



Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear
Facultad de Física
Universidad de Sevilla

ESTUDIO NO PERTURBATIVO DE LOS EFECTOS DEL
VACÍO SOBRE LAS FUNCIONES DE GREEN EN QCD

Memoria de Tesis Doctoral realizada por
Feliciano C. de Soto Borrero
para optar al grado de *Doctor por la Universidad de Sevilla*

Trabajo dirigido por los profesores *D. Manuel Luis Lozano Leyva*, *D. José Rodríguez Quintero* y *D. Olivier Pène*.

SEVILLA 2004

Prefacio

Desde la formulación hace más de treinta años del lagrangiano de la cromodinámica cuántica, han sido muchos los esfuerzos por encontrar una forma de describir la fenomenología de bajas energías de la interacción fuerte. En los últimos años, paralelamente al desarrollo de máquinas con mayor potencia de cálculo, la formulación de las teorías de campos en retículo debida a Wilson ha suscitado gran interés, permitiendo por primera vez obtener predicciones para las masas hadrónicas, por ejemplo, a partir de primeros principios.

En este trabajo se estudian algunos problemas fundamentales relacionados con la física de bajas energías en una teoría de gluones en interacción (QCD sin quarks). En concreto, se analiza el comportamiento de la constante de acoplamiento y el propagador gluónico, con especial interés en la aparición de efectos no perturbativos. Los resultados obtenidos en retículo para dichas magnitudes sirven para verificar la naturaleza de las correcciones no perturbativas, que son analizadas en el marco de un desarrollo en producto de operadores por una parte (en el rango de energías intermedias $p \gtrsim 1\text{GeV}$), y en una aproximación semiclásica por otra (energías bajas $p \lesssim 1\text{GeV}$).

En relación al desarrollo en producto de operadores, se analiza la corrección no perturbativa dominante, mediada por la presencia de un condensado gluónico de dimensión en masa 2, cuyo valor esperado es no nulo. El estudio se realiza para dos esquemas de renormalización que se diferencian por la cinemática del vértice elegido para la renormalización. La presencia de un condensado de dimensión 2 ha suscitado un gran interés en los últimos años, con diversos trabajos que lo relacionan con el confinamiento. En este trabajo se trata en detalle la renormalización de este operador local, que permite confirmar su relación con los efectos no perturbativos que aparecen en el propagador gluónico.

Las aproximaciones semiclásicas también constituyen un activo campo de estudio en relación con el confinamiento, que algunos autores relacionan con diferentes solu-

ciones clásicas del lagrangiano de QCD. En este trabajo se estudian los instantones en relación con el comportamiento de la constante de acoplamiento y las funciones de Green gluónicas en el régimen de bajas energías. Asimismo, se analiza la posible relación de éstos con el condensado gluónico obtenido en el desarrollo en producto de operadores.

En conjunto, la estructura de esta memoria de tesis podría resumirse como sigue:

■ Parte I

- En el capítulo 1 se presenta una breve introducción histórica a la materia, con algunos aspectos generales de la cromodinámica cuántica que resultarán de interés en este trabajo. Se hará especial hincapié en las deficiencias de un tratamiento perturbativo y se presentarán las alternativas más extendidas.
- En el capítulo 2 se expone el formalismo fundamental para el desarrollo de este trabajo: la QCD en retículo. Se tratarán problemas generales, relacionados con las teorías de campos en retículo, así como algunos específicos de particular interés en este trabajo.

■ Parte II

- En el capítulo 3 se presenta el método utilizado para obtener la constante de acoplamiento a partir de las funciones de Green a dos y tres puntos calculadas en retículo. Asimismo, se presentan resultados previos que motivan el estudio de las correcciones en potencias del momento.
- En el capítulo 4 se introduce el desarrollo en producto de operadores como marco en el que describir las correcciones en potencias del momento que se encuentran en los resultados numéricos. Se presentan las contribuciones originales para el esquema MOM asimétrico, así como los resultados del esquema MOM simétrico a efectos comparativos.
- El análisis anterior muestra la relación de los efectos no perturbativos con la existencia de un condensado gluónico, $\langle A^2 \rangle$, no nulo. En el capítulo 5 se analiza en detalle la renormalización de este condensado. Se presentan también algunos resultados fenomenológicos relacionados con el significado físico de este condensado.

- Parte III

- En el capítulo 6 se realiza una amplia introducción a la física de instantones. En particular se propone un modelo de líquido de instantones para describir el vacío de la teoría que será utilizado en los capítulos siguientes.
- En el capítulo 7 se expone el método desarrollado para medir de forma directa las propiedades de los instantones presentes en las configuraciones obtenidas en retículo por medio de un enfriamiento de la configuración.
- En el capítulo 8 se analiza el comportamiento de las funciones de Green a bajas energías, proponiéndose una descripción en términos de un líquido de instantones.

- Parte IV

- Por último, en el capítulo 9, se presenta un resumen de resultados y las principales conclusiones extraídas de este trabajo, así como algunas líneas de investigación que podrían resultar de interés para continuarlo.



En resumen, las aportaciones originales más destacadas de este trabajo están en el capítulo 4 (desarrollo en producto de operadores para el esquema MOM asimétrico), capítulo 5 (renormalización del condensado gluónico a partir de la integral del propagador), capítulo 6 (parametrización analítica del perfil instantónico), capítulo 7 (método de geométrico de localización y modelo de evolución) y capítulo 8 (descripción de la constante de acoplamiento y las funciones de Green gluónicas en un líquido de instantones).

Índice general

I	Introducción: QCD y simulaciones en retículo	5
1.	Cromodinámica cuántica	7
1.1.	Del modelo de quarks a la cromodinámica cuántica	8
1.2.	Teorías cuánticas de campos: generalidades	12
1.3.	Regularización y renormalización	14
1.4.	Fijación del <i>gauge</i>	16
1.5.	Resultados perturbativos	19
1.6.	Necesidad de una teoría no perturbativa	22
2.	QCD en retículo	25
2.1.	Teorías de campos en retículo	26
2.2.	Renormalización no perturbativa	29
2.3.	Campos <i>gauge</i> en retículo	30
2.4.	Fermiones en retículo	35
II	Análisis de las funciones de Green	39
3.	Cálculo de α_s	41
3.1.	El método de las funciones de Green	42
3.2.	Implementación en retículo	49
3.3.	Resultados perturbativos y correcciones en potencia	54

4. Desarrollo en producto de operadores	61
4.1. Desarrollo en producto de operadores y reglas de suma	62
4.2. Desarrollo OPE de las funciones de Green	64
4.3. Cálculo de la dimensión anómala	76
4.4. Resultados numéricos	80
4.5. Discusión	87
5. El condensado $\langle A^2 \rangle$	91
5.1. Fenomenología	92
5.2. Invariancia BRST	93
5.3. Renormalización de $\langle A^2 \rangle$	96
5.4. Discusión	101
III El vacío de QCD y los instantones	103
6. Descripción semiclásica del vacío de QCD	105
6.1. Solitones	107
6.2. Propiedades topológicas del vacío de QCD	109
6.3. Soluciones clásicas de Yang-Mills	113
6.4. Modelo del líquido de instantones	115
6.5. Parametrización del perfil instantónico	118
6.6. Contribución instantónica a los condensados de QCD	121
7. Instantones en retículo	125
7.1. Enfriamiento de la configuración	126
7.2. Método de localización por reconocimiento de forma	130
7.3. Densidad y radio de los instantones	133
7.4. Evolución con el enfriamiento	134
7.5. Resumen de resultados y discusión	138

8. Análisis de las funciones de Green gluónicas a energías bajas	143
8.1. Funciones de Green gluónicas en una configuración de campos instantónicos	144
8.2. Análisis de la constante de acoplamiento a energías bajas	148
8.3. Análisis de las funciones de Green	155
8.4. Resumen de resultados y discusión	166
IV Conclusiones y notas	169
9. Conclusiones y perspectivas	171
9.1. Resumen y conclusiones	171
9.2. Perspectivas	175
A. Fórmulas de utilidad	179
A.1. Conversión de Λ_{QCD} entre diferentes esquemas de renormalización . . .	179
A.2. Tensores η de 't Hooft	181
B. Tablas de datos del capítulo 7	185
C. Cálculo de errores: método de <i>Jackknife</i>	189
Bibliografía	192

Parte I

Introducción: QCD y simulaciones en retículo

Capítulo 1

Cromodinámica cuántica

Contenidos

1.1. Del modelo de quarks a la cromodinámica cuántica	8
1.1.1. Modelo de quarks	8
1.1.2. Electrodinámica cuántica	10
1.1.3. Cromodinámica cuántica	11
1.2. Teorías cuánticas de campos: generalidades	12
1.2.1. Matriz S y desarrollos perturbativos	12
1.2.2. Funciones de Green	13
1.3. Regularización y renormalización	14
1.4. Fijación del <i>gauge</i>	16
1.4.1. Procedimiento de Faddeev Popov	17
Campos “fantasmas”	17
<i>Gauges</i> covariantes	18
1.5. Resultados perturbativos	19
1.5.1. Constante de acoplamiento	19
1.5.2. Series perturbativas	21
1.6. Necesidad de una teoría no perturbativa	22

1.1. Del modelo de quarks a la cromodinámica cuántica

Desde los años cuarenta, con las medidas en cámaras de niebla de partículas del fondo cósmico y, posteriormente, de aceleradores, se fueron acumulando datos acerca de nuevas partículas. A los piones ¹ ($\pi^\pm(140)$, $\pi^0(135)$), kaones ($K^\pm(494)$, $K^0\bar{K}^0(498)$) etc., se unieron hiperiones -bariones más pesados que el protón ($p(938)$) y el neutrón ($n(940)$)- como $\Lambda(1116)$, $\Sigma^+(1189)$, $\Sigma^0(1193)$, $\Sigma^-(1197)$, $\Xi^0(1315)$, $\Xi^-(1321)$, etc., o resonancias, como $N(1520)$, cuyas propiedades evidenciaban la existencia de una estructura interna formada por unos constituyentes más fundamentales.

En 1968, experimentos de dispersión de electrones por núcleos realizados en SLAC (acelerador lineal de Stanford, California) mostraron los primeros indicios claros de la existencia de constituyentes cuasi-puntuales en el interior de los nucleones, a los que se denominó «partones». Si bien al principio no fueron identificados como tales, dichos entes habían sido propuestos años antes por Gell-Mann y Zweig que, basándose en la clasificación de las partículas elementales conocidas hasta el momento, postularon que los protones y el resto de hadrones conocidos estaban formados por constituyentes más fundamentales, a los que denominaron «quarks».

1.1.1. Modelo de quarks

Entre las partículas descubiertas, se constató que algunas de ellas tenían tiempos de vida media mayores de lo que predecía la interacción fuerte, a pesar de que ninguna de las leyes conocidas prohibía estos decaimientos. Gell-Mann y Nishijima atribuyeron a estas partículas un nuevo número cuántico, denominado extrañeza (S), conservado por la interacción fuerte.

En términos de isospín y extrañeza, las partículas conocidas se clasificaron en singletes, octetes y decupletes (1, 8 y 10 partículas respectivamente), de una forma análoga a la tabla periódica de Mendeleev. Gell-Mann y Zweig explicaron esta estructura postulando que los hadrones tienen una estructura interna, al estar formados por unas partículas elementales, los quarks, que pueden presentarse en tres *sabores*: *up*, *down* y *strange*, caracterizados por su isospín (I_3) y extrañeza, dados en la tabla

¹Entre paréntesis se representan las masas, en MeV.

1.1, y un número bariónico $B = 1/3$. A éstos se añadieron posteriormente los quarks *charm*, *bottom* y *top*.

Los bariones, formados por tres quarks, corresponden en esta descripción a las representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$ contenidas en el producto directo $3 \otimes 3 \otimes 3$. Los mesones corresponden a los estados ligados de un quark y un antiquark, de modo que las partículas se agruparían en las representaciones irreducibles contenidas en $3 \otimes \bar{3}$. El modelo de quarks, así constituido, explicó la estructura de las partículas elementales conocidas hasta entonces, prediciendo además la existencia de otras.

	u	d	s
I_3	1/2	-1/2	0
S	0	0	-1
Q/e	2/3	-1/3	-1/3

Tabla 1.1: Isoespín, extrañeza y carga eléctrica de los quarks up, down y strange.

Resulta extraño, no obstante, que los elementos de la representación fundamental del grupo (quarks) y su conjugada (antiquarks) no se encuentren en la naturaleza (todas las medidas en la búsqueda de quarks libres desde 1977 han dado resultados negativos [Hag02]). Este fenómeno es lo que más tarde se denominó *confinamiento* y plantea uno de los grandes retos de la física actual: derivar a partir de interacciones fundamentales por qué los quarks libres no aparecen en la naturaleza.

Al tratarse de fermiones, la existencia de partículas como Δ^{++} con $J^P = \frac{3}{2}^+$, cuya interpretación en términos del modelo de quarks indicaría que está formada por tres quarks *up* con números cuánticos idénticos, revela la necesidad de introducir otro número cuántico, al que se denominó *color*, para cumplir el principio de Pauli.

Esta nueva propiedad de los quarks, que nada tiene que ver con la noción ordinaria de color, juega un papel fundamental en nuestra comprensión actual de la interacción fuerte, haciendo las veces de la carga eléctrica en electrodinámica. La interacción fuerte se describe en el marco del modelo estándar de las partículas elementales como una teoría lagrangiana basada en la simetría $SU(3)$ de color.

1.1.2. Electrodinámica cuántica

Antes del descubrimiento de toda esta variedad de partículas, primero Dirac y posteriormente Schwinger, Feynman, Dyson, y Tomonaga desarrollaron las bases de la teoría cuántica de campos y, en particular, de la electrodinámica cuántica (QED) que permitió, por ejemplo, obtener predicciones para el momento magnético del electrón con 12 cifras significativas, un hito en la historia de la ciencia. El planteamiento de la electrodinámica cuántica resulta muy simple si se expresa como la exigencia de que el lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi , \quad (1.1)$$

sea invariante bajo transformaciones $U(1)$ o transformaciones *gauge* locales,

$$\psi \rightarrow \exp(-iq\Lambda(x))\psi , \quad (1.2)$$

lo que sugiere la introducción de un nuevo campo A_μ o campo *gauge*, que se identifica con los fotones. Esta interpretación geométrica de la invariancia *gauge* fue en realidad posterior; históricamente, esta exigencia procede de las ecuaciones de Maxwell, en las que un cambio de *gauge* en el potencial vector deja invariantes los campos electromagnéticos y, en consecuencia, la fuerza de Lorentz.

La exigencia de invariancia bajo transformaciones de Lorentz, paridad y transformaciones *gauge* locales del lagrangiano libre del campo *gauge* permite ² escribir el lagrangiano completo de la QED:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} , \quad (1.3)$$

donde se ha introducido la derivada covariante, $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, y el tensor intensidad de campo, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

El éxito de esta teoría *gauge*, basada en la constatación de la existencia de una simetría $U(1)$, fue la base para el desarrollo de otras teorías de campos, como la teoría electrodébil, que unifica las interacciones electromagnéticas y débiles (Weinberg y Salam, 1967) asociada a una simetría $SU(2)$, o la cromodinámica cuántica (QCD), que describe las interacciones fuertes, y que se consolidó en los años 70 como teoría para describir la interacción fundamental entre los quarks; las partículas que median esta interacción, equivalentes a los fotones de la electrodinámica cuántica, son los *gluones*, bosones vectoriales sin masa.

²La renormalizabilidad, sobre la que se tratará más adelante (ver §1.3), también es necesaria para escribir este lagrangiano.

1.1.3. Cromodinámica cuántica

De modo análogo a la QED, para la cromodinámica cuántica se puede escribir un lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} , \quad (1.4)$$

invariante bajo las transformaciones del grupo $SU(3)$ de color. El tensor de intensidad de campo y la derivada covariante vienen dados por:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_0 f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c , \\ D_\mu &= \partial_\mu + ig_0 A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde g_0 es la constante de acoplamiento, f^{abc} corresponden a las constantes de estructura completamente antisimétricas del grupo $SU(3)$ y $\lambda^a/2$ son los ocho generadores de la representación fundamental de dicho grupo o matrices de Gell-Mann, que satisfacen las relaciones de conmutación $[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda^c$. Este carácter no abeliano del grupo es el responsable de las interacciones entre los bosones *gauge*, lo que diferencia a la QCD de la electrodinámica.

La teoría depende de seis parámetros dimensionales, las masas de los seis quarks, más uno, generado dinámicamente, Λ_{QCD} , que rompe la invariancia de escala de la teoría en el límite de masas de quarks nulas, fijando la escala de energías. Energías altas son, por tanto, las que son mayores que Λ_{QCD} , y bajas las que son menores que esta escala.

Actualmente, la cromodinámica cuántica se acepta de un modo general como la teoría que describe las interacciones fuertes, debido a su éxito en la predicción de la fenomenología de energías altas, confirmado en multitud de experimentos. No obstante, problemas tan fundamentales y aparentemente simples como obtener las masas de los estados ligados de quarks, los hadrones, a partir de primeros principios siguen abiertos.

En la QCD, a diferencia de la electrodinámica, los bosones que median la interacción tienen carga, por lo que interactúan entre sí. Esta interacción de los gluones provoca un antiapantallamiento de la carga de color que complica el tratamiento de la teoría. De este modo, una teoría con gluones no carece de interés, puesto que presenta ya parte de la riqueza y de las complicaciones que surgen en la resolución de una teoría con quarks, en comparación con una teoría en la que sólo hubiese fotones que, al no interactuar, sería trivial.

1.2. Teorías cuánticas de campos: generalidades

1.2.1. Matriz S y desarrollos perturbativos

Los estados físicos en una teoría cuántica de campos vienen descritos por vectores en el espacio de Hilbert de la teoría, sobre los que actúan los operadores. El procedimiento habitual es construir el espacio de Hilbert para el hamiltoniano libre, H_0 , y tratar el hamiltoniano de interacción, $H_I = H - H_0$, perturbativamente.

A fin de describir procesos de dispersión entre un estado inicial, $|i\rangle = |\Phi(-\infty)\rangle$, y uno final, $|f\rangle$, se define formalmente la matriz S como:

$$|\Phi(+\infty)\rangle \equiv S|\Phi(-\infty)\rangle, \quad (1.6)$$

describiendo así la evolución del estado $|\Phi(t)\rangle$. La amplitud de probabilidad de la transición $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ viene dada por:

$$S_{if} = \langle f|\Phi(+\infty)\rangle = \langle f|S|i\rangle \quad (1.7)$$

y, teniendo en cuenta la evolución de un estado $|\Phi(t)\rangle$ en la representación de interacción,

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle = H_I^I|\Phi(t)\rangle, \quad (1.8)$$

donde H_I^I es el hamiltoniano de interacción en la representación de interacción, es posible expresar la matriz S como una serie perturbativa dependiente del tiempo,

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_I^I(t_1) \cdots H_I^I(t_n)), \quad (1.9)$$

a partir de la cual se puede evaluar la amplitud de probabilidad, S_{if} , a cualquier orden en perturbaciones. El enfoque diagramático de Feynman permite construir cada orden en teoría de perturbaciones identificando cada sumando del desarrollo de Schwinger (1.9) con un diagrama y evaluándolos a partir de las reglas de Feynman de la teoría, que se derivan del lagrangiano de interacción.

En este marco, se supone que el espacio de Hilbert de la teoría es el mismo que el del hamiltoniano libre (en el que se desarrolla la teoría de perturbaciones). En QED, los autoestados del hamiltoniano libre se corresponden con los estados asintóticos del hamiltoniano completo, de modo que las soluciones construidas a partir de los autoestados del hamiltoniano libre (como se hace en el esquema de la matriz S) conducen a

resultados de gran precisión. En QCD, por el contrario, los autoestados del hamiltoniano libre (gluones y quarks) no se corresponden con los estados asintóticos (hadrones), de modo que un desarrollo en los autoestados del hamiltoniano libre no resulta apropiado para describir la fenomenología hadrónica. De hecho, la aplicación de la teoría de perturbaciones en QCD no conduce a resultados correctos a energías bajas, donde los grados de libertad de quarks y gluones no son accesibles. A energías altas, las propiedades individuales de los quarks que forman los hadrones aún tienen influencia, y los resultados perturbativos permiten describir satisfactoriamente la fenomenología de las colisiones hadrónicas a energías altas.

1.2.2. Funciones de Green

Cualquier amplitud de probabilidad S_{if} entre un estado $|i\rangle = \prod_i a_i^\dagger(p_i)|0\rangle$ y uno $|f\rangle = \prod_j a_j^\dagger(p_j)|0\rangle$, siendo $a_i^\dagger(p_i)$ los operadores de creación de todos los tipos de partículas presentes en los estados inicial y final, puede calcularse como:

$$S_{if} = \langle f|S|i\rangle = \langle 0|\prod_j a_j(p_j)S\prod_i a_i^\dagger(p_i)|0\rangle, \quad (1.10)$$

donde todos los términos se reducen al cálculo de una función de Green, es decir, a la evaluación en el vacío de un producto de operadores. De hecho, cualquier observable en una teoría cuántica de campos puede describirse en términos de funciones de Green, lo que justifica el interés que suscitan estas magnitudes. El trabajo desarrollado en esta memoria se limita a la evaluación no perturbativa de dos funciones de Green, a dos y tres puntos, suficientes para renormalizar por completo la teoría.

Alternativamente a la formulación de la matriz S , es posible resolver la teoría en el formalismo de las integrales de camino, donde el valor esperado de cualquier operador, $\mathcal{O}(x)$, puede obtenerse a partir de:

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_x \mathcal{D}\phi(x) e^{i\mathcal{S}(\phi)} \mathcal{O}(x), \quad (1.11)$$

$$Z = \int \prod_x \mathcal{D}\phi(x) e^{i\mathcal{S}(\phi)}, \quad (1.12)$$

donde $\prod_x \mathcal{D}\phi(x)$ simboliza los valores de todos los campos de la teoría en todas las posiciones del espacio-tiempo y $\mathcal{S}(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi)$ es la acción.

Todas las funciones de Green de la teoría pueden obtenerse introduciendo un término de fuente por cada campo; en una teoría *gauge* pura, si denominamos J_μ^a al término

de fuente que se acopla al campo gluónico, la función generatriz de las funciones de Green gluónicas resultaría:

$$Z[J_\mu^a] = \int \left[\prod_{a,\mu,x} dA_\mu^a(x) \right] e^{-i \int d^4x (\mathcal{L}_{Y.M.} + J_\mu^a A_\mu^a)}, \quad (1.13)$$

donde se ha incluido sólo la parte gluónica del lagrangiano, $\mathcal{L}_{Y.M.}$. Cualquier función de Green gluónica puede calcularse entonces como:

$$\langle A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) A_{\mu_2}^{a_2}(x_2) \cdots A_{\mu_n}^{a_n}(x_n) \rangle = \frac{\partial^n \ln Z[J_\mu^a]}{\partial J_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \partial J_{\mu_2}^{a_2}(x_2) \cdots \partial J_{\mu_n}^{a_n}(x_n)} \Big|_{J_\mu^a=0}. \quad (1.14)$$

Si bien en este trabajo no se hará uso de esta expresión formal de las funciones de Green, resultará útil más adelante para presentar el método de fijación de *gauge* de Faddeev y Popov (ver §1.4.1).

1.3. Regularización y renormalización

En la resolución de cualquier teoría de campos puntuales aparecen divergencias, derivadas de la imposibilidad de dotar de sentido físico a un producto de campos en el mismo punto. Aunque se trata de un fenómeno general, independiente del método utilizado para resolver la teoría de campos, a continuación se expondrá la aparición de divergencias en el marco de la teoría de perturbaciones, donde en el desarrollo de cualquier proceso, como $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ representado en la figura 1.1, aparecen diagramas divergentes, cuya contribución es necesario *renormalizar*.

El proceso en el que se eliminan estos infinitos, conocido como *renormalización*, requiere una *regularización* de los mismos a través de algún parámetro en cuyo límite físico se recuperan las divergencias. Entre los procedimientos de regularización más extendidos están el esquema de regularización dimensional, en el que los cálculos se realizan en una dimensión $d = 4 - 2\epsilon$, donde ϵ hace el papel de *regulador*, o la regularización en retículo, en la que el espacio-tiempo se discretiza en un reticulado cuyo espaciado, a , hace de regulador al limitar los valores más pequeños de la distancia.

Las cantidades calculadas en función del regulador, $\Lambda = \{\epsilon^{-1}, a^{-1}, \dots\}$, no son directamente comparables con la experiencia. Los infinitos, expresados a través de Λ , se incluyen en la relación entre las cantidades desnudas (las que aparecen en el

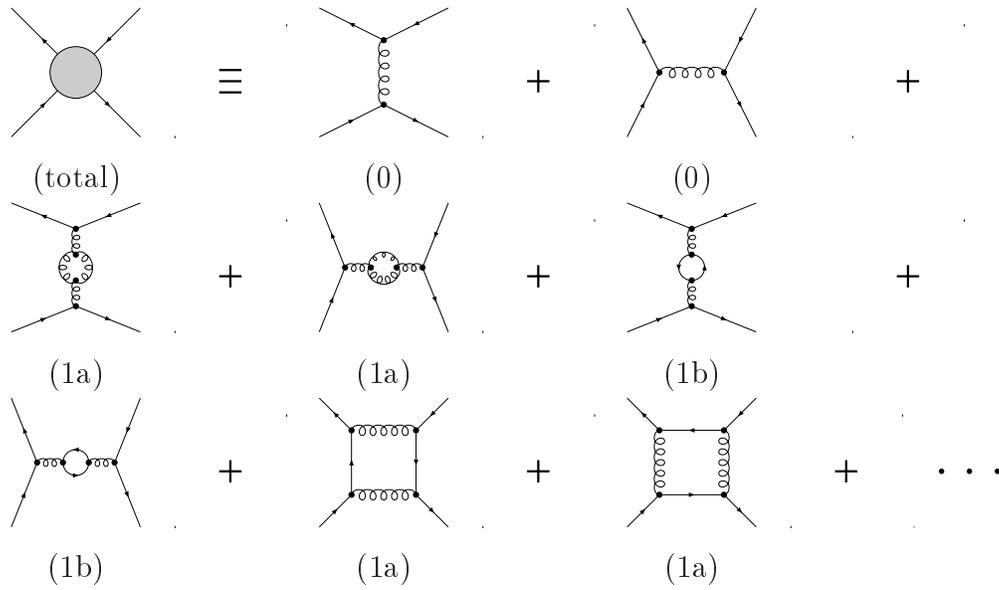


Figura 1.1: Desarrollo diagramático de un proceso $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ en QCD. Se ha distinguido entre los procesos a nivel de árbol (0) y las correcciones radiativas en orden α_s (1). Entre éstas, las hay puramente gluónicas (a) y con bucles de quark (b). Nótese que no se han considerado los procesos electrodébiles.

lagrangiano sin renormalizar) y las cantidades renormalizadas (las que intervienen en los procesos físicos).

De este modo, por ejemplo, el campo *gauge* renormalizado se obtiene multiplicando el campo desnudo por una constante de renormalización, Z_3 , definida por la relación:

$$(A_\mu^a)_R = Z_3^{-1/2} (A_\mu^a)_0, \quad (1.15)$$

donde Z_3 absorbe las divergencias del campo desnudo. Análogamente aparecen constantes que renormalizan el campo fermiónico, la constante de acoplamiento, etc.

La forma en que se relacionan las cantidades desnudas y renormalizadas es ambigua y cada forma posible de definir dicha relación se conoce como “esquema de renormalización”. Entre los esquemas más comunes está el esquema de sustracción mínima o MS (del inglés *minimal subtraction*), ligado al uso de regularización dimensional, en el que las constantes de renormalización eliminan sólo la parte divergente en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ de la cantidad que renormalizan,

$$Z_i^{(\text{MS})} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_{i,n} \frac{1}{\epsilon^n}. \quad (1.16)$$

Otro de los esquemas más extendidos es el denominado $\overline{\text{MS}}$, que se diferencia del MS por la inclusión de términos finitos en la definición de las constantes de renormalización. En este trabajo se expresarán los resultados en el esquema $\overline{\text{MS}}$, a fin de facilitar la comparación con otros resultados en la literatura, aunque al renormalizar las cantidades obtenidas numéricamente en la simulación se utilizarán los esquemas de sustracción de momento, definidos más adelante (ver §2.2), especialmente indicados para comparar magnitudes obtenidas no perturbativamente.

Las teorías en las que el número de constantes de renormalización necesarias para renormalizar todas las funciones de Green es finito se conocen como teorías renormalizables. Una condición necesaria (si bien no suficiente) para la renormalizabilidad es que la dimensión en masa de los términos que aparecen en el lagrangiano no sea superior a 4 [Wei95].

1.4. Fijación del *gauge*

Las integrales de camino del tipo (1.11) para teorías *gauge* divergen, además de por la necesidad de renormalización, debido a que la parte cinética de la acción *gauge*,

$$S_g^0 \equiv -\frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a (g_\nu^\mu \partial_\rho \partial^\rho - \partial^\mu \partial_\nu) A_a^\nu, \quad (1.17)$$

no es invertible a causa de la presencia de modos cero del operador $g^{\mu\nu} \partial_\rho \partial^\rho - \partial^\mu \partial^\nu$. Esto se debe a que la acción de los campos *gauge* asigna a éstos más grados de libertad de los que les corresponden ³, existiendo grados de libertad en los campos que no afectan a la física (es lo que se conoce como ambigüedad del *gauge*).

Una solución posible a esta divergencia es fijar un *gauge* determinado, por ejemplo el axial ($A_3^a(x) = 0$), en el que la función generatriz de las funciones de Green gluónicas (1.13) se escribirá como:

$$Z[J_\mu^a] = \int \left[\prod_{a,\mu,x} dA_\mu^a(x) \right] e^{-i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{Y.M.}} + J_\mu^a A_\mu^a)} \prod_{a,x} \delta A_3^a(x), \quad (1.18)$$

eliminando la divergencia. Este *gauge* proporciona un marco adecuado para la cuantización canónica; no obstante, obtener las reglas de Feynman a partir de (1.18) no resulta conveniente, al no respetarse explícitamente las simetrías de rotación y de Lorentz.

³La libertad adicional se incluye al expresar el lagrangiano como función de $F_{\mu\nu}$ y no de A_μ .

1.4.1. Procedimiento de Faddeev Popov

Una alternativa más formal, en la que se respetan explícitamente las simetrías de rotación y de Lorentz, fue propuesta por Faddeev y Popov [Fad67] y De Witt [Wit67], a través de una generalización de la integral funcional (1.13), (1.18),

$$Z[J_\mu^a] = \int \left[\prod_{a,\mu,x} dA_\mu^a(x) \right] e^{-\int d^4x (\mathcal{L}_{\text{Y.M.}} + J_\mu^a A_\mu^a)} B[f_\alpha(A, x)] \text{Det}[\mathfrak{F}[A]] \quad , \quad (1.19)$$

con $f_\alpha(A, x)$ una condición de fijación de *gauge*, $B[f_\alpha(A, x)]$ una funcional de $f_\alpha(A, x)$, y el operador de Faddeev-Popov,

$$\mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y}[A] \equiv \left. \frac{\partial f_\alpha(A(\lambda), x)}{\partial \lambda_\beta(y)} \right|_{\lambda=0} \quad , \quad (1.20)$$

indicando la variación de la funcional $f_\alpha(A, x)$ ante una transformación *gauge* infinitesimal $\lambda_\beta(y)$.

Campos “fantasmas”

Con objeto de poder resolver la integral funcional de $Z[J_\mu^a]$ (1.19), resulta conveniente escribir todos los términos en la forma de integrales gaussianas. En primer lugar, el término $\mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y}[A]$ puede expresarse como una integral:

$$\text{Det}(\mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y}) \propto \int \left[\prod_{\alpha, x} d\bar{c}_\alpha(x) \right] \left[\prod_{\alpha, x} dc_\alpha(x) \right] e^{i \int d^4x d^4y \bar{c}_\alpha(x) c_\beta(y) \mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y}} \quad , \quad (1.21)$$

sobre dos nuevos campos, c y \bar{c} , cuya contribución puede expresarse por medio de la adición al lagrangiano de un término bilineal en $\mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y}$. Estos campos, conocidos como fantasmas (*ghosts*), son escalares de Lorentz y satisfacen la estadística de Fermi. Su contribución se limita exclusivamente a participar en estados intermedios en cualquier proceso; no pueden aparecer en estados iniciales o finales al tratarse de un mero artificio para resolver las integrales.

Puesto que las integrales más sencillas de calcular son las gaussianas, una forma simple de incluir el efecto de $B[f(A, x)]$ es:

$$B[f(A, x)] = \exp \left(-\frac{1}{2\xi} f_\alpha(x) f_\alpha(x) \right) \quad , \quad (1.22)$$

con lo que es equivalente a añadir un término

$$\mathcal{L}_{\text{G.F.}} = -\frac{1}{2\xi} f_\alpha(x) f_\alpha(x) \quad (1.23)$$

al lagrangiano. Escribiendo $\mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y}$ como un término en el lagrangiano, la integral de camino para la función generatriz de las funciones de Green puede expresarse como:

$$Z[J_\mu^a] = \int \left[\prod_{a, \mu, x} dA_\mu^a(x) \right] \left[\prod_{\alpha, x} d\bar{c}_\alpha(x) \right] \left[\prod_{\alpha, x} dc_\alpha(x) \right] e^{-i \int d^4x (\mathcal{L}_{MOD} + J_\mu^a(x) A_\mu^a(x))} ;$$

$$\mathcal{L}_{MOD} \equiv \mathcal{L}_{Y.M.} - \frac{1}{2\xi} f_\alpha(x) f_\alpha(x) + \int d^4y \bar{c}^\alpha(x) c^\beta(y) \mathfrak{F}_{\alpha x, \beta y} . \quad (1.24)$$

Hasta este punto el formalismo es muy general, válido para todos los *gauges* de uso habitual. En lo que sigue se particularizará para un tipo especial de *gauges* que será de interés en el desarrollo de este trabajo.

Gauges covariantes

La forma más simple de construir un *gauge* que sea invariante ante transformaciones de Lorentz viene dado por la elección $f_\alpha(x) = \partial_\mu A_\alpha^\mu(x)$, que se traduce en un término de fijación del *gauge* en el lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{G.F.} = -\frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu^a \partial_{\mu'} A_a^{\mu'} . \quad (1.25)$$

conocido como *gauge* covariante o *gauge* de Lorentz. Los *gauges* de Landau y de Feynman son casos particulares de éste para $\xi = 0$ y $\xi = 1$ respectivamente. Con esta elección para $f_\alpha(x)$, la influencia del término de Faddeev Popov para los fantasmas se reduce a un término

$$\mathcal{L}_{F.P.} = \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + f_{abc} \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^c c^b \quad (1.26)$$

en el lagrangiano, que en conjunto resulta:

$$\mathcal{L}_{MOD} = \mathcal{L}_{Y.M.} - \frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu^a \partial^\mu A_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + f_{abc} \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^c c^b . \quad (1.27)$$

La dimensión en masa de los campos c^a y \bar{c}^a es 1, como puede deducirse a partir del término cinético, lo que asegura que no existen términos de dimensión mayor que 4 en el lagrangiano, haciéndolo candidato a ser renormalizable ⁴.

⁴Su renormalizabilidad puede demostrarse haciendo uso de la simetría BRST de este lagrangiano, que se expondrá más adelante (ver §5.2); la demostración completa puede encontrarse en [Wei96], por ejemplo.

1.5. Resultados perturbativos

1.5.1. Constante de acoplamiento

Al renormalizar la teoría aparecen una serie de constantes de renormalización que relacionan los campos físicos con los que aparecen en el lagrangiano. En el proceso de renormalización, además, la constante de acoplamiento, $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$, adquiere una dependencia con la escala de renormalización, $\alpha_s(\mu)$. Dicha dependencia se expresa por medio del siguiente desarrollo:

$$\beta(\alpha) = \frac{\partial\alpha(\mu)}{\partial\ln\mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha^2 - \frac{\beta_1}{(2\pi)^2}\alpha^3 - \frac{\beta_2}{(4\pi)^3}\alpha^4 - \dots, \quad (1.28)$$

conocido como función β de Callan-Symanzik.

Integrando (1.28) a un bucle (primer orden en el desarrollo) resulta:

$$\alpha_{(1\text{ bucle})}(\mu) = \frac{1}{\frac{\beta_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)}, \quad (1.29)$$

que tiene un polo para $\mu = \Lambda_{\text{QCD}}$, denominado polo de Landau. De hecho, este polo está presente independientemente del orden al que se integre la función β y rompe la invariancia de escala del lagrangiano sin quarks (la denominada *transmutación dimensional* de QCD Yang-Mills).

El parámetro Λ_{QCD} indica la escala de energías a la que aparecen los fenómenos que no son descriptibles en un marco puramente perturbativo y, generalmente, su valor se asocia a la escala de hadronización. Λ_{QCD} depende del esquema de renormalización utilizado, aunque por lo general está en torno a 1GeV.

La existencia de singularidades de tipo espacial en la constante de acoplamiento viola la causalidad de la teoría, lo que muestra que el polo de Landau es una consecuencia de la teoría de perturbaciones (de hecho no aparece cuando se calcula la constante de acoplamiento no perturbativamente, como se verá más adelante). Shirkov *y col.* [SS97, Shi02] proponen regularizaciones de esta singularidad del tipo:

$$\bar{\alpha}_s(\mu) = \frac{1}{\frac{\beta_0}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)} + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{4\pi(\Lambda_{\text{QCD}}^2 - \mu^2)}, \quad (1.30)$$

que son equivalentes a la original en el régimen perturbativo, pero eliminan la divergencia. Esta forma *ad hoc* de eliminar la divergencia perturbativa supone la adición de correcciones del tipo $1/p^2$, equivalentes al efecto de una masa gluónica.

La expresión (1.29) indica una caída logarítmica de la constante de acoplamiento a energías altas que se conoce como libertad asintótica; la interacción fuerte se apaga a energías muy altas. Esta dependencia logarítmica y, en particular, el exponente de $\ln(\mu/\Lambda)$ en α_s ha sido verificado experimentalmente en numerosas ocasiones (ver figura 1.3b). La teoría de perturbaciones, por tanto, conduce a resultados satisfactorios en el régimen de altas energías (donde la constante de acoplamiento es pequeña) constatando la validez de la QCD para describir las interacciones fuertes.

Al disminuir la energía, no obstante, la constante de acoplamiento crece, invalidando cualquier intento de descripción perturbativa de la fenomenología en el rango de energías bajas. De este modo, fenómenos fundamentales como el confinamiento de los quarks en estados neutros de color (o hadronización) no son descriptibles en un marco puramente perturbativo.

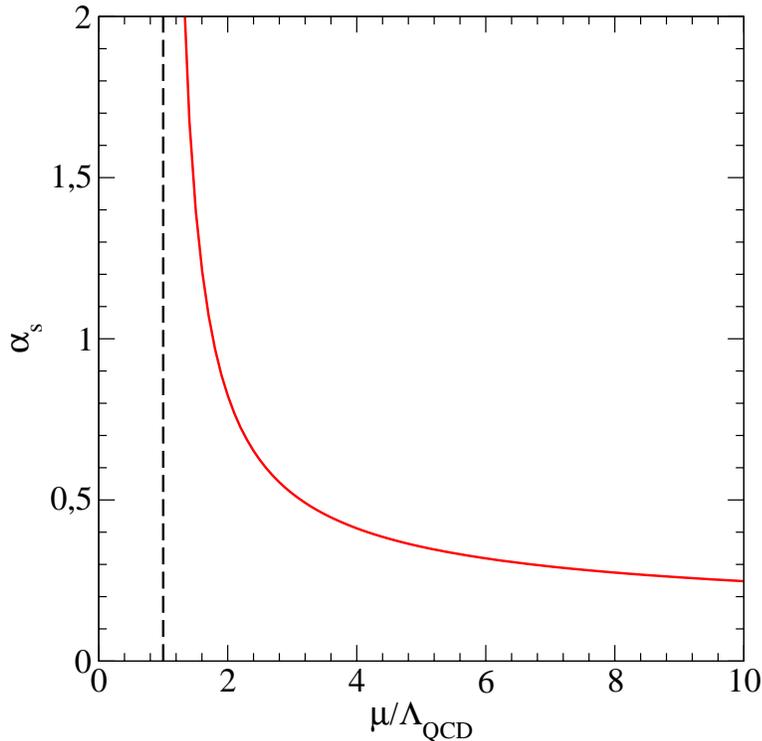


Figura 1.2: Representación esquemática de la evolución de α_s integrada a un bucle en teoría de perturbaciones.

El valor de la constante de acoplamiento fuerte puede deducirse a partir del análisis de procesos a energías altas (dispersión inelástica de leptones, decaimientos Υ , etc.), haciendo uso de las expresiones perturbativas, válidas en dicho régimen (ver figura 1.3).

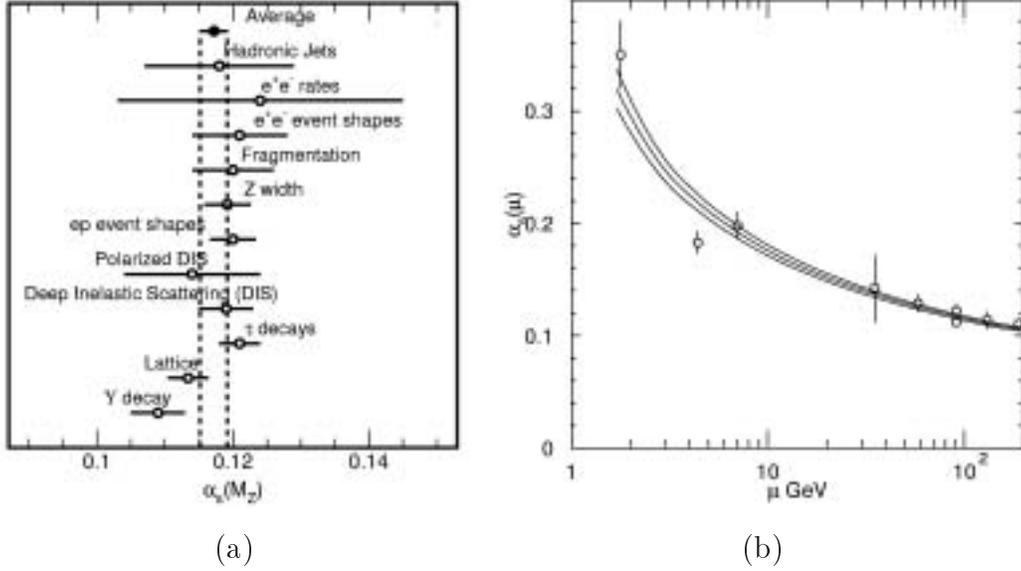


Figura 1.3: (a) Valores de la constante de acoplamiento (evaluada a la masa del bosón Z^0) obtenidos a partir de diferentes métodos y promedio universal. (b) Medidas experimentales de la evolución de α_s con la energía. Figuras extraídas de [Hag02].

1.5.2. Series perturbativas

En QCD, cualquier magnitud puede expresarse perturbativamente como una serie en la constante de acoplamiento renormalizada similar a (1.28). Para una magnitud adimensional, R , el desarrollo perturbativo implica sumar series del tipo:

$$R(\alpha_s) = \sum_n r_n \alpha_s^{n+1}. \quad (1.31)$$

Las series de interés fenomenológico son de la forma $r_n \sim n! a^n n^b$ y, por tanto, divergentes. En el caso más favorable, se trata de series asintóticas, en las que la suma tiende asintóticamente a un valor y, a partir de un cierto número de términos, se hace inestable y comienza a divergir. Una herramienta adaptada al análisis de este tipo de series es la transformada de Borel:

$$B[R](t) = \sum_n \frac{r_n}{n!} t^{n+1}, \quad (1.32)$$

que permite recuperar la serie original (al menos formalmente) invirtiendo la transformación:

$$R'(\alpha_s) = \int_0^\infty dt e^{-t/\alpha_s} B[R](t). \quad (1.33)$$

Las divergencias de la serie original, R , aparecen en la transformada de Borel como polos en el eje real. Los polos en el eje real positivo se conocen como *renormalones infrarrojos* y aparecen en QCD para $t_m = 2\pi m/\beta_0$, con m natural, impidiendo la suma de las series perturbativas. Estas singularidades están ligadas a la existencia del polo de Landau, puesto que en los cálculos perturbativos es necesario integrar sobre todas las escalas. Para evitar estas singularidades es necesario deformar el contorno de integración, lo que introduce una ambigüedad en la integral, conocida como *ambigüedad del renormalón*⁵.

Es posible evaluar el número máximo de términos hasta el que es razonable sumar las series perturbativas antes de que los resultados comiencen a divergir. Si consideramos que las series divergen cuando dos términos consecutivos dan contribuciones del mismo orden, y B diverge para $t = t_m$, podemos estimar que el cociente entre los coeficientes será

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \approx \frac{n+1}{t_m} \approx \frac{n\beta_0}{2\pi m}. \quad (1.34)$$

Volviendo a la serie original para R , ésta comenzará a divergir para $r_n \alpha_s^n \approx r_{n+1} \alpha_s^{n+1}$, con lo que el número máximo de términos que es posible sumar vendrá dado por:

$$n \approx \frac{2\pi}{\alpha_s \beta_0}. \quad (1.35)$$

De este modo, las series perturbativas presentan problemas desde los primeros órdenes y resulta comprometido, en cualquier caso, sumar más de 5 o 10 términos.

Los instantones, sobre los que se tratará en profundidad en la parte III de la memoria, también provocan la aparición de polos en la transformada de Borel, si bien éstos están situados a valores mayores de t ($t = 4\pi, 8\pi, \dots$), por lo que su influencia sobre la QCD perturbativa es despreciable.

1.6. Necesidad de una teoría no perturbativa

Ante el fracaso de la teoría de perturbaciones en la descripción de la fenomenología de energías bajas de QCD, es necesario desarrollar métodos *no perturbativos* que permitan extraer resultados a partir del lagrangiano de la QCD. Algunos de los métodos más extendidos son:

⁵Al deformar el contorno de integración aparecen correcciones del tipo $\exp(-1/\alpha_s)$ que, como se verá en la parte II de esta memoria, están relacionadas con la aparición de correcciones en potencia.

Retículo: La única forma no perturbativa de resolver el lagrangiano QCD a partir de primeros principios es realizar simulaciones en retículo [MM94]. Resulta un formalismo básico desde el punto de vista cuantitativo para obtener predicciones de la QCD, y cualitativamente para, en combinación con enfoques analíticos, comprender la QCD a energías bajas. Las incertidumbres teóricas se tornan en este caso en incertidumbres numéricas.

OPE + SVZ: El desarrollo en producto de operadores (OPE) [Wei96, Ynd99b] es un método que permite mejorar la descripción puramente perturbativa por medio de una factorización [SVZ79] de la física a pequeñas y grandes distancias, añadiendo a la descripción perturbativa la influencia del vacío de QCD a través de sus condensados, calculados por medio de las reglas de suma debidas a Shifman, Vainshtein y Zakharov [SVZ79].

Aproximaciones semiclásicas: Para describir la influencia de las propiedades del vacío de QCD sobre la dinámica de la teoría, es posible realizar aproximaciones basadas en las soluciones de las ecuaciones de movimiento para los campos del lagrangiano clásico [SS98], como instantones, merones, monopolos, vórtices, etc.

N_C **grande:** El punto de partida es considerar que la estructura de la QCD es prácticamente independiente del número de colores, por lo que las cantidades calculadas en el límite $N_C \rightarrow \infty$ serían aplicables directamente a la QCD ($N_C = 3$) salvo correcciones $O(1/N_C)$. Los resultados obtenidos en simulaciones en retículo apoyan este tipo de cálculos.

SDE: Las ecuaciones de Schwinger-Dyson [Sch51, Dys49] proporcionan un sistema integro-diferencial de ecuaciones exacto para las funciones de Green. Para poder resolver los sistemas de ecuaciones resultantes es necesario truncarlos.

ERG: Las ecuaciones del grupo de renormalización proporcionan información acerca de la física de energías bajas a partir de la evolución de las cantidades calculadas a energías altas por medio de un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales (ver por ejemplo [BB01]).

En el capítulo siguiente se detallarán algunos aspectos de la evaluación numérica de las integrales de camino en retículo, que constituirá la herramienta de cálculo no perturbativa fundamental de este trabajo. En la parte II se hará uso del desarrollo

en producto de operadores de las funciones de Green, por lo que se presentará dicho método. Los métodos semiclásicos se discutirán en la parte III.

Capítulo 2

QCD en retículo

Contenidos

2.1. Teorías de campos en retículo	26
2.1.1. Formulación de Wilson	26
2.1.2. El límite de volumen infinito	28
2.1.3. El límite continuo	28
2.1.4. Rotación de Wick	29
2.2. Renormalización no perturbativa	29
2.3. Campos <i>gauge</i> en retículo	30
2.3.1. Calibración de la malla	31
2.3.2. <i>Gauge</i> de Landau	32
2.3.3. Copias de Gribov	32
2.3.4. El teorema de Zwanziger	34
2.4. Fermiones en retículo	35
2.4.1. Acción fermiónica	35
2.4.2. Variables de Grassmann	37

Actualmente, el único método capaz de dar valor predictivo a la QCD a energías bajas partiendo únicamente de primeros principios es el que se basa en la formulación

en retículo de Wilson [Wil74, Cre83, MM94], que propone una resolución numérica de las integrales de camino.

El punto de partida es una formulación de la teoría de campos en el formalismo de integrales de camino,

$$\langle T[\mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n)] \rangle = \frac{1}{Z} \int \left[\prod_x \mathcal{D}\phi(x) \right] e^{i\mathcal{S}(\phi)} \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) . \quad (2.1)$$

Una evaluación numérica de este tipo de integrales funcionales debe superar dos dificultades esenciales: (i) requiere una integración sobre un número de grados de libertad infinito $\prod_x \mathcal{D}\phi(x)$, que incluye los valores de todos los campos en cada uno de los puntos del espacio-tiempo; y (ii) la modulación introducida por el factor oscilante $e^{i\mathcal{S}(\phi)}$, que dificulta la convergencia de las integrales numéricas. En este capítulo se presenta una formulación en retículo de las teorías de campos que evita estas dificultades.

El estudio de la QCD en retículo es un campo muy activo en la actualidad, cuyas posibilidades crecen vertiginosamente con el desarrollo de nuevos ordenadores. Entre sus éxitos más notables cabe destacar la constatación de la existencia de un término lineal en el potencial estático quark-antiquark, que permite confiar razonablemente en que el confinamiento es una propiedad del lagrangiano de la QCD del que, hoy por hoy, no se conoce ninguna forma analítica de resolverlo. De este modo, la QCD en un retículo es la única forma de obtener predicciones a partir del lagrangiano de QCD a escalas no perturbativas y se ha convertido en una herramienta básica para entender la dinámica de los campos en QCD.

2.1. Teorías de campos en retículo

2.1.1. Formulación de Wilson

La solución propuesta por Wilson [Wil74] consiste en resolver las teorías de campos en un espacio-tiempo finito y euclídeo,

$$\Lambda = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) / 0 \leq x_\mu \leq a(L_\mu - 1)\} , \quad (2.2)$$

de extensión espacial $L_1 \times L_2 \times L_3$ y temporal L_4 , y mallado¹ a , en el que:

¹A lo largo del trabajo se considerarán sólo redes isótropas, es decir, con igual espaciado en todas las direcciones espacio-temporales, aunque una extensión de la discusión de esta sección a redes anisótropas resulta trivial. El uso de retículos anisótropos es común en el contexto de simulaciones de QCD a temperatura finita [Kan98, Lom02, Lae03].

- El número de variables de integración es finito, proporcional al número de nodos de la red ($L_1 \times L_2 \times L_3 \times L_4$), lo que permite plantear una evaluación numérica. Los retículos utilizados en el desarrollo de este trabajo van desde 12^4 a 32^4 , que unido a los grados de libertad de color, en el caso *gauge* puro, implica resolver integrales con del orden de 10^8 variables de integración.
- Al trabajar en un espacio euclídeo, la exponencial de exponente imaginario que modula la integral en un espacio de Minkowsky se convierte en una exponencial de exponente real negativo. En efecto, si realizamos una rotación de la cuarta componente en el espacio de Minkowsky, t^M , al plano complejo, $t^M \rightarrow -i\tau^E$, la acción resulta:

$$\mathcal{S}^M = \int d^3x dt^M \mathcal{L}^M \rightarrow \mathcal{S}^E = i \int d^3x d\tau^E \mathcal{L}^E, \quad (2.3)$$

y el exponente (2.1) resulta real negativo. La exponencial actúa, por tanto, como la distribución de probabilidad de un sistema termodinámico (donde el papel de la temperatura lo realiza el inverso de la constante de acoplamiento ²).

Por tanto, las teorías de campos en un retículo euclídeo presentan la ventaja, frente a la teoría en el continuo, de que permiten calcular las integrales de camino de forma numérica, empleando métodos de Montecarlo [CM82,PV90]. Por otra parte,

- La limitación de las distancias al valor de la malla, a , o de forma equivalente de los momentos, a^{-1} , regulariza la teoría, evitando la aparición de infinitos, que sólo reaparecerán en el límite físico, $a \rightarrow 0$.
- Al trabajar en el espacio euclídeo, se suaviza el comportamiento de la teoría, trasladándose los polos del propagador del espacio real al espacio complejo,

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2}. \quad (2.4)$$

Con las premisas anteriores, es posible una resolución numérica de las integrales de camino de una teoría de campos en un espacio reticulado. No obstante, para poder aplicar los resultados a la teoría original resulta necesario extenderlos a un volumen infinito, continuo y con métrica minkowskiana.

² Siguiendo esta analogía, hablaremos de configuraciones de campos *termalizadas* en referencia a las producidas con esta distribución de probabilidad.

2.1.2. El límite de volumen infinito

Al trabajar en un volumen finito es necesario adoptar una convención para las condiciones de contorno. La solución más extendida, que se utilizará en este trabajo, es adoptar condiciones de contorno periódicas, que permiten recuperar la invariancia por traslación que se rompe al trabajar en un volumen finito. Algunos autores (el grupo *ALPHA* [Som97], por ejemplo) utilizan condiciones de contorno diferentes de las periódicas, incorporando la finitud espacio-temporal en la definición del esquema de renormalización y, a partir del método de la funcional de Schrödinger, obtienen la constante de acoplamiento de QCD.

En principio, la extrapolación a volumen infinito requiere la realización de todas las simulaciones a diferentes volúmenes, manteniendo los demás parámetros constantes, lo que es enormemente costoso en tiempo de cálculo. Por lo general, resulta satisfactorio trabajar con simulaciones a volumen finito, una vez que el volumen utilizado es mayor que las escalas físicas relevantes ³.

Los efectos de volumen finito pueden estimarse por medio de tratamientos perturbativos [MM94], si bien en este trabajo no se analizará en profundidad el problema. Se considerará que los efectos de volumen finito no tienen una influencia fundamental cuando los resultados para diferentes volúmenes sean compatibles entre sí.

2.1.3. El límite continuo

Una de las etapas más delicadas es el paso al límite continuo, $a \rightarrow 0$, o límite físico. Previamente se requiere un proceso de renormalización, dado que en caso contrario reaparecerían las divergencias. De nuevo, es necesario tener en cuenta que las mallas utilizadas deben ser más pequeñas que las escalas hadrónicas con las que se trabaja, de forma que los errores de malla finita (la diferencia entre los resultados a malla finita y malla nula, también conocidos como errores de discretización), no sean críticos a la escala física de interés.

Un tipo de errores de discretización de especial relevancia es el que procede de la ruptura de la simetría de Lorentz del espacio continuo al trabajar en un retículo

³Por ejemplo, para una simulación de mallado $a = 0.1$ fm, una red de $L = 32$ tendría un volumen de $(3.2 \text{ fm})^4$, mayor que la escala típica de hadronización, ≈ 1 fm.

hipercúbico. Más adelante (§3.2.1) se presentará un método para minimizar la influencia de este tipo de errores sobre los resultados.

2.1.4. Rotación de Wick

Los resultados de las integrales de camino realizadas de forma numérica en el espacio euclídeo deben extenderse al espacio de Minkowsky, el único que tiene sentido físico. A este proceso se denomina rotación de Wick (ver figura 2.1), y se basa en una extensión de las funciones de correlación en el espacio euclídeo a tiempos complejos, de los que un caso particular corresponde al espacio de Minkowsky.

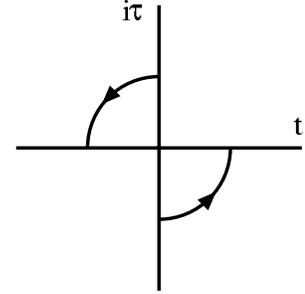


Figura 2.1: *Esquema ilustrativo de la rotación de Wick.*

Para que esta extensión sea posible es necesario que el lagrangiano de la teoría cumpla ciertos requisitos, contenidos en los axiomas de Wightman, Osterwalder y Schrader [OS75, GJ86]. Puesto que el propósito de esta sección es simplemente introducir la metodología de las simulaciones en retículo, basta añadir que en el caso de la QCD dicha continuación es posible dado que se satisface la condición de *positividad* de Osterwalder-Schrader, que asegura que las funciones de Green sean analíticas en el paso del espacio de Minkowsky al euclídeo (para una discusión más detallada ver [MM94]).

2.2. Renormalización no perturbativa

A fin de poder comparar los resultados numéricos obtenidos por medio de regularización en retículo con los resultados perturbativos, por lo general obtenidos mediante regularización dimensional, es necesario utilizar esquemas de renormalización independientes de la regularización. A priori, para renormalizar cantidades obtenidas en retículo por medio de teoría de perturbaciones, sería necesario obtener los polos en a^{-1} , a^{-2} , etc., para a continuación poder eliminarlos, basándose en algún esquema de renormalización [LM93]. Aplicar teoría de perturbaciones en retículo, entre otros problemas, presenta la dificultad de su carácter asintótico -no convergente- y la utilización de la constante de acoplamiento desnuda, g_0 , cuyo valor se aleja mucho de la renormalizada.

En este trabajo se hará uso del esquema de renormalización intrínsecamente no perturbativo propuesto por Martinelli *y col.* [MPS95], denominado esquema de sustrac-

ción de momento (MOM). El punto de partida en este tipo de esquemas es identificar las cantidades renormalizadas, cuando se evalúan a la escala de renormalización, con magnitudes conocidas. En concreto, la prescripción MOM establece que la cantidad renormalizada, evaluada a la escala de renormalización, sea igual que su valor desnudo, cambiando las constantes de acoplamiento desnudas por las renormalizadas.

Aplicado a un operador cualquiera, \mathcal{O} , el esquema MOM establece que el valor renormalizado $\mathcal{O}_{R,\mu}(p)$ evaluado a la escala de renormalización, μ , es igual al valor a nivel de árbol, $\mathcal{O}_{t.l.}(p)$:

$$\mathcal{O}_{R,\mu}(p)|_{p^2=\mu^2} = \mathcal{O}_{t.l.}(p)|_{p^2=\mu^2} , \quad (2.5)$$

lo que permite obtener la constante de renormalización $Z_{\mathcal{O}}(\mu, \epsilon)$ que renormaliza al operador desnudo, $\mathcal{O}_0(\mu, \epsilon)$, con ϵ el parámetro de regularización, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{R,\mu}(p)|_{p^2=\mu^2} &= Z_{\mathcal{O}}^{-1}(\mu, \epsilon)\mathcal{O}_0(\mu, \epsilon) = \mathcal{O}_{t.l.}(p)|_{p^2=\mu^2} ; \\ Z_{\mathcal{O}}(\mu, \epsilon) &= \frac{\mathcal{O}_0(\mu, \epsilon)}{\mathcal{O}_{t.l.}(\mu)} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3. Campos *gauge* en retículo

En los apartados anteriores se han presentado características generales de las teorías de campos en retículo; a continuación se particularizará para el caso de los campos gluónicos, mientras que la problemática de los campos fermiónicos será introducida brevemente en la sección siguiente.

El procedimiento estándar para introducir los campos gluónicos en retículo es asociar las matrices $SU(3)$,

$$U_{\mu}(x) = e^{iag_0 \int_0^1 d\tau A_{\mu}^c(x+\tau a\hat{\mu})\frac{\lambda_c}{2}} , \quad (2.7)$$

a la línea que une dos puntos consecutivos de la red, x y $x + a\hat{\mu}$. Esto se conoce por el término inglés *link*, que traduciremos en esta memoria como *eslabón*. Al mismo eslabón, orientado en sentido opuesto, le corresponde la matriz inversa: $U_{-\mu}(x + a\hat{\mu}) = U_{\mu}^{-1}(x)$.

La forma más simple de construir una acción en retículo que en el límite continuo ($a \rightarrow 0$) recupere la acción Yang-Mills es la que parte de la utilización del objeto invariante *gauge* más sencillo, la *plaqueta*. Ésta se define como el producto de las matrices U (2.7) en un cuadrado:

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x) . \quad (2.8)$$

Desarrollando esta expresión en el límite $a \rightarrow 0$ se puede demostrar que:

$$S_{\text{Ret}} \equiv \sum_{x,\mu,\nu} -\frac{\beta}{3} \text{Re} [\text{Tr} (1 - \Pi_{\mu\nu}(x))] = S_{\text{Y.M.}} + O(a^2), \quad (2.9)$$

siendo $\beta = 6/g_0^2$.

Es posible construir acciones mejoradas (que reproduzcan, por ejemplo, la acción Yang-Mills salvo términos $O(a^4)$, etc.) si se consideran objetos más extendidos que la plaqueta [MM94], aunque esto supone un aumento considerable del tiempo de cálculo. En este trabajo se hará uso de (2.9) para realizar simulaciones en el sector Yang-Mills o *gauge* puro; es lo que se conoce como acción de Wilson.

2.3.1. Calibración de la malla

El único parámetro de entrada de la simulación es, por tanto, la constante de acoplamiento desnuda, g_0 , o, de forma equivalente, el valor de β ; el valor de la malla debe ser determinado a posteriori. El procedimiento estándar para determinar el valor de la malla es obtener una cantidad en retículo, necesariamente adimensional, y compararla con el resultado experimental, extrayendo el valor de la malla. Pueden utilizarse magnitudes fermiónicas, como am_ρ o af_π , a las que se tiene acceso experimental, o la tensión de la cuerda, $a\sqrt{\sigma}$, que proporciona información acerca de la parte lineal del potencial estático quark-antiquark y a la que es posible tener acceso a partir de simulaciones *gauge* puras.

Si denominamos $W(R, T)$ al producto de las matrices $U_\mu(x)$ en un cuadrado de extensión temporal T y espacial R , se puede definir el potencial estático quark-antiquark, $V(R)$, como:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W(R, T) = e^{-TV(R)}, \quad (2.10)$$

donde, si hay confinamiento, en el límite $R \rightarrow \infty$ se tiene que $V(R) \propto \sigma R$. Esto se conoce como ley de área de Wilson, y permitió obtener de una forma no perturbativa la primera indicación de confinamiento en simulaciones *gauge* puras.

En este trabajo se hará uso de la calibración absoluta llevada a cabo por Becirevic y col. [BBG98], en la que se ajusta el valor de la malla a partir de la evaluación de un gran número de variables mesónicas con una acción en retículo mejorada, y de las calibraciones relativas $\left(\frac{a(\beta_1)}{a(\beta_2)}\right)$ basadas en la tensión de la cuerda de Bali y Schilling [BS93].

Existe una correspondencia biunívoca entre el valor de la constante de acoplamiento desnuda, g_0 (o $\beta = 6/g_0^2$), y el valor de la malla a , por lo que a lo largo del trabajo se hará referencia a una u otra cantidad indistintamente para identificar el retículo que se utiliza.

2.3.2. Gauge de Landau

Si bien las magnitudes físicas son independientes de la elección del *gauge* otras, como las funciones de Green, dependen del *gauge*, por lo que debemos elegir un criterio para fijarlo.

En este trabajo se utilizará el *gauge* de Landau caracterizado por las condiciones:

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = 0 ; \quad \int d^4x A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) = \text{mín.} , \quad (2.11)$$

es decir, de entre todos los que satisfacen la condición de Landau, $\partial^\mu A_\mu^a = 0$, el que da un valor mínimo al condensado A^2 , conocido como *gauge de Landau absoluto*.

En retículo, la condición (2.11) se traduce en la condición sobre la derivada discreta,

$$\sum_\mu (A_\mu^a(x) - A_\mu^a(x + a\hat{\mu})) = 0 , \quad (2.12)$$

que puede expresarse a través de la minimización de la función

$$F_U(g) = -\text{ReTr} \sum_x \sum_\mu U_\mu^{(g)}(x) \quad (2.13)$$

respecto a todas las posibles transformaciones *gauge* (dadas por el índice (g)). Fijar el *gauge* se traduce, entonces, en transformar cada matriz $U_\mu(x)$ de modo que su contribución a $F_U(g)$ sea mínima. Cuando el proceso de minimización converja, se habrá llegado a la fijación del *gauge*. No obstante, el proceso no tiene por qué ser unívoco.

2.3.3. Copias de Gribov

El problema, constatado por Gribov [Gri78] para el *gauge* de Landau, no es exclusivo del cálculo en retículo; aparece cuando hay soluciones múltiples de la condición de fijación del *gauge*. A cada una de estas soluciones se conoce como copia de Gribov. A priori, la existencia de copias de Gribov podría invalidar el cálculo no perturbativo,

dado que al tratar de fijar el *gauge* para una configuración de campos, el procedimiento de fijación del *gauge* podría conducir indistintamente a una solución u otra.

Si denominamos $\{\mathcal{A}\}$ al conjunto de configuraciones que están relacionadas entre sí por una transformación *gauge*, una condición de fijación de *gauge*, $F(A) = 0$, no tiene porqué tener solución única (figura 2.2a), o dicho de otro modo, una condición $F(A) = 0$ no tiene porqué ser suficiente para fijar completamente el *gauge*.

En este contexto, se define una región modular fundamental (FMR, Λ) como un subespacio del espacio *gauge* en el que la condición de fijación tiene solución única (no tiene copias de Gribov). El *gauge* de Landau, $\partial^\mu A_\mu^a = 0$, no es una región modular fundamental [Gri78], sin embargo puede demostrarse que está contenida en la región Ω determinada por un signo positivo del determinante de Faddeev-Popov, $Det(\mathfrak{F}_{\alpha x, \beta, y})$, también conocida como región de Gribov.

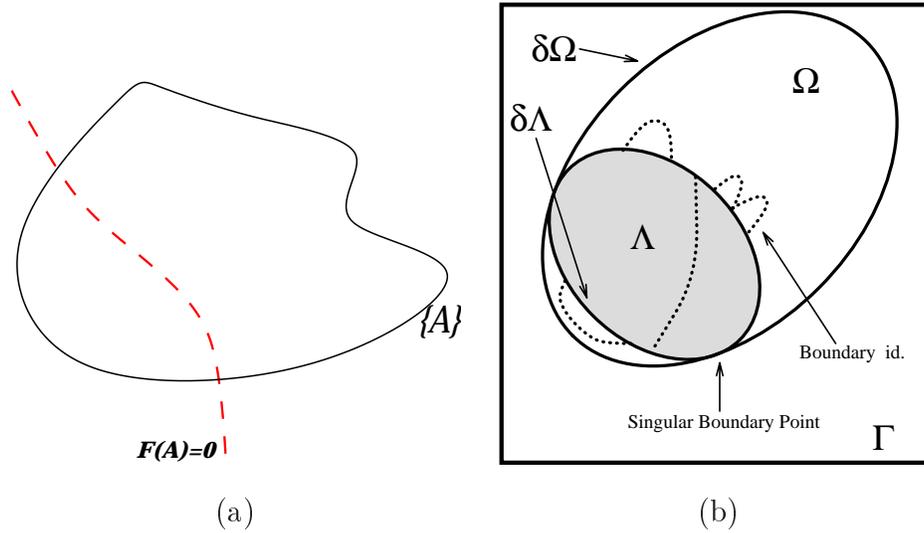


Figura 2.2: (a) Ejemplo en que la condición de fijación de gauge tiene dos soluciones para una órbita $\{\mathcal{A}\}$ determinada. (b) Representación esquemática de la región de Gribov. Figura extraída de [SBZ03].

Algunos autores [MO90, DZ91, Baa92, Cuc98] argumentan que el hecho de aplicar la condición adicional de exigir que la función:

$$F_{(g)}[A] = \int d^4x A^{(g)a}_\mu(x) A^{(g)\mu}_a(x) \quad (2.14)$$

sea un mínimo absoluto respecto a los cambios de *gauge*, delimita una región modular fundamental dentro de la región de Gribov, Ω (ver figura 2.2b), lo que sería suficiente

para eliminar el posible error sistemático debido a la presencia de copias de Gribov en el *gauge* de Landau absoluto.

En los estudios en retículo nada asegura que el método numérico sea capaz de encontrar el mínimo absoluto de $F_{(g)}(A)$ [MPR91], por lo que suele hablarse de copias de Gribov en retículo, aunque su relación con las copias de Gribov en el continuo no es inmediata. En cualquier caso, en los estudios realizados sobre la influencia de las copias de Gribov en retículo sobre cantidades renormalizadas en esquemas de tipo MOM, los resultados han sido negativos en todos los casos [Cuc97, Lan01, GPT02].

En este trabajo no se ha contabilizado la existencia de ninguna configuración de campos cuya contribución a las funciones de Green la separe significativamente del resto, por lo que en caso de existir, las copias de Gribov no parecen tener una influencia importante sobre los resultados.

2.3.4. El teorema de Zwanziger

Zwanziger [Zwa91] restringiendo la integral de camino a la región de Gribov, Ω , demostró que el propagador gluónico obtenido en retículo es menos divergente en el IR profundo que p^{2-D} , con D la dimensión del espacio. De hecho, establece que en el límite de volumen infinito, éste debe anularse, independientemente del valor de la malla:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} G^{(2)}(0) = 0 . \quad (2.15)$$

El resultado anterior por ahora ha sido difícil de contrastar con los resultados en retículo, exceptuando quizás el trabajo de Cucciari *y col.* [CMT03] en SU(2) y 3 dimensiones con volúmenes muy grandes. En SU(3) y 4 dimensiones no se ha encontrado este límite (en particular no se encuentra en las simulaciones realizadas en este trabajo), aunque puede deberse a la dificultad de introducir volúmenes grandes en estas condiciones (SU(3) y 4 dimensiones requiere más memoria de cálculo).

La fijación del *gauge* de Landau en retículo permite obtener una cota para el propagador gluónico a impulso nulo: si consideramos una configuración de campos *gauge* que satisfaga la condición de Landau, $\partial^\mu A_\mu^a = 0$, y realizamos la transformación

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A'^a_\mu(x) = A_\mu^a(x) - \frac{1}{V} \sum_x A_\mu^a(x) , \quad (2.16)$$

la contribución a A^2 disminuye. Para este *gauge*, se tiene que

$$\sum_x A'^a_\mu(x) = 0 , \quad (2.17)$$

con lo que $\tilde{A}'_\mu{}^a(0) = 0$ y necesariamente el propagador gluónico a impulso nulo es 0.

Este resultado es válido en el continuo y para volumen infinito. En un retículo, la transformación (2.16) no es una transformación *gauge*, pero puede realizarse una transformación similar que permite establecer una cota sobre el valor de $\sum_x A_\mu^a(x)$,

$$\frac{1}{V} \sum_x A_\mu^a(x) \leq 2 \tan \frac{\pi}{L} . \quad (2.18)$$

El resultado de Zwanziger, que utiliza además la condición de positividad del operador de Faddeev-Popov, es más restrictivo, lo que le permite determinar que el propagador se anula a impulso nulo.

2.4. Fermiones en retículo

Este trabajo se centrará en el análisis de funciones de Green gluónicas en la aproximación *quenched*, es decir, sin que aparezcan quarks ni en los estados externos (sólo se calculan funciones de Green gluónicas) ni en los estados intermedios (en esta aproximación se desprecian los bucles fermiónicos). De forma equivalente podría decirse que se trata de un estudio de *gluodinámica* o una teoría Yang-Mills pura. No obstante, por completitud y para justificar el extendido uso de la aproximación *quenched*, se introducirá a continuación la problemática de la introducción de quarks en la acción de la simulación en retículo.

2.4.1. Acción fermiónica

Una discretización lo más simple posible del lagrangiano de quarks daría una contribución a la acción debida a los campos fermiónicos:

$$S_q = \left\{ -\frac{1}{2a} \sum_{\pm\mu} [\bar{q}(x) \gamma_\mu U_\mu(x) q(x + a\hat{\mu})] + m \bar{q}(x) q(x) \right\} , \quad (2.19)$$

con $U_\mu(x)$ la matriz $SU(3)$ procedente de la parte gluónica, definida en (2.7), y $\hat{\mu}$ el vector unitario en la dirección μ . Esta acción, no obstante, presenta 16 fermiones situados uno en cada vértice de la zona Brillouin.

Ante el problema de la aparición de quarks suplementarios en los vértices del hipercubo, una posibilidad es considerarlos como sabores independientes (*Staggered Fermions* [KS75]), si bien la alternativa de asociarles una masa que tiende a infinito en el

límite físico [Wil75] ha sido mucho más extendida:

$$S_q = \sum_x \left\{ \frac{1}{2a} \sum_{\pm\mu} [\bar{q}(x)(r - \gamma_\mu)U_\mu(x)q(x + a\hat{\mu})] + \bar{q}(x)(m + \frac{r}{a})q(x) \right\}, \quad (2.20)$$

donde se ha introducido un término de masa en r que provoca que las soluciones espurias sean infinitamente pesadas en el límite físico ($a \rightarrow 0$). De este modo, dichas soluciones se hacen formalmente inexcitables, con lo que se desacoplan de la dinámica. Ésta es la acción de Wilson. No obstante, esta acción no nos permite introducir directamente fermiones de masa nula, que sería de gran interés fenomenológico.

El problema es aún más complejo, el teorema de “No-Go” de Nielsen y Ninomiya [NN81a, NN81b, NN81c], establece la imposibilidad introducir fermiones de masa nula en el retículo. En concreto, asegura que cualquier teoría descrita por un lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\phi}(x)D(x, y)\phi(y), \quad (2.21)$$

no puede satisfacer simultáneamente las condiciones:

- (i) Campos locales, $\phi(x)$;
- (ii) El propagador recupera la forma correcta en el límite físico, $\tilde{D}(p) \approx i\gamma_\mu p_\mu + O(a)$;
- (iii) $\tilde{D}^{-1}(p)$ tiene un solo polo (en $p = 0$);
- (iv) $\{D, \gamma_5\} = 0$;

Usualmente se sacrifica el último punto, utilizándose campos fermiónicos que no son invariantes frente a transformaciones quirales continuas, $\psi \rightarrow e^{i\epsilon(x)\gamma_5}\psi$. Esto imposibilita la introducción de fermiones sin masa (neutrinos, etc.), dificultando el trabajo de QCD en el límite de masas m_u, m_d nulas.

Recientemente han surgido alternativas a la acción de Wilson (2.20) con un mejor comportamiento quiral: *Overlap* [Neu98b, Neu98c] y *Domain Wall* [Kap92], en las que $\{D, \gamma_5\}$ se anula en el límite continuo. Más allá de los detalles de ambas formulaciones, se trata de dos versiones de la misma idea [Neu98a, ZJ01, Bor04], la introducción de campos fermiónicos que satisfacen la relación de Ginsparg Wilson,

$$\gamma_5 D^{-1} + D^{-1} \gamma_5 = f(p^2) \gamma_5, \quad (2.22)$$

con $f(p^2)$ una función local cualquiera que en el límite físico tienda a 0 (basta, por tanto, con considerar $f(p^2) = a$).

Estas formulaciones presentan el inconveniente de que suponen un tiempo de cálculo dos órdenes de magnitud superior al del lagrangiano fermiónico de Wilson [Jan02], aunque en los últimos años han proporcionado numerosos éxitos.

2.4.2. Variables de Grassmann

La dificultad fundamental para la introducción de campos fermiónicos en el retículo es que anticonmutan entre sí. Hasta ahora no se ha encontrado la forma de realizar una simulación con variables de Grassmann directamente, es decir, con variables numéricas que anticonmuten. Por tanto, la integración numérica de las variables fermiónicas en las integrales de camino debe obligatoriamente pasar por una integración gaussiana de los grados de libertad fermiónicos. En un espacio euclídeo y con una acción:

$$S_q = \sum_{x,y} \bar{\psi}(y) Q[U]_{y,x} \psi(x) , \quad (2.23)$$

se tiene que:

$$\int [d\bar{\psi}d\psi] e^{-S_q} = \text{Det} [Q[U]] , \quad (2.24)$$

y para el propagador fermiónico,

$$\int [d\bar{\psi}d\psi] e^{-S_q} \bar{\psi}(x) \psi(y) = \text{Det} [Q] Q_{xy}^{-1} . \quad (2.25)$$

De un modo análogo, cualquier función de Green fermiónica puede expresarse en función de Q^{-1} y $\text{Det} [Q]$.

En el caso concreto de la función generatriz de las funciones de Green gluónicas (1.13), contando los grados de libertad fermiónicos:

$$Z[J_\mu^a] = \int \left[\prod_{a,\mu,x} dA_\mu^a(x) \right] \left[\prod_{\mu,x} d\bar{\psi}_\mu(x) d\psi_\mu(x) \right] e^{-iS_{Y.M.} - iS_q - i \int d^4x J_\mu^a A_\mu^a} \quad (2.26)$$

se puede separar la contribución fermiónica,

$$Z[J_\mu^a] = \int \left[\prod_{a,\mu,x} dA_\mu^a(x) \right] \text{Det} [Q[A_\mu^a]] e^{-iS_{Y.M.} - i \int d^4x J_\mu^a A_\mu^a} , \quad (2.27)$$

que sólo contribuye a través del factor $\text{Det}[Q]$. Integrar contando los grados de libertad fermiónicos requiere entonces una evaluación del determinante fermiónico en cada iteración del método de Montecarlo.

La aproximación *quenched* [HP81,MPR81], que se utilizará en este trabajo, consiste en considerar $\text{Det}[Q] = \text{cte.}$, independiente del campo *gauge*⁴. Esta aproximación permite realizar la integración Montecarlo pesando las configuraciones sólo con la parte gluónica de la acción, con la consiguiente disminución del tiempo de cálculo.

La aproximación equivale a despreciar las contribuciones de los bucles de quark, debido a que los grados de libertad de quark han sido suprimidos de la acción con la que se producen las configuraciones. Esta hipótesis se ve apoyada por resultados fenomenológicos, así como por las estimaciones procedentes del cálculo en retículo, que para las masas de hadrones permite estimar la contribución de los bucles de quark en torno al 10 %.

⁴El resultado es independiente del valor de dicha constante, dado que al calcular $\partial \text{Ln}Z[J]/\partial J$ el valor de la constante desaparece.

Parte II

Análisis de las funciones de Green

Capítulo 3

Cálculo de α_s a partir de las funciones de Green

Contenidos

3.1. El método de las funciones de Green	42
3.1.1. Estructura tensorial	43
3.1.2. Renormalización MOM del propagador gluónico	45
Cálculo de α_s a partir del propagador	46
3.1.3. Constante de acoplamiento renormalizada	47
3.2. Implementación en retículo	49
3.2.1. Errores hipercúbicos	50
Ruptura de la simetría de Lorentz	51
Método de extrapolación a $p^{[4]} = 0$	52
3.2.2. Tripletes de momento	52
3.3. Resultados perturbativos y correcciones en potencia	54
3.3.1. Series perturbativas	54
3.3.2. Resultados numéricos	56
3.3.3. Correcciones en potencia	58

La evaluación en retículo de α_s a partir del vértice a tres gluones fue propuesta por Parrinello *y col.* [Par94], y explorada a continuación por Allés *y col.* [AHP97] y Boucaud

y col. [BLM98a, BLM98b], etc. Se basa en la implementación de métodos de renormalización no perturbativa para extraer la constante de acoplamiento renormalizada a partir de la evaluación en retículo de funciones de Green gluónicas. Posteriormente, han sido implementados métodos de renormalización similares para los vértices quark-gluón [SK02] y gluón-fantasma [SAH97], con definiciones alternativas de los esquemas de renormalización.

En este marco, se presentará a continuación el cálculo de las funciones de Green que serán objeto de análisis en este trabajo. En primer lugar se introduce el método en el continuo, para particularizar más adelante en su realización en retículo. Por último, se presentarán los resultados previos, basados en la teoría de perturbaciones, que motivan el análisis de los capítulos siguientes.

3.1. El método de las funciones de Green

Las funciones de Green gluónicas a n puntos en el espacio de momentos vienen dadas por:

$$G_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}^{(n) a_1 a_2 \dots a_n}(p_1, p_2, \dots, p_n) = \left\langle T^* \left(\tilde{A}_{\mu_1}^{a_1}(p_1) \tilde{A}_{\mu_2}^{a_2}(p_2) \dots \tilde{A}_{\mu_n}^{a_n}(p_n) \right) \right\rangle, \quad (3.1)$$

donde T^* es el producto cronológico de Wick de los operadores en el espacio de momentos ¹, $\langle \dots \rangle$ representa el valor esperado en el vacío y $\tilde{A}_\mu^a(p)$ es la transformada de Fourier de $A_\mu^a(x)$:

$$\tilde{A}_\mu^a(p) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^4x e^{ipx} A_\mu^a(x). \quad (3.2)$$

En esta sección se expone el método que permite obtener la constante de acoplamiento renormalizada en los esquemas de sustracción de momento (MOM) a partir de la evaluación de las funciones de Green gluónicas. La aplicación del método al caso de la obtención no perturbativa de las funciones de Green a partir de simulaciones en retículo se presentará en la sección siguiente.

¹En el espacio de Minkowsky, el producto temporal está relacionado con el orden en el que aparecen los polos. En coordenadas euclídeas, el producto temporal no tiene ningún efecto, a pesar de lo cual se mantiene en lo que sigue, por coherencia con los trabajos anteriores [BLM98a, BLM98b, BBL99, BBL00, BBR00, BYL00].

3.1.1. Estructura tensorial

Antes de renormalizar es necesario identificar la forma tensorial que tienen las funciones de Green, sobre cuya parte escalar se aplicarán las condiciones de renormalización.

En el *gauge* de Landau, la estructura tensorial de las funciones de Green viene determinada por la condición de fijación del *gauge* (2.11), que en el espacio de momentos equivale a $p^\mu \tilde{A}_\mu^a(p) = 0$. Todas las funciones de Green gluónicas deben ser ortogonales a cualquiera de los momentos entrantes.

En el caso del propagador gluónico, esta exigencia fija por completo la estructura tensorial del propagador, que sólo puede tener componentes en el tensor $g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$. El propagador puede expresarse por tanto como:

$$\left\langle \tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \right\rangle \equiv G_{\mu\nu}^{(2)ab}(p, -p) = G^{(2)}(p^2) \delta^{ab} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (3.3)$$

La relación anterior define el factor de forma escalar, $G^{(2)}(p^2)$, que puede extraerse mediante la proyección:

$$G^{(2)}(p^2) = \frac{\delta_{ab} g^{\mu\nu}}{3(N_C^2 - 1)} \left\langle \tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \right\rangle. \quad (3.4)$$

En cuanto a la función de Green a tres puntos, o vértice a tres gluones,

$$G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p_1, p_2, p_3) = \left\langle \tilde{A}_\mu^a(p_1) \tilde{A}_\nu^b(p_2) \tilde{A}_\rho^c(p_3) \right\rangle, \quad (3.5)$$

su forma tensorial depende no sólo de la elección del *gauge*, sino de la cinemática; en este trabajo se hará uso del vértice a tres gluones en dos cinemáticas diferentes, representadas en las figuras 3.1(a) y (b), correspondientes respectivamente a:

$$\text{Vértice simétrico :} \quad p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = \mu^2; \quad (3.6)$$

$$\text{Vértice asimétrico :} \quad p_1^2 = p_2^2 = \mu^2, \quad p_3^2 = 0. \quad (3.7)$$

En el caso simétrico (3.6), hay dos tensores linealmente independientes que son ortogonales a los momentos entrantes (son los que persisten, por tanto en el *gauge* de Landau): el tensor que proporciona la forma tensorial del vértice a nivel de árbol,

$$T_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = [\delta^{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)^{\mu_3} + \text{perm. cicl.}] \prod_{i=1,3} \left(\delta_{\mu_i \mu'_i} - \frac{p_{i \mu'_i} p_{i \mu_i}}{p_i^2} \right), \quad (3.8)$$

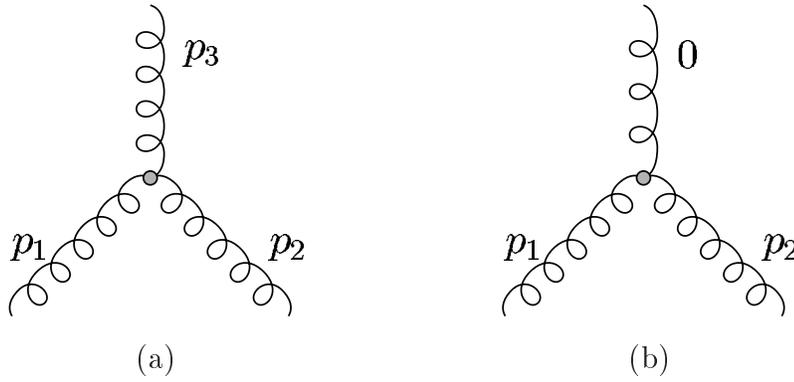


Figura 3.1: Vértices a tres gluones con cinemática (a) simétrica y (b) asimétrica que se utilizarán en trabajo para definir no perturbativamente la constante de acoplamiento.

y la combinación $(p_1 - p_2)_{\mu_3}(p_2 - p_3)_{\mu_1}(p_3 - p_1)_{\mu_2}$. De este modo, la función de Green puede expresarse como:

$$G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p_1, p_2, p_3) = f^{abc} \left[G^{(3)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2) T_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, p_3) + H(p_1^2, p_2^2, p_3^2) \frac{(p_1 - p_2)_\rho (p_2 - p_3)_\mu (p_3 - p_1)_\nu}{2\mu^2} \right], \quad (3.9)$$

de donde es posible extraer el factor de forma escalar ² $G^{(3)}(p_1^2, p_2^2, p_3^2)$ mediante la proyección siguiente:

$$G^{(3)}(\mu^2, \mu^2, \mu^2) = \frac{1}{108\mu^2} G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p_1, p_2, p_3) \left[T^{\mu\nu\rho} + \frac{(p_1 - p_2)^\rho (p_2 - p_3)^\mu (p_3 - p_1)^\nu}{2\mu^2} \right] f_{abc}. \quad (3.10)$$

En el caso asimétrico (3.7), por contra, sólo un tensor sobrevive en el *gauge* de Landau, siendo por tanto idéntico al tensor a nivel de árbol; el factor de forma escalar se extrae en este otro caso por medio de la proyección:

$$G^{(3)}(\mu^2, \mu^2, 0) = \frac{1}{144\mu^2} f_{abc} G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p, -p, 0) \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) p^\rho. \quad (3.11)$$

En ninguno de los dos casos considerados puede haber contribución en el tensor completamente simétrico, d^{abc} , debido a la simetría de Bose de los gluones, que hace

²En principio, tan sólo la parte que tiene la misma estructura tensorial que el vértice a nivel de árbol resulta de interés, debido al esquema de renormalización utilizado, como se verá en la sección siguiente.

que las funciones de Green sean invariantes frente al intercambio de colores, momentos e índices de Lorentz, fijando la estructura de color a través del tensor completamente antisimétrico, f^{abc} .

3.1.2. Renormalización MOM del propagador gluónico

Frente a los esquemas de renormalización de tipo MS, definidos en el apartado 1.3, cuyo uso está ligado a la teoría de perturbaciones y, más concretamente, para el caso particular de regularización dimensional (que resultan de escasa utilidad en los cálculos no perturbativos), se puede definir un esquema de renormalización de *sustracción de momento* o MOM (ver §2.2), que presenta la ventaja de que resulta sencillo relacionar dos cantidades obtenidas a través de métodos de regularización diferentes. Este método está especialmente indicado, por tanto, para comparar cantidades obtenidas no perturbativamente a través de simulaciones en retículo con cantidades basadas en el cálculo perturbativo, usualmente obtenidas a través de regularización dimensional.

La prescripción MOM para la renormalización del propagador gluónico establece que el propagador renormalizado, cuando se evalúa a la escala de renormalización, μ , toma la misma forma que a nivel de árbol, es decir,

$$G_R^{(2)}(p^2, \mu^2) \Big|_{p^2=\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} . \quad (3.12)$$

La renormalización del propagador viene dada por la constante de renormalización del campo gluónico, Z_3 (ver §1.3), de modo que el propagador renormalizado se expresa como:

$$\begin{aligned} G_R^{(2)}(p^2, \mu^2) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_3(\mu^2, \Lambda)} G_0^{(2)}(p^2, \Lambda) \\ &= \frac{1}{Z_3(\mu^2, \Lambda)} G_0^{(2)}(p^2, \Lambda) + O(1/\Lambda) , \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $G_0^{(2)}(p^2, \Lambda)$ es el propagador desnudo (sin renormalizar) y Λ el parámetro de regularización³. Para el esquema MOM, por tanto,

$$Z_3^{\text{MOM}}(\mu^2, \Lambda) = \mu^2 G_0^{(2)}(\mu^2, \Lambda) + O(1/\Lambda) . \quad (3.14)$$

En un esquema de renormalización cualquiera (*ER*) es posible escribir:

$$p^2 G_{ER}^{(2)}(p^2, \mu^2) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{p^2 G_0^{(2)}(p^2, \Lambda)}{Z_3^{ER}(\mu^2, \Lambda)} = \frac{Z_3^{\text{MOM}}(p^2, \Lambda)}{Z_3^{ER}(\mu^2, \Lambda)} + O(1/\Lambda) , \quad (3.15)$$

³Equivale al mallado, a^{-1} , en regularización en retículo o a ϵ^{-1} en regularización dimensional

que implica que, salvo términos subdominantes en Λ , la dependencia con el parámetro de regularización es independiente del esquema de renormalización utilizado (el término de la izquierda no depende de Λ). Por tanto, es posible escribir [Gru84, BBL00]:

$$Z_3(\mu^2, \Lambda) = Z_3^R(\mu^2)Z_3^b(\Lambda) + O(1/\Lambda), \quad (3.16)$$

donde $Z_3^R(\mu^2)$ depende del esquema de renormalización y no del método de regularización, cuya influencia está contenida en el factor $Z_3^b(\Lambda)$.

Utilizando las expresiones (3.13) y (3.15) es posible establecer una relación entre los propagadores en dos esquemas de renormalización cualesquiera, por ejemplo, entre MOM y $\overline{\text{MS}}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{d \ln \mu^2 G_0^{(2)}(\mu^2, \Lambda)}{d \ln \mu^2} &\equiv \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{d \ln Z_3^{\text{MOM}}(\mu^2, \Lambda)}{d \ln \mu^2} = \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{d \ln Z_3^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2, \Lambda)}{d \ln \mu^2} + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{d \ln \mu^2 G_{\overline{\text{MS}}}^{(2)}(\mu^2, \mu^2)}{d \ln \mu^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

La evolución del propagador con el momento suele expresarse a través de la denominada dimensión anómala,

$$\gamma^R(\alpha) = \frac{\partial \ln Z_3^R(\mu)}{\partial \ln \mu^2} = -\frac{\gamma_0^R}{4\pi}\alpha - \frac{\gamma_1^R}{(4\pi)^2}\alpha^2 - \frac{\gamma_2^R}{(4\pi)^3}\alpha^3 - \dots, \quad (3.18)$$

cuyos coeficientes pueden ser evaluados perturbativamente. La expresión (3.17) permite entonces relacionar los coeficientes de la dimensión anómala para los esquemas $\overline{\text{MS}}$ y MOM a partir de cantidades conocidas [DOT98, CS00, CR00]:

$$\gamma^{\text{MOM}}(\alpha) = \gamma^{\overline{\text{MS}}}(\alpha) + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{d}{d\alpha} \left(\ln[\mu^2 G_{\overline{\text{MS}}}^{(2)}(\mu^2, \mu^2) + O(1/\Lambda)] \right) \beta(\alpha, \Lambda) \right). \quad (3.19)$$

La dificultad de este cálculo estriba en la necesidad de mantener los términos finitos y subdominantes en el parámetro de regularización, que sólo podrán despreciarse tras derivar y tomar el límite.

Cálculo de α_s a partir del propagador

En principio, la condición de renormalización del propagador gluónico en los esquemas MOM, dada por (3.12), es independiente de la prescripción para renormalizar el vértice. No obstante, en la expresión (3.19) se observa cómo los coeficientes del desarrollo en α_s de la dimensión anómala dependen del esquema elegido para la renormalización de la constante de acoplamiento a través de la función $\beta(\alpha_s)$.

De hecho, para obtener $Z_3(\mu)$ será necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (1.28) y (3.18),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\alpha(\mu)}{\partial\ln\mu} &= -\frac{\beta_0}{2\pi}\alpha^2 - \frac{\beta_1}{(2\pi)^2}\alpha^3 - \frac{\beta_2}{(4\pi)^3}\alpha^4 - \dots ; \\ \frac{\partial\ln Z_3(\mu)}{\partial\ln\mu^2} &= -\frac{\gamma_0}{4\pi}\alpha - \frac{\gamma_1}{(4\pi)^2}\alpha^2 - \frac{\gamma_2}{(4\pi)^3}\alpha^3 - \dots ,\end{aligned}\quad (3.20)$$

hasta un cierto orden en α_s . Esto permite, si se tiene acceso a valores no perturbativos del propagador gluónico, obtener en un ajuste el valor de la constante de acoplamiento a la escala de renormalización, $\alpha_s(\mu_0)$, y $Z_3(\mu_0)$, o de forma equivalente el valor de Λ_{QCD} , el parámetro que gobierna la evolución perturbativa de la constante de acoplamiento.

Este método fue utilizado [BBL99, BBL00] para obtener el valor del parámetro $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ a partir de la evaluación no perturbativa (en retículo) del propagador gluónico. Desarrollando las expresiones perturbativas hasta tercer orden, y ajustando el comportamiento del propagador a energías intermedias, obtienen $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 353 \pm 2^{+25}_{-10} \text{MeV}$. En este trabajo se extraerá $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ de un ajuste combinado del propagador gluónico y la constante de acoplamiento fuerte calculados no perturbativamente.

3.1.3. Constante de acoplamiento renormalizada

En una teoría Yang-Mills es suficiente el conocimiento de dos constantes de renormalización para renormalizar por completo la teoría (ver por ejemplo [DGH92]). Es necesario, por tanto, añadir a la renormalización del propagador una prescripción para la renormalización de un vértice. De este modo, la elección del vértice a tres o cuatro gluones determina, en principio, diferentes esquemas de renormalización, y lo mismo ocurre con la cinemática del vértice. Aplicar la prescripción MOM al vértice a tres gluones en una cinemática completamente simétrica (3.6) o asimétrica (3.7) determina dos esquemas de renormalización diferentes.

En este trabajo se utilizarán las dos cinemáticas dadas (ver figura 3.1) para definir la constante renormalizada debido, por una parte, a que son las dos cinemáticas más simples, lo que permite obtener resultados no perturbativos en dos esquemas de renormalización diferentes, y por otra a que para dichos esquemas se conocen los resultados de la teoría de perturbaciones [CS00, CR00, BBL00].

Para el vértice simétrico a tres gluones, la prescripción MOM establece que:

$$G_{\text{MOM}}^{(3)}(p^2, \mu^2) \Big|_{p^2=\mu^2} = g_{\text{MOM}}^R(\mu^2) \left[G_{\text{MOM}}^{(2)}(p^2, \mu^2) \Big|_{p^2=\mu^2} \right]^3, \quad (3.21)$$

igualando el valor de la función de Green renormalizada, cuando se evalúa a la escala de renormalización, μ , con su valor a nivel de árbol y cambiando la constante de acoplamiento y el propagador gluónico desnudos por sus valores renormalizados.

Por otra parte, la renormalización de la función de Green a tres puntos viene dada por:

$$G_{\text{MOM}}^{(3)}(p^2, \mu^2) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (Z_3^{\text{MOM}}(\mu^2, \Lambda))^{-3/2} G_0^{(3)}(p^2, \Lambda), \quad (3.22)$$

donde se ha escrito explícitamente la dependencia de la función de Green desnuda con el parámetro de regularización, Λ . En conjunto, las expresiones (3.21) y (3.22) proporcionan una definición de la constante de acoplamiento dada por:

$$g_{\text{MOM}}^R(\mu^2) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{G_0^{(3)}(\mu^2, \Lambda) Z_3^{3/2}(\mu^2, \Lambda)}{\left(G_0^{(2)}(\mu^2, \Lambda)\right)^3}, \quad (3.23)$$

que permite obtener numéricamente la constante de acoplamiento a partir de la evaluación de las funciones de Green a dos y tres puntos.

Diagramáticamente, la definición de la constante de acoplamiento dada por (3.21) equivale a decir que la constante de acoplamiento corresponde a la función de Green a tres gluones a la que se han *amputado* los tres gluones externos. En lo que sigue se denominará *amputación* en un sentido perturbativo a la eliminación los propagadores salientes de un diagrama (ver figura 3.2a), de modo que la constante de acoplamiento depende exclusivamente de los diagramas que renormalizan el vértice ⁴ (ver figura 3.2b). No perturbativamente se entiende la *amputación* como una división por el propagador no perturbativo.

El esquema anterior se suele denominar en la literatura simplemente MOM, mientras que el que procede de la aplicación de la prescripción de sustracción de momento al vértice asimétrico (ver figura 3.1b), se suele denominar $\widetilde{\text{MOM}}$. De forma similar al caso anterior se puede llegar a la expresión para el esquema $\widetilde{\text{MOM}}$:

$$g_{\widetilde{\text{MOM}}}^R(\mu^2) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{G_0^{(3)}(\mu^2, \Lambda) Z_3^{3/2}(\mu^2, \Lambda)}{\left(G_0^{(2)}(\mu^2, \Lambda)\right)^2 G_0^{(2)}(0, \Lambda)}, \quad (3.24)$$

donde, en este caso, la función de Green a tres puntos corresponde a la cinemática asimétrica.

⁴Al amputar se eliminan los propagadores entrantes con todos los bucles que sea posible, de modo que la renormalización del vértice sólo absorba aquellas contribuciones que no puedan ser comprendidas como una renormalización del propagador.

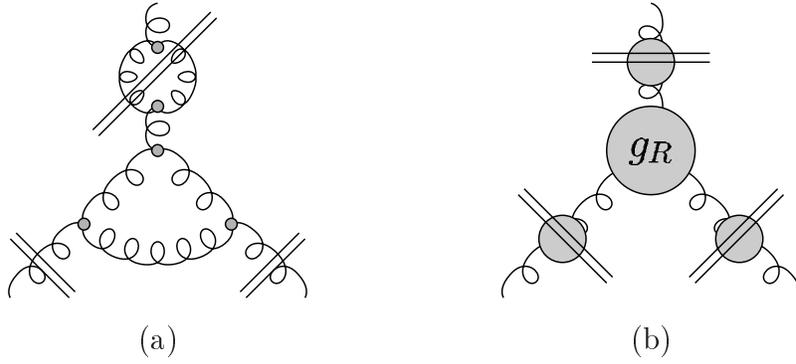


Figura 3.2: (a) Representación esquemática de la amputación de los propagadores externos y (b) definición de la constante de renormalización; los círculos grises representan los propagadores y el vértice renormalizado.

De este modo, a partir de la evaluación en retículo de las funciones de Green gluónicas, es posible obtener no perturbativamente la constante de acoplamiento renormalizada, estando en disposición de compararla con el resultado de la teoría de perturbaciones. Asimismo, se podrá evaluar en qué régimen de energías la teoría de perturbaciones es suficiente para describir la evolución de α_s .

3.2. Implementación en retículo

A partir de las variables definidas en retículo, $U_\mu(x)$, es necesario recuperar los campos *gauge*, $A_\mu^a(x)$, para poder calcular las funciones de Green gluónicas. A partir de la relación entre ambos, dada por (2.7), hay muchas formas posibles de recuperar el campo, con distinto nivel de precisión. En este trabajo se utilizará la siguiente [AHP97]:

$$ia g_0 \lambda_c A_\mu^c(x) = U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x) - \frac{1}{3} \text{Tr} (U_\mu(x) - U_\mu^\dagger(x)) \quad , \quad (3.25)$$

donde a es el tamaño de la malla y $g_0 = \sqrt{6/\beta}$ es la constante de acoplamiento desnuda. Una vez obtenido campo *gauge* a partir de la integración numérica de las integrales de camino, la aplicación de la prescripción MOM para la renormalización de las funciones de Green es simple, con la salvedad de los efectos que se derivan de las especificidades del retículo, sobre las que se profundizará a continuación. Éstas determinarán el rango de energías en el que se puede obtener información física.

Cualitativamente, los valores posibles de la energía están limitados en el UV por el inverso de la malla (el inverso de la mínima distancia que es posible describir en

el retículo) y en el IR por el inverso de la extensión total del retículo, $(La)^{-1}$. Sin embargo, un análisis detallado de los errores de discretización revela que en realidad el rango de momentos válido es más reducido.

Por otra parte, las simetrías de la función de Green que es objeto del cálculo reducen el número de valores del momento para los que es posible encontrar una combinación adecuada en retículo, como se verá a continuación.

3.2.1. Errores hipercúbicos

La ventana de energías en la que se evalúan las funciones de Green está íntimamente ligada a los errores de discretización o de malla finita que afectan a nuestros resultados, dado que es necesario descartar aquellos valores del momento para los que los errores de discretización son determinantes. En principio, los momentos permitidos en un retículo de extensión L vendrían dados por:

$$p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{La}; \quad n_\mu = 1, \dots, L \in \mathbb{N}, \quad (3.26)$$

lo que limitaría la ventana de momentos a $(\frac{2\pi}{La}, \frac{2\pi}{a})$, esto es, a la primera zona de Brillouin.

La regularización en retículo tiene un efecto de importancia fundamental sobre la ventana de energías que podrá dar información física; el propagador libre de un campo escalar de masa m , por ejemplo, calculado en retículo resulta ⁵:

$$\tilde{G}(p; a) = \frac{1}{\tilde{p}_\mu^2 + m^2}, \quad (3.27)$$

con $\tilde{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin(\frac{ap_\mu}{2})$. Algo similar ocurre con el resto de funciones de Green, que en general dependen de \tilde{p} pero no de p . Este resultado no tendría más importancia si no fuese porque en un retículo hipercúbico, a diferencia del continuo, no siempre existe una correspondencia biunívoca entre p y \tilde{p} . La consecuencia fundamental es lo que comúnmente se denominan errores hipercúbicos, que resultan de la ruptura de la simetría de Lorentz.

⁵Dependiendo de la definición, simétrica o no, de las diferencias finitas en retículo, se obtendrá el propagador como función de \tilde{p}_μ o de $\bar{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(ap_\mu)$. En lo que sigue nos referiremos sólo a \tilde{p} por simplicidad.

Ruptura de la simetría de Lorentz

Este tipo de errores de discretización procede del hecho de que mientras que en el espacio-tiempo continuo los puntos $(2, 0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1, 1)$ son indistinguibles (uno puede convertirse en el otro por medio de una rotación), en retículo no es posible realizar una rotación de la red que lleve uno al otro. Matemáticamente, puede resumirse como la ruptura de la simetría de Lorentz $SO(4)$ del continuo, que en la red se reduce a una simetría hipercúbica H_4 .

Las dos definiciones del momento, p y \tilde{p} , son equivalentes en el límite del continuo, por lo que las diferencias procedentes de utilizar uno u otro pueden clasificarse como errores de malla finita. De hecho, si definimos $p^{[2r]} = \sum_{\mu} (p_{\mu} p^{\mu})^r$, para r natural, \tilde{p}^2 puede expresarse como:

$$\tilde{p}^2 = p^2 - \frac{1}{12} a^2 p^{[4]} + \dots, \quad (3.28)$$

donde todos los términos incluidos en los puntos suspensivos pueden expresarse como función de $p^{[6]}$, $p^{[8]}$, etc.

De este modo, dos momentos (p_1, p_2, p_3, p_4) y (p'_1, p'_2, p'_3, p'_4) que satisfagan $p^2 = p'^2$, no contribuyen de forma idéntica a las funciones de Green si $p^{[4]} \neq p'^{[4]}$, es decir:

$$F(p^2) = F(p'^2) \quad \text{pero} \quad F(\tilde{p}^2) \neq F(\tilde{p}'^2), \quad (3.29)$$

debido a la presencia de términos en $p^{[4]}$, etc.

La primera limitación que introduce este tipo de errores es que los momentos considerados se limiten a valores de p^2 dados por:

$$p^2 = \frac{4\pi^2}{(La)^2} n^2; \quad n^2 \equiv n_{\mu} n^{\mu} \leq (L/4)^2, \quad (3.30)$$

dado que para $n_{\mu} \geq L/4$, cambia el signo de \tilde{p}_{μ} respecto al de p_{μ} y, en consecuencia, realizar cualquier tipo de desarrollo de \tilde{p}_{μ} en torno a p_{μ} carece de sentido.

Aún restringiéndonos a la región $n^2 \leq (L/4)^2$, existen efectos notables en el cálculo de cualquier función de Green en retículo procedentes de las diferencias entre p y \tilde{p} . En la figura 3.3a se muestran estos efectos como una estructura ramificada en la que, por cada valor de p^2 , la función de Green toma diferentes valores, uno por cada valor de $p^{[4]}$.

Método de extrapolación a $p^{[4]} = 0$

Ante este inconveniente, una posibilidad bastante extendida en la literatura es el denominado método democrático; Leinweber *y col.* [LSW98] basándose en la apreciación de que cuanto mejor repartido está el cuadrimomento entre las cuatro componentes, menores son los errores de este tipo que aparecen, proponen tomar sólo los valores del cuadrimomento próximos a la diagonal, $(1, 1, 1, 1)$. De esta forma se reducen considerablemente los errores hipercúbicos reduciendo, no obstante, el número de momentos disponibles.

El método que se utilizará en este trabajo [BBL99, BBL00, BSD03b] se basa en extrapolar los resultados para diferentes valores de $p^{[4]}$ al límite $p^{[4]} \rightarrow 0$,

$$Q(p^2, p^{[4]}) = Q(p^2, 0) + c_1 \frac{a^2 p^{[4]}}{p^2}, \quad (3.31)$$

donde c_1 se ajusta numéricamente a partir de los resultados en retículo si hay un número suficiente de órbitas (conjunto de momentos caracterizados por iguales $p^{[2]}$, $p^{[4]}$, $p^{[6]}$, etc.). En caso de que esto no sea suficiente, como ocurre para el caso del propagador de quark, donde los errores hipercúbicos son mucho más importantes, pueden considerarse los errores en a^4 ,

$$Q(p^2, a^2 p^{[4]}, a^4 p^{[6]}) = Q(p^2, 0, 0) + c_1 \frac{a^2 p^{[4]}}{p^2} + c_2 \frac{a^4 p^{[6]}}{p^2} + c_3 a^4 p^{[4]}, \quad (3.32)$$

o incluso teniendo en cuenta términos más complicados. No obstante, para poder realizar estas extrapolaciones es necesario disponer de un número suficiente de órbitas que difieran en los valores de $p^{[6]}$, hecho que para los retículos que se utilizan en este trabajo no ocurre.

En efecto, para retículos 16^4 y 24^4 , y restringiéndonos al primer cuarto de la primera zona de Brillouin, sólo existen como máximo cuatro órbitas que difieren por el valor de $p^{[4]}$, por lo que nos conformaremos con extrapolar los resultados numéricos a $p^{[4]} = 0$, lo que asegura una reducción considerable de los errores hipercúbicos.

3.2.2. Tripletes de momento

Los momentos para los que podemos obtener el propagador y el vértice asimétrico (ver figura 3.1b) sólo están restringidos por la condición $p_1 = -p_2$, que permite obtener

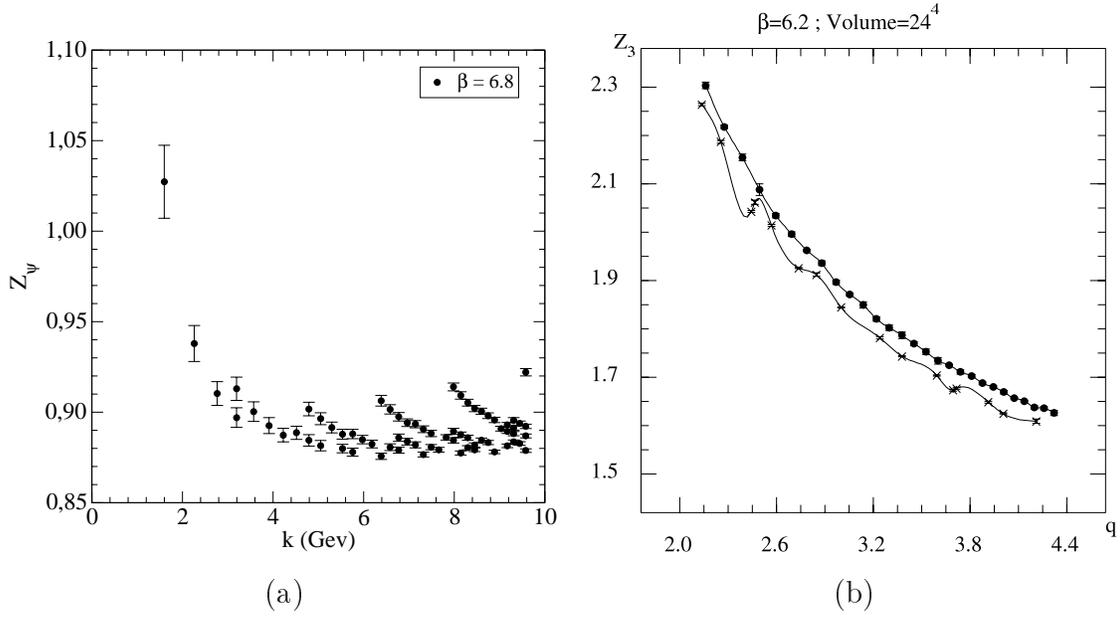


Figura 3.3: (a) Errores hipercúbicos para el propagador de quark; se observa con claridad la estructura ramificada (figura extraída de [BSD03b]). (b) Comparación del método democrático (línea inferior) y el de extrapolación a p^4 descrito en el texto (superior); se observa cómo el método de extrapolación elimina más eficientemente las oscilaciones debidas a los errores hipercúbicos (figura extraída de [BBL99]).

momentos para cualquier valor de n^2 en (3.30). Para el vértice simétrico, sin embargo, es necesario encontrar valores de los momentos p_1 , p_2 y p_3 que satisfagan simultáneamente:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0 ; \quad p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 , \quad (3.33)$$

que conducen a valores de n^2 pares, dado que a partir de las condiciones anteriores se tiene que:

$$p_1^2 = (p_2 + p_3)^2 = 2p_2^2 + 2p_2 \cdot p_3 , \quad (3.34)$$

o de otro modo,

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = -2n_2 \cdot n_3 . \quad (3.35)$$

Así pues, sólo los momentos con n^2 par contienen tripletes para el vértice simétrico, reduciéndose el número de momentos para el que podemos calcular la constante de acoplamiento en el esquema MOM simétrico respecto al asimétrico.

Para cada uno de los retículos utilizados, el rango de momentos en el que se evalúan las funciones de Green es el que se muestra en la tabla 3.1.

β	L	$p_{min}(\text{GeV})$	$p_{max}(\text{GeV})$
6.0	16	0.77	3.09
6.0	24	0.52	3.09
6.2	16	1.06	4.24
6.2	24	0.71	4.24
6.4	16	1.41	5.63
6.4	24	0.94	5.63
6.8	16	2.54	10.18
6.8	24	1.70	10.18

Tabla 3.1: Ventana de energías en la que se obtienen las funciones de Green para cada uno de los retículos, (β, L) , utilizados.

3.3. Resultados perturbativos y correcciones en potencia

El primer paso en el análisis de magnitudes obtenidas no perturbativamente sería compararlas con las procedentes de la teoría de perturbaciones, a fin de evaluar la validez de ésta en un determinado rango de energías. A priori, la teoría de perturbaciones no debería encontrar dificultad para reproducir los resultados a energías muy altas, incluso truncando las series perturbativas a órdenes bajos, debido a la libertad asintótica.

3.3.1. Series perturbativas

La dependencia de la constante de acoplamiento, $\alpha_s = g_s^2/4\pi$, con el momento suele expresarse a través de la función β de Callan-Symanzik (1.28), cuyos dos primeros coeficientes son universales (independientes del esquema de renormalización utilizado),

$$\beta_0 = 11 - \frac{2N_f}{3}, \quad \beta_1 = 51 - \frac{19N_f}{3}, \quad (3.36)$$

mientras que los siguientes dependen del esquema (ver tabla 3.2).

De forma semejante, la evolución del propagador se expresa a través de su dimensión anómala (3.18), cuyo primer coeficiente, $\gamma_0 = 13/2 - 2N_f/3$, es también universal

$N_f = 0$	$\overline{\text{MS}}$	MOM	$\widetilde{\text{MOM}}$
β_2	2857	3072	4824.31
β_3	29242.96	*	84353.79
γ_1	66.375	-16.9095	3.625
γ_2	915.963	1332.75	960.326

Tabla 3.2: Coeficientes de la función de Callan-Symanzik hasta cuarto orden y de la dimensión anómala del propagador gluónico hasta el tercero [CS00, CR00, BBL00] en una teoría Yang-Mills sin quarks ($N_f = 0$). (*) El coeficiente β_3^{MOM} es hasta ahora desconocido.

mientras que el resto depende del esquema de renormalización (Ver tabla 3.2), estando relacionados los coeficientes en dos esquemas diferentes por medio de la expresión (3.19).

La evolución de la constante de acoplamiento con el momento puede obtenerse integrando la expresión (1.28) truncada a un cierto orden; a primer orden, por ejemplo, la solución viene dada por:

$$\ln \frac{\mu}{\mu_0} = \int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{d\alpha}{\beta_0 \alpha^2}, \quad (3.37)$$

o particularizando para $\alpha(\mu_0 = \Lambda_{\text{QCD}}) = \infty$,

$$\alpha(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda_{\text{QCD}})}. \quad (3.38)$$

Para órdenes mayores, se define el valor de Λ_{QCD} a partir de la expresión:

$$\ln \frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} = \frac{2\pi}{\beta_0 \alpha(\mu)} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln \left(\frac{\beta_0 \alpha(\mu)}{2\pi} \right) + \int_0^{\alpha(\mu)} d\alpha \left[\frac{1}{\beta(\alpha)} + \frac{2\pi}{\beta_0 \alpha^2} - \frac{\beta_1}{\beta_0^2 \alpha} \right], \quad (3.39)$$

con el primer sumando correspondiente al orden 1 del desarrollo, el segundo al orden dos y los demás para un orden mayor que dos. A tres bucles, por ejemplo, resulta:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{QCD}} \simeq & \mu \times e^{\frac{-2\pi}{\beta_0 \alpha(\mu^2)}} \times \left(\frac{\beta_0 \alpha(\mu^2)}{4\pi} \right)^{-\frac{\beta_1}{\beta_0^2}} \left(1 + \frac{8\beta_1^2 - \beta_0 \beta_2}{16\pi \beta_0^3} \alpha \right. \\ & \left. + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{2\beta_0 \beta_1 \beta_2 - 8\beta_1^3 - \beta_0^2 \beta_3}{32\pi^2 \beta_0^4} + \left(\frac{8\beta_1^2 - \beta_0 \beta_2}{16\pi \beta_0^3} \right)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta expresión permite obtener el valor de Λ_{QCD} a partir de valores de α_s obtenidos no perturbativamente. Invirtiéndola podemos obtener la evolución de α_s con el

momento. Desarrollando hasta el cuarto bucle resulta:

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(4)} &= \frac{4\pi}{\beta_0 t} + \frac{8\pi\beta_1}{\beta_0} \frac{\ln t}{(\beta_0 t)^2} + \\ &+ \frac{1}{(\beta_0 t)^3} \left(\frac{2\pi\beta_2}{\beta_0} + \frac{16\pi\beta_1^2}{\beta_0^2} (\ln^2 t - \ln t - 1) \right) + \\ &+ \frac{1}{(\beta_0 t)^4} \left(\frac{2\pi\beta_3}{\beta_0} + \frac{16\pi\beta_1^3}{\beta_0^3} \left(-2\ln^3 t + 5\ln^2 t + \left[4 - \frac{3\beta_2\beta_0}{4\beta_1} \right] \ln t - 1 \right) \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde $t = \ln(\mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)$.

De forma análoga, la integración de las ecuaciones diferenciales acopladas (1.28) y (3.18), permite obtener la constante de renormalización del propagador gluónico en función del momento. La solución puede expresarse paramétricamente a través de $\alpha_s(\mu)$ y $Z_3(\alpha)$, dada ésta por:

$$\begin{aligned} Z_3(\alpha) &= Z_3(\mu_0) \left(\frac{\alpha}{\alpha(\mu_0)} \right)^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}} \left(\frac{32\pi^2\beta_0 + 16\pi\beta_1\alpha + \beta_2\alpha^2}{32\pi^2\beta_0 + 16\pi\beta_1\alpha(\mu_0) + \beta_2\alpha^2(\mu_0)} \right)^{\frac{\gamma_2}{\beta_2} - \frac{\gamma_0}{2\beta_0}} \\ &\exp \left\{ \left(2\gamma_1 - \frac{2\beta_1\gamma_0}{\beta_0} - 4\frac{\beta_1\gamma_2}{\beta_2} \right) [H(\alpha) - H(\alpha(\mu_0))] \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

con

$$H(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\beta_0\beta_2 - 4\beta_1^2}} \arctan \left(\frac{1}{4\pi} \frac{8\pi\beta_1 + \beta_2\alpha}{\sqrt{2\beta_0\beta_2 - 4\beta_1^2}} \right), \quad (3.43)$$

permitiendo obtener Λ_{QCD} a partir de los resultados numéricos de las simulaciones en retículo.

3.3.2. Resultados numéricos

Mediante la evaluación no perturbativa por cualquier método (en retículo en nuestro caso) de la constante de acoplamiento es posible obtener un valor del parámetro $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ a partir de la relación (3.40). Basándose en el método de la funcional de Schrödinger [Som97], el grupo *ALPHA* [CLS99] obtuvo la constante de acoplamiento a energías muy altas, lo que le permitió obtener con mucha fiabilidad un valor del parámetro $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ en la aproximación *quenched*:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(N_f=0)} = 238(19)\text{MeV}. \quad (3.44)$$

Este será, a lo largo de todo el trabajo, un valor a tener en cuenta como referencia. En lo que sigue el objetivo es, a partir del análisis de las funciones de Green en una

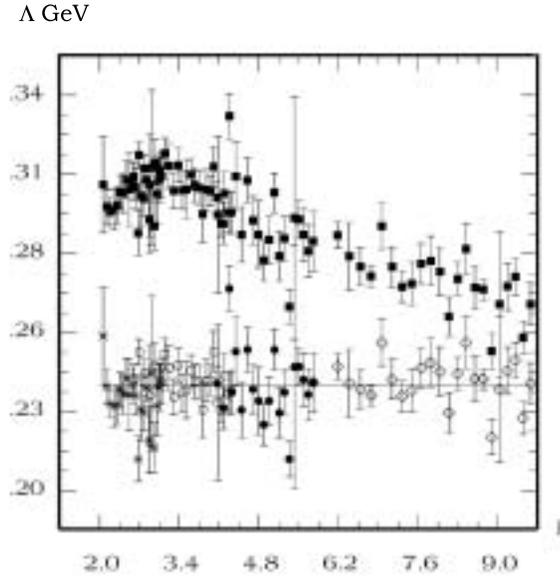


Figura 3.4: $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ como función de la energía, μ , en la ventana utilizada para el ajuste. Los puntos de la parte superior corresponden al ajuste puramente perturbativo, mientras que en los de abajo se ha incluido una corrección en potencia (3.45). Los diferentes marcadores corresponden a retículos de 24^4 y $\beta = 6.0, 6.2, 6.4$ y 6.8 . Figura extraída de [BBR00].

región de energías de entre 3 y 10 GeV, obtener el valor del parámetro que gobierna la evolución perturbativa, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$, a la par que se estudia la posible aparición de efectos que no sean descriptibles por medio de la teoría de perturbaciones.

Con este tipo de cálculos, Boucaud *y col.* [BRM98, BBR00] constataron la invalidez de una descripción puramente perturbativa, dado que el parámetro $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ resulta tener una dependencia importante con la escala (figura 3.4) que, no obstante, puede ser eliminada por medio de la adición de un término en $1/p^2$ a la descripción puramente perturbativa de la constante de acoplamiento:

$$\alpha_s(p^2) = \alpha_s^{\text{Pert.}}(p^2) + \frac{K}{p^2}, \quad (3.45)$$

con $\sqrt{K} \approx 0.8$ GeV. Añadiendo este término, además, los valores de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ obtenidos están en buen acuerdo con el resultado del grupo *ALPHA* (3.44).

Este resultado muestra la necesidad de incorporar correcciones no perturbativas en la región 3-10 GeV para dar una descripción precisa de la evolución de la constante de acoplamiento obtenida numéricamente.

3.3.3. Correcciones en potencia

Por *correcciones en potencia* se conoce a los términos del tipo $(\Lambda_{\text{QCD}}/p)^n$ que aparecen en las funciones de Green que, de proceder de un cálculo perturbativo, corresponderían a una contribución del tipo $\exp(-1/\alpha_s)$ en la función β de Callan-Symanzik. Este tipo de términos no puede aparecer perturbativamente, debido a que su desarrollo de Taylor es nulo a todos los órdenes. Así pues, las correcciones en potencias del momento, siendo efectos genuinamente no perturbativos, pueden ofrecer una pista acerca de la fenomenología de energías bajas de QCD que escapa a la descripción puramente perturbativa.

Las correcciones en potencia fueron introducidas por primera vez en el marco de las reglas de suma de Shifman, Vainshtein y Zakharov [SVZ79], donde los condensados introducen efectos no perturbativos por medio de correcciones en potencia. El marco teórico que permite explicar este tipo de correcciones en potencia viene dado por el desarrollo en producto de operadores de Wilson, que será expuesto en detalle en el capítulo siguiente.

La aparición de correcciones en potencia está ligada a la de términos confinantes en el potencial estático entre quarks [BRM98]. En la aproximación de intercambio de un gluón, el potencial coulombiano estático, $V(r)$ puede escribirse:

$$V(r) \propto \alpha_s \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2} . \quad (3.46)$$

Para el caso de una constante que depende de la escala, podría generalizarse esta expresión como:

$$V(r) \propto \int d^3k \alpha(|\vec{k}|^2) \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2} , \quad (3.47)$$

de modo que añadir un término en $1/k^2$ a α_s equivale a añadir un término lineal (σr) al potencial coulombiano ($1/r$), lo que es una posible definición de confinamiento.

A la inversa, puede considerarse una definición de la constante de acoplamiento basada en la fuerza entre dos quarks estáticos, que en una teoría SU(3) sin quarks [Mic94] resulta:

$$\alpha_{q\bar{q}}(Q) = \frac{3}{4} r^2 \frac{dV(r)}{dr} \quad \left(Q \sim \frac{1}{r} \right) . \quad (3.48)$$

Si tomamos un potencial con una contribución coulombiana y otra lineal (confinante),

$$V(r) \sim -\frac{c}{r} + \sigma r , \quad (3.49)$$

la constante de acoplamiento resultaría

$$\alpha_{q\bar{q}}(Q) = \frac{3}{4}c + \frac{3}{4}\frac{\sigma}{Q^2} . \quad (3.50)$$

Esto permite estimar el valor de las correcciones en $1/p^2$, que deben ser del orden de la tensión de la cuerda ($\sqrt{\sigma} \simeq 0.5\text{GeV}$), en acuerdo cualitativo con los resultados preliminares (3.45).

El tratamiento de las correcciones en potencia es delicado. En primer lugar, debido a la incertidumbre derivada de la truncación de las expresiones perturbativas, que podría verse enmascarada por las correcciones en potencia y, en segundo, debido a la ambigüedad del renormalón [Ben99] (ver §1.5.2).

Capítulo 4

Desarrollo en producto de operadores

Contenidos

4.1. Desarrollo en producto de operadores y reglas de suma	62
4.2. Desarrollo OPE de las funciones de Green	64
4.2.1. Propagador gluónico	65
OPE a nivel de árbol	66
Forma tensorial	68
Renormalización y dimensión anómala de $\langle A^2 \rangle$	69
4.2.2. Vértice simétrico	71
4.2.3. Vértice asimétrico. Hipótesis de factorización	73
4.3. Cálculo de la dimensión anómala	76
4.3.1. Operador $: A^2 :$	76
4.3.2. Operador $: A^3 : \tilde{A}(0)$	78
4.4. Resultados numéricos	80
4.4.1. Caso simétrico, MOM	82
Resultados a dos bucles	82
Resultados a tres bucles	82
4.4.2. Caso asimétrico, $\widetilde{\text{MOM}}$	84
Resultados a dos bucles	84
Resultados a tres bucles	85
Pruebas sobre la dimensión anómala	86

4.5. Discusión 87

En el capítulo anterior se expusieron algunos resultados preliminares que indicaban que la no convergencia de las series perturbativas origina la aparición de correcciones en potencias del momento a los resultados perturbativos para las funciones de correlación gluónicas.

Un procedimiento estándar para incorporar dichas correcciones en potencia al estudio de las funciones de correlación en QCD se basa en la utilización del desarrollo en producto de operadores (OPE). Este marco permite parametrizar efectos no perturbativos a través de una serie jerarquizada de potencias del momento, cuyos coeficientes reproducen las simetrías y la dimensión de la función de correlación considerada.

En este capítulo, tras introducir el desarrollo en producto de operadores, se pondrá cómo éste predice de forma natural la aparición de correcciones en $1/p^2$ a las funciones de Green gluónicas y, por tanto, a la constante de acoplamiento en los esquemas de renormalización de sustracción de momento. La aplicación del desarrollo en producto de operadores establece una relación entre estas correcciones y la existencia de un condensado gluónico, $\langle A^2 \rangle$, no invariante *gauge*, sobre cuyo significado físico se profundizará en el capítulo siguiente.

El cálculo de la dimensión anómala de dicho condensado y la utilización de las ecuaciones del grupo de renormalización para los coeficientes del desarrollo permitirán confirmar la relación entre el condensado gluónico y las correcciones en potencia necesarias para describir los resultados numéricos.

4.1. Desarrollo en producto de operadores y reglas de suma

Wilson [Wil69], buscando un marco en que el que estudiar el comportamiento de la cromodinámica cuántica a distancias cortas, propone una generalización del conmutador de dos operadores a igual tiempo,

$$[A(x_0, \mathbf{x}), B(x_0, \mathbf{y})] = \sum_n D_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) O_n(x) , \quad (4.1)$$

donde $O_n(x)$ es un campo local en x y $D_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ es una función $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ o derivadas de ésta. Wilson generaliza esta expresión postulando que cualquier producto de operadores, $A(x)B(y)$, puede desarrollarse, para $x \rightarrow y$, como:

$$A(x)B(y) = \sum_{\mathcal{O}_i} C_{\mathcal{O}_i}(x-y)\mathcal{O}_i(y), \quad (4.2)$$

donde la suma está extendida a todos los operadores locales, $\mathcal{O}_i(y)$; y $C_{\mathcal{O}_i}(x-y)$ son coeficientes que, en general, dependen de potencias y logaritmos de $(x-y)$. La expresión anterior es una relación entre operadores, es decir, los coeficientes $C_{\mathcal{O}_i}(x-y)$ son los mismos para todos los elementos de matriz $\langle \alpha_1 | A(x)B(y) | \alpha_2 \rangle$, independientemente de los estados $|\alpha_1\rangle$ y $|\alpha_2\rangle$ elegidos.

La demostración estándar de esta hipótesis de Wilson (basada en teoría de perturbaciones) fue dada por Zimmermann [Zim70]. Se puede demostrar [Wei96] que su validez no es exclusiva para la teoría de perturbaciones, tratándose de una expresión por completo no perturbativa.

Por medio de un análisis dimensional es posible obtener la dependencia de los coeficientes en $(x-y)$. Si d_A , d_B y $d_{\mathcal{O}_i}$ son las dimensiones en masa de los operadores A , B y \mathcal{O}_i respectivamente, el coeficiente $C_{\mathcal{O}_i}(x-y)$ debe comportarse como $(x-y)^r$, con $r = d_{\mathcal{O}_i} - d_A - d_B$. Con operadores \mathcal{O}_i de complejidad (dimensión) creciente aparecen contribuciones de mayor orden en $(x-y)$, por lo que truncando el desarrollo a un orden dado (un operador \mathcal{O}_i dado), éste proporciona información no perturbativa en el límite $x \rightarrow y$.

Una de las propiedades más destacadas del desarrollo en producto de operadores procede del hecho de que, al ser válido en el régimen de pequeñas distancias, donde la QCD perturbativa es predictiva, los coeficientes pueden calcularse por medio de teoría de perturbaciones. De este modo, además, es posible utilizar las ecuaciones del grupo de renormalización para obtener información acerca de la dimensión anómala de los operadores \mathcal{O}_i .

En este trabajo se hará uso de la versión del desarrollo en el espacio de momentos ¹, que no es más que la transformada de Fourier de (4.2),

$$T^* \left(\tilde{A}(p)\tilde{B}(-p) \right) = \sum_{\mathcal{O}_i} \tilde{C}_{\mathcal{O}_i}(p) : \mathcal{O}_i(0) : , \quad (4.3)$$

¹De nuevo se mantiene el producto cronológico de Wick, a pesar de trabajar en un espacio euclídeo. Del mismo modo, se mantiene la notación de índices covariantes/contravariantes, aunque en euclídeas no hay diferencias.

válido para $p \gg$. Al aumentar la dimensión del operador \mathcal{O}_i , aparecerán correcciones no perturbativas en potencias mayores de $1/p$. Se ha introducido el orden normal de los operadores locales a la derecha, a fin de separar las contribuciones perturbativas y no perturbativas de modo análogo al teorema de Wick.

La introducción de efectos no perturbativos a través de correcciones en potencias del momento había sido avanzada por Shifman, Vainshtein y Zakharov (SVZ), en su formulación de las reglas de suma [SVZ79]. Estas reglas de suma, aplicadas a la QCD, permiten separar la física de energías bajas, asociada a los condensados, de la de energías altas, que está contenida en los coeficientes del desarrollo de Wilson.

Las reglas de suma tienden un puente entre los estados libres de la teoría, quarks y gluones, y los estados asintóticos, los hadrones, mediante el uso de relaciones de dispersión; de hecho, la esencia de las reglas de suma de Shifman, Vainshtein y Zakharov está en igualar el desarrollo en producto de operadores con una relación de dispersión para el operador en cuestión, lo que permite evaluar en perturbaciones no sólo el orden dominante de los coeficientes de Wilson, sino también los órdenes subdominantes, por medio de la inclusión de estados que en el vacío tienen un valor esperado no nulo.

4.2. Desarrollo OPE de las funciones de Green

Al realizar el desarrollo para las funciones de Green gluónicas en una teoría sin quarks, los operadores de dimensión más baja en masa que pueden aparecer en el desarrollo son, aparte del operador identidad: $: A_\mu^a :$, $: c^a :$ y $: \bar{c}^a :$, de dimensión uno, y $: A_\mu^a A_\nu^b :$, $: \partial_\mu A_\nu^a :$, $: c^a c^b :$, $: A_\mu^a c^b :$ y $: \partial_\mu c^a :$, de dimensión dos ², etc. Puesto que estos operadores van a ser evaluados en el vacío, ninguno de los que comporta la existencia de fantasmas en los estados inicial o final puede contribuir, lo que deja tan sólo $: \bar{c}^a c^b :$ de entre los que contienen algún campo fantasma. Este operador, no obstante, tampoco puede aparecer, puesto que en el *gauge* de Landau se anula el coeficiente de Wilson del desarrollo [LO92]. Asimismo, la contribución de $: \partial_\nu A_\mu^a :$ en el vacío de QCD se anula, por la simetría de color. En definitiva, tan sólo el operador identidad, \mathbb{I} , y los operadores gluónicos $: A_\mu^a :$ y $: A_\mu^a A_\nu^b :$ pueden aparecer en los desarrollos ³.

²Se han omitido, por simplicidad, los que difieren de los citados en cambiar c^a por \bar{c}^a .

³En realidad, $\langle 0 | : A_\mu^a : | 0 \rangle$ también se anula, debido a las simetrías de color y de Lorentz, pero en el desarrollo del vértice asimétrico el término $: A_\mu^a :$ contribuye, puesto que hay un gluón que no se introduce en el desarrollo que se contrae con él.

Los operadores que aparezcan en el desarrollo deben mantener las simetrías del producto de operadores que se esté desarrollando; en el desarrollo de operadores invariantes *gauge*, por ejemplo, no podrán aparecer los operadores que no lo sean. Aplicado al caso de las funciones de Green gluónicas que estamos estudiando, significa que es posible que aparezcan contribuciones no invariantes *gauge*. De hecho, como se verá en detalle en la sección siguiente, la contribución dominante se debe al operador A^2 , no invariante *gauge* y de dimensión 2, frente al primer operador gluónico ⁴ invariante *gauge*, $F^2 = F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}$, y de dimensión 4.

A continuación se detallan los pasos necesarios para obtener una expresión OPE renormalizada del propagador gluónico; en los casos siguientes, al tratarse de la misma metodología, se indicarán básicamente los aspectos específicos del vértice gluónico para cada uno de los esquemas de renormalización utilizados. Los resultados para el esquema MOM (vértice simétrico) habían sido publicados antes del comienzo de esta tesis [BYL00, BYL01], mientras que, para el esquema $\widetilde{\text{MOM}}$, los resultados presentados son originales. En cualquier caso, ambos esquemas serán presentados en idénticas condiciones a efectos comparativos.

4.2.1. Propagador gluónico

El proceso para obtener el desarrollo en producto de operadores de una función de Green pasa por tres etapas. En primer lugar, se identifican los operadores que, en función de las simetrías específicas del producto de operadores a desarrollar, pueden contribuir al desarrollo hasta el primer orden no trivial. A continuación, se obtienen los valores a nivel de árbol de los coeficientes en teoría de perturbaciones, para posteriormente renormalizar la expresión. Por último, se obtienen las correcciones al logaritmo dominante (dimensión anómala a un bucle) de los operadores locales a través de las ecuaciones del grupo de renormalización para los coeficientes del desarrollo.

⁴Con dimensión 3 existe el condensado quiral, $\langle \bar{q}q \rangle$, que podría contribuir pese a estar en la aproximación *quenched*.

OPE a nivel de árbol

El desarrollo en producto de operadores relevante para el cálculo del propagador gluónico es el siguiente:

$$\begin{aligned} T^* \left(\tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \right) &= (c_0)_{\mu\nu}^{ab}(p^2) I + (c_1)_{\mu\nu a'}^{ab\mu'}(p^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) : + \\ &+ (c_2)_{\mu\nu a' b'}^{ab\mu' \nu'}(p^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Al tomar el valor esperado en el vacío de (4.4) desaparece la contribución en el operador $: A_{\mu'}^{a'}(0) :$, por la simetría de color e invariancia de Lorentz del vacío, de modo que sólo se mantendrán en lo que sigue los términos en c_0 y c_2 . El mismo argumento indica que sólo la componente del tensor $A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0)$ que verifica $\mu' = \nu'$ y $a' = b'$ contribuye, es decir:

$$\left\langle : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \right\rangle \propto \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} \ , \quad (4.5)$$

o de forma equivalente,

$$\left\langle : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \right\rangle = \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} \frac{\langle A^2 \rangle}{4(N_C^2 - 1)} \ . \quad (4.6)$$

De este modo, el coeficiente de la corrección no perturbativa va viene dado exclusivamente por:

$$(c_2)_{\mu\nu a' b'}^{ab\mu' \nu'}(p^2) \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} \ , \quad (4.7)$$

lo que simplifica la estructura del tensor a calcular.

Si se evalúa el producto de operadores (4.4) en un vacío perturbativo, $|0\rangle$ (el vacío trivial), la contribución de $\langle 0 | : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : |0\rangle$ se anula, de modo que el término dominante se puede identificar con el propagador perturbativo:

$$\langle 0 | \tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) |0\rangle = (c_0)_{\mu\nu}^{ab}(p^2) = G_{\text{Pert.}\mu\nu}^{(2)ab}(p^2) \ . \quad (4.8)$$

Las reglas de suma SVZ [SVZ79], indican que es posible obtener el coeficiente de Wilson del desarrollo en un tratamiento perturbativo, y su valor seguirá siendo válido en la expresión no perturbativa original, en la que el condensado contiene las contribuciones no perturbativas. En este sentido, si consideramos el valor esperado del

desarrollo en producto de operadores anterior (4.4) en un vacío no perturbativo, donde se introducen dos gluones de baja energía ⁵, se tiene:

$$\begin{aligned} \left\langle g_\sigma^s \left| \tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \right| g_\tau^t \right\rangle &= G_{\mu\nu}^{(2)ab}(p, -p) \langle g_\sigma^s | g_\tau^t \rangle + \\ &+ (c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p^2) \cdot \left\langle \tilde{A}_\sigma^s(0) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \tilde{A}_\tau^t(0) \right\rangle + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

El miembro de la izquierda de (4.9) se obtiene, perturbativamente, como la suma de todos los diagramas con cuatro gluones entrantes, con los momentos e índices de color y de Lorentz:



En el miembro de la derecha de (4.9), el primer sumando corresponde a los diagramas desconectados, mientras que el segundo corresponde al coeficiente $(c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p^2)$ que multiplica al valor esperado:

$$\begin{aligned} \left\langle g_\sigma^s \left| : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \right| g_\tau^t \right\rangle &\equiv \left\langle \tilde{A}_\sigma^s(0) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \tilde{A}_\tau^t(0) \right\rangle = \\ &= \left\langle \underbrace{\tilde{A}_\sigma^s(0)} : \underbrace{A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0)} : \underbrace{\tilde{A}_\tau^t(0)} \right\rangle + \left\langle \underbrace{\tilde{A}_\sigma^s(0)} : \underbrace{A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0)} : \underbrace{\tilde{A}_\tau^t(0)} \right\rangle . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Teniendo en cuenta que la contracción entre el operador local y el no local resulta:

$$\underbrace{\tilde{A}_\sigma^s(0) A_{\mu'}^{a'}(0)} = \frac{1}{V} \int d^4x A_\sigma^s(x) \underbrace{A_{\mu'}^{a'}(0)} = G_{\sigma\mu'}^{(2)sa'}(0) , \quad (4.11)$$

se puede escribir el término que multiplica al coeficiente $(c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p^2)$ como:

$$\left\langle g_\sigma^s \left| : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \right| g_\tau^t \right\rangle = G_{\sigma\mu'}^{(2)sa'}(0) G_{\tau\nu'}^{(2)tb'}(0) + G_{\sigma\nu'}^{(2)sb'}(0) G_{\tau\mu'}^{(2)ta'}(0) . \quad (4.12)$$

La parte del coeficiente del desarrollo de Wilson $(c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p^2)$ que contribuye al desarrollo OPE (dada por (4.7)) resulta entonces, utilizando los resultados de las expresiones (4.9) y (4.12),

$$(c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p^2) \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} = \frac{1}{2} \frac{\langle \tilde{A}_\sigma^s(0) \tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \tilde{A}_\tau^t(0) \rangle_{\text{Con.}}}{G_{\tau\mu'}^{(2)ta'}(0) G_{\sigma\nu'}^{(2)sb'}(0)} \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} , \quad (4.13)$$

⁵Es decir, gluones de una energía por debajo de la escala de separación efectiva entre efectos perturbativos y no perturbativos de modo que no contribuyen al coeficiente de Wilson. Para evitar complicar innecesariamente la notación con la introducción de otro momento, expresaremos estos gluones a $p = 0$, como $|g_\sigma^s\rangle \equiv A_\sigma^s(0)|0\rangle$, $|g_\tau^t\rangle \equiv A_\tau^t(0)|0\rangle$, si bien en los cálculos sólo se supone poseen un momento muy pequeño respecto a p .

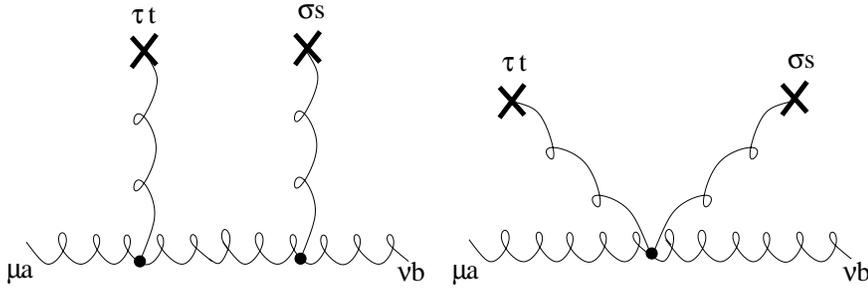


Figura 4.1: Diagramas que, con todas sus posibles permutaciones, contribuyen a (c_2) a nivel de árbol. Las cruces indican los gluones procedentes del vacío.

equivalente a todos los diagramas con cuatro gluones externos (numerador), donde los dos gluones de momento nulo han sido explícitamente amputados (denominador). En la figura 4.1 se representan los diagramas con cuatro gluones externos que están conectados, de modo que se eliminan las contribuciones del primer sumando en (4.9). Para obtener el coeficiente (c_2) es necesario calcular dichos diagramas con todas sus posibles permutaciones. Los gluones marcados con una cruz representan a aquellos con un momento nulo que corresponden, según la expresión (4.13), a los que es necesario amputar.

Forma tensorial

Puesto que conocemos la forma tensorial del propagador en el *gauge* de Landau, podemos escribir las expresiones anteriores directamente para la parte escalar del propagador ($G^{(2)}(p^2)$, ver (3.4)):

$$p^2 G^{(2)}_{OPE}(p^2) = c_0(p^2) + c_2(p^2) \frac{\langle A^2 \rangle}{4(N_C^2 - 1)} \frac{1}{p^2} + \dots, \quad (4.14)$$

donde se ha escrito la parte escalar de los coeficientes de forma que sea adimensional,

$$c_0(p^2) = p^2 \frac{1}{3(N_C^2 - 1)} (c_0)_{\mu\nu}^{ab}(p^2) \delta_{ab} g^{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

$$c_2(p^2) = p^4 \frac{1}{3(N_C^2 - 1)} (c_2)_{\mu\nu a'b'}^{ab\mu'\nu'}(p^2) \delta_{ab} g^{\mu\nu} \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'}, \quad (4.16)$$

y se ha tenido en cuenta que $: A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) :$ sólo puede contribuir si $\mu' = \nu'$ y $a' = b'$, como indica la expresión (4.6).

Del cálculo a nivel de árbol (4.13) (ver figura 4.1), se obtiene que $c_2(p^2) = 3g^2 =$

$12\pi\alpha_s$, conduciendo a la expresión:

$$p^2 G_{OPE}^{(2)}(p^2) = p^2 G_{Pert.}^{(2)}(p^2) + 12\pi\alpha_s \frac{\langle A^2 \rangle}{4(N_C^2 - 1)} \frac{1}{p^2} + \dots, \quad (4.17)$$

que a continuación será necesario renormalizar.

Renormalización y dimensión anómala de $\langle A^2 \rangle$

Hasta ahora se ha obtenido el desarrollo OPE del propagador a nivel de árbol; la correspondiente expresión renormalizada se obtiene tras cambiar los coeficientes obtenidos a nivel de árbol por los coeficientes renormalizados, que al ser adimensionales, sólo pueden depender del cociente p^2/μ^2 y la constante de acoplamiento renormalizada:

$$p^2 G_R^{(2)OPE}(p^2, \mu^2) = c_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) + c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{4(N_C^2 - 1)} \frac{1}{p^2} + \dots. \quad (4.18)$$

El valor de los coeficientes depende del esquema de renormalización elegido. En este contexto, se pueden definir la renormalización del propagador (3.13) para la expresión OPE:

$$p^2 G_R^{(2)OPE}(p^2, \mu^2) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \quad (4.19)$$

o para la expresión perturbativa,

$$p^2 G_R^{(2)Pert.}(p^2, \mu^2) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1, \quad (4.20)$$

lo que define respectivamente $Z_3^{OPE}(\mu^2)$ y $Z_3^{Pert}(p^2)$.

En este trabajo se utilizará la primera, de modo que el coeficiente c_0 resulta:

$$c_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = \frac{Z_3^{Pert}(p^2)}{Z_3^{OPE}(\mu^2)} = c_0(1, \alpha(\mu)) Z_3^{Pert}(p^2), \quad (4.21)$$

con la condición de contorno $c_0(1, \alpha(\mu)) = 1 + O(1/\mu^2)$. El término en $1/\mu^2$ procede de la diferencia entre las expresiones perturbativa y OPE a la escala de renormalización, que hacen que imponer la condición de renormalización (3.12) sobre el propagador perturbativo o sobre el procedente del desarrollo en producto de operadores no sea equivalente (por la corrección en potencia). Despreciando dicha contribución (subdominante desde el punto de vista numérico a la escala de renormalización elegida, $\mu = 10\text{GeV}$) resulta

$$c_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = p^2 G_R^{(2)Pert.}(p^2, \mu^2). \quad (4.22)$$

Para el coeficiente c_2 , a partir de la expresión (4.18) se puede identificar

$$Z_3(\mu^2)c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \langle A^2 \rangle_{R,\mu} \quad (4.23)$$

con una cantidad desnuda y es, por tanto, independiente de la escala de renormalización. Esto permite escribir una ecuación del grupo de renormalización para $c_2(p^2/\mu^2, \alpha(\mu))$:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \left[Z_3(\mu^2)c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \langle A^2 \rangle_{R,\mu} \right] = 0 . \quad (4.24)$$

Si denominamos Z_{A^2} a la constante que renormaliza el operador local A^2 ,

$$A_{R,\mu}^2 = Z_{A^2}^{-1}(\mu^2)A_0^2 , \quad (4.25)$$

la ecuación anterior se escribe:

$$\left\{ 2\gamma_3(\alpha(\mu)) - 2\gamma_{A^2}(\alpha(\mu)) + \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(\alpha(\mu)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = 0 , \quad (4.26)$$

con $\gamma_3(\alpha)$ la dimensión anómala del propagador (3.18) y $\gamma_{A^2}(\alpha) = \frac{\partial \ln Z_{A^2}(\mu)}{\partial \ln \mu^2}$ la del operador A^2 (ver §4.3). La solución de (4.26) a un bucle [PR82] puede escribirse como ⁶:

$$c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = c_2(1, \alpha(p)) \left(\frac{\alpha(p)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} . \quad (4.27)$$

Si además tenemos en cuenta la condición inicial $c_2(1, \alpha(\mu)) = 12\pi\alpha_s(\mu)$, procedente del cálculo en árbol, se llega a una expresión OPE para el propagador:

$$G_{OPE}^{(2)}(p^2) = G_{Pert.}^{(2)n \text{ bucles}}(p^2) \left(1 + R^{(2)} \left(\ln \frac{p}{\Lambda} \right)^{\frac{\gamma_0 - \hat{\gamma}_0}{\beta_0} - 1} \frac{1}{p^2} \right) , \quad (4.28)$$

con

$$R^{(2)} = \frac{6\pi^2}{\beta_0(N_C^2 - 1)} \left(\ln \frac{\mu}{\Lambda} \right)^{-\frac{\gamma_0 - \hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \langle A^2 \rangle_{R,\mu} , \quad (4.29)$$

donde se ha considerado el desarrollo (1.28) a un bucle en la corrección OPE, y se desprecian términos de orden mayor, $1/p^4$ y $\alpha^2(p)/p^2$, en la corrección OPE.

⁶Se ha denominado $\hat{\gamma} = \frac{\partial \ln \hat{Z}}{\partial \ln \mu^2}$, con $\hat{Z} = Z_{A^2} Z_3^{-1}$ la constante que renormaliza $\langle g|A^2|g \rangle$ (ver §4.3). Su desarrollo en la constante de acoplamiento se define de forma completamente análoga a (3.18):

$$\hat{\gamma}(\alpha) = -\frac{\hat{\gamma}_0}{4\pi}\alpha - \frac{\hat{\gamma}_1}{(4\pi)^2}\alpha^2 - \dots$$

4.2.2. Vértice simétrico

El desarrollo para el vértice simétrico es muy similar al del propagador [BYL00, BYL01],

$$T^* \left(\tilde{A}_\mu^a(p_1) \tilde{A}_\nu^b(p_2) \tilde{A}_\rho^c(p_3) \right) = (d_0)_{\mu\nu\rho}^{abc}(p^2)I + (d_1)_{\mu\nu\rho a'}^{abc\mu'}(p^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) : + \\ + (d_2)_{\mu\nu\rho a'b'}^{abc\mu'\nu'}(p^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : + \dots , \quad (4.30)$$

que conduce a una expresión para la parte escalar (3.10) de la función de Green a tres puntos:

$$p^6 G_{OPE}^{(3)}(p^2, \mu^2) = d_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) + d_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{4(N_C^2 - 1)p^2} \quad (4.31)$$

en la que, siguiendo una línea de razonamiento análoga a la llevada a cabo para el propagador, identificaremos el coeficiente d_0 con la función de Green perturbativa,

$$d_0 = p^6 G_{Pert.}^{(3)}(p^2, \mu^2) , \quad (4.32)$$

mientras d_2 vendrá dado por:

$$(d_2)_{\mu\nu\rho a'b'}^{abc\mu'\nu'}(p^2) \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} = \frac{1}{2} \frac{\langle \tilde{A}_\sigma^s(0) \tilde{A}_\mu^a(p_1) \tilde{A}_\nu^b(p_2) \tilde{A}_\rho^c(p_3) \tilde{A}_\tau^t(0) \rangle_{con.}}{G_{\tau\mu'}^{(2)ta'}(0) G_{\sigma\nu'}^{(2)sb'}(0)} \delta^{a'b'} g_{\mu'\nu'} , \quad (4.33)$$

equivalente a todos los diagramas con cinco gluones externos, en el que los dos gluones de momento nulo han sido explícitamente amputados (ver figura 4.2).

La ecuación del grupo de renormalización para d_2 (cuyo valor a nivel de árbol, calculado a partir de la suma de los diagramas de la figura 4.2, es $d_2(p^2) = 9g^3$) resulta en este caso:

$$\left\{ -2\hat{\gamma}(\alpha(\mu)) + \gamma(\alpha(\mu)) + \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(\alpha(\mu)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} d_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = 0 , \quad (4.34)$$

cuya solución es análoga a (4.27):

$$d_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = d_2(1, \alpha(p)) \left(\frac{\alpha(p)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\gamma_0 - 2\hat{\gamma}_0}{2\beta_0}} . \quad (4.35)$$

La constante de acoplamiento en el esquema MOM, definida no perturbativamente

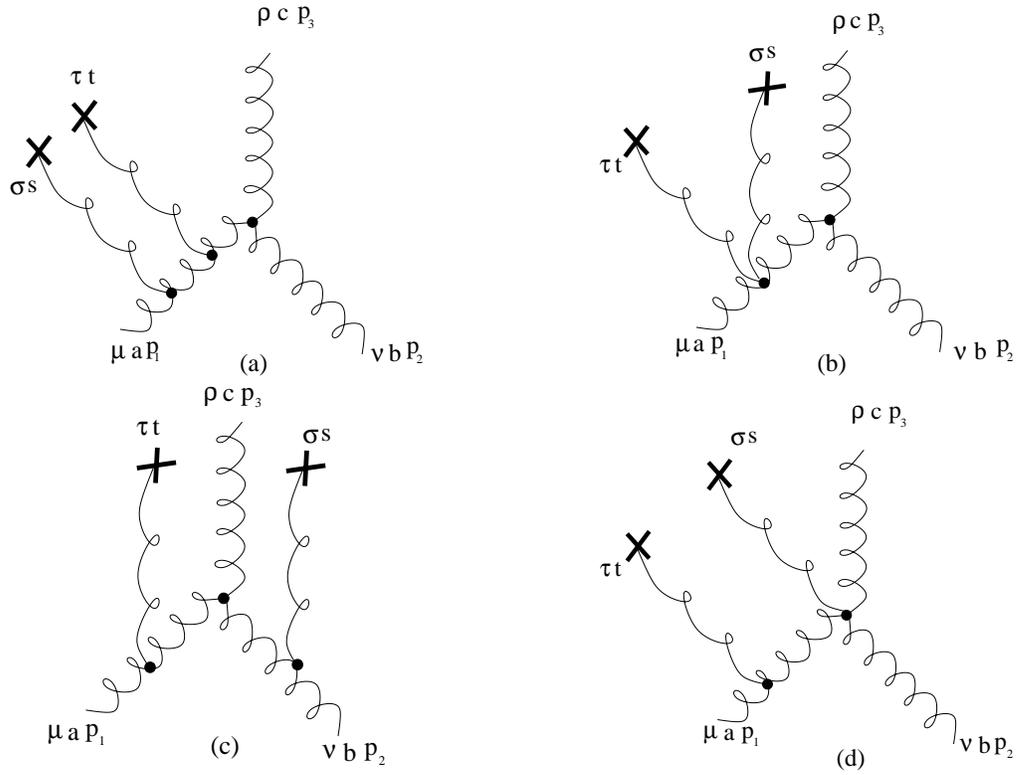


Figura 4.2: Diagramas con cinco gluones externos que, con todas sus posibles permutaciones, contribuyen a la corrección OPE a nivel de árbol de la función de Green a tres puntos en cinemática simétrica.

según (3.23) resulta:

$$\begin{aligned}
\alpha_{OPE}^{\text{MOM}}(p) &\equiv \frac{(g_{OPE}^{\text{MOM}}(p))^2}{4\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{G_{OPE}^{(3)}(p^2, p^2, p^2) [p^2 G_{OPE}^{(2)}(p^2)]^{3/2}}{[G_{OPE}^{(2)}(p^2)]^3} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(d_0 + d_2 \frac{\langle A^2 \rangle}{4(N_C^2 - 1)p^2} \right)^2 \\
&\approx \frac{1}{4\pi} \left(c_0 + c_2 \frac{\langle A^2 \rangle}{4(N_C^2 - 1)p^2} \right)^3 \approx \\
&\approx \frac{d_0^2}{4\pi c_0^3} \left[1 + \left(\frac{2d_2}{d_0} - \frac{3c_2}{c_0} \right) \frac{\langle A^2 \rangle}{4(N_C^2 - 1)p^2} + \dots \right], \quad (4.36)
\end{aligned}$$

donde, en el último paso, se han retenido tan sólo las correcciones en primer orden en p^{-2} . Haciendo uso de los desarrollos para el propagador y el vértice a tres gluones, (4.28) y (4.31), y el cálculo de los coeficientes, se obtiene una expresión no perturbativa

para la constante de acoplamiento:

$$\alpha_{OPE}^{\text{MOM}}(p) = \alpha_{\text{Pert.}}^{\text{MOM}}(p) \left(1 + \frac{R^{(3)}(\mu)}{p^2} \left(\ln \frac{p}{\Lambda} \right)^{\frac{\gamma_0 + \tilde{\gamma}_0}{\beta_0} - 1} \right), \quad (4.37)$$

con

$$R^{(3)}(\mu) = \frac{18\pi^2}{\beta_0(N_C^2 - 1)} \left(\ln \frac{\mu}{\Lambda} \right)^{-\frac{\gamma_0 + \tilde{\gamma}_0}{\beta_0}} \langle A^2 \rangle_{R,\mu}. \quad (4.38)$$

4.2.3. Vértice asimétrico. Hipótesis de factorización

En el caso del vértice asimétrico [Sot03], el desarrollo en producto de operadores es diferente del anterior, puesto que el campo gluónico de momento nulo que aparece en la función de Green no puede incluirse en el desarrollo:

$$\begin{aligned} T^* \left(\tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \tilde{A}_\rho^c(0) \right) &= \left[(c_0)_{\mu\nu}^{ab}(p^2) I + (c_1)_{\mu\nu a'}^{ab\mu'}(p^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) : + \right. \\ &\quad \left. + (c_2)_{\mu\nu a' b'}^{ab\mu' \nu'}(p^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : + \dots \right] \tilde{A}_\rho^c(0). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Este desarrollo resulta, por tanto, idéntico al realizado para el propagador, (4.4). Al evaluarlo en el vacío de QCD, el argumento de invariancia de Lorentz hace que sólo contribuyan en este caso los términos impares del desarrollo:

$$\begin{aligned} \left\langle T^* \left(\tilde{A}_\mu^a(p) \tilde{A}_\nu^b(-p) \tilde{A}_\rho^c(0) \right) \right\rangle &= (c_1)_{\mu\nu a'}^{ab\mu'}(p^2) \left\langle : A_{\mu'}^{a'}(0) : \tilde{A}_\rho^c(0) \right\rangle + \\ &\quad (c_3)_{\mu\nu a' b' c'}^{ab\mu' \nu' \rho'}(p^2) \left\langle : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_\rho^c(0) \right\rangle + \dots, \end{aligned} \quad (4.40)$$

de forma que la primera corrección al término puramente perturbativo no vendría dada directamente por el condensado $\langle A^2 \rangle$, sino por el valor esperado en el vacío del operador

$$: A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_\rho^c(0). \quad (4.41)$$

Además de este término, el único que se ha mantenido en las expresiones anteriores por simplicidad, habría contribuciones del tipo:

$$: \partial'_\mu A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_\rho^c(0), \quad (4.42)$$

que dificultan el cálculo tensorial de las correcciones. A fin de salvar estas dificultades, se formula una hipótesis adicional: se supondrá en lo que sigue que los operadores que

contribuyen al desarrollo OPE del vértice asimétrico pueden factorizarse por medio de una inserción de vacío, reduciéndose la contribución del operador (4.41) a:

$$\begin{aligned} \langle : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_{\rho}^c(0) \rangle &\rightarrow \langle : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) : \rangle \langle : A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_{\rho}^c(0) \rangle + \text{perm.}, \\ &\rightarrow \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{4(N_C^2 - 1)} G_{\tau\rho}^{(2)tc}(0) \mathcal{T}_{\mu'\nu'\rho't}^{a'b'c'\tau}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

donde $\mathcal{T}_{\mu'\nu'\rho't}^{a'b'c'\tau}$ es el tensor que proporciona todas las posibles permutaciones cíclicas de los índices $(a'b'c')-(\mu'\nu'\rho')$, que viene dado por:

$$\mathcal{T}_{\mu'\nu'\rho't}^{a'b'c'\tau} = g_{\mu'\nu'} \delta^{a'b'} g_{\rho'}^{\tau} \delta_t^{c'} + g_{\mu'\rho'} \delta^{a'c'} g_{\tau}^{\nu'} \delta_t^{b'} + g_{\rho'\nu'} \delta^{c'b'} g_{\mu'}^{\tau} \delta_t^{a'}. \quad (4.44)$$

Esta hipótesis, además de factorizar el operador $: A^3 :$, permite descartar las contribuciones de los operadores de tipo (4.42), que tras realizar la factorización por inserción de vacío,

$$\langle : \partial'_{\mu} A_{\nu'}^{b'}(0) : \rangle \langle : A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_{\rho}^c(0) \rangle, \quad (4.45)$$

son necesariamente nulas por invariancia Lorentz y simetría de color.

Realizar esta hipótesis de factorización permite, por tanto, eliminar las contribuciones al desarrollo OPE del vértice simétrico que no son proporcionales al condensado $\langle A^2 \rangle$. La hipótesis, a priori, carece de justificación, aunque a posteriori veremos cómo las correcciones introducidas por el cálculo de la dimensión anómala permiten confiar en que la desviación que introduce esta aproximación están controladas (ver §4.3).

Siguiendo el mismo método que en los apartados anteriores, se identifica el coeficiente c_1 con la función de Green a tres gluones en cinemática asimétrica donde el gluón de momento nulo ha sido amputado,

$$\Gamma_{\mu\nu a'}^{(3)ab\mu'}(p, -p, 0) = \frac{G_{\mu\nu\rho}^{(3)abc}(p, -p, 0)}{G_{\mu'\rho}^{(2)a'c}(0)}, \quad (4.46)$$

y siguiendo de nuevo el método de calcular el coeficiente mediante la introducción de gluones a una escala no perturbativa (que notaremos de nuevo por 0, por simplicidad), se obtiene formalmente el coeficiente relevante para la primera corrección OPE como:

$$(c_3)_{\mu\nu a' b' c'}^{ab\mu' \nu' \rho'}(p^2) \mathcal{T}_{\mu'\nu'\rho't}^{a'b'c'\tau} = \frac{1}{2} \frac{\langle \tilde{A}_{\lambda}^l(0) \tilde{A}_{\mu}^a(p) \tilde{A}_{\nu}^b(-p) \tilde{A}_{\rho}^c(0) \tilde{A}_{\sigma}^s(0) \rangle}{G_{\sigma\mu'}^{(2)sa'}(0) G_{\lambda\nu'}^{(2)lb'}(0) G_{\rho\tau}^{(2)ct}(0)} \text{con.} g_{\mu'\nu'} \delta^{a'b'}. \quad (4.47)$$

Esto permite calcular el coeficiente a partir de la evaluación de todos los diagramas con cinco gluones externos (tres de ellos de momento nulo) en el que los tres de momento nulo han sido explícitamente *amputados* (ver figura 4.3).

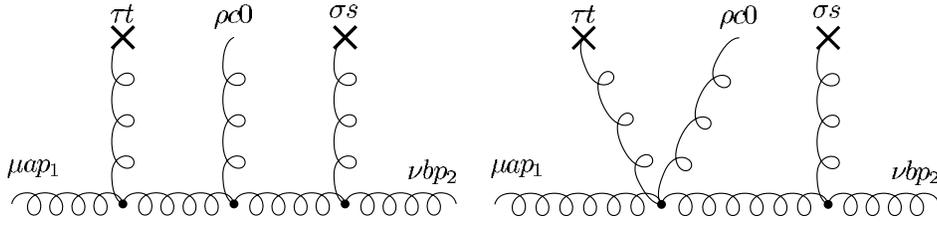


Figura 4.3: Diagramas que, con todas las posibles permutaciones, contribuyen a nivel de árbol al coeficiente de Wilson en la ecuación (4.47).

Extrayendo la parte escalar de la función de Green (3.11), así como de los coeficientes, del mismo modo que en los casos anteriores se tiene ⁷,

$$p^4 \Gamma_{OPE}^{(3)}(p^2, \mu^2) = p^4 \Gamma_{Pert}^{(3)}(p^2, \mu^2) + c_3 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{4(N_C^2 - 1)} \frac{1}{p^2}, \quad (4.48)$$

con $c_3(1, \alpha(p)) = 3g^2(p^2)$, calculado a partir de (4.47).

El operador (4.41), antes de aplicar la hipótesis de factorización, viene renormalizado por la expresión:

$$\begin{aligned} & \left[: A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_\rho^c(0) \right]_{R,\mu} = \\ & = Z_3^{-1/2}(\mu^2) Z_{A^3}^{-1}(\mu^2) : A_{\mu'}^{a'}(0) A_{\nu'}^{b'}(0) A_{\rho'}^{c'}(0) : \tilde{A}_\rho^c(0), \end{aligned} \quad (4.49)$$

con $Z_{A^3}(\mu^2)$ la constante de renormalización del operador local A^3 . Si denominamos $\bar{Z}(\mu^2)$ a la constante que renormaliza el valor esperado del operador (4.49) con dos gluones blandos procedentes del vacío, $\bar{Z}(\mu^2) = Z_{A^3}(\mu^2) Z_3^{-3/2}$, obtenemos, a partir de la expresión (4.40), una ecuación del grupo de renormalización para c_3 :

$$\left\{ -2\bar{\gamma}(\alpha(\mu)) - \gamma(\alpha(\mu)) + \frac{\partial}{\partial \ln \mu} + \beta(\alpha(\mu)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} c_3 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = 0, \quad (4.50)$$

donde se ha introducido la dimensión anómala de $\bar{Z}(\mu)$, $\bar{\gamma}(\mu)$, definida según:

$$\bar{\gamma}(\mu) = \frac{\partial \ln \bar{Z}(\mu)}{\partial \ln \mu^2} = \frac{\bar{\gamma}_0}{4\pi} \alpha - \frac{\bar{\gamma}_1}{(4\pi)^2} \alpha^2 - \dots \quad (4.51)$$

Unido a la condición inicial $c_3(1, \alpha(p)) = 3g^2(p^2)$, esto conduce a:

$$c_3 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = 3g^2(p) \left(\frac{\alpha(p)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\frac{2\bar{\gamma}_0 + \gamma_0}{2\beta_0}}. \quad (4.52)$$

⁷El miembro de la derecha de la expresión (4.40), tras suponer la validez de la hipótesis de factorización, contiene una contribución multiplicativa en el propagador gluónico de momento nulo, por lo que es posible reescribir la expresión cambiando, en el miembro de la izquierda, la función de Green completa por la función de Green con el gluón de momento nulo *amputado*.

Se puede obtener información acerca de la validez de la hipótesis de factorización a través del cálculo de la dimensión anómala (ver §4.3); si la hipótesis de factorización es válida, las constantes de renormalización de $: A^3 : \tilde{A}(0)$ y de $: A^2 : G^{(2)}(0)$ serían idénticas;

$$Z_3^{-1/2} Z_{A^3}^{-1} = Z_3^{-1} Z_{A^2}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Z} = \bar{Z} . \quad (4.53)$$

Con objeto de parametrizar este efecto, definimos $\kappa_0 = \bar{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_0$ como la contribución al logaritmo dominante de los diagramas que renormalizan el operador $: A^3 : \tilde{A}(0)$ que no satisfacen la hipótesis de factorización (ver §4.3).

En conjunto, y con un cálculo de la constante de acoplamiento en función del propagador y del vértice asimétrico similar a (4.36), se obtiene la expresión para la constante de acoplamiento en el esquema MOM asimétrico siguiente:

$$\alpha_{OPE}^{\widetilde{MOM}}(p) = \alpha_{Pert.}^{\widetilde{MOM}}(p) \left(1 + \frac{T^{(3)}(\mu)}{p^2} \left(\ln \frac{p}{\Lambda} \right)^{\frac{\gamma_0 + \hat{\gamma}_0}{\beta_0} - 1} \left(2 \left[\frac{\ln \frac{p}{\Lambda}}{\ln \frac{\mu}{\Lambda}} \right]^{\frac{\kappa_0}{\beta_0}} - 1 \right) \right) , \quad (4.54)$$

con

$$T^{(3)}(\mu) = \frac{6\pi^2}{\beta_0(N_C^2 - 1)} \left(\ln \frac{\mu}{\Lambda} \right)^{-\frac{\gamma_0 + \hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \langle A^2 \rangle_{R,\mu} . \quad (4.55)$$

4.3. Cálculo de la dimensión anómala

En las expresiones obtenidas falta conocer el valor de las dimensiones anómalas $\hat{\gamma}_0$ y $\bar{\gamma}_0$, necesarias para poder utilizar los desarrollos OPE para describir la evolución del propagador y la constante de acoplamiento con el momento.

En la primera parte de esta sección se obtendrá la dimensión anómala de A^2 , estando la segunda dedicada a la obtención de la dimensión anómala de A^3 , cuya evaluación permitirá valorar los efectos de la utilización de la hipótesis de factorización en el desarrollo OPE del vértice a tres gluones en cinemática asimétrica.

4.3.1. Operador $: A^2 :$

A fin de evaluar la dimensión anómala del condensado $\langle A^2 \rangle$, γ_{A^2} , se estudia la divergencia del valor esperado:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(q, -q) \equiv \frac{\langle g_\sigma^s | A^2 | g_\tau^t \rangle}{G_{\mu\sigma}^{(2)as}(q) G_{\nu\tau}^{(2)bt}(q)} , \quad (4.56)$$

donde se denota q al momento que portan los gluones de energía baja. Esto corresponde a $\langle g|A^2|g\rangle$ con los dos gluones de baja energía amputados.

La constante de renormalización de (4.56) vendrá dada por:

$$(\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(q, -q))_R = \frac{Z_{A^2}^{-1} Z_3^{-1}}{Z_3^{-2}} (\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(q, -q))_0 = \widehat{Z}^{-1} (\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(q, -q))_0, \quad (4.57)$$

de modo que evaluando \widehat{Z} a partir de esta expresión podremos tener acceso a su dimensión anómala al logaritmo dominante:

$$\widehat{\gamma}(\alpha) = \frac{d \ln \widehat{Z}(\mu)}{d \ln \mu} = -\frac{\widehat{\gamma}_0}{4\pi} \alpha + \dots, \quad (4.58)$$

y por tanto a $\gamma_{A^2} = \widehat{\gamma} + \gamma_0$.

El valor a nivel de árbol de $\Gamma_{\mu\nu}^{ab}$ viene dado por la evaluación del diagrama 4.4(a), mientras que los diagramas que contribuyen a la primera corrección en teoría de perturbaciones, 4.4(b) y (c), introducen las primeras divergencias logarítmicas, responsables de la dimensión anómala. Con el propósito de evitar divergencias infrarrojas adicionales que dificulten el cálculo de las integrales, se introduce el momento q , que no se conserva en la inserción del operador local (representado por el círculo en los diagramas). Esta forma de regularizar las integrales en el infrarrojo permite obtener las divergencias ultravioletas, que no se ven alteradas por el hecho de que el momento no se conserve.

Sumando las contribuciones de los diagramas de la figura 4.4, evaluados a partir de las reglas de Feynman en regularización dimensional se tiene [PR82, BYL01]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{ab}(q, -q) &= 2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \delta^{ab} \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{\epsilon} \left\{ \frac{3N_C}{4} \frac{\alpha_b}{4\pi} + O(\alpha_b^2) \right\} + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde los gluones externos han sido explícitamente amputados, α_b representa la constante de acoplamiento desnuda y $\epsilon = 2 - \frac{D}{2}$ es el parámetro de regularización dimensional, de modo que las contribuciones en $1/\epsilon$ son divergentes en el límite $D \rightarrow 4$.

A continuación deberíamos renormalizar la expresión (4.59) en nuestro esquema MOM, pero como sólo estamos interesados en el orden dominante, nos limitaremos a la prescripción MS de eliminar todos los polos divergentes en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, ya que sólo se diferencia de MOM en órdenes más altos. De este modo:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}^{MS} &= 1 + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{3N_C}{4} \frac{\alpha_b}{4\pi} + O(\alpha_b^2) \right) + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{3N_C}{4} \frac{\alpha^{MS}(\mu)}{4\pi} + O(\alpha^{MS}(\mu))^2 \right) + O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \end{aligned} \quad (4.60)$$

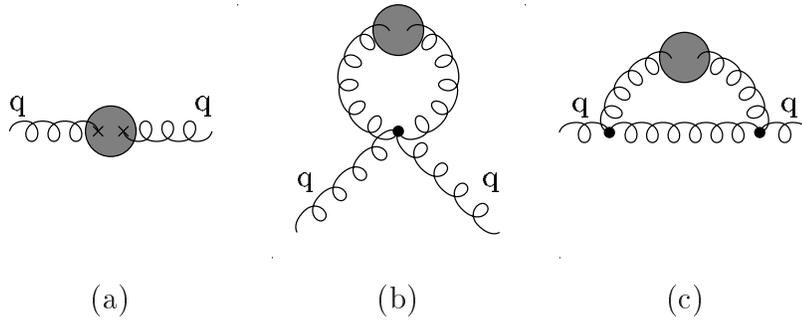


Figura 4.4: Diagramas implicados en el cálculo de la dimensión anómala del operador A^2 (a) a nivel de árbol y (b) y (c), contribuciones a un bucle. Los círculos representan la inserción del operador local, A^2 .

y la dimensión anómala resulta (ver por ejemplo [DOT98]):

$$\hat{\gamma}^{\text{MS}}(\alpha^{MS}(\mu)) = \frac{d \ln \hat{Z}^{\text{MS}}}{d \ln \mu^2} = -\frac{3N_C}{4} \frac{\alpha^{MS}(\mu)}{4\pi} + O\left((\alpha^{MS}(\mu))^2\right), \quad (4.61)$$

y por tanto:

$$\hat{\gamma}_0^{\text{MOM}} = \hat{\gamma}_0^{\text{MS}} = \frac{3N_C}{4}. \quad (4.62)$$

4.3.2. Operador : A^3 : $\tilde{A}(0)$

Para el operador : A^3 : $\tilde{A}(0)$ la técnica que hay que emplear es muy similar a la anterior; renormalizaremos el valor esperado en el vacío de $\langle g_\mu^a | : A^3 : \tilde{A}(0) | g_\nu^b \rangle$, con los tres gluones de momento pequeño amputados. Su constante de renormalización es en este caso:

$$\bar{Z}^{-1} = \frac{Z_3^{-3/2} Z_{A^3}^{-1}}{Z_3^{-3}} = Z_3^{3/2} Z_{A^3}^{-1}. \quad (4.63)$$

El diagrama a nivel de árbol correspondiente a $\langle g_\mu^a | : A^3 : \tilde{A}(0) | g_\nu^b \rangle$ antes de aplicar la hipótesis de factorización podría representarse como el de la figura 4.5(a), donde todos los gluones se contraerían con todos en el interior del círculo (inserción del operador local). La hipótesis de factorización se traduciría entonces en separar uno de los gluones, que no se acoplaría con el resto en la inserción local del operador de la figura 4.5(b).

Las correcciones a primer orden vendrían dadas por los diagramas de la figura 4.6, entre los que se distinguen claramente los que respetan la hipótesis de factorización, (a) y (b), cuya contribución a $\bar{\gamma}$ es idéntica a $\hat{\gamma}$ (los diagramas, factorizando el propagador

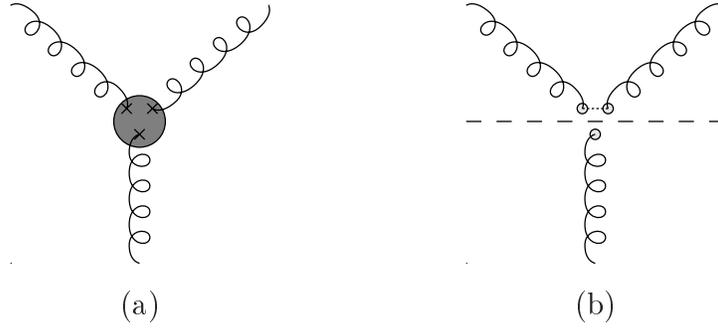


Figura 4.5: *Diagramas a nivel de árbol, (a) antes y (b) después de aplicar la hipótesis de factorización.*

de la parte inferior, son de hecho idénticos a los de la figura 4.4), de los que no satisfacen dicha hipótesis, (c) y (d), que contribuyen a $\kappa_0 = \bar{\gamma}_0 - \hat{\gamma}_0$.

Evaluando las contribuciones divergentes en ϵ en regularización dimensional de forma análoga al caso anterior, para los diagramas (c) y (d) se obtiene:

$$\kappa_0 = -27/136 . \quad (4.64)$$

Este valor representa alrededor del 8 % de $\hat{\gamma}_0 = 9/4$, lo que nos permite concluir que el cálculo de la dimensión anómala apoya la hipótesis de factorización, puesto que las correcciones que introduce respecto a dicha hipótesis son pequeñas.

Numéricamente, la influencia de κ_0 sobre la evolución de α_s (expresión (4.54)) resulta despreciable, puesto que sólo contribuye a través del factor:

$$\left(2 \left[\frac{\ln \frac{p}{\Lambda}}{\ln \frac{\mu}{\Lambda}} \right]^{\frac{\kappa_0}{\beta_0}} - 1 \right) \approx \left(2 \left[\frac{\ln \frac{p}{\Lambda}}{\ln \frac{\mu}{\Lambda}} \right]^{0.017} - 1 \right) \approx 1 \quad (4.65)$$

que funciona como una buena aproximación en el rango de momentos en el que trabajaremos (3-10 GeV).

El hecho de que el cálculo de la dimensión anómala no introduzca desviaciones significativas respecto a la hipótesis de factorización realizada ratifica dicha hipótesis que, no obstante, trataremos de verificar con los datos numéricos procedentes del retículo a continuación.

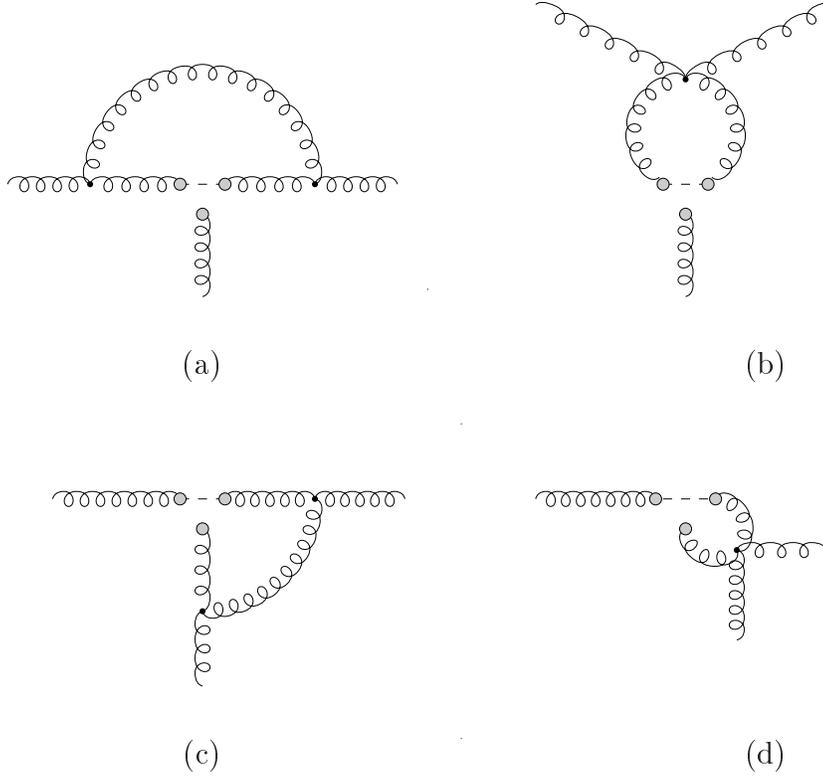


Figura 4.6: Diagramas necesarios para el cálculo de la dimensión anómala $\overline{\gamma}$ a un bucle. Nótese que los diagramas (c) y (d) violan la hipótesis de factorización.

4.4. Resultados numéricos

En el capítulo anterior se han presentado algunos resultados preliminares que indican la necesidad de introducir correcciones en potencias del momento a las expresiones perturbativas para describir los resultados numéricos. A continuación se analizarán los resultados numéricos mediante expresiones del tipo:

$$G_R^{(2)}(p^2) = G_{Pert.,n}^{(2)}(p^2) \left(1 + C_1(p^2, \mu^2) \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{p^2} \right); \quad (4.66)$$

$$\alpha_s(p^2) = \alpha_{Pert.,n}(p^2) \left(1 + C_2(p^2, \mu^2) \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{p^2} \right), \quad (4.67)$$

donde las funciones $C_1(p^2, \mu^2)$ y $C_2(p^2, \mu^2)$ han sido calculadas en la sección anterior para cada uno de los dos esquemas de renormalización utilizados (ecuaciones (4.28) para el propagador, (4.37) para el vértice simétrico y (4.37) para el asimétrico, definiendo, respectivamente, los esquemas de renormalización MOM y $\widetilde{\text{MOM}}$).

Los datos numéricos disponibles proceden de 1000 configuraciones obtenidas en retículo a través de una combinación de los algoritmos de Metropolis y *overrelaxation* [MM94], con retículos de $L = 16, 24$ y 32 , y $\beta = 6.0, 6.2, 6.4$ y 6.8 , que nos permiten obtener las funciones de correlación para energías de hasta 10 GeV. Se trabajará en todo momento con configuraciones *gauge* puras, en el *gauge* de Landau absoluto (definido en §2.3.2). El procedimiento numérico de fijación de *gauge* utiliza una combinación del algoritmo de *overrelaxation* y aceleración de Fourier. Se considera que el procedimiento ha convergido cuando $|\partial_\mu A_\mu^a|^2 < 10^{-12}$ y la integral espacial de A_0 es constante en x_4 , salvo términos $\sim 10^{-5}$.

Con estas premisas, la metodología de esta sección es la siguiente:

- En primer lugar, fijamos la escala de renormalización $\mu_0 = 10$ GeV, a la que exigimos la condición de renormalización de sustracción de momento. Para el propagador esto supone introducir un factor constante para cada valor de β , de modo que se satisfaga la condición $\mu^2 G^{(2)}(\mu^2) = 1$.
- A continuación realizamos un ajuste combinado de los datos numéricos para el propagador y la constante de acoplamiento, del que se extrae el valor de Λ_{QCD} en el esquema considerado ⁸ y el condensado $\langle A^2 \rangle_{R,\mu}$.
- Se realiza el ajuste de modo que los valores del condensado que aparecen en las correcciones en potencia al propagador gluónico, $\langle A^2 \rangle_{prop}$, y la constante de acoplamiento $\langle A^2 \rangle_\alpha$ puedan ser diferentes. Si el tratamiento OPE es válido, ambas estimaciones deben ser iguales, de modo que la compatibilidad entre ellas será una prueba adicional de la validez de los resultados.
- Para estimar las incertidumbres que afectan a nuestros resultados, se utiliza el método de Jackknife, descrito en el apéndice C, que consiste en dividir el conjunto total de configuraciones en varios subconjuntos en los que realizan ajustes por separado. El valor medio de los parámetros que se ajustan y sus errores se obtienen a partir de los resultados para cada subconjunto. Este método permite obtener predicciones cuando los errores de las diferentes medidas (en este caso, el valor de las funciones de Green a diferentes energías) están fuertemente correlacionados entre sí.

⁸El resultado se expresará en el esquema $\overline{\text{MS}}$ a través de las expresiones del apéndice A.1, con el objeto de facilitar la comparación con otros resultados en la literatura.

4.4.1. Caso simétrico, MOM

En este apartado se presentan los resultados para el vértice simétrico, obtenidos por Boucaud *y col.* antes del comienzo de este trabajo. Se presenta para poder establecer comparaciones con los resultados para el esquema $\widetilde{\text{MOM}}$ de la próxima sección.

Resultados a dos bucles

A partir de las expresiones (3.41) y (3.42) desarrolladas a dos bucles, se realiza un ajuste de los resultados numéricos, obteniéndose el resultado que se muestra en la gráfica 4.7, con un $\chi^2/d.o.f.$ combinado 1.12, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 172(15)$ MeV, y condensados para cada función de Green:

$$\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}} = 1.64(17) \text{ GeV} \quad \text{y} \quad \sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}} = 3.1(3) \text{ GeV} . \quad (4.68)$$

El valor de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ obtenido, considerablemente inferior al obtenido por el grupo *ALP-HA*, junto a la diferencia entre los condensados obtenidos a partir del propagador y la constante de acoplamiento ⁹,

$$\frac{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}}}{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}}} = 1.86(4) , \quad (4.69)$$

son indicios de que no es suficiente, en la región de energías en la que se realiza el ajuste, desarrollar las expresiones perturbativas a dos bucles.

Resultados a tres bucles

Desarrollando las expresiones perturbativas a tres bucles se tienen los siguientes valores:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 233(28) \text{ MeV} , \quad \chi^2/d.o.f. = 1.2$$

$$\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}} = 1.55(17) \text{ GeV} , \quad \sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}} = 1.9(3) \text{ GeV} . \quad (4.70)$$

⁹El error del cociente no se obtiene propagando los de los condensados, sino que se obtiene para cada subconjunto de medidas por separado mediante el método de Jackknife. El hecho de que el error del cociente sea menor que el de los condensados por separado indica que, aunque los valores de los condensados varíen entre los distintos conjuntos de medidas, el cociente permanece estable.

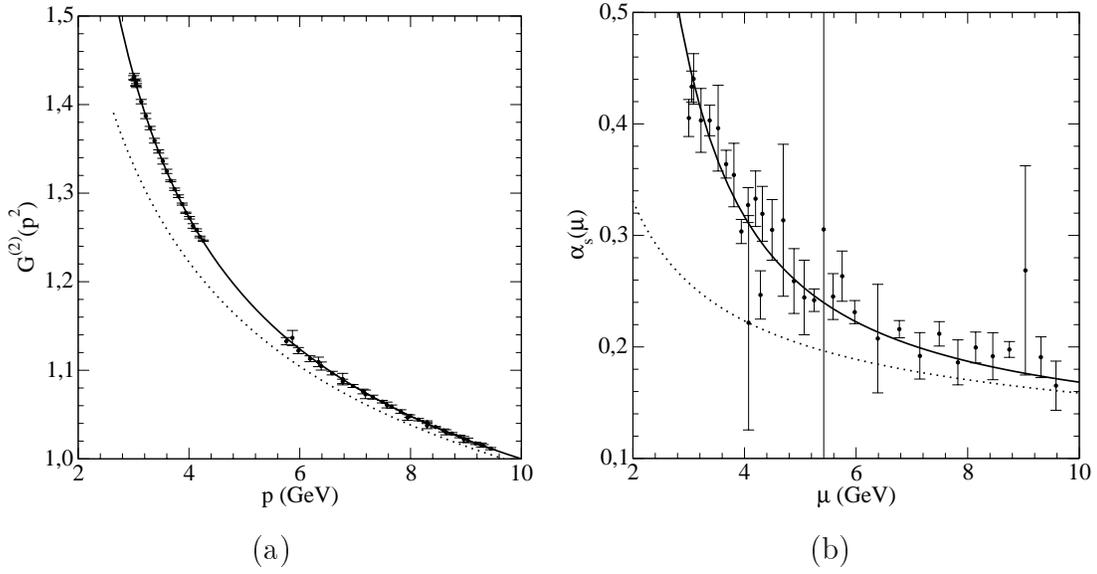


Figura 4.7: Resultados obtenidos en retículo para el (a) Propagador y (b) α_s en función del momento junto a los ajustes OPE (línea continua) y la parte perturbativa de éste (línea punteada) a dos bucles.

En este caso se obtiene un valor para $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ en buen acuerdo con el dado por el grupo *ALPHA*, 238(19) MeV, lo que es indicativo de que nos acercamos a la asintoticidad. Por otra parte, el cociente entre condensados resulta en este caso:

$$\frac{\sqrt{\langle A^2 \rangle_\alpha}}{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}}} = 1.21(18), \quad (4.71)$$

compatible con la unidad.

Si bien la calidad del ajuste no varía apreciablemente al pasar de 2 a 3 bucles, puede decirse que los resultados mejoran considerablemente; los valores del condensado que se extraen del propagador y la constante de acoplamiento son más parejos, a la vez que el valor de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ pasa de estar en total desacuerdo a ser compatible con el resultado dado por Capitani *y col.* [CLS99], 238(19)MeV. Sería posible que el desarrollo a cuarto orden de las expresiones perturbativas modificase el valor de los condensados, aunque por el momento resulta imposible realizar el mismo tipo de ajustes para cuatro bucles, puesto que los coeficientes β_3 y γ_3 no se conocen (ver tabla 3.2).

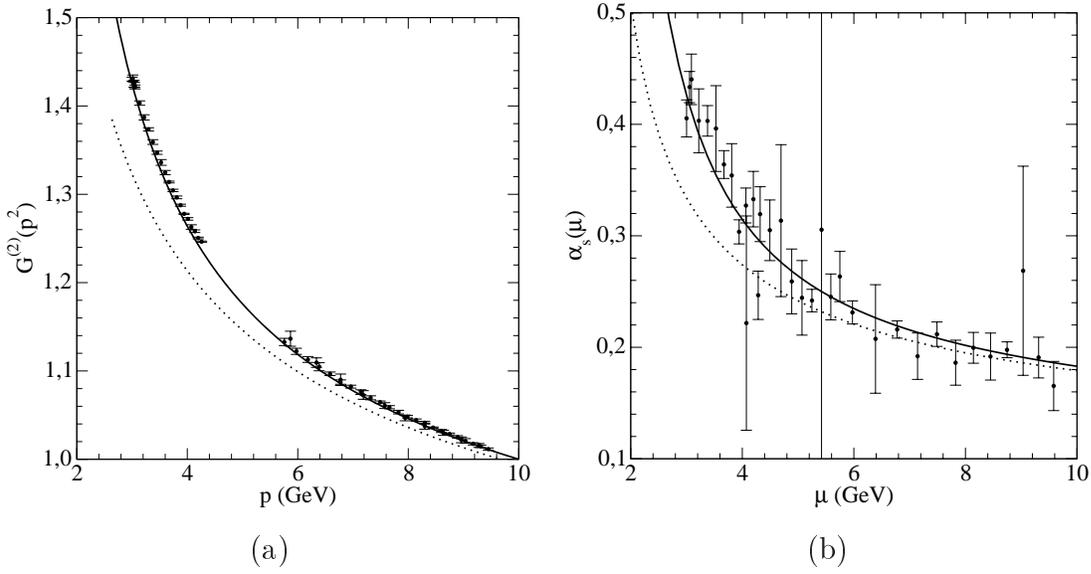


Figura 4.8: Resultados obtenidos en retículo para el (a) Propagador y (b) α_s en función del momento junto a los ajustes OPE (línea continua) y la parte perturbativa de éste (línea punteada) a tres bucles.

4.4.2. Caso asimétrico, $\widetilde{\text{MOM}}$

Resultados a dos bucles

Para el caso asimétrico, con las expresiones perturbativas desarrolladas a dos bucles se obtiene:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 283(15) \text{ MeV} , \quad \chi^2/\text{d.o.f.} = 1.95$$

$$\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}} = 0.78(26) \text{ GeV} , \quad \sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}} = 2.8(7) \text{ GeV} , \quad (4.72)$$

con un valor de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ alejado del resultado esperado, y un cociente entre los condensados

$$\frac{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}}}{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}}} = 3.65(4) , \quad (4.73)$$

alejado de la unidad. Resulta evidente en este caso la necesidad de ir a órdenes más altos en teoría de perturbaciones.

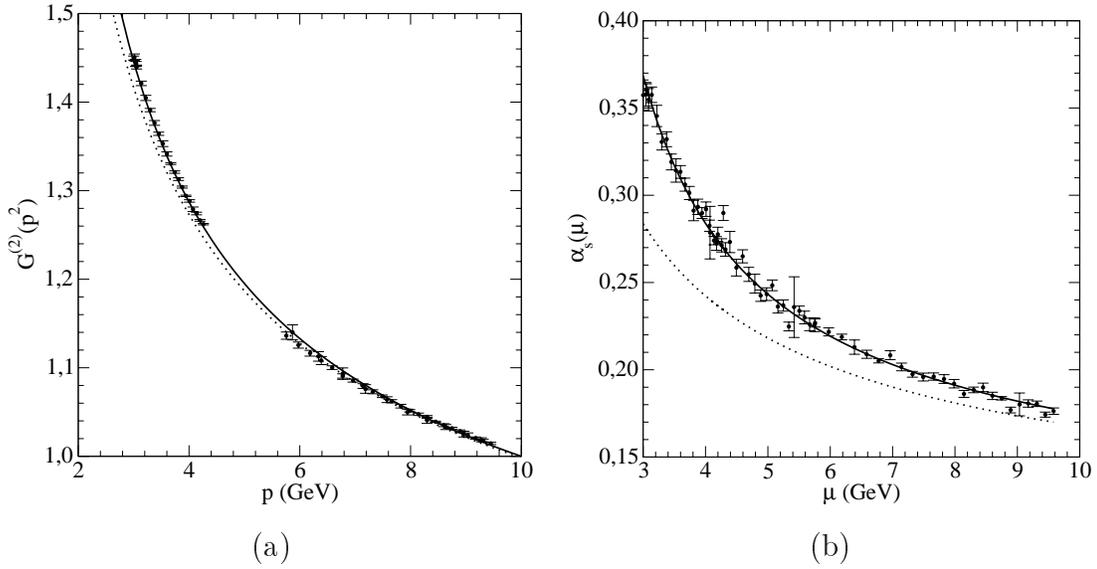


Figura 4.9: Resultados obtenidos en retículo para el (a) Propagador y (b) α_s en función del momento junto a los ajustes OPE (línea continua) y la parte perturbativa de éste (línea punteada) a dos bucles. El valor extremadamente pequeño del condensado extraído a partir del propagador hace que la curva perturbativa se aproxime considerablemente más a la curva OPE en (a) que en (b).

Resultados a tres bucles

A tres bucles, se obtiene:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 260(18) \text{ MeV} , \quad \chi^2/\text{d.o.f.} = 1.18$$

$$\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}} = 1.39(14) \text{ GeV} , \quad \sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}} = 2.3(6) \text{ GeV} , \quad (4.74)$$

con un valor de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ compatible con el dado por el grupo *ALPHA*, una mejora sustancial sobre la calidad del ajuste, y un cociente

$$\frac{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{\alpha}}}{\sqrt{\langle A^2 \rangle_{prop}}} = 1.7(3) , \quad (4.75)$$

que se sitúa ahora a 2σ de la unidad, acercándose a ésta notablemente al pasar de dos a tres bucles.

Los resultados en este esquema son menos satisfactorios que en el simétrico, donde el cociente es compatible con la unidad, y el valor central de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ está muy próximo

al obtenido por el grupo *ALPHA*. Esto puede deberse a varias causas, entre ellas a la hipótesis de factorización. La utilización de esta hipótesis no era necesaria en el caso MOM, pero en éste es imprescindible para llegar a expresiones OPE en las que la primera corrección depende del valor del condensado $\langle A^2 \rangle$.

Por otra parte, al tratarse de esquemas de renormalización diferentes, la importancia de la corrección de cuarto orden también difiere entre ellos. De este modo, es posible que en un esquema desarrollar las expresiones perturbativas a tres bucles sea suficiente mientras que en otro sea necesario calcular la corrección de cuarto orden.

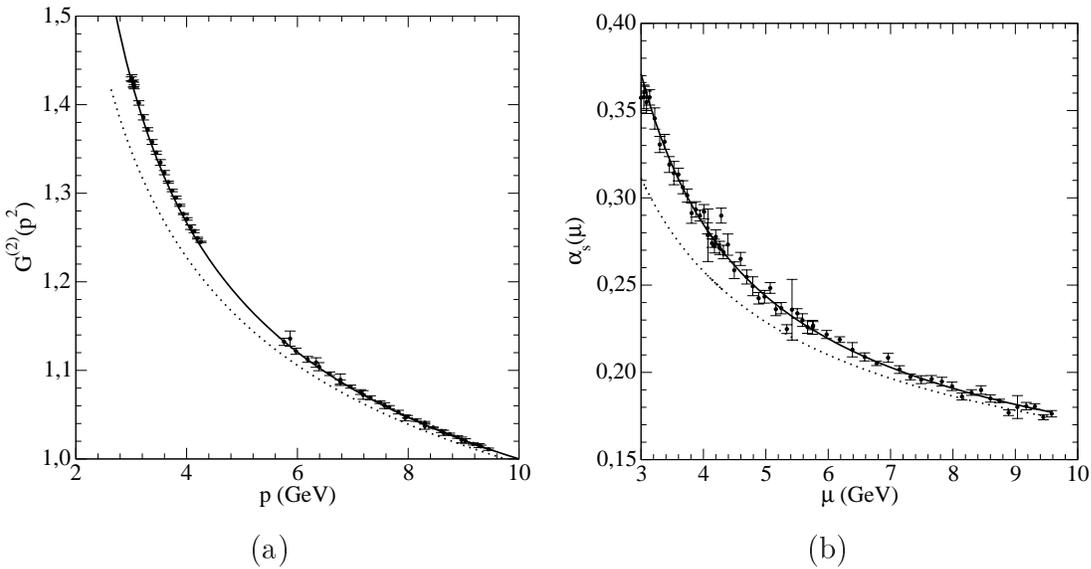


Figura 4.10: Resultados obtenidos en retículo para el (a) Propagador y (b) α_s en función del momento junto a los ajustes OPE (línea continua) y la parte perturbativa de éste (línea punteada) a tres bucles.

Pruebas sobre la dimensión anómala

A fin de evaluar la posibilidad de que la diferencia entre los resultados para los esquemas MOM y $\widetilde{\text{MOM}}$ se deba al uso, en el segundo caso, de la hipótesis de factorización, se estudia a continuación la calidad del ajuste combinado ($\chi^2/d.o.f.$) manteniendo libre el valor de la dimensión anómala $\hat{\gamma}_0$. En la figura siguiente se muestra la evolución de $\chi^2/d.o.f.$ frente a $r = 1 - (\hat{\gamma}_0 + \gamma_0)/\beta_0$, el exponente de $\ln(p/\Lambda)$ en la expresión (4.54).

Se puede observar en la figura 4.11 cómo el mejor ajuste se obtiene para un valor de r muy próximo al obtenido por medio de nuestra hipótesis de factorización y el

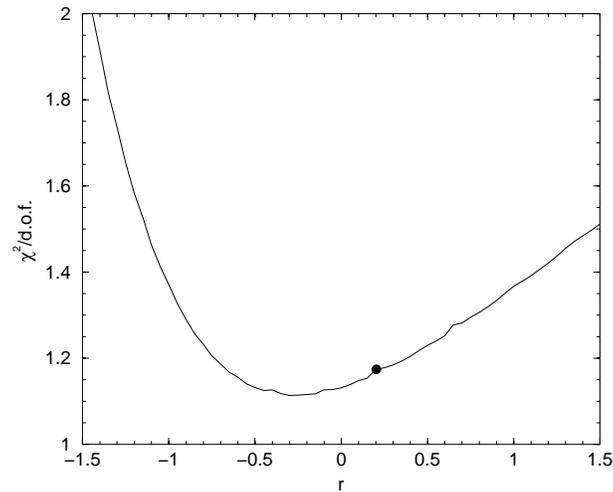


Figura 4.11: Dependencia de la calidad del ajuste con el exponente $r = 1 - (\hat{\gamma}_0 + \gamma_0)/\beta_0$ en (4.54). El punto corresponde al valor calculado en la sección 4.3, $r \approx 0.2$

cálculo de la dimensión anómala del operador A^3 . El valor $r = 1$ corresponde al cálculo a nivel de árbol (es decir, considerando nulas las dimensiones anómalas), mientras que las correcciones en $1/p^2$ puras [BRM98, BBR00] corresponderían a $r = -1$. El valor calculado está entre ambos, cerca del mínimo de χ^2 , aunque el número de datos de que se dispone no permite discriminar entre un valor positivo de r , como se obtiene en el cálculo de la dimensión anómala ($r \approx 0.2$), y un valor negativo, como sugiere la gráfica 4.11.

4.5. Discusión

Con los resultados de este capítulo, la primera conclusión que puede extraerse es que para reproducir los resultados no perturbativos obtenidos en retículo en una ventana de energías entre 3 y 10 GeV, es necesario desarrollar las expresiones perturbativas al menos hasta tercer orden. Esto implica que al calcular cualquier magnitud hadrónica, puede no ser suficiente (incluso a energías tan altas como 10 GeV) quedarse con el primer o segundo orden en teoría de perturbaciones, práctica bastante extendida en el estudio de procesos hadrónicos por necesidades de cálculo. Así pues, para evitar la falta de asintoticidad en la evaluación perturbativa de cualquier cantidad, puede llegar a ser necesario desarrollar las expresiones perturbativas hasta tercer orden, dependiendo del proceso que se estudie y del esquema de renormalización.

De hecho, se podría definir un esquema de renormalización generalizado a partir del valor de los coeficientes de la función β de Callan-Symanzik (1.28) y la dimensión anómala del propagador gluónico (3.18), de modo que sea el esquema adecuado para describir un cierto proceso, para el que el desarrollo perturbativo converja suficientemente rápido. No obstante, esta definición no tiene porqué dar resultados razonables para otros procesos. Un ejemplo paradigmático de este tipo de esquemas es el esquema de renormalización definido por el potencial quark antiquark, en el que la constante de acoplamiento viene definida por la relación (3.48).

Se ha apreciado, además, la necesidad de añadir correcciones en potencias del momento para describir la evolución de la constante de acoplamiento y el propagador gluónico entre 3 y 10 GeV, cuyo efecto es significativo ($\approx 3\%$) a escalas tan altas como 10 GeV, donde su efecto es del mismo orden que el tercer bucle en teoría de perturbaciones.

El marco OPE permite justificar la aparición de estas correcciones en potencia, proporcionando expresiones que describen con precisión la evolución de α_s y $G^{(2)}$ en la ventana de energías considerada. La inclusión de la dimensión anómala en las expresiones confirma la validez del marco OPE, señalando al condensado $\langle A^2 \rangle$ como un firme candidato para explicar la presencia de correcciones en potencia. El desarrollo en producto de operadores permite así describir la evolución de la constante de acoplamiento con la energía, con la determinación de un parámetro $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ compatible con el obtenido por el grupo *ALPHA*.

De este modo, dos procedimientos totalmente diferentes conducen a la determinación de un valor de Λ_{QCD} compatible, lo que permite establecer con menor incertidumbre el valor de este parámetro en una teoría Yang-Mills pura ($N_f = 0$).

Si bien este tipo de análisis resulta delicado, por cuanto las correcciones en potencia pueden interpretarse como falta de asintoticidad de las series perturbativas, el estudio de la transición de los resultados de 2 a 3 bucles, apunta hacia una estabilización del valor del condensado en torno a $(1.5 \text{ GeV})^2$, aunque sería conveniente poder realizar pruebas a 4 bucles para confirmar esta tendencia. No obstante, y dado que las series perturbativas no son convergentes sino asintóticas, aumentar el número de bucles llevará los resultados a dejar de convergir en algún momento. Sería necesario evaluar α_s en un rango de momentos que modifiquen $\ln(p)$ en un rango de varias unidades (como hace el grupo *ALPHA* [CLS99]), donde las correcciones perturbativas, en $\ln(p)$, sean distinguibles inequívocamente de contribuciones no perturbativas en la forma de

correcciones en potencias del momento.

El estudio de las correcciones en potencia a las funciones de Green gluónicas ha sido realizado con dos sabores de quark dinámicos [BLM02a,BLM02b], $N_f = 2$, obteniéndose, resultados cualitativamente muy similares, lo que apoya el tipo de estudios realizado en este trabajo. Desde un punto de vista cuantitativo, los resultados permiten obtener $\alpha_s(M_Z)$ extrapolando a partir de los resultados para $N_f = 0$ y $N_f = 2$, obteniéndose un valor compatible con los resultados experimentales. En cuanto a la determinación del condensado gluónico, los resultados parecen ser compatibles, aunque el estudio para $N_f = 2$ es aún preliminar.

Estos resultados han sido obtenidos con una fijación de *gauge* particular, la del *gauge* de Landau; en el capítulo siguiente se tratará sobre el significado que puede tener el valor del condensado $\langle A^2 \rangle$ en este *gauge* particular. No obstante, sería de interés poder realizar este análisis en otros *gauges*, como en el *gauge* de Lorentz o en un *gauge* máximamente abeliano ¹⁰, a fin de evaluar la dependencia del resultado con el cambio de *gauge*.

Más adelante, en la parte III del trabajo, se tratará de aclarar el significado del valor que toma el condensado estudiando una posible descripción del valor de $\langle A^2 \rangle$ basada en una aproximación semiclásica. En concreto, tras constatar que un tipo particular de soluciones clásicas contribuye al valor de este condensado, se tratará de evaluar dicha contribución, lo que sirve como punto de partida para realizar un estudio de propiedades de las funciones de Green de la cromodinámica cuántica que pueden explicarse en términos de soluciones clásicas del lagrangiano.

¹⁰Los *gauges* máximamente abelianos son aquellos en los que las componentes diagonales del campo *gauge*, $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$, se comportan como fotones.

Capítulo 5

El condensado $\langle A^2 \rangle$

Contenidos

5.1. Fenomenología	92
5.2. Invariancia BRST	93
5.2.1. Transformación BRST	93
5.2.2. Condensado de dimensión 2 invariante BRST	94
5.3. Renormalización de $\langle A^2 \rangle$	96
5.3.1. Renormalización del operador compuesto A^2	96
5.3.2. Integral del propagador	97
Esquema de renormalización	97
Contribuciones perturbativas y no perturbativas	98
5.4. Discusión	101

A partir de los resultados del desarrollo en producto de operadores, corroborados por los datos obtenidos en retículo, se puede concluir la existencia de un condensado, $\langle A^2 \rangle$, cuyo valor esperado en el *gauge* de Landau es no nulo.

Varios aspectos acerca de este condensado necesitan ser aclarados: en primer lugar, no está claro el sentido físico de un condensado que depende del *gauge*, por lo que en las secciones 5.1 y 5.2 de esta memoria se recopilan algunos resultados fenomenológicos acerca del mismo. En segundo lugar está la propia definición del condensado, como

veremos en la sección 5.3 $\langle A^2 \rangle$ es cuadráticamente divergente, por lo que será necesario definir lo que se entiende por valor no perturbativo del mismo. Por último, y esta cuestión no será abordada hasta la parte III de la memoria, está justificar el valor cuantitativo del condensado.

5.1. Fenomenología

Gubarev *y col.* [GZ01] estudian la posibilidad de que el condensado $\langle A^2 \rangle$ tenga un sentido físico en el *gauge* de Landau absoluto debido a la singularidad de éste. Si bien $\langle A^2 \rangle$ varía de un *gauge* a otro, en el *gauge* de Landau caracterizado por $\langle A^2 \rangle_{\text{mín}}$, esta cantidad es un mínimo absoluto y, en este sentido, este valor del condensado está bien definido. No sería pues el condensado $\langle A^2 \rangle$ lo que tendría sentido físico sino su valor mínimo respecto a los cambios de *gauge*.

En una teoría *gauge* abeliana (*fotodinámica*), el condensado $\langle A^2 \rangle$ puede expresarse, particularizando para el *gauge* de Landau, como:

$$\int d^4x A^2(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^4x d^4x' \frac{F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x')}{(x-x')^2} + \dots, \quad (5.1)$$

donde los puntos suspensivos representan integrales superficiales. De esta forma, el condensado $\langle A^2 \rangle$ corresponde a una integral no local, pero invariante *gauge*, aunque, no está claro que esta expresión siga siendo válida tras la renormalización. La extensión a la QCD tampoco es trivial, puesto que la expresión (5.1) es ambigua en QCD debido a la presencia de copias de Gribov que pueden dar resultados diferentes para el término de la izquierda, pero necesariamente contribuyen igual al de la derecha.

Gubarev *y col.* analizan relación del condensado con la existencia de una topología no trivial de los campos en el caso de una teoría *gauge* abeliana compacta,

$$\mathcal{L}_{com} = \frac{1}{2e^2} [1 - \cos(F_{\mu\nu})^2], \quad (5.2)$$

frente al caso no compacto, en el que los fotones son partículas libres,

$$\mathcal{L}_{ph} = \frac{1}{4e^2} (F_{\mu\nu})^2. \quad (5.3)$$

De este modo, la diferencia entre los valores esperados del condensado $\langle A^2 \rangle$ en ambas teorías sufre una transición de fase [GSZ01] en torno a $e^2 \approx 1$, que se atribuye a la existencia, en el caso compacto, de monopolos magnéticos, lo que vincula la presencia

de este condensado a las estructuras de topología no trivial. Estos resultados no son extrapolables al caso no abeliano de la QCD, no obstante, el estudio de la parte III en la que se analiza en valor del condensado $\langle A^2 \rangle$ en QCD, también está basado en la existencia de estructuras de topología no trivial.

Por otra parte, Verschelde *y col.* [VKA01], a partir de la introducción de un término en A^2 en el lagrangiano de QCD, concluyen que valores no nulos del condensado estarían energéticamente favorecidos, lo que supondría la generación de una masa gluónica efectiva. Dudal *y col.* [DVG04] a partir del mismo tipo de estudios, han obtenido recientemente $\langle A^2 \rangle \approx 0.3\text{GeV}$, lo que si bien difiere cuantitativamente del condensado obtenido, tiene en mismo signo, correspondiente al de una masa gluónica efectiva $m^2 < 0$.

5.2. Invariancia BRST

El condensado $\langle A^2 \rangle$, a pesar de no ser invariante *gauge*, es invariante bajo un tipo de transformaciones que dejan invariante el lagrangiano de la QCD en el formalismo de fijación de *gauge* de Faddeev y Popov para *gauges* covariantes (1.27):

$$\mathcal{L}_{MOD} = \mathcal{L}_{Y.M.} - \frac{1}{2\xi} \partial^\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a + \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c_a + f_{abc} \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^c c^b. \quad (5.4)$$

Algunos autores vinculan la invariancia del condensado frente a una transformación que deja invariante este lagrangiano como signo de que el condensado pueda tener sentido físico, por lo que se presenta a continuación una introducción a su trabajo, de interés para profundizar en el conocimiento del condensado $\langle A^2 \rangle$.

5.2.1. Transformación BRST

El lagrangiano (5.4), reescribiendo el término de fijación de *gauge* de forma lineal a través de la introducción de un nuevo campo, h_a , denominado campo de Nakanishi-Lautrup, es equivalente a:

$$\mathcal{L}_{MOD} = \mathcal{L}_{Y.M.} + h_a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2} \xi h^a h_a + \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c_a + f_{abc} \partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^c c^b, \quad (5.5)$$

donde ξ es el parámetro de fijación de *gauge*. El lagrangiano (5.4) se obtiene trivialmente si hacemos uso de la ecuación de movimiento para el campo de Nakanishi-Lautrup, $h^a = \xi^{-1} \partial^\mu A_\mu^a$.

Este lagrangiano permanece invariante bajo una transformación denominada BRST (Becchi, Rouet, Stora y Tyutin [BRS75, Tyu75]) que modifica un operador \mathcal{O} de acuerdo con la expresión:

$$\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} + \delta_\theta \mathcal{O} , \quad (5.6)$$

con δ_θ definida para un parámetro infinitesimal θ a través del operador s ,

$$\delta_\theta \mathcal{O} = \theta s \mathcal{O} . \quad (5.7)$$

Este operador actúa sobre los campos en la forma:

$$\begin{aligned} s A_\mu^a &= -\partial_\mu c^a - g f_{bc}^a A_\mu^b c^c \\ s c^a &= \frac{g}{2} f^{abc} c_b c_c \\ s \bar{c}^a &= h^a \\ s h^a &= 0 . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Puede demostrarse de un modo simple que este operador es nilpotente de orden dos ($s^2 = 0$) así como la invariancia del lagrangiano ante una transformación BRST (para una revisión bastante completa ver [Wei96, Ynd99b]). La invariancia BRST del lagrangiano en el marco de la fijación de *gauge* de Faddeev-Popov se presenta, por tanto, como una simetría residual del lagrangiano de la QCD cuando se fija el *gauge* de este modo.

5.2.2. Condensado de dimensión 2 invariante BRST

El operador gluónico de dimensión 2 $\langle A^2 \rangle$, cuya contribución a las funciones de Green se ha obtenido en el marco OPE en el capítulo anterior, no es invariante bajo transformaciones *gauge*, así como tampoco lo es bajo transformaciones BRST. Otro condensado de dimensión 2, $\langle \bar{c}c \rangle$, ha suscitado un gran interés en los últimos años [Sch99, Kon00, DV03] en relación con el confinamiento en los *gauges* “MAG” (*Maximum Abelian Gauge*). Estos *gauges* se definen de forma que las componentes diagonales de $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$ se comportan como fotones, mientras que el carácter no abeliano se concentra en las componentes no diagonales.

Ni el condensado gluónico de dimensión 2, $\langle A^2 \rangle$, ni el condensado de fantasmas, $\langle \bar{c}c \rangle$, son invariantes BRST por separado, no obstante, una combinación de ambos,

$$\left\langle \frac{1}{2} A^2 - \xi \bar{c}c \right\rangle = \frac{1}{V} \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu^a(x) A_\nu^\mu(x) - \xi \bar{c}^a(x) c_a(x) \right) , \quad (5.9)$$

es invariante frente a este tipo de transformaciones. En efecto, aplicando el operador definido en (5.8) se obtiene:

$$\begin{aligned} s(A(x)^2) &= (sA_\mu^a) A_\mu^a + A_\mu^a (sA_\mu^a) = -2(A_\mu^a \partial_\mu c^a + A_\mu^a g f_{bc}^a A_\mu^b c^c) , \\ s(\bar{c}(x)c(x)) &= c^a(x)h_a(x) , \end{aligned} \quad (5.10)$$

de modo que tras tener en cuenta que $h^a(x) = \xi^{-1}\partial^\mu A_\mu^a(x)$ (que procede de las ecuaciones de movimiento para el campo $h^a(x)$), y que $f_{bc}^a A_\mu^a A_\mu^b = 0$, por la antisimetría de f^{abc} , se llega a

$$\begin{aligned} s\left(\frac{1}{2}A(x)^2 - \xi\bar{c}(x)c(x)\right) &= -\partial^\mu c_a(x)A_\mu^a(x) - c_a(x)\partial^\mu A_\mu^a(x) = \\ &= -\partial^\mu (c_a(x)A_\mu^a(x)) . \end{aligned} \quad (5.11)$$

La transformación s actuando sobre el condensado resulta por tanto:

$$\begin{aligned} s\left\langle\frac{1}{2}A^2 - \xi\bar{c}c\right\rangle &= \frac{1}{V}\int d^4x s\left(\frac{1}{2}A(x)^2 - \xi\bar{c}(x)c(x)\right) = \\ &= -\frac{1}{V}\int d^4x\partial^\mu (c_a(x)A_\mu^a(x)) , \end{aligned} \quad (5.12)$$

que se anula al integrar sobre todo el espacio de modo que, en efecto, $s\langle\frac{1}{2}A^2 - \xi\bar{c}c\rangle = 0$. Esto significa que el condensado mixto gluón-fantasma es invariante bajo transformaciones BRST en los *gauges covariantes*¹.

De forma particular en el caso del *gauge* de Landau ($\xi = 0$), el condensado mixto gluón-fantasma, $\langle\frac{1}{2}A^2 - \xi\bar{c}c\rangle$, se reduce al condensado $\langle A^2\rangle$, que es entonces invariante BRST. Kondo demuestra que esta invariancia no se ve alterada por la renormalización [Kon01, Kon03a, Kon03b].

Este resultado muestra que el condensado $\langle\frac{1}{2}A^2 - \xi\bar{c}c\rangle$ es invariante frente a un tipo de transformaciones que deja invariante el lagrangiano. Si bien no es invariante *gauge*, es invariante frente a una simetría residual del lagrangiano, por lo que es totalmente legítimo que aparezca en los desarrollos en productos de operadores de un observable hadrónico. En el *gauge* de Landau, el condensado mixto se reduce trivialmente al condensado $\langle A^2\rangle$, cuyo valor hemos obtenido a través del análisis de funciones de Green gluónicas en este trabajo.

¹Puede demostrarse que también es invariante en los *gauges* de tipo MAG [Kon01].

5.3. Renormalización de $\langle A^2 \rangle$

Tras esta recopilación de resultados acerca del condensado $\langle A^2 \rangle$ presentes en la literatura, trataremos a continuación de profundizar en la renormalización de dicho objeto. En particular focalizaremos la atención en la separación de las contribuciones perturbativa y no perturbativa al condensado, que nos permitirán comprender qué se entiende por valor del condensado [BSY03c].

5.3.1. Renormalización del operador compuesto A^2

Para este análisis se hará uso del esquema de renormalización MOM, introducido en el capítulo 3, en el que la constante de renormalización de los campos *gauge* (1.15),

$$(A_R)_\nu^a = Z_3(\mu)^{-1/2}(A_0)_\nu^a, \quad (5.13)$$

se define como

$$Z_3(\mu) \equiv \mu^2 G_0^{(2)}(\mu^2), \quad (5.14)$$

que unida a una prescripción para la renormalización del vértice a tres gluones, renormaliza completamente la teoría.

Los operadores compuestos, es decir, aquellos que son una combinación de los campos que aparecen en el lagrangiano, no tienen por qué quedar renormalizados al renormalizar los campos y constantes del lagrangiano. Un ejemplo es el operador compuesto A^2 . Para aclarar este punto, introduzcamos algunas notaciones útiles: denotaremos al operador local A^2 renormalizado a una escala μ por $(A^2)_R(\mu)$, cuya relación con el operador desnudo, A_0^2 , viene dada por:

$$(A^2)_R(\mu) = Z_{A^2}^{-1}(\mu)A_0^2. \quad (5.15)$$

Por otra parte, el cuadrado del campo renormalizado, $(A_R(\mu))^2$ está relacionado con el cuadrado del campo desnudo por la expresión (5.13), que permite escribir:

$$(A_R(\mu))^2 = Z_3(\mu)^{-1}A_0^2. \quad (5.16)$$

De las expresiones anteriores se deduce, por tanto, la relación ²:

$$(A^2)_R(\mu) = \hat{Z}^{-1}(\mu)(A_R(\mu))^2, \quad (5.17)$$

²Recordemos que $\hat{Z}^{-1}(\mu) = Z_3^{-1}(\mu)Z_{A^2}(\mu)$, definido en el capítulo anterior.

donde se puede apreciar la diferencia entre el cuadrado del campo *gauge* renormalizado y el operador compuesto renormalizado, $(A^2)_R(\mu)$. Esta diferencia es, precisamente, que renormalizar los campos no es suficiente para renormalizar el operador compuesto, que requiere aún de la constante de renormalización \widehat{Z} . A continuación veremos cómo en efecto el operador compuesto es divergente, y por medio de la utilización de la expresión OPE para el propagador gluónico, (4.28), se puede obtener la constante de renormalización.

5.3.2. Integral del propagador

A partir de la definición del propagador gluónico en el *gauge* de Landau,

$$G_R(p^2)\delta^{ab}\left[\delta_{\mu,\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right] = \int d^4x e^{ip\cdot x} \langle A_{\mu R}^a(0) A_{\nu R}^b(x) \rangle, \quad (5.18)$$

e integrando sobre el espacio de momentos,

$$\sum_{a,\mu} \langle A_{\mu R}^a(0) A_{\mu R}^a(0) \rangle = \frac{3(N_C^2 - 1)}{(2\pi)^4} \int d^4p G_R^{(2)}(p^2), \quad (5.19)$$

se obtiene una expresión para el cuadrado del campo renormalizado:

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle = \frac{3(N_C^2 - 1)}{16\pi^2} \int p^2 dp^2 G_R^{(2)}(p^2, \mu^2), \quad (5.20)$$

divergente al integrar para $p \rightarrow \infty$. Por tanto, renormalizar los campos y la constante de acoplamiento no asegura que el condensado esté renormalizado. De hecho, para obtener el condensado $\langle (A^2)_R(\mu) \rangle$ falta incluir el factor de renormalización $\widehat{Z}^{-1}(\mu)$ de la expresión (5.17).

Esquema de renormalización

A continuación, se integrará la expresión (5.20), con el desarrollo en producto de operadores obtenido en el capítulo anterior, a fin de evaluar las contribuciones perturbativa y no perturbativa al condensado. Es necesario, previamente, puntualizar algunas sutilezas acerca del esquema de renormalización utilizado. En el capítulo anterior se obtuvo la expresión OPE para el propagador gluónico en el esquema de renormalización (que denominaremos *R*) definido por (4.19), en el que

$$p^2 G_R^{(2)}(p^2, \mu^2) = \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G^{(2)}(\mu^2)}. \quad (5.21)$$

Este esquema, sin embargo, no separa completamente las componentes perturbativas y no perturbativas, como haría el esquema R' definido por (4.20),

$$p^2 G_{R'}^{(2)}(p^2, \mu^2) = \frac{p^2 G^{(2)}(p^2)}{\mu^2 G_{\text{Pert}}^{(2)}(\mu^2)}. \quad (5.22)$$

De este modo, el desarrollo

$$p^2 G_R^{(2)OPE}(p^2, \mu^2) = c_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) + c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{4(N_C^2 - 1)} \frac{1}{p^2} + \dots, \quad (5.23)$$

obtenido en el capítulo anterior, con $c_0(1, \alpha(\mu)) = 1 + O(1/\mu^2)$, correspondería en el esquema R' a:

$$p^2 G_{R'}^{(2)OPE}(p^2, \mu^2) = \frac{c_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)}{c_0(1, \alpha(\mu))} + \frac{c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right)}{c_0(1, \alpha(\mu))} \frac{\langle A^2 \rangle_{R,\mu}}{4(N_C^2 - 1)} \frac{1}{p^2} + \dots, \quad (5.24)$$

donde ahora el primer término carece de contribuciones no perturbativas debido a que se aplica la condición de renormalización sobre el propagador obtenido perturbativamente (5.22). Por medio de este esquema es posible, por tanto, separar totalmente las contribuciones no perturbativas, que aparecen sólo en el segundo término del desarrollo.

La diferencia entre ambos esquemas, a los efectos de los ajustes realizados en el capítulo anterior, resulta despreciable ³, pero no lo es desde un punto de vista conceptual, cuando lo que se trata es de separar contribuciones perturbativas y no perturbativas, por lo que se utilizará el esquema R' en este desarrollo. La única diferencia entonces es la inclusión de un factor constante (independiente del momento):

$$z_0 = \frac{1}{c_0(1, \alpha(\mu))} = 1 + O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \quad (5.25)$$

que multiplica a ambos términos en el desarrollo OPE.

Contribuciones perturbativas y no perturbativas

Retomando la expresión (5.20), podemos definir la integral extendida hasta un valor máximo del momento ⁴, Λ , como:

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda = \frac{3(N_C^2 - 1)}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} p^2 dp^2 G_{R'}^{(2)}(p^2), \quad (5.26)$$

³A la escala de renormalización, $\mu = 10\text{GeV}$, los efectos no perturbativos son pequeños, por lo que aplicar la condición de renormalización R o R' es equivalente.

⁴Nótese que el regulador que se introduce en este caso, Λ , no guarda relación con los anteriores (ϵ , a , etc.), aunque juega el mismo papel: limitar el valor máximo de momentos mediante la introducción de un valor de corte en la integral.

que diverge al menos cuadráticamente en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$. Ésta puede dividirse en tres partes,

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda = \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} + \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} + \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}}, \quad (5.27)$$

donde

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{IR}} = \frac{3(N_C^2 - 1)}{16\pi^2} \int_0^{p_{\min}^2} p^2 dp^2 G_{R'}^{(2)}(p^2), \quad (5.28)$$

contiene la parte de la integral por debajo de una cierta escala, $p_{\min} \sim 2.5$ GeV, correspondiente a la región infrarroja en la que el desarrollo OPE del propagador no tiene validez. Por otra parte,

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} = \frac{3(N_C^2 - 1)z_0}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} dp^2 c_0 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \quad (5.29)$$

corresponde exclusivamente a la contribución perturbativa a la integral, y

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} = \frac{3(N_C^2 - 1)z_0}{16\pi^2} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) \frac{\langle (A^2)_R(\mu) \rangle}{4(N_C^2 - 1)}, \quad (5.30)$$

a la contribución del condensado OPE.

El término (5.28) no depende de Λ , por lo que en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ permanece constante mientras los otros dos divergen (como se verá a continuación). Su importancia es, por tanto, subdominante, y despreciable en dicho límite, por lo que en los razonamientos que siguen sólo se distingue entre contribuciones perturbativas y contribuciones OPE.

A partir de la evaluación perturbativa del coeficiente de Wilson (4.27), la parte perturbativa, $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}}$, resulta:

$$\begin{aligned} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} &\xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{3(N_C^2 - 1)}{16\pi^2} \Lambda^2 \\ &\times \left\{ \left(\frac{\ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)}{\ln \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)} \right)^{\frac{\gamma_0}{\beta_0}} \left(1 + O \left(\frac{1}{\ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)} \right) \right) + O \left(\frac{p_{\min}^2}{\Lambda^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

que es divergente en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ y con una contribución subdominante en p_{\min} .

La contribución OPE al cuadrado del campo renormalizado, (5.30), resulta ser proporcional al condensado que introducimos en el desarrollo, puesto que éste no depende del momento y puede salir fuera de la integral. Este será un primer indicio de la relación

entre la contribución OPE y el condensado, sobre la que profundizaremos a continuación. La integral (5.30) puede calcularse haciendo uso de los resultados del capítulo anterior, (4.27), que permiten escribir:

$$c_2 \left(\frac{p^2}{\mu^2}, \alpha(\mu) \right) = c_2 (1, \alpha(p)) \left(\frac{\alpha(p)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} = 12\pi \alpha(p) \left(\frac{\alpha(p)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}, \quad (5.32)$$

de forma que (5.30) conduce a:

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} = \frac{9}{16\pi} \frac{\langle (A^2)_R(\mu) \rangle}{\alpha(\mu)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}} \int_{p_{\min}^2}^{\Lambda^2} \frac{dp^2}{p^2} \alpha(p)^{1-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}. \quad (5.33)$$

Haciendo uso de la relación a primer orden,

$$\frac{dp^2}{p^2} = d \ln(p^2) \simeq -\frac{4\pi}{\beta_0} \frac{d\alpha}{\alpha^2}, \quad (5.34)$$

la expresión anterior puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} &= \frac{9}{4\beta_0} \frac{\langle (A^2)_R(\mu) \rangle}{\alpha(\mu)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}} \int_{\alpha(\Lambda)}^{\alpha(p_{\min})} d\alpha \alpha^{-1-\hat{\gamma}_0/\beta_0} \\ &= \frac{9}{4\hat{\gamma}_0} \langle (A^2)_R(\mu) \rangle \left[\left(\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} - \left(\frac{\alpha(p_{\min})}{\alpha(\mu)} \right)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \right]. \end{aligned} \quad (5.35)$$

El resultado destacable, recordando el cálculo de la dimensión anómala realizado en el capítulo anterior (ver §4.3), $\hat{\gamma}_0 = 9/4$, es que el coeficiente de la contribución OPE al condensado, según la expresión anterior es la unidad. Por tanto, en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, resulta ⁵:

$$\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \langle (A^2)_R(\mu) \rangle \left(\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}. \quad (5.36)$$

Este es un resultado de la mayor relevancia, dado que si hubiésemos partido de considerar una corrección en potencia $1/p^2$ con un condensado genérico, $\langle C \rangle$, este resultado nos permitiría identificarlo con el condensado $\langle A^2 \rangle$, y obtener su dimensión anómala, $\hat{\gamma}_0$. De haber considerado una corrección mediada por un condensado genérico, la integración que se ha realizado sobre el propagador hubiese conducido a la expresión:

$$\langle C_{R,\mu} \rangle \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \left(\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}, \quad (5.37)$$

⁵Nótese que para $\Lambda \rightarrow \infty$, $\alpha(p_{\min})$ resulta mucho mayor que $\alpha(\Lambda)$ y en consecuencia es posible despreciar la contribución en $\alpha(p_{\min})^{-\hat{\gamma}_0/\beta_0}$

en vez de (5.36) que, en efecto, identifica este condensado con $\langle A^2 \rangle$ y permite determinar su dimensión anómala. La constante de renormalización $\hat{Z}(\mu)$, definida en (5.17), resulta a partir de (5.36):

$$\hat{Z}(\Lambda, \mu) = \left(\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}, \quad (5.38)$$

de modo que su dimensión anómala sería:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \hat{Z}(\mu)}{\partial \ln \mu^2} &= \frac{1}{\hat{Z}} \alpha(\Lambda)^{-\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \alpha(\mu)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}-1} \frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0} \frac{d\alpha(\mu)}{d \ln \mu^2} = \alpha(\mu)^{-1} \frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0} \frac{\beta(\alpha)}{2} = \\ &= -\frac{\hat{\gamma}_0}{4\pi} \alpha(\mu), \end{aligned} \quad (5.39)$$

y efectivamente $\hat{\gamma}_0$ es la dimensión anómala a un bucle del condensado $\langle A^2 \rangle$, como se había obtenido en el capítulo anterior (ecuación (4.61)). En nuestro caso habíamos supuesto desde el principio que se trataba de dicho condensado, y este resultado lo confirma.

5.4. Discusión

Varios resultados del desarrollo anterior merecen una especial atención:

- El resultado (5.36), y más concretamente el hecho de que aparezca un factor 1 entre el condensado y la parte OPE del campo renormalizado al cuadrado, indica que la dimensión anómala de $\langle A^2 \rangle$, $\hat{\gamma}_0$, que aparece en dicho coeficiente, no es una variable independiente, o, en todo caso, que puede calcularse mediante una integración del propagador para todos los momentos (si partimos de suponer que el coeficiente en (5.35) es la unidad, obtenemos el valor de la dimensión anómala). Este resultado [BSY03c] fue justificado poco después de la publicación de este trabajo por Dudal *y col.* [DVS03] que, a partir de la introducción de un operador A^2 en el lagrangiano, determinaron una nueva identidad de Slavnov-Taylor,

$$\gamma_{A^2}(\alpha) = - \left(\frac{\beta(\alpha)}{\alpha} + \gamma(\alpha) \right). \quad (5.40)$$

Esta identidad establece una relación entre la dimensión anómala del condensado $\langle A^2 \rangle$, la función β de Callan-Symanzik y la dimensión anómala del propagador a todos los órdenes por lo que, en efecto, la dimensión anómala $\hat{\gamma}$ no es una variable independiente en QCD.

- El resultado principal de este capítulo podría resumirse en:

$$\begin{aligned} \langle (A^2)_R(\mu) \rangle &\simeq \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{OPE}} \left(\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}} \\ &\simeq \left[\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda - \langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}} \right] \left(\frac{\alpha(\Lambda)}{\alpha(\mu)} \right)^{\frac{\hat{\gamma}_0}{\beta_0}}, \quad (5.41) \end{aligned}$$

cuyo significado es revelador; el condensado $\langle A^2 \rangle$, es decir, el valor esperado en el vacío responsable de las correcciones $O(1/p^2)$ que encontramos en el cálculo OPE de las funciones de Green (miembro de la izquierda), puede calcularse sustrayendo de la integral completa del propagador gluónico, la parte puramente perturbativa (en el miembro de la derecha), es decir, tomando orden normal.

Esta relación define lo que entendemos por valor no perturbativo del condensado $\langle A^2 \rangle$; que supone, por una parte, eliminar la contribución aditiva a este condensado procedente de la parte perturbativa, $\langle (A_R(\mu))^2 \rangle_\Lambda^{\text{pert}}$ y, por otra, eliminar la divergencia logarítmica que resta; esto lo hace la constante de renormalización \hat{Z} , tal como se había obtenido en el capítulo anterior.

- La integración del propagador gluónico a todos los momentos (5.20) que hemos llevado a cabo en este capítulo permite, por tanto, comprobar la consistencia de la descripción realizada, aclarando el significado del condensado.

La ecuación (5.41) representa una separación entre las contribuciones perturbativa y no perturbativa al propagador integrado, es decir, a $\langle (A^2)_R(\mu) \rangle$. Dicha separación es ambigua, en cuanto a que depende del esquema de renormalización utilizado y el número de bucles al que se desarrollen las expresiones perturbativas, en cualquier caso, el resultado (5.41) vincula la existencia de un condensado gluónico de dimensión 2 a las componentes no perturbativas del campo gluónico. Es esta expresión la que motiva el estudio semiclásico de la parte III.

Dicho estudio surge tras constatar que las soluciones clásicas del lagrangiano de la QCD proporcionan una contribución no perturbativa al condensado $\langle A^2 \rangle$, que trataremos de cuantificar mediante un estudio en retículo en el que trataremos de evaluar la capacidad de las soluciones clásicas para describir este condensado así como otras propiedades del régimen no perturbativo de la QCD.

Parte III

El vacío de QCD y los instantones

Capítulo 6

Descripción semiclásica del vacío de QCD

Contenidos

6.1. Solitones	107
6.2. Propiedades topológicas del vacío de QCD	109
6.2.1. Anomalía axial	110
6.2.2. Modos cero de la ecuación de Dirac	112
6.3. Soluciones clásicas de Yang-Mills	113
6.3.1. Distribución de instantones	114
6.4. Modelo del líquido de instantones	115
6.5. Parametrización del perfil instantónico	118
6.5.1. Límite de distancias pequeñas	119
6.5.2. Límite de distancias grandes	119
6.5.3. Expresión analítica del perfil	120
6.6. Contribución instantónica a los condensados de QCD	121
6.6.1. El condensado $\langle G^2 \rangle$	121
6.6.2. El condensado $\langle A^2 \rangle$	122

Como se ha visto en los capítulos precedentes, los resultados de la teoría de perturbaciones no son capaces de describir la fenomenología de las interacciones fuertes en el

régimen de energías bajas. El problema, como se ha señalado, aparece en los desarrollo perturbativos en la forma de un crecimiento de la constante de acoplamiento al bajar la energía que invalida el tratamiento perturbativo. En estas condiciones no se puede obtener el vacío de la teoría anulando las interacciones, es decir, no es posible desarrollar a partir de las soluciones perturbativas del lagrangiano libre, como en QED. Por el contrario, los campos *gauge* en el vacío de QCD están intensamente correlacionados y confieren a los condensados valores esperados no nulos, que contienen al menos una contribución a la parte no perturbativa de la teoría.

Una vía posible para estudiar las propiedades de la QCD a energías bajas consiste en realizar una aproximación semiclásica, basada en las soluciones clásicas del lagrangiano de la QCD. Ese será el objetivo de los siguientes capítulos, por lo que en éste se realiza una introducción a los aspectos fundamentales de las aproximaciones semiclásicas.

La solución clásica más conocida del lagrangiano de QCD se denomina *instantón*. Fue propuesto por primera vez en [BPS75] y sirvió de base para la comprensión de determinados hitos fenomenológicos que no son explicables mediante la utilización de la teoría de perturbaciones. Permite explicar, entre otros, la masa del mesón pseudoescalar η' , cercana a 1GeV a diferencia de su compañero del octete, η , que es esencialmente un bosón de Goldstone en el límite quiral, basándose en la anomalía axial [BJ69]. Asimismo, el estudio de su relación con la ruptura espontánea de la simetría quiral o el espectro hadrónico son activos campos de estudio en la actualidad (ver [SS98] para una recopilación bastante completa de resultados en este campo).

En un primer momento, numerosos autores señalaron el potencial de los instantones para explicar la fenomenología a energías bajas de la QCD, incluido el confinamiento [Pol75, Pol77]. Más tarde se demostró que únicamente en términos de instantones se puede explicar el confinamiento, aunque las muestras de que este fenómeno está relacionado con las soluciones clásicas son múltiples (ver [CDG77, CDG80, GM96], por ejemplo).

El objetivo de este capítulo será realizar una introducción bastante general a la física de instantones, en la que se comenzará por presentar las características fundamentales de las soluciones semiclásicas. Posteriormente se analizará cómo describir el vacío de QCD en términos de instantones, lo que será de utilidad en los capítulos siguientes, donde se contrastará con los resultados obtenidos en retículo. Por último, se abordará la contribución de las soluciones clásicas al condensado $\langle A^2 \rangle$, cuestión que motivó en un principio este estudio.

6.1. Solitones

Las soluciones clásicas de la mayor parte de las teorías con las que estamos familiarizados, como las ecuaciones de Maxwell o la ecuación de Klein-Gordon, son disipativas, es decir, la densidad de energía se anula en todos los puntos si se espera el tiempo suficiente. No obstante, en otros casos, como el de algunas teorías *gauge* o teorías de campos escalares

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) \quad (6.1)$$

con interacción ϕ^4 :

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - a^2)^2, \quad (6.2)$$

o Sine-Gordon:

$$U(\phi) = \frac{\alpha}{\beta^2} (1 - \cos \beta \phi), \quad (6.3)$$

poseen soluciones clásicas no singulares y no disipativas, comúnmente denominadas *solitones* (ver [Col75] para una discusión bastante completa acerca de este tema). El término solitón designa a las soluciones no disipativas independientes del tiempo que permanecen localizadas en el espacio. En teorías con invariancia de Lorentz, es posible construir soluciones localizadas en el espacio-tiempo, por lo que se denominan *instantones*.

Por poner un análogo simple, la ecuación de Euler-Lagrange para una teoría ϕ^4 es equivalente a resolver el problema de una partícula moviéndose en un potencial:

$$-V(x) = \frac{\lambda}{2} (x^2 - a^2)^2, \quad (6.4)$$

en el que existen soluciones que conectan los dos máximos del potencial (ver gráfica 6.1), lo que se corresponde con las soluciones clásicas del lagrangiano (6.2), los solitones. Si considerásemos el sistema con tiempo imaginario, cambiaría el signo del potencial, con lo que las soluciones clásicas se corresponderían en ese caso a soluciones de efecto túnel.

En una teoría *gauge* SU(3) y cuatro dimensiones, las soluciones “instantónicas” aparecen sólo en el espacio euclídeo. Pasar a tiempo imaginario (para pasar del espacio de Minkowsky al Euclídeo) equivale a invertir el potencial de modo que, siguiendo la analogía anterior, las soluciones clásicas en el espacio Euclídeo equivalen, en el espacio de Minkowsky, a soluciones de efecto túnel de mínima acción. La influencia de las soluciones clásicas, por tanto, es importante también a nivel cuántico.

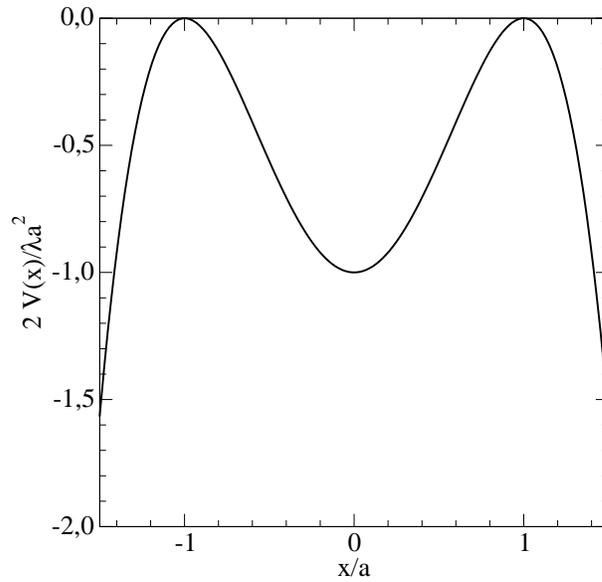


Figura 6.1: Potencial con soluciones análogas a las de una teoría ϕ^4 .

Aproximaciones semiclásicas

El uso de aproximaciones semiclásicas parte de la constatación de que las integrales de camino en el espacio euclídeo,

$$\int \left[\prod_x \phi(x) \right] e^{-S_E(\phi(x))} , \quad (6.5)$$

están dominadas por las configuraciones de campos de acción mínima. Las configuraciones de acción mínima son precisamente las soluciones clásicas, dadas por el principio de mínima acción:

$$\delta S_E(\phi) = 0 , \quad (6.6)$$

que cuánticamente proporcionaría la aproximación de orden 0 a la solución completa. El desarrollo en torno a la solución clásica es un procedimiento que ha sido ampliamente estudiado en el contexto de la mecánica cuántica a través de la aproximación WKB que considera no sólo las soluciones clásicas, sino también el siguiente término de la acción desarrollada en torno a su mínimo, un término cuadrático.

En esta última parte del trabajo, trataremos de extraer información acerca de las propiedades de las funciones de Green de QCD a energías bajas a partir de una aproximación semiclásica en la que se considera que los campos *gauge* están dominados por las soluciones clásicas del lagrangiano de la QCD.

6.2. Propiedades topológicas del vacío de QCD

Las aproximaciones semiclásicas empleadas en este trabajo se basan en las soluciones clásicas del lagrangiano Yang-Mills ¹,

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4g^2} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} ; \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a - f_{bc}^a B_\mu^b B_\nu^c . \quad (6.7)$$

que vienen dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial (\partial_\nu B_\mu^a)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{QCD}}{\partial B_\mu^a} = 0 , \quad (6.8)$$

o, escritas de forma simplificada para el lagrangiano (6.7),

$$\partial_\nu G_{\nu\mu}^a - f_{bc}^a B_\nu^b G_{\nu\mu}^c = 0 . \quad (6.9)$$

Las primeras soluciones para (6.8) fueron propuestas por Belavin, Polyakov, Schwartz y Tiupkin [BPS75] y posteriormente por 't Hooft [tH76b, tH76a] y son los denominados instantones BPST que, en el *gauge* de Landau absoluto y SU(2), se expresan como:

$$B_\mu^a(x) = \frac{2\bar{\eta}_{\mu\nu}^a x^\nu \rho^2}{x^2(x^2 + \rho^2)} \quad (6.10)$$

donde $\bar{\eta}$ es el tensor de 't Hooft, cuyas propiedades se recogen en el apéndice A.2. El centro del instantón se ha situado por simplicidad en el origen, y ρ es un parámetro libre.

El campo (6.10) presenta una divergencia en el origen (donde se ha situado el centro del instantón). Esta singularidad puede desplazarse, por medio de una transformación *gauge* [FP01], a cualquier punto del espacio o incluso al infinito ² sin alterar la distribución de acción en el espacio. En lo que sigue, no obstante, nos referiremos exclusivamente al *gauge* en el que la singularidad coincide con el punto de máxima acción, puesto que éste corresponde al *gauge* empleado en las simulaciones en retículo, definido en la ecuación (2.11), el que posee un condensado $\langle A^2 \rangle$ mínimo.

¹En esta parte se denominará campo *gauge* a gA_μ^a , a fin de que en las ecuaciones no aparezca explícitamente la constante de acoplamiento, manteniendo una notación acorde con la literatura. Para evitar confusiones se denominará B_μ^a a este campo y $G_{\mu\nu}^a$ al tensor equivalente a $F_{\mu\nu}^a$

²Al *gauge* en el que la singularidad está situada en el centro del instantón se denomina *gauge* singular, y al que no presenta singularidad (está en el infinito), *gauge* regular.

Los instantones son soluciones autoduales, es decir, $\tilde{G}_{\mu\nu}^a = G_{\mu\nu}^a$, con $\tilde{G}_{\mu\nu}^a$ definido por

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{a\rho\sigma} . \quad (6.11)$$

También existen soluciones anti-autoduales, denominadas anti-instantones, en los que $\tilde{G}_{\mu\nu}^a = -G_{\mu\nu}^a$. Los anti-instantones BPST son idénticos a los instantones, dados por la expresión (6.10), cambiando el tensor de 't Hooft $\bar{\eta}$ por η (ver apéndice A.2). En lo que sigue, a menos que la diferencia sea fundamental, el término instantón se referirá genéricamente a ambos. La autodualidad de los instantones es una propiedad fundamental de éstos asociada al carácter topológico de los campos en un instantón.

La divergencia de la corriente de Chern-Simmons,

$$K^\mu = \frac{1}{16\pi^2}\epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}(B_\alpha^a\partial_\beta B_\gamma^a + \frac{1}{3}f_{abc}B_\alpha^a B_\beta^b B_\gamma^c) , \quad (6.12)$$

puede expresarse como:

$$\partial^\mu K_\mu = \frac{1}{32\pi^2}G_{\mu\nu}^a\tilde{G}^{a\mu\nu} , \quad (6.13)$$

de donde se deduce que, para campos autoduales, el lagrangiano puede expresarse como la divergencia de un cuadrivector. La acción, por tanto, se anula excepto cuando topología de los campos *gauge* sea no trivial.

La integral extendida a todo el espacio de la divergencia de la corriente de Chern-Simmons (6.13) se conoce como carga topológica:

$$Q = \int d^4x\partial^\mu K_\mu = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4xG_{\mu\nu}^a\tilde{G}^{a\mu\nu} , \quad (6.14)$$

que en el caso de un instantón BPST (6.10) vale +1 y para un anti-instantón -1. En general, es un número entero que caracteriza la topología de la configuración.

A continuación se presentan algunos de los hitos fenomenológicos más importantes de los instantones, a fin de tener una visión general de las propiedades que pueden explicarse en términos de una descripción instantónica.

6.2.1. Anomalía axial

En una teoría clásica de campos, el teorema de Noether permite identificar la corriente conservada asociada a una simetría del lagrangiano. En ocasiones, al cuantizar

la teoría, las simetrías exactas del lagrangiano clásico no lo son a nivel cuántico, en cuyo caso se dice que existe una anomalía.

La corriente $j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ [Wit79a] es la corriente de Noether asociada a una transformación *quiral* local de los campos:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) = e^{i\gamma_5\epsilon(x)}\psi(x) , \quad (6.15)$$

que es una simetría exacta del lagrangiano clásico de QCD con masas de quark nulas³. No obstante, la divergencia de la corriente j_μ^5 calculada cuánticamente viene dada por [DGH92]:

$$\partial_\mu j_\mu^5 = \frac{N_f}{16\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu} + 2i \sum_{q=1}^{N_f} m_q \bar{\psi}_q \gamma_5 \psi_q , \quad (6.16)$$

y la presencia del término anómalo [BJ69, Adl69], $\frac{N_f}{16\pi^2} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}$, da un valor no nulo a (6.16) incluso en el límite de masas de quark nulas. Esta contribución anómala es responsable de la diferencia de masas entre η' y η , como se obtiene a partir de la fórmula de De Witten-Veneziano [Wit79a, Wit79b, Ven79], que relaciona la susceptibilidad topológica (en la aproximación *quenched*),

$$\chi_{top} = \int d^4x \langle Q(x)Q(0) \rangle , \quad (6.17)$$

donde

$$Q(x) = \frac{1}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^a(x) \tilde{G}^{a\mu\nu}(x) \quad (6.18)$$

es la densidad de carga topológica, con las masas de η , η' y K , así como con la constante de decaimiento del pión f_π (en QCD):

$$\chi_{top} = \frac{f_\pi^2}{2N_f} (m_\eta^2 - m_{\eta'}^2 - 2m_K^2) \approx (180 \text{ MeV})^4 . \quad (6.19)$$

Los instantones, a partir de su contribución a la susceptibilidad topológica, permiten obtener la masa del mesón η' mediante esta expresión, con lo que se obtienen resultados en buen acuerdo con los experimentales [SS98].

³Es exacta sólo si todos los sabores de quark del lagrangiano tienen masa nula. Se denominará N_f al número de sabores de masa nula.

6.2.2. Modos cero de la ecuación de Dirac

La carga topológica (6.14) puede evaluarse en función del propagador fermiónico:

$$Q = \frac{1}{2N_f} \int d^4x \partial_\mu j_\mu^5 = \frac{1}{2N_f} \int d^4x N_f \partial_\mu \text{Tr} (S(x, x) \gamma_\mu \gamma_5) , \quad (6.20)$$

con $S(x, y) = \langle x | (i\mathcal{D})^{-1} | y \rangle$ el propagador de quark y $i\mathcal{D} = (i\partial_\nu - B_\nu^a(x)\lambda_a/2)\gamma^\nu$ el operador de Dirac. Desarrollando en función de los autoestados del operador de Dirac, $i\mathcal{D}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$,

$$S(x, y) = \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda(x)\psi_\lambda^\dagger(y)}{\lambda} , \quad (6.21)$$

y haciendo uso de la ecuación de autovalores, se obtiene:

$$Q = \int d^4x \text{Tr} \left(\sum_\lambda \psi_\lambda(x)\psi_\lambda^\dagger(x)\gamma_5 \right) . \quad (6.22)$$

El integrando de la última expresión es nulo salvo si $\lambda = 0$, debido a la ortogonalidad de ψ_λ y $\gamma_5\psi_\lambda$ ⁴. De este modo, sólo contribuyen a la carga topológica los modos cero de la ecuación de Dirac, con un signo que depende de su *quiralidad*:

$$Q = n_+ - n_- , \quad (6.23)$$

donde n_+ representa el número de modos cero de *quiralidad* derecha y n_- izquierda. Esto conduce al teorema del índice [AS84], que demuestra que:

$$\frac{1}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G_{\rho\sigma}^a = n_+ - n_- \quad (6.24)$$

es un invariante topológico, el cual es constante e igual a un número entero para cualquier variación continua de los campos *gauge*. Su valor permite clasificar las diferentes configuraciones.

Recientemente, algunos autores [HDD02, HDD03] han estudiado la topología de QCD a partir de un análisis del espectro del operador de Dirac. Como se ha visto, los modos de energía muy baja, al estar relacionados con los instantones, proporcionan información directa acerca de las propiedades de la QCD en el límite de masas de quarks nulas. No obstante, este tipo de análisis requiere la utilización de operadores con buenas propiedades *quirales* en retículo, lo que resulta complicado (ver §2.4) y, en cualquier caso, requiere un gran tiempo de cálculo.

⁴Nótese que $\{\mathcal{D}, \gamma_5\} = 0$, por lo que $\gamma_5\psi_\lambda$ es un autoestado del operador de Dirac de autovalor $-\lambda$.

6.3. Soluciones clásicas de Yang-Mills

La solución BPST (6.10) no es la única solución clásica de las ecuaciones de movimiento, aunque sí corresponde al tipo de soluciones más simples, que puede obtenerse de forma exacta, y el de uso más extendido. Se puede obtener este tipo de soluciones partiendo de un campo *gauge* SU(2) de la forma:

$$B_\mu^a(x) = 2\bar{\eta}_{\mu\nu}^a x_\nu x^{-2} \phi(x) , \quad (6.25)$$

donde ϕ es una función adimensional cualquiera de x . El tensor $G_{\mu\nu}^a$ resulta entonces:

$$G_{\mu\nu}^a = \bar{\eta}_{\mu\nu}^a \left[-4\frac{\phi}{x^2} - \frac{\phi^2}{x^2} \right] + (\bar{\eta}_{\nu\rho}^a x_\mu x_\rho - \bar{\eta}_{\mu\rho}^a x_\nu x_\rho) \left[4\frac{d(\phi/x^2)}{d(x^2)} - \left(\frac{\phi}{x^2} \right)^2 \right] . \quad (6.26)$$

Introduciendo este tensor en la ecuación (6.9), y haciendo uso de las relaciones del apéndice A.2, se llega a la ecuación para la función $\phi(x)$:

$$x^4 \frac{d^2 \phi}{d(x^2)^2} + x^2 \frac{d\phi}{d(x^2)} - \phi + 3\phi^2 - 2\phi^3 = 0 , \quad (6.27)$$

en la que es posible reducir el orden de la ecuación diferencial, resultando:

$$\phi(1 - \phi) + x^2 \frac{d\phi}{d(x^2)} = 0 . \quad (6.28)$$

Esta ecuación es invariante de escala, es decir, cualquier solución sigue siéndolo si se realiza el cambio de variable $x \rightarrow x/\rho$. Esto se debe a que estamos considerando una solución clásica aislada; al considerar los efectos de un sistema correlacionado de instantones aparecerán términos que violan esta invariancia de escala.

Las soluciones de (6.28) son:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{Solución trivial} \\ 1 & \text{Merón} \\ \frac{1}{x^2 + 1} & \text{Instantón BPST} \end{cases} , \quad (6.29)$$

que comprenden, además de la solución trivial, con campos nulos en todas las posiciones del espacio-tiempo, la solución BPST (6.10), y otro tipo de soluciones clásicas, los merones, que han sido propuestos recientemente como candidatos para describir el confinamiento [LNT04].

El tipo de solución (6.25), válido en SU(2), puede ser extendido a SU(3) sin pérdida de generalidad introduciendo grados de libertad adicionales, correspondientes a la

orientación del instantón SU(2) en el espacio SU(3). Esta orientación se introduce por medio de los tensores $R^{a\alpha}$, cuyas propiedades se obtienen en el apéndice A.2 a partir de las matrices de rotación en el espacio *gauge*. De este modo se pueden construir soluciones en SU(3) que, en cualquier caso, son particulares, con carga topológica unidad. Shuryak [Shu88, SS98], basándose en algunas estimaciones fenomenológicas indicó que para describir el vacío de QCD en términos de instantones deberían encontrarse en una densidad de en torno a un instantón por fm^4 .

Por tanto, las soluciones obtenidas no son suficientes para describir los datos fenomenológicos. Como alternativa, se considera un conjunto de instantones con posiciones (z_i) , radios (ρ_i) y orientaciones de color $(R_i^{a\alpha})$ diferentes para cada instantón, con lo que se obtiene el campo *gauge* como:

$$B_\mu^a(x)_{SU(3)Ins.} = \sum_i \frac{2R_i^{a\alpha}\bar{\eta}_{\mu\nu}^\alpha(x_\nu - z_\nu)\rho^2}{(x - z)^2((x - z)^2 + \rho^2)} \quad (a = 1, \dots, 8) . \quad (6.30)$$

Esta formulación del vacío de QCD se conoce en la literatura como “Modelo del Líquido de Instantones”⁵; generalmente se acepta que los instantones tienen posiciones y orientaciones en el espacio de color aleatorias, radios en torno a 0.3 fm y densidades en torno a 1 fm^{-4} .

El hecho de que las ecuaciones sean no lineales hace que (6.30) no sea solución de las ecuaciones clásicas (6.9), salvo cuando sólo existe un instantón en todo el espacio. El propósito de la sección siguiente será construir soluciones aproximadas de las ecuaciones de movimiento basadas en (6.30).

6.3.1. Distribución de instantones

La probabilidad de encontrar un instantón (cuya acción viene dada por $S_I = 8\pi^2/g^2$) viene dada en orden cero por:

$$P \sim e^{-8\pi^2/g^2} . \quad (6.31)$$

Si se introducen correcciones cuánticas, y se tiene en cuenta la dependencia con el radio (parametrizada a través de la dependencia de la constante de acoplamiento con

⁵En algunos casos se denomina “gas” de instantones, aunque en este trabajo se opta por la opción de “líquido”, como quedará justificado por las densidades obtenidas.

el radio del instantón, $g(\rho)$), se puede obtener la distribución de instantones en función del radio [tH76a, Shu88]:

$$\frac{d\mu_0(\rho)}{d^4z d\rho} = C_{N_C} \left(\frac{8\pi^2}{g(\rho)^2} \right)^{2N_C} e^{-\frac{8\pi^2}{g(\rho)^2}} \rho^{-5}, \quad (6.32)$$

donde C_{N_C} es una constante que, calculada a un bucle en el esquema de regularización à la Pauli-Villars ⁶, toma el valor [tH76a, BCG77]:

$$C_{N_C} = \frac{0.466e^{-1.679N_C}}{(N_C - 1)!(N_C - 2)!}. \quad (6.33)$$

La densidad obtenida perturbativamente crece con ρ como

$$\frac{d\mu_0(\rho)}{d^4z d\rho} \sim \frac{(\rho\Lambda_{PV})^{\beta_0}}{\rho^5}, \quad (6.34)$$

que en el caso SU(3), en el que trabajamos ($\beta_0 = 11$), implica un crecimiento como ρ^6 . La divergencia de esta distribución para radios grandes se debe a la utilización de expresiones perturbativas, que carecen de valor para grandes distancias. Para regularizar esta distribución es necesario construir soluciones de las ecuaciones de movimiento que tengan en cuenta los efectos de las correlaciones entre instantones.

6.4. Modelo del líquido de instantones

Debido a la no linealidad de las ecuaciones de movimiento, no es posible escribir una solución clásica como superposición de soluciones particulares. No obstante, si la fracción de ocupación es pequeña, es posible encontrar una buena solución aproximada mediante la aplicación de métodos variacionales tomando como configuración de partida una superposición de instantones BPST.

Por ejemplo, un par instantón anti-instantón ($I\bar{I}$) tendrá una acción ($S_{I\bar{I}}$) diferente de la acción de los dos por separado ($S_I + S_{\bar{I}}$), lo que permite definir una *interacción* de los instantones, dada por:

$$S_{int} = S_{I\bar{I}} - 2S_I, \quad (6.35)$$

⁶El valor depende del esquema elegido. En otro esquema B vendría dada por:

$$C_{N_C}^B = C_{N_C}^{PV} \left(\frac{\Lambda_{PV}}{\Lambda_B} \right)^{\beta_0},$$

con $\beta_0 = 11N_C/3$ el primer coeficiente de la función β .

cuyo signo revela si la interacción es atractiva o repulsiva.

Los estudios realizados coinciden en señalar una interacción dipolar entre un instantón y un anti-instantón a distancias grandes, mientras que no hay interacción entre dos instantones o dos anti-instantones. Para distancias pequeñas, por el contrario, hay una interacción repulsiva entre pares $I - I$, $I - \bar{I}$ o $\bar{I} - \bar{I}$. Esta repulsión es la responsable de la regularización para radios grandes de la distribución $\mu(\rho)$ (6.32).

El punto de partida del estudio del líquido de instantones es la función de partición del conjunto de instantones y anti-instantones:

$$Z = \frac{1}{N_I! N_{\bar{I}}!} \prod_i^{\forall I \bar{I}} [d\Omega_i \mu(\rho_i)] e^{-S_{int}} , \quad (6.36)$$

con $\Omega_i = \{R_i^{a\alpha}, z_i, \rho_i\}$ las variables del instantón y $\mu(\rho_i)$ la distribución de radios de instantones.

Para resolver este tipo de sistemas, han surgido diferentes métodos, entre los que cabe destacar los siguientes:

- Callan y col. [CDG78] resolvieron este sistema utilizando tan sólo la interacción dipolar, con lo que no es capaz de eliminar la divergencia en $\mu(\rho) \propto \rho^6$.
- Ilgenfritz y Muller-Preussker [IM81] propusieron un modelo de esferas duras:

$$S_{int} = \begin{cases} \infty & |z_I - z_{\bar{I}}| < \sqrt[4]{a\rho_I^2 \rho_{\bar{I}}^2} \\ 0 & |z_I - z_{\bar{I}}| > \sqrt[4]{a\rho_I^2 \rho_{\bar{I}}^2} \end{cases} , \quad (6.37)$$

en el que hay un volumen excluido de la función de partición, y la divergencia en $\mu(\rho)$ desaparece.

- Diakonov y Petrov [DP84] propusieron un método variacional (sobre el que se insistirá más en profundidad dado que se hará uso de sus resultados más adelante) para fijar la distribución de los instantones y el perfil $\phi(x)$ de éstos.
- Verbaarschot [Ver91] critica las parametrizaciones anteriores, basadas en la superposición de soluciones aisladas en las que el efecto de las correcciones cuánticas vuelve inestables los pares muy próximos. Como alternativa propone el método del «valle» o *streamline* que, sin embargo, no consigue evitar la divergencia perturbativa de la distribución de instantones.

A continuación se presentará más en detalle el método de Diakonov y Petrov, del que se hará uso en las secciones posteriores para construir una parametrización del perfil instantónico. Si bien su desarrollo es complejo, es interesante señalar los aspectos fundamentales, a fin de tener una visión completa del método.

El método de Diakonov y Petrov

Este método parte de una configuración de campos inicial, $\tilde{\phi}$, y una acción modificada, S_1 , para la que $S(\tilde{\phi}) = S_1(\tilde{\phi})$, con una función de partición resoluble,

$$Z_1 = \frac{1}{N_I!N_T!} \prod_i^{\forall I\bar{I}} [d\Omega_i \mu(\rho_i)] e^{-S_1} , \quad (6.38)$$

La función de partición completa del sistema puede expresarse como:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N_I!N_T!} \prod_i^{\forall I\bar{I}} [d\Omega_i \mu(\rho_i)] e^{-(S-S_1)} e^{-S_1} \\ &= \frac{Z_1}{Z_1} \langle e^{-(S-S_1)} \rangle \simeq Z_1 e^{\langle -(S-S_1) \rangle} , \end{aligned} \quad (6.39)$$

y dado que el término a la derecha de (6.39) depende de la función inicial, en este caso el campo instantónico,

$$B_\mu^a(x) = \sum_i^{\forall I\bar{I}} B_\mu^a(R_i^{a\alpha}, z_i, \rho_i, \phi(x)) , \quad (6.40)$$

se puede obtener la función del perfil $\phi(x)$ por medio de un método variacional.

Sin entrar en detalles acerca del desarrollo del método [DP84], diremos que éste recupera las características básicas de la interacción, de comportamiento dipolar a distancias largas y fuertemente repulsiva a distancias cortas. En promedio la interacción es repulsiva, de valor:

$$\langle S_{int} \rangle = \gamma^2 \rho_I^2 \rho_T^2 , \quad \gamma^2 = \frac{27}{4} \frac{N_C}{N_C^2 - 1} \pi^2 , \quad (6.41)$$

lo que reproduce la interacción repulsiva a pequeñas distancias de Ilgenfritz y Muller-Preussker [IM81]. La distribución de radios aparece regularizada según la expresión:

$$\mu(\rho) = \mu_0(\rho) e^{-\gamma(\rho) \overline{\rho^2} \gamma(\overline{\rho^2}) \rho^2 \beta N/V} , \quad (6.42)$$

con $\gamma(\rho) \rho^2 = \gamma \int_0^\infty dx^2 \phi(x/\rho)$ y $\overline{\gamma(\rho) \rho^2}$ el promedio sobre la distribución de radios. La distribución, una vez normalizada, viene dada por:

$$\mu(\rho) = 2 \frac{\left(\frac{2}{7} \overline{\rho^2}\right)^{-7/2}}{\gamma(7/2)} \rho^6 e^{-\frac{7}{2} \rho^2 / \overline{\rho^2}} , \quad (6.43)$$

donde el factor exponencial elimina la divergencia del término perturbativo ρ^6 .

El perfil óptimo $\phi(x)$ viene dado por la ecuación:

$$-\left(x^2 \frac{d}{dx^2}\right)^2 \phi + \left(1 + \frac{\alpha_{\text{DP}}^2 x^2}{4}\right) \phi - 3\phi^2 + 2\phi^3 + \frac{1}{6\beta(\rho)} \frac{\delta C_{N_C}}{\delta \phi} = 0, \quad (6.44)$$

donde α_{DP} es una constante dimensional relacionada con la densidad de instantones, $\beta(\rho)$ es la función del grupo de renormalización y el término en C_{N_C} procede de $\frac{\partial \mu(\rho)}{\partial \phi}$. Este término es el responsable de la ruptura de la invariancia de escala de la ecuación, como consecuencia de la introducción de correcciones cuánticas.

En el comportamiento a grandes distancias, Diakonov y Petrov estiman que el perfil no debe verse afectado por un cambio global de escala, por lo que despreciando el término que viola la invariancia de escala, obtienen la ecuación

$$-\left(x^2 \frac{d}{dx^2}\right)^2 \phi + \left(1 + \frac{\alpha_{\text{DP}}^2 x^2}{4}\right) \phi - 3\phi^2 + 2\phi^3 = 0, \quad (6.45)$$

válida para distancias grandes. Esta expresión es invariante de escala, la dependencia con la escala se fija por medio de una condición de contorno, $\phi(x = \rho) = 1$, donde ρ define el tamaño del instantón.

El parámetro α_{DP} , en el caso particular de que todos los instantones tengan el mismo radio, puede expresarse como:

$$\alpha_{\text{DP}}^2 \simeq \frac{9N_C \pi^2}{N_C^2 - 1} n \int_0^\infty dx^2 \phi \left(\frac{|x|}{\rho}\right), \quad (6.46)$$

donde n es la densidad de instantones. En el límite $n \rightarrow 0$, el parámetro α_{DP} se anula, con lo que la ecuación (6.45) se reduce a (6.27), es decir, para el límite de densidad nula se recupera la ecuación para instantones libres.

A continuación se presentará una parametrización del perfil instantónico, $\phi(x)$, inspirada en las ecuaciones (6.44) y (6.45), del que se hará uso en este trabajo.

6.5. Parametrización del perfil instantónico

Basándonos en los desarrollos de Diakonov y Petrov, escribiremos los campos en un líquido de instantones de la forma más general, con orientación de color, posición

y radio diferentes para cada instantón o anti-instantón, y una función de perfil, $\phi(x)$, general ⁷ (6.30) como:

$$B_{\mu}^a(x)_{Ins.} = \sum_i^{\forall I\bar{I}} \frac{2R_i^{a\alpha}(\bar{\eta}_i)_{\mu\nu}^{\alpha}(x_{\nu} - z_{\nu}^i)}{(x - z^i)^2} \phi\left(\frac{|x - z^i|}{\rho_i}\right). \quad (6.47)$$

Este tipo de soluciones, al estar construidas como suma de soluciones localizadas, viola la invariancia por traslación. Sólo se podrá recuperar información física cuando dicha simetría sea restaurada, por ejemplo, al promediar sobre diferentes configuraciones de campos con conjuntos de posiciones $\{z^i\}$ diferentes.

A fin de construir una parametrización del perfil $\phi(x)$ basada en las soluciones asintóticas de la ecuación (6.45), se estudian a continuación los límites de pequeñas y grandes distancias.

6.5.1. Límite de distancias pequeñas

En el límite $\alpha_{DP}x \rightarrow 0$, se puede aproximar

$$1 + \frac{\alpha_{DP}^2 x}{4} \approx 1, \quad (6.48)$$

con lo que la ecuación diferencial (6.45) resulta,

$$-\left(x^2 \frac{d}{dx^2}\right)^2 \phi + \phi - 3\phi^2 + 2\phi^3 = 0, \quad (6.49)$$

idéntica a (6.27), desarrollando las derivadas.

Esto significa que las soluciones para distancias muy pequeñas, cerca del centro del instantón, no se ven alteradas por la presencia de otros instantones. Será en la cola de los instantones (lejos del centro) donde los efectos de superposición sean más importantes.

6.5.2. Límite de distancias grandes

Para $x/\rho \gg 1$, las potencias superiores en ϕ pueden despreciarse frente al término lineal, puesto que es de esperar una caída al menos como ρ^2/x^2 (caso BPST), con lo

⁷El argumento de esta función, como debe ser adimensional, se ha expresado en función del parámetro ρ , que proporciona la escala del instantón, y por la simetría radial como función de $|x - z|/\rho$.

que la ecuación original puede escribirse como:

$$-\left(x^2 \frac{d}{dx^2}\right)^2 \phi + \left(1 + \frac{\alpha_{\text{DP}}^2 x^2}{4}\right) \phi = 0, \quad (6.50)$$

que es equivalente a la ecuación de Bessel modificada de segunda especie:

$$\left\{ |x|^2 \frac{d^2}{d|x|^2} + |x|^2 \frac{d}{d|x|} - (2^2 + \alpha_{\text{DP}}^2 |x|^2) \right\} \phi_{\alpha_{\text{DP}}} \left(\frac{|x|}{\rho} \right) = 0. \quad (6.51)$$

Las soluciones de ésta vienen dadas por:

$$\phi \left(\frac{|x|}{\rho} \right)_{x \gg \rho} \approx K_2(\alpha_{\text{DP}} |x|) \approx \frac{e^{-\alpha_{\text{DP}} |x|}}{\sqrt{|x|}}, \quad (6.52)$$

es decir, mientras que para distancias cortas es el parámetro ρ el que gobierna el comportamiento del perfil, para distancias grandes son los efectos colectivos, a través de α_{DP} , los que determinan la forma del mismo.

Así pues, mientras que en el caso de un instantón aislado el perfil decrece como x^{-2} para distancias grandes, las soluciones monoparticulares en un líquido de instantones decrecen exponencialmente.

6.5.3. Expresión analítica del perfil

En este trabajo se propone una parametrización del perfil de los instantones inspirada en las soluciones asintóticas anteriormente expuestas [BSY03b]:

$$\phi \left(\frac{|x|}{\rho} \right) = \frac{K_2(\alpha_{\text{DP}} |x|)}{\frac{2}{(\alpha_{\text{DP}} \rho)^2} + K_2(\alpha_{\text{DP}} x)} \rightarrow \begin{cases} \frac{\rho^2}{x^2 + \rho^2} & \text{si } \alpha_{\text{DP}} |x| \ll 1 \\ \propto K_2(\alpha_{\text{DP}} |x|) & \text{si } |x|/\rho \gg 1 \end{cases}, \quad (6.53)$$

que incorpora el comportamiento obtenido por Diakonov y Petrov para distancias grandes y el del perfil BPST para distancias pequeñas. De este modo (6.53) es capaz de integrar los efectos colectivos debidos a las interacciones entre instantones en una modificación de la función del perfil instantónico, $\phi(x)$ a través del parámetro α_{DP} . El hecho de que no sea solución exacta de la ecuación (6.44) no es fundamental, puesto que esta ecuación es aproximada, válida tan sólo en el rango de distancias grandes.

6.6. Contribución instantónica a los condensados de QCD

6.6.1. El condensado $\langle G^2 \rangle$

Los instantones, al dotar al vacío de campos no triviales, contribuyen a dar un valor no nulo a los condensados de QCD. Probablemente, el condensado

$$\langle G^2 \rangle = \int d^4x G_{\mu\nu}^a(x) G_a^{\mu\nu}(x) , \quad (6.54)$$

es el caso más conocido, al haber sido utilizado tradicionalmente para acotar la densidad instantónica. Un instantón aislado tiene una acción

$$S_I = 8\pi^2/g^2 , \quad (6.55)$$

lo que implica que, para un conjunto de instantones que no se vieran alterados por la presencia del resto, el condensado $\langle G^2 \rangle$ tendría un valor proporcional a la densidad de instantones:

$$\langle G^2 \rangle = 32\pi^2 n . \quad (6.56)$$

A partir de esta relación, basándose en estimaciones fenomenológicas del condensado (OPE, reglas de suma, etc.), Shuryak obtuvo una cota superior para la densidad de instantones de 1 fm^{-4} , aunque otros autores (ver tabla 7.2) han obtenido valores mayores de este condensado a partir, bien de reglas de suma, bien de simulaciones en retículo (estas últimas parecen señalar valores mucho mayores para el condensado).

Cuando la densidad de instantones es apreciable, la aproximación de considerarlos aislados deja de tener sentido, y una superposición de instantones BPST tendría, en realidad, una acción mucho mayor que $8\pi^2 n/g^2$. Esto conlleva la necesidad de construir soluciones aproximadas, como se ha visto en el apartado anterior. Para un perfil $\phi(x)$ genérico, a partir de la expresión (6.26) y de las propiedades del tensor $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$ (ver §A.2), la contribución al condensado $\langle G^2 \rangle$ vendría dada por:

$$\langle G^2 \rangle = \int d^4x \left[\frac{2}{3} \left(12x^2 \frac{d(\phi/x^2)}{d(x^2)} + 4\frac{\phi}{x^2} - 2\frac{\phi^2}{x^2} \right)^2 + \frac{34}{3} \left(\frac{\phi^2}{x^2} + 4\frac{\phi}{x^2} \right)^2 \right] . \quad (6.57)$$

El resultado de esta integral para el perfil (6.53) se muestra en la gráfica 6.2(a), en función del parámetro $\alpha_{\text{DP}}\rho$. Se ha normalizado a la unidad para el perfil BPST, que

corresponde a $\alpha_{\text{DP}} = 0$. Se hará uso de esta relación en el capítulo siguiente, para determinar el valor del condensado $\langle G^2 \rangle$ a partir de la densidad del líquido de instantones obtenida.

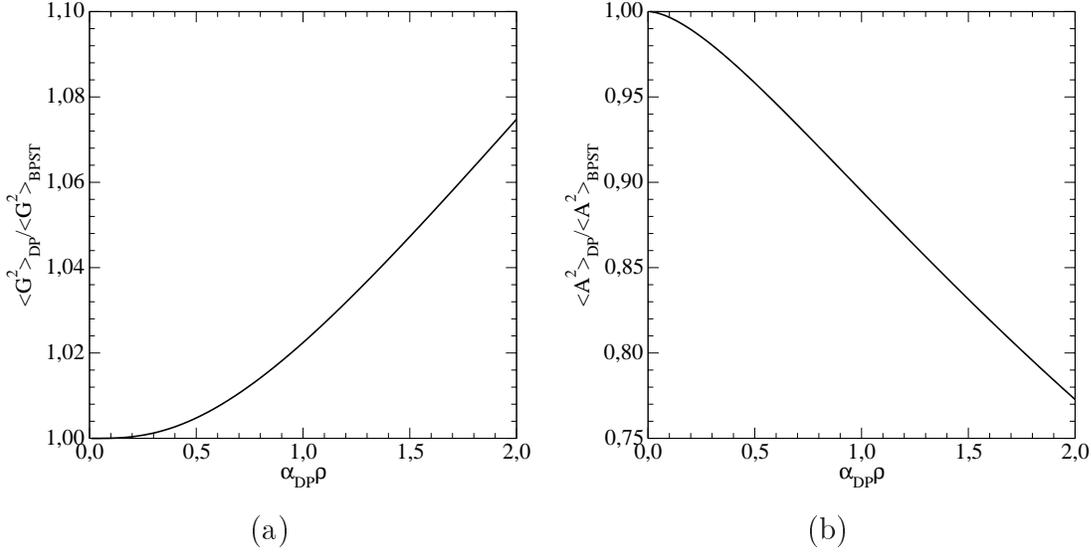


Figura 6.2: Dependencia de los condensados (a) $\langle G^2 \rangle$ y (b) $\langle A^2 \rangle$ con el parámetro $\alpha_{\text{DP}}\rho$. Ambas gráficas están normalizadas a 1 para el perfil BPST, correspondiente a $\alpha_{\text{DP}} = 0$.

6.6.2. El condensado $\langle A^2 \rangle$

En un vacío trivial, caracterizado por campos nulos en todas las posiciones del espacio-tiempo, el condensado

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{g^2} \langle B^2 \rangle = \frac{1}{Vg^2} \int d^4x B_\mu^a(x) B_a^\mu(x) \quad (6.58)$$

tendría un valor nulo. Por contra, en una configuración de campos clásicos como (6.47), tendría un valor en general no nulo, dado por:

$$\begin{aligned} \langle A^2 \rangle &= \frac{4}{g^2} \sum_i^{\forall I\bar{I}} \sum_j^{\forall I\bar{I}} R_i^{a\alpha} R_j^{a\beta} \bar{\eta}_{i\mu\nu}^\alpha \bar{\eta}_{j\mu\nu}^\beta \cdot \\ &\cdot \frac{1}{V} \int d^4x \frac{(x_\nu - z_\nu^i)}{(x - z^i)^2} \phi \left(\frac{|x - z^i|}{\rho_i} \right) \frac{(x_\nu - z_\nu^j)}{(x - z^j)^2} \phi \left(\frac{|x - z^j|}{\rho_j} \right). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Si se supone que las orientaciones de color en diferentes instantones no están, en promedio, correlacionadas, podemos considerar:

$$\left\langle \sum_a R_{(i)}^{a\alpha} R_{(j)}^{a\beta} e^{ip(z_i - z_j)} \right\rangle_{i \neq j} \simeq 0, \quad (6.60)$$

que es equivalente a decir que las contribuciones fundamentales (cuando se promedia sobre un número suficiente de configuraciones) son las que proceden de cada instantón separadamente. En esta aproximación, la expresión anterior se reduce a:

$$\langle A^2 \rangle = \frac{12}{Vg^2} \sum_i^{\forall I\bar{I}} \int d^4x \frac{\phi^2 \left(\frac{|x-z^i|}{\rho_i} \right)}{(x-z^i)^2} = 12\pi^2 n \rho^2 g^{-2} \int_0^\infty ds^2 \phi^2(s). \quad (6.61)$$

Así pues, salvando el efecto del valor de la integral (que dependerá de la función del perfil, ϕ), los instantones dan una contribución al condensado $\langle A^2 \rangle$ que depende de la densidad y el radio de éstos. Para instantones con perfil BPST (6.10) la última integral en (6.61) vale 1, mientras que para otros perfiles se aleja de este valor. En la figura 6.2(b) se muestra la dependencia de esta integral con $\alpha_{\text{DP}}\rho$ para la parametrización propuesta del perfil, (6.53).

Precisamente el hecho de que los instantones proporcionen un valor esperado no nulo a este condensado, unido a los resultados de la parte II, hace necesario determinar la densidad de instantones (y su radio), para poder evaluar la contribución de los instantones al condensado $\langle A^2 \rangle$, objetivo del próximo capítulo.

Capítulo 7

Instantones en retículo

Contenidos

7.1. Enfriamiento de la configuración	126
7.2. Método de localización por reconocimiento de forma . . .	130
7.3. Densidad y radio de los instantones	133
7.4. Evolución con el enfriamiento	134
7.5. Resumen de resultados y discusión	138
7.5.1. Método de localización	138
7.5.2. Extrapolación de la densidad	139
7.5.3. Contribución al condensado $\langle A^2 \rangle$	141

El propósito de este capítulo será analizar la presencia de instantones en las simulaciones en retículo a fin de determinar la densidad y el radio de los instantones para, a través de las expresiones de la sección 6.6, obtener su contribución al condensado $\langle A^2 \rangle$.

Como se verá en la sección siguiente, detectar la presencia de instantones en las simulaciones en retículo no es tan simple como comparar los campos obtenidos con los dados por el modelo del líquido de instantones. Los campos procedentes de la simulación (a los que nos referiremos como configuraciones de campos *termalizadas*, por analogía con un sistema termodinámico) están por lo general dominados por fluctuaciones a distancias muy cortas [Tep85], que nada tienen que ver con los instantones.

Resulta imprescindible, por tanto, encontrar alternativas para evaluar la presencia de instantones en los campos obtenidos.

Una opción (citada en §6.2.2) es realizar simulaciones con fermiones de buen comportamiento quiral, y extraer información acerca de la presencia de instantones estudiando el comportamiento del espectro del operador de Dirac [HDD02], cuyos autoestados de energía más pequeña están relacionados con los instantones.

En una teoría Yang-Mills pura existe asimismo un método mucho menos exigente en cuanto a potencia de cálculo que permite contabilizar los instantones presentes en una configuración de campos y que ha sido intensamente utilizado en los últimos años [Tep85, CGH94, Neg99]. Parte de la idea de reducir la acción de la configuración (siguiendo el análogo termodinámico, esto corresponde a *enfriar* la configuración, por lo que denominaremos *enfriamiento* a este proceso) lo que revela una estructura de campos dominada por instantones.

En este capítulo se hará uso de este tipo de métodos, presentados en la sección siguiente, para desarrollar un procedimiento que permita identificar los instantones presentes en las configuraciones frías.

7.1. Enfriamiento de la configuración

Las configuraciones procedentes de una simulación Montecarlo, es decir, las configuraciones termalizadas, están dominadas por fluctuaciones de muy corta distancia, típicamente del orden del tamaño de la malla, a . Con objeto de tener acceso a las propiedades de energías bajas, será necesario eliminar estas componentes más energéticas, sin alterar en lo posible el contenido semiclásico.

Un procedimiento de este tipo fue propuesto por Teper [Tep85], en el que se reduce la acción total de la red mediante un proceso en el que para cada punto se modifica el valor del campo *gauge* de forma que el nuevo valor reduzca la acción. Realizado iterativamente, el proceso anterior reduce las fluctuaciones de corta distancia, dando lugar a configuraciones dominadas por estructuras que pueden identificarse como instantones.

La forma ideal de enfriar la configuración sería realizar un proceso en el que cada eslabón, U , se cambie por uno elegido aleatoriamente, U' , sólo si éste reduce la acción,

$$U \rightarrow U' \Leftrightarrow S_U - S_{U'} \geq 0 . \quad (7.1)$$

Este proceso resulta, no obstante, excesivamente lento para eliminar las fluctuaciones UV. La alternativa propuesta por Teper es cambiar el valor antiguo de $U_\mu(x)$ por uno que minimice la contribución de ese eslabón a la acción.

La contribución de $U_\mu(x)$ a la acción viene dada por:

$$\delta S_{U_\mu(x)} = \beta \left\{ 1 - \frac{1}{6N} \text{Re} (\text{Tr} [U_\mu(x) \cdot \xi_\mu(x)]) \right\} , \quad (7.2)$$

donde $U_\mu(x)$ es una matriz $SU(N)$, y $\xi_\mu(x)$ es la suma de los productos de los eslabones que rodean a $U_\mu(x)$ en cada plano ¹:

$$\xi_\mu(x) = \sum_{\nu=\pm 1, \dots, \pm 4}^{\nu \neq \mu} U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x) , \quad (7.3)$$

con $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ los vectores unitarios en las direcciones μ y ν respectivamente, y $U_\nu^\dagger(x)$ la matriz compleja conjugada de $U_\nu(x)$. En la figura 7.1, se representan los eslabones orientados que contribuyen a $\xi_\mu(x)$ (los dos círculos negros representan a los puntos de la red x y $x + \hat{\mu}$, respectivamente) en un caso tridimensional. En la simulación tetradimensional hay dos contribuciones más procedentes del plano adicional.

Se trata, por tanto, de encontrar una matriz $SU(N)$, A , que minimice $\text{Re} (\text{Tr} [A \cdot B])$, con B una matriz $N \times N$ dada. El problema es trivial en $SU(2)$, donde basta elegir $A = (\det B)^{-1} B^\dagger$, puesto que cualquier matriz 2×2 puede escribirse como una matriz $SU(2)$ por una constante. Volviendo al proceso de enfriamiento, esto se traduce en cambiar:

$$U_\mu(x) \rightarrow U'_\mu(x) = \frac{\xi_\mu(x)^\dagger}{|\xi_\mu(x)|} , \quad (7.4)$$

con $|\xi|$ el determinante de ξ y ξ^\dagger la matriz compleja conjugada de ξ .

En $SU(3)$ (y para $SU(N)$ con $N > 2$ en general) el problema es mucho más complejo [Hoe86], de modo que es habitual sustituir $U_\mu(x)$ por una matriz U' que, a pesar de no conducir al mínimo local de la acción, permita reducirla [ST98, Tep85, Tep94, Tep97]. En este caso, por analogía con (7.4), realizaremos una ortonormalización de la matriz ξ por filas, que produce una matriz $SU(3)$ cuya conjugada tomaremos como nueva matriz $U_\mu(x)$.

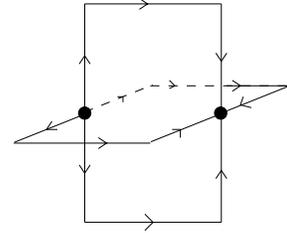


Figura 7.1: Representación tridimensional de $\xi_\mu(x)$.

¹Por tanto, $U_\mu(x)\xi_\mu(x)$ es la suma de todas las plaquetas (2.8) que contienen al eslabón $U_\mu(x)$.

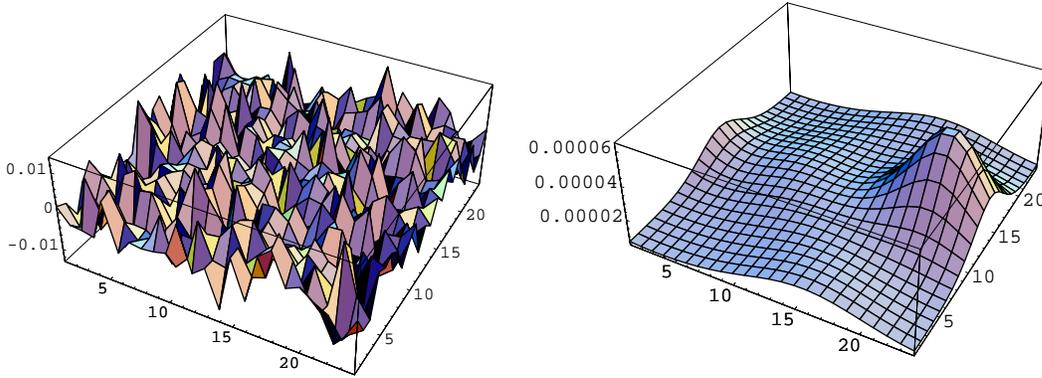


Figura 7.2: Representación de la densidad de carga topológica $Q(x)$ en un corte bidimensional de un retículo 24^4 (a) antes y (b) después de un proceso de enfriamiento.

Este proceso se aplicará a todos los eslabones del retículo ², de modo que denominaremos una iteración de enfriamiento a la actualización de todos los eslabones de la red.

Esta forma de reelegir las matrices $U_\mu(x)$ no conduce a cada una de ellas a un mínimo local de la acción, pero bajo un proceso iterativo reduce la acción hasta eliminar las fluctuaciones UV que dominan en las configuraciones termalizadas. En las configuraciones frías pueden identificarse entonces correlaciones a distancias mayores que la malla (ver figura 7.2). En las secciones siguientes se desarrollará un método para determinar cuales de ellas son instantones.

Deriva de la configuración

El proceso de enfriamiento, al eliminar las correlaciones a distancias muy cortas, permite apreciar la estructura semiclásica de una configuración de campos *gauge*. Una posibilidad para determinar las propiedades instantónicas bastante extendida en la literatura [Tep85, Tep94, MS95a, MS95b, ST98, BFL00], es realizar un cierto número de iteraciones de enfriamiento y medir en ese punto las propiedades del líquido de instantones. Sin embargo, el proceso iterativo supone una progresiva modificación de las propiedades instantónicas, por lo que estimar las propiedades instantónicas tras un cierto número de iteraciones de enfriamiento resulta ambiguo.

²Se realizará de forma ordenada, comenzando por un extremo y finalizando por el opuesto. A priori, esta forma de actualizar las matrices $U_\mu(x)$ podría introducir correlaciones que afecten a todo el retículo, pero existen estudios [Tep94] que aseguran la validez de este procedimiento.

En el proceso hay una pérdida progresiva de información en varias fases [PV88, MS95a]:

- Eliminación de fluctuaciones cuánticas revelando una estructura semiclásica.
- Eliminación de fluctuaciones residuales alrededor de los instantones.
- Aniquilación de pares $I - \bar{I}$.
- Situación clásica (sólo quedan I o \bar{I}).
- Desaparición de la carga topológica, quedando una configuración trivial.

Estos efectos se superponen, lo que impide determinar *cuánto* hay que enfriar la configuración para que se eliminen las fluctuaciones cuánticas de modo que el proceso afecte lo menos posible a las propiedades semiclásicas.

Además aparece un problema adicional, la calibración de la malla (ver §2.3.1) es válida en la configuración termalizada. Al enfriar la configuración nada asegura que siga siendo válido, ni siquiera que se pueda realizar una nueva calibración tras eliminar las fluctuaciones UV.

Para salvar las dificultades expuestas, en este trabajo se obtendrán las propiedades instantónicas en función del número de iteraciones de enfriamiento realizadas, y posteriormente se extrapolarán los resultados a la situación original (este tipo de procedimientos fueron propuestos en [Neg99]). Una alternativa a extrapolar los resultados a la situación de partida sería definir operadores y acciones en retículo mejoradas [FGS96, AK01], de forma que se minimicen los efectos del enfriamiento sobre las propiedades instantónicas. En cualquier caso, persiste la ambigüedad acerca del valor de la malla tras el enfriamiento.

Los procedimientos que utilizan el enfriamiento de la configuración han sido criticados [HDD02, HDD03] ante la sospecha de que el resultado (una configuración de campos *gauge* de variaciones suaves) era consecuencia más del procedimiento utilizado que del contenido original de la configuración. Al realizar este trabajo se ha comprobado que al enfriar configuraciones con campos elegidos aleatoriamente, al cabo de muy pocas iteraciones (~ 10) el enfriamiento conduce la configuración a un estado trivial, caracterizado por $\int d^4x G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_a^{\mu\nu} = 0$. Para las configuraciones termalizadas, por el contrario, se necesitan más de 10000 iteraciones para llegar a la misma situación.

Esto muestra inequívocamente que el resultado depende realmente de la dinámica de los campos, aunque pueda existir alguna influencia del proceso, como indica el hecho de que las propiedades de los instantones se modifiquen con el enfriamiento.

7.2. Método de localización por reconocimiento de forma

A continuación se presenta el método desarrollado para localizar los instantones en las configuraciones de campos *gauges* obtenidas a través de las simulaciones en retículo. Dicho método se basa en un análisis de la forma que tienen los máximos de la densidad de acción, comparándolos con las predicciones del perfil instantónico [BSD02]. Se ha denominado a este método ISR, del inglés *Instanton Shape Recognition*.

Con objeto de poder extrapolar los resultados a la situación termalizada, será necesario realizar la identificación con el mínimo número posible de iteraciones, por lo que la tarea se complica debido a la presencia de fluctuaciones UV que aún no han sido eliminadas.

El método desarrollado presenta la originalidad, frente a métodos similares para medir el contenido instantónico de una simulación de QCD en retículo, de que permite identificar si una estructura es o no un instantón independientemente de su tamaño, es decir, sin que ρ sea un parámetro que aparezca en la identificación. La medida de ρ servirá, por tanto, para contrastar los resultados.

El punto de partida es la evaluación en retículo de la densidad de carga topológica (6.18),

$$Q(x) = \frac{1}{2^9 \pi^2} \sum_{\mu, \nu, \rho, \sigma}^{\pm 1, \dots, \pm 4} (-1)^{\mu + \nu + \rho + \sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}[\Pi_{\mu\nu}(x)\Pi_{\rho\sigma}(x)] , \quad (7.5)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor completamente antisimétrico y

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) . \quad (7.6)$$

En la figura 7.2 se muestra un corte bidimensional de $Q(x)$ en una simulación en retículo donde se pueden apreciar los efectos del proceso de enfriamiento.

El primer paso del método propuesto para localizar los instantones (anti-instantones) es determinar las posiciones de los máximos (mínimos) de $Q(x)$, entendidos como los

puntos de la red en los que la densidad de carga topológica es mayor (menor) que en los $3^4 - 1$ primeros vecinos. A continuación se integra la densidad de carga topológica en torno a cada máximo local para los puntos que tengan más de una determinada fracción α de la densidad de carga topológica en el máximo, $Q(x) \geq \alpha Q(0)$, para diferentes valores del parámetro α , $\sum_{x/Q(x) \geq \alpha} Q_{Ret.}(x)$. El valor teórico a partir de (6.18) y el perfil BPST (6.10), sería ³:

$$\int_{\tilde{x}/Q(\tilde{x}) \geq \alpha Q(0)} d^4x Q(x) = 1 - 3\alpha^{1/2} + 2\alpha^{3/4} . \quad (7.7)$$

A fin de distinguir los máximos que corresponden a verdaderos instantones de máximos espurios, debidos a fluctuaciones UV, analizaremos el comportamiento del cociente de la integral de la densidad de carga topológica calculada en retículo y su contrapartida teórica (7.7) como función de la fracción del máximo hasta la que extendemos la integral (α):

$$\epsilon_Q(\alpha) = \frac{\sum_{x/Q(x) \geq \alpha} Q_{Ret.}(x)}{1 - 3\alpha^{1/2} + 2\alpha^{3/4}} . \quad (7.8)$$

En principio, este cociente debería valer ⁴ 1 para cualquier valor de α . Numéricamente, aceptaremos un extremo local como instantón si $\epsilon_Q(\alpha)$ tiene una dispersión menor que un cierto límite, σ_ϵ , respecto a un valor central (entre ϵ_{min} y ϵ_{max}), para una fracción f de los valores de α considerados en un intervalo de valores de α , $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$. Los valores adoptados para estos parámetros (ver tabla 7.1) se fijan de modo que el resultado es estable frente a pequeños cambios de éstos.

A fin de evitar realizar integraciones con un número excesivamente pequeño de puntos, donde los errores de discretización sean críticos, se descartan aquellos candidatos en los que la integración no se haya llevado a cabo para al menos N_{min} puntos. Por último, para conseguir un método más restrictivo, se exigen las mismas condiciones para la densidad de acción que para la carga topológica (debido a la autodualidad (ver §6.2), en un instantón deben ser iguales).

³La utilización del perfil BPST parece natural puesto que la localización se basa en la forma del instantón cerca de su centro, donde los efectos colectivos tienen poca o nula influencia. En cualquier caso, el método no es capaz de separar dos instantones muy próximos, por lo que en caso de que las perturbaciones fueran muy importantes, poco importa qué perfil se considere, el método descartaría el máximo.

⁴Evidentemente, todo es idéntico para un mínimo de la densidad de carga topológica, correspondiente a un anti-instantón, sólo que este cociente sería -1.

α_{min}	α_{max}	f	ϵ_{min}	ϵ_{max}	σ_ϵ	N_{min}
0.2	0.8	1/6	0.5	1.5	0.2	2^4

Tabla 7.1: *Parámetros utilizados en el método de reconocimiento de instantones.*

Con estas condiciones, este método permite identificar instantones tras muy pocas iteraciones de enfriamiento ($\approx 5-10$). El límite de validez del método viene dado por el valor de la malla, dado que cuando se acerca al valor del radio del instantón las fluctuaciones de corta distancia resultan prácticamente indistinguibles de los instantones.

Una de las características que hacen más atractivo este método es que la localización es puramente geométrica, independiente del radio del instantón o de la zona de integración. La medida del radio resulta entonces independiente de la localización y puede ser realizada de dos formas:

- A partir del valor de la densidad de carga topológica en el centro del instantón, lo que según (6.14) conduce a:

$$\rho/a = \sqrt[4]{\frac{6}{\pi^2 Q_{Ret.}(0)}} \quad (7.9)$$

- Mediante las expresiones (6.14) y (7.7) se puede obtener el radio como función del volumen de integración:

$$\rho/a = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{-1/4} - 1}} \sqrt[4]{\frac{2V_{Ret}}{\pi^2}}; \quad V_{Ret} = \int_{\tilde{x}/Q(\tilde{x}) \geq \alpha Q(0)} d^4x. \quad (7.10)$$

En teoría, ambas medidas del radio deberían conducir a resultados idénticos. En la práctica, se encuentra entre ellos una diferencia de alrededor del 5%. En este trabajo se hará uso de la segunda opción que, al basarse en una integral sobre un cierto número de puntos, debería tener menos errores de discretización, que podrían distorsionar el valor del radio calculado a partir de la carga topológica en el máximo.

En la literatura se pueden encontrar métodos similares al propuesto [ST98], pero en ellos se integra para los puntos situados a distancias del centro menores que un cierto valor, R , con lo que es necesario utilizar el radio instantónico en el método de localización. El método propuesto en este trabajo no integra en distancias al máximo, sino en las regiones definidas por la condición $Q(x) \geq \alpha Q(0)$, lo que requiere determinar los puntos conectados entre sí que satisfacen esta condición. Evidentemente el método

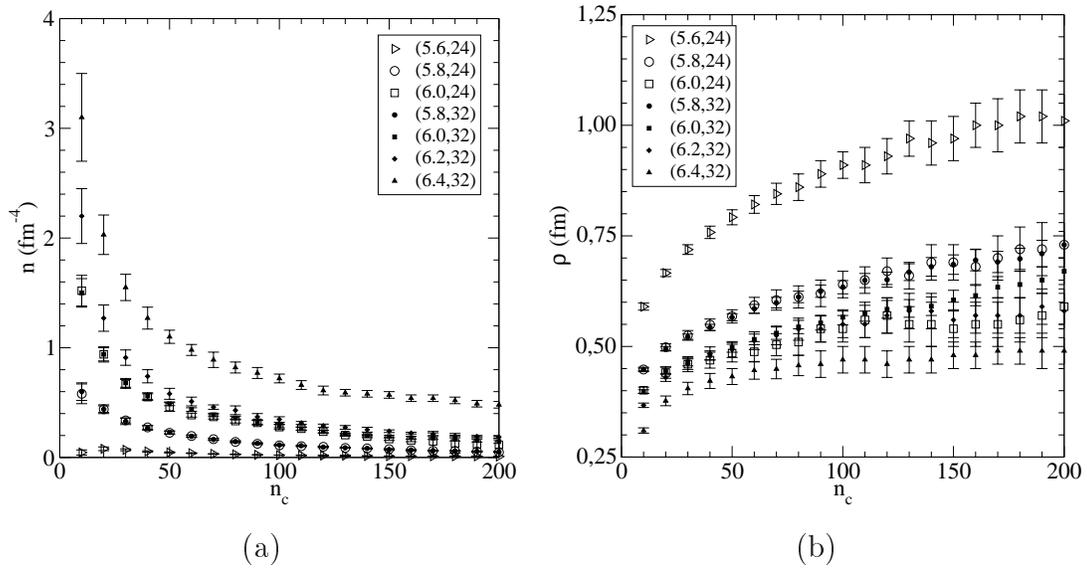


Figura 7.3: Evolución de (a) la densidad y (b) el radio promedio de los instantones con el enfriamiento para diferentes configuraciones (β, L) . Puede apreciarse cómo las curvas aparecen separadas por el valor de β , pero no por el tamaño del retículo, L .

falla cuando fijamos un valor de α pequeño, puesto que las región en torno a cada máximo percolaría con las de los instantones próximos, y se integraría sobre regiones que corresponderían a más de un instantón ⁵.

7.3. Densidad y radio de los instantones

Con el método anterior se identifican los instantones presentes en las configuraciones producidas, determinando su tamaño ⁶, la densidad de instantones y las distancias entre vecinos de igual $(I - I$ o $\bar{I} - \bar{I})$ y diferente carga $(I - \bar{I})$, listados en el apéndice B.

Se ha realizado un número de iteraciones del proceso de enfriamiento desde 0 (donde el método geométrico no funciona) hasta 200 (donde prácticamente todos los pares $I - \bar{I}$ se han aniquilado). Si se continúa el proceso hasta un número de iteraciones mucho mayor, ~ 10000 , todos los instantones desaparecen, dando lugar a una configuración

⁵Para los parámetros utilizados se ha verificado que la forma de las regiones de integración es aproximadamente esférica, lo que descarta que se esté realizando la integral sobre varios instantones.

⁶Se desconoce el valor de la malla en las configuraciones frías, por lo que se utilizará el valor de la malla en la configuración original para expresar los resultados con dimensiones. Al extrapolar a $n_c \rightarrow 0$, en cualquier caso, se recupera este valor de la malla.

de campos trivial. Sin embargo, dado que el interés de este trabajo es determinar la densidad de instantones (y su radio, etc.) en la configuración original, carecen de interés situaciones tan modificadas por el enfriamiento.

Entre los efectos que se observan en el proceso, cabe destacar los siguientes:

- El número total de instantones, N , se reduce (ver gráfica 7.3a).
- El radio promedio de éstos, ρ/a , aumenta (ver gráfica 7.3b).

Además, en las figuras 7.3, se puede apreciar cómo los resultados no dependen del tamaño del retículo, L , mientras que hay una fuerte dependencia con β (es decir, con el valor de la malla, a).

Respecto a la dependencia con el tamaño del retículo, para todos los retículos utilizados se cumple que $\rho \ll La$, por lo resulta comprensible que los efectos de volumen finito no sean importantes. En cuanto a la dependencia con la malla, podría pensarse que se debe a errores de discretización, puesto que trabajamos con mallas finitas. De hecho, esta parece la causa de que los resultados para $\beta = 5.6$ se alejen del resto, dado que la malla, $a = 0.234$ fm, está próxima al radio promedio de los instantones. Para los resultados a valores mayores de β , por el contrario, no cabe esperar que los errores de discretización provoquen diferencias importantes en los resultados. Como se verá en el apartado siguiente, lo que separa las curvas en esos casos es que una iteración de enfriamiento modifica más o menos la configuración según el mallado de ésta.

7.4. Evolución con el enfriamiento

En las gráficas de la figura 7.3 se puede apreciar cómo dado un cierto número de iteraciones, n_c , las propiedades instantónicas no son directamente comparables para diferentes valores de β . Esto se debe a que el enfriamiento produce un efecto más pronunciado para mallados grandes. Este fenómeno, según Ringwald y Schrempp [RS99], se debe a que el enfriamiento es diferente según el valor de la malla. De este modo proponen que el enfriamiento de una configuración puede medirse por el tamaño que alcanzan las correlaciones introducidas en el proceso que, en un modelo simple de camino aleatorio, vienen dadas por la magnitud:

$$r_c \propto a\sqrt{n_c}^{1+\delta}, \quad \delta \text{ pequeño}, \quad (7.11)$$

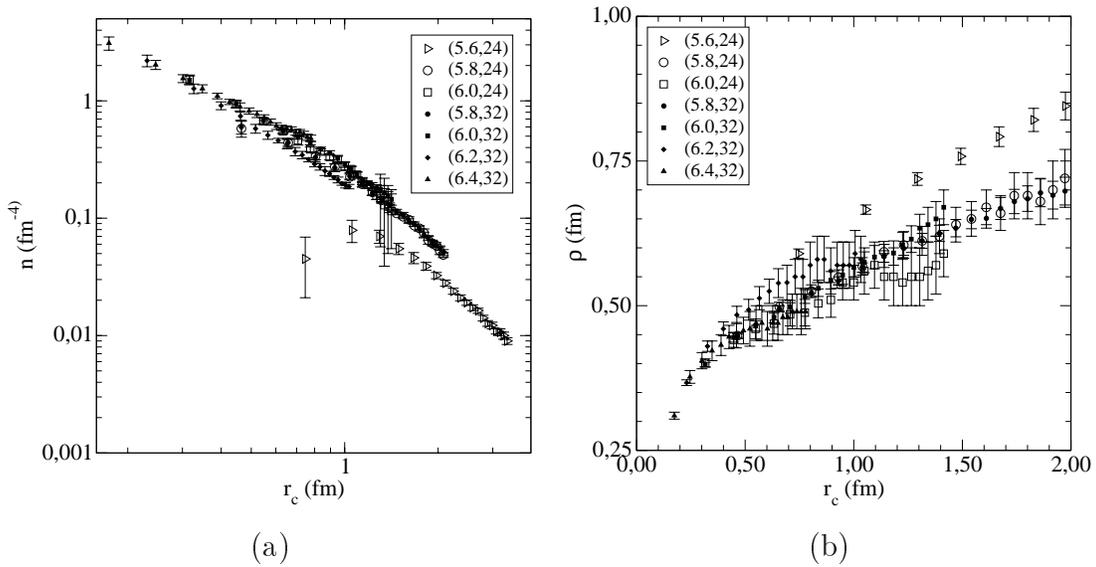


Figura 7.4: Evolución de (a) la densidad y (b) el radio instantónico frente a r_c para diferentes configuraciones (β, L) . Se puede apreciar cómo sólo $\beta = 5.6$ se separa del comportamiento general.

de forma que n_c iteraciones para un mallado a_1 modifica la configuración tanto como $4n_c$ para $a_1/2$.

Si representamos la evolución de la densidad y el radio instantónico en función ⁷ de $r_c = a\sqrt{n_c}$, desaparece la mayor parte de la dependencia con el tamaño de la malla (ver gráficas 7.4). Las diferencias más apreciables que restan son para el retículo con $\beta = 5.6$, cuyo mallado, $a = 0.236$, está próximo al radio promedio de los instantones, lo que muestra el límite del método de localización.

En la figura 7.4 se observa, en cualquier caso, una fuerte evolución de la densidad y el radio con r_c . Para poder obtener una estimación de los parámetros instantónicos será necesario, por tanto, comprender la evolución de la configuración con el enfriamiento y extrapolar los resultados a $r_c = 0$.

Modelo de aniquilación de pares.

Puede concebirse un modelo simple [BSD03a] para dicha evolución partiendo del hecho de que un par $I - \bar{I}$ no es estable en retículo [MS95a] cuando la distancia del centro del instantón al centro del anti-instantón es menor que $\sqrt{\rho_I \rho_{\bar{I}}}$, (6.37). De este

⁷Supondremos $\delta \approx 0$ funciona adecuadamente como una primera aproximación [RS99] y un factor de proporcionalidad unidad.

modo, si suponemos que los instantones se mueven durante el proceso de enfriamiento (donde el número de iteraciones, n_c , juega el papel del tiempo), los pares $I - \bar{I}$ se aniquilarán cuando se cumpla la condición anterior. Si la caída de la densidad se debe exclusivamente a las aniquilaciones de pares $I - \bar{I}$, se tiene que satisfacer que:

$$\frac{dN_I}{dn_c} = \frac{dN_{\bar{I}}}{dn_c}, \quad (7.12)$$

con lo que la carga topológica, $Q = N_I - N_{\bar{I}}$, permanece constante.

En el modelo más simple, suponiendo que los instantones se mueven aleatoriamente durante en proceso de enfriamiento, el ritmo de aniquilación será proporcional a la probabilidad de que un instantón se encuentre a una distancia menor que su radio de un anti-instantón. Despreciando las correlaciones entre las posiciones de instantones y anti-instantones que se derivan de la interacción diferenciada de pares $I - I$ e $I - \bar{I}$ (ver §6.4), se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\bar{I}}}{dn_c} &\propto \frac{\frac{\pi^2}{2} N_I \rho_I^4}{V} N_{\bar{I}} \\ \frac{dN_I}{dn_c} &\propto \frac{\frac{\pi^2}{2} N_{\bar{I}} \rho_{\bar{I}}^4}{V} N_I, \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde $\frac{\pi^2}{2} N_I \rho_I^4$ ($\frac{\pi^2}{2} N_{\bar{I}} \rho_{\bar{I}}^4$) es el volumen total ocupado por instantones (anti-instantones)⁸.

Si se supone que todos los instantones y anti-instantones tienen el mismo radio, la evolución de la densidad, $n = (N_I + N_{\bar{I}})/V$, vendría dada por:

$$\frac{dn}{dn_c} \propto \frac{\pi^2 \rho^4}{4} \left(n^2 - \frac{Q^2}{V^2} \right). \quad (7.14)$$

En principio, la constante de proporcionalidad que falta en (7.14) depende de la malla. Es posible escribir una ecuación general (independiente de la malla) si expresamos la dependencia con n_c a través del parámetro r_c del modo siguiente:

$$\frac{dn}{dr_c^2} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{\pi^2 \rho^4}{4} \left(n^2 - \frac{Q^2}{V^2} \right), \quad (7.15)$$

con ξ un parámetro dimensional que gobierna la evolución de la configuración.

Salvo en configuraciones sometidas a un gran número de iteraciones de enfriamiento, la carga topológica, $Q = N_I - N_{\bar{I}}$, es despreciable frente al número total de instantones

⁸Recuérdese que $\frac{\pi^2}{2} R^4$ es el volumen de una hipersfera de radio R en 4 dimensiones.

y anti-instantones (en particular cuando estamos interesados en la extrapolación a $n_c \rightarrow 0$). En este caso, la ecuación (7.15) se reduce a:

$$\frac{dn}{dr_c^2} = -\frac{1}{\xi^2} \frac{\pi^2 \rho^4}{4} n^2, \quad (7.16)$$

e integrando resulta:

$$n(r_c) = \frac{n(0)}{1 + \frac{\pi^2}{4\xi^2} n(0) \int_0^{r_c} \rho(r_c)^4 dr_c^2}, \quad (7.17)$$

que proporciona información acerca de la evolución de la densidad de instantones con r_c .

A partir de la expresión anterior, se ha estudiado la extrapolación a la situación termalizada para diferentes parametrizaciones posibles de la dependencia del radio con r_c . La opción más simple sería considerar $\rho(r_c) \simeq \rho_0 = cte$, que conduce a una expresión para la densidad

$$n(r_c) = \frac{n_0}{1 + \frac{\pi^2}{4} n_0 \rho_0^4 \frac{r_c^2}{\xi^2}}. \quad (7.18)$$

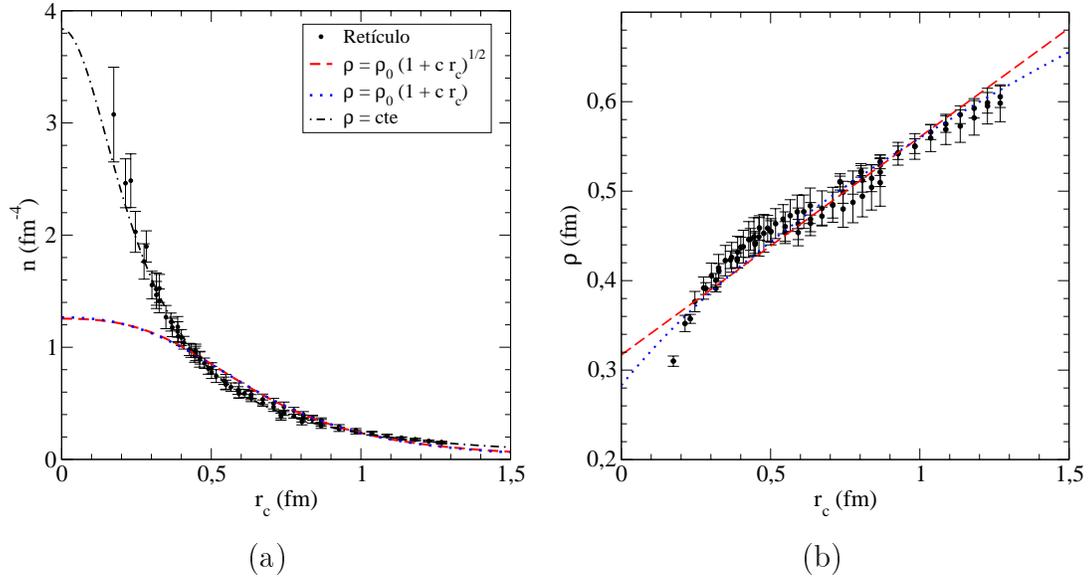


Figura 7.5: (a) Ajuste de la evolución de la densidad (en fm^{-4}) suponiendo diferentes parametrizaciones del radio. (b) Diferentes parametrizaciones de la evolución del radio (en fm).

Aunque esta expresión permite describir de un modo satisfactorio la evolución de la densidad (ver gráfica 7.5a), la hipótesis de radios constantes no es realista, dado que

la evolución de ρ con el enfriamiento no es despreciable (ver gráfica 7.5b). De hecho, cualquier intento de parametrizar la evolución del radio a partir de los datos numéricos de este estudio se muestra incapaz de describir simultáneamente la evolución de éste y de la densidad por medio de la expresión (7.17). En la figura 7.5 se muestran diferentes parametrizaciones de la evolución del radio y los resultados de los ajustes de la densidad respectivos.

Este modelo permite comprender de un modo cualitativo el proceso que hace disminuir la densidad del líquido de instantones con el enfriamiento. La dificultad para realizar la extrapolación a la situación original con cualquier parametrización de la evolución del radio puede explicarse en términos de las correlaciones entre las posiciones de instantones y anti-instantones. En efecto, debido a la interacción entre los instantones, éstos tienden a situarse en configuraciones en las que cada I tiene por primeros vecinos preferentemente ⁹ a \bar{I} , de modo que, cuando el líquido de instantones es muy compacto, la aniquilación es más rápida que si los instantones estuviesen en posiciones no correlacionadas (la probabilidad de que un instantón y un anti-instantón se encuentren es mayor que la de que se encuentren dos instantones). Esta es la situación cuando nos aproximamos a la situación termalizada, donde la fracción de ocupación (fracción del volumen total ocupado por instantones y anti-instantones) se acerca a 0.3, el de un agregado compacto de esferas.

Cuando no se tiene en cuenta la dependencia de ρ con r_c hay una compensación entre el efecto de la función $\rho(r_c)$ (que hace que disminuya el ritmo de aniquilación para r_c pequeño) y el de considerar las correlaciones entre los instantones (que hace que aumente), lo que explica la paradoja de obtener mejores resultados en la región de r_c pequeño considerando radios constantes que considerando cualquier parametrización empírica de la evolución del radio.

7.5. Resumen de resultados y discusión

7.5.1. Método de localización

En este capítulo se ha hecho uso de un método de enfriamiento para determinar el contenido semiclásico de una configuración de campos procedente del algoritmo de

⁹Aunque en los resultados presentados en el apéndice B no se aprecie con claridad esta situación, otras medidas en retículo -figura 14 en [ST98]- ponen de manifiesto esta ordenación.

Metropolis. Se ha verificado que el enfriamiento elimina las correlaciones de menor alcance, dejando como resultado una configuración de campos de variaciones suaves (ver figura 7.2), en la que se distinguen estructuras cuya distribución de carga topológica es semejante a la de los instantones.

Se ha desarrollado un método que permite identificar los instantones entre todos los picos que aparecen en la configuración de campos. Este método presenta la originalidad, frente a métodos más o menos similares encontrados en la literatura, de no utilizar el radio en el proceso de identificación, con lo que el hecho de obtener radios en torno al fenomenológico constituye un medio para contrastar la validez del método. Asimismo, permite identificar el contenido semiclásico de la configuración de campos con un enfriamiento moderado.

7.5.2. Extrapolación de la densidad

La dificultad de este tipo de medidas es que las propiedades del líquido de instantones se modifican con el proceso de enfriamiento; los pares $I-\bar{I}$ se aniquilan en el proceso, con lo que la densidad disminuye. Se ha corroborado el resultado de Ringwald *y col.* [RS99] de que el parámetro que mide el enfriamiento de la configuración es

$$r_c = a\sqrt{n_c}, \quad (7.19)$$

en función del cual se superponen las curvas de radio y densidad para todos los retículos utilizados. Cabe señalar el caso excepcional correspondiente a $\beta = 5.6$, cuyo comportamiento es diferente del resto debido, probablemente, a que la malla $a = 0.236$ fm es muy similar al radio de los instantones, lo que puede suponer un corte importante en la distribución de radios.

En este trabajo se propone un modelo simple para explicar la evolución de la densidad, suponiendo que los pares se aniquilan cuando están a una distancia menor que sus radios. Este modelo permite describir cualitativamente la disminución de la densidad con el enfriamiento. No obstante, la excesiva simplicidad del modelo, unida a la dependencia del resultado con la parametrización de la evolución del radio promedio, dificulta la realización de una extrapolación de los resultados a la configuración termalizada.

Los resultados sugieren, en cualquier caso, una densidad de instantones en la configuración original no inferior a $3 - 5 \text{ fm}^{-4}$, por encima del valor basado en estimaciones fenomenológicas [SS98], $\approx 1 \text{ fm}^{-4}$.

El condensado $\langle G^2 \rangle$, del que hay gran número de estimaciones basadas en las reglas de suma, está relacionado con la densidad instantónica, como se presentó en la sección 6.6. En la tabla 7.2 se muestran los valores del condensado obtenidos por diferentes grupos, así como la estimación del valor de la densidad instantónica que implican, suponiendo que se deben por completo a la contribución instantónica y que se trata de instantones BPST (esto en realidad supone una corrección mínima, según los resultados de la figura 6.2). En general, las estimaciones de la densidad de instantones a partir del condensado $\langle G^2 \rangle$ obtenido por medio de las reglas de suma están en torno a 1 fm^{-4} .

Referencia	$\langle G^2 \rangle$ (GeV^4)	n (fm^{-4})
SVZ [SVZ79]	0.47	1.0
Narison [BNP92]	0.79	1.7
Yndurain [Ynd99a]	0.60	1.26
Kiselev [Kis99]	0.74	1.55
Eidemuller [EJ01]	0.95	1.99
Ioffe [IZ03]	0.36	0.75

Tabla 7.2: Valores del condensado $\langle G^2 \rangle$ obtenidos a partir de reglas de suma encontrados en la literatura junto al valor de la densidad que darían si fuese debido exclusivamente a la contribución instantónica (6.56).

La determinación de la densidad de instantones en las simulaciones en retículo resulta especialmente tediosa. En general, los valores de referencia están entre 0.5 y $\sim 7 \text{ fm}^{-4}$ [Neg99], aunque algunos autores determinan densidades más altas (García Pérez *y col* [GPS99], Xiang-Dong Ji [Ji95] y Langfeld [Lan00] obtienen por medio de diversos métodos, densidades en torno a 15 fm^{-4}). Otros autores [ST98,RS99] justifican mediante argumentos fenomenológicos trabajar a un cierto número de iteraciones de enfriamiento fijo, obteniendo densidades menores ($0.3 - 1 \text{ fm}^{-4}$).

El valor del condensado gluónico, así como de la densidad instantónica parecen estar sometidos a una gran incertidumbre, asociada a la dificultad de obtener resultados independientes del método de reconocimiento de instantones tras el enfriamiento. Los resultados procedentes de las reglas de suma, parecen, en general, señalar valores más bajos del condensado, si bien éstos tampoco están libres de ambigüedad.

La dificultad para extrapolar los resultados obtenidos tras el enfriamiento a la situa-

ción termalizada implica la necesidad de buscar caminos alternativos. Una posibilidad sería definir operadores que minimicen la dependencia de los resultados con el enfriamiento [FGS96], o estudiar la topología directamente a través de simulaciones con quarks, por medio del análisis del espectro del operador de Dirac [HDD02]. Ambos métodos están en desarrollo en la actualidad, si bien requieren de un mayor esfuerzo computacional. En el capítulo siguiente se presentará otra alternativa que permite obtener la densidad de instantones en la configuración original utilizando para ello la influencia de los instantones en las funciones de Green gluónicas.

7.5.3. Contribución al condensado $\langle A^2 \rangle$

El radio promedio de los instantones en la situación original que se extrae de la extrapolación es compatible con el valor fenomenológico $\rho \sim 1/3$ fm, aunque resulta igualmente difícil obtener un valor cuantitativo a partir de los ajustes, puesto que depende fuertemente de la fórmula utilizada para extrapolar. La determinación del radio no presenta en la literatura una incertidumbre tan amplia como en el caso de la densidad; es generalmente aceptado [Neg99] un radio promedio (en la aproximación *quenched*) entre 0.3 y 0.5 fm.

Si suponemos que el valor del condensado $\langle A^2 \rangle$ se debe sólo a la contribución de los instantones y despreciamos el efecto de la modificación del perfil (efecto que resulta ser subdominante, ver figura 6.2), el condensado $\langle A^2 \rangle$ resulta :

$$\langle A^2 \rangle = 12\pi^2 \rho^2 n , \quad (7.20)$$

como se obtuvo en la sección 6.6 (ecuación (6.61)).

A continuación nos proponemos evaluar si el valor del condensado obtenido en la parte OPE puede deberse a la contribución instantónica. Narison *y col.* [NSV85] muestran para una teoría escalar ϕ^4 que el valor clásico del condensado $\langle \phi^2 \rangle$ se corresponde con el valor del condensado cuántico evaluado a la única escala que existe clásicamente, en su caso, la de una masa generada dinámicamente. Para la situación que nos concierne, el condensado que hemos obtenido a la escala $\mu = 10$ GeV habría que evaluarlo a la escala instantónica $\mu \approx 1/\rho \approx 0.7$ GeV.

Recordando los resultados de la parte anterior, la evolución de $\langle A^2 \rangle_{R,\mu}$ con el mo-

mento de renormalización viene dada por (5.15), que permite llegar a la expresión:

$$\langle A^2 \rangle_{R,\mu} = \langle A^2 \rangle_{R,\mu_0} \frac{Z_{A^2}^{-1}(\mu)}{Z_{A^2}^{-1}(\mu_0)} \approx \langle A^2 \rangle_{R,\mu_0} \left(1 + \frac{\gamma_0^{A^2}}{\beta_0} \frac{\ln \frac{\mu}{\mu_0}}{\ln \frac{\mu_0}{\Lambda_{\text{QCD}}}} \right), \quad (7.21)$$

con $\gamma_0^{A^2} = \gamma_0 + \widehat{\gamma}_0 = 35/4$. El análisis OPE, no obstante, no es válido a una energía tan baja como 0.7 GeV, dado que no es adecuado por debajo de $\mu \sim 2.5$ GeV. A esta escala, el valor del condensado sería:

$$\langle A^2 \rangle_{R,\mu \sim 2.5 \text{ GeV}} \approx 1.4(3)(3) \text{ GeV}^2, \quad (7.22)$$

donde el primer error es estadístico (procedente de nuestros ajustes) y el segundo es una estimación de la incertidumbre que puede añadir tener en cuenta órdenes superiores en α_s .

Si suponemos que este valor se debe sólo a la contribución instantónica, para $\rho = 1/3$ fm debería haber una densidad de instantones en torno a $2 - 4 \text{ fm}^{-4}$, con lo que todas las medidas a nuestro alcance sugieren una densidad mayor que la fenomenológica de 1 fm, aunque también parece evidente que es necesario un método alternativo para poder obtener un resultado cuantitativo.

Capítulo 8

Análisis de las funciones de Green gluónicas a energías bajas

Contenidos

8.1. Funciones de Green gluónicas en una configuración de campos instantónicos	144
8.1.1. Propagador gluónico	144
8.1.2. Vértice simétrico	146
8.1.3. Constante de acoplamiento	147
8.2. Análisis de la constante de acoplamiento a energías bajas	148
8.2.1. Resultados numéricos	148
8.2.2. Resultados para configuraciones enfriadas	152
8.3. Análisis de las funciones de Green	155
8.3.1. Aproximación semiclásica	155
8.3.2. Resultados numéricos	157
8.3.3. Efectos de la distribución de radios sobre α_s	159
8.3.4. Exponentes críticos	164
8.4. Resumen de resultados y discusión	166

En este capítulo se estudiará el comportamiento de las funciones de Green obtenidas por medio de las simulaciones en retículo en el régimen profundamente no perturbativo.

Para ello se analizarán las predicciones de un líquido de instantones para las funciones de Green gluónicas en una configuración de campos dominada a energías bajas por dichas estructuras, evaluando su capacidad para describir los datos numéricos. Los resultados del capítulo anterior, en efecto, apoyan la idea de que las configuraciones de campos *gauge*, a distancias grandes, están dominadas por instantones, por lo que éstos deben estar relacionados con el comportamiento de las funciones de correlación a energías bajas.

8.1. Funciones de Green gluónicas en una configuración de campos instantónicos

Trabajaremos bajo la suposición de que a energías bajas las configuraciones de campos están dominadas por las soluciones clásicas, en el sentido de que la integral de camino puede limitarse a una suma sobre las configuraciones clásicas:

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle = \frac{1}{Z} \int \left[\prod_{a,\mu,x} dA_\mu^a(x) \right] e^{-S} \mathcal{O}(x) \simeq \frac{\sum e^{-S_{cl.}} \mathcal{O}(x)}{\sum e^{-S_{cl.}}} . \quad (8.1)$$

Para el caso concreto de las funciones de Green gluónicas, esto implica que basta con calcular las funciones de correlación gluónicas en una configuración de campos instantónicos para obtener el comportamiento a energías bajas de las funciones de Green de la teoría.

Por tanto, a continuación se evaluarán el propagador gluónico y el vértice simétrico a tres gluones en un líquido de instantones. Esto posibilitará describir el comportamiento de la constante de acoplamiento, definida a partir de estas dos funciones de Green en el esquema MOM simétrico.

8.1.1. Propagador gluónico

En la configuración de campos dada por (6.47), el propagador gluónico puede escribirse como

$$G_{\mu\nu}^{(2)ab}(p) = \frac{1}{g^2} \langle \widetilde{B}_\mu^a(p) \widetilde{B}_\nu^b(-p) \rangle , \quad (8.2)$$

donde se ha supuesto que la invariancia por traslación se ha restaurado, por ejemplo, al realizar un promedio sobre las variables instantónicas (en concreto, sobre las posiciones del centro de los instantones).

La transformada de Fourier del campo instantónico, (6.47),

$$B_\mu^a(x) = \sum_i^{\forall I\bar{I}} \frac{2R_i^{a\alpha}(\bar{\eta}_i)_{\mu\nu}^\alpha(x_\nu - z_\nu^i)}{(x - z^i)^2} \phi\left(\frac{|x - z^i|}{\rho_i}\right), \quad (8.3)$$

para un perfil ϕ cualquiera, puede escribirse como:

$$\widetilde{B}_\mu^a(p) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^4x e^{ip_\sigma x_\sigma} B_\mu^a(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_i^{\forall I\bar{I}} R_i^{a\alpha} \bar{\eta}_{\mu\nu}^\alpha e^{ip_\sigma z_\sigma^i} \rho_i^3 \frac{p_\nu}{|p|} I(p\rho_i) \quad (8.4)$$

con

$$I(s) = -\frac{d}{d|s|} \int d^4z e^{is_\sigma z_\sigma} \frac{2}{z^2} \phi(|z|) = -\frac{d}{d|s|} \int 2|z|d|z|d\Omega e^{is_\sigma z_\sigma} \phi(z). \quad (8.5)$$

En un espacio tetradimensional, el elemento de ángulo sólido vendrá dado por

$$d\Omega = \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \sin \theta_2 d\theta_2 d\theta_1. \quad (8.6)$$

Si elegimos s en la dirección que define al ángulo θ_3 , $s_\sigma z_\sigma = |s||z| \cos \theta_3$, la integral angular resulta:

$$\begin{aligned} \int d\Omega e^{is_\sigma z_\sigma} &= \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1 e^{i|s||z| \cos \theta_3} = \\ &= 4\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta_3) e^{is_\sigma z_\sigma} \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} = \frac{4\pi^2}{|s||z|} J_1(|s||z|), \end{aligned} \quad (8.7)$$

con $J_1(\xi)$ la función de Bessel J de primer orden. Introduciendo este resultado en la integral (8.5), se tiene:

$$I(s) = \frac{8\pi^2}{s} \int_0^\infty z dz J_2(sz) \phi(z), \quad (8.8)$$

que permite obtener la función $I(s)$ para un perfil cualquiera. En el caso más simple, el perfil BPST, la función $I(s)$ resulta:

$$I(s) = \frac{8\pi^2}{s} \left(\frac{2}{s^2} - K_2(s) \right), \quad (8.9)$$

mientras que, por ejemplo, para el perfil modificado (6.53), la integral resulta:

$$I(s) = \frac{8\pi^2}{s} \int_0^\infty z dz J_2(sz) \frac{K_2(\alpha_{\text{DP}} \rho z)}{\frac{2}{(\alpha_{\text{DP}} \rho)^2} + K_2(\alpha_{\text{DP}} \rho z)}, \quad (8.10)$$

que no admite una expresión analítica compacta.

El factor de forma escalar del propagador (3.4), en una configuración de instantones, se expresa como:

$$G^{(2)}(p^2) = \frac{1}{g^2} \left\langle \widetilde{B}_\mu^a(p) \widetilde{B}_\nu^b(-p) \right\rangle \frac{\delta_{ab} g^{\mu\nu}}{3(N_C^2 - 1)}, \quad (8.11)$$

y sustituyendo los campos en el espacio de Fourier (8.4) se tiene:

$$G^{(2)}(p^2) = \frac{\delta_{ab} g^{\mu\nu}}{3g^2(N_C^2 - 1)V} \left\langle \sum_{ij} R_i^{\alpha a} R_j^{\beta b} \widetilde{\eta}_{\mu\mu'}^\alpha \widetilde{\eta}_{\nu\nu'}^\beta e^{ip(z_i - z_j)} \rho_i^3 \rho_j^3 \frac{p^{\mu'} p^{\nu'}}{p^2} I(p\rho_i) I(p\rho_j) \right\rangle. \quad (8.12)$$

Si se supone, en primera aproximación, que las orientaciones en el espacio de color de los instantones no están correlacionadas, cuando se promedie sobre un número suficiente de configuraciones, las contribuciones de los términos cruzados serán subdominantes frente a las procedentes de un mismo instantón, con lo que:

$$\left\langle \sum_a R_{(i)}^{a\alpha} R_{(j)}^{a\beta} e^{ip(z_i - z_j)} \right\rangle_{i \neq j} \simeq 0. \quad (8.13)$$

Haciendo uso de las expresiones del apéndice A.2, el propagador gluónico resulta:

$$G^{(2)}(p^2) = \frac{n}{8g^2} \left\langle \rho^6 I(p\rho)^2 \right\rangle, \quad (8.14)$$

donde n es la densidad de instantones y $\langle \dots \rangle$ simboliza el promedio sobre la distribución de instantones (6.43):

$$\langle F(p) \rangle = \int_0^\infty d\rho \mu(\rho) F(p, \rho); \quad \int_0^\infty d\rho \mu(\rho) = 1. \quad (8.15)$$

8.1.2. Vértice simétrico

El caso del vértice simétrico a tres gluones es análogo al del propagador. La parte escalar de la función de Green en el *gauge* de Landau, extraída por medio de la proyección (3.10), vendría dada por:

$$G^{(3)}(p^2, p^2, p^2) = \frac{1}{108p^2 g^3} \left\langle \widetilde{B}_\mu^a(p) \widetilde{B}_\nu^b(p) \widetilde{B}_\rho^c(p) \right\rangle \left[T^{\mu\nu\rho} + \frac{(p_1 - p_2)^\rho (p_2 - p_3)^\mu (p_3 - p_1)^\nu}{2\mu^2} \right] f_{abc}. \quad (8.16)$$

Introduciendo el campo instantónico (8.4) en la expresión anterior y despreciando los términos procedentes de diferentes instantones,

$$\langle \sum_a R_{(i_1)}^{a\alpha} R_{(i_2)}^{b\beta} R_{(i_3)}^{c\gamma} \rangle_{i_j \neq i_k} \simeq 0, \quad (8.17)$$

se obtiene una expresión para la función de Green a tres puntos:

$$G^{(3)}(p^2, p^2, p^2) = \frac{n}{48 p g^3} \langle \rho^9 I(p\rho)^3 \rangle, \quad (8.18)$$

donde de nuevo se ha hecho uso de las relaciones del apéndice A.2.

8.1.3. Constante de acoplamiento

En la parte II del trabajo se ha utilizado una definición no perturbativa de la constante de acoplamiento fuerte renormalizada, α_s , basada en las funciones de Green a dos y tres puntos. En esta parte se mantendrá dicha denominación para la combinación de funciones de Green:

$$\alpha_s(p^2) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{G^{(3)}(p^2, p^2, p^2)}{(G^{(2)}(p^2))^3} Z_{\text{MOM}}^{3/2}(p^2) \right)^2 = \frac{p^6}{4\pi} \frac{(G^{(3)}(p^2, p^2, p^2))^2}{(G^{(2)}(p^2))^3}, \quad (8.19)$$

a pesar de que no está claro el significado físico que tiene en un líquido de instantones. En cualquier caso, el cociente (8.19) está bien definido y puede evaluarse en un líquido de instantones a partir de las expresiones (8.14) y (8.18), resultando:

$$\alpha_{s(I)}(p) = \frac{p^4}{18\pi n} \frac{\langle \rho^9 I(p\rho)^3 \rangle^2}{\langle \rho^6 I(p\rho)^2 \rangle^3}. \quad (8.20)$$

Si consideramos, en primera aproximación, que todos los instantones tienen el mismo radio, el factor que aparece en la constante de acoplamiento,

$$\frac{\langle \rho^9 I(p\rho)^3 \rangle^2}{\langle \rho^6 I(p\rho)^2 \rangle^3}, \quad (8.21)$$

valdría 1 independientemente de la función $\phi(x)$ del perfil del instantón. Se obtiene, por tanto, una ley de potencias para la constante de acoplamiento a energías bajas,

$$\alpha_{s(I)}(p) = \frac{1}{18\pi n} p^4. \quad (8.22)$$

Resulta interesante señalar que este resultado es independiente del tipo de solución; no sólo del perfil del instantón y su radio, sino que incluso es válido para otro tipo de

soluciones clásicas, merones, por ejemplo, o cualquier otro que pueda describirse de la forma (6.25).

La independencia de la forma funcional (8.22) respecto al perfil de los instantones convierte a la constante de acoplamiento en una magnitud especialmente indicada para evaluar la capacidad de un líquido de instantones para describir las correlaciones en QCD a energías bajas. Éste será el propósito de la sección siguiente, en la que se analizarán algunas magnitudes independientes del perfil instantónico, permitiendo una identificación sencilla del comportamiento instantónico. En la sección 8.3 se analizarán las funciones de Green por separado, lo que permite estudiar el perfil instantónico.

8.2. Análisis de la constante de acoplamiento a energías bajas

El resultado final del apartado anterior predice que en una configuración de campos dominada por soluciones clásicas, la constante de acoplamiento crece con la cuarta potencia del momento. El objetivo de esta sección será evaluar la validez de dicha predicción para describir el comportamiento de la constante de acoplamiento calculada en retículo en la región profundamente no perturbativa.

En el capítulo 4, donde se presentaron los análisis del comportamiento de la constante de acoplamiento entre 3 y 10 GeV, se obvió el comportamiento de en la región de energías más bajas. Fenomenológicamente, la evolución de la constante de acoplamiento obtenida en retículo en los esquemas MOM presenta un máximo en torno a 1-1.5 GeV (ver figura 8.1b). A energías más altas α_s decrece, como se ha descrito en el marco OPE. Para energías por debajo del máximo, la constante de acoplamiento decrece hasta anularse para $p = 0$ con un comportamiento que, como veremos a continuación, se puede explicar en términos de un líquido de instantones.

8.2.1. Resultados numéricos

Las simulaciones realizadas para los ajustes de la parte II (en la región de energías intermedias) utilizaban tamaños de la malla (a) y del retículo (L) apropiados para obtener valores del momento en la región 3-10 GeV, pero contenían pocos valores por debajo del máximo de $\alpha_s(p)$. Para poder obtener un número de puntos suficiente en

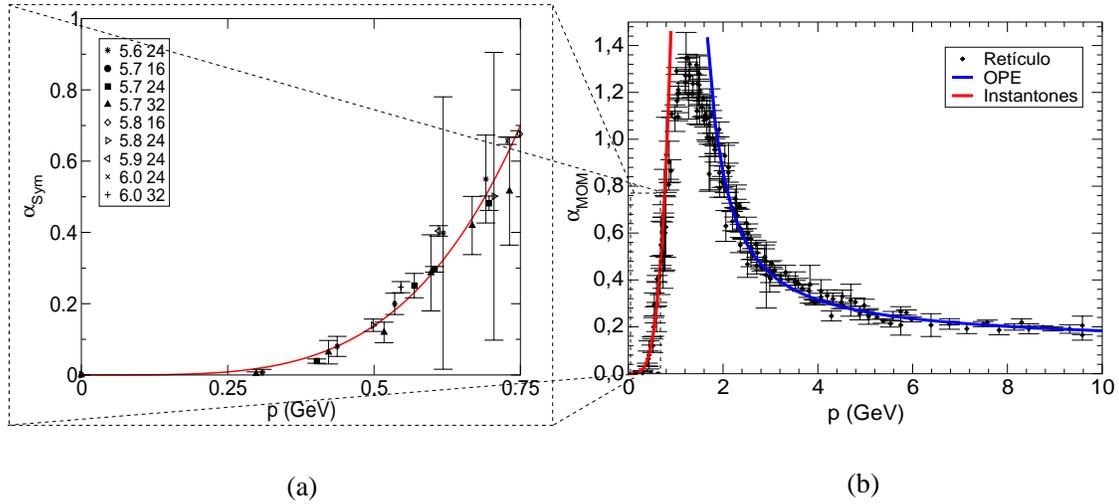


Figura 8.1: Comportamiento de la α_s entre 0 y 10 GeV, con detalle de la región de energía baja, junto al ajuste por una ley p^4 . En la región de alta energía se presenta el ajuste basado en OPE de la parte anterior.

la región de energías de interés para esta parte, por debajo de ≈ 1 GeV, es necesario utilizar valores mayores de la malla. Los datos de los retículos utilizados y los correspondientes volúmenes se recogen en la tabla 8.1.

L	β	V (fm ⁴)	Nº Conf.
24	5.6	1036	15
32	5.7	1190	35
24	5.8	153.2	10

Tabla 8.1: Número de configuraciones utilizadas para cada conjunto de parámetros de la simulación.

Se han empleado valores de β pequeños, de hasta 5.6, a pesar de lo cual no parece que existan errores de discretización importantes. El hecho de que los resultados para todos los valores de β sean compatibles entre sí muestra la validez de las simulaciones para β pequeño. La calibración de la malla para estos valores de β se toma de [Gua01]. Se han utilizado volúmenes de hasta 32^4 , límite impuesto por la capacidad de computación disponible. Los resultados de estas simulaciones para la constante de acoplamiento se muestran en la figura 8.2.

El primer resultado destacable se refiere al número de configuraciones necesarias

para que los resultados converjan. En el régimen de energías altas (por encima de 3 GeV, la región descrita por el desarrollo en producto de operadores), eran necesarias del orden de 100 configuraciones para alcanzar un comportamiento suave ¹ de la constante de acoplamiento. En la región de energías por debajo de 1 GeV, por el contrario, los resultados muestran un comportamiento suave a partir de un número menor de configuraciones, del orden de 10. Este resultado es coherente con una descripción en términos de soluciones clásicas, al no depender el comportamiento de la constante de acoplamiento de los detalles de cada configuración.

En dicha región, la evolución de la constante de acoplamiento puede describirse por una ley potencial, como predice el modelo instantónico, lo que se muestra como el primer indicio de efectos instantónicos en una magnitud gluónica sin necesidad de someter la configuración a procesos de enfriamiento [BSY03a]. Utilizando los resultados obtenidos para la constante de acoplamiento con las configuraciones de la tabla 8.1, se realiza a continuación un ajuste según una ley p^4 , a fin de extraer un valor para la densidad de instantones. La región de ajuste será entre 0.4 GeV, límite inferior impuesto por los retículos utilizados, y 0.9 GeV, donde la ley p^4 deja de ser válida para ajustar los datos. Los resultados del ajuste se muestran en la figura 8.2, que conducen a las estimaciones de la densidad presentadas en la tabla 8.2.

Retículo	n (fm ⁻⁴)	$\chi^2/d.o.f.$
5.6(24 ⁴)	5.1 ± 0.6	0.98
5.7(32 ⁴)	6.6 ± 0.4	0.29
5.8(24 ⁴)	5.6 ± 1.1	0.03

Tabla 8.2: Resultados para la densidad obtenida ajustando la región entre 0.4-0.9 GeV por una ley (8.22) para los tres retículos (β, L^4) utilizados. Los errores son estadísticos, calculados mediante el método de Jackknife.

En los tres retículos utilizados, el comportamiento de la constante de acoplamiento se describe satisfactoriamente por el modelo instantónico, si bien es necesario puntualizar que, debido al escaso número de puntos disponibles (exceptuando el caso de $\beta = 5.7$) y a la fuerte correlación existente entre los errores, se obtienen valores de $\chi^2/d.o.f.$ muy inferiores a la unidad.

¹Entiéndase por comportamiento suave que sea posible trazar una línea monótona que pase por las bandas de error de los puntos.

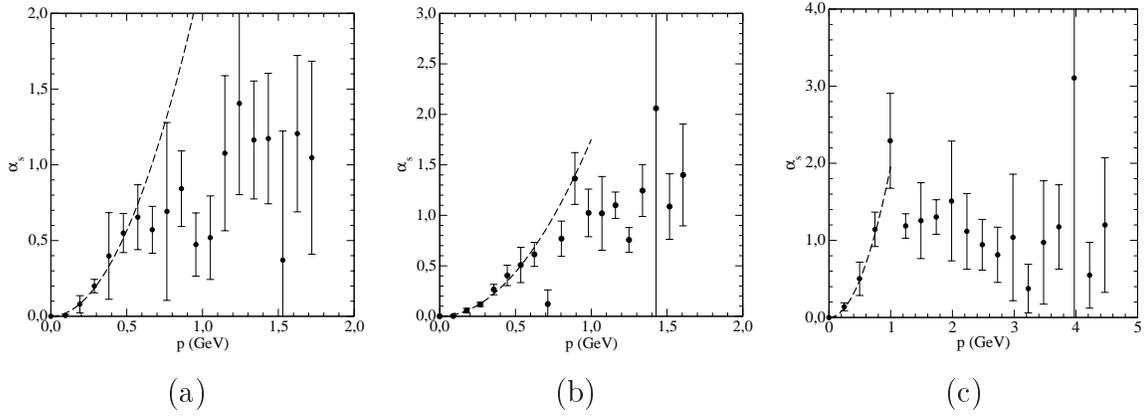


Figura 8.2: Se representa el comportamiento a energías bajas de $\alpha_s(p)$ para los retículos (a) (5.6, 24), (b) (5.7, 32) y (c) (5.8, 24). Nótese cómo por encima de ≈ 1 GeV, no es posible trazar una línea suave uniendo los puntos.

Puesto que el comportamiento a bajas energías de la constante de acoplamiento no muestra diferencias notorias para diferentes retículos, es posible realizar un ajuste global, incluyendo los datos para todos los retículos² conjuntamente de forma que hay un número de puntos ampliamente suficiente para realizar el ajuste. El resultado de este ajuste (gráfica 8.1), es [BSY03a]:

$$n \simeq 5.3 \pm 1.1 \text{ fm}^{-4}, \quad \chi^2/\text{d.o.f.} = 3.8, \quad (8.23)$$

donde ahora la calidad del ajuste es mucho peor debido a la inclusión de más retículos, alguno de los cuales sólo introduce un punto en la ventana de ajuste, con errores muy pequeños.

Así pues, los resultados numéricos exhiben un comportamiento que puede describirse en términos de un modelo instantónico para el vacío de QCD. Este resultado es del mayor interés, ya que permite abordar la comprensión de la QCD a bajas energías desde una perspectiva nueva, donde las correlaciones a gran distancia se corresponden con las de un modelo semiclásico.

Por otra parte, este tipo de análisis permite estimar la densidad de instantones [BSY03a] sin necesidad de procedimientos que alteren la configuración (como es el caso del enfriamiento utilizado en el capítulo anterior). Otras propiedades del líquido de instantones como el radio, o los detalles del perfil instantónico, no son accesibles a

²Incluyendo los retículos utilizados en la primera parte, aunque alguno de ellos sólo añade un punto en la ventana de energías de interés para el ajuste.

través de este análisis (puesto que tienen una influencia subdominante sobre α_s) y será necesario, por tanto, estudiar las funciones de Green por separado para tener acceso a estos datos (tarea que se realizará en la sección 8.3).

8.2.2. Resultados para configuraciones enfriadas

En el capítulo anterior se presentó el método de enfriamiento para eliminar las correlaciones a distancias muy cortas, que revela la estructura del vacío de QCD como un líquido de instantones. A continuación se estudian las funciones de correlación gluónicas en configuraciones enfriadas a fin de evaluar si se ajustan al modelo instantónico.

En la figura 8.3 se representan el propagador gluónico y la constante de acoplamiento fuerte (8.19) para diferentes etapas de enfriamiento. Analizando cualitativamente el propagador, se aprecia cómo a energías altas se produce una modificación sustancial de su comportamiento; pasa de comportarse como p^{-2} para $n_c = 0$, según predice la teoría de perturbaciones, a comportarse como p^{-6} , de acuerdo con un modelo instantónico,

$$G^{(2)}(p) \xrightarrow{p \gg} \frac{32\pi^4}{g^2} n \frac{1}{p^6}. \quad (8.24)$$

Este resultado es independiente del perfil $\phi(x)$ (ver ecuación (8.37)), puesto que para distancias pequeñas, la influencia de las correlaciones es subdominante. De hecho, este comportamiento es válido también para merones ($\phi(x) = 1$). En la figura 8.3 se han representado el propagador gluónico y la constante de acoplamiento fuerte en escala logarítmica, con el fin de apreciar con más facilidad el cambio cualitativo de comportamiento.

Si se analiza a continuación la constante de acoplamiento (figura 8.3b), se aprecia que, tras un número relativamente pequeño de iteraciones, la caída logarítmica a momentos grandes desaparece, eliminándose cualquier signo de libertad asintótica en las configuraciones frías. En su lugar, la constante de acoplamiento crece monótonamente con el momento, como predice un modelo instantónico. Si bien resulta difícil comprender el significado físico de esta *constante de acoplamiento*, este sorprendente resultado corrobora que tras el enfriamiento, la configuración de campos está dominada por instantones ³

³El término instantón se utiliza aquí en un sentido general refiriéndose a soluciones con la forma tensorial dada por (6.25).

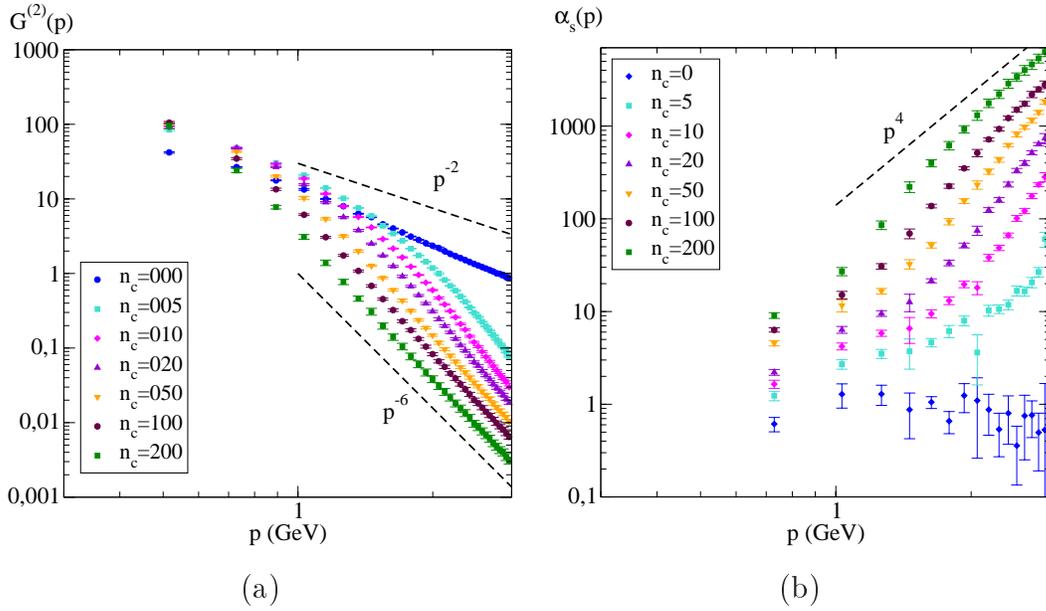


Figura 8.3: (a) Propagador gluónico y (b) constante de acoplamiento fuerte obtenidos para ($L = 24$, $\beta = 6.0$) en diferentes etapas del proceso de enfriamiento, (n_c).

A partir de la constatación de que la evolución de la constante de acoplamiento en configuraciones frías se adapta cualitativamente a lo que predice un modelo instantónico, puede plantearse calcular la densidad de instantones a partir del ajuste de ésta, igual que se hace en las configuraciones termalizadas, con objeto de contrastar la determinación de la densidad con la del método geométrico del capítulo anterior. A priori, podría plantearse realizar el ajuste en la zona de energías altas, aunque la ausencia de un comportamiento común imposibilita esta tarea, por lo que se realizan los ajustes en la misma región que para las configuraciones termalizadas, entre 0.4 y 0.9 GeV. Esta región, al no estar influida por las correlaciones cuánticas, sólo se ve alterada con el enfriamiento por la modificación de la densidad. Los resultados de dichos ajustes se muestran en la tabla 8.3.

Comparando estos resultados con los obtenidos para las mismas configuraciones a través del método geométrico de reconocimiento, revelan una diferencia sustancial, de en torno a un factor 3 para $\beta = 5.8$ e incluso mayor para $\beta = 5.6$. Esta diferencia puede proceder de la dificultad del método de reconocimiento para contar instantones con radio pequeño, efecto más acusado para mallados grandes. Por otra parte, puede haber contribuciones a la ley p^4 que procedan de otros objetos diferentes de los instantones (merones, por ejemplo), y que no se detectan con el método de reconocimiento geométrico de forma.

n_c	$n(\beta = 5.8)$	$n(\beta = 5.6)$
0	5.6(7)	5.14(22)
5	2.283(23)	1.35(6)
10	1.58(3)	0.73(3)
20	0.990(10)	0.387(2)
30	0.780(11)	0.283(8)
40	0.674(14)	0.228(5)
50	0.552(23)	0.172(3)
60	0.535(6)	0.152(5)
70	0.480(7)	0.118(3)
80	0.410(6)	0.107(1)
90	0.396(3)	0.0984 (1)
100	0.337(4)	0.0781 (2)
150	0.211(5)	0.0446 (1)
200	0.156(5)	0.0313 (2)

Tabla 8.3: Densidades (en fm^{-4}) obtenidas a través de un ajuste del comportamiento de la constante de acoplamiento en la región 0.4 – 0.9 GeV para configuraciones enfriadas. Los errores se han calculado por el método de Jackknife.

Para poder determinar la densidad de una forma compatible mediante ambos métodos sería necesario, por tanto, realizar simulaciones con mallados muy finos (de modo que los errores de discretización no sean críticos para el método de reconocimiento de forma) y volúmenes grandes (que permitan determinar la constante de acoplamiento para más valores del momento en la región $p \lesssim 1\text{GeV}$ dominada por los instantones). Los resultados obtenidos, no obstante, muestran el dominio de los instantones en la dinámica a energías bajas de la QCD, permitiendo situar el valor de la densidad de instantones en torno a 5 fm^{-4} , en buen acuerdo con las estimaciones del capítulo anterior.

8.3. Análisis de las funciones de Green

En esta sección se analizarán las funciones de Green gluónicas en el régimen de energías bajas. En la sección anterior se verificó que el cociente de funciones de Green que define la constante de acoplamiento se ajusta a las predicciones del modelo instantónico. Parece razonable, por tanto, verificar si el comportamiento de las funciones de Green individualmente se ajusta al modelo. Este análisis resulta interesante, además, porque mientras que α_s no depende (en primera aproximación) de la función del perfil, $\phi(x)$, el propagador y el vértice gluónico sí, de modo que, estudiando estas funciones de Green podremos evaluar la validez del perfil propuesto (6.53).

Asimismo, en esta sección se analizará la modificación de la expresión obtenida para α_s (8.22) cuando se considera una distribución finita de radios instantónicos (que depende del perfil) y el comportamiento del propagador en el límite $p \rightarrow 0$.

8.3.1. Aproximación semiclásica

Este análisis parte de la hipótesis de que es posible describir los campos *gauge* como superposición de una parte clásica, $g^{-1}B_\mu^a(x)$, y otra cuántica, $Q_\mu^a(x)$, correspondiente a fluctuaciones *sobre* el fondo clásico ⁴:

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{g}B_\mu^a(x) + (Q_B)_\mu^a(x) , \quad (8.25)$$

⁴Nótese que B está definido incluyendo la constante de acoplamiento, mientras que A y Q no.

de modo que las funciones de Green (en este caso, el propagador) resultarían de la forma ⁵:

$$\langle A_\mu^a(0)A_\nu^b(x) \rangle = g^{-2} \langle B_\mu^a(0)B_\nu^b(x) \rangle + \langle (Q_B)_\mu^a(0)(Q_B)_\nu^b(x) \rangle , \quad (8.26)$$

o haciendo la transformada de Fourier,

$$G^{(2)}(p^2) = g^{-2}G_{(B)}^{(2)}(p^2) + G_Q^{(2)}(p^2) . \quad (8.27)$$

La hipótesis de trabajo en este apartado es que en la zona de interés, es decir, para bajas energías, la influencia del término cuántico es despreciable y toda la dependencia de las funciones de Green con el momento viene dada por el término clásico.

Si escribimos:

$$\begin{aligned} G_{\text{Ret}}^{(2)}(p^2, a^{-1}) &= \Gamma^{(2)}(p^2, a^{-1}) g^{-2}G_{(B)}^{(2)}(p^2) , \\ G_{\text{Ret}}^{(3)}(p^2, a^{-1}) &= \Gamma^{(3)}(p^2, a^{-1}) g^{-3}G_{(B)}^{(3)}(p^2) , \end{aligned} \quad (8.28)$$

la hipótesis anterior se traduce en considerar:

$$\Gamma^{(2)}(p^2, a^{-1}) = \Gamma^{(3)}(p^2, a^{-1}) = 1 , \quad (8.29)$$

de modo que las funciones de correlación gluónicas serían las de un líquido de instantones. Las funciones $\Gamma^{(i)}(p^2, a^{-1})$ introducidas en (8.28) contendrían, en principio, todas las desviaciones respecto al comportamiento clásico. Entre ellas, cabe destacar la influencia de la malla, los efectos de la renormalización y las desviaciones respecto al modelo semiclásico, ya sea por los efectos de las correlaciones entre instantones (que pueden afectar a energías muy bajas) o por la aparición de correlaciones cuánticas (efecto que impondrá el límite superior de la ventana en la que se realizan los ajustes).

A continuación, vamos a profundizar en los detalles de esta aproximación, a fin de comprender los pasos que permiten llegar de (8.28) a (8.29). Las consideraciones necesarias para esta aproximación son las siguientes:

1. La aproximación semiclásica se traduce en considerar subdominante la dependencia con el momento de los factores $\Gamma^{(i)}(p^2, a^{-1})$, de modo que:

$$\Gamma^{(n)}(p^2, a^{-1}) \approx \Gamma^{(n)}(a^{-1}) , \quad (8.30)$$

restando, no obstante, la dependencia con la malla, a .

⁵Los términos cruzados del tipo $\langle B_\mu^a(0)(Q_B)_\nu^b(x) \rangle$ se anulan puesto que corresponden al promedio de las fluctuaciones cuánticas.

2. La constante de acoplamiento,

$$\alpha_s(p) = \frac{p^6}{4\pi} \frac{(G^{(3)}(p^2, p^2, p^2))^2}{(G^{(2)}(p^2))^3} = \frac{(\Gamma^{(3)}(a^{-1}))^2}{(\Gamma^{(2)}(a^{-1}))^3} \frac{1}{18\pi n} p^4, \quad (8.31)$$

calculada en el apartado anterior, no depende significativamente de la malla, lo que nos lleva a:

$$\frac{(\Gamma^{(3)}(a^{-1}))^2}{(\Gamma^{(2)}(a^{-1}))^3} \approx 1. \quad (8.32)$$

3. Realizando un ajuste combinado del propagador y del vértice gluónico con el perfil (6.53) entre 0.4 y 0.9 GeV en el que se mantienen $\Gamma^{(2)}(a^{-1})$ y $\Gamma^{(3)}(a^{-1})$ libres (y todos los demás parámetros iguales para ambas funciones de Green), se obtiene que estos parámetros son iguales (figura 8.4a) cuando el radio de los instantones se sitúa en torno al radio fenomenológico ($\rho \simeq 0.3$ fm). Además, un ajuste con

$$\Gamma^{(2)}(a^{-1}) \approx \Gamma^{(3)}(a^{-1}), \quad (8.33)$$

está favorecido por el valor de $\chi^2/d.o.f.$ (figura 8.4b).

Estas premisas justifican la utilización de la aproximación, (8.29), que implica que todos los efectos debidos a la influencia de la renormalización, o a deficiencias del modelo, van a aparecer en los resultados como desviaciones en el valor de la densidad. Para estimar la incertidumbre introducida al considerar $\Gamma^{(i)}(a^{-1})$ independiente de la malla, se ajustarán los valores de la densidad por separado para cada retículo. En cualquier caso, el hecho de que el mejor ajuste y el cociente $\frac{n\Gamma^{(2)}}{n\Gamma^{(3)}} \simeq 1$ sucedan para valores de ρ cercanos, y a la vez próximos al valor fenomenológico, 0.3 fm (ver gráficas 8.4), son muestra de la consistencia de los resultados. La aproximación realizada se muestra, por tanto, apoyada por los datos numéricos.

8.3.2. Resultados numéricos

Con las premisas anteriores, se realiza un ajuste de los resultados numéricos para el propagador gluónico y el vértice simétrico en la región 0.4-0.9 GeV, utilizando las expresiones (8.14) y (8.18), del que se extraerá una estimación de la densidad, el radio instantónico y el parámetro α_{DP} . Se han realizado ajustes para valores fijos del radio,

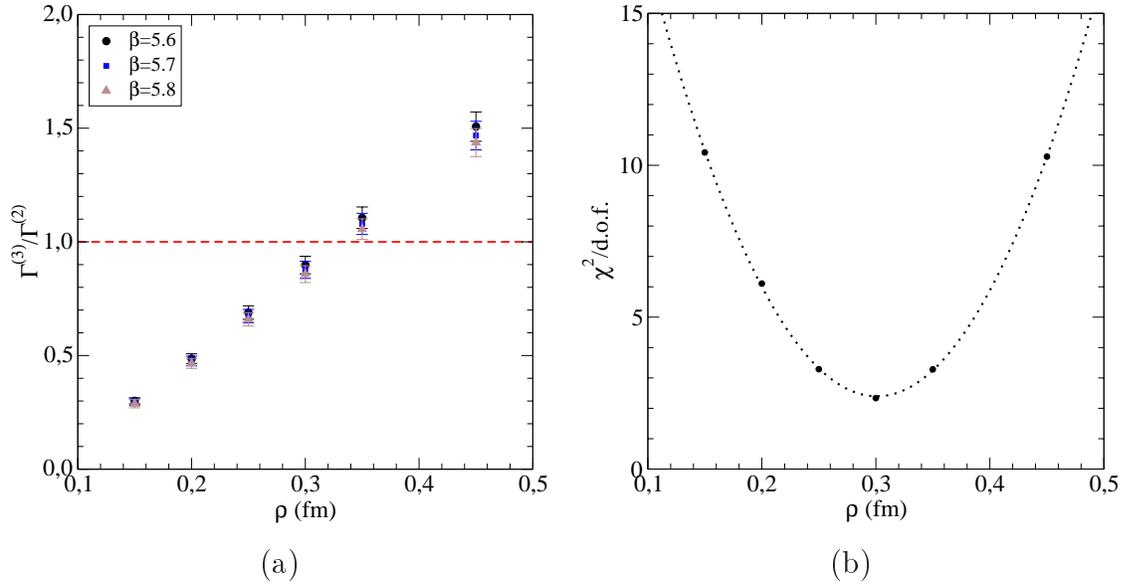


Figura 8.4: (a) Resultados de un ajuste combinado del propagador y el vértice simétrico los retículos de la tabla 8.1 según las expresiones clásicas, (8.14) y (8.18) manteniendo libres los factores $\Gamma^{(i)}(a^{-1})$. Se representan el valor del cociente $\frac{\Gamma^{(2)}}{\Gamma^{(3)}}$ procedente de los resultados numéricos y (b) $\chi^2/d.o.f.$ del ajuste en función del radio fijado cuando se aproxima $\Gamma^{(2,3)}(a^{-1}) = 1$.

dado que no resulta posible un ajuste con todos los parámetros libres. Los resultados se muestran en la tabla 8.4.

El mejor ajuste se obtiene para $\rho \approx 0.3$ fm, en buen acuerdo con las predicciones fenomenológicas [SS98]. Para este valor del radio, se obtiene una densidad de en torno a 8 fm^{-4} , considerablemente superior a los resultados obtenidos para α_s en la sección anterior ($\approx 5 \text{ fm}^{-4}$). No obstante, en la tabla 8.4 se aprecia cómo los resultados para la densidad dependen fuertemente del valor del radio, por lo que no es posible descartar valores compatibles con los de la sección anterior.

Los errores de discretización (estimados a partir de las diferentes densidades obtenidas para cada valor de la malla) son pequeños, $\approx 3\%$, lo que apoya la suposición de que los resultados son puramente clásicos en este rango de energías.

En la figura 8.5(a) se representa, junto al resultado del perfil (6.53) que se obtiene en el ajuste, el propagador para el perfil BPST correspondiente al mismo valor del radio. Puede apreciarse cómo ambos perfiles dan resultados compatibles para energías grandes, mientras que a energías bajas el perfil BPST se separa ampliamente de los resultados numéricos. El perfil modificado que se ha propuesto en este trabajo se

ρ (fm)		0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
n (fm ⁻⁴)	$\beta = 5.6$	26.5(1)	13.18(5)	7.75(3)	5.12(2)	3.63(1)
	$\beta = 5.7$	27.2(1)	13.54(5)	7.98(3)	5.28(3)	3.76(2)
	$\beta = 5.8$	27.8(2)	13.9(1)	8.20(7)	5.41(4)	3.86(3)
$\alpha_{\text{DP}}\rho$		0.393(2)	0.527(2)	0.675(2)	0.836(3)	1.005(3)
$\chi^2/d.o.f.$		6.1	3.3	2.3	3.3	6.0

Tabla 8.4: *Parámetros del mejor ajuste combinado $G_{\text{Ret}}^{(2)}(p^2)-G_{\text{Ret}}^{(3)}(p^2)$ para diferentes valores del radio. Los errores representados son sólo estadísticos.*

ajusta satisfactoriamente en la región de energías entre 0.4 y 0.9 GeV, y reproduce cualitativamente la región de energías inferiores.

El cociente de los valores del propagador procedentes del cálculo en retículo y los resultados del ajuste para el propagador (figura 8.6) muestra cómo el ajuste realizado sólo permite describir el comportamiento en un estrecho margen de energías. En esta región es, por tanto, donde la aproximación semiclásica es válida. Para energías menores la situación debe poder describirse en términos de instantones⁽³⁾, por lo que la incapacidad de este modelo para describir las funciones de correlación puede estar relacionada bien con el efecto de la distribución de radios (que no hemos tenido en cuenta) bien con la utilización del perfil (6.53), que puede no ser el más adecuado para energías menores.

Los resultados de densidad obtenidos difieren de los presentados en la sección anterior debido, entre otros motivos, a que en este caso se realiza un ajuste sobre el propagador, que posee más puntos en el intervalo de integración que el vértice a tres gluones (y, por tanto, que la constante de acoplamiento) y con errores menores. En cualquier caso, los márgenes de error que se derivan de los ajustes realizados no nos permiten establecer diferencias significativas entre los resultados.

8.3.3. Efectos de la distribución de radios sobre α_s

Hasta este punto se ha considerado un líquido de instantones idénticos realizando ajustes satisfactorios de la constante de acoplamiento, α_s , y las funciones de Green, $G^{(2)}(p^2)$ y $G^{(3)}(p^2)$. No obstante, es necesario considerar la influencia que podría tener el hecho de que los instantones tengan diferentes radios sobre los resultados.

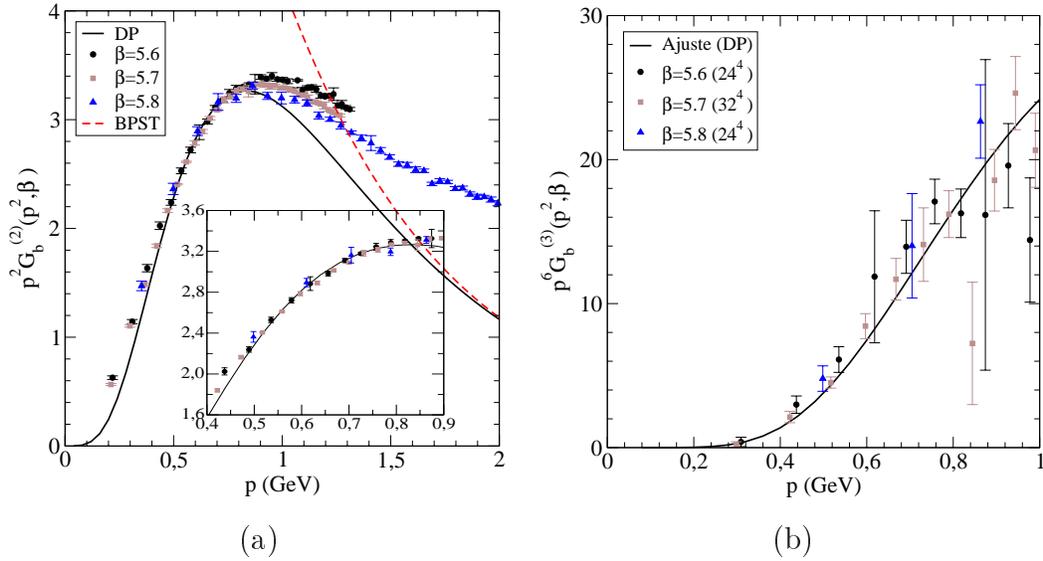


Figura 8.5: Resultados numéricos para (a) el propagador y (b) el vértice gluónico adimensionalizados ($p^2 G^{(2)}$ y $p^6 G^{(3)}$, respectivamente) para $\beta = 5.6$, 5.7 y 5.8 después de escalarlos a los resultados para $\beta = 5.6$.

Dado que α_s no depende del perfil de los instantones, se muestra como una magnitud ideal para estudiar la influencia de la distribución de radios que aparecería como un efecto de segundo orden a través del factor:

$$\frac{\langle \rho^9 I(p\rho)^3 \rangle^2}{\langle \rho^6 I(p\rho)^2 \rangle^3}, \quad (8.34)$$

que podría introducir desviaciones respecto a la ley de potencias p^4 obtenida para un modelo con todos los radios idénticos. Este factor depende del perfil instantónico considerado, $\phi(x)$, por lo que no es posible separar totalmente la influencia de la distribución de radios sobre la constante de acoplamiento de la del perfil.

Se considera la distribución de instantones (6.43),

$$\mu(\rho) = 2 \frac{\left(\frac{2}{7}\overline{\rho^2}\right)^{-7/2}}{\gamma(7/2)} \rho^6 e^{-\frac{7}{2}\rho^2/\overline{\rho^2}}, \quad (8.35)$$

basada en los resultados de Diakonov y Petrov [DP84]. En cualquier caso, los detalles de la distribución no parecen ser fundamentales, y puede considerarse una aproximación a una distribución de instantones con un comportamiento ρ^6 para ρ pequeño, como predice el cálculo perturbativo a un bucle, y regularizada para radios grandes. Este tipo de distribuciones se ve apoyada por resultados obtenidos a partir de simulaciones en retículo [RS99].

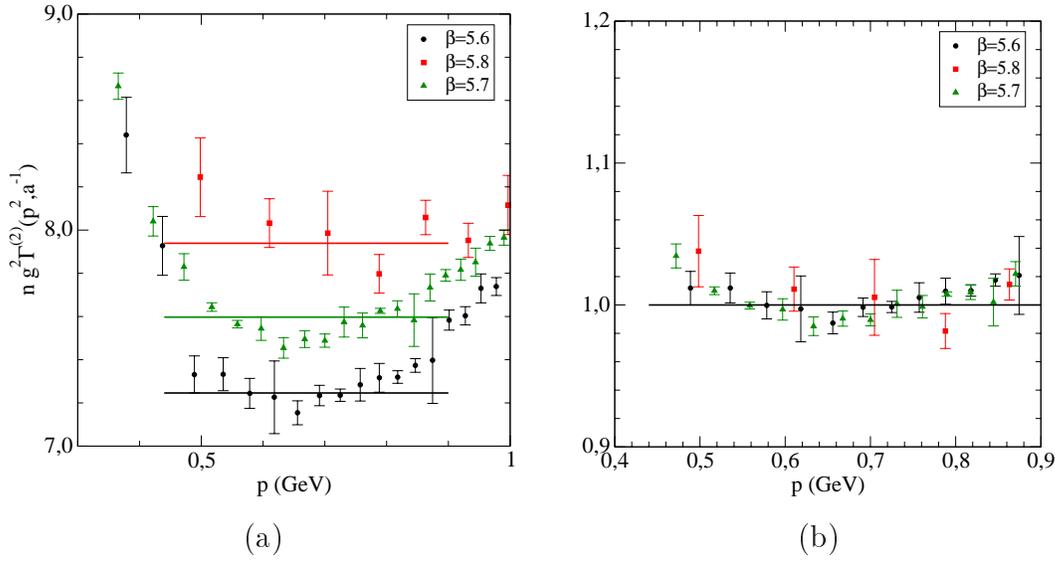


Figura 8.6: (a) $n g^2 \Gamma^{(2)}(p^2, a^{-1})$ para los tres retículos utilizados, ($\beta = 5.6, 5.7$ y 5.8). (b) Los mismos datos que en (a) escalados a 1. Se observa cómo las curvas coinciden, aunque hay una cierta desviación parabólica en los extremos del intervalo.

Puesto que la influencia de una distribución de radios de instantones sobre $\alpha_s(p)$ depende del perfil, a continuación se consideran dos casos particulares: el perfil BPST y el propuesto a partir de los resultados de Diakonov y Petrov.

Perfil BPST

Como primera aproximación, merece la pena plantear cuál sería el comportamiento en el caso de un perfil BPST, en el que los límites asintóticos de las funciones de Green pueden escribirse conjuntamente como:

$$G_{(I)}^{(m)}(p^2) = \frac{p^{2-m} n}{m 2^{2m-2} g^{-m}} \langle \rho^{3m} I(p\rho)^m \rangle = n \frac{4p^2}{m} \left(\frac{1}{g} \frac{4\pi^2}{p^4} \right)^m \quad (8.36)$$

$$\times \begin{cases} 1 + O\left(\frac{7}{2\rho^2 p^2}\right) & \text{para } p\rho \gg 1 \\ \frac{\gamma\left(\frac{7+2m}{2}\right)}{4^m \gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \left(\frac{2}{7}\rho^2 p^2\right)^m \left(1 + b_m(p^2) \frac{2}{7}\rho^2 p^2 + O\left(\left(\frac{2}{7}\rho^2 p^2\right)^2\right)\right) & \text{para } p\rho \ll 1 \end{cases}$$

con $m = 2$ para el propagador y $m = 3$ para el vértice simétrico y

$$b_m(p^2) = \frac{m(7+2m)}{16} \left[2\gamma_E - \frac{3}{2} + \psi\left(\frac{9+2m}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{7}\rho^2 p^2\right) - \ln 4 \right]. \quad (8.37)$$

Donde $\gamma_E = 0.577216\dots$ es la constante de Euler y $\psi(z)$ la función “digamma” de Euler, $\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$.

La primera corrección (válida para $\bar{\rho}^2 p^2 \ll 7/2$) a la constante de acoplamiento resulta entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_s(p) &= \frac{121}{1134\pi n} p^4 \left(1 + \frac{6}{56} \bar{\rho}^2 p^2 \left(2\gamma_E + 2 \ln \frac{\bar{\rho}^2 p^2}{56} + \frac{22567}{3465} \right) + \dots \right) \\ &\approx \frac{1.37}{18\pi n} \left(\frac{p}{1\text{GeV}} \right)^{3.75}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

donde se han obtenido el factor y la potencia efectivas de una ley de potencias en el rango de energías de interés para $\bar{\rho} = 0.3$ fm.

Perfil modificado

Si se realiza el mismo análisis para el perfil modificado (6.53) se obtiene el mismo comportamiento de las funciones de Green para $p\rho \gg 1$, como era de esperar ⁶. Para $p \ll \alpha$ en este caso, se tiene:

$$G_{(I)}^{(m)}(p^2) = n \left(\frac{1}{g} \frac{2\pi^2}{7\alpha_{\text{DP}}^2} \bar{\rho}^2 \right)^m \frac{\gamma(\frac{7}{2} + m)}{\gamma(\frac{7}{2})} \frac{4p^2}{m} \left(1 + O\left(\alpha_{\text{DP}}^2 \bar{\rho}^2, p^2 \bar{\rho}^2\right) \right), \quad (8.39)$$

que conduce, para la constante de acoplamiento, a

$$\alpha_s(p) \approx \frac{1.45}{18\pi n} \left(\frac{p}{1\text{GeV}} \right)^{3.83}, \quad (8.40)$$

con $\alpha_{\text{DP}}\rho = 0.675$ tomado de la tabla 8.4 ⁷.

Los resultados obtenidos para ambos perfiles muestran que la dependencia con el perfil es subdominante en la región en la que se realiza el ajuste, y para los dos se obtiene que la modificación debida al factor (8.34) es similar.

Resultados numéricos.

De los resultados anteriores se deduce que el efecto de considerar una distribución de radios para los instantones debe aparecer en la forma de una potencia del momento en la constante de acoplamiento ligeramente menor que 4, que depende levemente del

⁶Corresponde al límite de pequeñas distancias, donde el perfil propuesto recupera la forma del instantón BPST (ver §6.5.1).

⁷Se han tomado valores de ρ y α_{DP} procedentes de los ajustes realizados en la aproximación de radios fijos; evidentemente podría haber leves diferencias respecto a un ajuste completo, aunque es de esperar que dichas diferencias sean subdominantes.

perfil concreto y de los detalles de la distribución. No obstante, el efecto más notable aparece en el factor numérico que multiplica la potencia de p , que se ve alterado en un 40 % aproximadamente.

Si se realizan los ajustes de la constante de acoplamiento con una potencia del momento libre, se obtienen los resultados recogidos en la tabla 8.5. Aparecen potencias menores que 4, si bien los errores no permiten concluir nada al respecto. La estabilidad de los valores centrales obtenidos para el exponente sugiere, de nuevo, la realización de un ajuste combinado de todos los retículos.

Retículo	potencia	$\chi^2/d.o.f.$
5.6(24 ⁴)	3.9 ± 0.4	0.61
5.7(32 ⁴)	3.9 ± 0.6	0.35
5.8(24 ⁴)	3.8 ± 0.5	0.01

Tabla 8.5: Potencia de p en un ajuste potencial de la constante de acoplamiento. Los grandes errores se deben al escaso número de puntos con los que se realiza el ajuste, cuyos errores están además muy correlacionados.

Realizando, por tanto, un ajuste combinado sobre todos los retículos disponibles, se obtiene una potencia ⁸ 3.84 ± 0.08 . Este valor, compatible con 4, apoya la aproximación de la distribución de radios de instantones por una delta de Dirac; sólo como aproximación de segundo orden, aparecen efectos debidos a la anchura finita de la distribución. En la estimación de la densidad, no obstante, aparecen efectos notables, dado que las estimaciones de la tabla 8.2 tendrían que ser corregidas por un factor ≈ 1.4 que se deriva de la expresión (8.40). Esto en la práctica se traduce en un incremento sustancial de las densidades medidas. En las condiciones actuales, no obstante no podemos sino considerar ésta como una fuente más de incertidumbre del valor de la densidad determinado.

Los resultados obtenidos merecen una profundización en el análisis de la relación (6.46). Con los resultados de radio y α_{DP} obtenidos, la relación daría una densidad del orden de 1 fm^{-4} , cualitativamente de acuerdo con nuestros resultados. Este acuerdo es más significativo si tenemos en cuenta que, para un perfil BPST, la integral del perfil en (6.46) diverge, por lo que la relación es muy sensible al perfil. Para Diakonov y

⁸La estimación del error se ha obtenido en este caso a partir de el método de $\chi^2_{tot} + 1$, y está claramente subestimado, al ser $\chi^2/d.o.f. \sim 3.8$.

Petrov [DP84], además, la relación (6.46) es sólo aproximada, por lo que un acuerdo en orden de magnitud con nuestro resultado es satisfactorio.

8.3.4. Exponentes críticos

Puesto que, según los resultados de la sección anterior, los instantones ofrecen una explicación a la dinámica de los campos en QCD a energías bajas, parece adecuado estudiar cómo sería el comportamiento en el infrarrojo profundo que predice un líquido de instantones, en comparación con otras técnicas habitualmente utilizadas a estos efectos, como el formalismo de Schwinger-Dyson [Dys49,Sch51]. Recientemente un gran número de autores utilizan este formalismo junto a simulaciones en retículo para el estudio no perturbativo de QCD y, en particular, para el comportamiento a energías muy bajas de las funciones de Green gluónicas [SAH97,AvS01,LS02,FA03].

Exponentes críticos en el formalismo Schwinger-Dyson

En este marco, argumentos bastante generales basados en la dominancia infrarroja de los campos fantasmas establecen que el comportamiento profundamente infrarrojo de los propagadores de gluón ($G_{gl}^{(2)}$) y fantasma ($G_{fa}^{(2)}$) están relacionados [WA01], estando su comportamiento para momento pequeño gobernado por un único parámetro, κ :

$$\begin{aligned} G_{gl\ \mu\nu}^{(2)ab}(p^2) &= -\delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{Z_{gl}(p^2)}{p^2} \quad ; \quad Z_{gl}(p^2) \sim (p^2)^{2\kappa} \\ G_{fa}^{(2)ab}(p^2) &= -\delta^{ab} \frac{Z_{fa}(p^2)}{p^2} \quad ; \quad Z_{fa}(p^2) \sim (p^2)^{-\kappa} . \end{aligned} \quad (8.41)$$

El valor de κ , que controla el régimen asintótico, puede acotarse basándose en las siguientes exigencias:

- El criterio de confinamiento de Kugo-Ojima [KO79,NO90] establece que para que exista confinamiento es suficiente que el propagador de fantasma sea más divergente para momento pequeño que el de una partícula sin masa (p^{-2}). Esto se traduce en limitar κ a valores positivos.
- Por otra parte, Zwanziger [Zwa91,CMT03] establece, a partir de argumentos sobre la proximidad del horizonte de Gribov en el régimen IR, que el comportamiento del propagador gluónico para momentos pequeños es menos singular que p^{-2} ($\kappa > 0$) y, probablemente, con un límite finito ($\kappa > 1/2$).

- Las ecuaciones de Schwinger-Dyson sin trincar proporcionan información acerca de las características generales del comportamiento en el infrarrojo profundo de las funciones de Green [WA01], a partir de las cuales puede establecerse $\kappa < 1$.

En conjunto, las exigencias anteriores limitan los valores posibles de κ a valores positivos, probablemente [Zwa91] en el intervalo $1/2 < \kappa < 1$. Suponiendo que el vértice gluón-fantasma es regular en el infrarrojo [LS02], se llega al resultado $\kappa \simeq 0.595$, corroborado por medio de técnicas basadas en el uso del Grupo de Renormalización Exacto (ERG) [PLN03, Kat04].

Exponentes críticos en un modelo instantónico

Si bien no se han extendido los cálculos al propagador de fantasma, es posible comparar los resultados de la sección anterior con los cálculos basados en la resolución de ecuaciones de Schwinger-Dyson truncadas. Para un modelo de un líquido de instantones, el comportamiento asintótico del propagador gluónico depende exclusivamente del perfil instantónico, obteniéndose (8.37), (8.39):

$$G_{gl}^{(2)}(p^2) \sim \begin{cases} p^{-2} & \Leftrightarrow \kappa = 0 & \text{para BPST} \\ p^2 & \Leftrightarrow \kappa = 1 & \text{para DP} \end{cases} \quad (8.42)$$

Así pues, el perfil BPST, (6.10), está en el límite de cumplir el criterio de confinamiento de Kugo-Ojima, mientras que el perfil modificado a partir de la ecuación diferencial de Diakonov y Petrov, (6.53), da el otro límite de la ventana de exponentes generalmente aceptados ($\kappa = 1$).

Siendo BPST, (6.10), el perfil con la caída más lenta posible en un marco instantónico, es de esperar que cualquier modificación de éste vaya en el sentido de reducir la singularidad del propagador gluónico en el origen. Para el perfil obtenido a partir de la ecuación aproximada de Diakonov y Petrov (6.45), el exponente se va al punto opuesto de la ventana, $\kappa = 1$, correspondiente a un propagador de gluón que se anula suavemente para $p \rightarrow 0$. Probablemente ninguno de ellos sea el más adecuado, si bien acotan el marco de los resultados posibles. El hecho de que DP resulte en un propagador que se apaga más rápido de lo deseable (si confiamos en los resultados de SDE), puede estar ligado a una sobrestimación de la intensidad de la interacción instantónica, como ha sido sugerido por Verbaarschot [Ver91].

Resulta de interés señalar que el propagador cae a $G^{(2)}(0) = 0$ para $\kappa \geq 1/2$, mientras que tiene un valor finito para $\kappa = 1/2$, lo que en el modelo instantónico se

alcanza para perfiles del tipo $1/(p^2 + \rho^2)^{3/2}$. Para caídas exponenciales como (6.53), el propagador se anula a impulsión nula. En los resultados numéricos no se observa esta caída, si bien resulta difícil eliminar la posibilidad de que sea debido a efectos de volumen finito ⁹. Este tipo de estudios ha sido realizado en SU(2) y tres dimensiones [CMT03], donde parece haber los primeros indicios de una supresión del propagador en el infrarrojo profundo.

8.4. Resumen de resultados y discusión

El resultado fundamental de este capítulo es la constatación de que a energías bajas las correlaciones vienen dadas exclusivamente por las propiedades del vacío de QCD, sin influencia de correlaciones cuánticas. Esto se ha puesto de manifiesto por medio de una comparación de las funciones de correlación gluónicas obtenidas no perturbativamente a través de técnicas reticulares con las que predice un modelo de líquido de instantones.

El comportamiento de la constante de acoplamiento a energías bajas ($p \lesssim 1\text{GeV}$) en el esquema MOM se ajusta a la predicción del modelo semiclásico, independiente del perfil y del tamaño de los instantones. Este resultado constata el carácter semiclásico de las funciones de correlación gluónicas a energías bajas. Los cálculos de la constante de acoplamiento y el propagador gluónico en configuraciones frías permiten verificar este resultado, a la vez que confirman la naturaleza instantónica de los campos tras realizar el proceso de enfriamiento.

Se ha verificado que la parametrización del perfil instantónico propuesta en (6.53) permite ajustar el comportamiento de las funciones de Green analizadas (propagador gluónico y vértice simétrico a tres gluones) en la región 0.4-0.9 GeV, derivándose del ajuste un valor del radio instantónico en buen acuerdo con el radio fenomenológico ($\rho \approx 0.3\text{ fm}$). Se ha estimado asimismo el parámetro α_{DP} , con $\alpha_{\text{DP}}\rho = 0.675(2)$.

Con respecto a la contribución instantónica a los condensados, el valor del parámetro $\alpha_{\text{DP}}\rho$ determinado indica que los valores de los condensados se modifican muy levemente por la variación del perfil (ver gráfica 6.2). Los valores de densidad obtenidos sugieren un valor del condensado $\langle A^2 \rangle$ mayor que el obtenido en la parte OPE, aunque la incertidumbre que afecta a la determinación de la densidad no permite extraer con-

⁹Para hacerlo sería necesario realizar simulaciones para volúmenes mucho mayores a la vez que se mantienen mallados pequeños

clusiones al respecto. En cuanto al condensado $\langle G^2 \rangle$, las estimaciones obtenidas en el capítulo anterior y en éste, si bien son superiores al valor que sugieren las estimaciones basadas en las reglas de suma (tabla 7.2), no están en desacuerdo con otros resultados en retículo [Neg99]. En conjunto permiten situar la densidad instantónica en torno a $5\text{-}8 \text{ fm}^{-4}$.

Para la determinación de la densidad a partir del análisis de la constante de acoplamiento en configuraciones enfriadas, se obtienen resultados que difieren de los obtenidos en el capítulo anterior, donde se determinó la densidad a partir de la localización geométrica de los instantones. A priori, esta diferencia puede interpretarse como una imprecisión del método de localización, que puede no encontrar ciertos instantones. No obstante, el hecho de que la densidad medida escale razonablemente bien con el radio de enfriamiento, $r_c = a\sqrt{n_c}$ (introducido en el capítulo anterior), sugiere más bien la contribución de otras soluciones clásicas a la ley p^4 obtenida para α_s . La contribución de los merones, caso de existir, se sumaría a la de los instantones, por lo que resultaría difícil separar ambas contribuciones.

Una posibilidad para diferenciarlas sería tratar de encontrar los merones de un modo similar al utilizado para los instantones en el capítulo anterior, a través de su influencia sobre la densidad de carga topológica, $Q(x)$, pero ésta, para el caso de merones, es divergente [CDG77], por lo que una determinación en retículo resulta más complicada que para el caso de los instantones. Los merones han sido analizados recientemente en relación al problema del confinamiento (ver [LNT04]), por lo que merecen un estudio más detallado, junto con otras soluciones clásicas de topología no trivial, como monopolos, vórtices, etc., a los que también se atribuye relación con el confinamiento.

En cuanto al cálculo de los exponentes críticos para el comportamiento en el límite $p \rightarrow 0$ de las funciones de Green, para un líquido de instantones se obtienen valores que no están en desacuerdo con las cotas que pueden establecerse basándose en argumentos generales, ($0 < \kappa < 1$), aunque los valores que se obtienen a partir de la resolución de un sistema de ecuaciones integro-diferenciales de Schwinger-Dyson (los últimos resultados parecen confirmar el valor $\kappa \approx 0.595$) no se reproducen con un modelo de instantones BPST ni la alternativa de Diakonov y Petrov. Las correlaciones entre las orientaciones de instantones, despreciadas en este trabajo (8.13), podrían alterar el comportamiento en el límite $p \rightarrow 0$, por lo que un estudio en profundidad de los exponentes críticos en un marco instantónico no debe obviar este punto.

Parte IV

Conclusiones y notas

Capítulo 9

Conclusiones y perspectivas

Contenidos

9.1. Resumen y conclusiones	171
9.2. Perspectivas	175

En este capítulo se presentará el resumen de los resultados obtenidos de los diferentes estudios que conforman esta tesis, analizando el conocimiento de la dinámica de la QCD que se infiere de ellos. A partir de ahí, se presentarán las conclusiones que se extraen del estudio, para finalizar con las perspectivas de continuación de este trabajo.

9.1. Resumen y conclusiones

En la parte II se ha estudiado el comportamiento de las funciones de Green gluónicas obtenidas no perturbativamente en un amplio rango de energías. Dichas funciones se han analizado en el régimen de energías intermedias en el marco de un desarrollo en producto de operadores. Esta parte del trabajo podría resumirse como sigue:

1. Una descripción basada exclusivamente en los resultados de la teoría de perturbaciones no es suficiente para describir la dependencia de la constante de acoplamiento y el propagador gluónico con el momento en un rango de energías de 3 a 10 GeV.

2. El análisis OPE muestra cómo en el *gauge* de Landau, la primera corrección a los resultados perturbativos procede de un condensado, $\langle A^2 \rangle$, que no es invariante *gauge* y que contribuye a los desarrollos de funciones de Green calculadas tras aplicar un procedimiento de fijación de *gauge* particular.
3. En el esquema $\widetilde{\text{MOM}}$, se ha obtenido una corrección en potencia proporcional a $\langle A^2 \rangle$ a través de la hipótesis de factorización, apoyada por el cálculo de la dimensión anómala. A través del ajuste de los resultados numéricos, se obtiene el valor $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 260(18)$ MeV, compatible con el determinado por el grupo *ALPHA*, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 238(19)$ MeV. Asimismo se obtiene un valor del condensado $\langle A^2 \rangle$ en buen acuerdo con el determinado para el esquema MOM, $\sqrt{\langle A_{R\mu}^2 \rangle} \approx 1.7(3)$ GeV.
4. Se ha verificado que los resultados, en los dos esquemas de renormalización utilizados, muestran una tendencia hacia la convergencia al elevar de 2 a 3 el número de bucles considerados en las expresiones perturbativas. Las estimaciones del valor del condensado $\langle A^2 \rangle$ procedentes del propagador y de la constante de acoplamiento se aproximan y los valores de $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ se hacen compatibles con el dado por el grupo *ALPHA* cuando se consideran las expresiones perturbativas a 3 bucles.
5. Los análisis realizados señalan la necesidad, al menos para las magnitudes estudiadas y en los esquemas utilizados, de desarrollar las expresiones perturbativas hasta tercer orden y con correcciones en potencias del momento. La importancia de dichas correcciones, incluso a energías tan altas como 10 GeV, es del 3%. Evidentemente los resultados dependen del proceso considerado, pero ponen de manifiesto los problemas de convergencia y asintoticidad de los desarrollos perturbativos en QCD.
6. Se ha determinado la relación existente entre las correcciones en potencia al propagador gluónico y el condensado $\langle A^2 \rangle$. Dicha relación permite, por una parte, definir lo que se entiende por valor no perturbativo del condensado y, por otra, indica que la dimensión anómala del operador $\langle A^2 \rangle$ no es un parámetro libre. Este último resultado se ha visto corroborado por una nueva identidad de Slavnov-Taylor identificada por Dudal *y col.* [*DVS03*].

Los resultados originales en esta parte del trabajo se refieren al esquema $\widetilde{\text{MOM}}$, en el que se han corroborado los obtenidos con anterioridad para el esquema MOM.

Además, se ha aclarado el significado del condensado $\langle A^2 \rangle$, a través de una definición de éste por medio de la integración del propagador gluónico (capítulo 5).



En la parte III de esta tesis, motivados por la presencia de un condensado $\langle A^2 \rangle$ de valor esperado no nulo, se ha estudiado la posibilidad de describir el vacío de QCD a partir de las soluciones clásicas del lagrangiano Yang-Mills. En esta parte del trabajo se han logrado los siguientes avances:

1. Se ha construido una parametrización del perfil instantónico que combina el comportamiento asintótico obtenido por Diakonov y Petrov para grandes distancias con el comportamiento para pequeñas distancias de la solución estándar (BPST), exigible a cualquier solución.
2. Se ha desarrollado un método para identificar los instantones presentes en una configuración de campos obtenida en retículo, haciendo uso de un método de enfriamiento para eliminar las fluctuaciones más energéticas de los campos *gauge*. Este método permite determinar la densidad y el radio de los instantones. La utilización del radio de enfriamiento definido por Ringwald y Schremp para determinar el efecto del proceso de enfriamiento sobre la configuración según el valor de la malla permite eliminar la dependencia de los resultados con ésta.
3. Se ha constatado la necesidad de extrapolar los resultados obtenidos como función del número de iteraciones de enfriamiento a la situación original, por el rápido decrecimiento de la densidad cerca de dicha situación. Para interpretar esta caída se construye un modelo para la evolución del líquido de instantones con el enfriamiento, aunque la alta compacidad del líquido de instantones cerca de la situación original y las correlaciones entre las posiciones de instantones y anti-instantones dificultan la extrapolación.
4. Se han calculado las funciones de Green en un líquido de instantones. El cociente de funciones de Green que define la constante de acoplamiento en el régimen de altas energías, $(G^{(3)})^2/(G^{(2)})^3$, resulta ser independiente del perfil de los instantones,

$$\alpha_s(p) = \frac{p^4}{18\pi n}, \quad (9.1)$$

cuando se considera que la influencia de la distribución de radios es despreciable. Este comportamiento se ha encontrado en la región infrarroja ($p \lesssim 1$ GeV) en nuestras simulaciones en retículo, permitiendo una determinación de la densidad de instantones en torno a 5 fm^{-4} .

5. Se ha constatado que, con el enfriamiento de la configuración, el régimen de validez de la ley p^4 se amplía a todo el rango de energías en el que calculamos la constante de acoplamiento. Esto confirma que las correlaciones cuánticas desaparecen tras el enfriamiento dando lugar a una configuración *clásica*.
6. Se ha comprobado que el perfil propuesto es capaz de describir la evolución del propagador gluónico y del vértice simétrico a tres gluones en una región de momentos 0.4-0.9 GeV, en la que $\alpha_s(p)$ se comporta de acuerdo con la ley clásica ($\propto p^4$). Estos ajustes favorecen un valor fenomenológico del radio ($r \approx 0.3 \text{ fm}$) y valores del parámetro $\alpha_{DP}\rho \approx 0.675$.



En conjunto, las partes II y III permiten señalar la presencia de cuatro regímenes en la evolución de la constante de acoplamiento con la energía (ver gráfica 8.1):

- Por encima de ≈ 2.6 GeV, donde la teoría de perturbaciones unida a un desarrollo OPE que incluya el efecto de los condensados permite dar una descripción precisa de la evolución de las funciones de Green con la energía. En esta región dominan las correlaciones cuánticas, aunque ya están presentes efectos no perturbativos a través del condensado $\langle A^2 \rangle$ que pueden incluirse en un marco OPE.
- Entre ≈ 0.9 GeV y ≈ 2.6 GeV coexisten las fluctuaciones cuánticas y la influencia de la estructura semiclásica del vacío, lo cual queda por el momento fuera de nuestros análisis.
- Entre ≈ 0.4 GeV y ≈ 0.9 GeV, la evolución de la constante de acoplamiento se ajusta muy bien a la ley de potencias p^4 que predice el modelo del líquido de instantones, indicando de que en este rango de energías las correlaciones son puramente clásicas, sin efecto de las correlaciones cuánticas.

- Por debajo de ≈ 0.2 GeV, los efectos de volumen finito debidos al volumen del retículo utilizado no están controlados. Cabe esperar que los efectos instantónicos dominen también en esta zona, si bien los términos cruzados procedentes de la correlación entre diferentes instantones no serán despreciables a muy bajas energías (distancias muy grandes).

Por medio de los instantones o, en general, de las características del vacío no perturbativo de la teoría, es posible hallar vínculos entre las propiedades de alta y baja energía de la QCD, como establecen las reglas de suma, por ejemplo. En este trabajo se ha estudiado la relación del condensado $\langle A^2 \rangle$, obtenido a partir de la parte OPE, con las propiedades del líquido de instantones en términos del cual describimos el vacío de la teoría.



En un marco más amplio, en este trabajo se han obtenido características de la dinámica de la interacción fuerte a partir de un estudio sin quarks. Puesto que la teoría de gluones interactuantes contiene al menos parte de la problemática de la interacción fuerte, el estudio en retículo de las teorías Yang-Mills puras sigue deparando un marco simple en el que mejorar nuestra comprensión de la fenomenología de bajas energías, en particular del problema del confinamiento.

Así pues, frente a la tendencia actual de realizar cálculos con fermiones dinámicos en el retículo que, evidentemente, constituye una fuente inigualable de resultados no perturbativos a comparar con la experiencia y sin la cual no podrían obtenerse gran cantidad de resultados fenomenológicos, las simulaciones *gauge* puras siguen siendo de utilidad.

9.2. Perspectivas

El comportamiento de la constante de acoplamiento y las funciones de Green gluónicas que se extraen de este trabajo sugieren la necesidad de un estudio teórico más profundo. Si recordamos la descomposición del campo gluónico realizada en el capítulo 8,

$$A_\mu^a(x) = g^{-1} B_\mu^a(x) + Q_\mu^a(x) , \quad (9.2)$$

donde $B_\mu^a(x)$ corresponde al fondo clásico y $Q_\mu^a(x)$ a la parte cuántica, la teoría de perturbaciones trata solamente la parte cuántica, despreciando el efecto que el campo clásico tiene sobre el cuántico. En el otro extremo está la aproximación semiclásica que hemos realizado en este trabajo (capítulo 8), en la que no consideramos la contribución de $Q_\mu^a(x)$ (siendo válida, por tanto, en la región de energías bajas).

La clave para poder describir la región intermedia, entre 0.9 y 2.5 GeV, puede estar en realizar una teoría de perturbaciones contando con la presencia de un campo clásico que debe ser tratado no perturbativamente. Hay algunos intentos de rehacer de este modo la teoría de perturbaciones [AR78, AR79, GR80, Ros86], pero es necesario comprender el modo en el que se superponen las fluctuaciones cuánticas al fondo clásico que, según los resultados de este trabajo, parecen dominar la dinámica de las funciones de Green analizadas en el régimen de energías $p \lesssim 1$ GeV.



Considerando aspectos particulares de esta tesis, los resultados sugieren una serie de líneas de investigación, algunas de ellas en curso, entre las que cabe destacar:

1. Respecto al desarrollo en producto de operadores, aunque se dispone de resultados preliminares, resultaría interesante extender el análisis a otras funciones de Green, por ejemplo al propagador de quark y al vértice quark-gluón o al propagador de fantasma y al vértice gluón-fantasma, donde aparecerían además correcciones en el condensado $\langle \bar{c}c \rangle$, por ejemplo. Asimismo, el análisis OPE debería realizarse para otras posibles fijaciones de *gauge*, donde el condensado no tenga las particularidades del *gauge* de Landau.
2. En la parte dedicada a los instantones se observa la necesidad de realizar simulaciones en retículo para volúmenes mayores y espaciados más finos, a fin de contar con mayor número de puntos en la región $p \lesssim 1$ GeV que nos permitan determinar con fiabilidad la densidad de instantones y las características del perfil de éstos. El método de enfriamiento con acciones mejoradas [FGS96] puede ayudar a comprender la estructura del vacío de QCD, si bien resulta necesario contar con mallados muy finos para evitar que los errores de discretización sean determinantes.

3. Sería interesante obtener resultados para configuraciones de campos *gauge* sin instantones, lo que permitiría aclarar qué ocurre en el infrarrojo si no hubiese un vacío no trivial. En este sentido, varias posibilidades basadas bien en una leve modificación de la acción, bien en artefactos del cálculo en retículo, están siendo estudiadas.

Apéndice A

Fórmulas de utilidad

A.1. Conversión de Λ_{QCD} entre diferentes esquemas de renormalización

Resulta sencillo convertir el parámetro Λ_{QCD} obtenido en el esquema MOM ($\widetilde{\text{MOM}}$) al esquema $\overline{\text{MS}}$, mucho más extendido, a fin de facilitar la comparación con otros resultados para este parámetro.

Partamos de dos esquemas de renormalización A y B cualesquiera, en los que la función β de Callan-Symanzik,

$$\beta(\alpha) = \frac{\partial \alpha(\mu)}{\partial \ln \mu} = -\frac{\beta_0}{2\pi} \alpha^2 - \frac{\beta_1}{(2\pi)^2} \alpha^3 - \frac{\beta_2}{(4\pi)^3} \alpha^4 - \dots, \quad (\text{A.1})$$

está definida por coeficientes β_i^A y β_i^B respectivamente, y la dimensión anómala del propagador:

$$\gamma(\alpha) = \frac{\partial \ln Z_3(\mu)}{\partial \ln \mu^2} = -\frac{\gamma_0}{4\pi} \alpha - \frac{\gamma_1}{(4\pi)^2} \alpha^2 - \frac{\gamma_2}{(4\pi)^3} \alpha^3 - \dots, \quad (\text{A.2})$$

por γ_i^A y γ_i^B respectivamente.

Es posible relacionar los coeficientes que definen un esquema con los del otro, a través de un desarrollo de la constante de acoplamiento en el esquema A en la del esquema B :

$$\alpha_A = \alpha_B + \frac{a}{4\pi} \alpha_B^2 + \frac{b}{(4\pi)^2} \alpha_B^3 + \mathcal{O}(\alpha_B^4), \quad (\text{A.3})$$

con a y b constantes que pueden calcularse de forma sencilla, como veremos a continuación, a partir de los coeficientes β_i y γ_i de ambos esquemas.

En efecto, ambos esquemas pueden relacionarse por medio de la expresión:

$$\beta_A(\alpha_A) \equiv \frac{d\alpha_A}{d \ln \mu} = \frac{d\alpha_A}{d\alpha_B} \frac{d\alpha_B}{d \ln \mu}, \quad (\text{A.4})$$

en la que sustituyendo (A.3), se obtiene que los dos primeros coeficientes son independientes del esquema y para los coeficientes de segundo orden se obtiene una relación:

$$\beta_2^B = \beta_2^A + 4a\beta_1 + 2(a^2 - b)\beta_0. \quad (\text{A.5})$$

Introduciendo el desarrollo (A.3) en la dimensión anómala (A.2), e identificando los términos en cada potencia de α , se obtiene asimismo que el primer coeficiente del desarrollo, γ_0 , es independiente del esquema, mientras que para los siguientes pueden establecerse las relaciones:

$$\gamma_1^B = \gamma_1^A + a\gamma_0, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_2^B = \gamma_2^A + 2a\gamma_1 + b\gamma_0. \quad (\text{A.7})$$

Las relaciones (A.5), (A.6) y (A.7) muestran que se puede establecer una relación cerrada entre los coeficientes β_2 , γ_1 y γ_2 , de modo que sólo dos entre ellos son independientes, es decir, para definir un esquema de renormalización basta con especificar dos de estos parámetros.

Con los resultados anteriores, tenemos los datos necesarios para calcular el cociente entre los valores del parámetro Λ_{QCD} en ambos esquemas, Λ_A/Λ_B . Puesto que éste es el único parámetro relevante en el régimen perturbativo, podemos calcular dicho cociente en la región de altas energías en la que un bucle es suficiente, de modo que haciendo uso de la expresión de α_s a un bucle, (3.38),

$$\Lambda_A = \mu e^{-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_A}}, \quad (\text{A.8})$$

se tiene:

$$\frac{\Lambda_A}{\Lambda_B} = \frac{\mu e^{-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_A}}}{\mu e^{-\frac{2\pi}{\beta_0 \alpha_B}}} \approx e^{\frac{a}{2\beta_0}}. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando a continuación la expresión (A.6) para despejar a , se llega a:

$$\frac{\Lambda_A}{\Lambda_B} \approx \text{Exp} \left[\frac{\gamma_1^B - \gamma_1^A}{2\beta_0 \gamma_0} \right], \quad (\text{A.10})$$

que con los coeficientes de la tabla 3.2, permite obtener el valor de Λ_{QCD} en el esquema $\overline{\text{MS}}$ a partir de su valor en los esquemas MOM y $\widetilde{\text{MOM}}$:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \approx 0.299931 \Lambda_{\text{MOM}} \quad (\text{A.11})$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} \approx 0.346246 \Lambda_{\widetilde{\text{MOM}}}. \quad (\text{A.12})$$

A.2. Tensores η de 't Hooft

Definición:

$$\eta_{\mu\nu}^a \quad (\bar{\eta}_{\mu\nu}^a) = \begin{cases} \epsilon_{a\mu\nu} & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ +(-)\delta_{a,\mu} & \nu = 4 \\ -(+)\delta_{a,\nu} & \mu = 4 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Propiedades:

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{b\mu\nu} = 4\delta_{ab}, \quad (\text{A.14})$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\mu\rho} = 3\delta_{\nu\rho}, \quad (\text{A.15})$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\mu\nu} = 12, \quad (\text{A.16})$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{a\rho\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad (\text{A.17})$$

$$\eta_{a\mu\nu}\eta_{b\mu\rho} = \delta_{ab}\delta_{\nu\rho} + \epsilon_{abc}\eta_{c\nu\rho}, \quad (\text{A.18})$$

$$\eta_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{b\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.19})$$

Las mismas relaciones son válidas para $\bar{\eta}_{\mu\nu}^a$, excepto:

$$\bar{\eta}_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{a\rho\lambda} = \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} - \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}. \quad (\text{A.20})$$

Relaciones adicionales:

$$\epsilon_{abc}\eta_{b\mu\nu}\eta_{c\rho\lambda} = \delta_{\mu\rho}\eta_{a\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\eta_{a\nu\rho} + \delta_{\nu\lambda}\eta_{a\mu\rho} - \delta_{\nu\rho}\eta_{a\mu\lambda}, \quad (\text{A.21})$$

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}\eta_{a\rho\sigma} = \delta_{\rho\lambda}\eta_{a\mu\nu} + \delta_{\rho\nu}\eta_{a\lambda\mu} + \delta_{\rho\mu}\eta_{a\nu\lambda}. \quad (\text{A.22})$$

A.2.1. Tensores de rotación en el espacio de color

Sea $B_\mu^{SU(3)} = \sum_{\alpha=1,8} B_\mu^\alpha \lambda_\alpha$ el campo *gauge* instantónico en SU(3) y $B_\mu^{SU(2)} = \sum_{a=1,3} B_\mu^a \tau_a$ su equivalente¹ en SU(2). El campo instantónico en SU(3) se define en este trabajo introduciendo el de SU(2) en un subgrupo de SU(3) y rotándolo, de la forma:

$$B_\mu^{SU(3)} = U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B_\mu^{SU(2)}) \\ 0 & & \end{pmatrix} U^\dagger, \quad (\text{A.23})$$

con U una matriz de rotación en SU(3). De forma equivalente es posible escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=1,8} B_\mu^\xi \lambda_\xi &= U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sum_{a=1,3} B_\mu^a \tau_a) \\ 0 & & \end{pmatrix} U^\dagger \\ &= \sum_{a=1,3} U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\tau_a) \\ 0 & & \end{pmatrix} U^\dagger B_\mu^a. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

El último término es trivialmente una matriz hermítica de traza nula, por lo que puede expresarse como combinación de los generadores del grupo SU(3):

$$U \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\tau_a) \\ 0 & & \end{pmatrix} U^\dagger = \sum_{\alpha=1,8} R^{\alpha a} \lambda_\alpha, \quad (\text{A.25})$$

de modo que el campo en SU(3) puede expresarse como:

$$B_\mu^\alpha = \sum_{a=1,3} R^{\alpha a} B_\mu^a, \quad (\text{A.26})$$

y las propiedades de $R^{\alpha a}$ se pueden extraer de forma simple de (A.25) conociendo las propiedades de los generadores de los grupos SU(2) y SU(3):

- Multiplicando (A.25) por si misma y tomando la traza, se tiene:

$$\sum_a R^{\alpha a} R^{a\beta} = \delta^{\alpha\beta}. \quad (\text{A.27})$$

¹ λ_α representa los generadores del grupo SU(3) y τ_a los de SU(2).

- A partir de las propiedades de los conmutadores de los generadores del grupo se llega a:

$$\sum_{abc} R^{a\alpha} R^{b\beta} R^{c\gamma} f_{abc} = \epsilon^{\alpha\beta\gamma} . \quad (\text{A.28})$$

Apéndice B

n_c	(5.6,24)	(5.8,24)	(6.0,24)	(5.8,32)	(6.0,32)	(6.2,32)	(6.4,32)
10	0.045(24)	0.58(9)	1.52(14)	0.60(8)	1.50(13)	2.20(25)	3.1(4)
20	0.079(17)	0.44(3)	0.94(6)	0.44(4)	0.94(7)	1.27(12)	2.03(18)
30	0.070(9)	0.337(22)	0.67(4)	0.33(3)	0.68(4)	0.91(7)	1.55(12)
40	0.055(6)	0.274(18)	0.55(3)	0.269(20)	0.56(3)	0.74(6)	1.27(10)
50	0.046(5)	0.225(13)	0.46(4)	0.229(14)	0.489(17)	0.58(5)	1.10(6)
60	0.039(3)	0.195(11)	0.386(18)	0.193(8)	0.437(16)	0.51(4)	0.98(5)
70	0.0325(20)	0.166(8)	0.370(20)	0.164(8)	0.388(15)	0.459(20)	0.89(7)
80	0.0280(17)	0.142(8)	0.332(18)	0.145(7)	0.360(16)	0.43(4)	0.82(5)
90	0.0239(14)	0.124(7)	0.316(21)	0.129(6)	0.323(20)	0.37(3)	0.77(5)
100	0.0210(12)	0.110(3)	0.277(22)	0.114(5)	0.287(16)	0.346(25)	0.72(4)
110	0.0191(10)	0.103(4)	0.262(16)	0.107(5)	0.262(13)	0.315(13)	0.66(4)
120	0.0173(10)	0.097(6)	0.235(13)	0.095(4)	0.236(11)	0.289(15)	0.61(4)
130	0.0163(8)	0.0865(16)	0.204(11)	0.089(4)	0.213(9)	0.274(17)	0.59(3)
140	0.0141(8)	0.082(4)	0.192(12)	0.082(4)	0.199(9)	0.253(22)	0.58(3)
150	0.0127(7)	0.075(6)	0.168(12)	0.072(4)	0.191(10)	0.239(12)	0.57(3)
160	0.0122(8)	0.065(5)	0.156(12)	0.068(3)	0.180(13)	0.222(8)	0.54(3)
170	0.0109(6)	0.061(3)	0.147(9)	0.062(3)	0.177(13)	0.212(12)	0.54(3)
180	0.0107(7)	0.0584(16)	0.129(9)	0.059(3)	0.165(14)	0.197(6)	0.52(3)
190	0.0100(7)	0.053(4)	0.120(7)	0.0556(25)	0.154(14)	0.191(10)	0.49(3)
200	0.0090(6)	0.0486(23)	0.115(6)	0.051(3)	0.145(16)	0.186(8)	0.48(3)

Tabla B.1: *Densidad de instantones (en fm^{-4}) en función del número de pasos de enfriamiento, n_c , para diferentes retículos (β, L) . A fin de obtener resultados con unidades se ha utilizado, de modo orientativo, el valor de la malla en la configuración termalizada, $n_c = 0$.*

n_c	(5.6,24)	(5.8,24)	(6.0,24)	(5.8,32)	(6.0,32)	(6.2,32)	(6.4,32)
10	0.590(8)	0.448(5)	0.401(7)	0.448(3)	0.398(4)	0.367(5)	0.310(6)
20	0.666(8)	0.498(8)	0.441(13)	0.495(5)	0.445(8)	0.430(9)	0.377(11)
30	0.719(11)	0.525(11)	0.460(17)	0.522(6)	0.465(9)	0.460(12)	0.405(14)
40	0.758(14)	0.549(13)	0.469(18)	0.543(7)	0.480(10)	0.484(15)	0.422(17)
50	0.792(17)	0.568(15)	0.485(20)	0.566(8)	0.498(11)	0.493(18)	0.432(18)
60	0.821(20)	0.593(18)	0.488(23)	0.585(10)	0.516(12)	0.513(20)	0.446(20)
70	0.845(24)	0.605(23)	0.504(25)	0.599(12)	0.530(14)	0.525(21)	0.449(22)
80	0.86(3)	0.612(25)	0.51(3)	0.612(13)	0.544(15)	0.539(25)	0.457(23)
90	0.89(3)	0.62(3)	0.54(3)	0.625(14)	0.553(16)	0.54(3)	0.46(3)
100	0.91(3)	0.64(3)	0.54(3)	0.634(15)	0.566(17)	0.55(3)	0.47(3)
110	0.91(4)	0.65(3)	0.56(4)	0.649(16)	0.575(18)	0.55(3)	0.47(3)
120	0.93(4)	0.67(3)	0.57(4)	0.651(17)	0.584(20)	0.57(4)	0.46(3)
130	0.97(4)	0.66(3)	0.55(4)	0.668(19)	0.586(20)	0.58(4)	0.47(3)
140	0.96(5)	0.69(4)	0.55(5)	0.680(21)	0.591(21)	0.58(4)	0.47(3)
150	0.97(5)	0.69(4)	0.54(4)	0.685(22)	0.605(22)	0.56(4)	0.48(3)
160	1.00(5)	0.68(4)	0.55(5)	0.695(24)	0.615(23)	0.57(4)	0.48(3)
170	1.00(6)	0.70(5)	0.55(5)	0.691(24)	0.634(24)	0.57(4)	0.49(3)
180	1.02(6)	0.72(5)	0.56(5)	0.698(24)	0.64(3)	0.57(4)	0.49(3)
190	1.02(6)	0.72(6)	0.57(5)	0.71(3)	0.65(3)	0.59(4)	0.49(4)
200	1.01(6)	0.73(5)	0.59(4)	0.73(3)	0.67(3)	0.58(4)	0.49(3)

Tabla B.2: Radio promedio de los instantones (en fm) en función del número de pasos de enfriamiento, n_c , para diferentes retículos (β, L) .

n_c	(5.6,24)	(5.8,24)	(6.0,24)	(5.8,32)	(6.0,32)	(6.2,32)	(6.4,32)
10	1,21(13)	0,65(6)	0,31(5)	0,37(7)	0,56(4)	0,49(3)	0,45(2)
20	1,07(11)	0,70(7)	0,35(6)	0,40(8)	0,62(5)	0,57(4)	0,51(3)
30	1,10(12)	0,74(9)	0,37(8)	0,42(9)	0,67(7)	0,61(7)	0,56(6)
40	1,10(14)	0,71(10)	0,32(8)	0,38(10)	0,63(8)	0,58(7)	0,52(7)
50	1,22(13)	0,81(8)	0,40(8)	0,45(9)	0,72(6)	0,67(6)	0,61(5)
60	1,20(15)	0,76(11)	0,35(9)	0,40(10)	0,68(9)	0,62(8)	0,58(8)
70	1,24(16)	0,79(11)	0,36(9)	0,42(11)	0,70(9)	0,65(8)	0,59(8)
80	1,34(15)	0,89(10)	0,45(10)	0,51(11)	0,79(8)	0,74(8)	0,72(9)
90	1,26(19)	0,78(14)	0,33(12)	0,38(13)	0,66(12)	0,63(12)	0,62(13)
100	1,42(15)	0,96(10)	0,50(11)	0,53(11)	0,82(7)	0,80(7)	0,80(10)
110	1,46(16)	0,96(11)	0,50(11)	0,54(12)	0,84(9)	0,82(9)	0,84(12)
120	1,48(17)	0,97(12)	0,46(11)	0,53(12)	0,84(9)	0,82(9)	0,84(11)
130	1,44(18)	0,90(12)	0,44(11)	0,47(11)	0,79(9)	0,77(9)	0,76(10)
140	1,51(20)	0,91(14)	0,46(13)	0,48(13)	0,81(12)	0,80(12)	0,75(12)
150	1,61(19)	1,03(13)	0,54(13)	0,56(13)	0,88(10)	0,90(11)	0,80(10)
160	1,57(21)	0,96(14)	0,48(13)	0,50(13)	0,83(11)	0,87(12)	0,74(10)
170	1,69(20)	1,07(11)	0,59(12)	0,57(11)	0,91(7)	0,96(10)	0,81(7)
180	1,69(21)	1,10(14)	0,64(15)	0,58(13)	0,92(10)	0,97(12)	0,83(10)
190	1,74(20)	1,17(14)	0,69(15)	0,58(11)	0,93(8)	0,97(10)	0,87(10)
200	1,73(24)	1,16(18)	0,63(18)	0,53(14)	0,87(12)	0,90(13)	0,86(15)

Tabla B.3: Distancias entre pares más próximos de instantones, $I - I$ o $\bar{I} - \bar{I}$ (en fm), en función del número de pasos de enfriamiento, n_c , para diferentes retículos (β, L).

n_c	(5.6,24)	(5.8,24)	(6.0,24)	(5.8,32)	(6.0,32)	(6.2,32)	(6.4,32)
10	1,15(12)	0,60(5)	0,29(5)	0,35(6)	0,51(3)	0,46(3)	0,44(3)
20	0,99(10)	0,64(6)	0,32(5)	0,37(7)	0,57(4)	0,52(3)	0,49(3)
30	1,03(12)	0,69(8)	0,34(8)	0,40(9)	0,61(7)	0,56(6)	0,52(6)
40	1,03(13)	0,66(9)	0,29(8)	0,35(9)	0,57(7)	0,53(7)	0,48(6)
50	1,16(12)	0,77(8)	0,37(7)	0,43(9)	0,67(6)	0,63(5)	0,57(4)
60	1,15(15)	0,74(10)	0,32(8)	0,39(10)	0,63(8)	0,59(8)	0,52(7)
70	1,21(16)	0,78(11)	0,33(9)	0,41(11)	0,65(8)	0,60(8)	0,53(7)
80	1,34(15)	0,90(11)	0,43(9)	0,50(11)	0,75(8)	0,70(8)	0,62(7)
90	1,25(19)	0,79(14)	0,30(11)	0,37(13)	0,63(12)	0,58(11)	0,49(10)
100	1,47(16)	0,95(10)	0,45(9)	0,53(11)	0,80(7)	0,74(6)	0,64(5)
110	1,51(17)	0,97(11)	0,45(10)	0,54(12)	0,83(9)	0,81(11)	0,66(7)
120	1,55(18)	1,00(12)	0,44(10)	0,55(13)	0,84(9)	0,81(11)	0,72(9)
130	1,53(19)	0,94(12)	0,39(9)	0,49(12)	0,79(9)	0,70(8)	0,70(12)
140	1,64(22)	1,14(25)	0,40(12)	0,50(14)	0,80(12)	0,72(11)	0,70(13)
150	1,74(20)	1,06(13)	0,60(18)	0,59(13)	0,88(10)	0,81(9)	0,81(13)
160	1,72(22)	1,19(24)	0,54(18)	0,54(14)	0,82(11)	0,75(10)	0,83(16)
170	1,84(21)	1,28(23)	0,61(17)	0,62(13)	0,89(7)	0,85(7)	0,86(13)
180	1,88(22)	1,31(24)	0,62(18)	0,63(14)	0,91(10)	0,97(16)	0,82(13)
190	1,90(22)	1,44(25)	0,62(17)	0,64(13)	0,92(8)	0,92(10)	0,94(16)
200	2,2(4)	1,39(27)	0,55(19)	0,60(16)	0,86(12)	0,93(17)	0,88(19)

Tabla B.4: Distancias entre pares más próximos de instantones, $I - \bar{I}$ (en fm), en función del número de pasos de enfriamiento, n_c , para diferentes retículos (β, L) .

Apéndice C

Cálculo de errores: método de *Jackknife*

Los datos procedentes de simulaciones numéricas comparten con algunos casos experimentales la existencia de correlaciones entre las medidas. Esto supone un problema para la utilización del método estándar de mínimos cuadrados.

El procedimiento para obtener resultados en nuestro caso es producir configuraciones pesadas por una determinada acción, tras lo cual realizamos una serie de medidas,

$$\left\{ G_i^{(2)}(n^2 = 1), G_i^{(2)}(n^2 = 2), \dots G_i^{(2)}(n^2 = \dots) \right\} , \quad (\text{C.1})$$

y continuamos produciendo configuraciones (etiquetadas en la expresión anterior por el índice i) a partir de las cuales podemos obtener el valor medio y su incertidumbre para cada n^2 .

Puesto que las estimaciones del propagador para los distintos n^2 proceden de la misma configuración, es muy probable que si $G^{(2)}(n^2 = 1)$ se desvía por encima del valor medio, $G^{(2)}(n^2 = 2)$ también lo haga.

Así, si queremos ajustar los datos obtenidos por medio de alguna expresión teórica, el método habitual de minimización χ^2 , que supone que los errores son estadísticamente independientes, no es válido. Para este tipo de casos, el método de Jackknife [Efr82] propone una alternativa que permite realizar una propagación de los errores de las medidas a los parámetros evitando la influencia de las correlaciones entre los errores de las medidas.

Si partimos de un conjunto de N medidas, el método de Jackknife comienza por dividirlo en N conjuntos de $N - 1$ medidas, eliminando una de las medidas en cada una. A continuación se realiza el ajuste en cada uno de los N subconjuntos, obteniéndose N valores de cada parámetro del ajuste, por ejemplo:

$$\{m_{J_1}, m_{J_2}, \dots, m_{J_N}\} . \quad (\text{C.2})$$

La desviación estándar es entonces:

$$\sigma^2 = (N - 1) \sum_{i=1}^N (m_i - m)^2 / N , \quad (\text{C.3})$$

con m el resultado del ajuste sobre el conjunto completo de configuraciones. De esta forma, se puede asimismo evaluar la desviación introducida por el muestreo, si el promedio sobre los m_i es diferente de m .

En el caso mucho más simple de obtener la desviación del valor medio de N medidas de una cantidad, el método de Jackknife proporciona el mismo resultado que el que se obtiene tratando todas las medidas conjuntamente, con lo que no hay diferencia entre un método u otro. No es así en casos más complejos, donde la utilización del método de Jackknife puede suponer una enorme ventaja.

Nota:

Los cálculos en retículo utilizados en esta tesis han sido realizados gracias a los equipos APE100 (Quadrics) y APEmille [Bat91, Bar02] situados en el Laboratoire de Physique Théorique (LPT) de Orsay. APE (*Array Processor Experiment*¹) es un proyecto que canaliza actualmente los esfuerzos de DESY, INFN y el LPT para desarrollar computadores dedicados a las simulaciones de QCD en retículo, consistentes en redes de procesadores conectados en tres dimensiones con topología toroidal. Ambos equipos funcionan bajo el protocolo SIMD (todos los nodos ejecutan la misma orden en cada momento sobre conjuntos de datos diferentes). Actualmente el proyecto APE está desarrollando APENEXT [Bod03], una nueva generación de máquinas con posibilidad de ejecutar órdenes diferentes en cada procesador, y una capacidad de cálculo de varios TFlop.

¹Véase <http://www-zeuthen.desy.de/ape/> para las últimas noticias acerca del proyecto APE así como los detalles de los procesadores.

Bibliografía

- [Adl69] Stephen L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426–2438, 1969.
- [AHP97] B. Alles, D. Henty, H. Panagopoulos, C. Parrinello, C. Pittori y D.G. Richards α_s from the nonperturbatively renormalised lattice three gluon vertex. *Nucl. Phys.*, B502:325–342, 1997.
- [AK01] A. Ali Khan y col. Topological susceptibility in lattice QCD with two flavors of dynamical quarks. *Phys. Rev.*, D64:114501, 2001.
- [AR78] D. Amati y A. Rouet. Gauge unambiguous quantization of Yang-Mills theory around classical solutions. *Phys. Lett.*, B73:39, 1978.
- [AR79] D. Amati y A. Rouet. Renormalization of Yang-Mills theory developed around an instanton. *Nuovo Cim.*, A50:265, 1979.
- [AS84] M. F. Atiyah y I. M. Singer. Dirac operators coupled to vector potentials. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 81:2597–2600, 1984.
- [AvS01] Reinhard Alkofer y Lorenz von Smekal. The infrared behavior of QCD Green’s functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys. Rept.*, 353:281, 2001.
- [Baa92] Pierre van Baal. More (thoughts on) Gribov copies. *Nucl. Phys.*, B369:259–275, 1992.
- [Bar02] A. Bartoloni y col. Status of apemille. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 106:1043–1045, 2002.

- [Bat91] C. Battista. The APE100 supercomputer. 1991. Prepared for 9th International Conference on Computing in High-energy Physics (CHEP 91), Tsukuba, Japan, 11-15 Mar 1991.
- [BB01] C. Bagnuls y C. Bervillier. Exact renormalization group equations: An introductory review. *Phys. Rept.*, 348:91, 2001.
- [BBG98] D. Becirevic, P. Boucaud, L. Giusti, J.P. Leroy, V. Lubicz, G. Martinelli, F. Mescia y F. Rapuano. Light hadron spectroscopy on the lattice with the non-perturbatively improved Wilson action. (hep-lat/9809129), 1998.
- [BBL99] D. Becirevic, P. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero y C. Roiesnel. Asymptotic behaviour of the gluon propagator from lattice QCD. *Phys. Rev.*, D60:094509, 1999.
- [BBL00] D. Becirevic, Ph. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero y Roiesnel C. Asymptotic scaling of the gluon propagator on the lattice. *Phys. Rev.*, D61:114508, 2000.
- [BBR00] P. Boucaud, G. Burgio, F. Di Renzo, J.P. Leroy, J. Micheli, C. Parrinello, O. Pène, C. Pittori, J. Rodríguez-Quintero, C. Roiesnel y K. Sharkey. Lattice calculation of $1/p^{**2}$ corrections to $\alpha(s)$ and of $\Lambda(\text{QCD})$ in the MOM scheme. *JHEP*, 04:006, 2000.
- [BCG77] C.W. Bernard, Norman H. Christ, Alan H. Guth y Erick J. Weinberg. Pseudoparticle parameters for arbitrary gauge groups. *Phys. Rev.*, D16:2967, 1977.
- [Ben99] M. Beneke. Renormalons. *Phys. Rept.*, 317:1–142, 1999.
- [BFL00] Frederic D. R. Bonnet, Patrick Fitzhenry, Derek B. Leinweber, Mark R. Stanford, y Anthony G. Williams. Calibration of smearing and cooling algorithms in $SU(3)$ -color gauge theory. *Phys. Rev.*, D62:094509, 2000.
- [BIN97] R. C. Brower, T. L. Ivanenko, J. W. Negele y K. N. Orginos. Instanton distribution in quenched and full QCD. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 53:547–549, 1997.
- [BJ69] J. S. Bell y R. Jackiw. A pcac puzzle: $\pi_0 \rightarrow \gamma \gamma$ in the sigma model. *Nuovo Cim.*, A60:47–61, 1969.

- [BLM98a] P. Boucaud, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pène y C. Roiesnel. Lattice calculation of $\alpha(s)$ in momentum scheme. *JHEP*, 10:017, 1998.
- [BLM98b] P. Boucaud, J. P. Leroy, J. Micheli, O. Pène y C. Roiesnel. Three-loop beta function and non-perturbative $\alpha(s)$ in asymmetric momentum scheme. *JHEP*, 12:004, 1998.
- [BLM02a] P. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, Rodríguez-Quintero J. y Roiesnel C. Preliminary calculation of $\alpha(s)$ from Green functions with dynamical quarks. *JHEP*, 01:046, 2002.
- [BLM02b] P. Boucaud, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, Rodríguez-Quintero J. y Roiesnel C. Unquenched calculation of $\alpha(s)$ from Green functions: Progress report. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 106:266–268, 2002.
- [BNP92] E. Braaten, Stephan Narison y A. Pich. QCD analysis of the tau hadronic width. *Nucl. Phys.*, B373:581–612, 1992.
- [Bod03] F. Bodin y col. apenext: A multi-tflops computer for simulations in lattice gauge theory. *ECONF*, C030626:FRAP15, 2003.
- [Bor04] Artan Borici. Computational methods for the fermion determinant and the link between overlap and domain wall fermions. Talk given at 3rd International Workshop on Numerical Analysis and Lattice QCD, Edinburgh, Scotland, 30 Jun - 4 Jul 2003 (hep-lat/0402035).
- [BPS75] A. A. Belavin, Alexander M. Polyakov, A. S. Shvarts y Yu. S. Tyupkin. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. *Phys. Lett.*, B59:85–87, 1975.
- [BRM98] G. Burgio, F. Di Renzo, G. Marchesini y E. Onofri. Λ^{*2} -contribution to the condensate in lattice gauge theory. *Phys. Lett.*, B422:219–226, 1998.
- [BRS75] C. Becchi, A. Rouet y R. Stora. Renormalization of the abelian higgs-kibble model. *Commun. Math. Phys.*, 42:127–162, 1975.
- [BS93] Gunnar S. Bali y Klaus Schilling. Running coupling and the lambda parameter from SU(3) lattice simulations. *Phys. Rev.*, D47:661–672, 1993.

- [BSD02] P. Boucaud, F. De Soto, A. Donini, J.P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero Instantons and $\langle A^2 \rangle$ condensate. *Phys. Rev.*, D66:034504, 2002.
- [BSD03a] P. Boucaud, F. De Soto, A. Donini, J.P. Leroy, A. Le Yaouanc, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, J. Rodríguez-Quintero OPE and power corrections to the QCD coupling constant. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 114:117–121, 2003.
- [BSD03b] P. Boucaud, F. De Soto, A. Donini, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène y J. Rodríguez-Quintero Quark propagator and vertex: Systematic corrections of hypercubic artifacts from lattice simulations. *Phys. Lett.*, B575:256–267, 2003.
- [BSY03a] P. Boucaud, F. De Soto, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène y J. Rodríguez-Quintero The strong coupling constant at small momentum as an instanton detector. *JHEP*, 04:005, 2003.
- [BSY03b] P. Boucaud, F. De Soto, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, y J. Rodríguez-Quintero Evidences for instantons effects in Landau lattice Green functions. *In preparation*, (hep-ph/0312332), 2003.
- [BSY03c] P. Boucaud, F. De Soto, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, H. Moutarde, O. Pène, y J. Rodríguez-Quintero A transparent expression of the A^{**2} -condensate's renormalization *Phys. Rev.*, D67:074027, 2003.
- [BYL00] P. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, and J. Rodríguez-Quintero Consistent OPE description of gluon two point and three point Green function? *Phys. Lett.*, B493:315–324, 2000.
- [BYL01] P. Boucaud, A. Le Yaouanc, J.P. Leroy, J. Micheli, O. Pène, and J. Rodríguez-Quintero Testing Landau gauge OPE on the lattice with a A^2 condensate. *Phys. Rev.*, D63:114003, 2001.
- [CDG77] Jr. Callan, Curtis G., Roger F. Dashen y David J. Gross. A mechanism for quark confinement. *Phys. Lett.*, B66:375, 1977.
- [CDG78] Jr. Callan, Curtis G., Roger F. Dashen, David J. Gross, Frank Wilczek, and A. Zee. The effect of instantons on the heavy quark potential. *Phys. Rev.*, D18:4684, 1978.

- [CDG80] C.G. Callan., Roger F. Dashen y David J. Gross. Are instantons found? *Phys. Rev. Lett.*, 44:435, 1980.
- [CGH94] M. C. Chu, J. M. Grandy, S. Huang y J. W. Negele. Evidence for the role of instantons in hadron structure from lattice QCD. *Phys. Rev.*, D49:6039–6050, 1994.
- [CLS99] Stefano Capitani, Martin Luscher, Rainer Sommer y Hartmut Wittig. Non-perturbative quark mass renormalization in quenched lattice QCD. *Nucl. Phys.*, B544:669–698, 1999.
- [CM82] N. Cabibbo y E. Marinari. A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories. *Phys. Lett.*, B119:387–390, 1982.
- [CMT03] Attilio Cucchieri, Tereza Mendes y Andre R. Taurines. SU(2) Landau gluon propagator on a 140×3 lattice. *Phys. Rev.*, D67:091502, 2003.
- [Col75] Sidney R. Coleman. Classical lumps and their quantum descendents. 1975. Lectures delivered at Int. School of Subnuclear Physics, Ettore Majorana, Erice, Sicily, Jul 11-31, 1975.
- [CR00] K. G. Chetyrkin y A. Retey. Three-loop three-linear vertices and four-loop MOM beta functions in massless QCD. (hep-ph/0007088), 2000.
- [Cre83] M. Creutz. *Quarks, gluons and lattices*. Cambridge, Uk: Univ. Pr. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics), (1983).
- [CS00] K. G. Chetyrkin y T. Seidensticker. Two loop QCD vertices and three loop MOM beta functions. *Phys. Lett.*, B495:74–80, 2000.
- [Cuc97] Attilio Cucchieri. Gribov copies in the minimal Landau gauge: The influence on gluon and ghost propagators. *Nucl. Phys.*, B508:353–370, 1997.
- [Cuc98] Attilio Cucchieri. Numerical study of the fundamental modular region in the minimal Landau gauge. *Nucl. Phys.*, B521:365–379, 1998.
- [DGH92] J. F. Donoghue, E. Golowich y Barry R. Holstein. *Dynamics of the standard model*, volume 2. Cambridge, UK: Univ. Pr., (1992).
- [Dia03] Dmitri Diakonov. Instantons at work. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 51:173–222, 2003.

- [DOT98] A. I. Davydychev, P. Osland y O. V. Tarasov. Two-loop three-gluon vertex in zero-momentum limit. *Phys. Rev.*, D58:036007, 1998.
- [DP84] Dmitri Diakonov y V. Yu. Petrov. Instanton based vacuum from Feynman variational principle. *Nucl. Phys.*, B245:259, 1984.
- [DV03] David Dudal y Henri Verschelde. On ghost condensation, mass generation and abelian dominance in the maximal abelian gauge. *J. Phys.*, A36:8507–8516, 2003.
- [DVG04] D. Dudal, H. Verschelde, J.A. Gracey, V.E.R. Lemes, M.S. Sarandy, R.F. Sobreiro y S.P. Sorella. Dynamical gluon mass generation from in linear covariant gauges. *JHEP*, 01:044, 2004.
- [DVS03] D. Dudal, H. Verschelde y S. P. Sorella. The anomalous dimension of the composite operator A^{**2} in the Landau gauge. *Phys. Lett.*, B555:126–131, 2003.
- [Dys49] F. J. Dyson. The S matrix in quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 75:1736–1755, 1949.
- [DZ91] G. Dell’Antonio y D. Zwanziger. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. *Commun. Math. Phys.*, 138:291–299, 1991.
- [Efr82] Bradley Efron. *The jackknife, the bootstrap, and other resampling plans*. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, (1982).
- [EJ01] M. Eidemuller y M. Jamin. Charm quark mass from QCD sum rules for the charmonium system. *Phys. Lett.*, B498:203–210, 2001.
- [FA03] Christian S. Fischer y Reinhard Alkofer. Non-perturbative propagators, running coupling and dynamical quark mass of Landau gauge QCD. *Phys. Rev.*, D67:094020, 2003.
- [Fad67] L. D. Faddeev y V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Phys. Lett.*, B25:29–30, 1967.
- [FGS96] Philippe de Forcrand, Margarita García Pérez y Ion-Olimpiu Stamatescu. Improved cooling algorithm for gauge theories. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 47:777–780, 1996.

- [FP01] Philippe de Forcrand y Michele Pepe. Laplacian gauge and instantons. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 94:498–501, 2001.
- [GJ86] J. Glimm y A. Jaffe. Collected papers. Vol. 2: Constructive quantum field theory. Selected papers. 1986. Boston, Usa: Birkhaeuser (1985) 533 P. (Contemporary Physicists).
- [GM96] A. González-Arroyo y A. Montero. Do classical configurations produce confinement? *Phys. Lett.*, B387:823–828, 1996.
- [GPS99] Margarita García Pérez, Owe Philipsen y Ion-Olimpiu Stamatescu. Cooling, physical scales and topology. *Nucl. Phys.*, B551:293–313, 1999.
- [GPT02] L. Giusti, S. Petrarca, B. Taglienti y N. Tantalo. Remarks on the gauge dependence of the RI/MOM renormalization procedure. *Phys. Lett.*, B541:350–355, 2002.
- [GR80] S. Gauthier y A. Rouet. Pure Yang-Mills perturbation theory in the instanton sector compared to the zeroth sector. *Nuovo Cim.*, A58:141, 1980.
- [Gri78] V. N. Gribov. Quantization of non-abelian gauge theories. *Nucl. Phys.*, B139:1, 1978.
- [Gru84] G. Grunberg. Renormalization scheme independent QCD and QED: The method of effective charges. *Phys. Rev.*, D29:2315, 1984.
- [Gua01] Marco Guagnelli y col. Non-perturbative results for the coefficients $b(m)$ and $b(A)$ - $b(P)$ in $O(a)$ improved lattice QCD. *Nucl. Phys.*, B595:44–62, 2001.
- [GSZ01] F.V. Gubarev, L. Stodolsky y V.I. Zakharov. On the significance of the quantity A^2 . *Phys. Rev. Lett.* 86:2220-2222, 2001.
- [GZ01] F. V. Gubarev y Valentin I. Zakharov. On the emerging phenomenology of $\langle (A_\mu^a)^2_{min} \rangle$. *Phys. Lett.*, B501:28–36, 2001.
- [Hag02] K. Hagiwara y col. Review of particle physics. *Phys. Rev.*, D66:010001, 2002.

- [HDD02] I. Horvath, S.J. Dong, T. Draper, N. Isgur, F.X. Lee, K.F. Liu, J. McCune, Thacker H.B. y J.B. Zhang. Local chirality of low-lying dirac eigenmodes and the instanton liquid model. *Phys. Rev.*, D66:034501, 2002.
- [HDD03] I. Horvath, S.J. Dong, T. Draper, F.X. Lee, , K.F. Liu, N. Mathur, J.B. Zhang y H.B. Thacker. Low-dimensional long-range topological structure in the QCD vacuum. 2003.
- [Hoe86] Jaap Hoek. Cooling of SU(3) lattice gauge field configurations. *Comput. Phys. Commun.*, 39:21, 1986.
- [HP81] H. Hamber y G. Parisi. Numerical estimates of hadronic masses in a pure SU(3) gauge theory. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1792, 1981.
- [IM81] E. M. Ilgenfritz y M. Muller-Preussker. Statistical mechanics of the interacting Yang-Mills instanton gas. *Nucl. Phys.*, B184:443, 1981.
- [IZ03] B. L. Ioffe y K. N. Zyablyuk. Gluon condensate in charmonium sum rules with 3-loop corrections. *Eur. Phys. J.*, C27:229–241, 2003.
- [Jan02] Karl Jansen. Overlap and domain wall fermions: What is the price of chirality? *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 106:191–192, 2002.
- [Ji95] Xiang-Dong Ji. Gluon condensate from lattice QCD. (hep-ph/9506413), 1995.
- [Kan98] Kazuyuki Kanaya. An introduction to finite temperature quantum chromodynamics on the lattice. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 131:73–105, 1998.
- [Kap92] David B. Kaplan. A method for simulating chiral fermions on the lattice. *Phys. Lett.*, B288:342–347, 1992.
- [Kat04] Junya Kato. Infrared non-perturbative propagators of gluon and ghost via exact renormalization group. (hep-th/0401068), 2004.
- [Kis99] V. V. Kiselev. Gluon condensate term in heavy quark mass. (hep-ph/9907407), 1999.
- [KO79] Taichiro Kugo y Izumi Ojima. Local covariant operator formalism of nonabelian gauge theories and quark confinement problem. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 66:1, 1979.

- [Kon00] Kei-Ichi Kondo y Toru Shinohara. Abelian dominance in low-energy gluodynamics due to dynamical mass generation. *Phys. Lett.*, B491:263–274, 2000.
- [Kon01] Kei-Ichi Kondo. Vacuum condensate of mass dimension 2 as the origin of mass gap and quark confinement. *Phys. Lett.*, B514:335–345, 2001.
- [Kon03a] Kei-Ichi Kondo. Consistent power corrections to ultraviolet asymptotic solutions in Yang-Mills theory. *Phys. Lett.* B560:44-58, 2003.
- [Kon03b] Kei-Ichi Kondo. A physical meaning of mixed gluon-ghost condensate of mass dimension two. *Phys. Lett.*, B572:210–215, 2003.
- [KS75] John B. Kogut y Leonard Susskind. Hamiltonian formulation of wilson’s lattice gauge theories. *Phys. Rev.*, D11:395, 1975.
- [Lae03] E. Laermann. Finite temperature lattice QCD. *Acta Phys. Polon.*, B34:4987–4996, 2003.
- [Lan00] Kurt Langfeld. The gluon condensate from gauge invariant vortex vacuum texture. Contributed to 4th International Conference on Quark Confinement and the Hadron Spectrum, Vienna, Austria, 3-8 Jul 2000 (hep-lat/0008019).
- [Lan01] Kurt Langfeld. SU(2) gluon propagators from the lattice: A preview. Talk given at ECT* Collaboration Meeting on Dynamical Aspects of the QCD Phase Transition, Trento, Italy, 12-15 Mar 2001 (hep-lat/0104003)
- [LM93] G. Peter Lepage y Paul B. Mackenzie. On the viability of lattice perturbation theory. *Phys. Rev.*, D48:2250–2264, 1993.
- [LNT04] F. Lenz, J. W. Negele y M. Thies. Confinement from merons. *Phys. Rev.* D69:074009, 2004.
- [LO92] Martin Lavelle y Michael Oleszczuk. The operator product expansion of the QCD propagators. *Mod. Phys. Lett.*, A7:3617–3630, 1992.
- [Lom02] Maria-Paola Lombardo. An introduction to lattice QCD at non-zero temperature and density. Lecture given at “Workshop on Quark Gluon Plasma and Relativistic Heavy Ions”, Frascati, Italy, 14-18 Jan 2002 (hep-lat/0210040).

- [LSW98] Derek B. Leinweber, Jon Ivar Skullerud, Anthony G. Williams y Claudio Parrinello. Gluon propagator in the infrared region. *Phys. Rev.*, D58:031501, 1998.
- [LS02] Christoph Lerche y Lorenz von Smekal. On the infrared exponent for gluon and ghost propagation in Landau gauge QCD. *Phys. Rev.*, D65:125006, 2002.
- [Mic94] C. Michael. The QCD spectrum. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 42:147:161 (1995).
- [MM94] I. Montvay y G. Munster. *Quantum fields on a lattice*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (Cambridge monographs on mathematical physics), (1994).
- [MO90] Jeffrey E. Mandula y Michael C. Ogilvie. A possible resolution of the lattice Gribov ambiguity. *Phys. Rev.*, D41:2586, 1990.
- [MPR81] E. Marinari, G. Parisi y C. Rebbi. Computer estimates of meson masses in SU(2) lattice gauge theory. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1795, 1981.
- [MPR91] Enzo Marinari, Claudio Parrinello y Roberto Ricci. Evidence for the existence of Gribov copies in Landau gauge lattice QCD. *Nucl. Phys.*, B362:487–497, 1991.
- [MPS95] G. Martinelli, C. Pittori, Christopher T. Sachrajda, M. Testa y A. Vladikas. A general method for nonperturbative renormalization of lattice operators. *Nucl. Phys.*, B445:81–108, 1995.
- [MS95a] C. Michael y P. S. Spencer. Cooling and the SU(2) instanton vacuum. *Phys. Rev.*, D52:4691–4699, 1995.
- [MS95b] C. Michael y P. S. Spencer. Instanton size distributions from calibrated cooling. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 42:261–263, 1995.
- [Neg99] John W. Negele. Instantons, the QCD vacuum, and hadronic physics. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 73:92–104, 1999.
- [Neu98a] H. Neuberger. Chirality on the lattice. Published in *Vancouver 1998, High energy physics, vol. 2*, 1998. 29th International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 98), Vancouver, Canada, July 1998.

- [Neu98b] Herbert Neuberger. Exactly massless quarks on the lattice. *Phys. Lett.*, B417:141–144, 1998.
- [Neu98c] Herbert Neuberger. More about exactly massless quarks on the lattice. *Phys. Lett.*, B427:353–355, 1998.
- [NN81a] Holger Bech Nielsen y M. Ninomiya. Absence of neutrinos on a lattice. 1. Proof by homotopy theory. *Nucl. Phys.*, B185:20, 1981.
- [NN81b] Holger Bech Nielsen y M. Ninomiya. Absence of neutrinos on a lattice. 2. Intuitive topological proof. *Nucl. Phys.*, B193:173, 1981.
- [NN81c] Holger Bech Nielsen y M. Ninomiya. No go theorem for regularizing chiral fermions. *Phys. Lett.*, B105:219, 1981.
- [NO90] N. Nakanishi y I. Ojima. Covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity. *World Sci. Lect. Notes Phys.*, 27:1–434, 1990.
- [NSV85] V. A. Novikov, Mikhail A. Shifman, A. I. Vainshtein y Valentin I. Zakharov. Wilson’s operator expansion: can it fail? *Nucl. Phys.*, B249:445–471, 1985.
- [OS75] Konrad Osterwalder y Robert Schrader. Axioms for euclidean Green’s functions 2. *Commun. Math. Phys.*, 42:281, 1975.
- [Par94] C. Parrinello. Exploratory study of the three gluon vertex on the lattice. *Phys. Rev.*, D50:4247–4251, 1994.
- [PR82] Pedro Pascual y Eduardo de Rafael. Gluonic corrections to quark vacuum condensate contributions to two point functions in QCD. *Zeit. Phys.*, C12:127, 1982.
- [PLN03] Jan M. Pawłowski, Daniel F. Litim, Sergei Nedelko y Lorenz von Smekal. Infrared behaviour and fixed points in Landau gauge QCD. (hep-th/0312324), 2003.
- [Pol75] Alexander M. Polyakov. Compact gauge fields and the infrared catastrophe. *Phys. Lett.*, B59:82–84, 1975.
- [Pol77] Alexander M. Polyakov. Quark confinement and topology of gauge groups. *Nucl. Phys.*, B120:429–458, 1977.

- [PV88] M. I. Polikarpov y A. I. Veselov. Instantons and confinement in the SU(2) lattice gauge theory. *Nucl. Phys.*, B297:34, 1988.
- [PV90] R. Petronzio y E. Vicari. An overrelaxed Monte Carlo algorithm for SU(3) lattice gauge theories. *Phys. Lett.*, B248:159–162, 1990.
- [Ros86] D. A. Ross. Renormalization group invariance in the presence of instantons. 1986. Presented at Conf. Renormalization Group-86, Dubna, USSR, Aug 26-29, 1986.
- [RS99] A. Ringwald y F. Schrempp. Confronting instanton perturbation theory with QCD lattice results. *Phys. Lett.*, B459:249–258, 1999.
- [SAH97] Lorenz von Smekal, Reinhard Alkofer y Andreas Hauck. The infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3591–3594, 1997.
- [SBZ03] L. Stodolsky, Pierre van Baal y V. I. Zakharov. Defining $\langle A^{*2} \rangle$ in the finite volume hamiltonian formalism. *Phys. Lett.*, B552:214–222, 2003.
- [Sch51] Julian S. Schwinger. The theory of quantized fields. I. *Phys. Rev.*, 82:914–927, 1951.
- [Sch99] Martin Schaden. Mass generation in continuum SU(2) gauge theory in covariant abelian gauges. (hep-th/9909011), 1999.
- [Shi02] D. V. Shirkov. The QCD coupling behavior in the infrared region and its fourier transformation. 2002. Prepared for 32nd International Symposium on Multiparticle Dynamics (ISMD 2002), Alushta, Ukraine, 7-13 Sep 2002.
- [Shu88] Edward V. Shuryak. The 'instanton liquid.'. *Z. Phys.*, C38:165–172, 1988.
- [SK02] Jonivar Skullerud y Ayse Kizilersu. Quark-gluon vertex from lattice QCD. *JHEP*, 09:013, 2002.
- [Som97] Rainer Sommer. Non-perturbative renormalization of QCD. Prepared for 36th Internationale Universitatswochen Fuer Kernphysik und Teilchenphysik, Schladming (Austria) 1997.

- [Sot03] F. De Soto y J. Rodríguez-Quintero. Remarks on the determination of the Landau gauge OPE for the asymmetric three gluon vertex *Phys. Rev. D*67:114003, 2001.
- [SS97] D. V. Shirkov y I. L. Solovtsov. Analytic model for the QCD running coupling with universal $\alpha(s)\text{-bar}(0)$ value. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1209–1212, 1997.
- [SS98] Thomas Schafer y Edward V. Shuryak. Instantons in QCD. *Rev. Mod. Phys.*, 70:323–426, 1998.
- [ST98] Douglas A. Smith y Michael J. Teper. Topological structure of the SU(3) vacuum. *Phys. Rev.*, D58:014505, 1998.
- [SVZ79] Mikhail A. Shifman, A. I. Vainshtein y Valentin I. Zakharov. QCD and resonance physics. sum rules. *Nucl. Phys.*, B147:385–447, 1979.
- [Tep85] M. Teper. Instantons in the quantized SU(2) vacuum: A lattice Monte Carlo investigation. *Phys. Lett.*, B162:357, 1985.
- [Tep94] M. Teper. Cooling and confinement in lattice gauge theory. *Nucl. Phys.*, B411:855–874, 1994.
- [Tep97] Michael J. Teper. Physics from the lattice: Glueballs in QCD, topology, SU(N) for all N. (1997).
- [tH76a] Gerard 't Hooft. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle. *Phys. Rev.*, D14:3432–3450, 1976.
- [tH76b] Gerard 't Hooft. Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies. *Phys. Rev. Lett.*, 37:8–11, 1976.
- [Tyu75] I. V. Tyutin. Gauge invariance in field theory and statistical physics in operator formalism. 1975. LEBEDEV-75-39.
- [Ven79] G. Veneziano. U(1) without instantons. *Nucl. Phys.*, B159:213–224, 1979.
- [Ver91] J. J. M. Verbaarschot. Streamlines and conformal invariance in Yang-Mills theories. *Nucl. Phys.*, B362:33–53, 1991.

- [VKA01] H. Verschelde, K. Knecht, K. Van Acoleyen y M. Vanderkelen. The non-perturbative groundstate of QCD and the local composite operator $A(\mu)^{**2}$. *Phys. Lett.*, B516:307–313, 2001.
- [WA01] Peter Watson y Reinhard Alkofer. Verifying the Kugo-Ojima confinement criterion in Landau gauge QCD. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5239, 2001.
- [Wei95] S. Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge, UK: Univ. Pr., (1995).
- [Wei96] S. Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge, UK: Univ. Pr., (1996).
- [Wil69] Kenneth G. Wilson. Nonlagrangian models of current algebra. *Phys. Rev.*, **179**:1499–1512, (1969).
- [Wil74] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev.*, D10:2445–2459, 1974.
- [Wil75] Kenneth G. Wilson. Quarks and strings on a lattice. 1975. New Phenomena In Subnuclear Physics. Part A. Proceedings of the First Half of the 1975 International School of Subnuclear Physics, Erice, Sicily, July 11 - August 1, 1975, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1977, p. 69, CLNS-321.
- [Wit67] B.S. de Witt. Quantum theory of gravity III. Applications of the covariant theory. *Phys. Rev.*, 162:1239–1256, 1967.
- [Wit79a] Edward Witten. Current algebra theorems for the U(1) 'goldstone boson'. *Nucl. Phys.*, B156:269, 1979.
- [Wit79b] Edward Witten. Instantons, the quark model, and the $1/N$ expansion. *Nucl. Phys.*, B149:285, 1979.
- [Ynd99a] F. J. Yndurain. Gluon condensate from superconvergent QCD sum rule. *Phys. Rept.*, 320:287–293, 1999.
- [Ynd99b] F. J. Yndurain. *The theory of quark and gluon interactions*. Springer (Berlin, Germany), (1999).

- [Zim70] W. Zimmermann. Local operator products and renormalization in quantum field theory. In S. Deser, H. Pendleton y M. Grisaru, editors, *Lectures on elementary particles and quantum field theory*. MIT Press, (1970).
- [ZJ01] J. Zinn-Justin. Chiral anomalies and topology. 2001. Autumn School 2001: Topology and Geometry in Physics, Rot an der Rot, Germany.
- [Zwa91] D. Zwanziger. Vanishing of zero momentum lattice gluon propagator and color confinement. *Nucl. Phys.*, B364:127–161, 1991.