

$$\forall n \in \omega \ (g(n+1) < g(n))$$

8.4. Problemas propuestos

Ejercicio 8.1. Utilizando el lema de Zorn, probar el teorema de comparación de buenos órdenes.

Indicación: Sean $\langle a, <\rangle$ y $\langle b, <'\rangle$ conjuntos b.o. Considérese el conjunto c cuyos elementos son los pares ordenados $\langle S, f_S\rangle$ que verifican las condiciones siguientes: S es un segmento de $\langle a, <\rangle$ y f_S es un isomorfismo de S en un segmento inicial de $\langle b, <'\rangle$. Defínase en c una relación R como sigue:

$$\langle S, f_S\rangle R \langle T, f_T\rangle \iff S \subsetneqq T \wedge f_T \restriction S = f_S$$

Pruébese que $\langle c, R\rangle$ es un conjunto p.o. tal que toda cadena está acotada superiormente. Si $\langle S, f_S\rangle$ es un elemento maximal de $\langle c, R\rangle$, pruébese que $(S = A) \vee (f_S[S] = B)$.

Ejercicio 8.2. Sea a un conjunto. Notemos $O(a)$ y $T(a)$ a los conjuntos cuyos elementos son los órdenes parciales ó totales, respectivamente, de a. Se pide:

(1) Probar que $R \in T(a)$ si y sólo si R es un elemento maximal de $\langle O(a), \subsetneqq\rangle$.

(2) Utilizando el lema de Zorn, probar que $T(a)$ es una *parte cofinal* de $\langle O(a), \subsetneqq\rangle$ (es decir, para cada $R \in O(a)$ existe $S \in T(a)$ tal que $R \subseteq S$).

Indicación: **(2)** Si $R \in O(a)$, entonces considérese el conjunto

$$b = \{S \in O(a) : \ R \subseteq S\}$$

Pruébese que $\langle b, \subsetneqq\rangle$ es un conjunto p.o. tal que toda cadena está acotada superiormente. Finalmente, téngase presente el apartado (1).

Ejercicio 8.3. Probar en $\mathbf{ZFC}^-$ que si a y b son conjuntos, entonces o bien existe una aplicación inyectiva de a en b, o bien existe una aplicación inyectiva de b en a.

Indicación: Considérese sendos buenos órdenes en a y b, así como los correspondientes tipos ordinales.

Ejercicio 8.4. Probar en $\mathbf{ZFC}^-$ el siguiente resultado: Sean a, b y c conjuntos. Sean $f \in^a b$ y $g \in^c b$. Entonces, $g[c] \subseteq f[a] \iff \exists h \in^c a \ (f \circ h = g)$.

Indicación: $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $g[c] \subseteq f[a]$, entonces considérese una función de elección, φ, sobre $\mathbf{P}(a)$. Defínase $h \in^c a$ así: $h(x) = \varphi(f^{-1}[\{g(x)\}])$.

Ejercicio 8.5. Usando el axioma de elección, probar que existe un conjunto $a \subseteq \mathbb{R}$ verificando la siguiente propiedad:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! y \in a \ (x - y \in \mathbb{Q})$$

Indicación: Considerése la relación S definida en $\mathbb{R}$ como sigue: $xSy \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Pruébese que S es de equivalencia en $\mathbb{R}$ y tómese un conjunto de representantes de la partición asociada a dicha relación de equivalencia.

Capítulo 9

Conjuntos finitos, infinitos y numerables

9.1. Conjuntos finitos

Definición 9.1.1. Diremos que dos conjuntos x e y son *equipotentes* o *coordinables* (y notaremos $x \sim y$) si existe una aplicación biyectiva de x en y.

Si consideramos la relación de equipotencia en la clase $\mathbf{V}$ (dos conjuntos están relacionados si y sólo si son equipotentes), entonces se prueba fácilmente que dicha relación es de equivalencia (pues la identidad es una aplicación biyectiva de un conjunto en sí mismo, la inversa de una aplicación biyectiva es biyectiva y la composición de dos aplicaciones biyectivas es una aplicación biyectiva).

Definición 9.1.2. Diremos que un conjunto x es *finito* si existe un número natural n tal que $x \sim n$. Caso contrario, diremos que el conjunto x es *infinito*.

Ejemplos: El conjunto vacío es finito. Si x es un conjunto finito, entonces para cada conjunto y se tiene $x \cup \{y\}$ es un conjunto finito. En particular, el conjunto siguiente de un conjunto finito es, asímismo, un conjunto finito. Por tanto, todos los números naturales son conjuntos finitos.

Definición 9.1.3. Una *sucesión finita* de elementos de un conjunto a es una aplicación de n en a, para un cierto número natural n (es decir, es una familia de elementos de a con conjunto de índices un número natural). Una *sucesión infinita* (o más brevemente, una sucesión) de elementos de un conjunto a es una aplicación de ω en a (es decir, es una familia de elementos de a con conjunto de índices ω).

Proposición 9.1.4. *(Principio del palomar, Dirichlet)*

Sean $n \in \omega$ y f una aplicación inyectiva de n en n. Entonces, f es biyectiva de n en n.

Proposición 9.1.5. *Sean $n \in \omega$ y a un subconjunto propio de n. Entonces, a no es equipotente a n.*

Proposición 9.1.6. *Sean $p, n \in \omega$ tales que $p \neq n$. Entonces, p no es equipotente a n.*

Proposición 9.1.7. *Sea a un conjunto finito. Entonces, existe un único número natural, n, tal que $a \sim n$.*

Definición 9.1.8. Si a es un conjunto finito, entonces el único número natural, n, equipotente a él, se denomina *cardinal* o *número de elementos* del conjunto finito a, y lo notaremos así: $|a| = n$.

Proposición 9.1.9. *Dos conjuntos finitos son equipotentes si y sólo si poseen el mismo cardinal.*

Proposición 9.1.10. *Sea a un conjunto finito. Entonces, no existe un subconjunto $b \subsetneqq a$ tal que $b \sim a$.*

La proposición anterior se puede expresar en los siguientes términos: si un conjunto es equipotente a un subconjunto propio suyo, entonces dicho conjunto es infinito.

Proposición 9.1.11. *El conjunto ω de los números naturales es infinito.*

Proposición 9.1.12. *Sea a un conjunto finito. Se verifica:*

(1) *Sea b un conjunto tal que $b \notin a$. Entonces $a \cup \{b\}$ es finito y $|a \cup \{b\}| = |a| + 1$.*

(2) *Sea b un conjunto tal que $b \in a$. Entonces $a - \{b\}$ es finito y $|a - \{b\}| = |a| - 1$.*

Proposición 9.1.13. *Sean $n \in \omega$ y a un subconjunto de n. Entonces, a es finito y $|a| \leqslant n$.*

Proposición 9.1.14. *Sean a un conjunto finito y b un subconjunto de a. Entonces, b es finito y $|b| \leqslant |a|$.*

Proposición 9.1.15. *Sean a un conjunto finito y f una aplicación cuyo dominio es a. Entonces $f[a]$ es un conjunto finito.*

Proposición 9.1.16. *Sean a y b conjuntos finitos. Se verifica:*

(1) *Si a y b son disjuntos, entonces $a \cup b$ es finito y $|a \cup b| = |a| + |b|$.*

(2) *El conjunto $a \cup b$ es finito y $|a \cup b| + |a \cap b| = |a| + |b|$.*

(3) *El conjunto $a \times b$ es finito y $|a \times b| = |a| \cdot |b|$.*

(4) *El conjunto $\mathbf{P}(a)$ es finito y $|\mathbf{P}(a)| = 2^{|a|}$.*

(5) *Si todos los elementos de a son conjuntos finitos, entonces $\bigcup a$ es finito.*

9.2. Conjuntos numerables

Definición 9.2.1. Diremos que un conjunto x es *numerable* si y sólo si $x \sim \omega$.

A veces, se dice que un conjunto x es *numerable** si y sólo si existe una aplicación inyectiva de x en ω. Desde luego,

$$(\text{numerable}^*) \equiv (\text{finito}) \ \vee \ (\text{numerable})$$

Consideraciones:

(1) El conjunto ω es numerable.

(2) El conjunto $\omega \times \omega$ es numerable, ya que la aplicación $f : \omega \times \omega$ definida por

$$f(x, y) = \frac{(x + y) \cdot (x + y + 1)}{2} + x$$

es biyectiva (ver ejercicio 68).

(3) Si a es un conjunto numerable, entonces, sin necesidad de usar el axioma de elección, podemos garantizar que existe una buena ordenación en a. En efecto: si f es una aplicación biyectiva de ω en a, entonces basta considerar la ordenación en a trasportada por f, de la usual de ω.

(4) Si a es un conjunto numerable, entonces a es infinito. En efecto: si a fuese finito, como $a \sim \omega$ resultaría que también lo sería ω.

(5) Sean a y b conjuntos tales que b es numerable y $b \subseteq a$. Entonces, a es un conjunto infinito (más adelante veremos que, usando el axioma de elección, se puede demostrar el recíproco de esta propiedad).

(6) Si α es un ordinal tal que $\omega \leqslant \alpha$, entonces α es un conjunto infinito. En consecuencia, un ordinal α es un conjunto finito si y sólo si $\alpha < \omega$. Lo que justifica que hayamos denominado ordinales finitos a los números naturales.

Proposición 9.2.2. *Sea a un subconjunto de ω. Entonces, a es finito o numerable.*

Proposición 9.2.3. *Sean a un conjunto numerable y b un subconjunto de a. Entonces, b es finito o numerable.*

Proposición 9.2.4. *(**ZFC$^-$**).*

Si a es un conjunto infinito, entonces existe $b \subseteq a$ tal que b es un conjunto numerable.

Proposición 9.2.5. *Sean a un conjunto y f una aplicación suprayectiva de ω en a. Entonces, a es finito o numerable.*

Proposición 9.2.6. *Sean a un conjunto numerable y f una aplicación. Entonces, el conjunto $f[a]$ es finito o numerable.*

Proposición 9.2.7. *Sean a un conjunto numerable y R una relación de equivalencia en a. Entonces, el conjunto cociente a/R es finito o numerable.*

Proposición 9.2.8. *Sean a y b conjuntos numerables. Entonces, los conjuntos $a \times b$ y $a \cup b$ son conjuntos numerables.*

Proposición 9.2.9. *Sean I un conjunto finito no vacío y $(a_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces, los conjuntos $\bigcup\limits_{i \in I} a_i$ y $\prod\limits_{i \in I} a_i$, son numerables.*

Teorema 9.2.10. *(**ZFC**$^-$).*

Sean I un conjunto numerable y $(a_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos numerables. Entonces, el conjunto $\bigcup\limits_{i \in I} a_i$ es numerable.

Teorema 9.2.11. *(**ZFC**$^-$).*

Sean I un conjunto numerable y $(a_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos finitos. Entonces, el conjunto $\bigcup\limits_{i \in I} a_i$ es finito o numerable.

Teorema 9.2.12. *(de Cantor)*

Si a es un conjunto, entonces a no es equipotente a $\mathbf{P}(a)$.

Corolario 9.2.13. *Si a es un conjunto numerable, entonces $\mathbf{P}(a)$ es un conjunto no numerable.*

9.3. Problemas resueltos

Ejercicio 136. *Demostrar que si $x \sim y$, entonces $\mathbf{P}(x) \sim \mathbf{P}(y)$.*

Supongamos que $x \sim y$. Sea f una aplicación biyectiva de x en y. Consideremos la aplicación $g : \mathbf{P}(x) \to \mathbf{P}(y)$ definida así: $g(z) = f[z]$, para cada $z \in \mathbf{P}(x)$. Obviamente, g es una aplicación de $\mathbf{P}(x)$ en $\mathbf{P}(y)$.

- Veamos que g es una aplicación inyectiva.

  Sean $z, t \in \mathbf{P}(x)$ tales que $g(z) = g(t)$. Entonces $f[z] = f[t]$. Como f es inyectiva, resulta que $z = t$.

- Veamos que g es una aplicación suprayectiva de $\mathbf{P}(x)$ en $\mathbf{P}(y)$.

  Sea $z \in \mathbf{P}(y)$. Consideremos $t = f^{-1}[z]$. Entonces $t \in \mathbf{P}(x)$. Además, $g(t) = f[f^{-1}[z]] = z$ (esta última relación se verifica debido a que la aplicación f es biyectiva).

Ejercicio 137. *Demostrar o refutar:* $y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge y \sim z \to x - y \sim x - z$.

El aserto es **falso**. En efecto: consideremos $x = \omega, y = \omega, z = \{2n : \ n \in \omega\}$. Entonces $y \sim z$ ya que la aplicación $f : y \to z$ definida por $f(n) = 2n$ es, obviamente, biyectiva. Además,

$$y \subseteq x \wedge z \subseteq x \wedge x - y = \emptyset \nsim x - z \neq \emptyset$$

Ejercicio 138. *Demostrar que un conjunto a es finito si y sólo si existen $n \in \omega$ y una aplicación suprayectiva de n en a.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto finito. Sea $n \in \omega$ tal que $a \sim n$. Entonces, existe una aplicación suprayectiva de n en a.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que a es un conjunto tal que existen $n \in \omega$ y una aplicación suprayectiva, f, de n en a.

Consideremos la aplicación $g : a \to n$ definida como sigue:

$$g(x) = \ \text{mín}_<(f^{-1}[\{x\}]), \ \text{ para cada } x \in a$$

(siendo $<$ el orden usual del número natural n).

Como f es una aplicación suprayectiva de n en a, resulta que para cada $x \in a$, $f^{-1}[\{x\}]$ es un subconjunto no vacío de n. Por tanto, g es una aplicación bien definida cuyo dominio es a y su rango está contenido en n.

Veamos que la aplicación g es inyectiva.

– Sean $x, y \in a$ tales que $g(x) = g(y)$. Entonces

$$\text{mín}_<(f^{-1}[\{x\}]) = \ \text{mín}_<(f^{-1}[\{y\}])$$

Luego $f^{-1}[\{x\}] \cap f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Como f es funcional y $x, y \in \text{rang}(f)$, se deduce que $x = y$.

Así pues, g es una aplicación inyectiva de a en n; luego g es una biyección de a en $g[a]$.

Ahora bien, como $g[a] \subseteq n$ resulta que el conjunto $g[a]$ es finito. Finalmente, teniendo presente que $a \sim g[a]$, concluimos que a es un conjunto finito.

Ejercicio 139. *Sean a un conjunto finito no vacío y R un orden total en a. Probar que $\langle a, R\rangle$ posee elemento máximo y elemento mínimo.*

Vamos a probar el resultado por inducción débil en el número de elementos del conjunto no vacío a. Para ello, sea

$$b = \{n \in \omega - \{0\} : \begin{array}{l}\text{si } a \text{ es un conjunto no vacío tal que } |a| = n \text{ y } R \text{ es} \\ \text{un orden total en } a, \text{ entonces } \langle a, R\rangle \text{ posee elemento} \\ \text{máximo y elemento mínimo}\}\end{array}$$

Veamos que $b = \omega - \{0\}$, por inducción débil en $\omega - \{0\}$.

$\boxed{n = 1}$

Obviamente, $1 \in b$ ya que si un conjunto es unitario, su componente es el elemento máximo y mínimo respecto del único orden total que existe en dicho conjunto (el orden $R = \emptyset$).

$\boxed{n \to n+1}$

Supongamos que $n \in b$. Para probar que $n+1 \in b$, sean a un conjunto finito tal que $|a| = n+1$ y R un orden total en a.

Sea $x \in a$ y consideremos el conjunto $c = a - \{x\}$. Entonces $|c| = n$ y $R' = R \upharpoonright c$ es un orden total en c. Luego, por hipótesis de inducción, existen $y_0 = \text{máx}_{R'}\, c$ y $z_0 = \text{mín}_{R'}\, c$. Puesto que el orden R es total, existen $y_1 = \text{máx}\{y_0, x\}$ y $z_1 = \text{mín}\{z_0, x\}$. Por construcción, es inmediato que $y_1 = \text{máx}_R\, a$ y $z_1 = \text{mín}_R\, a$.

Ejercicio 140. *Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y sólo si existe un buen orden R en a tal que R^{-1} es un buen orden en a (Caracterización debida a Zermelo).*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto finito. Sean $n \in \omega$ y f una aplicación biyectiva de n en a. Sea R la ordenación usual del número natural n. Entonces R y R^{-1} son buenos órdenes en n.

Sea R_1 la ordenación de a transportada por f a partir de R. Entonces $\langle a, R_1 \rangle$ y $\langle a, R_1^{-1} \rangle$ son conjuntos bien ordenados (obsérvese que la ordenación inversa de la trasladada es la trasladada de la ordenación inversa).

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que a es un conjunto tal que existe un b.o. R en a verificando que R^{-1} es, también, un b.o. en a.

Si $a = \emptyset$, entonces a es un conjunto finito. Supongamos que $a \neq \emptyset$. Sea $c =$mín$_R$ a. Consideremos el conjunto

$$b = \{x \in a : \ S_R^a(x) \ \text{ es finito } \}$$

Entonces b es un subconjunto no vacío de a (ya que $c \in b$ pues $S_R^a(c) = \emptyset$). Sea $d =$mín$_{R^{-1}}$ b; es decir, $d =$max$_R$ b.

Veamos que $a = S_R^a(d) \cup \{d\}$ (de donde concluiremos que el conjunto a es finito, por serlo $S_R^a(d)$).

– Supongamos que $a \neq S_R^a(d) \cup \{d\}$. Sea

$$e = \ \text{mín}_R \ (a - (S_R^a(d) \cup \{d\}))$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} x \in S_R^a(e) & \Longrightarrow & x \in a \wedge x \notin (a - (S_R^a(d) \cup \{d\})) \\ & \Longrightarrow & x \in (S_R^a(d) \cup \{d\}) \\ x \in (S_R^a(d) \cup \{d\}) & \Longrightarrow & x \in a \wedge (xRd \vee x = d) \Longrightarrow x \in S_R^a(e) \end{array}$$

Luego,

$$S_R^a(e) = S_R^a(d) \cup \{d\}$$

Como el conjunto $S_R^a(d) \cup \{d\}$ es finito, deduciríamos que $e \in b$. Pero $dRe \wedge d =$máx$_R$ b. Lo que es una contradicción.

Ejercicio 141. *Probar en* **ZFC**$^-$ *que un conjunto a es infinito si y sólo si existe un subconjunto b de a que es numerable.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ (**ZFC**$^-$)

Supongamos que a es un conjunto infinito. Como admitimos el axioma de elección, existe un buen orden R en a. Sea $\alpha = \text{t.o.}(\langle a, R\rangle)$. Entonces $\omega \leqslant \alpha$ (ya que $\alpha < \omega \Longrightarrow a$ finito). Por tanto, si f es el isomorfismo que existe de $\langle \alpha, \in\rangle$ en $\langle a, R\rangle$, entonces $f[\omega]$ es un subconjunto numerable de a.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que a es un conjunto para el que existe $b \subseteq a$ tal que b es numerable. Entonces b es infinito y, por tanto, también lo es el conjunto a.

Ejercicio 142. *Diremos que un conjunto a es* **infinito según Dedekind** *si y sólo si existe un subconjunto propio de a equipotente al conjunto a.*
Probar en **ZFC**$^-$ *que un conjunto a es infinito si y sólo si es infinito, según Dedekind.*

$\boxed{\Longrightarrow}$ (**ZFC**$^-$)

Supongamos que a es un conjunto infinito. Por el ejercicio anterior, existe $b \subseteq a$ tal que b es numerable. Sea f una aplicación biyectiva de ω en b. Consideremos la aplicación $g : a \to a - \{f(0)\}$ definida como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in a - b \\ f(n+1) & \text{si} \quad x \in b \wedge x = f(n) \;\; \text{con} \;\; n \in \omega \end{cases}$$

Se verifica:

- La aplicación g está bien definida entre los conjuntos citados. En efecto: basta tener presente que $a - b \subseteq a - \{f(0)\}$ y que si $x \in b$, entonces existe un único $n \in \omega$ tal que $x = f(n)$.
- La aplicación g es inyectiva.

  En efecto: sean $x, y \in a$ tales que $g(x) = g(y)$.

  <u>Caso 1º:</u> Supongamos que $x \in a - b \wedge y \in a - b$.
  En este caso, $x = g(x) = g(y) = y$. Luego, $x = y$.

  <u>Caso 2º:</u> Supongamos que $x \in b \wedge y \in b$.
  En este caso, existen $p, q \in \omega$ tales que $f(p) = x$ y $f(q) = y$. Luego,

  $$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\Longrightarrow f(p+1) = f(q+1) \overset{f \text{ iny.}}{\Longrightarrow} p+1 = q+1 \\ &\Longrightarrow p = q \Longrightarrow f(p) = f(q) \Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

  <u>Nota:</u> Como $g(x) = g(y)$, no pueden darse más casos.

- La aplicación g es suprayectiva de a en $a - \{f(0)\}$. En efecto: sea $x \in a - \{f(0)\}$. Entonces

– O bien $x \in a - b$, en cuyo caso $g(x) = x$.
– O bien $x \in b - \{f(0)\}$, en cuyo caso existe $p \in \omega - \{0\}$ tal que $f(p) = x$. Sea $y = f(p-1)$. Entonces $g(y) = f(p-1+1) = f(p) = x$.

En consecuencia, $a - \{f(0)\}$ es un subconjunto propio de a que es equipotente al conjunto a. Luego a es infinito, según Dedekind.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que a es un conjunto infinito, según Dedekind. Sea $b \subsetneq a$ tal que $b \sim a$. Sea g una aplicación biyectiva de a en b (que, obviamente, será una aplicación inyectiva de a en a).

Dados $c \in a - b$ y la aplicación $g \in {}^a a$, del ejercicio 77 se deduce la existencia de una única aplicación $f : [0, \rightarrow [\rightarrow a$ verificando

$\star$ $f(0) = c$.

$\star$ $\forall n \in \omega\ (f(n+1) = g(f(n)))$.

Veamos que la aplicación f es inyectiva.

- **Aserto 1:** Para cada $n \in \omega$ se verifica: $f(n) \neq f(n+1)$.

  Prueba: Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$
  Trivial, ya que $f(0) = c \in a - b$ y $f(1) = g(f(0)) \in b$.

  $\boxed{n \rightarrow n+1}$
  Sea $n \in \omega$ y supongamos que $f(n) \neq f(n+1)$. Como g es inyectiva resulta que $g(f(n)) \neq g(f(n+1))$. Luego, $f(n+1) \neq f(n+2)$.

- **Aserto 2:** Para cada $n, m \in \omega$ se verifica: $m < n \Longrightarrow f(m) \neq f(n)$.

  Prueba: Consideremos la fórmula

  $$\varphi(n) \equiv \forall m \in \omega\ (m < n \Longrightarrow f(m) \neq f(n))$$

  Probemos que $\forall n \in \omega\ (\varphi(n))$. Por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$
  Trivial, ya que si $m \in \omega$, entonces $m < 0 \Longrightarrow f(m) \neq f(0)$.

  $\boxed{n \rightarrow n+1}$ Sea $n \in \omega$ y supongamos que

  $$\forall m \in \omega\ (m < n \Longrightarrow f(m) \neq f(n))$$

  Veamos que la fórmula $\varphi(n+1)$ es verdadera. Para ello, sea $q < n+1$. Entonces

– O bien $q = n$, en cuyo caso $f(q) = f(n) \neq f(n+1)$.
– O bien $q < n \wedge q = 0$, en cuyo caso

$$\left.\begin{array}{l} f(q) = f(0) = c \in a - b \\ f(n+1) = g(f(n)) \in b \end{array}\right\} \implies f(q) \neq f(n+1)$$

– O bien $q < n \wedge q > 0$, en cuyo caso existe $r \in \omega$ tal que $q = r + 1$. Entonces $r < q < n$. Por hipótesis de inducción $f(r) \neq f(n)$. Como g es inyectiva, resulta que $g(f(r)) \neq g(f(n))$. Luego, $f(q) = f(r+1) = g(f(r)) \neq g(f(n)) = f(n+1)$.

Del aserto 2 resulta directamente la inyectividad de la aplicación f. Por tanto, $f[\omega]$ es un subconjunto de a que es equipotente a ω. En consecuencia, el conjunto a es infinito.

Ejercicio 143. *Probar en* **ZFC**$^-$ *que un conjunto no vacío a es infinito si y sólo si existe un orden R en a tal que $\langle a, R\rangle$ carece de elementos maximales.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto infinito. Sea b un subconjunto numerable de a (que existe en **ZFC**$^-$, ver ejercicio 141). Sea f una aplicación biyectiva de ω en b. Sea $<$ el orden usual de ω y S el orden en b transportado por f, a partir de $<$. Consideremos la relación R definida en a como sigue:

$$xRy \iff (x \in b \wedge y \in b \wedge xSy) \vee (x \in a - b \wedge y \in b)$$

Entonces, R es un orden parcial en a tal que $\langle a, R\rangle$ carece de elementos maximales.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Sean a un conjunto no vacío y R un orden en a tal que $\langle a, R\rangle$ carece de elementos maximales. Entonces, para cada $x \in a$ se tiene que es no vacío el conjunto $M_x = \{y \in a : x < y\}$.

Sea f una función de elección de $\mathbf{P}(a)$ (aquí hacemos uso del axioma de elección). Consideremos la aplicación g de ω en a caracterizada por las condiciones siguientes:

- $g(0) = f(a)$.
- $\forall n \in \omega\ (g(n+1) = f(M_{g(n)}))$.

(Se deja como ejercicio al lector que demuestre la existencia y unicidad de la aplicación g verificando las condiciones citadas, aplicando adecuadamente un teorema de recursión).

Para cada $n \in \omega$, se tiene que $g(n+1) = f(M_{g(n)})$. Como $M_{g(n)}$ es un subconjunto no vacío de a, se tiene que $f(M_{g(n)}) \in M_{g(n)}$. Luego, $g(n+1) \in M_{g(n)}$. Es decir, $\forall n \in \omega\ (g(n) < g(n+1))$ $(\star)$.

Aserto: $\forall n, p \in \omega\ (p < n \to g(p) < g(n))$.

Prueba: Consideremos la fórmula

$$\varphi(n) \equiv \forall p \in \omega\ (p < n \to g(p) < g(n))$$

Veamos que $\forall n \in \omega\ (\varphi(n))$. Por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$
Trivial, ya que $\forall p \in \omega\ (p \not< 0)$.

$\boxed{n \to n+1}$
Sea $n \in \omega$ tal que $\forall p \in \omega\ (p < n \to g(p) < g(n))$. Sea $q < n+1$ y veamos que $g(q) < g(n+1)$. En efecto:

– O bien $q < n$, en cuyo caso por hipótesis de inducción se tiene que $g(q) < g(n)$. Luego,

$$g(q) < g(n) \overset{(\star)}{<} g(n+1)$$

– O bien $q = n$, en cuyo caso $g(q) = g(n) \overset{(\star)}{<} g(n+1)$.

Del aserto resulta inmediatamente que g es una aplicación inyectiva de ω en a. Por tanto, el conjunto a es infinito (pues de lo contrario, teniendo presente que $\omega \sim g[\omega] \subseteq a$ resultaría que ω sería finito).

Ejercicio 144. *Probar en* **ZFC**$^-$ *que un conjunto no vacío a es infinito si y sólo si existe un orden R en a tal que $\langle a, R\rangle$ posee un único elemento maximal y, en cambio, carece de elemento máximo.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto infinito. Sea b un subconjunto numerable de a (aquí hacemos uso del axioma de elección, ver ejercicio 141). Sea f una aplicación biyectiva de ω en b. Sea $<$ el orden usual de ω y consideremos la relación S definida en ω como sigue:

$$xSy \Longleftrightarrow x \neq 0 \wedge x < y$$

Entonces, se prueba fácilmente que S es un orden parcial en ω. Sea S' el orden en b transportado por f, a partir de S. Consideramos la relación R definida en a como sigue:

$$xRy \Longleftrightarrow (x \in b \wedge y \in b \wedge xS'y) \vee (x \in a - b \wedge y \in f[\omega - \{0\}])$$

Es fácil probar que R es un orden parcial en a. Además, por construcción, $\langle a, R\rangle$ posee un único elemento maximal, f(0), y, en cambio, carece de elemento máximo, ya que $\langle a, R\rangle$ no está acotado superiormente.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Sean a un conjunto no vacío y R un orden en a tal que $\langle a, R\rangle$ posee un único elemento maximal, b, y, en cambio, carece de elemento máximo.

Consideremos el conjunto

$$c = \{x \in a - \{b\} : \ x \text{ no es comparable con } b \text{ por } R\}$$

Como b no es el máximo de $\langle a, R\rangle$, resulta que c es no vacío. Además, $\langle c, R\rangle$ carece de elemento maximal (si d fuese un elemento maximal de $\langle c, R\rangle$, entonces d sería *otro* elemento maximal de $\langle a, R\rangle$, distinto de b). Luego, del ejercicio anterior resulta que c es un conjunto infinito y, por tanto, también lo es a.

Ejercicio 145. *Probar en* $\mathbf{ZFC}^-$ *que un conjunto no vacío a es infinito si y sólo si existe un orden R en a y un elemento* $b \in a$ *tal que si x es un elemento maximal de* $\langle a, R\rangle$, *entonces* $\neg(b = x \vee bRx)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto infinito. Sea R un orden en a tal que $\langle a, R\rangle$ carece de elementos maximales (ver ejercicio 143). Entonces, para cada $b \in a$ se verifica que $\forall x \in a\ (x \text{ maximal de } \langle a, R\rangle \rightarrow \neg(b = x \vee bRx))$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Sean R un orden en a y $b \in a$ tales que si x es un elemento maximal de $\langle a, R\rangle$, entonces $\neg(b = x \vee bRx)$. Consideremos el conjunto

$$c = \{x \in a : \ x = b \vee bRx\}$$

Entonces, c es un subconjunto no vacío de a (ya que $b \in c$). Además, $\langle c, R\rangle$ carece de elementos maximales

– En efecto: supongamos que d fuese un elemento maximal de $\langle c, R\rangle$. Entonces d sería un elemento maximal de $\langle a, R\rangle$ (caso contrario, existiría $e \in a$ tal que dRe; como d es maximal de $\langle c, R\rangle$ resultaría que $e \notin c$; pero $(b = d \vee bRd) \wedge dRe \Longrightarrow bRe \Longrightarrow e \in c$).

  Por tanto, $\neg(b = d \vee bRd)$: lo que contradice que $d \in c$).

Luego, c es un conjunto infinito y, por tanto, también lo es a.

Ejercicio 146. *Probar en* $\mathbf{ZFC}^-$ *que un conjunto no vacío a es finito si y sólo si para cualquier orden R en a, toda cadena no vacía de* $\langle a, R\rangle$ *posee elemento máximo y elemento mínimo.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto finito. Sea R un orden en a. Sea b una cadena no vacía de $\langle a, R\rangle$. Entonces, $\langle b, R\rangle$ es un conjunto finito no vacío totalmente ordenado. Del ejercicio 139 se deduce que b posee máximo y mínimo en $\langle b, R\rangle$ y, por tanto, en $\langle a, R\rangle$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que a es un conjunto infinito. Sea b un subconjunto numerable de a. Consideremos la ordenación R en el conjunto a, descrita en el ejercicio 143 (implicación $\Longrightarrow$). Entonces, b es una cadena no vacía de $\langle a, R\rangle$ que carece de elemento máximo.

Ejercicio 147. *Probar en* $\mathbf{ZFC}^-$ *que si a es un conjunto infinito, entonces existe una familia de conjuntos $(a_i)_{i\in I}$ que es una partición de a y, además, verifica que $\forall i \in I$ (a_i es numerable).*

Consideremos la clase

$$\begin{aligned} b = \{\langle c, d\rangle : \ & c \subseteq a \wedge c \neq \emptyset \wedge \exists I\, \exists f\ (f \text{ partición de } c \text{ con conjunto} \\ & \text{de índices } I \wedge d = f[I] \wedge \forall x \in d\ (x \text{ numerable}))\}\end{aligned}$$

Obsérvese que si $\langle c, d\rangle$ es un elemento de b, entonces c es un subconjunto de a y los elementos de d determinan una partición de c.

La clase b es un conjunto (¿por qué?). Como a es infinito, existe un subconjunto, c, de a que es numerable. Por tanto, $\langle c, \{c\}\rangle \in b$.

Definimos en b una relación R como sigue:

$$\langle c, d\rangle R \langle c', d'\rangle \Longleftrightarrow c \subsetneqq c' \wedge d \subseteq d'$$

Es decir, $\langle c, d\rangle R \langle c', d'\rangle \Longleftrightarrow c \subsetneqq c'$ y todo conjunto de la partición relativa a d es un conjunto de la partición relativa a d'

Es inmediato probar que $\langle b, R\rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Aserto: Sea $\mathcal{C}$ una cadena de $\langle b, R\rangle$. Entonces, $\mathcal{C}$ está acotada superiormente en $\langle b, R\rangle$.

<u>Prueba:</u> Sean $c^* = \bigcup \operatorname{dom}(\mathcal{C})$ y $d^* = \bigcup \operatorname{rang}(\mathcal{C})$. Veamos que $\langle c^*, d^*\rangle \in b$

- Obviamente, $\emptyset \neq c^* \subseteq a$.
- Si $x \in d^*$, entonces existe $d \in \operatorname{rang}(\mathcal{C})$ tal que $x \in d$. Luego, $x \neq \emptyset$ y x es un conjunto numerable.
- Sean $x, y \in d^*$ tales que $x \neq y$. Sean c_1, c_2, d_1, d_2 tales que

$$\langle c_1, d_1\rangle \in \mathcal{C},\ \langle c_2, d_2\rangle \in \mathcal{C},\ x \in d_1 \text{ e } y \in d_2$$

Como $\mathcal{C}$ es una cadena de $\langle b, R\rangle$, resulta que

$$\langle c_1, d_1\rangle R\langle c_2, d_2\rangle \vee \langle c_2, d_2\rangle R\langle c_1, d_1\rangle$$

Entonces, $(x \in d_1 \wedge y \in d_1) \vee (x \in d_2 \wedge y \in d_2)$. Por tanto, $x \cap y = \emptyset$.

- $\bigcup d^* = c^*$. En efecto:
  - Sea $x \in \bigcup d^*$. Sea $y \in d^* = \bigcup \operatorname{rang}(\mathcal{C})$ tal que $x \in y$. Sean c, d tales que $\langle c, d\rangle \in \mathcal{C}$ e $y \in d$. Como $\mathcal{C} \subseteq b$, resulta que $y \subseteq c \wedge \emptyset \neq c \subseteq a$. Además,
  $$\langle c, d\rangle \in \mathcal{C} \Longrightarrow c \subseteq c^*$$
  Por tanto, $x \in c^*$.
  - Sea $x \in c^* = \bigcup \operatorname{dom}(\mathcal{C})$. Sean c, d tales que $\langle c, d\rangle \in \mathcal{C}$ y $x \in c$. Como $\mathcal{C} \subseteq b$, resulta que $c = \bigcup d$. Luego, $x \in \bigcup d$.
  Además,
  $$d \in \operatorname{rang}(\mathcal{C}) \Longrightarrow d \subseteq d^* \Longrightarrow \bigcup d \subseteq \bigcup d^*$$
  Por tanto, $x \in \bigcup d^*$.

Así pues, $\langle c^*, d^*\rangle \in b$. La prueba del aserto concluye observando que, por construcción, se verifica que $\langle c, d\rangle \in b \Longrightarrow \langle c, d\rangle R\langle c^*, d^*\rangle$.

Del lema de Zorn se deduce la existencia de un elemento maximal $\langle \overline{c}, \overline{d}\rangle$ de $\langle b, R\rangle$.

- Si $\overline{c} = a$, entonces $\overline{d}$ determina una partición de a en conjuntos numerables.
- Supongamos que $\overline{c} \neq a$. Veamos que $a - \overline{c}$ es un conjunto finito.
  - ⋆ Caso contrario, existiría un subconjunto numerable, c', de $a - \overline{c}$. Entonces,
  $$\langle \overline{c} \cup c', \overline{d} \cup \{c'\}\rangle \in b \ \text{ y } \ \langle \overline{c}, \overline{d}\rangle R\langle c \cup c', \overline{d} \cup \{c'\}\rangle$$
  Lo que contradice la maximalidad de $\langle \overline{c}, \overline{d}\rangle$.

  Sea $x \in \overline{d}$. Entonces, $(\overline{d} - \{x\}) \cup (\{x \cup (a - \overline{c})\})$ determina una partición de a verificando los requisitos del enunciado.

Ejercicio 148. *Probar en* $\mathbf{ZFC}^-$ *el siguiente resultado: Si a es un conjunto que posee, al menos dos elementos, entonces son equivalentes:*

(1) *a es un conjunto infinito.*

(2) *Existe un orden total en a, respecto del cual cada elemento de a carece de siguiente.*

(3) *Existe un orden total, R, en a tal que $\langle a, R\rangle$ es denso en sí (es decir, $\forall x, y \in a\ (xRy \rightarrow\ ]x, y[\neq \emptyset)$).*

(4) *Existe un orden, R, en a tal que $R \neq \emptyset$ y $\langle a, R\rangle$ es denso en sí.*

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supongamos que a es un conjunto infinito. Sea $(a_i)_{i\in I}$ una partición de a tal que $\forall i \in I$ (a_i es un conjunto numerable). Para cada $j \in I$, sea f_j una aplicación biyectiva de $\mathbb{Q}$ en a_j y notemos por R_j la ordenación en a_j transportada por f_j, a partir de la ordenación usual de $\mathbb{Q}$. Obviamente, para cada $j \in I$ se tiene que $\langle a_j, R_j\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado en el que cada elemento de a_j carece de siguiente. Sea R un buen orden en I.

Consideremos la relación S definida en a como sigue:

$$\begin{array}{rl} xSy \iff & (\exists j \in I\ (x \in a_j \wedge y \in a_j \wedge xR_jy))\vee \\ & (\exists j,k \in I\ (j \neq k \wedge jRk \wedge x \in a_j \wedge y \in a_k)) \end{array}$$

Entonces, $\langle a, S\rangle$ es un conjunto totalmente ordenado tal que cada elemento carece de siguiente.

$\boxed{(2) \Longrightarrow (3)}$

Sea R un orden total en a tal que cada elemento carece de siguiente en $\langle a, R\rangle$. Veamos que $\langle a, R\rangle$ es denso en sí.

- Sean $x, y \in a$ tales que xRy. Entonces, $]x, y[\neq \emptyset$ ya que, de lo contrario, por ser R un orden total, resultaría que y es el elemento siguiente de x en $\langle a, R\rangle$.

$\boxed{(3) \Longrightarrow (4)}$

Sea $\langle a, R\rangle$ un conjunto totalmente ordenado y denso en sí. Como a posee, al menos, dos elementos, resulta que $R \neq \emptyset$.

$\boxed{(4) \Longrightarrow (1)}$

Sea R un orden en a tal que $R \neq \emptyset$ y, además, $\langle a, R\rangle$ es denso en sí. Sean $x, y \in a$ tales que xRy. Teniendo presente que $\langle a, R\rangle$ es denso en sí, resulta que el conjunto $]x, y[$ es infinito. Por tanto, a es un conjunto infinito.

Ejercicio 149. *Probar en* $\mathbf{ZFC}^-$ *que un conjunto a es finito si y sólo si para cada aplicación f de a en a se tiene que f es inyectiva si y sólo si es suprayectiva de a en a.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que a es un conjunto finito. Sea f una aplicación de a en a.

- Si f es inyectiva, entonces $f[a] \sim a$. Como $f[a] \subseteq a$ y a es finito, resulta que $f[a] = a$ (pues si $f[a] \subsetneqq a \ \wedge f[a] \sim a$, resultaría que a es infinito). Luego, f es suprayectiva.
- Si f es una aplicación suprayectiva de a en a, entonces existe una aplicación g de a en a tal que $f \circ g = I_a$. Luego, g es una aplicación inyectiva de a en a. Por tanto, g será biyectiva de a en a y, a posteriori, también lo será f.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que a es un conjunto infinito. Sea b un subconjunto propio de a tal que $b \sim a$. Sea f una aplicación biyectiva de a en a. Consideremos la aplicación g de a en a definida como sigue:

$$g \restriction b = f \ \text{ y } \ g \restriction (a - b) = I_{a-b}$$

Entonces, g es una aplicación suprayectiva no inyectiva de a en a.

Ejercicio 150. *Sea a un conjunto y notemos*

$$\mathbf{P}_F(a) = \{x \subseteq a : \ x \text{ es finito})\}$$

Consideremos el conjunto

$$b = \{x \subseteq \mathbf{P}(a) : \ \emptyset \in x \wedge \forall y \forall z \ (y \in x \wedge z \in a \rightarrow y \cup \{z\} \in x)\}$$

Probar que $\mathbf{P}_F(a)$ es el elemento mínimo de $\langle b, \subsetneqq \rangle$.

Se tiene que $\mathbf{P}_F(a) \subseteq \mathbf{P}(a)$ y $\emptyset \in \mathbf{P}_F(a)$. Además,

$$\forall y \forall z \ (y \in \mathbf{P}_F(a) \wedge z \in a \rightarrow y \cup \{z\} \in \mathbf{P}_F(a))$$

Luego, $\mathbf{P}_F(a) \in b$. Falta probar que $\mathbf{P}_F(a)$ es una cota inferior de $\langle b, \subsetneqq \rangle$. Veámoslo.

- Sea $x \in b$. Consideremos el conjunto

  $$c_x = \{n \in \omega : \ \forall y \in \mathbf{P}_F(a) \ (|y| = n \rightarrow y \in x)\}$$

  Veamos que $c_x = \omega$, por inducción débil en ω.

  $\boxed{n = 0}$
  Trivial, ya que $x \in b$ y, por tanto, $0 \in x$.

  $\boxed{n \rightarrow n+1}$
  Sea $n \in \omega$ tal que $n \in c_x$. Para ver que $n+1 \in c_x$, sea $y \in \mathbf{P}_F(a)$ tal que $|y| = n+1$. Como $y \neq \emptyset$, existe $z \in y$. Entonces, $t = y - \{z\}$ es una parte

finita de a con n elementos. Por hipótesis de inducción, resulta que $t \in x$. Ahora bien,

$$t \in x \wedge z \in y \subseteq a \wedge x \in b \Longrightarrow t \cup \{z\} \in x$$

Es decir, $y \in x$.

Como $c_x = \omega$, se deduce que $\mathbf{P}_F(a) \subseteq x$.

Ejercicio 151. *Sea $\langle a, < \rangle$ un conjunto totalmente ordenado tal que todo subconjunto de a acotado superiormente es finito. Demostrar que $\langle a, < \rangle$ es un conjunto bien ordenado.*

Hemos de probar que $\langle a, < \rangle$ satisface el principio de minimización. Para ello, sea b un subconjunto no vacío de a y $c \in b$. Consideremos el conjunto $d = \{x \in b : \ x \leqslant c\} \subseteq a$. Entonces d es un subconjunto no vacío de a acotado superiormente en $\langle a, < \rangle$. Luego $\langle d, < \rangle$ es un conjunto finito no vacío totalmente ordenado. Del ejercicio 139 se deduce que $\langle d, < \rangle$ posee elemento mínimo y elemento máximo.

Sea $e = \text{mín}_< d$. Veamos que $e = \text{mín}_< b$.

- $e \in b$, ya que $e \in d \subseteq b$.
- Si $x \in b$ es tal que $x \neq e$, entonces por ser $<$ un orden total en a:
  - O bien $x \leqslant c$, en cuyo caso $x \in d$ y, por tanto, $e < x$.
  - O bien $c < x$, en cuyo caso $e \leqslant c < x$.

Ejercicio 152. *Demostrar que si a es un conjunto numerable, entonces el conjunto $\mathbf{P}_F(a)$, de las partes finitas de a, es numerable.*
Indicación: *Pruébese que $\mathbf{P}_F(\omega) \sim \omega$, a partir del desarrollo en base de 2 de cualquier número natural distinto de cero.*

En primer lugar, veamos que $\mathbf{P}_F(\omega) \sim \omega$.

– Consideremos la aplicación $g : \mathbf{P}_F(\omega) \to \omega$ definida como sigue:

  ⋆ $g(\emptyset) = 0$.

  ⋆ Si $\{x_0, \ldots, x_n\} \in \mathbf{P}_F(\omega)$ verifica que $x_0 < \ldots < x_n$, entonces

$$g(\{x_0, \ldots, x_n\}) = 2^{x_0} + \cdots + 2^{x_n}$$

Obviamente, g es una aplicación entre los conjuntos citados. Además, g es biyectiva debido a que todo número natural distinto de cero posee un único desarrollo en base 2.

Sea a un conjunto numerable. Entonces $a \sim \omega$. Luego, $\mathbf{P}_F(a) \sim \mathbf{P}_F(\omega)$. En consecuencia, $\mathbf{P}_F(a)$ es un conjunto numerable (por serlo $\mathbf{P}_F(\omega)$).

Ejercicio 153. *Probar que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es numerable.*

Consideremos la aplicación $f : \omega \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} k+1 & \text{si} \quad n = 2k+1 \\ -k & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}$$

Obviamente, f es una aplicación biyectiva de ω en $\mathbb{Z}$.

Nota: También podríamos haber observado que $\omega \sim \mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \geqslant 0\}$ y $\omega \sim \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : \ x \leqslant 0\}$; de donde resulta que $\omega \sim \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$.

Ejercicio 154. *Demostrar que el conjunto $\mathbb{Z}[x]$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$, es numerable.*
Indicación: *Si $(p_i)_{i\in\omega}$ es una enumeración de los números primos, pruébese que es inyectiva la aplicación $g : \mathbb{Z}[x] \to \omega$, definida por*

$$g(a_0 + \cdots + a_n \cdot x^n) = p_{i_0}^{|a_0|} \cdot p_{i_1}^{|a_1|} \cdot \cdots \cdot p_{i_n}^{|a_n|}$$

en donde $i_j = 2j$ si $a_j \geqslant 0$ e $i_j = 2j+1$ si $a_j < 0$.

Comencemos observando que el conjunto $\mathbb{Z}[x]$ es infinito, ya que la aplicación $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ definida por $f(y) = y$, para cada $y \in \mathbb{Z}$, es inyectiva.

Veamos que existe una aplicación inyectiva g de $\mathbb{Z}[x]$ en ω.

- Consideremos una enumeración $(p_i)_{i\in\omega}$ de los números primos . Por ejemplo, una enumeración podría ser la siguiente
  - $\star$ $p_0 = 2$.
  - $\star$ $p_{i+1} = \text{mín}\{p \in \omega : \ p > p_i \wedge p \ \text{ primo }\}$, para cada $i \in \omega$.

  Consideremos la aplicación $g : \mathbb{Z}[x] \to \omega$ definida como sigue:

  $$g(a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n) = p_{i_0}^{|a_0|} \cdot \cdots \cdot p_{i_n}^{|a_n|}$$

  siendo
  $$i_j = \begin{cases} 2j & \text{si} \quad a_j \geqslant 0 \\ 2j+1 & \text{si} \quad a_j < 0 \end{cases}$$

  Veamos que la aplicación g es inyectiva.

Sean

$$\begin{array}{l} p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n \in \mathbb{Z}[x] \\ q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \cdots + b_m \cdot x^m \in \mathbb{Z}[x] \end{array}$$

tales que $p(x) \neq q(x)$. Entonces,

– O bien $n = m$ y existe j tal que $0 \leqslant j \leqslant n$ y $a_j \neq b_j$.

– O bien $n \neq m$.

En ambos casos, los números naturales $g(p(x))$ y $g(q(x))$ poseen descomposiciones distintas en factores primos. Luego, por la unicidad de estas descomposiciones, resulta que $g(p(x)) \neq g(q(x))$.

Así pues, hemos probado que $\mathbb{Z}[x] \sim g[\mathbb{Z}[x]] \subseteq \omega$. Luego, $g[\mathbb{Z}[x]]$ es un subconjunto infinito de ω. Por tanto $g[\mathbb{Z}[x]]$ es numerable y, en consecuencia, también lo será el conjunto $\mathbb{Z}[x]$.

Ejercicio 155. *Diremos que un número real b es* **algebraico** *si es raiz de algún polinomio perteneciente a $\mathbb{Z}[x]$. Probar que el conjunto, A, de los números algebraicos es numerable.*
Indicación: *Construir una aplicación suprayectiva de $\mathbb{Z}[x] \times \omega$ en A.*

El conjunto A es infinito ya que $\omega \subseteq A$ (pues si $n \in \omega$, entonces n es raíz del polinomio $n - x \in \mathbb{Z}[x]$).

Consideremos la aplicación $f : \mathbb{Z}[x] \times \omega \to A$ definida así:

$$f(\langle p(x), n\rangle) = \begin{cases} a & \text{si } p(a) = 0 \wedge n = |\{x \in \mathbb{R} : \ p(x) = 0 \wedge x < a\}| \\ 0 & \text{e.c.o.c.} \end{cases}$$

Veamos que la aplicación f es suprayectiva.

– Sea $a \in A$. Entonces existe $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(a) = 0$. Notemos $n = |\{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0 \wedge x < a\}|$. Entonces $f(\langle p(x), n\rangle) = a$.

Como el conjunto $\mathbb{Z}[x] \times \omega$ es numerable (por ser el producto cartesiano de dos conjuntos numerables), existe una aplicación biyectiva, g, de ω en $\mathbb{Z}[x] \times \omega$. Luego, $f \circ g$ es una aplicación suprayectiva de ω en A. Teniendo presente que A es infinito, de la proposición 9.2.5 se deduce que el conjunto A es numerable.

Ejercicio 156. *Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.*

Obviamente, el conjunto $\mathbb{Q}$ es infinito. Sea $n \in \omega - \{0\}$. Entonces existe un número finito de números racionales positivos irreducibles $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+ - \{0\}$ (siendo $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geqslant 0\}$) tales que $p + q = n$ (que, a lo sumo, son $\frac{n-1}{1}, \frac{n-2}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}$).

Para cada $n \in \omega - \{0\}$ notemos $A_n = \{\frac{n-1}{1}, \frac{n-2}{2}, \ldots, \frac{1}{n-1}\}$. Entonces,

$$\mathbb{Q}^+ - \{0\} = \bigcup_{n \in \omega - \{0\}} A_n$$

Luego, $\mathbb{Q}^+ - \{0\}$ es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos finitos. En consecuencia, $\mathbb{Q}$ es numerable.

Ejercicio 157. *Probar que el intervalo cerrado* $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ *es* **no** *numerable.*

Supongamos que el intervalo cerrado $[0,1]$ fuese numerable. Sea $f : \omega \to [0,1]$ una aplicación biyectiva y notemos $f(n) = a_n$, para cada $n \in \omega$.

Para cada $n \in \omega$, consideremos un intervalo I_n que verifique las condiciones siguientes:

$$a_n \in I_n \wedge \text{ longitud } (I_n) = \tfrac{1}{10^{n+1}}$$

Entonces $[0,1] \subseteq \bigcup_{n \in \omega} I_n$. Luego,

$$\text{longitud } ([0,1]) = 1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{9}$$

Lo que es una contradicción.

Ejercicio 158. *Probar que existe un orden total en* ω*, respecto del cual cada número natural carece de elemento siguiente.*

Sea f una aplicación biyectiva de ω en $\mathbb{Q}$. Sea $<$ la ordenación usual de $\mathbb{Q}$ y consideremos la ordenación R en ω transportada por f a partir de $<$. Es decir,

$$xRy \Longleftrightarrow f(x) < f(y) \text{ , para cada } x, y \in \omega$$

Del ejercicio 33 se deduce que $\langle \omega, R \rangle$ es un conjunto totalmente ordenado. Además, $f : \langle \omega, R \rangle \cong \langle \mathbb{Q}, < \rangle$. Por tanto, cada número natural carece de siguiente por R (caso contrario, existirían números racionales que poseen elemento siguiente por la ordenación usual).

Ejercicio 159. *(***ZFC$^-$***) Sea* $(a_n)_{n \in \omega}$ *una familia de conjuntos tal que*

$$\forall n \in \omega \ (a_n \text{ es un subconjunto infinito de } \omega \ \wedge \ a_{n+1} \subsetneqq a_n)$$

Demostrar que existe un subconjunto infinito b de ω *tal que*

$$\forall n \in \omega \ (b - a_n \text{ es finito })$$

Vamos a construir recursivamente, un conjunto $b = \{b_1, b_2, \ldots\}$ que satisfaga las condiciones del enunciado. Y lo vamos a hacer de tal manera que en el paso n–ésimo exigiremos que $b_m \in a_m$, para cada $m \leqslant n$. Sea f una función de elección de $\mathbf{P}(\omega)$.

> Paso 1: Consideramos b_1 un elemento cualquiera de a_1 (por ejemplo, $f(a_1)$).
>
> Paso $n \to n+1$: Supongamos que ya tenemos construidos $b_1, \dots, b_n$ de tal manera que $b_m \in a_m$, para cada $m \leqslant n$.
>
> Como a_{n+1} es infinito, resulta que $a_{n+1} - \{b_1, \dots, b_n\} \neq \emptyset$. Entonces consideramos $b_{n+1} = f(a_{n+1} - \{b_1, \dots, b_n\})$.

Veamos que $b - a_p$ es un conjunto finito, para cada $p \in \omega$. Sea $p \in \omega$ y determinemos los elementos de b que hay en a_p. Se tiene que

$$\forall n \in \omega \; (p < n \Longrightarrow b_n \in a_n \subsetneqq a_p)$$

Por tanto, el conjunto $b - a_p$ es finito.

9.4. Problemas propuestos

Ejercicio 9.1. Sea a un conjunto. Demostrar que a es finito si y sólo si todo subconjunto no vacío de $\mathbf{P}(a)$ posee elementos maximales por la relación de inclusión estricta (*Caracterización debida a Tarski*).

Indicación: $\boxed{\Longrightarrow}$ Sea a un conjunto finito con p elementos. Sea $b \subseteq \mathbf{P}(a)$ tal que $b \neq \emptyset$. Considérese el conjunto

$$c = \{n \in \omega : \; \exists x \in b \; (|x| = n)\}$$

Pruébese que c es un subconjunto no vacío de ω acotado superiormente. Considérense $q = \text{máx}(c)$ y $d \in b$ tal que $|d| = q$. Pruébese que d es un elemento maximal de $\langle b, \subsetneqq \rangle$. $\boxed{\Longleftarrow}$ Obsérvese que $\emptyset \neq \mathbf{P}_F(a) \subseteq \mathbf{P}(a)$. Pruébese que si b es un elemento maximal de $\mathbf{P}_F(a)$, entonces $b = a$.

Ejercicio 9.2. Diremos que un conjunto no vacío, a, es de *carácter finito* si

$$\forall x \; (x \in a \leftrightarrow \forall y \; (y \subseteq x \land y \text{ finito } \to y \in a))$$

La *condición de Teichmller–Tukey* afirma que si a es un conjunto de carácter finito, entonces $\langle a, \subsetneqq \rangle$ tiene un elemento maximal.

Probar en $\mathbf{ZF}^-$ que la condición de Teichmller–Tukey es equivalente al axioma de elección.

Indicación: (**AC** $\Longrightarrow$ **TT**) Si a es un conjunto de carácter finito, entonces por el principio maximal de Hausdorff (ver ejercicio 127), existe un elemento maximal, b, de $\langle \mathcal{C}(a, \subsetneqq), \subsetneqq \rangle$. Pruébese que b posee elemento máximo en $\langle a, \subsetneqq \rangle$. (**TT** $\Longrightarrow$ **AC**) Sean a un conjunto, $b = \bigcup a$ y $c = {}^{\mathbf{P}(b)}b$. Para cada $f \in c$ considérese $c_f = \{x : x \subseteq b \wedge f(x) \in x\}$ y sea $d = \{f : \exists g \in c\ (f \subseteq g \restriction c_g)\}$. Pruébese que d es un conjunto de carácter finito. Si f es un elemento maximal de $\langle d, \subsetneqq \rangle$, pruébese que f es una función de elección de $\mathbf{P}(b)$.

Ejercicio 9.3. Sea a un conjunto y f una aplicación de a en a. Consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} b = &\quad \{x \in \mathbf{P}(a) : f[x] = x\} \\ c = &\quad \{x \in a : \exists (x_n)_{n \in \omega}\ (x_0 = x \wedge \forall n \in \omega\ (f(x_{n+1}) = x_n))\} \end{aligned}$$

Probar que c es el elemento máximo de $\langle b, \subsetneqq \rangle$.

Indicación: Pruébese que $f[c] \subseteq c \wedge c \subseteq f[c]$, y que c es una cota superior de $\langle b, \subsetneqq \rangle$.

Ejercicio 9.4. Encontrar el error en el razonamiento siguiente:

> *"Sea a un conjunto finito. Sea f una aplicación suprayectiva de a en ω. Entonces, existe una aplicación inyectiva, g, de ω en a tal que $f \circ g = I_\omega$. Como $\omega \sim g[\omega]$ y $g[\omega] \subseteq a$, deducimos que el conjunto ω es finito"*

Ejercicio 9.5. Sea $R = \{\langle x, y \rangle : x \sim y\}$. Probar que:

(1) La clase R es propia.

(2) Para cada conjunto x, la clase $R[\{x\}]$ es propia.

Indicación: **(1)** Obsérvese que si $x \in \mathbf{V}$, entonces $\langle x, x \rangle \in R$. **(2)** Si $y \in \mathbf{V}$, entonces $\{y\} \times x \in R[\{x\}]$.

Ejercicio 9.6. Sea x un conjunto finito con $|x| = n$. Probar que existen $x_1, \ldots, x_n$ conjuntos distintos entre sí tales que $\forall y\ (y \in x \leftrightarrow x_1 = y \vee \ldots \vee x_n = y)$.

Indicación: Pruébese el resultado por inducción débil en ω sobre el número de elementos del conjunto x.

Ejercicio 9.7. Sean x un conjunto, $n \in \omega$ y supongamos que existe una aplicación inyectiva de x en $n+1$, pero que no existe tal aplicación inyectiva de $n+1$ en x. Probar que existe una aplicación inyectiva de x en n.

Indicación: Si $f : x \to n+1$ es inyectiva y $n \notin f[x]$ entonces $f : x \to n$ es inyectiva. Si $n \in f[x]$, obténgase una función g, a partir de f, que sea inyectiva y con rango incluido en n.

Ejercicio 9.8. Sean a y b dos conjuntos finitos. Probar que ${}^{b}a$ es finito y que $|{}^{b}a| = |a|^{|b|}$.

Indicación: Pruébese por inducción en ω sobre la variable n, tal que $n = |b|$.

Ejercicio 9.9. Sean a y b conjuntos finitos tales que $a \subseteq b$. Probar que el conjunto $b - a$ es finito y $|b - a| = |b| - |a|$ ¿Qué se puede deducir, en general, si $a \not\subseteq b$?

Indicación: Pruébese que, en general, $|b - a| = |b| - |a \cap b|$.

Ejercicio 9.10. Sea x un conjunto finito. Consideremos el conjunto de las *permutaciones* de x, $Perm(x) = \{f : f$ es una biyección de x en $|x|\}$. Probar que $Perm(x)$ es un conjunto finito y que $|Perm(x)| = |x|!$

Indicación: Pruébese por inducción en ω sobre el número de elementos del conjunto x.

Ejercicio 9.11. Probar que todo subconjunto de ω acotado por el orden usual, es finito.

Ejercicio 9.12. Probar en **ZFC**$^-$ que un conjunto a es infinito si y sólo si para cada $n \in \omega$, existe $y \subseteq a$ tal que $|y| = n$.

Indicación: úsese el ejercicio 141.

Ejercicio 9.13. Sea a un conjunto finito. Probar que es un número natural el conjunto

$$b = \{n \in \omega : \text{ existe una aplicación inyectiva de } n \text{ en } a\}$$

Indicación: Pruébese que $b = |a| + 1$.

Ejercicio 9.14. Sea a un conjunto numerable. Probar que para cualquier número natural, n, distinto de cero, el conjunto $\{x : |x| = n \wedge x \subseteq a\}$ es numerable.

Indicación:úsese el ejercicio 152.

Ejercicio 9.15. (**ZFC**$^-$). Sea I un conjunto numerable y $(a_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos finitos no vacíos disjuntos dos a dos. Probar que $\bigcup\limits_{i \in I} a_i$ es un conjunto numerable.

Indicación: Pruébese que $b = \bigcup\limits_{i \in I} a_i$ no es finito. Para ello, pruébese que la aplicación $f : b \to I$ definida por $f(x) = i$, si $x \in a_i$, está bien definida y es suprayectiva.

Ejercicio 9.16. (**ZFC**$^-$) Sea $a = \{f \in^{\omega} \omega : \exists n \in \omega \forall m \in \omega (m \geqslant n \to f(m) = f(n))\}$. Probar que a es un conjunto numerable.

Indicación: Pruébese que $a \sim \bigcup\limits_{n \in \omega - \{0\}} (\omega \times \overset{n}{\ldots} \times \omega)$.

Ejercicio 9.17. Probar que el conjunto de las sucesiones de números naturales que son progresiones geométricas, es numerable.

Indicación: Nótese que una progresión geométrica queda determinada unívocamente por su primer elemento, a_1, y la razón, r. Así, tal conjunto es equipotente a $\omega \times \omega$.

Ejercicio 9.18. Probar en $\mathbf{ZFC}^-$ que un conjunto x es infinito si y sólo si $\mathbf{P}(\mathbf{P}(x))$ contiene un subconjunto numerable.

Ejercicio 9.19. Probar que si x es finito e y es numerable, entonces $x \cup y$ es numerable. Explicítese una biyección.

Indicación: Si $|x| = n$, sea $f : n \to x$ biyección. Obténgase una biyección g entre $\omega - n$ y el conjunto y. A partir de f y g, constrúyase una biyección entre ω y $x \cup y$.

Capítulo 10

Cardinales

En este tema se trata de introducir el concepto de “tamaño.º “cardinal"de un conjunto, en el marco de la Teoría de Conjuntos; de tal manera que:

(1) Todo conjunto tenga asociado, de manera unívoca, un “tamaño".

(2) El “tamaño"de cualquier conjunto debe ser, así mismo, un conjunto.

(3) El “tamaño"de un conjunto debe identificarlo salvo equipotencias; es decir, dos conjuntos tienen el mismo “tamaño"si y sólo si son equipotentes.

Es decir, se trata de determinar una clase $\mathcal{C}$ que satisfaga los siguientes requisitos:

- Todo conjunto, x, debe tener asociado un único elemento, $|x|$, de la clase $\mathcal{C}$ (“tamaño"de x).
- Dos conjuntos son equipotentes si y sólo si tienen asignados el mismo elemento de $\mathcal{C}$.
- Los elementos de $\mathcal{C}$ están caracterizados por ser conjuntos cuyo tamaño coincide con el propio conjunto (el “tamaño"del “tamaño"de un conjunto x es el “tamaño"de x).
- En $\mathcal{C}$ debe existir un orden $<$ de tal manera que un conjunto x es sumergible en y (existe una aplicación inyectiva de x en y) si y sólo si $|x| \leqslant |y|$.
- La clase $\mathcal{C}$, el orden $<$ y la aplicación $F : \mathbf{V} \to \mathcal{C}$ dada por $F(x) = |x|$, para cada $x \in \mathbf{V}$, deben ser *definibles* en la Teoría de Conjuntos.

Frege, en 1884, y Russell, en 1903, introducen por primera vez de manera sistemática el concepto de “tamaño"de un conjunto, como la clase cuyos elementos son los conjuntos equipotentes a él. Ahora bien, es fácil probar que, en general, dado un conjunto

x, la clase de los conjuntos equipotentes a x es propia. En consecuencia, el concepto de "tamaño.ªsí introducido no satisface la condición **(2)** y, por tanto, sobrepasamos en cierto sentido los límites naturales de la Teoría de Conjuntos.

Supongamos que para un conjunto, x, existe un ordinal, α, equipotente a x. Entonces, se podría definir el "tamaño"de ese conjunto como el menor de tales ordinales, α. Desde luego, dicho concepto satisface la condición **(2)**. Se puede probar que se verifica **(3)** y, además, si admitimos el axioma de elección, entonces satisface **(1)** (esta definición se debe, básicamente, a von Neumann, 1928).

Prescindiendo del axioma de elección, la definición anterior sólo abarcaría a los conjuntos bien ordenables. En tal situación, el axioma de regularidad permite extender el concepto de "tamaño.ª conjuntos que no sean bien ordenables, a través de la función rank.

10.1. El axioma de regularidad

Axioma de regularidad: $\forall x\ (x \neq \emptyset \to \exists y \in x\ (x \cap y = \emptyset))$.
Es decir, *todo conjunto no vacío posee un elemento disjunto con él.*

La teoría cuyos axiomas son los de $\mathbf{ZF}^-$ más el axioma de regularidad, se denomina teoría de Zermelo–Fraenkel y la notaremos por **ZF**.

La teoría obtenida de **ZF** añadiendo el axioma de elección la notaremos por **ZFC**.

Definición 10.1.1. $(\mathbf{ZF}^-)$ *La jerarquía acumulativa*. Para cada ordinal α se define recursivamente $\mathcal{V}(\alpha)$ como sigue:

- $\mathcal{V}(0) = 0$.
- $\mathcal{V}(\alpha + 1) = \mathbf{P}(\mathcal{V}(\alpha))$.
- $\mathcal{V}(\alpha) = \bigcup\{\mathcal{V}(\beta) : \beta < \alpha\}$, si α es límite.

Definición 10.1.2. $(\mathbf{ZF}^-)$ Diremos que un conjunto x está *bien fundamentado* si $\alpha \in \mathbf{Ord}$ tal que $x \in \mathcal{V}(\alpha)$. Notaremos por **WF** a la clase cuyos elementos son los conjuntos bien fundamentados.

Proposición 10.1.3. *Si x es un conjunto bien fundamentado, entonces el menor ordinal α tal que $x \in \mathcal{V}(\alpha)$, es sucesor.*

Definición 10.1.4. $(\mathbf{ZF}^-)$ Si x es un conjunto bien fundamentado, entonces $\mathrm{rank}(x) = \min\{\alpha : x \in \mathcal{V}(\alpha + 1)\}$.

Definición 10.1.5. ($\mathbf{ZF}^-$) Sea x un conjunto y R una relación en x. Diremos que R está *bien fundamentada* sobre x si todo subconjunto no vacío de x posee, al menos, un elemento R–minimal. Es decir, si

$$\forall y\ (y \subseteq x \wedge y \neq \emptyset \to \exists z\ (z \in y \wedge \forall t \in y(\langle t, z\rangle \notin R)))$$

Teorema 10.1.6. *La teoría $\mathbf{ZF}^-$ prueba que son equivalentes:*

(1) *El axioma de regularidad.*

(2) *Para cada conjunto x, la relación $\in_x$ está bien fundamentada sobre x.*

(3) $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$.

10.2. Cardinal de un conjunto

Recordemos que un conjunto es bien ordenable si existe, al menos, un buen orden sobre él. Resulta inmediatamente que:

(1) Si dos conjuntos son equipotentes y uno de ellos es bien ordenable, entonces también lo es el otro.

(2) Todo conjunto finito es bien ordenable.

(3) Un conjunto es bien ordenable si y sólo si existe un ordinal equipotente a él.

Definición 10.2.1. ($\mathbf{ZF}$) El *cardinal* de un conjunto x, que notaremos $|x|$, es

- $\text{mín}\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ x \sim \alpha\}$, si x es bien ordenable.
- $\{y :\ x \sim y \wedge \forall z\ (z \sim x \to \text{rank}(y) \leqslant \text{rank}(z))\}$, si x no es bien ordenable.

Diremos que un conjunto x es un cardinal si existe un conjunto y tal que $x = |y|$.

Ejemplos:

(1) Si x es un conjunto bien ordenable, entonces $|x| \in \mathbf{Ord}$ y $|x| \sim x$.

(2) Si $n \in \omega$, entonces el cardinal de n es n.

(3) Si x es un conjunto finito con n elementos, entonces el cardinal de x es n (lo que justifica la nomenclatura utilizada en los conjuntos finitos para designar el número de elementos).

(4) $|\omega| = \omega = |\omega + 1|$.

(5) Si a es un conjunto numerable, entonces $|a| = \omega$.

(6) Los ordinales $0, 1, 2, \ldots, \omega$ son cardinales. En cambio, $\omega + 1$ no es un cardinal.

Proposición 10.2.2. *Para cada conjunto x, se tiene que $|x|$ es un conjunto.*

Notaremos por **Cn** a la clase cuyos elementos son todos los cardinales. Los cardinales se representarán por $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$.

Definición 10.2.3. Diremos que $\mathfrak{a}$ es un *cardinal finito* si $\mathfrak{a} \in \omega$. Caso contrario, diremos que es *infinito*.

Proposición 10.2.4. *Si $0 \in |x|$, entonces x es un conjunto bien ordenable.*

Proposición 10.2.5. *Sea x un conjunto. Entonces, x es bien ordenable si y sólo si $|x| \in$ **Ord**.*

Corolario 10.2.6. $\mathbf{Cn} \cap \mathbf{Ord} = \{|x| : x \text{ es bien ordenable}\}$

Definición 10.2.7. Los elementos de $\mathbf{Cn} \cap \mathbf{Ord}$ se llaman *cardinales bien ordenables* (u *ordinales iniciales*). Notaremos $\mathbf{In} = \mathbf{Cn} \cap \mathbf{Ord}$.

Los cardinales bien ordenables se representarán por $\kappa, \lambda, \mu, \ldots$

Proposición 10.2.8. *Dos conjuntos son equipotentes si y sólo si tienen el mismo cardinal.*

10.3. Ordenación de los cardinales

Definición 10.3.1. Diremos que un conjunto x es *sumergible* en un conjunto y, y notaremos $x \preccurlyeq y$, si existe una aplicación inyectiva f de x en y. Si $x \preccurlyeq y \wedge x \not\sim y$, entonces notaremos $x \prec y$.

Proposición 10.3.2. *Sean x, y, z conjuntos. Entonces,*

(1) $x \preccurlyeq x$.

(2) $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \to x \preccurlyeq z$.

(3) $x \sim y \to x \preccurlyeq y$.

(4) $x \subseteq y \to x \preccurlyeq y$.

(5) $x \preccurlyeq y \to \exists z \subseteq y\ (x \sim z)$.

Teorema 10.3.3. *(*SCHRDER–BERNSTEIN–CANTOR*). Sean x e y conjuntos tales que $x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x$. Entonces, $x \sim y$.*

Corolario 10.3.4. *Sean x e y conjuntos tales que $x \subseteq y \subseteq z$ y $x \sim z$. Entonces, $x \sim y$.*

Proposición 10.3.5. *Sean x, y, z, t conjuntos tales que $|x| = |y| \wedge |z| = |t|$. Entonces, $x \preccurlyeq z$ si y sólo si $y \preccurlyeq t$.*

Definición 10.3.6. Definimos en la clase **Cn** la relación $\leqslant$ como sigue:

$$\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b} \leftrightarrow \exists x \exists y \ (|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge x \preccurlyeq y)$$

Si $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, entonces notaremos $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

Proposición 10.3.7. *Sean x e y conjuntos. Se verifica:*

(1) $x \subseteq y \rightarrow |x| \leqslant |y|$.

(2) *Si $\mathfrak{a}$ es un cardinal, entonces $\mathfrak{a} \leqslant |y| \leftrightarrow \exists x \subseteq y \ (|x| = \mathfrak{a})$.*

(3) $|x| \leqslant |y| \leftrightarrow x \preccurlyeq y$.

Corolario 10.3.8. *La relación $<$ es un orden parcial sobre* **Cn**.

Teorema 10.3.9. *(*CANTOR*, 1891). Si x es un conjunto, entonces $|x| < |\mathbf{P}(x)|$.*

Corolario 10.3.10. $\forall \mathfrak{a} \ \exists \mathfrak{b} \ (\mathfrak{a} < \mathfrak{b})$.

Proposición 10.3.11. *Se verifica:*

(1) *Si $rank(x) = \alpha$, entonces $x \subseteq \mathcal{V}(\alpha)$.*

(2) *Para todo ordinal α, se tiene que $\mathcal{V}(\alpha)$ es un conjunto transitivo.*

(3) *Sean α, β ordinales tales que $\alpha < \beta$. Entonces, $\mathcal{V}(\alpha) \subseteq \mathcal{V}(\beta)$.*

(4) *Si $rank\ (x) \leqslant \beta$, entonces $x \subseteq \mathcal{V}(\beta)$.*

Teorema 10.3.12. *Sea x un conjunto tal que $x \subseteq$* **Cn**. *Entonces, existe un cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $\forall \mathfrak{b} \in x \ (\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a})$.*

Corolario 10.3.13. *Se verifica:*

(1) *Sea x un conjunto tal que $x \subseteq$* **Cn**. *Entonces, existe un cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $\forall \mathfrak{b} \in x \ (\mathfrak{b} < \mathfrak{a})$.*

(2) **Cn** *es una clase propia.*

10.4. Ordenación de los cardinales bien ordenables

Proposición 10.4.1. *Sean* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *cardinales. Si* $\mathfrak{a} \in \mathbf{In}$ *y* $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$*, entonces* $\mathfrak{b} \in \mathbf{In}$.

Proposición 10.4.2. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$*. Entonces,* $|\alpha| \in \mathbf{In} \wedge |\alpha| \leqslant \alpha$.

Proposición 10.4.3. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$*. Son equivalentes:*

(1) $\alpha \in \mathbf{Cn}$.

(2) $\forall \beta\ (\beta < \alpha \to \beta \not\sim \alpha)$.

(3) $|\alpha| = \alpha$.

Proposición 10.4.4. *Sean* $\mathfrak{a}$ *y* $\mathfrak{b}$ *cardinales bien ordenables. Entonces,*

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \textit{ como ordinales} \iff \mathfrak{a} < \mathfrak{b} \textit{ como cardinales}$$

Corolario 10.4.5. *En la teoría* **ZF***, la clase* $\langle \mathbf{In}, < \rangle$ *es bien ordenada. En la teoría* **ZFC***, la clase* $\langle \mathbf{Cn}, < \rangle$ *es bien ordenada.*

En cambio, en la teoría **ZF** no se puede probar que la clase $\langle \mathbf{Cn}, < \rangle$ sea bien ordenada.

Corolario 10.4.6. *Sean* α*,* β *ordinales. Se verifica:*

(1) $\alpha \leqslant \beta \to |\alpha| \leqslant |\beta|$.

(2) $|\alpha| < |\beta| \to \alpha < \beta$.

(3) $|\alpha| = \textit{máx}\{\beta \in \mathbf{In} : \beta \leqslant \alpha\}$.

Proposición 10.4.7. *Sea* $\alpha \in \mathbf{In}$ *y* $a \subseteq \alpha$*. Entonces*

(1) $t.o.(\langle a, \in \rangle) = \alpha \to |a| = \alpha$.

(2) $t.o.(\langle a, \in \rangle) \neq \alpha \to |a| < \alpha$.

Teorema 10.4.8. *(*HARTOGS*, 1915)* $\forall x \exists \alpha\ (\alpha \preccurlyeq \mathbf{P}(\mathbf{P}(x \times x)) \wedge \alpha \not\preccurlyeq x)$.

Definición 10.4.9. Si x es un conjunto, entonces el *número de Hartogs* de x es $h(x) = \text{ínf}\{\alpha : \alpha \not\preccurlyeq x\}$.
El *cardinal sucesor* de $|x|$ es $|x|^{+_c} = \text{ínf}\ \{\kappa \in \mathbf{In} : \kappa \not\leqslant |x|\}$.

Si $\mathfrak{a}$ es un cardinal, entonces notaremos $\mathfrak{a}^{+_c} = \mathfrak{a}^{+}$.

Proposición 10.4.10. *Si x es un conjunto, entonces*

$$h(x) = |x|^{+_c} \text{ y } |x|^{+_c} \leqslant |\mathbf{P}(\mathbf{P}(x \times x))|$$

Proposición 10.4.11. *Si $\mathfrak{a} \in \mathbf{In}$, entonces $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}^+$.*

Corolario 10.4.12. *Si $\mathfrak{a} \in \mathbf{In}$, entonces $\mathfrak{a}^+ = \text{ínf}\,\{\mathfrak{b} \in \mathbf{In} : \mathfrak{a} < \mathfrak{b}\}$.*

Proposición 10.4.13. *Se verifica:*

(1) $\neg\exists\mathfrak{a}\,\forall\mathfrak{b} \in \mathbf{In}\ (\mathfrak{b} < \mathfrak{a})$.

(2) *Sea x un conjunto tal que $x \subseteq \mathbf{In}$. Entonces $\bigcup x \in \mathbf{In}$.*

Corolario 10.4.14. *Se verifica:*

(1) *Sea x un conjunto tal que $x \subseteq \mathbf{In}$. Entonces, existe $\mathfrak{b} \in \mathbf{In}$ tal que $\forall\mathfrak{a} \in x\ (\mathfrak{a} < \mathfrak{b})$.*

(2) *La clase $\mathbf{In} - \omega$ es propia.*

10.5. La función aleph

La clase $\langle \mathbf{In} - \omega, < \rangle$ es propia bien ordenada. Por tanto, existe un único isomorfismo $\aleph$ de $\langle \mathbf{Ord}, \in_{\mathbf{Ord}} \rangle$ en $\langle \mathbf{In} - \omega, \in_{\mathbf{In}-\omega} \rangle$.

Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$, notaremos $\aleph(\alpha) = \aleph_\alpha$. Cuando queramos destacar alguna propiedad de $\aleph(\alpha)$ como ordinal, entonces lo notaremos por ω_α. Es decir, $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$.

Teniendo presente que $\text{mín}(\mathbf{In} - \omega) = \omega$, resulta que $\aleph_0 = \omega$.

Proposición 10.5.1. *Se verifica:*

(1) $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}$ *($\aleph_\alpha$ es un ordinal límite).*

(2) $\forall\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}\ (\alpha < \beta \to \aleph_\alpha < \aleph_\beta)$.

(3) *Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ y $\mathfrak{a} \in \mathbf{Cn}$ tales que $\aleph_\alpha < \mathfrak{a} < \aleph_\beta$. Entonces existe $\ggg\in \mathbf{Ord}$ tal que $\alpha <\ggg< \beta \wedge \mathfrak{a} = \aleph_{\ggg}$.*

(4) *Si $\alpha \in \mathbf{Ord}$, entonces $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.*

(5) *La función $\aleph$ es normal.*

Corolario 10.5.2. $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ \exists\beta \in \mathbf{Ord}\ (\beta \geqslant \alpha \wedge \beta = \aleph_\beta)$.

Es decir, existen infinitos ordinales β tales que el β–ésimo cardinal infinito bien ordenable, coincide con el β–ésimo ordinal.

Definición 10.5.3. Diremos que $\mathfrak{a}$ es un *cardinal sucesor* si existe un ordinal sucesor α tal que $\mathfrak{a} = \aleph_\alpha$. Caso contrario, diremos que α es un *cardinal límite*.

10.6. Problemas resueltos

Ejercicio 160. *Probar en* **ZF** *las siguientes propiedades:*

(1) $\forall x\, (x \notin x)$.

(2) $\forall x \forall y\, (x \notin y \vee y \notin x)$.

(3) *La clase,* $\mathcal{R}$, *de Russell coincide con la clase universal,* $\mathbf{V}$.

(1) Supongamos que existiera un conjunto a tal que $a \in a$. Entonces, $\{a\}$ es un conjunto no vacío. Por el axioma de regularidad, existe $x \in \{a\}$ tal que $x \cap \{a\} = \emptyset$. Entonces, $x = a$ y $a \cap \{a\} = \emptyset$. De donde resultaría que $a \notin a$. Lo que es una contradicción.

(2) Supongamos que existieran conjuntos a y b tales que $a \in b \wedge b \in a$. Como $\{a, b\}$ es un conjunto no vacío, por el axioma de regularidad, existe $x \in \{a, b\}$ tal que $x \cap \{a, b\} = \emptyset$. Entonces, $x = a \vee x = b$. Luego, resultaría que $a \notin b \vee b \notin a$. Lo que contradice el supuesto inicial.

(3) Basta tener presente que

$$\mathcal{R} = \{x : \ x \notin x\}\ ,\ \mathbf{V} = \{x : \ x = x\} \ \text{ y } \ \forall x\, (x = x \leftrightarrow x \notin x)$$

Ejercicio 161. *Probar en* **ZF** *que* $\forall a\ (a = \emptyset \leftrightarrow a \subseteq a \times a)$.

La implicación directa es trivial. Veamos la implicación recíproca. Para ello, supongamos que existiera un conjunto no vacío a tal que $a \subseteq a \times a$. Entonces, $b = a \cup (\bigcup a)$ es un conjunto no vacío. Por el axioma de regularidad, existe $x \in b$ tal que $x \cap b = \emptyset$. Distingamos dos casos:

<u>Caso 1º :</u> Supongamos que $x \in a$.

Entonces, $x \in a \times a$. Luego, $x \neq \emptyset$. Además

$$x \in a \Longrightarrow x \subseteq \bigcup a \Longrightarrow x \cap (\bigcup a) \neq \emptyset$$

Luego, $\emptyset \neq x \cap (\bigcup a) \subseteq x \cap b$. Lo que es una contradicción.

<u>Caso 2º :</u> Supongamos que $x \in \bigcup a - a$. Como $a \subseteq a \times a$, resulta que $\bigcup a \subseteq \bigcup (a \times a)$. Luego, $x \in \bigcup (a \times a)$. Sean $y, z \in a$ tales que $x \in \langle y, z \rangle$. Entonces, $x = \{y\} \vee x = \{y, z\}$. Es decir, $x \cap a \neq \emptyset$. Luego, $x \cap b \neq \emptyset$. Lo que es una contradicción.

Ejercicio 162. *Probar en* **ZF** *que si A es una clase no vacía, entonces existe $b \in A$ tal que $b \cap A = \emptyset$.*
Indicación: *Téngase presente que para cada conjunto a existe un conjunto transitivo que lo contiene.*

Sea A una clase no vacía. Sea $a \in A$. Recordemos que la clausura transitiva de a, $\mathrm{CT}(a)$, es un conjunto transitivo que lo contiene (ver ejercicio 44).

Supongamos que $a \cap A \neq \emptyset$. Entonces, $a \cap A \subseteq \mathrm{CT}(a) \cap A$. Luego, $\mathrm{CT}(a) \cap A$ es un conjunto no vacío. Por el axioma de regularidad, existe $b \in \mathrm{CT}(a) \cap A$ tal que $b \cap (\mathrm{CT}(a) \cap A) = \emptyset$. Veamos que $b \cap A = \emptyset$.

- Caso contrario, existiría $x \in b \cap A$. Entonces

$$x \in b \wedge b \in \mathrm{CT}(a) \Longrightarrow x \in \mathrm{CT}(a)$$

Es decir, $x \in b \cap (\mathrm{CT}(a) \cap A)$. Lo que es una contradicción.

Ejercicio 163. *Probar en* **ZF** *que si A y B son clases transitivas y $\in_A$ es conexa en A, entonces $(B \subsetneqq A) \Longleftrightarrow (B$ conjunto $\wedge\, B \in A)$.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que $B \subsetneqq A$. Entonces, $A - B$ es una clase no vacía. Del ejercicio anterior se deduce la existencia de un elemento $c \in A - B$ tal que $c \cap (A - B) = \emptyset$. Veamos que $c = B$.

- Si $x \in c$, entonces $x \notin A - B$. Como $x \in A$ (pues $c \in A$ y A es transitiva), resulta que $x \in B$.
- Si $x \in B$, entonces $x \in A$. Luego, $x = c \vee x \in c \vee c \in x$. Ahora bien
  - No puede verificarse que $x = c$, pues $x \in B \wedge c \notin B$.
  - No puede verificarse que $c \in x$, pues teniendo presente que $x \in B$ y que B es transitiva resultaría que $c \in B$.

  Por tanto, $x \in c$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que B es un conjunto tal que $B \in A$. De la transitividad de A resulta que $B \subseteq A$. Pero $B \neq A$ (pues $B = A \Longrightarrow A \in A$: que no puede darse, por el ejercicio 160). Es decir, $B \subsetneqq A$.

Ejercicio 164. *Demostrar que los intervalos* $[0,1]$, $]0,1[$, $[0,1[$ *y* $]0,1]$, *tienen el mismo cardinal (explicitar, en cada caso, una biyección entre los mismos).*

Antes de resolver propiamente el ejercicio propuesto, vamos a hacer unas consideraciones generales acerca de cómo se puede establecer una aplicación biyectiva de un conjunto A en un conjunto B, en algunos casos singulares.

Supongamos que es posible hallar descomposiciones de A y B de la siguiente forma: $A = C \cup D$ y $B = C \cup E$, con $C \cap D = C \cap E = \emptyset$, D numerable y E numerable.

Supongamos que f es una aplicación biyectiva de D en E. Entonces, la aplicación $g : A \to B$ definida por

$$g \upharpoonright C = I_C \wedge g \upharpoonright D = f$$

es una aplicación biyectiva de A en B.

Veamos cómo podemos aplicar este procedimiento para resolver éste y otros ejercicios similares.

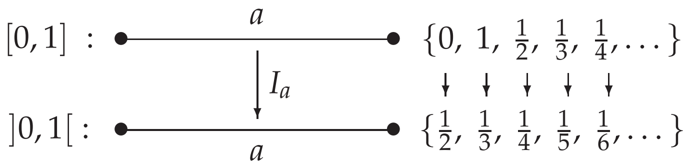
- Veamos que $[0,1] \sim]0,1[$.

  Sea $a =]0,1[- \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\}$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & = & a \cup \{0,1\} \cup \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\} \\ ]0,1[& = & a \cup \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\} \end{array}$$

  Consideremos la aplicación $f : [0,1] \to]0,1[$ definida así:

$$f \upharpoonright a = I_a \wedge f(0) = \frac{1}{2} \wedge f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}\ (\forall n \in \omega - \{0\})$$



Es inmediato probar que f es una aplicación biyectiva de $[0,1]$ en $]0,1[$.

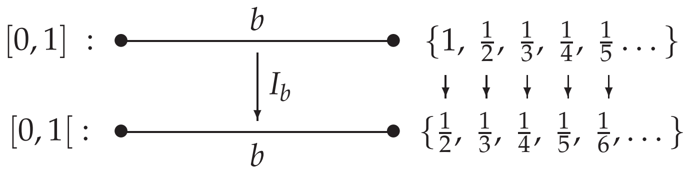
- Veamos que $[0,1] \sim [0,1[$.

  Sea $b = [0,1[- \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\}$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & = & b \cup \{1\} \cup \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\} \\ [0,1[& = & b \cup \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\} \end{array}$$

  Consideremos la aplicación $g : [0,1] \to [0,1[$ definida así:

$$g \restriction b = I_b \wedge g(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}\ (\forall n \in \omega - \{0\})$$



Entonces g es una aplicación biyectiva de $[0,1]$ en $[0,1[$.

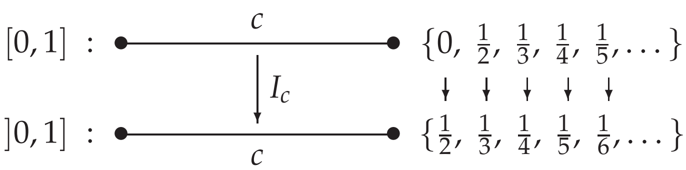
- Veamos que $[0,1] \sim]0,1]$.

  Sea $c =]0,1] - \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\}$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & = & c \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\} \\ ]0,1] & = & c \cup \{\frac{1}{n} :\ n \in \omega - \{0,1\}\} \end{array}$$

  Consideremos la aplicación $h : [0,1] \to]0,1]$ definida así:

$$h \restriction c = I_c \wedge h(0) = \frac{1}{2} \wedge h(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}\ (\forall n \in \omega - \{0,1\})$$



Entonces h es una aplicación biyectiva de $[0,1]$ en $]0,1]$.

Ejercicio 165. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Demostrar que los intervalos $[a, b]$, $]a, b[$,$[a, b[$ y $]a, b]$, tienen el mismo cardinal (explicitar, en cada caso, una biyección entre los mismos).*

Vamos a resolver este ejercicio aplicando un esquema similar al del ejercicio anterior. Para ello, en primer lugar consideramos un subconjunto numerable de $[a, b]$. Sea

$$E = \{a + \frac{b-a}{n} : n \in \omega - \{0,1\}\}$$

Es obvia la numerabilidad del conjunto E. Además $E \subseteq [a, b]$ ya que

$\star$ $a < a + \dfrac{b-a}{n}$ $(\forall n \in \omega - \{0\})$.

$\star$ $a < b \overset{n>1}{\Longrightarrow} (n-1) \cdot a < (n-1) \cdot b \Longrightarrow a + \dfrac{b-a}{n} < b$.

Veamos que $[a, b] \sim]a, b[$.

- Sea $C =]a, b[- E$. Entonces $[a, b] = C \cup \{a, b\} \cup E$ y $]a, b[= C \cup E$. Como los conjuntos E y $D = \{a, b\} \cup E$ son numerables, podemos establecer una biyección de $[a, b]$ en $]a, b[$ de acuerdo con lo indicado al principio del ejercicio anterior.

Veamos que $[a, b] \sim]a, b]$.

- Sea $C =]a, b] - E$. Entonces $[a, b] = C \cup \{a\} \cup E$ y $]a, b] = C \cup E$. Como los conjuntos E y $D = \{a\} \cup E$ son numerables, podemos establecer una biyección de $[a, b]$ en $]a, b]$ de acuerdo con lo indicado al principio del ejercicio anterior.

Veamos que $[a, b] \sim [a, b[$.

- Sea $C = [a, b[- E$. Entonces $[a, b] = C \cup \{b\} \cup E$ y $[a, b[= C \cup E$. Como los conjuntos E y $D = \{b\} \cup E$ son numerables, podemos establecer una biyección de $[a, b]$ en $[a, b[$ de acuerdo con lo indicado al principio del ejercicio anterior.

Nota: Se deja como ejercicio al lector explicitar, en cada caso, una biyección del correspondiente conjunto D en E.

Ejercicio 166. *Probar, explicitando una biyección entre los conjuntos citados, que:*

(1) $[0,1[\sim [0,+\infty[$.

(2) $]-1,0] \sim]-\infty,0]$.

(3) $]-1,1[\sim \mathbb{R}$.

(4) $[a,b] \sim \mathbb{R}$, *para cada* $a,b \in \mathbb{R}$ *tales que* $a < b$.

(1) Consideremos la aplicación $f : [0,1[\to [0,+\infty[$ definida así:

$$f(x) = \frac{x}{1-x} \; (\forall x \in [0,1[)$$

La aplicación f está bien definida entre los conjuntos considerados ya que

$$0 \leqslant x < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \tfrac{x}{1-x} < +\infty$$

- f es inyectiva ya que

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{y}{1-y} \Longrightarrow x \cdot (1-y) = y \cdot (1-x) \Longrightarrow x = y$$

- f es una aplicación suprayectiva de $[0,1[$ en $[0,+\infty[$, ya que si $x \in [0,+\infty[$, consideramos $y = \frac{x}{1+x}$. Entonces $y \in [0,1[$. Además $f(y) = \frac{y}{1-y} = x$.

(2) Consideremos la aplicación $g :]-1,0] \to]-\infty,0]$ definida así:

$$g(x) = \frac{x}{1+x} \; (\forall x \in]-1,0])$$

La aplicación g está bien definida entre los conjuntos considerados ya que

$$-1 < x \leqslant 0 \Longrightarrow -\infty < \tfrac{x}{1+x} \leqslant 0$$

- g es inyectiva ya que

$$g(x) = g(y) \Longrightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Longrightarrow x \cdot (1+y) = y \cdot (1+x) \Longrightarrow x = y$$

- g es una aplicación suprayectiva de $]-1,0]$ en $]-\infty,0]$, ya que si $x \in]-\infty,0]$, consideramos $y = \frac{x}{1-x}$. Entonces $y \in]-1,0]$. Además $g(y) = \frac{y}{1+y} = x$.

(3) Consideremos la aplicación $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ definida así:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ g(x) & \text{si} \quad x \in]-1,0[\end{cases}$$

siendo f y g las aplicaciones consideradas en los apartados anteriores. Entonces, h es una aplicación biyectiva de $]-1,1[$ en $\mathbb{R}$.

(4) Si $a < b$, entonces $[a,b] \sim]-1,1[\sim \mathbb{R}$. Para obtener una biyección de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, basta componer la biyección $k : [a,b] \to [c,d]$ (con $c = -1$ y $d = 1$) dada por

$$k(x) = \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c, \text{ para cada } x \in [a,b]$$

con la biyección de $[-1,1]$ en $]-1,1[$ dada en el ejercicio 165 y la biyección de $]-1,1[$ en $\mathbb{R}$ descrita en el apartado (3).

Ejercicio 167. *Demostrar que* $|]0,1[| = |{}^{\omega}2| = |\mathbb{R}| = |\mathbf{P}(\omega)|$, *admitiendo el siguiente resultado:*

> *Sea* $a \in \omega$ *tal que* $a > 1$. *Entonces para cada* $x \in]0,1[$, *existe una única sucesión* $\{x_n : n \in \omega\}$ *de números naturales tal que:*
>
> *(1) Para cada* $n \in \omega, x_n < a$.
>
> *(2)* $x = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{a^{n+1}}$.
>
> *(3) Existen infinitos* n *tales que* $x_n < a-1$.

Indicación: *Pruébese que* $]0,1[\preccurlyeq^{\omega} 2$ *y que* ${}^{\omega}2 \preccurlyeq [0,1[$.

- Veamos que $]0,1[\preceq^{\omega} 2$.

  Para ello, consideremos la aplicación f de $]0,1[$ en ${}^{\omega}2$ definida así:

  – Sea $x \in]0,1[$. Sea $\{x_n : n \in \omega\}$ la única sucesión de números naturales verificando

    (1) Para cada $n \in \omega,\ x_n < 2$.

    (2) $x = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{2^n}$.

    (3) Existen infinitos n tales que $x_n < 2-1$ (la sucesión posee infinitos “ceros").

    En tal situación, definimos $f(x)$ como la aplicación de ω en 2 caracterizada por $(f(x))(n) = x_n$ $(\forall n \in \omega)$.

  Obviamente, f es una aplicación bien definida entre los conjuntos citados. Además, f es inyectiva ya que

  $$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow \forall n \in \omega\ ((f(x))(n) = (f(y))(n)) \\ &\Longrightarrow \forall n \in \omega\ (x_n = y_n) \Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

- Veamos que ${}^{\omega}2 \preceq]0,1[$. Para ello, teniendo presente que $[0,1[\sim]0,1[$, basta probar que ${}^{\omega}2 \preceq [0,1[$. Veámoslo.

– Consideremos la aplicación $g :^{\omega} 2 \to [0,1[$ definida como sigue: si $x = (x_n)_{n\in\omega} \in {}^{\omega}2$, entonces $g(x) = \sum_{n\in\omega} \frac{x_n}{3^{n+1}} = y$.

Es decir, $y = \frac{x_0}{3} + \frac{x_1}{3^2} + \frac{x_2}{3^3} + \dots$ es el número real de $[0,1[$ cuyo desarrollo decimal en base 3 es $(x_n)_{n\in\omega}$.

Si $(x_n)_{n\in\omega} \in {}^{\omega}2$, entonces existen infinitos términos de dicha sucesión (en realidad, todos) que son estrictamente menores que 2=3-1. Del resultado que admitimos sigue, inmediatamente, la inyectividad de la aplicación g.

- Teniendo presente que $]0,1[\preceq^{\omega} 2$ y que ${}^{\omega}2 \preceq]0,1[$, del teorema de Schrder–Bernstein–Cantor se deduce que $]0,1[\sim^{\omega} 2$. Además

$$|\mathbf{P}(\omega)| = |{}^{\omega}2| \text{ y } |]0,1[| = |\mathbb{R}|$$

Ejercicio 168. *Probar en* **ZFC**$^-$ *que si f es una aplicación y a es un conjunto, entonces $|f[a]| \leqslant |a|$.*

(AC) Veamos que $f[a] \preceq a$.

Para ello, sea φ una función de elección de $\mathbf{P}(a)$. Consideremos la aplicación g de $f[a]$ en a definida como sigue: si $x \in f[a]$, entonces $g(x) = \varphi(f^{-1}[\{x\}])$ (obsérvese que $g(x) \in f^{-1}[\{x\}]$, para cada $x \in f[a]$).

Obviamente, g es una aplicación bien definida entre los conjuntos citados. Además g es inyectiva ya que si $x, y \in f[a]$, entonces

$$x \neq y \Longrightarrow f^{-1}[\{x\}] \cap f^{-1}[\{y\}] = \emptyset \Longrightarrow g(x) \neq g(y)$$

En consecuencia, $f[a] \preceq a$. Luego, $|f[a]| \leqslant |a|$.

Nota: Téngase presente que si el conjunto a es bien ordenable, entonces no es necesario el axioma de elección.

En efecto: sea R un buen orden en a. Consideremos la aplicación g de $f[a]$ en a definida como así: $g(x) = \text{mín}_R(f^{-1}[\{x\}])$. Entonces, g es una aplicación inyectiva de $f[a]$ en a.

Ejercicio 169. *Sean $\alpha, \beta \in$* **Ord** *tales que $|\alpha| \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Probar que $|\beta| = |\alpha|$.*

Sean α y β ordinales tales que $|\alpha| \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Entonces

⋆ $\beta \preceq \alpha$ ya que $\beta \leqslant \alpha \Longrightarrow \beta \subseteq \alpha$.

⋆ $\alpha \preceq \beta$ ya que $\alpha \sim |\alpha|$ y $|\alpha| \leqslant \beta \Longrightarrow \alpha \preceq \beta$.

Del teorema de Schrder–Bernstein–Cantor se deduce que $\beta \sim \alpha$. Por tanto, $|\beta| = |\alpha|$.

Ejercicio 170. *Sean*
- *A el conjunto de sucesiones finitas de números naturales.*
- *B el conjunto de sucesiones finitas de números naturales no decrecientes.*
- *C el conjunto de sucesiones finitas crecientes de números naturales.*

Demostrar que $|A| = |B| = |C| = |\mathbf{P}_F(\omega)|$, explicitando aplicaciones biyectivas entre los conjuntos citados.

(1) Veamos que $A \sim B$. Consideremos la aplicación $f : A \to B$ definida así: $f(\emptyset) = \emptyset$ y $f(a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$.

Obviamente, f es una aplicación de A en B.

- Veamos que f es inyectiva. En efecto: supongamos que
$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = f(b_0, b_1, \dots, b_n)$$
Entonces
$$\begin{array}{lcl} a_0 & = & b_0 \\ a_0 + a_1 & = & b_0 + b_1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n & = & b_0 + b_1 + \cdots + b_n \end{array}$$
Luego, $a_i = b_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.
- Veamos que f es suprayectiva de A en B. En efecto: $\emptyset \in \operatorname{rang}(f)$. Si $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in B$, entonces $(b_0, b_1 - b_0, \dots, b_n - b_{n-1}) \in A$ y $f(b_0, b_1 - b_0, \dots, b_n - b_{n-1}) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.

(2) Veamos que $B \sim C$. Consideremos la aplicación $g : B \to C$ definida así:
$$g(\emptyset) = \emptyset \text{ y } g(a_0, a_1, \dots, a_n) = (a_0, a_1 + 1, \dots, a_n + n)$$
Se verifica que $a_i \leqslant a_{i+1} \Longrightarrow a_i + i < a_{i+1} + i + 1$. Luego, g es una aplicación bien definida de B en C.

- g es inyectiva: se hace mediante un razonamiento similar al anterior.
- Veamos que g es suprayectiva de B en C. En efecto: $\emptyset \in \operatorname{rang}(g)$. Si $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in C$, entonces para cada j $(0 \leqslant j \leqslant n)$ se tiene que $j \leqslant b_j$. Notemos $a_j = b_j - j$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$. Entonces, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in B$ y $g(a_0, a_1, \dots, a_n) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$.

(3) Veamos que $C \sim \mathbf{P}_F(\omega)$. Consideremos la aplicación $h : C \to \mathbf{P}_F(\omega)$ definida así:
$$h(\emptyset) = \emptyset \text{ y } h(a_0, a_1, \dots, a_n) = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$$
Trivialmente, h es una aplicación bien definida de C en $\mathbf{P}_F(\omega)$.

- Veamos que h es inyectiva. Si $h(a_0, a_1, \ldots, a_n) = h(b_0, b_1, \ldots, b_n)$, entonces $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$. Teniendo presente que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ y $b_0 < b_1 < \ldots < b_n$, resulta que $a_i = b_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$.
- Veamos que h es suprayectiva de C en $\mathbf{P}_F(\omega)$. En efecto: $\emptyset \in \operatorname{rang}(h)$. Sea $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito no vacío de ω. Ordenemos dicho conjunto según el orden usual de ω :

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_n\}$$

Entonces, $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in C$ y

$$h(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

Ejercicio 171. *Probar en* **ZF** *que una clase A es un conjunto si y sólo si existe un cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $A \sim \mathfrak{a}$.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que la clase A es un conjunto. Entonces, la teoría **ZF** prueba que existe un cardinal $\mathfrak{a}$ tal que $|A| = \mathfrak{a}$. Luego, A es equipotente al cardinal $\mathfrak{a}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Supongamos que A es una clase equipotente a un cierto cardinal $\mathfrak{a}$. Sea f una aplicación biyectiva de $\mathfrak{a}$ en A. Como f es una aplicación y $\mathfrak{a}$ es un conjunto, del esquema de axiomas de reemplazamiento se deduce que $f[\mathfrak{a}] = A$ es un conjunto.

Ejercicio 172. *Sea $(\lambda_i)_{i \in I}$ una familia de cardinales bien ordenables. Probar que $\bigcup\limits_{i \in I} \lambda_i$ es un cardinal bien ordenable.*

Sea $(\lambda_i)_{i \in I}$ una familia de cardinales bien ordenables. Entonces, para cada $i \in I$ se tiene que $\lambda_i \in \mathbf{Ord}$. Luego,

$$\bigcup_{i \in I} \lambda_i = \sup\{\lambda_i : i \in I\} \in \mathbf{Ord}$$

Veamos que $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\alpha < \bigcup\limits_{i \in I} \lambda_i \to \alpha \not\sim \bigcup\limits_{i \in I} \lambda_i)$.

Para ello, sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$ tal que

$$\alpha < \bigcup_{i \in I} \lambda_i = \sup\{\lambda_i : i \in I\}$$

Entonces, existe $j \in I$ tal que $\alpha < \lambda_j$. Luego, $\alpha \preceq \lambda_j$.

– Veamos que $\alpha \not\sim \bigcup\limits_{i \in I} \lambda_i$. En efecto:

- Caso contrario, existiría una aplicación biyectiva, f, de $\bigcup_{i\in I}\lambda_i$ en α. Luego, $f \restriction \lambda_j$ sería una aplicación inyectiva de λ_j en α. Es decir, $\lambda_j \preceq \alpha$. Del teorema de Schrder–Bernstein–Cantor deduciríamos que $\alpha \sim \lambda_j$. Lo que contradice que λ_j sea un cardinal bien ordenable (pues $\alpha < \lambda_j$).

Ejercicio 173. *Dar ejemplo de un conjunto, a, de ordinales tales que $\bigcup a$ no sea un cardinal bien ordenable.*

Consideremos $a = \{\omega + 1\}$. Entonces, $a \subseteq \mathbf{Ord}$ y $\bigcup a = \omega + 1$ que, obviamente, no es un cardinal bien ordenable.

Ejercicio 174. *Demostrar o refutar:*

(1) *La clase* $\mathbf{Ord} - \mathbf{In}$ *es propia.*

(2) *Si para cada* $\alpha \in \mathbf{Ord}$ *definimos* $A_\alpha = \{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta \sim \omega_\alpha\}$*, entonces la clase* $B = \{\alpha \in \mathbf{Ord} : A_\alpha \text{ es un conjunto}\}$ *es propia.*

(3) *Sea* $\langle A, R\rangle$ *una clase propia bien ordenada. Entonces, existen dos clases propias B y C tales que* $B \cap C = \emptyset$ *y* $B \cup C = A$.

(1) **Verdadero.** Teniendo presente que $\mathbf{Ord} - \mathbf{In} \subseteq \mathbf{Ord}$, para probar que la clase $\mathbf{Ord} - \mathbf{In}$ es propia, basta ver que no está acotada superiormente en $\langle \mathbf{Ord}, \in\rangle$.

- Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces, $\alpha \leqslant \aleph_\alpha < \aleph_\alpha + 1$. Como todo cardinal bien ordenable infinito es un ordinal límite, resulta que $\aleph_\alpha + 1 \in \mathbf{Ord} - \mathbf{In}$. Luego, α no es cota superior de $\mathbf{Ord} - \mathbf{In}$ en $\langle \mathbf{Ord}, \in\rangle$.

(2) **Verdadero.** Vamos a probar que para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$, la clase A_α es un conjunto (de donde resultará que $B = \mathbf{Ord}$).

- Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces
  $\beta \in A_\alpha \Longrightarrow \beta \sim \omega_\alpha \Longrightarrow \beta < \omega_{\alpha+1}$ (pues $\omega_{\alpha+1} \leqslant \beta \Longrightarrow \omega_{\alpha+1} \preceq \omega_\alpha$)
  Luego, $A_\alpha \subseteq \omega_{\alpha+1}$. Como $\omega_{\alpha+1}$ es un conjunto, del esquema de axiomas de separación se deduce que también lo es A_α.

(3) **Verdadero.** Sea $\langle A, R\rangle$ una clase propia bien ordenada. Entonces, existe un único isomorfismo $F : \langle \mathbf{Ord}, \in\rangle \cong \langle A, R\rangle$. Sean $B = F[\mathbf{In}]$ y $C = F[\mathbf{Ord} - \mathbf{In}]$. Teniendo presente que F es una aplicación biyectiva entre las clases propias citadas, resulta que las clases B y C son propias.

Como $(\mathbf{Ord} - \mathbf{In}) \cap \mathbf{In} = \emptyset$ y F es biyectiva, resulta que

$$F[\mathbf{Ord} - \mathbf{In}] \cap F[\mathbf{In}] = \emptyset$$

Como $(\mathbf{Ord} - \mathbf{In}) \cup \mathbf{In} = \mathbf{Ord}$ y F es biyectiva, resulta que

$$F[\mathbf{Ord} - \mathbf{In}] \cup F[\mathbf{In}] = F[\mathbf{Ord}]$$

Es decir, $B \cap C = \emptyset$ y $B \cup C = A$.

Ejercicio 175. *Probar que es propia la clase*

$$A = \{x : \ x = \bigcup x \ \wedge \ x \neq |x|\}$$

Notemos **Lim** a la clase de los ordinales límites.

En primer lugar, veamos que $\mathbf{Lim} - \mathbf{In} \subseteq A$.

- Sea $\alpha \in \mathbf{Lim} - \mathbf{In}$. Por una parte, como $\alpha \in \mathbf{Lim}$, resulta que $\alpha = \bigcup \alpha$. Por otra, teniendo presente que $\alpha \in \mathbf{Ord} - \mathbf{In}$, se deduce que α no es un cardinal; luego $\alpha \neq |\alpha|$. Por tanto, $\alpha \in A$.

A continuación, veamos que la clase $\mathbf{Lim} - \mathbf{In}$ es propia.

- Teniendo presente que $\mathbf{Lim} - \mathbf{In} \subseteq \mathbf{Ord}$, basta probar que dicha clase no está acotada superiormente en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$.

  Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces $\alpha \leqslant \aleph_\alpha = \omega_\alpha < \omega_\alpha + \omega$.

  Como Σ_{ω_α} es una aplicación normal y ω es límite, resulta que $\Sigma_{\omega_\alpha}(\omega) = \omega_\alpha + \omega$ es un ordinal límite. Luego $\omega_\alpha + \omega \in \mathbf{Lim}$.

  Además, se tiene que $\omega_\alpha + \omega \sim \omega_\alpha$ (ya que la aplicación $f : \omega_\alpha \to \omega_\alpha + \omega$ definida por $f(2k) = k$, $f(2k+1) = \omega_\alpha + k$, para cada $k \in \omega$ y $f(\beta) = \beta$, para cada $\omega \leqslant \beta < \omega_\alpha$, es biyectiva).

  Por tanto,

  $$|\omega_\alpha + \omega| = |\omega_\alpha| = \omega_\alpha \neq \omega_\alpha + \omega$$

  Es decir, $\omega_\alpha + \omega \in \mathbf{Lim} - \mathbf{In}$.

  Luego α no es cota superior de la clase $\mathbf{Lim} - \mathbf{In}$ en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$.

Teniendo presente que la clase A contiene a una clase propia ($\mathbf{Lim} - \mathbf{In}$) concluimos que A es propia.

Ejercicio 176. *Probar en* $\mathbf{ZF}^-$ *que son equivalentes:*

(1) *Existe una aplicación,* f*, del conjunto* $a = \{x \subseteq \mathbb{R} : |x| \leqslant \aleph_0\}$ *en el conjunto* $\mathbb{R}$ *de los números reales, tal que* $f(x) \notin x$*, para cada* $x \in a$*.*

(2) *Existe* $b \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $|b| = \aleph_1$*.*

$\boxed{(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})}$

Supongamos que existe una aplicación, f de $a = \{x \subseteq \mathbb{R} : |x| \leqslant \aleph_0\}$ en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \notin x$, para cada $x \in a$.

Consideremos la aplicación, g, de $\aleph_1$ en $\mathbb{R}$ definida por recursión como sigue:

$$g(\alpha) = f(\{g(\beta) : \beta < \alpha\}), \text{ para cada } \alpha \in \aleph_1$$

La aplicación g está bien definida ya que si $\alpha \in \aleph_1$, entonces α es un conjunto bien ordenable y, por tanto, $|g[\alpha]| \leqslant |\alpha|$ (véase la nota del ejercicio 168). Luego, $|\{g(\beta) : \beta < \alpha\}| \leqslant \aleph_0$. Es decir,

$$\{g(\beta) : \beta < \alpha\} \in a = \operatorname{dom}(f)$$

Sea $b = \operatorname{rang}(g)$. Veamos que la aplicación g es inyectiva.

- Sean $\alpha, \beta \in \aleph_1$ tales que $\beta < \alpha$. Entonces

  $$g(\alpha) = f(\{g(\ggg) : \ggg < \alpha\}) \notin \{g(\ggg) : \ggg < \alpha\}$$

  De donde se deduce que $g(\alpha) \neq g(\beta)$.

Por tanto g es una aplicación biyectiva de $\aleph_1$ en b. Por tanto, $|b| = \aleph_1$.

$\boxed{(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{1})}$

Sea $b \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|b| = \aleph_1$. Entonces, existe un buen orden, R, en el conjunto b. Consideremos la aplicación de $a = \{x \subseteq \mathbb{R} : |x| \leqslant \aleph_0\}$ en $\mathbb{R}$ definida así: $f(x) = \text{mín}_R(b - x)$. Entonces, es claro que f satisface las condiciones exigidas.

Ejercicio 177. *Sea* $\langle a, R\rangle$ *un conjunto bien ordenado cuyo tipo ordinal es* α*. Probar que para cada* $\beta \in$ **Ord** *se verifica que*

$$\aleph_\beta \leqslant \alpha \Longleftrightarrow \aleph_\beta \leqslant |a|$$

Sea $\langle a, R\rangle$ un conjunto bien ordenado cuyo tipo ordinal es α.

- Sea $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\aleph_\beta \leqslant \alpha$. Entonces, $\aleph_\beta \preceq \alpha$. Como $\alpha \sim a$, resulta que $\aleph_\beta \preceq a$. Por tanto, $\aleph_\beta = |\aleph_\beta| \leqslant |a|$.
- Sea $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\aleph_\beta \leqslant |a|$. Como $\alpha \sim a$, resulta que $|a| \leqslant \alpha$. Luego, $\aleph_\beta \leqslant |a| \leqslant \alpha$.

Ejercicio 178. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Probar que $\alpha < \aleph_{\beta+1} \iff |\alpha| \leqslant \aleph_\beta$.*

Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$ tales que $\alpha < \aleph_{\beta+1}$. Entonces, $|\alpha| \leqslant \alpha < \aleph_{\beta+1}$. Luego, $|\alpha| \leqslant \aleph_\beta$.

Supongamos que $|\alpha| \leqslant \aleph_\beta$. Entonces, se verifica que $\alpha < \aleph_{\beta+1}$ ya que, caso contrario,

$$\aleph_{\beta+1} \leqslant \alpha \Longrightarrow \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1} = |\aleph_{\beta+1}| \leqslant |\alpha|$$

Ejercicio 179. *Probar que en $\mathbf{ZF}^-$ son equivalentes:*

(1) *El axioma de elección.*

(2) *$\forall x \forall y\ (x \preceq y \vee y \preceq x)$.*

$\boxed{(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})}$

Sean a y b conjuntos. Por el axioma de elección, a y b son conjuntos bien ordenables. Por tanto, existen ordinales α y β tales que $a \sim \alpha$ y $b \sim \beta$. Teniendo presente que $\alpha \leqslant \beta \vee \beta \leqslant \alpha$, se deduce que:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \alpha \preceq \beta \Longrightarrow a \preceq b \\ \beta \leqslant \alpha \Longrightarrow \beta \preceq \alpha \Longrightarrow b \preceq a \end{array}\right\}$$

$\boxed{(\mathbf{2}) \Longrightarrow (\mathbf{1})}$

Supongamos que $\forall x \forall y\ (x \preceq y \vee y \preceq x)$. Veamos que todo conjunto es bien ordenable.

Sea a un conjunto. Por el teorema de Hartogs, existe un ordinal α tal que $\alpha \not\preceq a$. Luego, de la hipótesis de partida, resulta que $a \preceq \alpha$.

Sea f una aplicación inyectiva de a en α. Entonces, la relación R en a transportada por f, a partir del orden usual de α (es decir, $xRy \iff f(x) < f(y)$) es un buen orden en a.

10.7. Problemas propuestos

Ejercicio 10.1. Probar que un conjunto x es finito si y sólo si $x \prec \omega$.

Indicación: Recuérdese que si x e y son conjuntos, entonces $x \prec y \leftrightarrow |x| < |y|$.

Ejercicio 10.2. Sea x un conjunto. Probar que $2 \preceq x$ si y sólo si $\exists u, v \in x\ (u \neq v)$.

Ejercicio 10.3. Sean a y b conjuntos tales que $a \preceq b$. Probar que $\mathbf{P}(a) \preceq \mathbf{P}(b)$. ¿Es cierto que si $a \prec b$ entonces $\mathbf{P}(a) \prec \mathbf{P}(b)$?

Ejercicio 10.4. Sean x, y, z, w conjuntos. Probar que:

(1) Si $y \preceq z$ y $x \preceq w$, entonces ${}^y x \preceq {}^z w$.

(2) Si $2 \preceq x$, entonces $y \prec {}^y x$.

Indicación: **(1)** Distinguir los casos $w = \emptyset$ y $w \neq \emptyset$. **(2)** Usar **(1)** y el teorema de Cantor o bien probarlo directamente usando un argumento similar al de la prueba del teorema de Cantor (llamado de *diagonalización*).

Ejercicio 10.5. Supongamos que f es una función cuyo dominio es un conjunto bien ordenable. Probar que $|\text{rang}(f)| \leqslant |\text{dom}(f)|$.

Indicación: Análogo al ejercicio 134.

Ejercicio 10.6. Sean x, y, z conjuntos. Demostar o refutar:

(1) Si $x \cap z = y \cap z = \emptyset$ y $x \cup z \preceq y \cup z$, entonces $x \preceq y$.

(2) Si $x \times z \preceq y \times z$, entonces $x \preceq y$.

(3) Si ${}^x z \preceq {}^y z$, entonces $x \preceq y$.

(4) Si ${}^z x \preceq {}^z y$, entonces $x \preceq y$.

Ejercicio 10.7. Sean a, b, c conjuntos. Probar que:

(1) $a \preceq b \wedge b \prec c \Longrightarrow a \prec c$.

(2) $a \prec b \wedge b \preceq c \Longrightarrow a \prec c$.

Ejercicio 10.8. Sea a un conjunto tal que $a \sim a \cup \{a\}$. Probar en **ZF** que existe $x \subseteq a$ tal que $x \sim \omega$.

Indicación: Si f es una aplicación biyectiva de $a \cup \{a\}$ en a, entonces considérese la aplicación $g : \omega \to a$ definida por recursión como sigue:

$$g(0) = f(a) \ \text{ y } \ \forall n \in \omega\ (g(n+1) = f(g(n))$$

Pruébese que g es una aplicación inyectiva, por inducción débil en ω, teniendo presente que del axioma de regularidad resulta que $a \notin a$.

Ejercicio 10.9. Dar una prueba “muy simple"del ejercicio anterior, en la teoría **ZFC**.

Indicación: Pruébese que el conjunto a es infinito, teniendo presente que del axioma de regularidad resulta que $a \notin a$. Entonces aplíquese el ejercicio 141.

Ejercicio 10.10. Probar que existe una aplicación normal $G : \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}$ tal que

$$\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (G(\alpha) = \aleph_{G(\alpha)})$$

Ejercicio 10.11. Sea $h^\star : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ la aplicación definida por

$$h^\star(x) = \text{ínf}\{\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\} :\ \neg\exists f\ (f \text{ aplicación } \wedge\ \text{dom}(f) = x \wedge\ \text{rang}(f) = \alpha)\}$$

Probar que:

(1) $h^\star$ está bien definida.

(2) $h^\star(x)$ es un ordinal inicial.

(3) Para cualquier conjunto x, se verifica que $h(x) \leqslant h^\star(x)$ (siendo $h(x)$ el número de Hartogs de x, ver 10.4.9).

(4) Admitiendo el axioma de elección, para cualquier conjunto x se tiene que $h^\star(x) = h(x)$.

Indicación: **(1)** Probar que $h^\star(x)$ es el conjunto de los tipos ordinales de los buenos órdenes sobre particiones de x (y el cero).

Ejercicio 10.12. Dar una definición recursiva de la función $\aleph$.

Ejercicio 10.13. Sea A una clase de ordinales verificando:

(1) $0 \in A$.

(2) Si $\alpha \in A$, entonces $\alpha + 1 \in A$.

(3) Si $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión creciente de elementos de A, entonces

$$\sup\{\alpha_n : n \in \omega\} \in A$$

Probar en $\mathbf{ZFC}^-$ que $\omega_1 \subseteq A$.

Indicación: Probarlo por inducción débil en el conjunto b.o. ω_1, teniendo en cuenta que los elementos infinitos de ω_1 son numerables.

Ejercicio 10.14. Consideremos en $\omega \cdot \omega$ la relación R definida como sigue:

$$\alpha R \beta \leftrightarrow (\alpha \geqslant \beta \wedge \alpha - \beta \in \omega) \vee (\beta \geqslant \alpha \wedge \beta - \alpha \in \omega)$$

Probar que R es una relación de equivalencia y que $|\omega \cdot \omega / R| = \omega$.

Indicación: Considérese la aplicación $f : \omega \cdot \omega / R \to \omega$ definida por $f(\overline{\alpha}^R) = n$, donde $\alpha = \omega \cdot n + m$. Pruébese que la aplicación f está bien definida y es biyectiva entre los conjuntos citados.

Ejercicio 10.15. Probar en **ZF** que no puede existir una sucesión finita de conjuntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verificando que $a_1 \in a_2 \in \cdots \in a_n \in a_1$.

Ejercicio 10.16. Probar en **ZF** que no pueden existir conjuntos a, b, c, d verificando que $a = \{b\}, b = \{\varnothing, \{\varnothing\}, c, d\}, c = \{\varnothing, a\}$ y $d = \{a\}$.

Indicación: Pruébese que si existen conjuntos verificando las condiciones citadas, entonces $a = \{\mathbf{P}(\mathbf{P}(a))\}$. Alternativamente, úsese el ejercicio anterior.

Ejercicio 10.17. Demostrar o refutar:

(1) La teoría **ZF** prueba que $\exists x\ (x \neq \varnothing \wedge x \subseteq \{x\})$.

(2) La teoría **ZF**$^-$ prueba que $\forall x\ (x \neq \varnothing \to \{x\} \subseteq x)$.

Capítulo 11

Aritmética Cardinal

11.1. Suma, producto y exponenciación cardinal

Proposición 11.1.1. *Sean x, y, z, t conjuntos tales que $x \sim y$, $z \sim t$, $x \cap z = \emptyset$ e $y \cap t = \emptyset$. Entonces $x \cup z \sim y \cup t$.*

Definición 11.1.2. (CANTOR, 1887) La *suma* de los cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ se define como sigue:

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \leftrightarrow \exists x \exists y (|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge x \cap y = \emptyset \wedge |x \cup y| = \mathfrak{c})$$

Consideraciones:

(1) Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ cardinales. Entonces, existen conjuntos a y b tales que $|a| = \mathfrak{a}$ y $|b| = \mathfrak{b}$. Luego, tomando $x = a \times \{0\}$ e $y = b \times \{1\}$ resulta que $|x| = \mathfrak{a}$, $|y| = \mathfrak{b}$ y $x \cap y = \emptyset$. Por tanto, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = |x \cup y|$. Además, de la proposición anterior se deduce que el valor de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ es independiente de los conjuntos x e y considerados que verifican las condiciones citadas.

(2) Sean a y b conjuntos. Entonces, $|a| + |b| = |(a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\})|$.

(3) Si a y b son conjuntos disjuntos, entonces $|a \cup b| = |a| + |b|$.

(4) Si a y b son conjuntos, entonces $|a \cup b| + |a \cap b| = |a| + |b|$.

Proposición 11.1.3. *(Propiedades básicas de la suma;* CANTOR*, 1887).*

(1) *Asociativa:* $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$.

(2) *Conmutativa:* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

(3) *Elemento neutro:* $\mathfrak{a} + 0 = 0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

(4) *Caracterización del orden:* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b} \leftrightarrow \exists \mathfrak{c}(\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

(5) *Monotonía:* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}' \land \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}'$.

Proposición 11.1.4. *Sean $m, n \in \omega$. Entonces, la suma de m y n como ordinales, coincide con la suma de m y n como cardinales.*

Proposición 11.1.5. *Se verifica:*

(1) *Si $n \in \omega$, entonces $\aleph_0 + n = \aleph_0$.*

(2) *Si $n \in \omega$ y $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}$.*

(3) $\forall n \in \omega\, \forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (\aleph_\alpha + n = \aleph_\alpha)$.

(4) *Si $\mathfrak{a}$ es un cardinal, entonces $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{a} \iff \mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a}$.*

Proposición 11.1.6. *Sean x, y, z, t conjuntos tales que $x \sim y$ y $z \sim t$. Entonces $x \times z \sim y \times t$.*

Definición 11.1.7. (CANTOR, 1887) El *producto* de los cardinales $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ se define como sigue:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \leftrightarrow \exists x \exists y(|x| = \mathfrak{a} \land |y| = \mathfrak{b} \land |x \times y| = \mathfrak{c})$$

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ cardinales. Entonces, existen conjuntos a y b tales que $|a| = \mathfrak{a}$ y $|b| = \mathfrak{b}$. Luego, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = |a \times b|$. Además, de la proposición anterior se deduce que el valor de $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ es independiente de los conjuntos a y b considerados.

Proposición 11.1.8. *(Propiedades básicas del producto;* CANTOR, *1887).*

(1) *Asociativa:* $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$.

(2) *Conmutativa:* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$.

(3) *Elemento neutro:* $\mathfrak{a} \cdot 1 = 1 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

(4) $\mathfrak{a} \cdot 0 = 0 \cdot \mathfrak{a} = 0$.

(5) *Distributiva:* $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c})$.

(6) *Monotonía:* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}' \land \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}' \to \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}'$.

Proposición 11.1.9. *Sean $m, n \in \omega$. Entonces, el producto de m y n como ordinales, coincide con el producto de m y n como cardinales.*

Proposición 11.1.10. *Sean x, y, z, t conjuntos tales que $x \sim y$ y $z \sim t$. Entonces ${}^z x \sim {}^t y$.*

Definición 11.1.11. (CANTOR, 1887) La *exponenciación* cardinal, $\mathfrak{a}$ elevado a $\mathfrak{b}$, se define como sigue:

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{c} \leftrightarrow \exists x \exists y (|x| = \mathfrak{a} \wedge |y| = \mathfrak{b} \wedge |{}^{y}x| = \mathfrak{c})$$

Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ cardinales. Entonces, existen conjuntos a y b tales que $|a| = \mathfrak{a}$ y $|b| = \mathfrak{b}$. Luego, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = |{}^{b}a|$. Además, de la proposición anterior se deduce que el valor de $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ es independiente de los conjuntos a y b considerados.

Proposición 11.1.12. *(Propiedades básicas de exponenciación;*CANTOR*, 1895).*

(1) $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}}$.

(2) $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}$.

(3) $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$.

(4) $0^0 = 1$ *y si* $\mathfrak{a} \neq 0$, *entonces* $0^{\mathfrak{a}} = 0$.

(5) $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a} \wedge 1^{\mathfrak{a}} = 1$.

(6) $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}$.

(7) $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d} \to \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leqslant \mathfrak{c}^{\mathfrak{d}}$.

Proposición 11.1.13. *Sean $m, n \in \omega$. Entonces, la exponenciación m^n como ordinales, coincide con la exponenciación m^n como cardinales.*

Proposición 11.1.14. *Se verifica:*

(1) *Si x es un conjunto, entonces* $|\mathbf{P}(x)| = 2^{|x|}$.

(2) *Si $\mathfrak{a}$ es un cardinal, entonces* $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$ *y* $\mathfrak{a}^+ \leqslant 2^{(2^{\mathfrak{a}^2})}$.

11.2. Aritmética cardinal en In

Definición 11.2.1. Se define en la clase $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ una relación, R (denominada *orden canónico* de $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$), como sigue:

$$\langle \alpha, \beta \rangle R \langle \alpha', \beta' \rangle \leftrightarrow \begin{cases} \text{máx}(\alpha, \beta) < \text{máx}(\alpha', \beta') \text{ ó} \\ \text{máx}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\alpha', \beta') \wedge \alpha < \alpha' \text{ ó} \\ \text{máx}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\alpha', \beta') \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta < \beta' \end{cases}$$

Proposición 11.2.2. *R es un buen orden en* $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$.

De la proposición anterior, resulta que existe un único isomorfismo F de $\langle \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}, R\rangle$ en $\langle \mathbf{Ord}, \in\rangle$.

Proposición 11.2.3. *Si $\alpha \in \mathbf{Ord}$, entonces $F[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] = \aleph_\alpha$.*

Corolario 11.2.4. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Entonces,*

(1) $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

(2) $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = máx(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

(3) $\forall n \in \omega - \{0\}\ (n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha)$.

(4) $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = máx(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

(5) *Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ cardinales tales que $\aleph_\alpha \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. Entonces, $\aleph_\alpha \leqslant \mathfrak{a}$ ó $\aleph_\alpha \leqslant \mathfrak{b}$.*

Proposición 11.2.5. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Ord}$. Entonces,*

(1) *Si $n \in \omega - \{0\}$, entonces $\aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$.*

(2) $\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(3) *Si $n \in \omega - \{0, 1\}$, entonces $n^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.*

11.3. Aritmética cardinal infinita

Sean $(a_i)_{i\in I}$ y $(b_i)_{i\in I}$ familias de conjuntos tales que $\forall i \in I\ (|a_i| = |b_i|)$. Sin el axioma de elección, no es posible probar que

$$\bigcup\{a_i \times \{i\} : i \in I\} \sim \bigcup\{b_i \times \{i\} : i \in I\}$$

Por ello, para generalizar la suma a familias arbitrarias de cardinales, nos vamos a restringir al caso de cardinales bien ordenables.

A lo largo de esta sección $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ representará una familia de cardinales bien ordenables.

Definición 11.3.1. (Suma general de cardinales; WHITEHEAD, 1902). La *suma* de la familia de cardinales $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ es

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} (\{i\} \times \kappa_i)\right|$$

Proposición 11.3.2. *Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que:*

(1) $\forall i \in I$ (x_i *es bien ordenable*).

(2) $\forall i, j \in I$ $(i \neq j \to x_i \cap x_j = \emptyset)$.

(3) $\exists f\ \forall i \in I$ ($f(i) : x_i \to |x_i|$ *es biyectiva*).

Entonces, $\left|\bigcup_{i\in I} x_i\right| = \sum_{i\in I} |x_i|$.

Corolario 11.3.3. *(**ZFC**$^-$) Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Entonces,*

$$\left|\bigcup_{i\in I} x_i\right| = \sum_{i\in I} |x_i|$$

Proposición 11.3.4. *Sea I un conjunto bien ordenable. Entonces,*

(1) $\sum_{i\in I} \kappa_i \in \mathbf{In}$.

(2) *Si* $\forall i \in I\ (\kappa_i > 0) \wedge (|I| \geqslant \aleph_0 \vee \exists i \in I\ (\kappa_i \geqslant \aleph_0))$, *entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \text{máx}(|I|, \sup\{\kappa_i : i \in I\})$$

Proposición 11.3.5. *Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tal que:*

(1) *I es un conjunto bien ordenable.*

(2) $\forall i \in I$ (x_i *es bien ordenable*).

(3) $\exists f\ \forall i \in I$ ($f(i)$ *es una aplicación inyectiva de* x_i *en* $\sum_{i\in I} |x_i|$).

Entonces, $\left|\bigcup_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$.

Corolario 11.3.6. *(**ZFC**$^-$) Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

$$\left|\bigcup_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$$

Proposición 11.3.7. *Se verifica:*

(1) $\sum_{i\in 0}\kappa_i = 0$, $\sum_{i\in 1}\kappa_i = \kappa_0$, $\sum_{i\in 2}\kappa_i = \kappa_0 + \kappa_1$.

(2) *Si $g : I \longrightarrow I'$ es biyectiva y $\forall i \in I\ (\kappa'_{g(i)} = \kappa_i)$, entonces*

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{i\in I'}\kappa'_i$$

(3) $\forall i \in I\ (\kappa_i \leqslant \kappa'_i) \to \sum_{i\in I}\kappa_i \leqslant \sum_{i\in I}\kappa'_i$.

(4) $\forall j \in I\ (\kappa_j \leqslant \sum_{i\in I}\kappa_i)$.

(5) *Si I es bien ordenable y $\forall i \in I\ (\kappa_i = \kappa)$, entonces $\sum_{i\in I}\kappa_i = |I| \cdot \kappa$.*

Nota: En lo que sigue, y para evitar confusión en la notación usual que se utiliza en el producto general de cardinales, dada una familia de conjuntos $(a_i)_{i\in I}$, notaremos $\prod^*_{i\in I} a_i$ al producto de los conjuntos de la familia $(a_i)_{i\in I}$.

Definición 11.3.8. (Producto general de cardinales; WHITEHEAD, 1902). El *producto cardinal* de la familia $\langle \kappa_i : i \in I\rangle$ es

$$\prod_{i\in I}\kappa_i = \left|\prod^*_{i\in I}\kappa_i\right|$$

Proposición 11.3.9. *Sea $(x_i)_{\ i\in I}$ una familia de conjuntos tal que:*

(1) $\forall i \in I\ (x_i$ *es bien ordenable*$)$.

(2) $\exists f\ \forall i \in I\ (f(i) : x_i \longrightarrow |x_i|$ *es biyectiva*$)$.

Entonces

$$\left|\prod^*_{i\in I} x_i\right| = \prod_{i\in I}|x_i|$$

Corolario 11.3.10. *(**ZFC**$^-$) Sea $(x_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces,*

$$\left|\prod^*_{i\in I} x_i\right| = \prod_{i\in I}|x_i|$$

Proposición 11.3.11. *Se verifica:*

(1) $\prod\limits_{i\in 0}\kappa_i = 1$, $\prod\limits_{i\in 1}\kappa_i = \kappa_0$, $\prod\limits_{i\in 2}\kappa_i = \kappa_0 \cdot \kappa_1$.

(2) *Si $g : I \to I'$ es biyectiva y $\forall i \in I\ (\kappa'_{g(i)} = \kappa_i)$, entonces*

$$\prod_{i\in I}\kappa_i = \prod_{i\in I'}\kappa'_i$$

(3) $\forall i \in I\ (\kappa_i \leqslant \kappa'_i) \to \prod\limits_{i\in I}\kappa_i \leqslant \prod\limits_{i\in I}\kappa'_i$.

(4) *Sea λ un cardinal infinito y $(\kappa_i)_{i\in\lambda}$ una familia no decreciente de cardinales no nulos (es decir; para cada $i, j \in \lambda$ se tiene que $i < j \Longrightarrow \kappa_i \leqslant \kappa_j$ y $\kappa_i > 0$). Entonces*

$$\prod_{i\in\lambda}\kappa_i = (sup\{\kappa_i :\ i \in \lambda\})^\lambda$$

(5) *Si I es bien ordenable y $\forall i \in I\ (\kappa_i = \kappa)$, entonces* $\prod\limits_{i\in I}\kappa_i = \kappa^{|I|}$.

Proposición 11.3.12. *Se verifica:*

(1) $\prod\limits_{i\in I}\kappa_i = 0 \leftrightarrow \exists i \in I\ (\kappa_i = 0)$.

(2) *Si $\forall i \in I\ (\kappa_i \geqslant 2)$, entonces* $\sum\limits_{i\in I}\kappa_i \leqslant \prod\limits_{i\in I}\kappa_i$.

Teorema 11.3.13. *(Desigualdad de* KÖNIG–ZERMELO*).*
Sean $\langle\kappa_i :\ i \in I\rangle$ y $\langle\kappa'_i :\ i \in I\rangle$ familias de cardinales bien ordenables tales que $\forall i \in I\ (\kappa_i < \kappa'_i)$. Entonces,

$$\sum_{i\in I}\kappa_i < \prod_{i\in I}\kappa'_i$$

Corolario 11.3.14. *Si κ es un cardinal bien ordenable, entonces $\kappa < 2^\kappa$.*

11.4. Problemas resueltos

Ejercicio 180. *Sean $\kappa \in$ **In** y $\mathfrak{a}$ un cardinal. Supongamos que $\mathfrak{a} \cdot \kappa \leqslant \mathfrak{a} + \kappa$. Probar que $\mathfrak{a} \leqslant \kappa \ \lor\ \kappa \leqslant \mathfrak{a}$.*

Sea a un conjunto tal que $\mathfrak{a} = |a|$. Como $|a| \cdot \kappa \leqslant |a| + \kappa$, existe una aplicación inyectiva, f, de $a \times \kappa$ en $(a \times \{0\}) \cup (\kappa \times \{1\})$. Distingamos dos casos:

<u>Caso 1º :</u> Existe $x \in a$ tal que $f[\{x\} \times \kappa] \subseteq a \times \{0\}$.
En este caso, $\kappa \sim \{x\} \times \kappa \preceq a \times \{0\} \sim a$. Luego, $\kappa \preceq a$. Por tanto, $\kappa = |\kappa| \leqslant |a|$.

<u>Caso 2º :</u> No existe $x \in a$ tal que $f[\{x\} \times \kappa] \subseteq a \times \{0\}$.
En este caso, $\forall x \in a \exists \alpha \in \kappa\ (f(x, \alpha) \notin a \times \{0\})$. Es decir,

$$\forall x \in a \exists \alpha \in \kappa\ (f(x, \alpha) \in \kappa \times \{1\}) \qquad (\star)$$

Consideremos la aplicación $g : a \to \kappa$ definida como sigue:

$$g(x) = \text{mín}\{\alpha \in \kappa : f(x, \alpha) \in \kappa \times \{1\}\}\ , \text{ para cada } x \in a$$

(Obsérvese que este mínimo existe pues κ es bien ordenable y por $(\star)$). Sea $h : a \to \kappa \times \{1\}$ definida por $h(x) = f(x, g(x))$. Entonces, h es una aplicación inyectiva de a en $\kappa \times \{1\}$. Luego, $a \preceq \kappa \times \{1\} \sim \kappa$. Por tanto, $|a| \leqslant |\kappa| = \kappa$.

Ejercicio 181. *Sea $\mathfrak{a}$ un cardinal infinito tal que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+$. Probar que $\mathfrak{a}$ es un cardinal bien ordenable.*

Sea $\mathfrak{a}$ un cardinal infinito tal que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+$.

Por el teorema de Hartogs sabemos que $\mathfrak{a}^+$ es un cardinal bien ordenable. Aplicando el ejercicio anterior, resulta que $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}^+ \vee \mathfrak{a}^+ \leqslant \mathfrak{a}$. Como $\mathfrak{a}^+ \not\leqslant \mathfrak{a}$, se deduce que $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}^+$. En consecuencia, el cardinal $\mathfrak{a}$ es bien ordenable.

Ejercicio 182. *Aplicando el ejercicio anterior probar que si para cada cardinal infinito, $\mathfrak{a}$, se tiene que $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, entonces se verifica el axioma de elección.*

Supongamos que para cada cardinal infinito, $\mathfrak{a}$, se tiene que $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$. Vamos a probar que todo cardinal infinito es bien ordenable (lo que, obviamente, equivale al axioma de elección).

Sea $\mathfrak{a}$ un cardinal infinito. Para probar que $\mathfrak{a}$ es bien ordenable basta demostrar, por el ejercicio anterior, que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+$. Veámoslo.

- Obviamente, se tiene que $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+ \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+$.
- Veamos que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+ \leqslant \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+$. En efecto:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+ \leqslant \mathfrak{a}^2 + 2 \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^+ + (\mathfrak{a}^+)^2 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+)^2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^+$$

Ejercicio 183. *Probar que en* **ZF**$^-$ *son equivalentes:*

(1) *El axioma de elección.*

(2) $\forall x\ (\aleph_0 \preceq x \to {}^2x \sim x)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea a un conjunto tal que $\aleph_0 \preceq a$. Entonces $\aleph_0 \leqslant |a|$. Por el axioma de elección, existe un ordinal α tal que $|a| = \aleph_\alpha$. Luego, $a \sim \aleph_\alpha$. Por tanto, ${}^{2}a \sim \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha \sim a$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $\forall x\ (\aleph_0 \preceq x \to {}^{2}x \sim x)$. Veamos que todo conjunto es bien ordenable.

Sea a un conjunto infinito (ya sabemos que todo conjunto finito es bien ordenable). Entonces, $\aleph_0 \leqslant |a|^+$. Luego, $\aleph_0 \leqslant |a| + |a|^+$. Por tanto,

$$|a| + |a|^+ = (|a| + |a|^+)^2 = |a|^2 + 2 \cdot |a| \cdot |a|^+ + (|a|^+)^2$$

De donde se deduce que

$$|a| \cdot |a|^+ \leqslant 2 \cdot |a| \cdot |a|^+ \leqslant |a| + |a|^+$$

Del ejercicio 180 resulta que $|a| \leqslant |a|^+ \vee |a|^+ \leqslant |a|$. Pero $|a|^+ \nleqslant |a|$. Por tanto, $|a| \leqslant |a|^+$. Teniendo presente que $|a|^+ \in \mathbf{In}$, concluimos que $|a| \in \mathbf{In}$. Es decir, $|a|$ es bien ordenable y, en consecuencia, también lo es el conjunto a.

Ejercicio 184. *Sean $\mathfrak{a}$ un cardinal y α, β ordinales tales que $\alpha < \beta$. Supongamos que $\mathfrak{a} + \aleph_\alpha = \aleph_\beta$. Probar que $\mathfrak{a}$ es bien ordenable y $\mathfrak{a} = \aleph_\beta$.*

En primer lugar observemos que $\mathfrak{a}$ es un cardinal infinito, ya que $\kappa + \aleph_\alpha = \aleph_\beta$ y $\alpha < \beta$.

Se tiene que $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a} + \aleph_\alpha = \aleph_\beta$. Luego $\mathfrak{a}$ es un cardinal bien ordenable.

Sea $\ggg \in \mathbf{Ord}$ tal que $\mathfrak{a} = \aleph_{\ggg}$. Entonces,

$$\aleph_\beta = \aleph_{\ggg} + \aleph_\alpha = \aleph_{\text{máx}\{\ggg,\alpha\}}$$

Luego, $\ggg = \beta$.

Ejercicio 185. *Hallar el cardinal de $\mathbb{R}$. Probar que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. Hallar el cardinal de $\mathbb{R}^n$, para cada $n \neq 0$, y el cardinal del conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.*

En primer lugar vamos a hallar el cardinal de $\mathbb{R}$.

- Como $\mathbb{R} \sim {}^{\omega}2$ (ejercicio 167) resulta que $|\mathbb{R}| = |{}^{\omega}2| = 2^{|\omega|} = 2^{\aleph_0}$.

Más aún, sabemos que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Por tanto, $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$.

Veamos que $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$.

- En efecto: $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Veamos que $\forall n \in \omega - \{0,1\}$ $(|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|)$. Por inducción débil en $\omega - \{0\}$.

$\boxed{n = 2}$

Trivial: es lo que acabamos de probar.

$\boxed{n \geqslant 2 \to n+1}$

Supongamos el resultado cierto para n, con $n \geqslant 2$. Entonces

$|\mathbb{R}^{n+1}| = |(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n| \cdot |\mathbb{R}| \overset{h.i.}{=} |\mathbb{R}| \cdot |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Finalmente, observemos que $\mathbb{C} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por tanto, $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$.

Ejercicio 186. *Se pide:*

(1) *Si a es un conjunto numerable, probar que es no numerable el conjunto*

$$\mathbf{P}_{Inf}(a) = \{b \in \mathbf{P}(a) : \ b \text{ es infinito}\}$$

(2) *Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los números naturales pares. Probar que*

$$\mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P}) \preceq \{f \in^{\omega} \omega : \ f \text{ es biyectiva}\}$$

(3) *A partir de (1), probar en* **ZFC** *que* $|\{f \in^{\omega} \omega : \ f \text{ es biyectiva}\}| = 2^{\aleph_0}$.

(4) *Probar en* **ZFC** *que*

$$|\{f \in^{\omega} \omega : \ f \text{ es inyectiva}\}| = |\{f \in^{\omega} \omega : \ f \text{ es suprayectiva}\}| = 2^{\aleph_0}.$$

(1) Teniendo presente que $\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}_F(a) \cup \mathbf{P}_{Inf}(a)$, resulta que

$$2^{\aleph_0} = |\mathbf{P}(a)| = |\mathbf{P}_F(a) \cup \mathbf{P}_{Inf}(a)| = |\mathbf{P}_F(a)| + |\mathbf{P}_{Inf}(a)| = \aleph_0 + |\mathbf{P}_{Inf}(a)|$$

Luego, $|\mathbf{P}_{Inf}(a)| > \aleph_0$ (Obsérvese que si $2^{\aleph_0}$ es bien ordenable, entonces $|\mathbf{P}_{Inf}(a)| = 2^{\aleph_0}$).

(2) Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los números naturales pares.

Veamos que $\mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P}) \preceq \{f \in^{\omega} \omega : \ f \text{ es biyectiva}\}$.

Para ello, consideremos la aplicación

$$h : \mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P}) \to \{f \in^{\omega} \omega : \ f \text{ es biyectiva}\}$$

definida como sigue:

- Sea $x \in \mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P})$. Entonces, los conjuntos x y $\omega - x$ son numerables. Sean f_x y g_x los únicos isomorfismos de $\langle \omega, < \rangle$ en $\langle x, < \rangle$ y $\langle \omega - x, < \rangle$, respectivamente. Definimos $h(x) : \omega \to \omega$ así:

$$h(x)(2n) = f_x(n) \text{ y } h(x)(2n+1) = g_x(n) \text{ , para cada } n \in \omega$$

  Entonces, para cada $x \in \mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P})$, $h(x)$ es una aplicación biyectiva de ω en ω. Luego, h es una aplicación bien definida entre los conjuntos citados.

Además, la aplicación h es inyectiva ya que

$$h(x) = h(y) \Longrightarrow h(x)[\mathbb{P}] = h(y)[\mathbb{P}] \Longrightarrow x = y$$

Por tanto, $\mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P}) \preceq \{f \in^\omega \omega : \ f \text{ es biyectiva}\}$.

(3) Se verifica que:

$$2^{\aleph_0} = \mathbf{P}_{Inf}(\mathbb{P}) \leqslant |\{f \in^\omega \omega : \ f \text{ es biyectiva}\}| \leqslant |^\omega\omega| = \aleph_0{}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

(4) Se verifica que:

$$2^{\aleph_0} = |\{f \in^\omega \omega : f \text{ es biyect.}\}| \leqslant |\{f \in^\omega \omega : f \text{ es inyect.}\}| \leqslant |^\omega\omega| = 2^{\aleph_0}$$

$$2^{\aleph_0} = |\{f \in^\omega \omega : f \text{ es biyect.}\}| \leqslant |\{f \in^\omega \omega : f \text{ es supray.}\}| \leqslant |^\omega\omega| = 2^{\aleph_0}$$

Ejercicio 187. *Sea a un conjunto. Consideremos los conjuntos*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_F(a) &= \{x \subseteq a : |x| < \aleph_0\}. \\ \mathbf{P}_C(a) &= \{x \subseteq a : |a - x| < \aleph_0\}. \\ \mathbf{P}_I(a) &= \{x \subseteq a : |a - x| = |x| = \aleph_0\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $|\mathbf{P}_F(a)| = \aleph_0$. *Se pide:*

(1) *Probar que* $|\mathbf{P}_C(a)| = \aleph_0$ *y calcular* $|\mathbf{P}_C(\mathbf{P}_F(a))|$.

(2) *Admitiendo el axioma de elección, calcular* $|\mathbf{P}_I(a)|$.

Supongamos que $|\mathbf{P}_F(a)| = \aleph_0$. Entonces, el conjunto a es bien ordenable ya que $a \preceq \mathbf{P}_F(a)$ (pues la aplicación $f : a \to \mathbf{P}_F(a)$ definida por $f(x) = \{x\}$, para cada $x \in a$, es inyectiva).

Veamos que $|a| = \aleph_0$. En efecto:

- No puede verificarse que $|a| < \aleph_0$ ya que, en ese caso, resultaría que

$$|\mathbf{P}_F(a)| \leqslant |\mathbf{P}(a)| = 2^{|a|} < \aleph_0$$

- No puede verificarse que $|a| > \aleph_0$ pues, teniendo presente que $a \preceq \mathbf{P}_F(a)$ resultaría que $\aleph_0 < |a| \leqslant |\mathbf{P}_F(a)|$.

(1) Veamos que $|\mathbf{P}_C(a)| = \aleph_0$.

– Consideremos la aplicación $f : \mathbf{P}_F(a) \to \mathbf{P}_C(a)$ definida así:

$$f(x) = a - x, \text{ para cada } x \in \mathbf{P}_F(a)$$

- f está bien definida entre los conjuntos citados, ya que

$$x \in \mathbf{P}_F(a) \Longrightarrow a - x \in \mathbf{P}_C(a)$$

- f es inyectiva, pues

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow a - x = a - y \overset{x,y \subseteq a}{\Longrightarrow} x = y$$

- f es suprayectiva, pues si $x \in \mathbf{P}_C(a)$, entonces $a - x \in \mathbf{P}_F(a)$ y $f(a - x) = a - (a - x) \overset{x \subseteq a}{=} x$.

Por tanto, f es una aplicación biyectiva de $\mathbf{P}_F(a)$ en $\mathbf{P}_C(a)$. Es decir,

$$|\mathbf{P}_C(a)| = |\mathbf{P}_F(a)| = \aleph_0$$

Veamos que $|\mathbf{P}_C(\mathbf{P}_F(a))| = \aleph_0$.

– Notemos $b = \mathbf{P}_F(a)$. Puesto que $|b| = \aleph_0$, se tiene que $|\mathbf{P}_F(b)| = \aleph_0$ (ejercicio 152). Entonces,

$$|\mathbf{P}_C(\mathbf{P}_F(a))| = |\mathbf{P}_C(b)| = \aleph_0$$

(2) Veamos que $|\mathbf{P}_I(a)| = 2^{\aleph_0}$.

– Como a es numerable, resulta que un subconjunto arbitrario de a, o bien es finito o es infinito (en cuyo caso, su complementario puede ser finito o infinito). Por tanto, se tiene que

$$\mathbf{P}(a) = \mathbf{P}_F(a) \cup \mathbf{P}_C(a) \cup \mathbf{P}_I(a)$$

Como dicha reunión es disjunta, resulta que

$$2^{\aleph_0} = 2^{|a|} = |\mathbf{P}(a)| = |\mathbf{P}_F(a)| + |\mathbf{P}_C(a)| + |\mathbf{P}_I(a)| = \aleph_0 + \aleph_0 + |\mathbf{P}_I(a)|$$

Teniendo presente que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$, de la relación anterior se deduce que $\aleph_0 < |\mathbf{P}_I(a)|$. Como en **ZFC**$^-$ todos los cardinales son bien ordenables se concluye que $|\mathbf{P}_I(a)| = \max\{\aleph_0, |\mathbf{P}_I(a)|\} = \aleph_0 + \aleph_0 + |\mathbf{P}_I(a)| = 2^{\aleph_0}$.

Ejercicio 188. *($\mathbf{ZFC}^-$) Probar que el conjunto*

$$a = \{f \in {}^{\omega}\omega : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\} \text{ es finito } \}$$

es numerable.
Indicación: *Para cada $b \in \mathbf{P}_F(\omega)$, nótese*

$$a_b = \{f \in a : \{n \in \omega : f(n) \neq 0\} = b\}$$

y pruébese que $a_b \sim {}^{b}(\omega - \{0\})$.

Para cada $b \in \mathbf{P}_F(\omega)$ notemos

$$a_b = \{f \in a : \ \{n \in \omega : \ f(n) \neq 0\} = b\}$$

Entonces

$$a = \bigcup_{b \in \mathbf{P}_F(\omega)} a_b$$

Notemos $\omega^* = \omega - \{0\}$ y veamos que $\forall b \in \mathbf{P}_F(\omega)\ (a_b \sim {}^{b}\omega^*)$.

– Consideremos la aplicación $g : a_b \to {}^{b}\omega^*$ definida así:

$$g(f) = f \restriction b, \ \text{ para cada } \ f \in a_b$$

La aplicación g es inyectiva ya que si $g(f) = g(h)$ (con $f, h \in a_b$), entonces $f \restriction b = h \restriction b$. Luego, $f = h$ (pues fuera de b dichas aplicaciones son idénticamente nulas).

La aplicación g es suprayectiva ya que si $f \in {}^{b}\omega^*$, consideramos la aplicación $h : \omega \to \omega$ definida por

$$h \restriction b = f \wedge h(x) = 0 \ (\forall x \in \omega - b)$$

Entonces, $g(h) = h \restriction b = f$.

Notemos $\mathbf{P}^*_F(\omega) = \mathbf{P}_F(\omega) - \{0\}$. Entonces

$$a = [\bigcup_{b \in \mathbf{P}^*_F(\omega)} a_b] \cup a_\emptyset \ \wedge \ |a| = |\bigcup_{b \in \mathbf{P}^*_F(\omega)} a_b| + |a_\emptyset|$$

Teniendo presente que la familia $(a_b)_{b \in \mathbf{P}^*_F(\omega)}$ es de conjuntos disjuntos dos a dos, del corolario 11.3.3 resulta que

$$|\bigcup_{b \in \mathbf{P}^*_F(\omega)} a_b| = \sum_{b \in \mathbf{P}^*_F(\omega)} |a_b|$$

Pero

$$b \in \mathbf{P}_F^*(\omega) \Longrightarrow |a_b| = |{}^b\omega^*| = |\omega^*|^{|b|} = \aleph_0^{|b|} \overset{b \neq \emptyset}{=} \aleph_0$$

Por tanto,

$$|\bigcup_{b \in \mathbf{P}_F^*(\omega)} a_b| = \sum_{b \in \mathbf{P}_F^*(\omega)} |a_b| = \text{máx}\{|\mathbf{P}_F^*(\omega)|, \sup\{|a_b| : b \in \mathbf{P}_F^*(\omega)\}\} = \aleph_0$$

Como $|a_\emptyset| = 1$, concluimos que $|a| = \aleph_0$.

Ejercicio 189. ($\mathbf{ZFC}^-$) *Sea a un conjunto. Notemos ${}^{<\omega}a$ al conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de a (aplicaciones de un cierto número natural en a). Probar que si $\alpha \in$ $\mathbf{Ord} - \omega$, entonces $\alpha \sim {}^{<\omega}\alpha$. Deducir que $|{}^{<\omega}\omega_\alpha| = \aleph_\alpha$, ($\forall \alpha \in \mathbf{Ord}$).*

(1) Sea $\alpha \in \mathbf{Ord} - \omega$. Veamos que $\alpha \sim {}^{<\omega}\alpha$.

- $\star$ Se tiene que ${}^{<\omega}\alpha = \bigcup_{n \in \omega} {}^n\alpha$. Ahora bien.
  - Para cada $n \in \omega - \{0\}$ se verifica que

    $$|{}^n\alpha| = |\alpha|^{|n|} = |\alpha|^n = |\alpha|$$

    ya que $|\alpha| \in \mathbf{In}$, $|\alpha| \geqslant \aleph_0$ y $n > 0$.
  - Además $|{}^0\alpha| = |\{0\}| = 1$.

  Como $({}^n\alpha)_{n \in \omega}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, del corolario 11.3.3 se tiene que

  $$|\bigcup_{n \in \omega} {}^n\alpha| = \sum_{n \in \omega} |{}^n\alpha|$$

  Por tanto,

  $$\begin{aligned} |{}^{<\omega}\alpha| &= |\bigcup_{n \in \omega} {}^n\alpha| = \sum_{n \in \omega} |{}^n\alpha| = \text{máx}\{|\omega|, \sup\{|{}^n\alpha| : n \in \omega\}\} \\ &= \text{máx}\{\aleph_0, |\alpha|\} = |\alpha| \end{aligned}$$

(2) Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Entonces $\omega_\alpha \in \mathbf{Ord} - \omega$. Luego del apartado anterior se deduce que ${}^{<\omega}\omega_\alpha \sim \omega_\alpha$. Por tanto, $|{}^{<\omega}\omega_\alpha| = |\omega_\alpha| = \aleph_\alpha$.

Ejercicio 190. *Hallar, mediante aritmética cardinal, el cardinal de:*

(1) *El conjunto de las sucesiones finitas de números naturales.*

(2) *El conjunto de las sucesiones finitas de números reales (**ZFC**$^-$).*

(3) *El conjunto de las sucesiones infinitas de números naturales.*

(4) *El conjunto de las sucesiones infinitas de números reales.*

(1) Se verifica que:

$$|{}^{<\omega}\omega| = |{}^{<\omega}\omega_0| \overset{ej.\ 189}{=} \aleph_0$$

(2) Se tiene que:

$$\begin{aligned} |{}^{<\omega}\mathbb{R}| &= |\bigcup_{n\in\omega} {}^{n}\mathbb{R}| \overset{(11,3,3)}{=} \sum_{n\in\omega} |{}^{n}\mathbb{R}| \\ &= \text{máx}\,\{|\omega|,\ \sup\,\{|{}^{n}\mathbb{R}| : \ n \in \omega\}\} = \text{máx}\,\{\aleph_0, 2^{\aleph_0}\} = 2^{\aleph_0} \end{aligned}$$

(3) Se verifica que:

$$|{}^{\omega}\omega| = |\omega|^{|\omega|} = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

(4) Se tiene que:

$$|{}^{\omega}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|\omega|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Ejercicio 191. *Sean a y b conjuntos bien ordenables tales que $|a| \geqslant \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$. Probar que $|a - b| = |a|$.*

Sean a y b conjuntos bien ordenables tales que $|a| \geqslant \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$. Entonces $|a| = |(a-b) \cup b| = |(a-b)| + |b|$.

Teniendo presente que a y b son conjuntos bien ordenables, resulta que $|a-b|$ y $|b|$ son cardinales bien ordenables.

Como $|a| \geqslant \aleph_0$, $b \subseteq a$ y $|b| < |a|$, se deduce que $|a-b| \geqslant \aleph_0 \vee |b| \geqslant \aleph_0$. Luego,

$$|a| = |(a-b)| + |b| = \text{máx}\{|a-b|, |b|\}$$

Finalmente, puesto que $|a| \neq |b|$, de la relación anterior se concluye que $|a-b| = |a|$.

Ejercicio 192. *Calcular el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos:*

(1) *El conjunto de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.*

(2) *El conjunto de las aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.*

(3) *El conjunto de las aplicaciones discontinuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.*

(1) Se verifica que

$$|^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}}$$

Ahora bien,

$$2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Luego, $|^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = 2^{2^{\aleph_0}}$.

(2) Sea $C = \{f : \; f \;$ es una aplicación continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}\}$.

- ⋆ Veamos que $|C| \geqslant 2^{\aleph_0}$. Para ello, consideremos la aplicación f de $\mathbb{R}$ en C que asigna a $x \in \mathbb{R}$ la función constante igual a x. Entonces f es inyectiva. Luego $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \leqslant |C|$

- ⋆ Veamos que $|C| \leqslant 2^{\aleph_0}$. Para ello, consideremos la aplicación $\varphi : C \to^{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ definida así: $\varphi(f) = f \restriction \mathbb{Q}$, para cada $f \in C$. Teniendo presente que si dos aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ coinciden sobre $\mathbb{Q}$, entonces son iguales, se deduce que φ es inyectiva. Luego,

$$|C| \leqslant |^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Ejercicio 193. *Probar que un cardinal infinito bien ordenable no se puede descomponer en producto de dos cardinales estríctamente menores.*

Basta tener presente que el producto de dos cardinales infinitos bien ordenables **no** proporciona un cardinal estríctamente mayor que ambos, pues se tiene que $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta =$máx$\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$.

Ejercicio 194. *(**ZFC**$^-$) Sean α, β y $\ggg$ ordinales tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Probar que:*

$$|\alpha + \beta| \leqslant \aleph_{\ggg}, \qquad |\alpha \cdot \beta| \leqslant \aleph_{\ggg}, \qquad |\alpha^\beta| \leqslant \aleph_{\ggg}$$

en donde $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ y α^β son operaciones ordinales.
Indicación: *pruébense dichos resultados por inducción sobre β.*

(1) Probemos que

$$\forall\alpha\forall\beta\forall \ggg \ (|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg} \wedge |\beta| \leqslant \aleph_{\ggg} \to |\alpha+\beta| \leqslant \aleph_{\ggg})$$

Por inducción débil en **Ord** sobre la variable β.

$\boxed{\beta = 0}$

Sean $\alpha, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Entonces, $|\alpha+0| = |\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$.

$\boxed{\beta \to \beta+1}$

Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta+1| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\alpha+(\beta+1)| &= |(\alpha+\beta)+1| = |(\alpha+\beta)\cup\{\alpha+\beta\}| \\ &= |\alpha+\beta| + |\{\alpha+\beta\}| \overset{h.i.}{\leqslant} \aleph_{\ggg} + 1 = \aleph_{\ggg} \end{aligned}$$

$\boxed{\beta \text{ limite} \wedge < \beta \to \beta}$

Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y β límite. Entonces

$$\begin{aligned} |\alpha+\beta| &= |\sup\{\alpha+\rho :\ \rho<\beta\}| = |\bigcup_{\rho\in\beta}(\alpha+\rho)| \overset{(11,3,6)}{\leqslant} \sum_{\rho\in\beta}|\alpha+\rho| \\ &= \max\{|\beta|, \sup\{|\alpha+\rho| :\ \rho<\beta\}\} \overset{h.i.}{\leqslant} \text{máx}\{|\beta|, \aleph_{\ggg}\} = \aleph_{\ggg} \end{aligned}$$

(2) Probemos que

$$\forall\alpha\forall\beta\forall \ggg \ (|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg} \wedge |\beta| \leqslant \aleph_{\ggg} \to |\alpha\cdot\beta| \leqslant \aleph_{\ggg})$$

Por inducción débil en **Ord** sobre la variable β.

$\boxed{\beta = 0}$

Sean $\alpha, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Entonces, $|\alpha\cdot 0| = |0| \leqslant \aleph_{\ggg}$.

$\boxed{\beta \to \beta+1}$

Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta+1| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Entonces

$$|\alpha\cdot(\beta+1)| = |\alpha\cdot\beta+\alpha| \overset{h.i.+(1)}{\leqslant} \aleph_{\ggg}$$

$\boxed{\beta \text{ limite} \wedge < \beta \to \beta}$

Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y β límite. Entonces

$$\begin{aligned} |\alpha\cdot\beta| &= |\sup\{\alpha\cdot\rho :\ \rho<\beta\}| = |\bigcup_{\rho\in\beta}(\alpha\cdot\rho)| \overset{(11,3,6)}{\leqslant} \sum_{\rho\in\beta}|\alpha\cdot\rho| \\ &= \max\{|\beta|, \sup\{|\alpha\cdot\rho| :\ \rho<\beta\}\} \overset{h.i.}{\leqslant} \text{máx}\{|\beta|, \aleph_{\ggg}\} = \aleph_{\ggg} \end{aligned}$$

(3) Probemos que

$$\forall\alpha\forall\beta\forall \ggg \ (|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg} \wedge |\beta| \leqslant \aleph_{\ggg} \to |\alpha^{\beta}| \leqslant \aleph_{\ggg})$$

Por inducción débil en **Ord** sobre la variable β.

$\boxed{\beta = 0}$

Sean $\alpha, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Entonces, $|\alpha^0| \leqslant 1 \leqslant \aleph_{\ggg}$.

$\boxed{\beta \to \beta + 1}$

Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta + 1| \leqslant \aleph_{\ggg}$. Entonces

$$|\alpha^{(\beta+1)}| = |\alpha^{\beta} \cdot \alpha| \overset{h.i.+(2)}{\leqslant} \aleph_{\ggg}$$

$\boxed{\beta \text{ limite} \wedge < \beta \to \beta}$

Sean $\alpha, \beta, \ggg \in$ **Ord** tales que $|\alpha| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y $|\beta| \leqslant \aleph_{\ggg}$ y β límite. Entonces

$$\begin{aligned} |\alpha^{\beta}| &= |\sup\{\alpha^{\rho} : \rho < \beta\}| = |\bigcup_{\rho\in\beta} \alpha^{\rho}| \overset{(11,3,6)}{\leqslant} \sum_{\rho\in\beta} |\alpha^{\rho}| \\ &= \max\{|\beta|, \sup\{|\alpha^{\rho}| : \rho < \beta\}\} \overset{h.i.}{\leqslant} \text{máx}\{|\beta|, \aleph_{\ggg}\} = \aleph_{\ggg} \end{aligned}$$

Ejercicio 195. *Probar en* $\mathbf{ZF}^-$ *que si* $\alpha \in$ **Ord**, *entonces*

$$\alpha \geqslant \omega \leftrightarrow \exists R\ (R \textit{ es un buen orden en } \alpha \wedge t.o.(\langle\alpha, R\rangle) = \omega^{\alpha})$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\alpha \geqslant \omega$. Sea $\beta \geqslant 0$ tal que $|\alpha| = \aleph_{\beta}$.

- Como $\alpha \leqslant \omega^{\alpha}$, resulta que $|\alpha| \leqslant |\omega^{\alpha}|$. Luego, $\aleph_{\beta} \leqslant |\omega^{\alpha}|$.
- Por otra parte, $|\omega| \leqslant \aleph_{\beta} \wedge |\alpha| \leqslant \aleph_{\beta} \Longrightarrow |\omega^{\alpha}| \leqslant \aleph_{\beta}$.

Por tanto, $|\omega^{\alpha}| = \aleph_{\beta} = |\alpha|$. Es decir, $\alpha \sim \omega^{\alpha}$. Si f es una aplicación biyectiva de ω^{α} en α, entonces basta considerar la ordenación R en α trasportada por f, a partir del orden usual de ω^{α}. Por construcción, t.o.$(\langle a, R\rangle) = \omega^{\alpha}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea R un buen orden en α tal que t.o.$(\langle\alpha, R\rangle) = \omega^{\alpha}$. Entonces, $\alpha \sim \omega^{\alpha}$. Luego, $\alpha \neq 0$ (pues, $\alpha = 0 \Longrightarrow 0 \sim 1$) y, en consecuencia, $\alpha \geqslant \omega$.

Ejercicio 196. *Probar que:*

(1) $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| < \aleph_0\}| = \aleph_0$.

(2) $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| \leqslant \aleph_0\}| = |\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| = \aleph_0\}| = \aleph_1$.

(1) Veamos que $\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| < \aleph_0\} = \omega$.

- $\star$ $\alpha \in \omega \Longrightarrow |\alpha| \leqslant \alpha < \omega = \aleph_0$.
- $\star$ $\alpha \notin \omega \Longrightarrow \omega \leqslant \alpha \Longrightarrow \aleph_0 = |\omega| \leqslant |\alpha| \Longrightarrow |\alpha| \not< \aleph_0$ (ya que entre cardinales iniciales el orden $<$ es conexo).

Por tanto, $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| < \aleph_0\}| = |\omega| = \aleph_0$.

(2) Veamos que $\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| \leqslant \aleph_0\} = \omega_1$.

- $\star$ $\alpha \in \omega_1 \Longrightarrow \alpha < \omega_1 \Longrightarrow |\alpha| \leqslant \alpha < \omega_1 = \aleph_1 \Longrightarrow |\alpha| < \aleph_1 \Longrightarrow |\alpha| \leqslant \aleph_0$.
- $\star$ $\alpha \notin \omega_1 \Longrightarrow \omega_1 \leqslant \alpha \Longrightarrow \aleph_1 = |\omega_1| \leqslant |\alpha| \Longrightarrow |\alpha| \not\leqslant \aleph_0$.

Por tanto, $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| \leqslant \aleph_0\}| = |\omega_1| = \aleph_1$.

(3) Veamos que $|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| = \aleph_0\}| = \aleph_1$. Se verifica que

$$\begin{aligned}\aleph_1 &= |\omega_1| = |\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ |\alpha| \leqslant \aleph_0\}| \\ &= |\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ |\alpha| < \aleph_0\}| + |\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ |\alpha| = \aleph_0\}| \\ &= \aleph_0 + |\{\alpha \in \mathbf{Ord} :\ |\alpha| = \aleph_0\}|\end{aligned}$$

Por tanto,

$$|\{\alpha \in \mathbf{Ord} : |\alpha| = \aleph_0\}| = \aleph_1$$

Ejercicio 197. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord}$. *Probar que*

(1) *Para cada* $\beta \in \mathbf{Ord}$ *se verifica:* $\aleph_\alpha \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1} \Longleftrightarrow |\beta| = \aleph_\alpha$.

(2) $|\{\beta \in \mathbf{Ord} : |\beta| = \aleph_\alpha\}| = \aleph_{\alpha+1}$.

(1) Sea $\beta \in \mathbf{Ord}$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\aleph_\alpha \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1}$. Entonces

- $\star$ $\aleph_\alpha \leqslant \beta \Longrightarrow \aleph_\alpha = |\aleph_\alpha| \leqslant |\beta|$.
- $\star$ $\beta < \aleph_{\alpha+1} \Longrightarrow |\beta| \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1}$.

Luego, $|\beta| = \aleph_\alpha$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que $|\beta| = \aleph_\alpha$. Entonces

- $\star$ $\aleph_\alpha \leqslant \beta$ ya que $\beta < \aleph_\alpha \Longrightarrow |\beta| \leqslant \beta < \aleph_\alpha$.
- $\star$ $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ya que $\aleph_{\alpha+1} \leqslant \beta \Longrightarrow \aleph_{\alpha+1} = |\aleph_{\alpha+1}| \leqslant |\beta|$.

Luego, $\aleph_\alpha \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1}$.

(2) Se verifica que

$$\begin{aligned} \aleph_{\alpha+1} &= |\aleph_{\alpha+1}| = |\{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta < \aleph_{\alpha+1}\}| \\ &= |\{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta < \aleph_\alpha\}| + |\{\beta \in \mathbf{Ord} : \aleph_\alpha \leqslant \beta < \aleph_{\alpha+1}\}| \\ &= \aleph_\alpha + |\{\beta \in \mathbf{Ord} : |\beta| = \aleph_\alpha\}| \end{aligned}$$

De donde se deduce que

$$|\{\beta \in \mathbf{Ord} : |\beta| = \aleph_\alpha\}| = \aleph_{\alpha+1}$$

Ejercicio 198. *Probar que* $|\omega^\omega| = |\varepsilon_0| = \aleph_0$.

- En primer lugar vamos a probar que $|\varepsilon_0| = \aleph_0$. Para ello, comencemos recordando que $\varepsilon_0 = \sup\{F(n) : n \in \omega\}$, siendo F la aplicación de ω en **Ord** definida por recursión como sigue:

$$F(0) = \omega \ \wedge \ \forall n \in \omega \ (F(n+1) = \omega^{F(n)})$$

$\star$ Veamos que $|\varepsilon_0| \leqslant \aleph_0$. Para ello, basta ver que

$$\forall n \in \omega \ (|F(n)| \leqslant \aleph_0)$$

pues, en tal situación,

$$\begin{aligned} |\varepsilon_0| &= \left| \bigcup_{n\in\omega} F(n) \right| \overset{(11,3,6)}{\leqslant} \sum_{n\in\omega} |F(n)| \\ &= \text{máx}\{|\omega|, \sup\{|F(n)| : n \in \omega\}\} = \aleph_0 \end{aligned}$$

Probémoslo por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$
Se tiene que $|F(0)| = |\omega| = \aleph_0$.

$\boxed{n \to n+1}$
Supongamos que $|F(n)| \leqslant \aleph_0$. Entonces

$$|F(n+1)| = |\omega^{F(n)}| \leqslant \aleph_0$$

Esta última desigualdad resulta del ejercicio 194 teniendo presente que $|\omega| = \aleph_0$ y $|F(n)| \leqslant \aleph_0$.

⋆ Veamos que $\aleph_0 \leqslant |\varepsilon_0|$. En efecto:

$$\omega = F(0) \leqslant \varepsilon_0 \Longrightarrow \aleph_0 = |\omega| \leqslant |\varepsilon_0|$$

- Veamos que $|\omega^\omega| = \aleph_0$. En efecto:

$$\omega < \omega^\omega < \varepsilon_0 \Longrightarrow \aleph_0 = |\omega| \leqslant |\omega^\omega| \leqslant |\varepsilon_0| = \aleph_0$$

Ejercicio 199. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord** tales que $\beta < \omega_\alpha$. Hallar los cardinales de los siguientes conjuntos:*

$$\omega_\alpha - \beta,\ \omega_\alpha \times \beta \ \text{ y } \ {}^{\omega_\alpha}\beta = \{f : \ f \text{ aplicación de } \omega_\alpha \text{ en } \beta\}$$

(1) Se verifica que

$$\aleph_\alpha = |\omega_\alpha| = |\omega_\alpha - \beta| + |\beta|$$

Ahora bien,

$$|\beta| \leqslant \beta < \omega_\alpha = \aleph_\alpha$$

Luego, $|\omega_\alpha - \beta| = \aleph_\alpha$ (ejercicio 191).

(2) Se verifica que

$$|\omega_\alpha \times \beta| = |\omega_\alpha| \cdot |\beta| = \aleph_\alpha \cdot |\beta|$$

- Si $\beta = 0$, entonces $\aleph_\alpha \cdot |\beta| = 0$.
- Si $\beta \in \omega - \{0\}$, entonces $\aleph_\alpha \cdot |\beta| = \aleph_\alpha$.
- Si $\omega \leqslant \beta < \aleph_\alpha$, entonces existe $\ggg \in$ **Ord** tal que

$$0 \leqslant \ggg < \alpha \ \wedge \ |\beta| = \aleph_\ggg$$

Luego,

$$\aleph_\alpha \cdot |\beta| = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\ggg \overset{\ggg < \alpha}{=} \aleph_\alpha$$

(3) Se verifica que

$$|{}^{\omega_\alpha}\beta| = |\beta|^{|\omega_\alpha|} = |\beta|^{\aleph_\alpha}$$

- Si $\beta = 0$, entonces $|\beta|^{\aleph_\alpha} = 0$.

- Si $\beta = 1$, entonces $|\beta|^{\aleph_\alpha} = 1$.
- Si $\beta \in \omega - \{0, 1\}$, entonces $|\beta|^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.
- Si $\omega \leqslant \beta < \aleph_\alpha$, entonces existe $\ggg \in$ **Ord** tal que $0 \leqslant \ggg < \alpha$ y $|\beta| = \aleph_{\ggg}$. Luego,
$$|\beta|^{\aleph_\alpha} = {\aleph_{\ggg}}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$$

Ejercicio 200. *Sean a y b dos conjuntos disjuntos. Demostrar que*
$$|\mathbf{P}(a \cup b)| = |\mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)|$$
de dos maneras distintas:

(1) *Mediante aritmética cardinal.*

(2) *Definiendo una aplicación biyectiva de $\mathbf{P}(a \cup b)$ en $\mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)$.*

(1) Se verifica que
$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(a \cup b)| &= 2^{|a \cup b|} = 2^{|a|+|b|} = 2^{|a|} \cdot 2^{|b|} \\ &= |\mathbf{P}(a)| \cdot |\mathbf{P}(b)| = |\mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)| \end{aligned}$$

(2) Consideremos la aplicación $f : \mathbf{P}(a \cup b) \to \mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)$ definida así: $f(x) = \langle x \cap a, x \cap b \rangle$, para cada $x \in \mathbf{P}(a \cup b)$.

La aplicación f está bien definida entre los conjuntos citados, ya que, obviamente, es funcional y, además, si $x \in \mathbf{P}(a \cup b)$ entonces $x \cap a \in \mathbf{P}(a)$ y $x \cap b \in \mathbf{P}(b)$. Luego, $\langle x \cap a, x \cap b \rangle \in \mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)$.

- Veamos que f es inyectiva. Para ello, sean $x, y \in \mathbf{P}(a \cup b)$ tales que $f(x) = f(y)$. Entonces $\langle x \cap a, x \cap b \rangle = \langle y \cap a, y \cap b \rangle$. Luego, $x \cap a = y \cap a$ y $x \cap b = y \cap b$. Por tanto,
$x = x \cap (a \cup b) = (x \cap a) \cup (x \cap b) = (y \cap a) \cup (y \cap b) = y \cap (a \cup b) = y$.
- Veamos que f es suprayectiva. Para ello, sea $\langle x, y \rangle \in \mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)$. Consideremos $z = x \cup y$. Entonces $z \subseteq a \cup b$. Además
$$\begin{aligned} f(z) &= \langle z \cap a, z \cap b \rangle = \langle (x \cup y) \cap a, (x \cup y) \cap b \rangle \\ &= \langle (x \cap a) \cup (y \cap a), (x \cap b) \cup (y \cap b) \rangle \\ &= \langle x \cup \emptyset, \emptyset \cup y \rangle \quad [\![\text{pues } x \subseteq a \wedge y \subseteq b \wedge a \cap b = \emptyset]\!] \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Así pues, f es una aplicación biyectiva de $\mathbf{P}(a \cup b)$ en $\mathbf{P}(a) \times \mathbf{P}(b)$.

Ejercicio 201. *Calcular el cardinal del conjunto*

$$a = \{f \in^{\omega} \omega : \forall n \in \omega \ (f^{-1}[\{n\}] \sim \omega)\}$$

Por una parte, se tiene que $|a| \leqslant 2^{\aleph_0}$ ya que $a \subseteq^{\omega} \omega$ y, por tanto,

$$|a| \leqslant |^{\omega}\omega| = 2^{\aleph_0}$$

Veamos que $|a| \geqslant 2^{\aleph_0}$. Para ello, asociamos a cada conjunto infinito b de números naturales primos tal que $b \neq \{n \in \omega : \ n \text{ es primo}\}$, una aplicación F_b de ω en ω definida como sigue:

$$F_b(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \in b \cup \{0,1\} \\ 1, & \text{si } n \notin b \text{ y } n \text{ no se descompone en producto de potencias} \\ & \text{de elementos de } b \\ p, & \text{si } n \notin b \text{ y } n \text{ se descompone en producto de potencias de} \\ & p \text{ elementos de } b \end{cases}$$

De la definición anterior resulta que F_b pertenece al conjunto a ya que

- $F_b^{-1}[\{0\}]$ contiene al conjunto $b \cup \{1\}$.
- $F_b^{-1}[\{1\}]$ contiene al conjunto $\{q^n : \ n \in \omega\}$, siendo q un número primo tal que $q \notin b$.
- Si $p \in \omega - \{0,1\}$, entonces $F_b^{-1}[\{p\}]$ contiene a todas los números naturales que no pertenecen a b y que en su descomposición en factores primos aparecen p elementos de b y ningún primo que no sea de b.

Notemos c al conjunto

$$\{b : \ b \ \text{ es un conjunto infinito de primos tal que existe } q \text{ primo } \wedge q \notin b\}$$

Entonces $|c| = 2^{\aleph_0}$. Además, la aplicación $\varphi : c \to a$ definida por $\varphi(b) = F_b$ es, obviamente, inyectiva. Por tanto, $2^{\aleph_0} = |c| \leqslant |a|$.

Ejercicio 202. *Sea* $\alpha \in \mathbf{Ord} - \{0\}$. *Hallar* $\sum_{\beta \leqslant \alpha} \aleph_\beta$ *y* $\sum_{\beta < \alpha} \aleph_\beta$

Se verifica que:

$$\sum_{\beta \leqslant \alpha} \aleph_\beta = \sum_{\beta < \alpha+1} \aleph_\beta = \text{ máx}\{|\alpha+1|, \sup\{\aleph_\beta : \ \beta \in \alpha+1\}\}$$

Teniendo presente que $|\alpha+1| \leqslant \aleph_\alpha$ y que $\sup\{\aleph_\beta : \beta \in \alpha+1\} = \aleph_\alpha$, se deduce que $\sum\limits_{\beta \leqslant \alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$.

Para hallar $\sum\limits_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$ distinguiremos dos casos, según α sea ordinal sucesor o límite.

- Supongamos que α es un ordinal sucesor. Sea $\ggg \in \mathbf{Ord}$ tal que $\alpha = \ggg +1$. Entonces,

$$\sum_{\beta<\alpha} \aleph_\beta = \sum_{\beta<\ggg+1} \aleph_\beta = \sum_{\beta \leqslant \ggg} \aleph_\beta = \aleph_{\ggg}$$

- Supongamos que α es un ordinal límite. Entonces,

$$\sum_{\beta<\alpha} \aleph_\beta = \max\{|\alpha|, \sup\{\aleph_\beta : \beta \in \alpha\}\}$$

  Como la función $\aleph$ es normal y α es un ordinal límite, resulta que $\sup\{\aleph_\beta : \beta \in \alpha\} = \aleph_\alpha$. Además, $\alpha \leqslant \aleph_\alpha \Longrightarrow |\alpha| \leqslant \aleph_\alpha$. Por tanto,

$$\sum_{\beta<\alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$$

Ejercicio 203. *Sean $\alpha \in \mathbf{Ord}$ y $(\lambda_i)_{i\in I}$ una familia de cardinales bien ordenables, estríctamente mayores que 1 y pertenecientes a ω_α. Calcular razonadamente las siguientes operaciones cardinales: $\sum\limits_{i\in\omega_\alpha} \lambda_i$ y $\prod\limits_{i\in\omega_\alpha} \lambda_i$.*

Se verifica:

$$\sum_{i\in\omega_\alpha} \lambda_i = \max\{|\omega_\alpha|, \sup\{\lambda_i : i \in \omega_\alpha\}\}$$

Teniendo presente que $|\omega_\alpha| = \aleph_\alpha$ y que $\sup\{\lambda_i : i \in \omega_\alpha\} \leqslant \aleph_\alpha$, se deduce que $\sum\limits_{i\in\omega_\alpha} \lambda_i = \aleph_\alpha$.

Calculemos el producto cardinal $\prod\limits_{i\in\omega_\alpha} \lambda_i$. Para ello observamos que dicho producto es el cardinal del conjunto $\prod\limits_{i\in\omega_\alpha}{}^{*} \lambda_i$.

- Veamos que $\prod\limits_{i\in\omega_\alpha}{}^{*} \lambda_i \subseteq {}^{\omega_\alpha}\omega_\alpha$.

  En efecto: sea $f \in \prod\limits_{i\in\omega_\alpha}{}^{*} \lambda_i$. Entonces, f es una aplicación cuyo dominio es ω_α y $\forall i \in \omega_\alpha\ (f(i) \in \lambda_i \in \omega_\alpha)$.

Es decir, f es una aplicación de ω_α en ω_α.

De la relación obtenida resulta que

$$|\prod_{i\in\omega_\alpha}{}^{*}\lambda_i| \leqslant |{}^{\omega_\alpha}\omega_\alpha| = \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$$

- Veamos que ${}^{\omega_\alpha}2 \subseteq \prod_{i\in\omega_\alpha}{}^{*}\lambda_i$.

  En efecto: sea $f \in {}^{\omega_\alpha}2$. Entonces, f es una aplicación cuyo dominio es ω_α y $\forall i \in \omega_\alpha\ (f(i) \in 2 \leqslant \lambda_i)$. Luego, $f \in \prod_{i\in\omega_\alpha}{}^{*}\lambda_i$.

  De la relación obtenida resulta que

$$2^{\aleph_\alpha} = |{}^{\omega_\alpha}2| \leqslant |\prod_{i\in\omega_\alpha}{}^{*}\lambda_i|$$

En consecuencia, $|\prod_{i\in\omega_\alpha}{}^{*}\lambda_i| = 2^{\aleph_\alpha}$.

Ejercicio 204. *Sea a un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ una aplicación biyectiva.*

(1) *Probar que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathbb{R}\times\{b\}) \cap f[a] = \emptyset$.*

(2) *A partir del apartado anterior, probar que $|\mathbb{R} - a| = 2^{\aleph_0}$.*

(1) Supongamos lo contrario; es decir, que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ((\mathbb{R}\times\{x\}) \cap f[a] \neq \emptyset)$$

Sea g una aplicación biyectiva de ω en $f[a]$.

Consideremos la aplicación $h : \mathbb{R} \to f[a]$ definida como sigue:

- Sea $x \in \mathbb{R}$. Consideremos $m_x = \min\{n \in \omega : \ g(n) \in \mathbb{R}\times\{x\}\}$ (dicho mínimo existe ya que $(\mathbb{R}\times\{x\}) \cap f[a] \neq \emptyset$). Entonces, se define $h(x) = g(m_x)$.

Veamos que la aplicación h es inyectiva. Para ello, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $h(x) = h(y)$. Entonces,

$$h(x) = h(y) \Longrightarrow g(m_x) = g(m_y) \Longrightarrow x = y$$

ya que $g(m_x) \in \mathbb{R} \times \{x\}$ y $g(m_y) \in \mathbb{R} \times \{y\}$.

Por tanto,

$$2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \leqslant |f[a]| = \aleph_0$$

Lo que es una contradicción.

(2) Por el apartado (1), existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathbb{R} \times \{b\}) \cap f[a] = \emptyset$. Entonces, $f^{-1}[(\mathbb{R} \times \{b\})] \subseteq \mathbb{R} - a$. Luego,

$$2^{\aleph_0} = |f^{-1}[(\mathbb{R} \times \{b\})]| \leqslant |\mathbb{R} - a| \leqslant |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$$

Ejercicio 205. *(***ZFC***) Sea κ un cardinal infinito y λ un cardinal tal que $\lambda \leqslant \kappa$. Notemos*

$$\mathbf{P}_\lambda(\kappa) = \{a \subseteq \kappa : \ |a| = \lambda\}$$

Probar que $|\mathbf{P}_\lambda(\kappa)| = \kappa^\lambda$.

El resultado es inmediato para $\lambda = 0$. Supongamos que $\lambda \neq 0$.

Veamos que $\mathbf{P}_\lambda(\kappa) \preceq {}^\lambda\kappa$.

– Si $a \in \mathbf{P}_\lambda(\kappa)$, entonces $|a| = \lambda$. Luego, existe una aplicación biyectiva, f de λ en a. Es decir, $f \in {}^\lambda a$ y $f[\lambda] = a$. Puesto que $a \subseteq \kappa$ se tiene que $f \in {}^\lambda\kappa$

  Consideremos un buen orden, R, en ${}^\lambda\kappa$. Sea $g : \mathbf{P}_\lambda(\kappa) \to {}^\lambda\kappa$ definida así:

$$g(a) = \text{ mín}_R\{f \in {}^\lambda\kappa : \ f[\lambda] = a\}, \ \text{ para cada } a \in \mathbf{P}_\lambda(\kappa)$$

  (Obsérvese que el conjunto considerado es no vacío y, por tanto, posee elemento mínimo por R).

  Obviamente, g es una aplicación bien definida de $\mathbf{P}_\lambda(\kappa)$ en ${}^\lambda\kappa$. Además, g es inyectiva ya que

$$g(a) = g(b) \Longrightarrow g(a)[\lambda] = g(b)[\lambda] \Longrightarrow a = b$$

  Por tanto, $\mathbf{P}_\lambda(\kappa) \preceq {}^\lambda\kappa$.

Veamos que ${}^\lambda\kappa \preceq \mathbf{P}_\lambda(\kappa)$.

– Se tiene que ${}^\lambda\kappa \subseteq \mathbf{P}_\lambda(\lambda \times \kappa)$, pues

$$f \in {}^\lambda\kappa \Longrightarrow f \subseteq \lambda \times \kappa \wedge |f| = \lambda$$

  Además, como κ es infinito y $\lambda \leqslant \kappa$, resulta que $\lambda \times \kappa \sim \kappa$.

  Por tanto,

$${}^\lambda\kappa \preceq \mathbf{P}_\lambda(\lambda \times \kappa) \sim \mathbf{P}_\lambda(\kappa)$$

11.5. Problemas propuestos

Ejercicio 11.1. Probar que para todo cardinal $\mathfrak{a}$ y todo $n \in \omega$, se tiene que

$$\mathfrak{a} + \overset{n}{\cdots} + \mathfrak{a} = n \cdot \mathfrak{a}$$

Ejercicio 11.2. Sea $\mathfrak{a}$ un cardinal. Probar que $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} \leqslant 2^{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}}$.
Indicación: Toda aplicación en un conjunto x es un subconjunto de $x \times x$.

Ejercicio 11.3. Se pide:

(1) Sea x un conjunto tal que $x \notin x$ y $\omega \preceq x$. Probar que $|x \cup \{x\}| = |x|$.

(2) Probar, usando aritmética cardinal, que todos los ordinales iniciales son ordinales límite.

Ejercicio 11.4. Sea x un conjunto bien ordenable tal que $\omega \preceq x$. Probar que:

(1) $x \times x \sim x$.

(2) ${}^{x}x \preceq \mathbf{P}(x)$.

(3) Usando el apartado anterior, dar una prueba de que $\aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Indicación: (1) úsese aritmética cardinal. **(2)** Utilícese el apartado anterior y el hecho de que ${}^{x}x \subseteq \mathbf{P}(x \times x)$.

Ejercicio 11.5. Sean $\alpha \in \mathbf{Ord}$ y x e y dos conjuntos bien ordenables tales que $\aleph_\alpha \leqslant |x \times y|$. Probar que $\aleph_\alpha \leqslant |x| \vee \aleph_\alpha \leqslant |y|$.

Ejercicio 11.6. Sean $\alpha \leqslant \beta \leqslant \ggg$ ordinales. Simplificar (en $\mathbf{ZF}^-$) las siguientes expresiones:

(1) $((\aleph_\alpha + \aleph_{\ggg}) \cdot (\aleph_\beta + \aleph_\alpha))^{\aleph_{\ggg}}$.

(2) $((\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta) \cdot (\aleph_\beta + \aleph_{\ggg}))^{\aleph_\alpha}$.

Ejercicio 11.7. Sean $n \in \omega$ y $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Dar pruebas directas (explicitando una biyección) de las igualdades $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ y $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Nota: En lo que sigue, $(\kappa_i)_{i \in I}$ notará una familia de cardinales bien ordenables y κ, λ cardinales bien ordenables.

Ejercicio 11.8. Probar que $\sum_{i \in \lambda} 1 = \lambda$.

Ejercicio 11.9. (**ZFC**$^-$) Sean $(a_i)_{i\in I}$ y $(b_i)i \in I$ familias de conjuntos disjuntos dos a dos. Supongamos que $\forall i \in I(a_i \sim b_i)$. Probar que $|\bigcup_{i\in I} a_i| = |\bigcup_{i\in I} b_i|$. Dar una definición alternativa de la suma infinita de cardinales y justificarla.

Ejercicio 11.10. Calcular $\sum_{n\in\omega} n$.

Indicación:úsese el apartado (2) de 11.3.4.

Ejercicio 11.11. *(Asociatividad de la suma cardinal infinita)*. Sean $(I_j)j \in J$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos e $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Probar que:

$$\sum_{j\in J}(\sum_{i\in I_j}\kappa_i) = \sum_{i\in I}\kappa_i$$

Indicación: Pruébese que

$$\bigcup_{j\in J}(\{j\} \times \bigcup_{i\in I_j}(\{i\} \times \kappa_i)) \sim \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times \kappa_i)$$

mediante la biyección $f(\langle j, i, x\rangle) = \langle i, x\rangle$.

Ejercicio 11.12. *(Distributividad de la suma cardinal infinita respecto al producto cardinal finito)*. Probar que $\lambda \cdot (\sum_{i\in I}\kappa_i) = \sum_{i\in I}(\lambda \cdot \kappa_i)$.

Indicación: Pruébese que

$$\lambda \times \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times \kappa_i) \sim \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times (\lambda \times \kappa_i))$$

mediante la biyección $f(\langle \alpha, i, x\rangle) = \langle i, \alpha, x\rangle$.

Ejercicio 11.13. Hallar familias de cardinales bien ordenables $(\kappa_n)_{n\in\omega}$ y $(\lambda_n)_{n\in\omega}$ tales que

$$\forall n \in \omega\ (\kappa_n < \lambda_n),\ \sum_{n\in\omega}\kappa_n = \sum_{n\in\omega}\lambda_n \ \text{ y } \ \prod_{n\in\omega}\kappa_n = \prod_{n\in\omega}\lambda_n$$

Ejercicio 11.14. (**ZFC**$^-$) Sean $(a_i)_{i\in I}$ y $(b_i)_{i\in I}$ familias de conjuntos. Supongamos que $\forall i \in I\ (a_i \sim b_i)$. Probar que

$$|\prod_{i\in I}{}^{*} a_i| = |\prod_{i\in I}{}^{*} b_i|$$

Dar una definición alternativa del producto infinito de cardinales y justificarla.

Ejercicio 11.15. *(Asociatividad del producto cardinal infinito)*. Sean $(I_j)_{j\in J}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos e $I = \bigcup_{j\in J} I_j$. Probar que:

$$\prod_{j\in J}(\prod_{i\in I_j}\kappa_i) = \prod_{i\in I}\kappa_i$$

Indicación: Defínase una biyección, g, de $\prod^*_{i\in I}\kappa_i$ en $\prod^*_{j\in J}(\prod^*_{i\in I_j}\kappa_i)$ tal que para cada $f \in \prod^*_{i\in I}\kappa_i$ se tenga que $(g(f)(j))(i) = f(i)$, $\forall j \in J$, $\forall i \in I_j$.

Ejercicio 11.16. Calcular:

(1) $\prod_{n\in\omega} n$ **(2)** $\left|\prod^*_{\alpha\in\omega_1-\{0\}} \alpha\right|$

Indicación: (2) Pruébese que $2^{\aleph_1} \leqslant |\prod^*_{\alpha\in\omega_1-\{0\}} \alpha|$. Alternativamente, aplíquese el apartado (4) de 11.3.11.

Ejercicio 11.17. Probar que:

(1) $\prod_{n\in\omega-\{0\}} n = 2^{\aleph_0}$.

(2) El cardinal del conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\omega}$ de números naturales que verifican $\forall n \geqslant 1\ (x_n < n)$ es $2^{\aleph_0}$.

(3) $\prod_{n\in\omega}\aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

(4) $\prod_{\alpha\in\omega+\omega}\aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$.

Indicación:(1) y **(3)** Aplíquese el apartado (4) de 11.3.11. **(4)** Téngase presente que

$$\prod_{\alpha\in\omega+\omega}\aleph_\alpha = \prod_{\alpha\in\omega}\aleph_\alpha \cdot \prod_{\beta\in\omega}\aleph_{\omega+\beta}$$

Ejercicio 11.18. Probar que $\prod_{i\in I}(\lambda^{\kappa_i}) = \lambda^\mu$, siendo $\mu = \sum_{i\in I}\kappa_i$.

Indicación: Pruébese que

$$\prod_{i\in I}{}^{*\,\kappa_i}\lambda \sim {}^a\lambda$$

siendo $a = \bigcup_{i\in I}(\{i\}\times\kappa_i)$, mediante la biyección g que a cada $f \in \prod^*_{i\in I}{}^{\kappa_i}\lambda$ le asigna la aplicación $g(f)$ de $\bigcup_{i\in I}(\{i\}\times\kappa_i)$ en λ, definida así $g(f)(\langle i,x\rangle) = (f(i))(x)$.

Ejercicio 11.19. Probar que si x es un conjunto finito no vacío e y es numerable, entonces el conjunto ${}^{y}x$ es numerable.

Capítulo 12

Exponenciación cardinal

A la hora de estudiar la exponenciación cardinal y obtener una expresión simple para la misma, hay que observar que el valor depende de ciertas características de los propios cardinales. Ello nos llevará a establecer una primera clasificación de los mismos en cardinales regulares y singulares.

12.1. Cofinalidad

Definición 12.1.1. Sean α un ordinal.

(a) Diremos que $x \subseteq \alpha$ es *cofinal en* α si $\forall \beta < \alpha\ \exists \ggg \in x\ (\beta \leq \ggg)$.

(b) Si $\beta \in \mathbf{Ord}$, entonces diremos que $f : \beta \to \alpha$ es cofinal si $\mathrm{rang}(f)$ es cofinal en α.

(c) La *cofinalidad de* α, que notaremos $\mathrm{cf}\,(\alpha)$, es el siguiente ordinal:

$$\text{mín}\{\beta :\ \exists f\ (f : \beta \to \alpha \text{ cofinal})\}$$

Consideraciones:

(1) La aplicación identidad en α es cofinal.

(2) $\mathrm{cf}\,(0) = 0$.

(3) Para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$, se verifica $\mathrm{cf}\,(\alpha) \leqslant \alpha$ y $\mathrm{cf}\,(\alpha + 1) = 1$.

Proposición 12.1.2. *Se verifica:*

(1) *Si α es un ordinal límite, entonces $\mathrm{cf}\,(\alpha)$ es límite.*

(2) $cf(\omega) = \omega$ *y* $cf(\omega + \omega) = \omega$.

Proposición 12.1.3. *Sean α y β ordinales. Se verifica:*

(1) *Si $f : \alpha \to \beta$ es cofinal y $g : \beta \to\ggg$ es cofinal y no decreciente, entonces $g \circ f : \alpha \to\ggg$ es cofinal.*

(2) *Existe $f : cf(\alpha) \to \alpha$ creciente y cofinal.*

(3) *Si β es límite y $f : \alpha \to \beta$ es no decreciente y cofinal, entonces $cf(\alpha) = cf(\beta)$.*

(4) $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$.

(5) *Si α es límite, entonces $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.*

12.2. Cardinales regulares

Definición 12.2.1. Sea α un ordinal. Diremos que α es *regular* si α es límite y $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. Caso contrario, diremos que α es *singular*.

Proposición 12.2.2. *Si α es un ordinal límite, entonces $cf(\alpha)$ es un cardinal regular.*

Proposición 12.2.3. *(*HAUSDORFF, 1914*) Si κ es un aleph, entonces son equivalentes las condiciones siguientes:*

(1) *κ es regular.*

(2) *κ no es unión de menos de κ conjuntos de cardinal menor que κ.*

Corolario 12.2.4. *(***ZFC***) (*HAUSDORFF, 1908*) Para cada $\alpha \in$* **Ord** *se tiene que $\aleph_{\alpha+1}$ es regular.*

12.3. Aritmética infinita

Proposición 12.3.1. *(***ZFC***) Sean λ, κ cardinales y $(\lambda_i)_{i\in I}$, $(\kappa_i)_{i\in I}$ familias de cardinales. Entonces, se verifica:*

(1) $\displaystyle\prod_{i\in I} {\kappa_i}^\lambda = \left(\prod_{i\in I} \kappa_i\right)^\lambda$.

(2) $\displaystyle\prod_{i\in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^\nu$, *siendo* $\displaystyle\nu = \sum_{i\in I} \lambda_i$.

(3) *Para cada* $(x_j)_{j\in J}$ *partición de* I*, se tiene que:*

$$\prod_{i\in I}\kappa_i = \prod_{j\in J}\left(\prod_{i\in x_j}\kappa_i\right)$$

Proposición 12.3.2. (**ZFC**) *Sea* κ *un cardinal infinito. Son equivalentes:*

(1) κ *es singular.*

(2) $(\exists\lambda<\kappa)(\exists\langle\kappa_i : i\in\lambda\rangle)\left((\forall i<\lambda)(\kappa_i<\kappa)\wedge\kappa=\sum_{i<\lambda}\kappa_i\right)$.

Proposición 12.3.3. (**ZFC**) *Sea* λ *un cardinal infinito. Si* $\langle\kappa_i : i<\lambda\rangle$ *es una sucesión no decreciente de cardinales mayores o iguales que* 1*, entonces*

$$\prod_{i<\lambda}\kappa_i = (\sup\{\kappa_i :\ i<\lambda\})^{\lambda}$$

Proposición 12.3.4. (**ZFC**) *Sean* κ *un cardinal infinito y* $0<\lambda<\kappa$*. Entonces,*

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} \sum_{\alpha<\kappa}|\alpha|^{\lambda}, & si\ cf(\kappa)>\lambda \\ \left(\sum_{\mu<\kappa}\mu^{\lambda}\right)^{cf(\kappa)}, & si\ cf(\kappa)\leq\lambda \end{cases}$$

Definición 12.3.5. La *función gimel*, $\gimel$, es la función sobre los aleph definida así: $\gimel(\kappa)=k^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Teorema 12.3.6. (**ZFC**) *(Computación inductiva de* ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$*)*

$${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} 2^{\aleph_\beta}, & si\ \ \alpha\leq\beta \\ {\aleph_{\ggg}}^{\aleph_\beta}, & si\ \ \beta<\alpha\wedge(\exists\ggg<\alpha)\ (\aleph_\alpha\leq{\aleph_{\ggg}}^{\aleph_\beta}) \\ \aleph_\alpha, & si\ \ \beta<\alpha\wedge(\forall\ggg<\alpha)\ ({\aleph_{\ggg}}^{\aleph_\beta}<\aleph_\alpha)\wedge\aleph_\beta<cf(\aleph_\alpha) \\ \gimel(\aleph_\alpha), & si\ \ \beta<\alpha\wedge(\forall\ggg<\alpha)\ ({\aleph_{\ggg}}^{\aleph_\beta}<\aleph_\alpha)\wedge\aleph_\beta\geq cf(\aleph_\alpha) \end{cases}$$

Corolario 12.3.7. (**ZFC**) *(Fórmula recursiva de Hausdorff; 1904) Para cada* $\alpha\in$ **Ord** *se verifica:*

$${\aleph_{\alpha+1}}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}\cdot\aleph_{\alpha+1}$$

12.4. Las funciones continuo y gimel

Proposición 12.4.1. *(***ZFC***) (*KÖNIG*) Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < \gimel(k)$.*

Proposición 12.4.2. *(***ZFC***) Si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < cf\,(2^\kappa)$.*

Corolario 12.4.3. *(***ZFC***) Si κ y λ son cardinales infinitos, entonces $\kappa < cf\,(\lambda^\kappa)$.*

Definición 12.4.4. (**ZFC**) Si κ y λ son cardinales, entonces

$$\kappa^{\underset{\smile}{\lambda}} = \sup\{\kappa^\mu : \mu < \lambda\}$$

Proposición 12.4.5. *(***ZFC***) Si κ es un cardinal infinito, entonces*

$$(2^{\underset{\smile}{\kappa}})^{cf\,(\kappa)} = 2^\kappa$$

Definición 12.4.6. (**ZFC**) La función $\kappa \longmapsto 2^\kappa$ se llama la *función continuo*.

Definición 12.4.7. (**ZFC**) Dado un cardinal κ, diremos que la función continuo es *eventualmente constante en* κ si existe un cardinal λ tal que $\lambda < \kappa$ y $2^{\underset{\smile}{\kappa}} = 2^\lambda$.

Teorema 12.4.8. *(***ZFC***) (*BUKOVSKY–HECHLER, 1973*) Si κ es un cardinal singular y la función continuo es eventualmente constante en κ, entonces existe un $\lambda < \kappa$ tal que $2^\kappa = 2^\lambda$.*

Teorema 12.4.9. *(***ZFC***) Si κ es un cardinal infinito, entonces:*

$$2^\kappa = \begin{cases} \gimel(\kappa), & \text{si } \kappa \text{ es regular} \\ 2^{\underset{\smile}{\kappa}}, & \text{si } \kappa \text{ es singular y la función continuo es ev. cte. en } \kappa \\ \gimel(2^{\underset{\smile}{\kappa}}), & \text{si } \kappa \text{ es singular y la función continuo no es ev. cte. en } \kappa \end{cases}$$

12.5. Exponenciación cardinal con la hipótesis generalizada del continuo

Por el teorema de Cantor, sabemos que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Por tanto, admitiendo el axioma de elección, existirá un único ordinal α tal que $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$. Desde luego, $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$.

El cardinal $2^{\aleph_0}$ es de especial relevancia por ser el cardinal de conjuntos tan significativos como $\mathbf{P}(\omega)$, $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $\mathbb{R}^n$ y ${}^\omega\omega$.

En 1878, Cantor plantea la cuestión de determinar el ordinal α tal que $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$ (*problema del continuo*).

Cantor comenzó a abordar el problema del continuo buscando un conjunto a cuyo cardinal estuviera comprendido estríctamente entre $\aleph_0$ y el cardinal de $\mathbb{R}$ (admitiendo que la búsqueda hubiera tenido éxito, Cantor sólo habría probado que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, pero seguiría sin determinar el ordinal α que resolviera el problema).

En ese intento, Cantor comenzó estudiando un amplio espectro de subconjuntos no numerables de $\mathbb{R}$ (conjuntos perfectos, cerrados, etc.) y probó que todos ellos eran equipotentes a $\mathbb{R}$. Lo que le llevó a conjeturar que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (*hipótesis del continuo*, **HC**).

De la **HC** resultaría que no existen conjuntos cuyo cardinal esté comprendido estríctamente entre el cardinal del conjunto de los números naturales y el cardinal del conjunto de los números reales.

El problema del continuo es presentado por D. Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de Paris (1900) y lo propone como el primero de una lista de veintitres problemas abiertos que resumen las inquietudes básicas de los matemáticos de la época.

En 1908, Hausdorff conjetura que $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ (\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha})$, conocida como *hipótesis de los aleph* (**HA**) (obsérvese que tal como aparece expresada, la **HA** presupone el axioma de elección, **AC**, para que tenga sentido $2^{\aleph_\alpha}$). En realidad parece ser que en ¿1883?, Cantor realiza esta conjetura de manera implícita para el caso $\alpha = 0$ y, posteriormente, Hilbert publicó una demostración errónea de la conjetura realizada por Cantor.

La *hipótesis generalizada del continuo* (**HGC**) establece que si a es un conjunto infinito, entonces todo conjunto b tal que $a \preceq b \preceq \mathbf{P}(a)$ verifica que, o bien es equipotente al conjunto a o bien es equipotente a $\mathbf{P}(a)$ (es decir, para cada cardinal infinito, κ, no existe un cardinal λ tal que $\kappa < \lambda < 2^\kappa$).

Desde luego, la **HC** es un caso particular de la **HGC**, concretamente cuando el conjunto a es numerable.

En 1960, H. Rubin probó en **ZF** que la **HA** implica el axioma de elección (claro está, expresando la **HA** en la forma $\forall\alpha \in \mathbf{Ord}\ ({}^{\omega_\alpha}2 \sim \omega_{\alpha+1})$ que no hace uso de **AC**).

Por tanto, en la teoría **ZFC**, la **HGC** y la **HA** son equivalentes.

En 1926, Tarski y Lindenbaum conjeturaron que la **HGC** implica el axioma de elección. Esta conjetura fué probada por Sierpinski en 1947.

En 1938, Gdel probó la consistencia relativa de la **HGC** y, por tanto, de la **HC**, con los axiomas de la teoría **ZFC** (es decir, admitiendo que la teoría **ZFC** es consistente, dicha teoría no prueba la negación de la **HGC**).

En 1963, P. Cohen demostró que el axioma de elección no implica la **HC** y, por tanto, tampoco implica la **HGC** (es decir, admitiendo que la teoría **ZFC** es consistente, dicha teoría no prueba la **HGC**).

Definición 12.5.1.

- La *hipótesis del continuo* **(HC)** afirma que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.
- La *hipótesis generalizada del continuo* **(HGC)** afirma que si a es un conjunto infinito, entonces todo conjunto b tal que $a \preceq b \preceq \mathbf{P}(a)$ verifica que, o es equipotente al conjunto a o es equipotente a $\mathbf{P}(a)$.
- La *hipótesis de los aleph* **(HA)** afirma que: $\forall \alpha \in \mathbf{Ord}\ (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$.

Teorema 12.5.2. *(***HGC***)*

$$\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, & si\ \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1}, & si\ cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1}, & si\ \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta \end{cases}$$

12.6. Problemas resueltos

Ejercicio 206. *(***ZFC$^-$***) Mediante aritmética cardinal, hallar el cardinal del conjunto de sucesiones finitas de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. ¿Cuánto valdría dicho cardinal admitiendo la hipótesis generalizada del continuo?*

El conjunto de sucesiones finitas de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ puede ser descrito así

$$\bigcup_{n\in\omega} \{f :\ f \text{ es aplicación de } n \text{ en } {}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\}$$

Notemos $a_n = \{f :\ f$ es aplicación de n en ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\}$, para cada $n \in \omega$. Se tiene que $(a_n)_{n\in\omega}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos, ya que si $n \neq m$, $f \in a_n$ y $g \in a_m$, entonces $f \neq g$ pues sus dominios respectivos son distintos.

Del corolario 11.3.3 resulta que

$$\left|\bigcup_{n\in\omega} a_n\right| = \sum_{n\in\omega} |a_n|$$

Ahora bien,

$$|{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_0 \cdot 2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

Además, $|a_0| = 1$ y si $n \neq 0$, entonces

$$|a_n| = |{}^{n}({}^{\mathbb{R}}\mathbb{R})| = |{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}|^n = (2^{2^{\aleph_0}})^n = 2^{2^{\aleph_0} \cdot n} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

Por tanto,

$$|\bigcup_{n\in\omega} a_n| = \sum_{n\in\omega} |a_n| = \text{máx}\{|\omega|, \sup\{|a_n| :\ n \in \omega\}\} = \text{máx}\{\aleph_0, 2^{2^{\aleph_0}}\} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

Admitiendo la hipótesis generalizada del continuo, el cardinal obtenido valdría $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Ejercicio 207. *En la teoría* **ZFC**, *admitiendo que* $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, *calcular* $\aleph_n^{\aleph_1}$, *para cada* $n \in \omega$.

Para $n \leqslant 1$ se tiene que $\aleph_n^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} = \aleph_2$.

Veamos que $\forall n \geqslant 2\ (\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n)$.

$\boxed{n = 2}$

Por la fórmula recursiva de Hausdorff, se tiene que $\aleph_2^{\aleph_1} = \aleph_2 \cdot \aleph_1^{\aleph_1}$. Luego,

$$\aleph_2^{\aleph_1} = \aleph_2 \cdot \aleph_1^{\aleph_1} = \aleph_2 \cdot \aleph_2 = \aleph_2$$

$\boxed{n \geqslant 2 \to n+1}$

Sea $n \geq 2$ tal que $\aleph_n^{\aleph_1} = \aleph_n$. Por la fórmula recursiva de Hausdorff, se tiene que $\aleph_{n+1}^{\aleph_1} = \aleph_{n+1} \cdot \aleph_n^{\aleph_1}$. Luego,

$$\aleph_{n+1}^{\aleph_1} = \aleph_{n+1} \cdot \aleph_n^{\aleph_1} \overset{h.i.}{=} \aleph_{n+1} \cdot \aleph_n = \aleph_{n+1}$$

Ejercicio 208. *Supongamos que en la teoría* **ZFC** *se verifica que* $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. *Probar que:*

(1) $\aleph_{\omega_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_0} \Longrightarrow \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

(2) $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_1}$.

(1) Supongamos que $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ y que $\aleph_{\omega_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

- Veamos que $\aleph_\omega^{\aleph_0} \leqslant \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}$.
  En efecto: se verifica que
  $$\aleph_\omega^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_1} \leqslant \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}$$
- Veamos que $\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_0}$.
  Por una parte, se tiene que
  $$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leqslant (\aleph_\omega^{\aleph_0})^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0 \cdot \aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_1}$$
  Calculemos $\aleph_\omega^{\aleph_1}$, a través de la fórmula que proporciona la computación inductiva de $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Teniendo presente que

$\star$ $1 < \omega$.

$\star$ $\forall n < \omega\ (\aleph_n^{\aleph_1} < \aleph_\omega)$ (por el ejercicio anterior).

$\star$ $\mathrm{cf}\ (\aleph_\omega) = \omega < \aleph_1$.

se tiene que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \gimel(\aleph_\omega)$.

Ahora bien,

$$\gimel(\aleph_\omega) = \aleph_\omega^{\mathrm{cf}\ (\aleph_\omega)} = \aleph_\omega^{\mathrm{cf}\ (\omega)} = \aleph_\omega^{\omega} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

Por tanto, hemos probado que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

En consecuencia,

$$\aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

(2) Supongamos que $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$. Del apartado (1) se deduce que

$$\aleph_{\omega_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1}$$

De donde resultaría que

$$\gimel(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_{\omega_1}^{\mathrm{cf}\ (\omega_1)} = \aleph_{\omega_1}^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1}$$

Lo que es una contradicción, ya que para cada cardinal infinito, κ, se tiene que $\kappa < \gimel(\kappa)$.

Ejercicio 209. *Sean $\alpha = \omega_4 + \omega_3$ y $\kappa = \aleph_\alpha$. Admitiendo la hipótesis generalizada del continuo, hallar el valor de κ^λ, para los siguientes casos:*

$$(\mathbf{1})\ \lambda = \aleph_5 \qquad (\mathbf{2})\ \lambda = \aleph_{\omega^2} \qquad (\mathbf{3})\ \lambda = \aleph_{\omega_5}$$

Recordemos que admitiendo la **HGC** se tiene que

$$\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, & \text{si } \aleph_\beta < \mathrm{cf}\ (\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{si } \mathrm{cf}\ (\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1}, & \text{si } \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta \end{cases}$$

Vamos a calcular la cofinalidad de $\aleph_{\omega_4+\omega_3}$. Se tiene que

$$\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_4+\omega_3}) = \mathrm{cf}(\omega_4 + \omega_3) = \mathrm{cf}(\omega_3) = \omega_3$$

Por tanto,

(1) Si $\lambda = \aleph_5$, entonces $\mathrm{cf}\ (\kappa) = \omega_3 < \aleph_5 = \lambda < \aleph_\alpha$. Luego,

$$\kappa^\lambda = \kappa^+ = \aleph_{\omega_4+\omega_3+1}$$

(2) Si $\lambda = \aleph_{\omega^2}$, entonces $\mathrm{cf}\,(\kappa) = \omega_3 < \aleph_{\omega^2} = \lambda < \aleph_\alpha$. Luego,

$$\kappa^\lambda = \kappa^+ = \aleph_{\omega_4+\omega_3+1}$$

(3) Si $\lambda = \aleph_{\omega_5}$, entonces $\aleph_{\omega_4+\omega_3+1} \leqslant \aleph_{\omega_5}$. Luego,

$$\kappa^\lambda = \lambda^+ = (\aleph_{\omega_5})^+ = \aleph_{\omega_5+1}$$

Ejercicio 210. *Utilizando la hipótesis generalizada del continuo, hallar los siguientes cardinales:*

$$\aleph_{\omega_2}^{\aleph_0}, \qquad \aleph_{\omega\cdot 2}^{\aleph_\omega}, \qquad \aleph_{\omega_2}^{\aleph_{\omega\cdot 3}}$$

Se tiene que $\mathrm{cf}\,(\aleph_{\omega\cdot 2}) = \mathrm{cf}\,(\omega \cdot 2) = \omega$.

Teniendo presente que, $\mathrm{cf}\,(\aleph_{\omega\cdot 2}) \leqslant \aleph_0 < \aleph_{\omega\cdot 2}$, se deduce que $\aleph_{\omega\cdot 2}^{\aleph_0} = \aleph_{\omega\cdot 2+1}$.

Como $\mathrm{cf}\,(\aleph_{\omega\cdot 2}) = \omega < \aleph_\omega < \aleph_{\omega\cdot 2}$, resulta que $\aleph_{\omega\cdot 2}^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega\cdot 2+1}$.

Finalmente, puesto que $\aleph_{\omega\cdot 2} < \aleph_{\omega\cdot 3}$ se concluye que $\aleph_{\omega\cdot 2}^{\aleph_{\omega\cdot 3}} = \aleph_{\omega\cdot 3+1}$.

Ejercicio 211. *Sean a un conjunto y α un ordinal. Notemos*

$$a^{\overset{\alpha}{\smile}} = \bigcup_{\beta\in\alpha} {}^\beta a$$

Probar mediante dos métodos distintos que

$$|\aleph_\alpha^{\overset{\omega}{\smile}}| = \aleph_\alpha$$

<u>Primer método.</u>

Por definición, $\aleph_\alpha^{\overset{\omega}{\smile}} = \bigcup_{n\in\omega} {}^n\aleph_\alpha$. Como $\aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha^{\overset{\omega}{\smile}}$, resulta que

$$\aleph_\alpha = |\aleph_\alpha| \leqslant |\aleph_\alpha^{\overset{\omega}{\smile}}|$$

Luego,

$$\begin{aligned} \aleph_\alpha \leqslant |\aleph_\alpha^{\overset{\omega}{\smile}}| &= \sum_{n\in\omega} |{}^n\aleph_\alpha| = 1 + \sum_{0<n<\omega} |{}^n\aleph_\alpha| \\ &= 1 + \sum_{0<n<\omega} \aleph_\alpha = 1 + \aleph_0 \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \end{aligned}$$

Segundo método. Como $\aleph_\alpha \preceq \aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\omega}}$, basta dar una inmersión de $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\omega}}$ en $\aleph_\alpha$.

Sea f una aplicación biyectiva de $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ en $\aleph_\alpha - \{0\}$. Entonces, definimos una aplicación g de $\bigcup_{n\in\omega} {}^n a$ en $\aleph_\alpha$ por recursión sobre n, como sigue:

- Si $h \in^0 \aleph_\alpha$, entonces $h = 0$. Definimos $g(h) = 0$.
- Sea $n \in \omega$ y supongamos definida g sobre todo elemento de ${}^n\aleph_\alpha$. Sea $h \in^{n+1} \aleph_\alpha$. Entonces, definimos $g(h) = f(g(h \restriction n), h(n))$.

  Veamos que g es inyectiva. Concretamente vamos a probar que

  $$\forall k \in \omega \ (g \restriction \bigcup\{{}^n\aleph_\alpha :\ 0 \leqslant n < k\} \ \text{ es inyectiva})$$

  Por inducción débil en ω sobre la variable k.

  $\boxed{k = 0}$

  Trivial, ya que $\bigcup\{{}^n\aleph_\alpha :\ 0 \leqslant n < 0\} = 0$ y $g \restriction 0$ es inyectiva.

  $\boxed{k \to k+1}$

  Sea $k \in \omega$ y supongamos que $g \restriction \bigcup\{{}^n\aleph_\alpha :\ 0 \leqslant n < k\}$ es inyectiva. Sean $h, h' \in \bigcup\{{}^n\aleph_\alpha :\ 0 \leqslant n < k+1\}$ tales que $g(h) = g(h')$. Sean $p, q \leqslant k$ tales que $h \in^p \aleph_\alpha$ y $h' \in^q \aleph_\alpha$.

  - Si $p = 0$, entonces $g(h) = 0 = g(h')$. Luego, $h' = 0$ y $q = 0$ (análogamente, si $q = 0$, entonces $p = 0$).
  - Supongamos que $0 < p, q \leqslant k$. Sean r, s tales que $p = r+1$ y $q = s+1$. Entonces
    $$\left.\begin{array}{l} g(h) = f(g(h \restriction r), h(r)) \\ g(h') = f(g(h' \restriction s), h'(s)) \end{array}\right\}$$
    Como f es inyectiva, resulta que
    $$g(h \restriction r) = g(h' \restriction s) \wedge h(r) = h'(s)$$
    Pero $h \restriction r$ y $h' \restriction s$ pertenecen al conjunto $\bigcup\{{}^n\aleph_\alpha :\ 0 \leqslant n < k\}$ y la restricción de g a ese conjunto es inyectiva. Luego, $h \restriction r = h' \restriction s$. Por tanto, $r = s$. Además, $h(r) = h'(s)$ y, por tanto, $h = h'$.

Ejercicio 212. *Sean a un conjunto y κ un cardinal. Notemos*

$$\mathbf{P}_{<\kappa}(a) = \{x \subseteq a :\ |x| < \kappa\}$$

Probar que $|\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)| = \aleph_\alpha$.

Trivialmente, $\aleph_\alpha \preceq \mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)$ ya que la aplicación $f : \aleph_\alpha \to \mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)$ definida por $f(\beta) = \{\beta\}$ es inyectiva.

Veamos que $\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha) \preceq \aleph_\alpha$.

Para ello, en primer lugar definimos una aplicación $f : \mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\omega}}$ como sigue:

- Sea $a \in \mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)$ tal que $|a| = n \in \omega$. Como $a \subseteq \aleph_\alpha$, resulta que a está bien ordenado por el orden inducido. Sea h_a el único isomorfismo de n en a, con los respectivos órdenes usuales. Entonces, definimos $f(a) = h_a$. La aplicación f es inyectiva, ya que
$$f(a) = f(b) \Longrightarrow h_a = h_b \Longrightarrow a = b$$

Según el ejercicio anterior $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\omega}} \sim \aleph_\alpha$. Sea g una aplicación inyectiva de $\aleph_\alpha^{\underset{\smile}{\omega}}$ en $\aleph_\alpha$. En tal situación, $g \circ f$ es una aplicación inyectiva de $\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)$ en $\aleph_\alpha$.

Ejercicio 213. *Sea $\alpha \in$ **Ord**. Consideremos el conjunto*

$$a = \{f : \ dom(f) \subseteq \aleph_\alpha \wedge |dom(f)| < \omega \wedge rang(f) \subseteq \aleph_\alpha\}$$

Probar que $|a| = \aleph_\alpha$.

- Veamos que $\aleph_\alpha \leqslant |a|$.

  Consideremos la aplicación f de $\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)$ en a definida así:
  $$f(y) = y \times \{0\}, \ \text{ para cada } \ y \in \mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)$$
  Trivialmente, la aplicación f es inyectiva. Luego,
  $$\aleph_\alpha = |\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)| \leqslant |a|$$

- Veamos que $|a| \leqslant \aleph_\alpha$.

  Se verifica que $a \subseteq \mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha)$.
  Como $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \sim \aleph_\alpha$, resulta que
  $$|\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha)| = |\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha)| = \aleph_\alpha$$
  Por tanto, $|a| \leqslant |\mathbf{P}_{<\aleph_0}(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha)| = \aleph_\alpha$.

Ejercicio 214. *Sean $\alpha, \beta \in$ **Ord**. Consideremos el conjunto*

$$a(\alpha, \beta) = \{f : \ dom(f) \subseteq \aleph_\alpha \wedge |dom(f)| < \omega \wedge rang(f) \subseteq \aleph_\beta\}$$

Probar que $|a(\alpha, \beta)| = \ máx\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$.

- Se verifica que $a(\alpha,\beta) \subseteq \aleph_\alpha \times \aleph_\beta$. Luego,

$$|a(\alpha,\beta)| \leqslant |\aleph_\alpha \times \aleph_\beta| = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \text{máx}\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$$

- Sea $\ggg = \text{máx}\{\alpha,\beta\}$. Entonces, $a(\aleph_\alpha,\aleph_\beta) \subseteq a(\aleph_\ggg,\aleph_\ggg)$. Luego,

$$|a(\aleph_\alpha,\aleph_\beta)| \leqslant |a(\aleph_\ggg,\aleph_\ggg)| \overset{ej.\ ant.}{=} \aleph_\ggg = \text{máx}\{\aleph_\alpha,\aleph_\beta\}$$

Ejercicio 215. *Probar en* **ZFC** *que si* $\alpha,\beta \in$ **Ord**, *entonces*

(1) $\forall n \in \omega\ (\aleph_n^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \cdot \aleph_n)$.

(2) $\forall n \in \omega\ (\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n})$.

Probemos ambos resultados simultáneamente, por inducción débil en ω.

$\boxed{n = 0}$

Se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \aleph_0 \cdot 2^{\aleph_\alpha} = \text{máx}\{\aleph_0, 2^{\aleph_\alpha}\} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_0^{\aleph_\alpha} \\ \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha = \text{máx}\{\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}, \aleph_\alpha\} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+0}^{\aleph_\beta} \end{array}\right\}$$

$\boxed{n \to n+1}$

Sea $n \in \omega$ tal que $\aleph_n^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \cdot \aleph_n$ y $\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_\alpha} \cdot \aleph_{\alpha+n}$. Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} \aleph_{n+1}^{\aleph_\alpha} = \aleph_n^{\aleph_\alpha} \cdot \aleph_{n+1} \overset{h.i.}{=} \aleph_n \cdot 2^{\aleph_\alpha} \cdot \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_\alpha} \cdot \aleph_{n+1} \\ \\ \aleph_{\alpha+n+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n+1} \overset{h.i.}{=} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n} \cdot \aleph_{\alpha+n+1} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n+1} \end{array}\right\}$$

Ejercicio 216. *(***ZFC**$^-$*) Probar que* $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \gimel(\aleph_\omega) \cdot \gimel(\aleph_1)$.

Se verifica que:

$$\begin{array}{l} \gimel(\aleph_\omega) = {\aleph_\omega}^{\text{cf}\,(\aleph_\omega)} = {\aleph_\omega}^{\text{cf}\,(\omega)} = {\aleph_\omega}^{\aleph_0} \\ \gimel(\aleph_1) = {\aleph_1}^{\text{cf}\,(\aleph_1)} = {\aleph_1}^{\aleph_1} \end{array}$$

Hemos de ver que $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot {\aleph_1}^{\aleph_1}$.

- Veamos que $\aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot {\aleph_1}^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_1}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \aleph_\omega^{\aleph_0} \leqslant {\aleph_\omega}^{\aleph_1} \\ \aleph_1^{\aleph_1} \leqslant {\aleph_\omega}^{\aleph_1} \end{array}\right\} \implies \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot {\aleph_1}^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_1}$$

- Veamos que $\aleph_\omega^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot {\aleph_1}^{\aleph_1}$. En efecto: distingamos dos casos.

  Caso $1^{\underline{o}}$: $\exists p \in \omega\ (\aleph_\omega \leqslant \aleph_p^{\aleph_1})$.

  En este caso, $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_p^{\aleph_1}$. Luego,

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_p^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_p \leqslant \aleph_1^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}$$

  Caso $2^{\underline{o}}$: $\forall p \in \omega\ (\aleph_\omega > \aleph_p^{\aleph_1})$.

  En este caso, como $\mathrm{cf}\,(\aleph_\omega) = \omega < \aleph_1$, resulta que

$$\aleph_\omega^{\aleph_1} = \gimel(\aleph_\omega) = \aleph_\omega^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot \aleph_1^{\aleph_1}$$

Ejercicio 217. *(***ZFC**$^-$*) Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\alpha < \omega_1$. Probar que*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_1} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$$

Por una parte, se tiene que si $\alpha \in$ **Ord** es tal que $\alpha < \omega_1$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \aleph_\alpha^{\aleph_0} \leqslant {\aleph_\alpha}^{\aleph_1} \\ 2^{\aleph_1} \leqslant {\aleph_\alpha}^{\aleph_1} \end{array}\right\} \implies \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_1}$$

Veamos que $\aleph_\alpha^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$. Probémosle por inducción fuerte en ω_1.

$\boxed{\alpha = 0}$

Se verifica que: $\aleph_0^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

$\boxed{\alpha = 1}$

Se verifica que: $\aleph_1^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \leqslant \aleph_0^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$.

$\boxed{\alpha > 1 \wedge\ < \alpha \to \alpha}$

Sea $\alpha > 1$, $\alpha < \omega_1$ tal que el resultado es cierto para todo $\beta < \alpha$. Veamos que también vale el resultado para α.

Distingamos dos casos.

Caso $1^{\underline{o}}$: $\exists \beta < \alpha\ (\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta^{\aleph_1})$.

En este caso, $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\beta^{\aleph_1}$. Luego,

$$\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\beta^{\aleph_1} \stackrel{h.i.}{=} \aleph_\beta^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$$

Caso $2^{\underline{o}}$: $\forall \beta < \alpha\ (\aleph_\alpha > \aleph_\beta^{\aleph_1})$.

- ⋆ Si α es un ordinal sucesor, entonces $\mathrm{cf}\ (\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha > \aleph_1$. Luego,

$$\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$$

- ⋆ Si α es un ordinal límite, entonces $\mathrm{cf}\ (\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ (ya que α es un ordinal numerable). Luego, $\mathrm{cf}\ (\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_1$ y, por tanto,

$$\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \gimel(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\ (\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$$

Ejercicio 218. (**ZFC**) *Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\forall \beta\ (2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+\alpha})$. Probar que α es un número natural.*

Supongamos lo contrario; es decir que $\alpha \geqslant \omega$. Sea $\ggg = \text{mín}\{\beta :\ \beta + \alpha > \alpha\}$. Se verifica:

(a) $\ggg \neq 0$.

(b) $\ggg$ no es un ordinal sucesor. En efecto: supongamos que existiera $\delta \in$ **Ord** tal que $\ggg = \delta + 1$. Entonces,

$$\ggg + \alpha > \alpha \Longrightarrow (\delta + 1) + \alpha > \alpha \Longrightarrow \delta + (1 + \alpha) > \alpha \Longrightarrow \delta + \alpha > \alpha$$

Lo que contradice que $\ggg$ sea el mínimo del conjunto citado.

(c) $\ggg \leqslant \alpha$, ya que $\alpha < \alpha + \alpha \Longrightarrow \alpha \in \{\beta :\ \beta + \alpha > \alpha\}$.

De (a), (b), (c) resulta que $\ggg$ es un ordinal límite. Notemos $\kappa = \aleph_{\ggg + \ggg}$. Se tiene que κ es un cardinal singular, ya que

$$\mathrm{cf}\ (\kappa) = \ \mathrm{cf}\ (\aleph_{\ggg+\ggg})\ \mathrm{cf}\ (\ggg) \leqslant \ggg < \kappa$$

Veamos que $\forall \lambda \in \mathbf{Cn}\ (\aleph_{\ggg} \leqslant \lambda < \kappa \Longrightarrow 2^\lambda = 2^{\aleph_{\ggg}})$.

– Sea $\lambda \in \mathbf{Cn}$ tal que $\aleph_{\ggg} \leqslant \lambda < \kappa$. Como $\kappa = \aleph_{\ggg+\ggg}$, existe β $(0 \leqslant \beta < \ggg)$ tal que $\lambda = \aleph_{\ggg+\beta}$. Entonces, $\beta < \ggg \Longrightarrow \beta + \alpha = \alpha$. Luego,

$$\left.\begin{array}{l} 2^\lambda = 2^{\aleph_{\ggg+\beta}} = \aleph_{(\ggg+\beta)+\alpha} = \aleph_{\ggg+\alpha} \\ 2^{\aleph_{\ggg}} = \aleph_{\ggg+\alpha} \end{array}\right\}$$

Por el teorema de Bukovsky–Hechler, se deduciría que $2^\kappa = 2^{\aleph_{\ggg}}$. Pero

$$2^{\aleph_{\ggg}} = \aleph_{\ggg+\alpha} < \aleph_{\ggg+\ggg+\alpha} = 2^{\aleph_{\ggg+\ggg}}$$

Lo que es una contradicción.

Ejercicio 219. *(**ZFC**) Diremos que un cardinal es débilmente inaccesible si es un cardinal límite, no numerable y regular. Se pide:*

(1) *Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\aleph_\alpha$ es débilmente inaccesible. Probar que α es un cardinal y $\alpha = \aleph_\alpha$.*

(2) *Probar que existe un ordinal α tal que $\alpha = \aleph_\alpha$ y, en cambio, α no es un cardinal débilmente inaccesible.*

(1) Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\aleph_\alpha$ es débilmente inaccesible. Supongamos que $\alpha \neq \aleph_\alpha$. Entonces, $\alpha < \aleph_\alpha$. Como $\aleph_\alpha$ es un cardinal límite, resulta que α es un ordinal límite. Por tanto, $\mathrm{cf}\,(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}\,(\alpha) \leqslant \alpha < \aleph_\alpha$. Lo que contradice que $\aleph_\alpha$ sea regular.

(2) Teniendo presente que la función $\aleph$ es normal, por el teorema de Veblen existirá el menor punto fijo, α_0, de $\aleph$.

De la prueba del teorema citado, resulta que si $g : \mathbb{N} \to$ **Ord** está caracterizada por las condiciones

$$g(0) = 0 \ \text{ y } \ \forall n \in \omega \ (g(n+1) = \aleph(g(n)) = \aleph_{g(n)})$$

entonces $\alpha_0 = \sup \{g(n) : \ n \in \omega\}$.

Obviamente $\mathrm{cf}\,(\alpha_0) = \omega$. Además, α_0 es un ordinal límite ya que

$$\beta < \alpha_0 \Longrightarrow \exists p \in \omega(\beta < \aleph_{g(p)}) \Longrightarrow \exists p \in \omega(\beta^+ \leqslant \aleph_{g(p)} \leqslant \aleph_{g(p+1)} < \aleph_{\alpha_0})$$

Como α_0 es un ordinal límite, resulta que $\mathrm{cf}\,(\aleph_{\alpha_0}) = \mathrm{cf}\,(\alpha_0) = \omega$. Es decir, $\aleph_{\alpha_0}$ no es regular y, por tanto, no es débilmente inaccesible

Ejercicio 220. *(**ZFC**) Sea κ un cardinal regular no numerable. Supongamos que*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{In} \ (\lambda < \kappa \wedge \mu < \kappa \Longrightarrow \lambda^\mu < \kappa)$$

Probar que κ es un cardinal débilmente inaccesible.

Sea $\alpha \in$ **Ord** tal que $\kappa = \aleph_\alpha$ es un cardinal verificando las condiciones del enunciado. Basta probar que $\aleph_\alpha$ es un cardinal límite; es decir, que α es un ordinal límite.

- Supongamos que α no es un ordinal límite. Como $\alpha \neq 0$, existirá $\beta \in$ **Ord** tal que $\alpha = \beta + 1$. Entonces, $\aleph_\beta < 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\beta^{\aleph_\beta}$. Luego,

$$\aleph_\alpha = \aleph_{\beta+1} \leqslant \aleph_\beta^{\aleph_\beta}$$

Por tanto, se verificaría que

$$\aleph_\beta < \aleph_\alpha \ \wedge \ \aleph_\beta^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha$$

Lo que contradice el supuesto de partida.

Ejercicio 221. *(***HGC***) Sea κ un cardinal débilmente inaccesible. Probar que:*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{In}\ (\lambda < \kappa \wedge \mu < \kappa \Longrightarrow \lambda^\mu < \kappa)$$

Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$ tal que $\kappa = \aleph_\alpha$ es un cardinal débilmente inaccesible.

- En primer lugar, veamos que si $\beta \in \mathbf{Ord}$ es tal que $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$, entonces $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$.
  - En efecto: como $\beta < \alpha$ y α es un ordinal límite, resulta que $\beta + 1 < \alpha$. Luego, $\aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$. Como $\aleph_{\beta+1} = 2^{\aleph_\beta}$, se deduce que $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$.

  Sean λ, μ cardinales estríctamente menores que κ. Sean $\beta, \ggg$ ordinales tales que $\lambda = \aleph_\beta$ y $\mu = \aleph_{\ggg}$. Entonces, $\beta < \alpha$, $\ggg < \alpha$ y, por tanto,

$$\aleph_\beta^{\aleph_{\ggg}} \leqslant \aleph_\beta^{\aleph_\alpha} \overset{\beta<\alpha}{=} 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$$

12.7. Problemas propuestos

Ejercicio 12.1. Sea F una función normal y α un ordinal límite. Probar que

$$\mathrm{cf}\,(F(\alpha)) = \mathrm{cf}\,(\alpha)$$

¿Vale el resultado para ordinales sucesores?

Indicación: Pruébese que la aplicación $g = F \upharpoonright \alpha$ es una aplicación cofinal y no decreciente de α en $F(\alpha)$.

Ejercicio 12.2. Sea $\alpha \in \mathbf{Ord}$. Probar que

$$\mathrm{cf}\,(\alpha) = \text{mín}\{\beta \in \mathbf{Ord} : \exists a \subseteq \alpha\ (a \text{ cofinal en } \alpha \ \wedge \ \text{t.o.}(\langle a, \in_a \rangle) = \beta)\}$$

Indicación: Sea α_0 el mínimo del conjunto citado. Para demostrar que $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \alpha_0$, sea $a \subseteq \alpha$ tales que a es cofinal en α y $\text{t.o.}(\langle a, \in_a \rangle) = \alpha_0$. Si $f : \langle \alpha_0, \in_{\alpha_0} \rangle \cong \langle a, \in_a \rangle$, pruébese que la aplicación f es cofinal de α_0 en α. Para probar que $\alpha_0 \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$, sea $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ cofinal. Considérense $b = \{\ggg < \mathrm{cf}\,(\alpha) : \forall \delta < \ggg \ (f(\delta) < f(\ggg))\}$ y $a = f[b]$, y pruébese que a es cofinal en α y $\text{t.o.}(\langle a, \in_a \rangle) \leqslant \mathrm{cf}\,(\alpha)$.

Ejercicio 12.3. (**ZFC**) Sean κ y λ cardinales infinitos. Probar que son equivalentes las condiciones siguientes:

(1) $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$.

(2) κ es la unión de los elementos de un conjunto de cardinal menor o igual que λ y tal que todos sus elementos tienen cardinal estríctamente menor que κ.

(3) κ es la suma de una familia cuyo conjunto de índices tiene cardinal menor o igual que λ y tal que todos los conjuntos de la familia tienen cardinal estríctamente menor que κ.

Indicación: ($\mathbf{1}$) $\Longrightarrow$ ($\mathbf{2}$) Si $f : \mathrm{cf}\,(\kappa) \to \kappa$ es cofinal, considérese $a = f[\mathrm{cf}\,(\kappa)]$ y pruébese que satisface los requisitos exigidos y que $\kappa = \bigcup a$.

($\mathbf{2}$) $\Longrightarrow$ ($\mathbf{3}$) Sea $\kappa = \bigcup\{a_i : i < \mu \leqslant \lambda\}$ tal que $\forall i < \mu\ (|a_i| < \kappa)$. Considérese $b_i = a_i - \bigcup\{a_j : j < i\}$ y pruébese que $\kappa = \sum\limits_{j<\mu} |b_j|$.

($\mathbf{3}$) $\Longrightarrow$ ($\mathbf{1}$) Sea $\kappa = \sum\limits_{i<\mu\leqslant\lambda} \kappa_i$ tal que $\forall i < \mu\ (\kappa_i < \kappa)$. Pruébese que $\mathrm{cf}\,(\kappa) \leqslant \mu$.

Ejercicio 12.4. (**ZFC**) Probar que son propias las clases

$$\mathbf{Reg} = \{\kappa \in \mathbf{In} :\ \kappa \text{ es regular}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{Sing} = \{\kappa \in \mathbf{In} :\ \kappa \text{ es singular}\}$$

Indicación: Pruébese que dichas clases no están acotadas superiormente en $\langle \mathbf{Ord}, \in \rangle$.

Ejercicio 12.5. (**ZFC**) Probar que $\aleph_\omega$ es el primer cardinal infinito singular.

Indicación: Pruébese que $\aleph_\omega$ es unión de $\aleph_0$ conjuntos, cada uno de los cuales tiene cardinal estríctamente menor que $\aleph_\omega$.

Ejercicio 12.6. (**ZFC**) Sea κ un cardinal infinito no numerable. Probar que si $\mathrm{cf}\,(\kappa) = \omega$, entonces $\kappa \neq 2^{\aleph_0}$.

Indicación: Téngase presente que si κ es un cardinal infinito, entonces $\kappa < \mathrm{cf}\,(2^\kappa)$.

Ejercicio 12.7. (**ZFC**) Probar que si α es un ordinal límite tal que $\alpha \neq \aleph_\alpha$, entonces $\aleph_\alpha$ es un cardinal singular.

Ejercicio 12.8. Probar que para cada $\alpha \in \mathbf{Ord}$ existe una aplicación cofinal de ω en $\alpha + \omega$. Deducir que $\mathrm{cf}\,(\aleph_{\alpha+\omega}) = \omega$.

Ejercicio 12.9. Admitiendo la hipótesis generalizada del continuo, hallar $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, siendo α un ordinal sucesor y $\beta \in \mathbf{Ord}$ tal que $\beta < \alpha$.

Ejercicio 12.10. Probar que si $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$, entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Indicación: Téngase presente que $\aleph_\omega$ es un cardinal singular y que si para un cardinal singular κ existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leqslant \lambda^{\mathrm{cf}\,(\kappa)}$, entonces $\kappa^{\mathrm{cf}\,(\kappa)} = \lambda^{\mathrm{cf}\,(\kappa)}$.

Ejercicio 12.11. (**ZFC**) Sea $\alpha \in \textbf{Ord}$ tal que $\alpha < \omega_2$. Probar que $\aleph_\alpha^{\aleph_2} = \aleph_\alpha^{\aleph_1} \cdot 2^{\aleph_2}$.

Ejercicio 12.12. (**ZFC**) Sean $\alpha, \beta \in \textbf{Ord}$ tales que α es límite y $\aleph_\beta < \operatorname{cf}(\aleph_\alpha)$. Probar que

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\ggg<\alpha} \aleph_{\ggg}^{\aleph_\beta}$$

Indicación: Téngase presente que si $\aleph_\beta < \operatorname{cf}(\aleph_\alpha)$, entonces

$${}^{\aleph_\beta}\aleph_\alpha = \bigcup\{{}^{\aleph_\beta}\delta :\ \delta < \aleph_\alpha\}$$

Ejercicio 12.13. (**ZFC**) Sean κ un cardinal límite y λ un cardinal infinito. Probar que si $\lambda < \operatorname{cf}(\kappa)$, entonces

$$\kappa^\lambda = \bigcup\{\mu^\lambda :\ \mu < \kappa\}$$

Indicación: Téngase presente el ejercicio anterior.

Ejercicio 12.14. (**ZFC**) Probar que

$$\forall n \in \omega\ \forall \alpha, \beta \in \textbf{Ord}\ (\alpha \leqslant \beta + n \rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha)$$

Indicación: Pruébese por inducción débil en ω y téngase presente la fórmula recursiva de Hausdorff.

Ejercicio 12.15. Probar que en **ZFC** son equivalentes:

(1) La hipótesis generalizada del continuo.

(2) $\forall \alpha \in \textbf{Ord}\ (\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$.

(3) $\forall \alpha \in \textbf{Ord}\ (\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\alpha+2}^{\aleph_\alpha})$.

Bibliografía

[1] BARWISE, J., MOSS, L. *Vicious Circle. On the Mathematics of Non–Wellfounded Phenomena*. CSLI Publications, Stanford (1996).

[2] BERNAYS, P. *Axiomatic Set Theory*. North Holland, Amsterdan (1968).

[3] BLYTH, T.S. *Set Theory and abstract Algebra*. Longman Mathematical Texts, Londres (1975).

[4] BOURBAKI, N. *Elementos de historia de las Matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid (1972).

[5] CROSSLEY, J.N.; ASH, C.J. Y OTROS *¿Qué es la Lógica Matemática?*. Ed. Tecnos, Madrid (1983).

[6] DEVLIN, K. *The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory*. Springer–Verlag, New York (1993).

[7] EISENBERG, M. *Axiomatic Theory of Sets and Classes*. Holt, Rinehart and Winston, Inc, New York (1971).

[8] ENDERTON, H.B. *Elements of Set Theory*. Academic Press, New York (1977).

[9] FEJER, P.A.; SIMOVICI, D.A. *Mathematical Foundations of Computer Science. Vol I: Sets, Relations and Induction*. Springer–Verlag, (1990).

[10] FERNÁNDEZ–MARGARIT, A. *Teoría de Conjuntos* en "Lógica Formal. Orígenes, métodos y aplicaciones". Ed. Kronos, Sevilla (1995), pp. 67–86.

[11] FREGE, G. *Fundamentos de la Aritmética*. Ed. Laia, Barcelona (1973).

[12] GRATTAN–GUINNESS, I. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910. Una introducción histórica*. Alianza Editorial, Madrid (1980).

[13] HALMOS P.R. *Naive Set Theory*. Springer–Verlag, (1970).

[14] HRBACEK, K.; JECH, T. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker, (1984).

[15] JECH, T.J. *The Axiom of Choice*. North–Holland, Amsterdan (1973).

[16] JECH, T.J. *Set Theory*. Academic Press, New York (1978).

[17] JOHNSTONE, P.T. *Notes on Logic and Set Theory*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[18] KLINE, M. *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Siglo Veintiuno de España Editores, S.A. (1985).

[19] LEVY, A. *Basic Set Theory*. Springer–Verlag (1979).

[20] MACHOVER, M. *Set theory, logic and their limitations*. Cambridge University Press, Cambridge (1996).

[21] MULLER, M. *Sets and Classes*. North Holland, Amsterdan (1968).

[22] PEANO, G. *Los principios de la Aritmética*. Cásicos El Basilisco. Pentalfa Ediciones, Oviedo (1979).

[23] PLA, J. *Llions de Lgica Matemtica* (Primera i Segona Part). PPU, Barcelona (1991)

[24] PÉREZ–JIMÉNEZ, M.J. *Teoría de clases y conjuntos: Una introducción del cuerpo de los números reales*. Edunsa, Barcelona (1988).

[25] ROITMAN, J. *Introduction to Set Theory*. Wiley and Sons, (1990).

[26] RUBIN, H.; RUBIN, J.E. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. North–Holland, Amsterdan (1985).

[27] RUÍZ, J. *Teoría de Conjuntos*. Apuntes manuscritos.

[28] SIGLER, L.E. *Exercises in Set Theory*. Van Nostrand, New York (1972).

[29] TAKEUTI, G.; ZARING, W.M. *Introduction to Axiomatic Set Theory*. Springer Verlag, New York (1970).

[30] VAUGHT, R.L. *Set Theory. An introduction*. Birkhuser, (1985).