

Algunas notas sobre mosaicos de Penrose.

J. Cáceres[†], M. E. Gegúndez[‡], M. Maestre[‡], A. Márquez^{*}

[†] Depto. de Estadística y Matemática Aplicada, Universidad de Almería, jcaceres@ual.es

[‡] Depto. de Matemáticas, Universidad de Huelva, {gegundez,maestre}@uhu.es

^{*} Depto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Sevilla, almar@us.es

Resumen

En este trabajo repasamos algunos de los conceptos básicos de la teoría de los mosaicos, los relacionamos con los diagramas de Voronoi, probando que aquellos (o subdivisiones de los mismos) pueden ser generados como el diagrama de Voronoi de una nube de puntos adecuadamente distribuidos dentro del mosaico. Además abordamos el estudio de la coloración de los mosaicos de Penrose del “Dardo y la Cometa” y de los rombos, probando que ambos son 3-coloreables.

1. Introducción y conceptos básicos.

Un *mosaico* plano es una familia numerable de conjuntos cerrados denominados *losetas* o *teselas* que recubren completamente el plano sin huecos ni superposiciones. Sin embargo, esta definición es demasiado general y admite losetas con formas y propiedades inusuales; para evitarlo exigiremos dos condiciones adicionales con las que eliminaremos los casos indeseados. La primera condición es que las losetas serán homeomorfas a discos cerrados y la segunda es que sólo habrá un número finito de

losetas distintas en un mosaico; considerando que dos losetas son iguales si son copias isométricas. Los representantes de las distintas losetas se denominan *protolasetas* y el conjunto de todas las protolasetas de un mosaico es su *protoconjunto*.

Un *parche* en un mosaico es un conjunto finito de losetas, cuya unión es un disco topológico, entendiendo como tal cualquier conjunto cuya frontera es una curva cerrada simple. Por otro lado decimos que un conjunto de losetas cubre un subconjunto del plano si admite un parche que lo contiene. Un *entorno* de un vértice en un mosaico es el mínimo parche que lo cubre y el conjunto de todos los entornos de los vértices de un mosaico es el *atlas* del mosaico.

Un mosaico es *periódico* si existe una traslación que lo deja invariante y *no periódico* en otro caso. Si consideramos ahora un conjunto determinado de protolasetas puede ocurrir que los mosaicos realizados con ellas sean todos periódicos, periódicos y no periódicos y por último, también puede ocurrir que con ese conjunto de protolasetas sólo se tesele el plano de forma no periódica en cuyo caso diremos que el conjunto de protolasetas es *aperiódico*.

El interés por las losetas aperiódicas

comenzó hace relativamente poco tiempo; en 1961, H. Wang conjeturó que no existían tales conjuntos [16], pero ya en 1966 Berger [2], descubrió el primer mosaico aperiódico con 20146 losetas; número que rápidamente redujo a 104. Posteriormente, en 1968, Knuth [7] consiguió un nuevo conjunto de 92 protolostas.

La reducción más importante la realizó en 1971 Robinson [13] hallando un conjunto con tan sólo 6 losetas que básicamente son cuadrados con modificaciones en sus esquinas. Finalmente entre 1973 y 1974, Roger Penrose descubrió tres conjuntos aperiódicos de losetas [10]. El primero de ellos, P_1 , consta de 6 losetas que se basan en rombos, pentágonos regulares y estrellas de cinco puntas con ciertas modificaciones en las aristas. El segundo conjunto de Penrose, P_2 , es el más conocido de los conjuntos aperiódicos de losetas y está formado por tan sólo las dos losetas, *dardo* y *cometa*, de la Figura 1, donde $\theta = \pi/5 \text{ rad.}$ y τ es la razón áurea. Y por último, el conjunto denominado P_3 que está formado por los rombos también de la Figura 1. Ambos conjuntos de losetas se encuentran entre los más interesantes debido en gran parte por ser los conjuntos de protolostas más pequeños que se conocen.

Habitualmente las modificaciones en las aristas, que obligan a las teselas a unirse de una determinada forma, son sustituidas por ciertas condiciones o reglas combinatorias denominadas *reglas de emparejamiento* y generalmente se definen mediante etiquetas en los vértices y en las aristas que han de coincidir para que dos aristas puedan identificarse.

Los Mosaicos de Penrose (y otros) verifican propiedades muy interesantes como

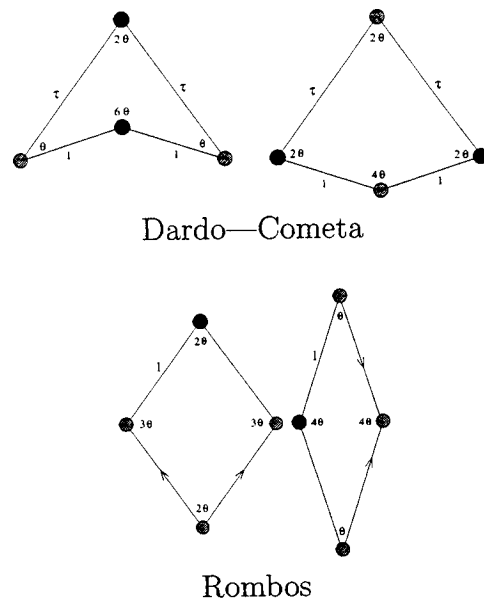


Figura 1: Mosaicos de Penrose.

por ejemplo, que a pesar de haber una cantidad no numerable de mosaicos distintos, se cumple que cualquier trozo finito de ellos se repite infinitamente en cualquiera de los restantes mosaicos. Esta propiedad se denomina *isomorfismo local*. En general podemos decir que los mosaicos de Penrose tienen una estructura muy regular localmente pero bastante irregular a nivel global.

Otra propiedad muy importante de los mosaicos es la *composición*, consiste en la capacidad que tienen algunos mosaicos de unir sus losetas para construir losetas semejantes a las primeras (y con reglas de emparejamiento equivalentes) pero más grandes, de forma que obtenemos un conjunto de protolostas equivalente al original. Esta propiedad es una de las más utilizadas en la demostración de la aperiodicidad de un protoconjunto siendo la herramienta básica en la demostración del siguiente resultado.

Teorema 1 ([3]) *Si un mosaico tiene una única composición que lo deja invariante, entonces es un mosaico no periódico. Así, si existe una única composición actuando sobre cualquier mosaico de un conjunto de losetas, entonces ese conjunto es aperiódico.*

Referencias obligadas en este tema son los textos de Grünbaum y Shepard [3], de Gardner [6] y Senechal [14].

2. Nubes de Penrose

Los mosaicos de Penrose modelizan en parte la estructura de cierto tipo de cuasicristales pero se hace necesario encontrar, de la forma más rápida y eficiente posible, otros tipos de losetas que puedan servir como modelos matemáticos para nuevos casos. Aplicando los diagramas de Voronoi (ver [12]), hemos desarrollado en [9], los resultados necesarios para generar una cantidad infinita de losetas aperiódicas, a partir de un conjunto dado. Además, las nuevas losetas pueden utilizarse como puntos de partida para generar otras.

Dado un conjunto numerable de puntos P del plano, la región de Voronoi $V(p)$ asociada a uno cualquiera p está formada por todos los puntos del plano mas cercanos a p que a ningún otro punto de P , es decir:

$$V(p) = \{x \in \mathbf{R}^2 / \min_{q \in P} \|q - x\| = \|p - x\|\}.$$

El conjunto de regiones de Voronoi asociadas a los puntos de P constituye una subdivisión del plano que denotaremos por $Vor(P)$ y que llamamos el diagrama de Voronoi de P .

Si sobre el dardo y la cometa (rombos) dibujamos una cantidad finita de puntos y

teselamos el plano, obtenemos un conjunto infinito de puntos que denominaremos *nube de Penrose*. Si calculamos el diagrama de Voronoi de esta nube comprobaremos que se verifica el siguiente resultado (ver [9]).

Teorema 2 *El diagrama de Voronoi de una nube de Penrose es un mosaico no periódico.*

Este teorema es válido también en un contexto más amplio. Además, se verifica el siguiente resultado (ver [9]).

Teorema 3 *Dado un diagrama de Voronoi de una nube de Penrose es posible dar un conjunto de reglas de emparejamiento para sus regiones tal que cualquier mosaico que se construya con ellas siguiendo tales reglas induce un mosaico de Penrose. Recíprocamente, si dos conjuntos de regiones inducidas por dos mosaicos de Penrose coinciden, las reglas de emparejamiento construidas para ellos también coinciden.*

En lo que sigue, las losetas obtenidas utilizando tanto la construcción como las reglas de emparejamiento anteriores se denominarán *losetas Voronoi-Penrose*.

Nos planteamos ahora si es posible elegir adecuadamente los puntos sobre las losetas del mosaico de manera que el diagrama de Voronoi de esa nube de puntos sea, en la medida de lo posible, el propio mosaico subyacente.

Teorema 4 *Dado un mosaico cualquiera, siempre es posible encontrar una nube de puntos cuyo diagrama de Voronoi sea el propio mosaico o, en su defecto, una subdivisión del mismo.*

Demostración: Partimos de un mosaico plano cualquiera. Dicho mosaico estará generado por un conjunto finito de losetas poligonales (junto con sus reglas de emparejamiento). Ahora bien, como todo polígono del plano puede subdividirse a su vez en triángulos, podemos suponer que, en el peor de los casos, tenemos una teselación del plano formada por triángulos.

Veamos que podemos elegir un cierto número de puntos en el triángulo, de manera que los lados y vértices de los triángulos sean aristas y puntos de Voronoi respectivamente.

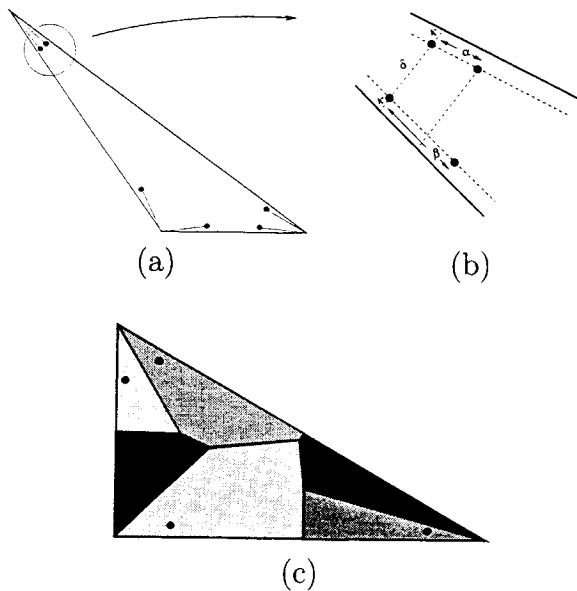


Figura 2: (a) Puntos sobre un triángulo obtusángulo.
 (b) $\alpha, \beta < \delta$.
 (c) Diagrama de Voronoi en el interior de un triángulo rectángulo

Sea β el menor de los ángulos de los triángulos y sea $\alpha = \frac{\beta}{4}$, para garantizar que los puntos que situemos no sobrepasen la bisectriz del ángulo correspondiente. De igual modo, llamemos L_1 al menor de los lados posibles y L_2 a la menor de las alturas posibles y sea $L = \min\{L_1, L_2\}$; tomemos $\varepsilon = \frac{L}{4}$, para garantizar que nunca sobrepasaremos la mitad de cualquiera de los lados y que nunca nos afectarán los puntos que añadamos, siguiendo los lados, a los vértices de Voronoi en los triángulos obtusángulos.

En cada triángulo de la descomposición, tomamos seis puntos situados como en la Figura 2(a); es decir, nos situamos en un vértice del triángulo y, sobre cada uno de los lados que lo definen, y hacia el interior del mismo, dibujamos líneas que formen un ángulo α con el lado correspondiente. Sobre estas líneas, y a una distancia ε de cada vértice fijamos los puntos.

Ahora bien, todo triángulo *pega* con otro triángulo mediante un lado. En consecuencia, cada punto elegido tiene su simétrico, respecto del lado correspondiente. En el caso de que sólo existan triángulos rectángulos o acutángulos, es suficiente con estos seis puntos, como puede verse, para el caso de los triángulos rectángulos, en la Figura 2(c).

En otro caso basta con añadir puntos equiespaciados sobre cada uno de los segmentos que unen pares de puntos de cada lado a una distancia menor que δ , siendo δ la menor de las distancias entre dos puntos interiores de un mismo ángulo. ■

Evidentemente, en casos particulares puede reducirse el número de puntos necesarios para generar el diagrama de Voronoi,

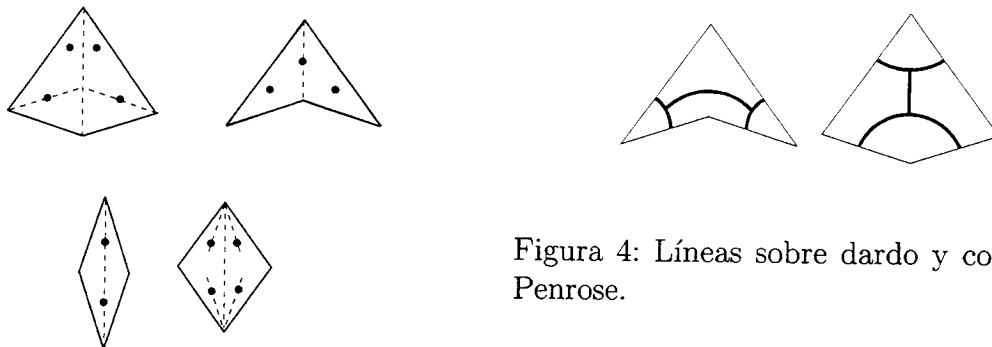


Figura 3: Puntos mínimos sobre dardo, cometa y rombos.

como veremos a continuación. De hecho, hemos conseguido configuraciones mínimas con 4 y 2 puntos sobre los rombos y de 4 y 3 puntos sobre cometas y dardos respectivamente (ver Figura 3).

3. 3-coloración de los Mosaicos de Penrose Dardo-Cometa.

El coloreado de mosaicos no periódicos es un problema abierto que últimamente ha atraído mucho la atención de los investigadores. Este problema consiste en determinar el número de colores necesarios para colorear todas las losetas del mosaico infinito de modo que dos teselas adyacentes no compartan un mismo color. Obviamente, en caso de ser posible, lo ideal es encontrar una coloración del mosaico o bien un algoritmo que lo coloree.

Naturalmente, al ser el mosaico infinito, la dificultad radica en la indeterminación de la distribución de las teselas del mosaico. En lo que sigue vamos a probar que es

Figura 4: Líneas sobre dardo y cometa de Penrose.

posible separar convenientemente cualquier mosaico de Penrose, formado por dardos y cometas, en un número finito de clases de regiones acotadas que posteriormente colorearemos obteniendo así una coloración de todo el mosaico.

Sobre cada dardo y cometa de cualquier mosaico consideramos unas líneas como las líneas gruesas de la Figura 4; teniendo en cuenta que las intersecciones de las líneas con los lados de las losetas coinciden en la frontera del dardo y de la cometa. Si generamos el atlas del mosaico de Penrose con estas nuevas losetas, obtenemos una región acotada, que contiene al vértice central, por cada uno de los 7 entornos de los vértices (ver Figura 5) y por tanto, cualquier mosaico de Penrose con estas nuevas losetas, nos divide el plano en exactamente 7 tipos de regiones distintas como se puede observar en la Figura 6.

Si tenemos en cuenta que, por la propiedad de composición, todo mosaico de Penrose con dardos y cometas es también un mosaico de Penrose de dardos y cometas de nivel 6 (ver Figura 7). Utilizando sobre estos las líneas de la Figura 4 obtenemos como en el caso anterior el plano de Penrose dividido en sólo 7 tipos de regiones acotadas distintas. Y podemos probar el siguiente resultado:

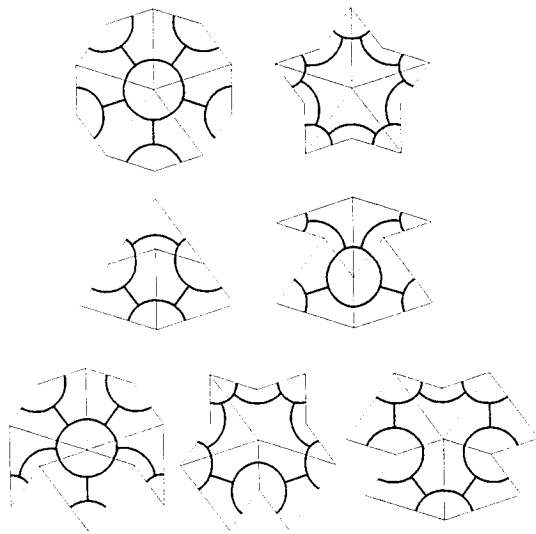


Figura 5: Líneas sobre los 7 entornos de Penrose.

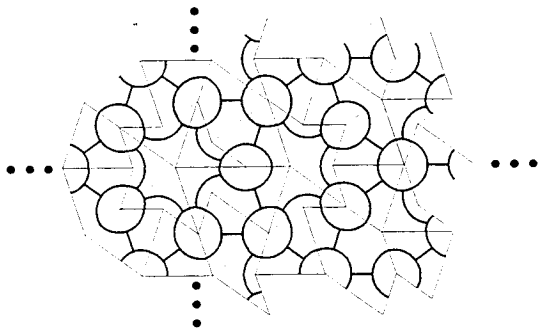


Figura 6: Regiones sobre el plano de Penrose.

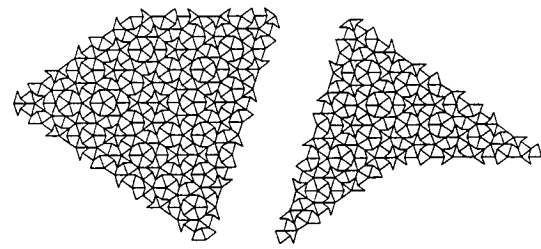


Figura 7: Composición del dardo y de la cometa de nivel 6.

Teorema 5 *Los mosaicos de Penrose con dardos y cometas se pueden colorear con sólo 3 colores.*

Demostración: Si las líneas se trazan coloreando los dardos y cometas del primer nivel de forma consistente (que no haya dos teselas adyacentes con el mismo color) como en la Figura 8, bastará con colorear el interior de cada uno de los entornos de nivel 3 también de forma consistente. Dos de estos entornos pueden verse en la Figura 8.

■

Este resultado se extiende fácilmente al caso de los rombos de Penrose, en los que hemos conseguido también una 3-coloración de los mismos (ver [5]).

4. Conclusiones.

En este trabajo se demuestra que todo mosaico plano (o subdivisión del mismo) puede ser generado como el diagrama de Voronoi de una nube de puntos adecuadamente distribuidos en el plano. Hemos probado también que los mosaicos de Penrose *Dardo-Cometa* son coloreables con sólo tres colores, dando además una coloración de cualquier mosaico de uno de estos tipos.

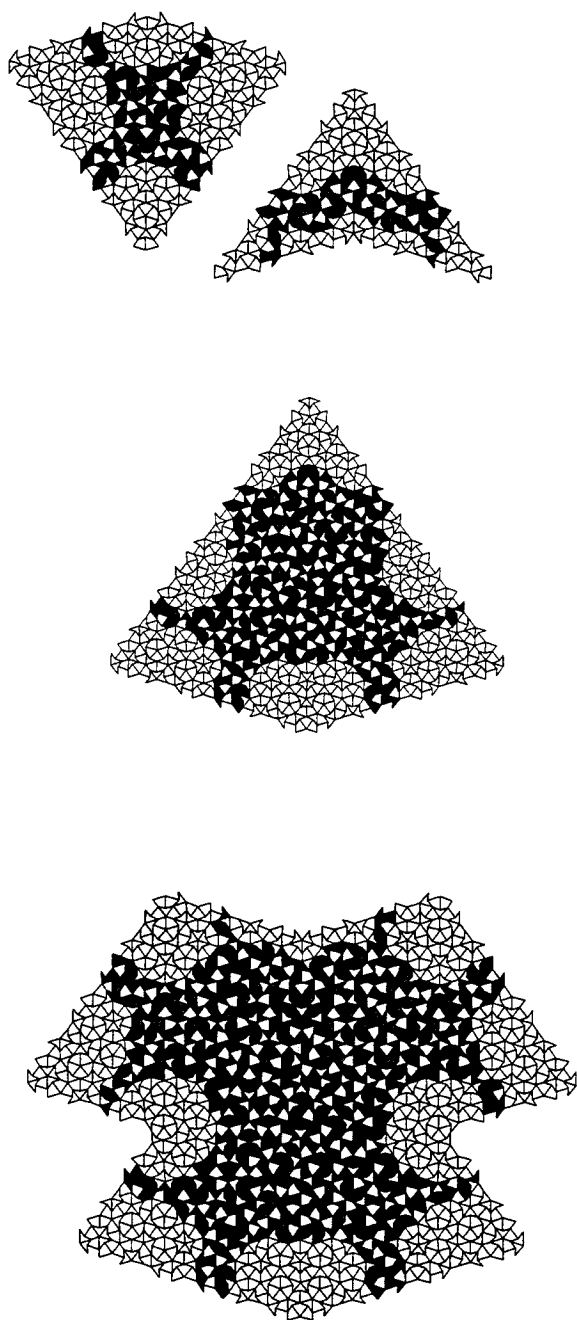


Figura 8: Dardo y Cometa de nivel 6 con líneas coloreadas y entornos coloreados *As* y *Reina* de nivel 6.

Además el procedimiento seguido para la coloración aporta un método de demostración fácilmente algoritmizable para cualquier tipo de mosaicos jerárquicos que tenga la propiedad de composición y un atlas finito. Éste puede utilizarse para probar resultados parecidos en otros mosaicos.

Referencias

- [1] R. Babilon. *3-colourability of Penrose kite-and-dart tilings*. Discrete Mathematics, 235, pp. 137–143.
- [2] R. Berger. *The undecidability of the domino problem*. Memoirs Amer. Math. Soc., 66:72, 1966.
- [3] B. Grünbaum y G.C. Shephard. *Tilings and Patterns*. Freeman. New York, 1987.
- [4] J. Cáceres, F. Ledesma, A. Márquez y A. Moreno. *Resultados recientes sobre mosaicos de Penrose*. Preprint.
- [5] J. Cáceres, M.E. Gegúndez y A. Márquez. *Three coloring aperiodic tilings*. Preprint enviado a Elsevier Science.
- [6] M. Gardner. *Mosaicos de Penrosa y escotillas cifradas*. Labor, 1990.
- [7] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, volume 1. Addison-Wesley, Reading, MA, 1968.
- [8] D. Levine y P. J. Steinhardt. *Quasicrystals: A new class of ordered structures*. Physical Review Letters, 53, pp. 2477–2480, 1984.

- [9] A. Márquez, J. Cáceres. An aperiodic tiles machine. *Aceptado para su publicación en Computational Geometry: Theory and Applications.*
- [10] R. Penrose. *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research.* Bull. Inst. of Math. and its Appl. 10 (1974) 266–271.
- [11] I. Peterson. *Coloring Penrose tiles.* Science News, vol. 155 (10) (1999)
- [12] F.P. Preparata y M.I. Shamos. *Computational Geometry.* SpringerVerlag, 1985.
- [13] R. M. Robinson. *Undecidability and nonperiodicity of tilings in the plane.* Inventiones Math., 12:177–209, 1971.
- [14] M. Senechal. *Quasicrystals and geometry.* Cambridge University Press, 1995.
- [15] T. Sibley y S. Wagon. *Rhombic Penrose tilings can be 3-Colored.* Amer. Math. Monthly **107** 3: pp. 251–253, 2000.
- [16] H. Wang. *Proving theorems by pattern recognition.* II. Bell System Tech. J., 40:1–42, 1961.