SEMIGRUPOS DE OPERADORES DE COMPOSICIÓN

Abel Rosales Tristancho
Dpto. de Análisis Matemático
Dpto. de Matemática Aplicada II

SEMIGRUPOS DE OPERADORES DE COMPOSICIÓN

Abel Rosales Tristancho
Dpto. de Análisis Matemático
Dpto. de Matemática Aplicada II
Sevilla, Septiembre de 2017

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Máster en Matemáticas por la Universidad de Sevilla.

Tutorizada por
Prof. Manuel D. Contreras Márquez
Prof. Luis Rodríguez Piazza

Índice general

English Abstract

The main problem we consider in this work is the study of semigroups of composition operators on spaces of analytic functions on the unit disc. Mainly, we focus on the problem in Hardy spaces, $H^p(\mathbb{D})$, and Bergman spaces, $A^p(\mathbb{D})$.

We can divide this work in two different parts. Firstly, we study the concept of strongly continuous semigroup of operators on a Banach space, as well as the existence of its infinitesimal generator. Secondly, we pay attention to semigroups of composition operators on spaces of analytic functions on the unit disc and its construction from the concept of semigroup of analytic functions. If $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ is a semigroup of analytic self maps of the unit disc $\mathbb{D}$ with the composition as operation between them, and X is a Banach space of analytic functions on $\mathbb{D}$, then

$$Q(t)f = f \circ \varphi_t, \qquad f \in X, \quad t \geq 0,$$

defines a semigroup of composition operators whenever $Q(t) \in \mathscr{B}(X)$ for $t \geq 0$. We will proof under what conditions they are strongly continuous and we will focus on cases such as Hardy spaces and Bergman spaces. Finally, we will calculate its infinitesimal generator.

Results of the first part are classic and they can be found in many traditional books of Functional Analysis, such as [Rud1], while the rest of this report collects current results, so we will study recently published works of different authors.

Introducción

Denotamos por $\mathbb{D}$ el disco unidad, $\partial\mathbb{D}$ su frontera y $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ el espacio de funciones analíticas en dicho dominio. Para una función $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ se define el operador de composición de símbolo φ como

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

El estudio de los operadores de composición es llevado a cabo en numerosos espacios de funciones analíticas (que denotaremos de forma genérica X) y tiene como principal objetivo caracterizar las propiedades que éstos poseen a partir del espacio de funciones en el que se esté trabajando, así como de las propiedades del símbolo φ.

En particular, el trabajo que se desarrolla en esta memoria se centra en los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ y los espacios de Bergman $A^p(\mathbb{D})$, siendo ambos espacios de funciones analíticas satisfaciendo, cada uno de ellos, cierta propiedad de integrabilidad.

Así, para $0 < p < \infty$, se define el espacio de Hardy $H^p(\mathbb{D}) = H^p$ como el conjunto de funciones holomorfas f en el disco unidad de forma que

$$\sup_{0\le r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right) < +\infty.$$

Para el caso $p = \infty$, el espacio correspondiente es el de las funciones analíticas y acotadas $H^\infty(\mathbb{D})$.

Por otra parte, para $1 \le p < +\infty$, el espacio de Bergman $A^p(\mathbb{D}) = A^p$ se define como el conjunto de funciones holomorfas en el disco unidad que pertenecen al conjunto de funciones $p-$integrables $L^p(\mathbb{D})$. Es decir,

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dm(w) < +\infty,$$

donde m denota a la medida de Lebesgue en $\mathbb{D}$.

En ambos casos probaremos que, si tenemos una función $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y un operador de composición $C_\varphi\colon X \to X$, donde X es un espacio de Hardy o un espacio de Bergman, entonces dicho operador es acotado en esos espacios y daremos, además, una cota de su norma para cada uno de los dos casos.

Una vez estudiados los operadores de composición de forma genérica, veremos cómo es posible obtener una familia de dichos operadores a partir de un semigrupo de funciones analíticas. La familia $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ se dice que es un semigrupo de funciones analíticas si para cada $t \geq 0$ la aplicación $\varphi_t \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica y, además,

- φ_0 es la identidad en $\mathbb{D}$.
- $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$, para todo $t, s \geq 0$.

Se dirá, además, que es continuo si $\varphi_t \to \varphi_0$ uniformemente en compactos cuando $t \to 0^+$.

A partir de dicho semigrupo continuo de funciones analíticas podemos construir una familia de operadores $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ definidos, para cada $t \geq 0$, como

$$Q(t)f = f \circ \varphi_t, \qquad f \in X.$$

Esta familia constituye un semigrupo de operadores de composición, ya que

- $Q(0)$ es la identidad en X.
- $Q(s+t) = Q(s)Q(t)$ para todo $t, s \geq 0$, denotando dicha operación a la composición de operadores.

En cuanto a las condiciones de continuidad que podemos atribuirle al semigrupo de operadores de composición, se dirá que el mismo es uniformemente continuo si

$$\lim_{t\to 0^+} \|Q(t) - I\| = 0,$$

y, estableciendo una condición más débil, se dirá que es fuertemente continuo si

$$\lim_{t\to 0^+} \|Q(t)f - f\|_X = 0,$$

para toda $f \in X$. Evidentemente, la primera condición de continuidad implica la segunda.

De esta forma, uno de los objetivos primordiales de este trabajo es probar que, dado un semigrupo continuo de funciones analíticas, el semigrupo de operadores de composición correspondiente $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en los espacios H^p y A^p para $1 \leq p < +\infty$ pero, sin embargo, no lo es en el espacio de funciones holomorfas y acotadas H^∞.

Cabe señalar, tal y como se indicará a continuación, que la primera parte de este trabajo se desarrolla en un contexto clásico y es posible encontrarla en conocidos libros de Análisis Funcional, mientras que los resultados concretos (que constituyen el objetivo final de la memoria) han sido estudiados de una forma más original a como se hace habitualmente, donde es común trabajar con resultados más abstractos de campos como el Análisis Funcional o Complejo.

Llegados a este punto, vamos a detallar capítulo a capítulo el trabajo que se realiza a lo largo de la memoria.

En primer lugar, encontramos en el Capítulo 1 los resultados generales de semigrupos de operadores, sin particularizar todavía en operadores de composición o semigrupos de operadores de esta naturaleza. Así, se estudian los conceptos de semigrupo fuertemente y uniformemente continuo, dándose diversos ejemplos de cada caso: ejemplos en espacios de funciones y otros en espacios de sucesiones. Del mismo modo, se define el generador infinitesimal de un semigrupo A como el límite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{Q(t)x - x}{t}, \qquad x \in X,$$

siempre que exista. El conjunto de valores $x \in X$ para los que dicho límite exista se denotará por $\mathscr{D}(A)$ y lo llamaremos dominio del generador infinitesimal. Siguiendo la línea de ejemplos vistos arriba, se expondrá la construcción del generador infinitesimal para algunos de ellos.

Poniendo en común los conceptos anteriores mediante una serie de resultados que se enuncian y demuestran en este primer capítulo, esta primera parte termina con dos hechos fundamentales que se utilizarán con frecuencia a lo largo del resto del trabajo. En primer lugar, si $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo, entonces podemos afirmar que $\mathscr{D}(A)$ es denso en el espacio X. Por otra parte, se probará que la condición del semigrupo de ser uniformemente continuo es equivalente a que $\mathscr{D}(A) = X$.

Como se dijo anteriormente, esta primera parte es posible encontrarla en libros conocidos de Análisis Funcional. En concreto, el desarrollo que se hace en el primer capítulo de esta memoria sigue la línea de [Rud1], ofreciendo con mayor detalle la prueba de los resultados que se van enunciando.

En cuanto al segundo capítulo, es necesario observar que el desarrollo que se lleva a cabo sigue las pautas de uno de los temas estudiados en la asignatura "Variable Compleja y Operadores" del Máster Universitario en Matemáticas (Universidad de Sevilla). Es decir, se demuestran una serie de resultados del campo del Análisis Complejo necesarios para probar finalmente dos resultados interesantes de operadores de composición: si el espacio de funciones analíticas con el que trabajamos es H^p con $0 < p \leq +\infty$, o A^p con $1 \leq p < +\infty$, entonces C_φ es acotado en dichos espacios.

Para probar dichos enunciados es conveniente estudiar de forma previa algunos conceptos relacionados con las funciones armónicas y subarmónicas, así como conceptos como el de producto de Blaschke. Entre los resultados destacados encontramos el Teorema de Factorización (relativos a dichos productos) o el Principio de subordinación de Littlewood. Además la prueba de la propiedad de acotación del operador C_φ se hará para todos los casos de forma progresiva, demostrando previamente la cota para funciones con cierta particularidad y, finalmente, concluyendo con el caso general.

Tal y como se ha comentado, las pruebas que se exponen de la mayoría de los resultados del Capítulo 2 son las estudiadas en la asignatura "Variable Compleja y Operadores". En los casos en los que no se detalle la demostración se ofrecerá una referencia adecuada, aunque ya podemos adelantar que toda la primera parte referente a funciones subarmónicas y productos de Blaschke es posible encontrarla en [Rud2].

Acto seguido, nos encontramos con el Capítulo 3, cuyo estudio central se basa en los semigrupos de funciones analíticas y su continuidad. De hecho, uno de los primeros resultados de esta parte es ver que la continuidad uniforme en compactos de la que se habló anteriormente es equivalente a la convergencia puntual de las funciones del semigrupo.

Seguidamente, mostraremos una serie de ejemplos en los que se comprobará que se tratan realmente de semigrupos de funciones analíticas. Dichos ejemplos es posible encontrarlos en obras como [Sis], aunque en esta memoria se trabajan con mucho más detenimiento. Para concluir esta primera parte, probaremos un resultado que nos permitirá afirmar que los semigrupos de operadores de composición derivados de un semigrupo continuo de funciones analíticas son fuertemente continuos en los espacios H^p y A^p para $1 \leq p < +\infty$.

La segunda parte de este capítulo se dedica al estudio del generador infinitesimal de un semigrupo continuo de funciones holomorfas. Dicho generador se define como el límite

$$G(z) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi_t(z) - z}{t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

La existencia y analiticidad de esta función G fue obtenida por vez primera en [BP]. Cabe señalar que la prueba que damos de la existencia de dicha función es original de este trabajo. De hecho, descansa en la teoría clásica de semigrupos fuertemente continuos en espacios de Banach aplicada, en este caso, a los semigrupos de operadores de composición en el espacio de Hardy H^2.

Acto seguido, utilizaremos la misma batería de ejemplos anteriores de semigrupos continuos de funciones analíticas para hallar su generador infinitesimal y probaremos, además, que si el semigrupo de operadores de composición inducido por el semigrupo de funciones analíticas es fuertemente continuo, entonces

$$Af(z) = f'(z)G(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde A era el generador infinitesimal del semigrupo de operadores.

En cuanto al cuarto y último capítulo de la presente memoria, el objetivo principal del mismo es probar que en H^∞ el semigrupo de operadores de composición inducido por un semigrupo continuo de funciones analíticas no es fuertemente continuo. Sin duda, esta es la parte más original del trabajo. El resultado que acabamos de enunciar aparece por primera vez en el artículo de Siskakis [Sis] haciendo uso de las siguientes herramientas:

1. El Teorema de Lotz de 1985, que afirma que un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Grothendieck con la propiedad de Dunford-Pettis es uniformemente continuo. Cabe señalar que nosotros no entraremos en los detalles técnicos del significado de estas propiedades, pudiéndose consultar en [Lot].

2. Los profundos resultados de Bourgain de los años 80 que prueban que el espacio H^∞ posee la propiedad de Dunford-Pettis (publicado en Acta Mathematica, [Bou1]) y que es un espacio de Grothendieck (publicado en Studia Mathematica, [Bou2]).

Nuestra aproximación al resultado central del Capítulo 4 evita usar estas poderosas herramientras, ofreciendo de forma alternativa una prueba autocontenida del mismo.

Así, estudiaremos en primer lugar una de las herramientas con las que se trabaja durante el resto del capítulo: los horodiscos. Dado un punto $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ y un radio $R > 0$ se define el horodisco $H(\sigma, R)$ como el conjunto

$$H(\sigma, R) = \{z \in \mathbb{D} \colon \frac{|\sigma - z|^2}{1 - |z|^2} < R\}.$$

Este conjunto es un disco contenido en $\mathbb{D}$ y tangente a su frontera en el punto σ.

Se estudiarán propiedades de los mismos y de la métrica hiperbólica, que también presentaremos en su debido momento. Para culminar este primer apartado, se enunciará y probará el Teorema de Denjoy-Wolff discreto, pues no resultará un trabajo laborioso con todo el desarrollo llevado a cabo hasta ese momento.

En una segunda parte estudiaremos la forma del generador infinitesimal de un semigrupo de funciones analíticas, en particular, la conocida descomposición de Berkson-Porta. Probaremos que, para cada $z \in \mathbb{D}$,

$$G(z) = (z - b)(\bar{b}z - 1)P(z),$$

donde $b \in \overline{\mathbb{D}}$ y $\mathrm{Re}(P) \geq 0$. Dicha descomposición se probará usando una disyuntiva presentada al inicio de la sección: o todas las funciones del semigrupo tienen el mismo punto fijo en $\mathbb{D}$, o ninguna tiene puntos fijos.

Para culminar dicho apartado, probaremos el Teorema de Denjoy-Wolff continuo y se definirá, consecuentemente, el punto de Denjoy-Wolff de cada semigrupo estudiado en ejemplos anteriores.

Con la última parte del Capítulo 4 llegaremos al objetivo presentado al principio. Probaremos que en H^∞ el semigrupo de operadores de composición inducido por el semigrupo de funciones analíticas en cuestión no es fuertemente continuo, para lo que seguiremos un procedimiento constructivo utilizando resultados probados en secciones anteriores, así como en otros capítulos de la memoria.

Capítulo 1

Semigrupos de Operadores.

1.1. Definición y propiedades.

En esta sección presentaremos la definición de semigrupo de operadores, así como algunas propiedades de cierto interés. Estudiaremos la diferencia entre semigrupo de operadores fuertemente continuo y uniformemente continuo y se respaldarán estos conceptos con una serie de ejemplos en diferentes espacios.

Cabe señalar que, en las siguientes definiciones y propiedades, el espacio $\mathscr{B}(X)$ denotará a la familia de funciones lineales y continuas de X en X. Además, dados dos operadores $T, S \in \mathscr{B}(X)$, denotaremos al operador composición como TS. De no decirse lo contrario, X será un espacio de Banach.

Definición 1.1. *Sea X un espacio de Banach y Q la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} Q\colon & [0,+\infty) & \longrightarrow & \mathscr{B}(X) \\ & t & \longmapsto & Q(t) \end{array}$$

es decir, a cada t no negativo le asocia una aplicación lineal y acotada de X en el mismo espacio. Supongamos que la aplicación arriba definida satisface las siguientes condiciones:

1. *$Q(0) = I$, siendo I el operador identidad;*

2. *$Q(s+t) = Q(s)Q(t)$ para todo $s \geq 0$ y para todo $t \geq 0$. Es decir, el operador $Q(s+t)$ es la composición de los operadores $Q(s)$ y $Q(t)$.*

En ese caso, la familia $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ se llama semigrupo de operadores (o bien, semigrupo uni-paramétrico).

El hecho de que sea llamado de esta forma se debe a los valores que toma el parámetro t, únicamente valores no negativos, de forma que el dominio no es todo $\mathbb{R}$. Por tanto, a pesar de que nuestro trabajo se centrará en los operadores presentados anteriormente, podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.2. *Sea X un espacio de Banach y Q la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} Q\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathscr{B}(X) \\ & t & \longmapsto & Q(t) \end{array}$$

satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. *$Q(0) = I$, siendo I el operador identidad;*
2. *$Q(s+t) = Q(s)Q(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.*

En ese caso, la familia $\{Q(t)\}$ es llamada grupo de operadores.

Con la siguiente definición vamos a conocer las condiciones de continuidad con las que se va a trabajar de aquí en adelante.

Definición 1.3. *Sea X un espacio de Banach y $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores. Se dice que el semigrupo es fuertemente continuo si satisface*

$$\lim_{t\to 0} \|Q(t)x - x\| = 0 \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$. Si el semigrupo de operadores satisface

$$\lim_{t\to 0} \|Q(t) - I\| = 0 \tag{1.2}$$

se dirá que es uniformemente continuo.

A continuación presentamos un ejemplo de un semigrupo de operadores uniformemente continuo. Aunque en la mayoría de los casos el parámetro que toma el semigrupo recorre todos los números reales, es evidente que el razonamiento es análogo si consideramos únicamente el caso no negativo.

Ejemplo 1.4. Sea $A \in \mathscr{B}(X)$ y $t \in \mathbb{R}$, consideramos la sucesión cuyo término general se define como

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k, \tag{1.3}$$

entendiéndose que $A^0 = I$. Fijado $t \geq 0$, se trata de una sucesión en el espacio $\mathscr{B}(X)$, ya que las propiedades de linealidad y continuidad se siguen a partir de las propiedades del operador A. Para $p \geq 0$, se tiene que

$$\|Q_{n+p}(t) - Q_n(t)\| = \left\| \sum_{k=0}^{n+p} \frac{t^k}{k!} A^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{t^k}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k,$$

tratándose esta última suma de la cola de la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^n = e^{|t|\|A\|}.$$

Esto quiere decir que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|t|^k}{k!} \|A\|^k = 0$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \|Q_{n+p}(t) - Q_n(t)\| = 0,$$

por lo que $\{Q_n(t)\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{B}(X)$. Como dicho espacio es de Banach (y, en particular, completo) dicha sucesión es convergente a un elemento de $\mathscr{B}(X)$ al que denotamos por

$$Q(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \tag{1.4}$$

Vamos a probar que $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores uniformemente continuos en $\mathscr{B}(X)$.

En primer lugar, es inmediato que

$$Q(0) = e^{0A} = \lim_{n\to\infty} Q_n(0) = \lim_{n\to\infty} I = I.$$

Para la segunda propiedad que definen a los semigrupos de operadores tenemos en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned}
Q_n(s)Q_n(t) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!} A^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} A^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{s^k}{k!} A^k \frac{t^j}{j!} A^j = \sum_{m=0}^{2n} A^m \left(\sum_{j=\max\{0,m-n\}}^{\min\{m,n\}} \frac{s^{m-j}}{(m-j)!}\frac{t^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{n} A^m \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{m-j}t^j}{(m-j)!j!} + \sum_{m=n+1}^{2n} A^m \sum_{j=m-n}^{n} \frac{s^{m-j}t^j}{(m-j)!j!} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{(s+t)^m}{m!} A^m + \sum_{m=n+1}^{2n} A^m \sum_{j=m-n}^{n} \frac{s^{m-j}t^j}{(m-j)!j!}.
\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$Q_n(s)Q_n(t) = Q_n(s+t) + \sum_{m=n+1}^{2n} A^m \sum_{j=m-n}^{n} \frac{s^{m-j}t^j}{(m-j)!j!}.$$

Acotando en norma se tiene que

$$\|Q_n(s)Q_n(t) - Q_n(s+t)\| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \|A\|^m \sum_{j=0}^{m} \frac{|s|^{m-j}|t|^j}{(m-j)!j!} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(|s|+|t|)^m}{m!} \|A\|^m,$$

siendo el sumatorio obtenido el resto de la serie convergente

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(|s|+|t|)^m}{m!} \|A\|^m = e^{(|s|+|t|)\|A\|},$$

por lo que al hacer tender n a ∞ dicha suma tiende a 0. Este hecho se traduce en que

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n(s)Q_n(t) - Q_n(s+t)\| = 0.$$

Como la norma es una función continua, podemos intercambiarla con el límite y, atendiendo a la definición que se había dado del semigrupo de operadores afirmamos que

$$\left\| e^{sA}e^{tA} - e^{(s+t)A} \right\| = 0$$

y, por tanto,

$$Q(s)Q(t) = Q(s+t) \tag{1.5}$$

para todo $t, s \geq 0$.

Por último, se tiene que

$$\|Q(\varepsilon) - I\| = \left\|e^{\varepsilon A} - I\right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^n}{n!} \|A\|^n = e^{|\varepsilon|\|A\|} - 1.$$

Al hacer tender ε a 0 se satisface que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|Q(\varepsilon) - I\| = 0,$$

quedando probado de esta manera que se trata de un semigrupo de operadores uniformemente continuo.

♣

A continuación estudiaremos el semigrupo de las traslaciones en $L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$. Veremos que es fuertemente continuo si y solo si $p < +\infty$. Sin embargo, probaremos que en ningún caso este semigrupo de operadores es uniformemente continuo.

Ejemplo 1.5. Sea el espacio $L^p(\mathbb{R})$ para $1 \leq p \leq \infty$ y el operador de traslación $Q(t) \in \mathscr{B}(L^p(\mathbb{R}))$ definido como

$$(Q(t)f)(\cdot) = f(\cdot + t). \tag{1.6}$$

Vamos a probar que la familia $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores.

Antes de comenzar con las comprobaciones correspondientes, es necesario observar que, al trabajar en el espacio $L^p(\mathbb{R})$ realmente se manejan clases de funciones, por lo que no tiene sentido evaluar una función en un punto. Por ello, todas las propiedades que veremos a continuación estarán justificadas si se comprueban para funciones continuas y de soporte compacto y, posteriormente, se usa la densidad de este espacio en nuestro espacio de partida $L^p(\mathbb{R})$.

En primer lugar, vamos a comprobar que las aplicaciones involucradas están bien definidas. Para ello, estudiamos si para cada $t \geq 0$ el operador $Q(t)$ pertenece al espacio $\mathscr{B}(L^p(\mathbb{R}))$.

Para la propiedad de linealidad tenemos que, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in L^p(\mathbb{R})$, se verifica que

$$\begin{aligned} Q(t)(\alpha f(s) + \beta g(s)) &= (\alpha f + \beta g)(s+t) \\ &= \alpha f(s+t) + \beta g(s+t) \\ &= \alpha Q(t) f(s) + \beta Q(t) g(s), \qquad t \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sabemos que para toda aplicación lineal, la condición de continuidad es equivalente a la de estar acotado. Por ello, consideramos una función $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \infty$, de forma que

$$\|Q(t)f(\cdot)\|_p = \|f(\cdot + t)\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\cdot + t)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} = \|f(\cdot)\|_p \,,$$

quedando justificados los pasos anteriores debido a que si la función f es medible, cualquier traslación suya también lo será.

Por otra parte, consideramos ahora una función $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, de forma que

$$\|Q(t)f(\cdot)\|_\infty = \|f(t + \cdot)\|_\infty = \sup_{\cdot + t \in \mathbb{R}} \text{ess} |f(\cdot + t)| = \sup_{u \in \mathbb{R}} \text{ess} |f(u)| = \|f(\cdot)\|_\infty \,,$$

utilizándose que, al trasladar, el supremo esencial no cambia debido a la propiedad que posee la medida de Lebesgue de ser invariante bajo traslaciones.

Con las expresiones obtenidas en ambos casos se prueban dos cosas. En primer lugar, que la aplicación $Q(t)$ es continua, pudiéndose concluir de esta manera que $Q(t) \in \mathscr{B}(L^p(\mathbb{R}))$ para todo $t \geq 0$. Por otra parte, se ha probado que la aplicacón $Q(t)$ es una isometría para cada $t \geq 0$. En particular, $Q(t)f(\cdot) \in L^p(\mathbb{R})$, de forma que la aplicación que se expuso al comienzo del ejemplo está bien definida. Con todo ello, vamos a probar las dos condiciones de la Definición 1.1.

Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$, es evidente que

$$Q(0)f(s) = f(0 + s) = f(s),$$

es decir, $Q(0) = I$. Por otra parte,

$$Q(s+t)f(u) = f(s+t+u) = Q(s)f(t+u) = Q(s)Q(t)f(u),$$

por lo que $Q(s+t) = Q(s)Q(t)$, para todos $s, t \geq 0$.

Por tanto, estas dos propiedades prueban que la familia $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores.

Para ver ahora que el semigrupo es fuertemente continuo en el caso $1 \leq p < \infty$, vamos a utilizar la propiedad de la que se habló en la observación del inicio del ejemplo. Es decir,

$$L^p(\mathbb{R}) = \overline{C_c(\mathbb{R})}.$$

Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, gracias a la densidad de la que hemos hablado podemos garantizar la existencia de una función $g \in C_c(\mathbb{R})$ de forma que

$$\|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como g es continua y de soporte compacto, se tiene que es uniformemente continua y, además, podemos garantizar que existe un valor α de forma que $g(s) = 0$ si $|s| \geq \alpha$. Este hecho nos conduce directamente a suponer que

$$\operatorname{sop} g \subset [-\alpha, \alpha] \subset (-\alpha - 1, \alpha + 1).$$

Con todo esto, tenemos que

$$\|Q(t)f - f\|_p \leq \|Q(t)f - Q(t)g\|_p + \|Q(t)g - g\|_p + \|g - f\|_p . \tag{1.7}$$

A continuación, tomamos un valor δ en el intervalo $(0, 1)$ de forma que se verifique

$$|g(t+s) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.8}$$

si $|t| < \delta$ y $s \in \mathbb{R}$, utilizando en este caso la continuidad uniforme de g. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned}\|Q(t)g - g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |g(s+t) - g(s)|^p ds = \int_{-\alpha-1}^{\alpha+1} |g(s+t) - g(s)|^p ds \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p \frac{1}{2(\alpha+1)}(\alpha + 1 + \alpha + 1) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p .\end{aligned}$$

Consecuentemente, se tiene la cota

$$\|Q(t)g - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.9}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\|Q(t)f - Q(t)g\|_p = \|f(\cdot + t) - g(\cdot + t)\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$$

por la elección de g.

Atendiendo a la expresión (1.7) y a las cotas que acabamos de obtener se tiene que

$$\|Q(t)f - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{1.10}$$

siempre que $|t| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se cumple la condición

$$\lim_{t \to 0} \|Q(t)f - f\| = 0, \tag{1.11}$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$, por lo que el semigrupo de operadores con el que hemos trabajado es fuertemente continuo en este caso.

En contraposición, vamos a ver que para $p = +\infty$, el semigrupo definido anteriormente no es fuertemente continuo. Para ello, será necesario encontrar una función $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ de forma que no se cumpla la condición

$$\lim_{t \to 0} \|Q(t)f - f\|_\infty = 0.$$

Sea $f = \chi_{[0,1]}$ definida como

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \in [0,1], \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \notin [0,1]. \end{cases}$$

función que, en efecto, pertenece al espacio $L^\infty(\mathbb{R})$ ya que

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{R}} \text{ess}|f(s)| = 1 < \infty.$$

Al hacer actuar el operador $Q(t)$ sobre la función anterior se tiene que

$$Q(t)f(s) = f(s+t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s+t \in [0,1] \\ \\ 0 & \text{si} \quad s+t \notin [0,1] \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \in [-t, 1-t] \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \notin [-t, 1-t] \end{cases} = \chi_{[-t,1-t]}(s).$$

De esta forma,

$$\|Q(t)f - f\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{R}} \text{ess}|f(s+t) - f(s)| = 1,$$

para todo valor de t no nulo. Por tanto, dicha norma no tiende a 0 al hacer tender t al mismo valor, pudiéndose concluir de esta forma que la traslación no es un semigrupo de operadores fuertemente continuo en el espacio $L^\infty(\mathbb{R})$.

Vamos a ver que el semigrupo de operadores con el que estamos trabajando no es uniformemente continuo en ninguno de los casos.

Fijado $t > 0$, consideramos en $L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < \infty$, la función f definida como

$$f_t(s) = \begin{cases} (\frac{2}{t})^{1/p} & \text{si} \quad s \in [0, \frac{t}{2}], \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \notin [0, \frac{t}{2}], \end{cases}$$

de forma que

$$\|f_t\|_p = \left(\int_0^{t/2} \frac{2}{t} ds \right)^{1/p} = 1.$$

Al hacer su trasladada a partir del semigrupo $Q(t)$ obtenemos que

$$Q(t)f_t(s) = f_t(s+t) = \begin{cases} (\frac{2}{t})^{1/p} & \text{si} \quad s \in [-t, -\frac{t}{2}], \\ \\ 0 & \text{si} \quad s \notin [-t, -\frac{t}{2}]. \end{cases}$$

Con todo ello, nos disponemos a acotar inferiormente la norma de $Q(t) - I$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|Q(t)f_t - f_t\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |f_t(s+t) - f_t(s)|^p ds \\ &= \int_{-t}^{-t/2} \frac{2}{t} ds + \int_0^{t/2} \frac{2}{t} ds = 2. \end{aligned}$$

Tomando supremo entre todas las funciones del espacio de norma 1 se tiene que

$$\|Q(t) - I\| = \sup_{\|f\|_p = 1} \|Q(t)f - f\|_p \geq \sqrt[p]{2}.$$

Por tanto, al hacer tender t a 0 dicha cantidad siempre quedará acotada inferiormente por un número estrictamente positivo, quedando probado de esta forma que el semigrupo de operadores no es uniformemente continuo en los espacios $L^p(\mathbb{R})$ con p finito.

Por último, como el semigrupo de operadores de la traslación no era fuertemente continuo en el espacio $L^\infty(\mathbb{R})$, se tiene inmediatamente que tampoco puede ser uniformemente continuo.

♣

Desarrollando un razonamiento de densidad análogo al anterior se puede probar también que el semigrupo de operadores de la traslación es también fuertemente continuo en el espacio $C_0(\mathbb{R})$.

En general, la idea anterior de densidad puede ser extendida a un contexto más general, tal y como vamos a ver en el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Sea X un espacio de Banach e $Y \subset X$ denso en X. Consideramos un semigrupo de operadores $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ en el espacio X de forma que existe un $\delta > 0$ tal que $\sup_{0<t<\delta} \|Q(t)\|_X < \infty$. Si la restricción $Q(t)|_Y$ es fuertemente continua, entonces el semigrupo es fuertemente continuo en X.*

Demostración. Como Y es denso en X, dada una función $f \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe otra función $g \in Y$ de forma que

$$\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De esta forma, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Q(t)f - f\|_X &\leq \|Q(t)f - Q(t)g\|_X + \|Q(t)g - g\|_X + \|g - f\|_X \\
&< \|Q(t)\| \, \|f - g\|_X + \|Q(t)g - g\|_X + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \|Q(t)\| \, \frac{\varepsilon}{3} + \|Q(t)g - g\|_X + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la norma de $Q(t)$ está acotada en un entorno de 0 y que el semigrupo es fuertemente continuo en Y, al que pertenece g, hacemos tender t a 0. Todo ello unido al hecho de que el valor de $\varepsilon > 0$ es arbitrario da lugar a que

$$\lim_{t\to 0} \|Q(t)f - f\|_X = 0,$$

para toda $f \in X$. Es decir, el semigrupo de operadores es fuertemente continuo en X.

$\square$

A continuación vamos a ver otro ejemplo de espacio donde el semigrupo de las traslaciones no es fuertemente continuo.

Ejemplo 1.7. Trabajaremos ahora con el espacio de funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}$, $C_b(\mathbb{R})$, dotado de la norma del supremo.

Es inmediato, a partir de todo lo que hemos expuesto anteriormente, que el operador de traslación está bien definido y satisface las condiciones de la definición de semigrupo de operadores en el espacio $C_b(\mathbb{R})$. Para ver que no es fuertemente continuo, vamos a buscar una función en el espacio de trabajo que no satisfaga la condición

$$\lim_{t\to 0} \|Q(t)f - f\|_\infty = 0.$$

Consideremos la función $f(s) = \sin(s^2)$ para $s \in \mathbb{R}$. Se trata de una función continua y acotada (es decir, pertenece al espacio $C_b(\mathbb{R})$) pero no es uniformemente continua. Vamos a estudiar la norma que nos interesa acotar inferiormente, es decir,

$$\|Q(t)f - f\|_\infty .$$

Consideramos la sucesión $\{s_n\}_{n\geq 0} = \{\sqrt{2n\pi}\}_{n\geq 0}$ de forma que para cada $n \geq 0$ se tiene que $\sin s_n^2 = 0$. Por otra parte, vamos a buscar una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ convergente a 0 de forma que $\sin(s_n + t_n)^2 = 1$ para cada valor de $n \geq 0$. Dicha igualdad se tiene si $(s_n + t_n)^2 = 2n\pi + \pi/2$, para cada $n \geq 0$. Despejando convenientemente, tenemos que cada término de la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ viene definido por

$$t_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - s_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi}.$$

Si además estudiamos su límite cuando n tiende a $+\infty$ se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi}} = 0,$$

de forma que hemos obtenido una sucesión que tiende a 0, lo que nos resultará muy útil para la definición de continuidad fuerte. Considerando ahora la norma de las funciones involucradas tenemos que

$$\begin{aligned}\|Q(t_n)f - f\|_\infty &= \sup_{s\in\mathbb{R}} |Q(t_n)f(s) - f(s)| \\ &\geq |Q(t_n)f(s_n) - f(s_n)| = |\sin(s_n + t_n)^2 - \sin s_n^2| = 1.\end{aligned}$$

Al tomar límite cuando n tiende a $+\infty$, tenemos que la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ tiende a 0 y que

$$\lim_{n\to+\infty} \|Q(t_n)f - f\| \geq 1,$$

por lo que podemos concluir que el semigrupo de operadores definido por la traslación no es fuertemente continuo en el espacio $C_b(\mathbb{R})$.

Cabe señalar que, a pesar de que el razonamiento anterior es suficiente para probar que el semigrupo no es fuertemente continuo, se puede demostrar que, para todo $t > 0$,

$$\|Q(t)f - f\|_\infty = \sup_{s\in\mathbb{R}} |\sin(s + t)^2 - \sin s^2| = 2.$$

♣

Por último, vamos a presentar un ejemplo en el que daremos un semigrupo de operadores definido sobre un cierto espacio de sucesiones, de forma que será fuertemente continuo pero no de manera uniforme.

Ejemplo 1.8. Consideramos el espacio de sucesiones ℓ^p con $1 \leq p < \infty$ definido como

$$\ell^p = \{\{a_m\}_{m\geq 0} \colon \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^p < \infty\}$$

y dotado de la norma $\|\{a_m\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_m|^p\right)^{1/p}$.

Para cada $t \geq 0$, consideramos la sucesión acotada $\{e^{-mt}\}_{m\geq 0}$ y el semigrupo de operadores $Q(t) \in \mathscr{B}(\ell^p)$ definido como

$$\begin{array}{ccc} \ell^p & \longrightarrow & \ell^p \\ \{a_m\}_{m\geq 0} & \longmapsto & \{e^{-mt}a_m\}_{m\geq 0}, \end{array} \tag{1.12}$$

pudiéndose observar que todos los operadores de este tipo son operadores de multiplicación.

Veamos, en primer lugar, que está bien definido. Es casi trivial comprobar la linealidad del operador. En efecto,

$$\begin{aligned} Q(t)\{\alpha a_m + \beta b_m\} &= \{e^{-mt}(\alpha a_m + \beta b_m)\} = \\ &= \alpha\{e^{-mt}a_m\} + \beta\{e^{-mt}b_m\} = \alpha Q(t)\{a_m\} + \beta Q(t)\{b_m\}, \end{aligned}$$

siendo $\{a_m\}_{m\geq 0}$ y $\{b_m\}_{m\geq 0}$ sucesiones de ℓ^p y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Al ser una aplicación lineal, podemos ver que en norma la aplicación está acotada para así tener la condición de continuidad. Es decir,

$$\|Q(t)\{a_m\}\|_p^p = \sum_{m=0}^{\infty} |e^{-mt}a_m|^p \leq \sup_{m\geq 0} |e^{-mt}|^p \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^p = \|\{a_m\}\|_p^p < \infty.$$

Por tanto, hemos probado que la aplicación $Q(t)$ es continua y, además, que está bien definida: conduce elementos de ℓ^p a elementos del mismo espacio.

En segundo lugar, comprobemos que se verifican las dos condiciones de la Definición 1.1. Se tiene que

$$Q(0)\{a_m\} = \{e^0 a_m\} = \{a_m\}$$

para toda sucesión $\{a_m\}_{m\geq 0} \in \ell^p$. Por tanto, podemos afirmar que $Q(0) = I$. Por otra parte, dados $s, t \geq 0$,

$$Q(t+s)\{a_m\} = \{e^{-mt}e^{-ms}a_m\} = Q(t)\{e^{-ms}a_m\} = Q(t)Q(s)\{a_m\},$$

para toda sucesión de nuestro espacio de trabajo. De esta forma, $Q(s+t) = Q(s)Q(t)$, para todos $s, t \geq 0$.

Siguiendo el objetivo del ejemplo, vamos a probar que el semigrupo de operadores es fuertemente continuo. Consideremos la sucesión $\{a_m\}_{m\geq 0} \in \ell^p$. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos un valor $N > 0$ de forma que

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m|^p < \varepsilon,$$

quedando justificado este hecho debido a que se trata de la cola de una serie convegente, de forma que al hacer tender N a $+\infty$ dicha suma converge a 0, por lo que la podemos hacer tan pequeña como queramos. Una vez escogido ese valor de $N > 0$, podemos afirmar que existe un δ de manera que

$$\sum_{m=0}^{N} |e^{-mt} - 1|^p |a_m|^p < \varepsilon$$

siempre que $0 \leq t < \delta$, gracias a la continuidad de la función exponencial. Como finalmente se hará tender t a 0 podemos suponer ya el caso en el que dicha variable está acotada superiormente por el valor δ. Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\|Q(t)\{a_m\} - \{a_m\}\|_p^p &= \sum_{m=0}^{\infty} |e^{-mt} a_m - a_m|^p = \sum_{m=0}^{\infty} |e^{-mt} - 1|^p |a_m|^p \\ &\leq \sum_{m=0}^{N} |e^{-mt} - 1|^p |a_m|^p + \sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m|^p < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Como el resultado obtenido es válido para un valor de $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos hacer que sea tan pequeño como sea necesario y, de esta forma, si consideramos el límite cuando t tiende a 0 se puede afirmar que

$$\lim_{t \to 0} \|Q(t)\{a_m\} - \{a_m\}\|_p = 0,$$

para toda sucesión en el espacio ℓ^p.

Finalmente vamos a ver que el semigrupo de operadores no es uniformemente continuo. Para ello, acotaremos la norma de $Q(t) - I$ inferiormente por un valor positivo no nulo. Tendremos en cuenta la definición de dicha norma, así como los vectores de la base canónica en ℓ^p, es decir, $\{e_n\}_{n \geq 1}$ de forma que la componente $k-$ésima es 1 si $k = n$ y nula en caso contrario. Evidentemente, $\|e_n\|_p = 1$ parta todo $n \geq 1$. Con todo ello tenemos que

$$\begin{aligned}\|Q(t) - I\|^p &= \sup_{\|\{a_m\}\|_p = 1} \|Q(t)\{a_m\} - \{a_m\}\|_p^p \geq \|Q(t)(e_n) - e_n\|_p^p \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} |e^{-mt} e_n(m) - e_n(m)|^p = |e^{-nt} - 1|^p,\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada t fijo, si hacemos tender n a ∞ se tiene que

$$\|Q(t) - I\|^p \geq 1$$

y, por tanto, se puede afirmar que

$$\liminf_{t \to 0} \|Q(t) - I\| \geq 1,$$

de forma que el semigrupo de operadores no es uniformemente continuo.

♣

Antes de presentar y trabajar con nuevos conceptos, damos en el siguiente resultado dos propiedades sobre los semigrupos de operadores.

Teorema 1.9. *Sea X un espacio de Banach y el semigrupo de operadores fuertemente continuo $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Existen dos constantes C y γ de forma que*

$$\|Q(t)\| \leq Ce^{\gamma t}, \qquad 0 \leq t < \infty.$$

2. *Para cada $x \in X$, la aplicación*

$$\begin{array}{ccc} [0, +\infty) & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & Q(t)x \end{array} \tag{1.13}$$

es continua.

Demostración. 1. En primer lugar, supongamos que existe una sucesión no negativa de números reales $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tendiendo a 0 de forma que $\|Q(t_n)\|$ tiende a ∞, lo que quiere decir que la familia de operadores $\{Q(t_n)\}_{n\geq 1}$ no está uniformemente acotada alrededor de 0. Gracias al Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 5.2.3 de [Rud2]), se tendrá que la familia de operadores tampoco está puntualmente acotada en el espacio X, es decir, existirá un elemento $x \in X$ de forma que la colección $\{\|Q(t_n)x\|\}$ es no acotada, contradiciendo la hipótesis que establece que el semigrupo de operadores es fuertemente continuo.

Por tanto, podemos suponer que existe un $\delta > 0$ y un $C < \infty$ de forma que $\|Q(t)\| \leq C$ en el intervalo $[0, \delta]$. Como $0 \leq t < \infty$, consideramos un número natural n que satisfaga $(n-1)\delta \leq t \leq n\delta$, de forma que $0 \leq t/n \leq \delta$ y $\|Q(t/n)\| \leq C$.

Si recordamos ahora la ecuación funcional de la Definición 1.1,

$$Q(s+t) = Q(s)Q(t), \qquad \text{para todo } s, t \geq 0, \tag{1.14}$$

tenemos que

$$Q\left(\frac{t}{n}\right)^n = Q\left(\frac{t}{n}\right) \cdots Q\left(\frac{t}{n}\right) = Q\left(\frac{t}{n} + \cdots + \frac{t}{n}\right) = Q(t)$$

Utilizando las propiedades de la norma,

$$\|Q(t)\| = \left\| Q\left(\frac{t}{n}\right)^n \right\| \leq C^n. \tag{1.15}$$

Finalmente, utilizando la desigualdad $(n-1)\delta \leq t$, se tiene que

$$\|Q(t)\| \leq C^{1+\frac{t}{\delta}}. \tag{1.16}$$

Tomando $e^{\gamma} = C^{\frac{1}{\delta}}$ queda probado el primer apartado del teorema.

2. Dividiremos la prueba de este apartado en continuidad a la derecha y a la izquierda.

Para demostrar que la aplicación (1.13) es continua a la derecha, consideramos s y t de forma que $0 \leq s < t \leq T$. Se tiene que,

$$\begin{aligned}\|Q(t)x - Q(s)x\| &= \|Q(s+t-s)x - Q(s)x\| = \|Q(s)Q(t-s)x - Q(s)x\| \\ &= \|Q(s)(Q(t-s)x - x)\| \leq \|Q(s)\| \, \|Q(t-s)x - x\| \\ &\leq Ce^{\gamma s} \, \|Q(t-s)x - x\| \, ,\end{aligned}$$

debiéndose la segunda igualdad a la segunda propiedad de la Definición 1.1, la primera desigualdad al hecho de que las funciones $Q(t)$ son lineales y continuas y, por último, se ha utilizado el apartado anterior del presente teorema para la última cota superior.

Ahora bien, si hacemos tender $t \to s^{+}$, tenemos que

$$\lim_{t-s\to 0} \|Q(t-s)x - x\| = \|Q(0)x - x\| = \|x - x\| = 0,$$

gracias a propiedades de continuidad.

Por tanto, hemos probado que si $t-s$ tiende a 0, con $t-s > 0$, $Q(t)x$ tiende a $Q(s)x$ para todo $x \in X$, lo que equivale a decir que la aplicación $t \to Q(t)x$ es continua a la derecha en $[0, \infty)$, pues la hipótesis que se tenía era $t > s$.

En cuanto a la continuidad por la izquierda, consideramos un valor s fijo y $t < s$. Queremos probar que

$$\lim_{t\to s^{-}} Q(t)x = Q(s)x.$$

Para ello observamos que tenemos la siguiente factorización

$$Q(t)x - Q(s)x = Q(t)(x - Q(s-t)x),$$

gracias a una de las propiedades de la definición del semigrupo algebraico de operadores. Como, por hipótesis, el semigrupo con el que estamos trabajando es fuertemente continuo, tenemos que

$$\lim_{s-t\to 0} Q(s-t)x = x,$$

que es equivalente a decir

$$\lim_{t\to s^{-}} Q(s-t)x = x.$$

Por tanto, podemos afirmar que

$$\lim_{t\to s^-}(x - Q(s-t)x) = 0, \qquad x \in X.$$

Teniendo en cuenta ahora la norma de la diferencia de los operadores,

$$\begin{aligned}\|Q(t)x - Q(s)x\| &= \|Q(t)x - Q(t+s-t)x\| = \|Q(t)x - Q(t)Q(s-t)x\| \\ &\le \|Q(t)\|\,\|x - Q(s-t)x\| \le Ce^{\gamma t}\,\|x - Q(s-t)x\|\,.\end{aligned}$$

Como $t < s$, al calcular el límite cuando t tiende a s por la izquierda la cota superior obtenida tiende a 0 por lo que se ha probado justo antes, de forma que podemos garantizar que

$$\lim_{t\to s^-}\|Q(t)x - Q(s)x\| = 0,$$

quedando probada, de esta forma, la continuidad por la izquierda de la aplicación (1.13).

Con todo ello, podemos concluir que la aplicación anterior es continua en el intervalo $[0,+\infty)$. □

1.2. El generador infinitesimal.

En esta sección definiremos un operador conocido como generador infinitesimal que estará ligado a la convergencia de ciertos semigrupos de operadores. Para completar los conocimientos fundamentales sobre semigrupos de operadores ofreceremos una serie de propiedades de los semigrupos en los que se encuentra involucrado el generador infinitesimal.

Tal y como se prueba en el Apéndice B, toda función compleja y continua que satisfaga la condición $f(s+t) = f(s)f(t)$ es de la forma $f(t) = e^{At}$, siendo A una constante. Calculando su derivada y evaluándola en $t = 0$ podemos concluir que $f'(0) = A$. Además, es conveniente recordar, la definición de derivada en un punto, interesándonos en este caso el 0 :

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = A,$$

es decir, el límite del cociente incremental. Con todo ello, nos disponemos a trabajar con los operadores $\{Q(t)\}_{t\ge 0}$. Llamamos A_ε al cociente incremental

$$A_\varepsilon = \frac{Q(\varepsilon) - Q(0)}{\varepsilon} = \frac{Q(\varepsilon) - I}{\varepsilon} \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

Aplicando dicha función a un valor cualquiera $x \in X$, se tiene que

$$A_\varepsilon x = \frac{Q(\varepsilon)x - x}{\varepsilon} \qquad \text{para todo } x \in X, \varepsilon > 0. \tag{1.17}$$

Por último, definimos el operador A como el límite del cociente incremental, es decir,

$$Ax = \lim_{\varepsilon \to 0^+} A_\varepsilon x. \tag{1.18}$$

Denotaremos por $\mathscr{D}(A)$ al conjunto de $x \in X$ tales que el límite 1.18 existe.

Definición 1.10. *El operador A construido anteriormente se conoce como generador infinitesimal del semigrupo de operadores $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$.*

Se tiene que $\mathscr{D}(A)$ es un subespacio del espacio de partida X y, gracias a la linealidad de los operadores $Q(t)$, el operador A mantiene la misma propiedad.

Con el fin de ofrecer algunos ejemplos, nos disponemos ahora a hallar el generador infinitesimal de algunos de los semigrupos de operadores estudiados en la sección anterior.

Atendiendo a uno de esos casos, vimos que la familia $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ con $Q(t) = e^{tA}$ se trataba de un semigrupo de operadores uniformemente continuo. Gracias a un resultado que se estudiará más adelante (en concreto, el Teorema 1.14), podemos afirmar de manera inmediata que el operador $A \in \mathscr{B}(X)$ se trata del generador infinitesimal del semigrupo en cuestión.

Ejemplo 1.11. Si nos detenemos ahora en los operadores de multiplicación estudiados en el Ejemplo 1.8, el objetivo es probar que el conjunto $\mathscr{D}(A)$ viene definido por

$$\mathscr{D}(A) = \{\{a_m\} \in \ell^p \colon \{-ma_m\} \in \ell^p\},$$

teniéndose además que el generador infinitesimal del semigrupo está definido como $A\{a_m\} = \{-ma_m\}$ para toda sucesión $\{a_m\}_{m \geq 0} \in \ell^p$, tratándose de un operador no acotado.

Para probar la primera contención, consideramos $\{a_m\}_{m \geq 0} \in \mathscr{D}(A)$. En primer lugar, como $\mathscr{D}(A)$ es subespacio de ℓ^p se tiene que $\{a_m\}_{m \geq 0} \in \ell^p$. Por otra parte, el hecho de que pertenezca a $\mathscr{D}(A)$ nos dice que el límite que define $A\{a_m\}$ es convergente en ℓ^p. Como la convergencia en dicho espacio implica la convergencia coordenada a coordenada, no es difícil comprobar que la coordenada $m-$ésima de la sucesión $A\{a_m\}$ corresponde con $-ma_m$.

De esta forma, el generador infinitesimal se trata de la sucesión $\{-ma_m\}_{m \geq 0}$, teniéndose en consecuencia que dicha sucesión pertenece al espacio ℓ^p siempre que $\{a_m\}_{m \geq 0} \in \mathscr{D}(A)$.

Para la contención contraria, partimos de una sucesión $\{a_m\}_{m \geq 0} \in \ell^p$ de forma que $\{-ma_m\}_{m \geq 0} \in \ell^p$, con el fin de demostrar que existe el límite de la definición $A\{a_m\}$. Como el límite coordenada a coordenada no implica el límite de la sucesión en ℓ^p, tenemos que trabajar con la sucesión al completo desde primera hora.

En primer lugar, para cada $m \geq 0$ se tiene que

$$\left|\frac{e^{-mt}a_m - a_m}{t}\right| = \left|a_m \frac{e^{-mt}-1}{mt} m\right| = |a_m| \left|\frac{e^{-mt}-1}{mt}\right| m \leq C|a_m|m,$$

puesto que la función $(e^{-u}-1)/u$ está acotada en valor absoluto por una constante C siempre que $u \in (0, +\infty)$, tal y como es en nuestro caso con $u = mt$.

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, elegimos un valor $N > 0$ de forma que

$$\sum_{m=N+1}^{\infty} ((C+1)|a_m|m)^p = (C+1)^p \sum_{m=N+1}^{\infty} (|a_m|m)^p < \varepsilon,$$

hecho que queda justificado al tratarse de la cola de una serie convergente, pues $\{-ma_m\}_{m\geq 0} \in \ell^p$, de forma que podemos hacerla tan pequeña como sea conveniente.

De esta forma,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{Q(t)\{a_m\} - \{a_m\}}{t} - \{-ma_m\}\right\|_p^p &= \sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{e^{-mt}a_m - a_m}{t} + ma_m\right|^p \\
&\leq \sum_{m=1}^{N} \left|\frac{e^{-mt}a_m - a_m}{t} + ma_m\right|^p + (C+1)^p \sum_{m=N+1}^{\infty} (|a_m|m)^p \\
&\leq \sum_{m=1}^{N} \left|\frac{e^{-mt}a_m - a_m}{t} + ma_m\right|^p + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando límites en las desigualdades anteriores llegamos a que

$$\limsup_{t\to 0} \left\|\frac{Q(t)\{a_m\} - \{a_m\}}{t} - \{-ma_m\}\right\|_p^p \leq \lim_{t\to 0} \sum_{m=1}^{N} \left|\frac{e^{-mt}a_m - a_m}{t} + ma_m\right|^p + \varepsilon = \varepsilon.$$

Como el valor de $\varepsilon > 0$ es arbitrario, podemos hacer que sea tan pequeño como convenga de forma que se puede concluir que

$$\lim_{t\to 0} \left\|\frac{Q(t)\{a_m\} - \{a_m\}}{t} - \{-ma_m\}\right\|_p^p = 0.$$

De esta forma, hemos probado que $\{a_m\}_{m\geq 0} \in \mathscr{D}(A)$ y $A\{a_m\} = \{-ma_m\} \in \ell^p$.

♣

Ejemplo 1.12. Por último, vamos a estudiar el caso particular del espacio $L^2(\mathbb{R})$. Vamos a ver que, para el semigrupo de la traslación, el generador infinitesimal es la derivada de la función que estemos tratando en cada caso pero en un sentido más débil del concepto de derivada habitual.

A modo de motivación para este ejemplo, si tenemos una función continua y de soporte compacto, $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, se puede comprobar gracias a algunas de las propiedades del Apéndice A que $\widehat{f'}(s) = is\hat{f}(s)$. Ello nos lleva a considerar el conjunto de funciones de $L^2(\mathbb{R})$

$$B = \{f \in L^2(\mathbb{R})\colon s\hat{f}(s) \in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{1.19}$$

a partir del cual vamos se va a extraer el concepto de derivada. En concreto, vamos a entender dicha derivada como $\mathcal{F}^{-1}(s\hat{f}(s))$ para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, quedando bien definida gracias a que la transformada de Fourier es biyectiva en el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Tal y como se dijo al comienzo, nos disponemos a probar que $Af = f'$ para $f \in \mathscr{D}(A)$.

Suponiendo que existe el límite de la definición de generador infinitesimal, se tiene que

$$\lim_{t \to 0} \frac{Q(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(s+t) - f(s)}{t} = f'(s)$$

para toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$.

De nuevo, para justificar de manera correcta el cálculo del límite anterior usamos un argumento que ya ha aparecido anteriormente. Como en $L^2(\mathbb{R})$ manejamos clases de funciones, y no funciones concretas, no tiene sentido considerar el límite puntual de una clase. Lo correcto es verificar que se tiene el límite para las funciones continuas y, haciendo uso de la densidad, se tendrá inmediatamente para nuestro espacio en cuestión.

Para probar que una función $f \in \mathscr{D}(A)$ si y, solamente si, $s\hat{f}(s) \in L^2(\mathbb{R})$, es necesario tener en cuenta algunas propiedades de la transformada de Fourier, que se pueden consultar, tal y como se indicó anteriormente, en en el Apéndice A. Allí mismo se justifica el uso de dichas propiedades para cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$, que son las que manejamos en este caso.

Sea entonces $f \in L^2(\mathbb{R})$ y supongamos que $s\hat{f}(s) \in L^2(\mathbb{R})$. Por el Teorema A.3 se tiene, en primer lugar, que f es una función diferenciable. Tenemos que probar que

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{Q(t)f(s) - f(s)}{t} - f'(s) \right\|_2 = 0.$$

Partiendo de que existe la derivada f', tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{Q(t)f(s)-f(s)}{t}-f'(s)\right\|_2 &= \left\|\frac{\widehat{f(s+t)}-\hat{f}(s)}{t}-\widehat{f'(s)}\right\|_2 \\ &= \left\|\frac{(e^{its}-1)\hat{f}(s)}{t}-is\hat{f}(s)\right\|_2 \\ &= \left\|\left[\frac{1}{t}(e^{its}-1)-is\right]\hat{f}(s)\right\|_2 \\ &= \left\|\left[\frac{1}{its}(e^{its}-1)-1\right]is\hat{f}(s)\right\|_2, \qquad (1.20)\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la definición del semigrupo y la Identidad de Plancherel en la primera igualdad, así como algunas propiedades de la transformada de Fourier en el resto de desigualdades.

Ahora bien,

$$\frac{|e^{its}-1|}{|ts|}\leq 1$$

puesto que la cantidad del numerador, que es la distancia del punto de la circunferencia e^{its} a 1 es menor que si recorremos el arco de circunferencia que los une, cuya longitud es precisamente $|ts|$.

Por otra parte, si consideramos una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tendiendo a 0 y denotamos por φ_n a la sucesión de funciones

$$\varphi_n(s)=\left(\frac{e^{it_ns}-1}{it_ns}-1\right)is\hat{f}(s),$$

se puede comprobar fácilmente que, para todo $s\in\mathbb{R}$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(s)=0.$$

En consecuencia,

$$|\varphi_n^2(s)|\leq(2|s||\hat{f}(s)|)^2,$$

que se trata de una cantidad finita al integrarla puesto que estamos considerando funciones del espacio B definido arriba. Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada, podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty}\int|\varphi_n(s)|^2ds=0$$

y, por tanto, la expresión (1.20) tiende a 0 para toda sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tendiendo al mismo valor, quedando de esta forma probado que $f\in\mathscr{D}(A)$ y que $Af=f'$.

Recíprocamente, si $f \in \mathscr{D}(A)$, se tiene que $Af = f'$ en nuestro espacio $L^2(\mathbb{R})$. De esta forma,

$$\left\| is\hat{f} \right\|_2 = \left\| \widehat{f'} \right\|_2 = \|f'\|_2 < \infty,$$

por lo que $s\hat{f}(s) \in L^2(\mathbb{R})$. ♣

Una vez estudiados los ejemplos anteriores damos paso al siguiente resultado, donde se recogen una serie de propiedades de importancia que se usarán en alguna ocasión a lo largo del trabajo y cuyas pruebas veremos con detalle a continuación.

Teorema 1.13. *Sea $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores fuertemente continuo y A su generador infinitesimal. Se tiene que*

1. *$\mathscr{D}(A)$ es denso en X y A es una aplicación cerrada.*
2. *La ecuación diferencial*
$$\frac{d}{dt}Q(t)x = AQ(t)x = Q(t)Ax \tag{1.21}$$
se satisface para todo $x \in \mathscr{D}(A)$.
3. *Para todo $x \in X$,*
$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{tA_\varepsilon}x,$$
siendo la convergencia uniforme en todo subconjunto compacto de $[0, +\infty)$.
4. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$, la integral*
$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t)xdt$$
define un operador $R(\lambda) \in \mathscr{B}(X)$ cuya imagen es $\mathscr{D}(A)$ y cuya inversa es $\lambda I - A$. Dicho operador es llamado la resolvente del semigrupo $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$.

Demostración. 1. Para probar, en primer lugar, que $\mathscr{D}(A)$ es denso en el espacio X, veremos que cualquier elemento de X es límite de alguna sucesión del subespacio $\mathscr{D}(A)$. Construiremos dicha sucesión de forma conveniente de la siguiente forma.

Dado $t > 0$, definimos la función M_t a partir de una integral vectorial como

$$M_tx = \frac{1}{t}\int_0^t Q(s)xds, \tag{1.22}$$

con $x \in X$. En efecto, como $Q(s)x \in X$, se tiene también que $M_tx \in X$ y, por tanto, $M_t \in \mathscr{B}(X)$ y $\|M_t\| \leq Ce^{\gamma t}$ gracias a la primera propiedad del Teorema 1.9. Nuestro objetivo ahora es probar que $M_t x$ pertenece a $\mathscr{D}(A)$ y, además, que su límite es x cuando t converge a 0.

Previamente vamos a demostrar que

$$A_\varepsilon M_t x = A_t M_\varepsilon x, \qquad \varepsilon > 0, t > 0, x \in X. \tag{1.23}$$

Tenemos que

$$\int_0^\varepsilon Q(s)xds + \int_\varepsilon^{t+\varepsilon} Q(s)xds = \int_0^t Q(s)xds + \int_t^{t+\varepsilon} Q(s)xds$$

y, por tanto,

$$\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} Q(s)xds - \int_0^t Q(s)xds = \int_t^{t+\varepsilon} Q(s)xds - \int_0^\varepsilon Q(s)xds. \tag{1.24}$$

En la primera integral de la izquierda, hacemos el cambio $s = u + \varepsilon$, de forma que ahora se cumple $0 \leq u \leq t$. Como u es una variable, la renombramos como s para mayor comodidad. De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^t Q(s+\varepsilon)xds - \int_0^t Q(s)xds &= \int_0^t [Q(s+\varepsilon) - Q(s)]xds \\ &= \int_0^t [Q(s)Q(\varepsilon) - Q(s)]xds \\ &= [Q(\varepsilon) - I] \int_0^t Q(s)xds \\ &= \varepsilon A_\varepsilon t M_t x,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado diversas propiedades de las integrales vectoriales en la penúltima igualdad que pueden consultarse en el Apéndice C, así como las definiciones de A_ε y $M_t x$ en la igualdad final.

Análogamente, razonamos para el término derecho de la igualdad (1.24). Hacemos el cambio $s = u + t$, de forma que $0 \leq u \leq \varepsilon$. De nuevo, renombramos la variable u por s y se tiene que,

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon Q(s+t)xds - \int_0^\varepsilon Q(s)xds &= \int_0^\varepsilon [Q(s+t) - Q(s)]xds = \\ &= \int_0^\varepsilon [Q(s)Q(t) - Q(s)]xds = \\ &= [Q(t) - I] \int_0^\varepsilon Q(s)xds = \\ &= tA_t \varepsilon M_\varepsilon x,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado de nuevo propiedades citadas anteriormente como las de las integrales vectoriales. Gracias a la linealidad de las funciones A_ε y A_t, en cada caso, podemos cancelar las constantes no nulas t y ε, de forma que queda probada la igualdad (1.23).

Como el valor $\varepsilon > 0$ es arbitrario, para cada valor de t fijo, hacemos que tienda a 0 a ambos lados de la desigualdad. En el término de la derecha obtenemos $A_t(\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon x)$, de forma que, si existe ese límite, podremos hablar del límite cuando ε tiende a 0 de $A_\varepsilon M_t x$. Por tanto, procedemos a calcular el límite de $M_\varepsilon x$ cuando ε tiende a 0.

Utilizando el hecho de que el semigrupo es fuertemente continuo, fijamos $\eta > 0$ y tomamos un valor $\varepsilon(x) > 0$ de forma que

$$\|Q(s)x - x\| \leq \eta$$

si $s \leq \varepsilon(x)$. Con todo ello tenemos que

$$\begin{aligned}\|M_\varepsilon x - x\| &= \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon Q(s)x ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon x ds\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}(Q(s)x - x) ds\right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \|Q(s)x - x\|\, ds \leq \eta\end{aligned}$$

siempre que $s \leq \varepsilon(x)$. Como el valor de η es arbitrario y positivo, podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon x = x,$$

para todo $x \in X$. Por tanto, como el resultado obtenido es convergente, podemos hablar del límite en el término izquierdo de la igualdad (1.23) y, como consecuencia, se tiene que

$$AM_t x = A_t x, \qquad x \in X. \tag{1.25}$$

Este hecho significa que $M_t x \in \mathscr{D}(A)$. Por último, haciendo tender t a 0 de forma análoga a como se hizo anteriormente con ε, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} M_t x = x \in X,$$

por lo que queda probado que $\mathscr{D}(A)$ es un espacio denso en X.

En segundo lugar, para probar que A es un operador cerrado tenemos que comprobar que el grafo de A es un subespacio cerrado de $X \times X$.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathscr{D}(A)$ de forma que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} Ax_n = y.$$

El objetivo es demostrar que $x \in \mathscr{D}(A)$ y $Ax = y$. Tenemos, por una parte, que $Q(s)$ conmuta con $Q(t)$ para todos $s, t \geq 0$, puesto que

$$Q(s)Q(t) = Q(s+t) = Q(t+s) = Q(t)Q(s).$$

Por otro lado, se puede probar que $A_\varepsilon M_t = M_t A_\varepsilon$. En efecto,

$$A_\varepsilon M_t = \frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon)M_t - M_t] = M_t \frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon) - I] = M_t A_\varepsilon. \tag{1.26}$$

Aún más, si el límite de $A_\varepsilon M_t$ existe cuando ε tiende a 0, se tendrá que

$$AM_t x = M_t A x \tag{1.27}$$

para todo $x \in \mathscr{D}(A)$.

Haciendo uso de las igualdades (1.25) y (1.27), podemos afirmar que

$$A_t x_n = AM_t x_n = M_t A x_n.$$

Si hacemos tender n a $+\infty$, se tiene por la continuidad de las funciones A_t y M_t que

$$A_t x = M_t y. \tag{1.28}$$

Por último, hacemos tender t a 0. Tal y como se ha hecho en ocasiones anteriores, se obtiene que

$$\lim_{t \to 0} M_t y = y,$$

de forma que el resultado obtenido es convergente y, por tanto, podemos hablar del límite cuando t tiende a 0 de $A_t x$. En este caso, llegamos a $Ax = y$. Queda probado, de esta forma, que $x \in \mathscr{D}(A)$ y que el grafo de A es cerrado en el espacio correspondiente.

2. La igualdad (1.25) afirma que

$$A \frac{1}{t} \int_0^t Q(s)x ds = \frac{1}{t}[Q(t)x - x], \qquad x \in X.$$

Puesto que $\mathscr{D}(A)$ es un subespacio vectorial y A es lineal, se tiene que

$$A \int_0^t Q(s)x ds = Q(t)x - x, \qquad x \in X. \tag{1.29}$$

Como el integrando es continuo, podemos derivar a ambos lados de la igualdad, teniéndose para el término derecho que

$$\frac{d}{dt}(Q(t)x - x) = \frac{d}{dt}Q(t)x,$$

mientras que para el de la izquierda vamos a probar de manera separada que se tiene la igualdad deseada para las derivadas laterales. Empezando con la derivada por la derecha, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt^+}A\int_0^t Q(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left(A\int_0^{t+h} Q(s)xds - A\int_0^t Q(s)xds\right)\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{Q(t+h)x - x - Q(t)x + x}{h}\\ &= Q(t)\lim_{h\to 0^+}\frac{Q(h)x - x}{h} = Q(t)Ax,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la igualdad (1.29). Con todo ello, hemos probado que la derivada a la derecha de $Q(t)x$ respecto a t es igual a $Q(t)Ax$, siempre que $x \in \mathscr{D}(A)$.

En cuanto a la derivada por la izquierda, tenemos en cuenta que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{Q(t+h)x - Q(t)x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{Q(t-h)x - Q(t)x}{-h} = \lim_{h\to 0^+} Q(t-h)\frac{Q(h)x - x}{h},$$

de forma que vamos a probar que la última de las expresiones anteriores es igual a $Q(t)Ax$. Para ello, si consideramos la diferencia de los operadores implicados y sumamos y restamos el término $Q(t-h)Ax$ se tiene que

$$\begin{aligned}Q(t-h)\frac{Q(h)x - x}{h} - Q(t)Ax &= Q(t-h)\frac{Q(h)x - x}{h} - Q(t)Ax \pm Q(t-h)Ax\\ &= Q(t-h)\left(\frac{Q(h)x - x}{h} - Ax\right) + Q(t-h)(Ax) - Q(t)Ax.\end{aligned}$$

Por tanto, si acotamos en norma se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|Q(t-h)\frac{Q(h)x - x}{h} - Q(t)Ax\right\| &\leq \|Q(t-h)\|\left\|\frac{Q(h)x - x}{h} - Ax\right\|\\ &\quad + \|Q(t-h)(Ax) - Q(t)Ax\|.\end{aligned}$$

Ahora bien, utilizando que existen dos constantes C y γ con $\|Q(t)\| \leq Ce^{\gamma t}$ para todo $t \geq 0$, y que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{Q(h)x - x}{h} = Ax$$

se tiene que el primer sumando de la cota obtenida tiende a 0 cuando hagamos tender h a 0 por la derecha. Del mismo modo se consigue el mismo valor del límite para el segundo sumando haciendo uso de la continuidad fuerte del semigrupo.

Con todo ello, podemos concluir que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{Q(t+h)x - Q(t)x}{h} = Q(t)Ax.$$

Como ha sido probada la misma desigualdad para las dos derivadas laterales, estamos en condiciones de afirmar que

$$\frac{d}{dt}Q(t)x = Q(t)Ax. \tag{1.30}$$

Por último, siguiendo de nuevo la definición de A llegamos a que si $x \in \mathscr{D}(A)$,

$$\begin{aligned} AQ(t)x &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon)Q(t)x - Q(t)x] \\ &= Q(t) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[Q(\varepsilon)x - x] = Q(t)Ax, \end{aligned}$$

de donde podemos afirmar que $Q(t)x \in \mathscr{D}(A)$. De esta forma queda probado que

$$\frac{d}{dt}Q(t)x = AQ(t)x = Q(t)Ax, \qquad x \in \mathscr{D}(A). \tag{1.31}$$

3. Para demostrar el resultado correspondiente a este apartado, el primer objetivo que debemos plantear es el de encontrar una cota superior para la norma de e^{tA_ε}. Comenzamos desarrollando en serie de potencias dicha función.

$$e^{tA_\varepsilon} = e^{\frac{t}{\varepsilon}(Q(\varepsilon)-I)} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} e^{\frac{t}{\varepsilon}Q(\varepsilon)} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q(\varepsilon)^n}{\varepsilon^n n!} = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n Q(n\varepsilon)}{\varepsilon^n n!},$$

donde se ha utilizado la siguiente propiedad de los semigrupos de operadores:

$$Q(\varepsilon)^n = Q(\varepsilon) \cdots Q(\varepsilon) = Q(\varepsilon + \cdots + \varepsilon) = Q(n\varepsilon).$$

Aplicando la función norma y acotando mediante la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\varepsilon} \right\| &\le e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \left\| Q(n\varepsilon) \right\|}{\varepsilon^n n!} \le e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n C e^{\gamma n \varepsilon}}{\varepsilon^n n!} = C e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t e^{\gamma\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^n \frac{1}{n!} \\ &= C e^{-\frac{t}{\varepsilon}} e^{\frac{t}{\varepsilon} e^{\gamma\varepsilon}} = C e^{\frac{t}{\varepsilon}(e^{\gamma\varepsilon}-1)} \end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$. Además, como vamos a considerar valores muy cercanos a 0 de ε, podemos exigir que $\varepsilon < 1$. De esta forma, se puede seguir acotando superiormente la expresión anterior y se tiene

$$\left\| e^{tA_\varepsilon} \right\| \le C e^{\frac{t}{\varepsilon}(e^{\gamma\varepsilon}-1)} \le C e^{t(e^{\gamma}-1)} \le C e^{te^{\gamma}} \tag{1.32}$$

para $0 < \varepsilon < 1$. Cabe señalar que la segunda desigualdad es debido a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{t}{\varepsilon}(e^{\gamma\varepsilon} - 1) &= \frac{t}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma\varepsilon)^n}{n!} = t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n \varepsilon^{n-1}}{n!} \\ &\le t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} = t(e^{\gamma} - 1). \end{aligned}$$

Fijado ahora un punto $x \in X$, vamos a definir la función $\varphi_\varepsilon(s)$ como sigue:

$$\varphi_\varepsilon(s) = e^{(t-s)A_\varepsilon} Q(s)x, \qquad 0 \leq s \leq t. \tag{1.33}$$

Si $x \in \mathscr{D}(A)$, podemos utilizar la ecuación diferencial para $Q(s)$ demostrada anteriormente, así como la regla de la cadena, de forma que se tiene

$$\varphi'_\varepsilon(s) = e^{(t-s)A_\varepsilon}(-A_\varepsilon)Q(s)x + e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)Ax = e^{(t-s)A_\varepsilon}Q(s)(Ax - A_\varepsilon x). \tag{1.34}$$

Si ahora utilizamos algunas cotas conocidas, como la que se dio para la norma de $Q(t)$ o, la obtenida en (1.32), se tiene que

$$\begin{aligned} \|\varphi'_\varepsilon(s)\| &\leq \left\|e^{(t-s)A_\varepsilon}\right\| \|Q(s)\| \|Ax - A_\varepsilon x\| \leq Ce^{(t-s)e^\gamma} C' e^{\gamma s} \|Ax - A_\varepsilon x\| \\ &\leq Ce^{te^\gamma} C' e^{\gamma t} \|Ax - A_\varepsilon x\| = K(t) \|Ax - A_\varepsilon x\| \end{aligned} \tag{1.35}$$

siendo $K(t) < \infty$ y, siempre que $0 \leq s \leq t$, $0 < \varepsilon \leq 1$ y $x \in \mathscr{D}(A)$.

En particular, la cota anterior será válida cuando el valor de t se acerque a 0 y, de forma consecuente, también lo haga el valor de s. De esta forma, teniendo en cuenta los valores de la función $\varphi_\varepsilon(s)$ evaluada en t y en 0, y haciendo uso del Teorema del Valor Medio, se tiene que

$$\|\varphi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(0)\| = \left\|Q(t)x - e^{tA_\varepsilon}x\right\| \leq tK(t) \|Ax - A_\varepsilon x\|, \tag{1.36}$$

para $x \in \mathscr{D}(A)$ y $0 < \varepsilon \leq 1$. Tomando límite cuando ε tiende a 0, el término de la derecha tiende a 0 siempre que exista $\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon x$. Es decir, hemos obtenido que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e^{tA_\varepsilon} x = Q(t)x, \tag{1.37}$$

para $x \in \mathscr{D}(A)$.

Sin embargo, nuestro objetivo era demostrar la convergencia en todo el espacio X. Sea $[0, T]$ un compacto de $\mathbb{R}$. Si prestamos atención al operador $Q(t) - e^{tA_\varepsilon}$, se tiene que es acotado en norma siempre que $0 \leq t \leq T$ y $0 < \varepsilon \leq 1$. En efecto, usando la cota proporcionada por el primer apartado del Teorema 1.9, así como la expresión (1.32) se tiene que,

$$\left\|Q(t) - e^{tA_\varepsilon}\right\| \leq \|Q(t)\| + \left\|e^{tA_\varepsilon}\right\| \leq Ce^{\gamma t} + C'e^{te^\gamma} \leq Ce^{\gamma T} + C'e^{Te^\gamma} < \infty.$$

Por tanto, los operadores $\{e^{tA_\varepsilon}\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ forman una familia de operadores uniformemente acotados que convergen en un denso de X cuando ε tiende a 0, en concreto, en $\mathscr{D}(A)$. Utilizando este argumento de densidad, la convergencia ha de ser cierta en todo el espacio, es decir,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} e^{tA_\varepsilon} x = Q(t)x, \tag{1.38}$$

para todo $x \in X$, como se quería probar.

4. En primer lugar, comprobaremos que el operador $R(\lambda)$ está bien definido. Para ello, habrá que probar que la integral impropia converge, así como las propiedades de linealidad y continuidad necesarias para que pertenezca al espacio $\mathscr{B}(X)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \, \|Q(t)x\| \, dt &\leq C \, \|x\| \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re}\lambda t} e^{\gamma t} dt \\ &= C \, \|x\| \int_0^\infty e^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)t} dt = \frac{C \, \|x\|}{\operatorname{Re}\lambda - \gamma} < \infty,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la cota proporcionada por el Teorema 1.9, así como la hipótesis de que $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$. Esto significa que la integral que define al operador $R(\lambda)$ en valor absoluto converge y, por tanto, la integral impropia es convergente, por lo que el operador $R(\lambda)$ va del espacio X en él mismo. La propiedad de linealidad se sigue de que la posee el operador $Q(t)$, que aparece en el integrando. Además, los cálculos anteriores prueban también que

$$\|R(\lambda)x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t) x dt \right\| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \, \|Q(t)x\| \, dt < \frac{C \, \|x\|}{\operatorname{Re}\lambda - \gamma} < \infty,$$

de forma que el operador es acotado, condición equivalente a la de continuidad siempre que el operador sea lineal. Con todo ello concluimos la prueba de que el operador $R(\lambda)$ está bien definido.

En segundo lugar, vamos a demostrar que el conjunto imagen de $R(\lambda)$ es exactamente el espacio $\mathscr{D}(A)$. Lo haremos por doble inclusión. De esta forma, sea $x \in X$, nos disponemos a demostrar que $R(\lambda)x \in \mathscr{D}(A)$. En otras palabras, tenemos que ver que existe el siguiente límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon R(\lambda)x, \qquad x \in X.$$

Para ello, se tiene que

$$\begin{aligned}\varepsilon A_\varepsilon R(\lambda)x = Q(\varepsilon)R(\lambda)x - R(\lambda)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(\varepsilon) Q(t) x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t) x dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t+\varepsilon) x dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t) x dt,\end{aligned}$$

quedando justificado el intercambio de $Q(\varepsilon)$ con la integral gracias a las propiedades de las integrales vectoriales.

Seguidamente, hacemos el cambio $u = t + \varepsilon$ pero, como u es una variable, la renombramos por t para mayor comodidad. De esta forma, tenemos que lo anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t}e^{\lambda\varepsilon}Q(t)xdt-\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t)xdt\\
&=e^{\lambda\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t)xdt-e^{\lambda\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}Q(t)xdt-\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t)xdt\\
&=(e^{\lambda\varepsilon}-1)\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t)xdt-e^{\lambda\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}Q(t)xdt.
\end{aligned}$$

Debido a que $\varepsilon>0$, podemos despejarlo hacia el lado derecho de la igualdad, de forma que

$$\begin{aligned}
A_\varepsilon R(\lambda)x&=\frac{e^{\lambda\varepsilon}-1}{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\lambda t}Q(t)xdt-\frac{e^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}Q(t)xdt\\
&=\frac{e^{\lambda\varepsilon}-1}{\varepsilon}R(\lambda)x-\frac{e^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}Q(t)xdt. \qquad (1.39)
\end{aligned}$$

Si hacemos tender ε a 0 y el término de la derecha resulta ser convergente, se tendrá que el límite que obtendríamos coincidiría con $AR(\lambda)x$. Vamos a comprobar si se tiene esta condición. Por una parte, no es difícil comprobar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\lambda\varepsilon}-1}{\varepsilon}=\lambda,$$

puesto que la derivada de la función $\varepsilon\longmapsto e^{\lambda\varepsilon}$ en $\varepsilon=0$ es igual a λ.

Por otra parte, estudiamos el límite cuando ε tiende a 0 de la función que aparece en el segundo sumando:

$$\frac{e^{\lambda\varepsilon}}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t}Q(t)xdt.$$

Para ello, observamos que la función del integrando $\varphi(t)=e^{-\lambda t}Q(t)x$ es el producto de una función escalar continua de $[0,+\infty)$ en $\mathbb{R}$ como es la exponencial, con una función vectorial continua del mismo dominio pero con valores en X, de forma que φ se trata de una función vectorial continua en el dominio $[0,+\infty)$. Gracias a la continuidad de dicha función en $[0,+\infty)$ se puede probar que

$$\varphi(0)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\varphi(s)ds.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \varphi(s) ds - \varphi(0) \right\|_X &= \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \varphi(s) ds - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \varphi(0) ds \right\|_X \\
&= \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} (\varphi(s) - \varphi(0)) ds \right\|_X \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \left\| \varphi(s) - \varphi(0) \right\|_X ds \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} \left\| \varphi(s) - \varphi(0) \right\|_X .
\end{aligned}$$

Al hacer tender ε a 0, el valor s se comporta de la misma forma, de manera que la norma resultante tiende a 0 gracias a la continuidad de la función φ en 0.

De esta forma, podemos afirmar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-\lambda t} Q(t) x dt = e^{-\lambda 0} Q(0) x = x$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\lambda \varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-\lambda t} Q(t) x dt = x.$$

Con todo ello, hemos probado que el lado derecho de la igualdad (1.39) es convergente cuando ε tiende a 0 y, por tanto, se da la igualdad

$$AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x. \tag{1.40}$$

Como el término de la derecha es finito, significa que $R(\lambda)x \in \mathscr{D}(A)$, como queríamos probar con el anterior razonamiento.

Haciendo uso de la expresión (1.40), se tiene que

$$x = \lambda R(\lambda)x - AR(\lambda)x = (\lambda I - A)R(\lambda)x, \qquad x \in X, \tag{1.41}$$

lo que significa que el operador $\lambda I - A$ es, justamente, el inverso a la izquierda de $R(\lambda)$.

Por último, vamos a demostrar que cualquier elemento de $\mathscr{D}(A)$ pertenece a la imagen de $R(\lambda)$. Sea $x \in \mathscr{D}(A)$, por definición significa que existe el límite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} A_{\varepsilon} x$$

y es igual a Ax. Por tanto, aplicamos el operador $R(\lambda)$ a $A_{\varepsilon} x$ de forma que se tiene

$$R(\lambda) A_{\varepsilon} x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q(t) A_{\varepsilon} x dt. \tag{1.42}$$

Haciendo uso de la definición de A_ε es fácil comprobar que dicho operador conmuta con $Q(t)$, es decir, $Q(t)A_\varepsilon = A_\varepsilon Q(t)$. En consecuencia,

$$R(\lambda)A_\varepsilon x = A_\varepsilon R(\lambda)x. \tag{1.43}$$

Anteriormente se probó que para cualquier $x \in X$ se tenía que $R(\lambda)x \in \mathscr{D}(A)$. En particular, haciendo uso de la hipótesis de la que partimos ahora de que $x \in \mathscr{D}(A)$ se tendrá, por lo anterior, que el término de la derecha de la igualdad (1.43) converge a $AR(\lambda)x$ cuando ε tiende a 0. Del mismo modo, el término de la izquierda de la citada igualdad tenderá a $R(\lambda)Ax$, de forma que se tiene

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x \tag{1.44}$$

para todo $x \in X$. Haciendo uso ahora de la expresión (1.40) tenemos que

$$R(\lambda)Ax = AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$$

que equivale a decir

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \qquad x \in \mathscr{D}(A), \tag{1.45}$$

por lo que podemos afirmar que x pertenece a la imagen del operador $R(\lambda)$. Además, se tiene que $\lambda I - A$ es el operador inverso a la derecha de $R(\lambda)$.

Con ello, queda probada la doble inclusión y, por tanto, damos por concluida la prueba del presente teorema. □

Teorema 1.14. *Sea $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de operadores y A el generador infinitesimal de dicho semigrupo. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\mathscr{D}(A) = X$.
2. $\lim_{\varepsilon\to 0} \|Q(\varepsilon) - I\| = 0$, *es decir, el semigrupo es uniformemente continuo.*
3. $A \in \mathscr{B}(X)$ *y* $Q(t) = e^{tA}$ *para* $0 \leq t < \infty$.

Demostración. Comenzamos suponiendo que se verifica $\mathscr{D}(A) = X$. Este hecho quiere decir que para todo elemento $x \in X$ existe el siguiente límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x.$$

Por tanto, podemos afirmar que la familia de operadores A_ε es puntualmente acotada en el espacio X para valores de $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeños, por ejemplo, $\varepsilon \in (0, 1]$. Es decir,

$$\sup\{\|A_\varepsilon x\| : 0 < \varepsilon \leq 1\} < \infty, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Gracias al Teorema de Banach-Steinhaus, podemos afirmar, además, que la familia de operadores está uniformemente acotada también para valores de $\varepsilon > 0$ pequeños, es decir,

$$\sup\{\|A_\varepsilon\| : 0 < \varepsilon \leq 1\} < \infty.$$

Equivalentemente, se puede decir que existe una constante $M > 0$ de forma que $\|A_\varepsilon\| < M$ para esos valores de ε.

Gracias a la definición del operador A_ε, tenemos que

$$Q(\varepsilon) - I = \varepsilon A_\varepsilon.$$

Tomando norma en la anterior igualdad y utilizando los resultados a los que hemos llegado gracias a las hipótesis, tenemos que

$$\|Q(\varepsilon) - I\| = \|\varepsilon A_\varepsilon\| = \varepsilon \|A_\varepsilon\| \leq \varepsilon M. \tag{1.46}$$

Como a pesar de ser pequeño, el valor de ε es arbitrario, hacemos que tienda a 0 de forma que podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|Q(\varepsilon) - I\| = 0, \tag{1.47}$$

es decir, queda probado que (1) implica (2).

Supongamos que (2) es cierto. Vamos a demostrar que $A \in \mathscr{B}(X)$ y, además, $Q(t) = e^{tA}$ para todo valor t con $0 \leq t < \infty$.

En primer lugar, queremos probar que A es un operador lineal y continuo del espacio X en él mismo. Ya sabemos por toda la materia vista anteriormente que A es lineal. Por otra parte, es conocido que, para todo operador lineal, la propiedad de continuidad es equivalente a la de ser acotado, por lo que nos disponemos a demostrar esto último para el operador A.

Recordamos que en la prueba del Teorema 1.13 se definieron los operadores M_t de la siguiente forma

$$M_t x = \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) x ds, \qquad x \in X, t > 0.$$

Vamos a probar, en primer lugar, que estos operadores tienden en norma a la identidad cuando t tiende a 0. Se tiene que

$$\begin{aligned} \|M_t - I\| &= \sup_{\|x\|=1} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t Q(s) x ds - x \right\| = \sup_{\|x\|=1} \left\| \frac{1}{t} \int_0^t (Q(s) - I) x ds \right\| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|Q(s) - I\| \, ds \leq \frac{1}{t} t \sup_{0 \leq s \leq t} \|Q(s) - I\| = \sup_{0 \leq s \leq t} \|Q(s) - I\| \end{aligned}$$

El hecho de que t tienda a 0 implica que s se acerque al mismo valor, de forma que, utilizando la hipótesis de partida, podemos afirmar que

$$\lim_{t \to 0} \|M_t - I\| = 0. \tag{1.48}$$

Es conveniente recordar que $M_t \in \mathscr{B}(X)$, además de que se daban las igualdades

$$A_t M_\varepsilon = A_\varepsilon M_t \qquad y \qquad A_\varepsilon M_t = M_t A_\varepsilon$$

para $\varepsilon, t > 0$. Si tenemos en cuenta todas esas igualdades ya probadas, podemos afirmar que

$$A_t M_\varepsilon = M_t A_\varepsilon. \tag{1.49}$$

Usando que $\lim\limits_{t\to 0} \|M_t - T\| = 0$, podemos tomar un valor $t > 0$ de forma que el operador M_t sea invertible en el espacio $\mathscr{B}(X)$. Gracias a la expresión (1.49), se tendría que

$$A_\varepsilon = (M_t)^{-1} A_t M_\varepsilon. \tag{1.50}$$

Dado un elemento $x \in X$ cualquiera, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x = (M_t)^{-1} A_t M_\varepsilon x = (M_t)^{-1} A_t x.$$

Como $(M_t)^{-1} A_t \in \mathscr{B}(X)$ por composición de operadores que se encuentran en dicho espacio, podemos afirmar que el límite anterior es convergente para todo $x \in X$ y, gracias a la definición del operador A, se tiene que $A = (M_t)^{-1} A_t$, de forma que $A \in \mathscr{B}(X)$. Aún más, se verifica, tal y como se muestra a continuación, que la convergencia en norma de $A_\varepsilon - A$ es a 0 :

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0} \|A_\varepsilon - A\| &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \left\|(M_t)^{-1} A_t M_\varepsilon - (M_t)^{-1} A_t\right\| \\ &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \left\|((M_t)^{-1} A_t)(M_\varepsilon - I)\right\| \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \left\|(M_t)^{-1} A_t\right\| \|M_\varepsilon - I\| = 0,\end{aligned} \tag{1.51}$$

donde hemos utilizado el límite calculado al comienzo de esta prueba, así como el hecho de que $(M_t)^{-1} A_t$ es un operador acotado en X. De esta forma, se tiene que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|A_\varepsilon - A\| = 0.$$

Por último, teníamos gracias al Teorema 1.13 que

$$Q(t)x = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{tA_\varepsilon} x, \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Utilizando el resultado (1.51), se verifica que

$$Q(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} e^{tA_\varepsilon} = e^{tA}, \tag{1.52}$$

que es la igualdad que se pedía demostrar.

Para finalizar la prueba del presente teorema, debemos demostrar, suponiendo los resultados ya probados, que $X \subset \mathscr{D}(A)$ de forma que, como se tiene siempre la contención contraria, tendríamos que los dos conjuntos son iguales.

Pero este resultado es trivial haciendo uso de las hipótesis del segundo apartado. Si $A \in \mathscr{B}(X)$, significa que para todo elemento del espacio, el valor Ax está definido y, equivalentemente, existe el límite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon x$. Por tanto, queda probado que $\mathscr{D}(A) = X$. $\square$

En particular, el resultado anterior afirma que si $A \in \mathscr{B}(X)$, entonces el generador infinitesimal del semigrupo definido por e^{tA} es precisamente el operador A.

Capítulo 2

Espacios de funciones analíticas.

2.1. Funciones armónicas y subarmónicas.

En esta primera sección vamos a presentar una serie de resultados que serán necesarios para el posterior desarrollo del presente capítulo. La mayoría de ellos han sido vistos en la asignatura *Variable Compleja y Operadores* del Máster Universitario de Matemáticas (Universidad de Sevilla), de forma que para algunos resultados no se expondrá sus respectivas pruebas. A cambio de eso, daremos unas referencias en las que se podrán consultar dichas demostraciones.

Sea Ω una región del plano complejo $\mathbb{C}$. Decimos que una función $u\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es armónica si $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ y $\Delta u = 0$. Es decir, si u es dos veces diferenciable, con sus derivadas continuas y, además, el laplaciano es 0, siendo éste el operador definido como

$$\Delta f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \tag{2.1}$$

en coordenadas cartesianas para $\mathbb{R}^2$.

Es posible probar que, en caso de contar con una función armónica u, dicha función es continua (hecho evidente al tratarse de una función de $\mathscr{C}^2(\Omega)$) y, además,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt, \qquad \text{si } \overline{B}(a,r) \subset \Omega, \tag{2.2}$$

siendo $\overline{B}(a,r)$ la bola cerrada de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$. Además, el recíproco también es cierto. Con todo ello damos paso a la siguiente definición:

Definición 2.1. *Una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es subarmónica si es continua y*

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt, \qquad \textit{si } \overline{B}(a,r) \subset \Omega. \tag{2.3}$$

Evidentemente se trata un concepto más débil que el de función armónica pero será suficiente para algunos resultados que veremos más adelante.

Veamos ahora una serie de propiedades de las funciones subarmónicas, puesto que algunas de ellas serán utilizadas a lo largo del capítulo.

Proposición 2.2. *Sean $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones subarmónicas. Se tiene*

1. *$u + v$ son subarmónicas.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda \geq 0$, entonces λu es subarmónica.*
3. *La función $\max\{u, v\}$ es subarmónica.*

Demostración. Las dos primeras propiedades son inmediatas siguiendo la definición de función subarmónica.

Para probar la tercera propiedad, supongamos que $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$. Tenemos que el máximo de funciones continuas es una función continua y, en cuanto a la subarmonicidad, definimos la función g como

$$g(z) = \max\{u(z), v(z)\}, \qquad z \in \Omega.$$

En ese caso,

$$\begin{aligned} u(a) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{it})dt, \\ v(a) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + re^{it})dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{it})dt. \end{aligned}$$

Por tanto, al tomar máximo se tiene que

$$g(a) = \max\{u(a), v(a)\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{it})dt,$$

por lo que $g(z)$ es una función subarmónica, que es lo que se quería probar. $\square$

Proposición 2.3. *Si u es armónica, entonces $|u|$ es subarmónica. En particular, el módulo de una función analítica es subarmónica.*

Demostración. Suponiendo que $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$, si u es armónica se tiene que

$$|u(a)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(a + re^{it})|dt,$$

de forma que podemos afirmar que $|u|$ es una función subarmónica.

En cuanto al caso en el que tengamos una función analítica f, la prueba es exactamente la misma a la anterior teniendo en cuenta, gracias al Teorema del Valor Medio, que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt,$$

siempre que $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$, como es nuestro caso. $\square$

Teorema 2.4 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sean* $(\Delta, \Sigma, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* I *un intervalo de* $\mathbb{R}$ *(acotado o no),* $f\colon \Delta \to I$ *una función integrable y* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *una función convexa. Entonces,*

$$\varphi\left(\int_\Delta f d\mathbb{P}\right) \le \int_\Delta (\varphi \circ f) d\mathbb{P}. \tag{2.4}$$

Demostración. Sea $m = \int_\Delta f d\mathbb{P}$, que pertenece al intervalo I. Como φ es convexa en I, existirán $a, b \in \mathbb{R}$ de forma que $\varphi(x) \ge ax + b$ para todo $x \in I$ y $\varphi(m) = am + b$, es decir, la recta $y = ax+b$ es una subtangente a φ en el punto $m \in I$. (De hecho, podemos encontrarnos con casos en los que existan infinitas rectas con estas características). Con todo ello se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Delta (\varphi \circ f) d\mathbb{P} &\ge \int_\Delta (af+b) d\mathbb{P} = a\int_\Delta f d\mathbb{P} + b \\ &= am + b = \varphi(m) = \varphi\left(\int_\Delta f d\mathbb{P}\right),\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad. $\square$

Proposición 2.5. *Sea* I *un intervalo (acotado o no) de* $\mathbb{R}$ *y* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *una función convexa y creciente. Si* $u\colon \Omega \to I$ *es subarmónica, entonces* $\varphi \circ u$ *es subarmónica en* Ω.

Demostración. Supongamos que $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$. Como u es subarmónica en Ω, se tiene que

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})dt.$$

Utilizando el hecho de que φ es creciente, así como la desigualdad de Jensen, llegamos a que

$$\varphi(u(a)) \le \varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})dt\right) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi \circ u)(a+re^{it})dt,$$

quedando probado que $\varphi \circ u$ es una función subarmónica en Ω. $\square$

Si tenemos ahora en cuenta que la función $t \longmapsto t^p$ es convexa y creciente en $[0, +\infty)$ para $p \ge 1$, así como que $|f|$ es subarmónica si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ gracias a la Proposición 2.3, podemos enunciar el siguiente corolario de los resultados precedentes.

Corolario 2.6. *Si* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $p \ge 1$, *entonces* $|f|^p$ *es una función subarmónica en* Ω.

Es necesario señalar que, aunque no se va a probar al no ser necesario para nuestro trabajo, el resultado anterior también es cierto si $0 < p < 1$.

Los próximos dos resultados serán de gran utilidad más adelante y, aunque no vamos a detallar las respectivas pruebas, es posible consultarlas en el Capítulo 17 de [Rud2].

Proposición 2.7. *Sea Ω una región acotada de $\mathbb{C}$ y $u, v\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Si v es armónica en Ω y u es subarmónica en dicha región de forma que $u(z) \leq v(z)$ para todo $z \in \partial\Omega$, entonces $u(z) \leq v(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Más aún, es posible probar que el resultado anterior y el hecho de que u sea subarmónica en Ω son afirmaciones equivalentes. En cierto sentido, la proposición anterior da una explicación del término "subarmónica".

Proposición 2.8. *Sean $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica, $a \in \Omega$, $\rho > 0$ tal que $B(a, \rho) \subset \Omega$, y la función ψ definida por*

$$\begin{array}{rccl} \psi\colon & [0, \rho) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(a + re^{it})dt. \end{array}$$

Entonces ψ es creciente en su dominio.

2.2. Espacios de Hardy y espacios de Bergman.

Al igual que en la sección anterior, se van a exponer a continuación resultados y conceptos estudiados en la asignatura "Variable Compleja y Operadores", aunque muchos de ellos se pueden consultar en obras de la bibliografía como [Dur], en el caso de los espacios de Hardy; o bien en [DS] , cuando hablemos de espacios de Bergman.

Definición 2.9. *Sea $0 < p < \infty$. Definimos el espacio de Hardy al que denotaremos por $H^p(\mathbb{D})$ como el conjunto de funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right) < +\infty. \tag{2.5}$$

Para el caso $p = +\infty$ se define el espacio correspondiente como

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \colon f \text{ es holomorfa y acotada}\}, \tag{2.6}$$

que se trata de un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup\{|f(z)| \colon z \in \mathbb{D}\}. \tag{2.7}$$

Como se puede observar, las definiciones se han dado para el caso en el que el dominio es el disco unidad $\mathbb{D}$, pues será con lo que trabajemos habitualmente, salvo que se indique lo contrario. Por comodidad, utilizaremos de aquí en adelante la notación $H^p(\mathbb{D}) = H^p$ para $0 < p \leq +\infty$.

Para el caso $0 < p < +\infty$ podemos definir un funcional $\|f\|_{H^p} = \sup_{0\leq r<1} m_p(f,r)$, donde

$$m_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.8}$$

Este funcional tiene sentido para todos los casos de p finito pero no podemos decir que en todos ellos sea una norma. Si $p \geq 1$, entonces $\|\cdot\|_{H^p}$ se trata de una norma. En caso contrario, donde $p < 1$, lo máximo que podemos decir es que la aplicación $d_p(f,g) = \|f-g\|_{H^p}^p$ es una distancia. Más aún, se puede probar usando la Proposición 2.8 que para este caso, en el que p es finito, se tiene que

$$\|f\|_{H^p} = \lim_{r\to 1^-} m_p(f,r), \tag{2.9}$$

donde recordamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$.

A continuación vamos a hablar de convergencia de funciones en estos espacios, exponiendo algunos resultados que tendrán gran utilidad más adelante.

En primer lugar, podemos observar que dados p, q con $1 \leq p < q < +\infty$, se verifica la siguiente relación entre la contención de unos espacios en otros:

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p, \tag{2.10}$$

debido, principalmente, a que nos encontramos en un espacio de probabilidad, donde las normas son crecientes, es decir,

$$\|\cdot\|_{H^\infty} \geq \|\cdot\|_{H^q} \geq \|\cdot\|_{H^p}. \tag{2.11}$$

A continuación vamos a ver un lema del que obtendremos algunas consecuencias interesantes.

Lema 2.10. *Sea $f \in H^1$. Para todo $z \in \mathbb{D}$ se verifica que*

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|} \|f\|_{H^1}. \tag{2.12}$$

Demostración. Sea $z \in \mathbb{D}$, tomamos un radio $r > 0$ de forma que $r > |z|$. Como consecuencia del Teorema integral de Cauchy tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z} re^{it} dt.$$

Acotando ahora en valor absoluto y, teniendo en cuenta que

$$|re^{it} - z| \geq ||re^{it}| - |z|| = |r - |z|| \geq r - |z|,$$

llegamos a que

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z} re^{it} dt\right| \leq \frac{r}{r-|z|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|dt \leq \frac{r}{r-|z|}\, \|f\|_{H^1}\,.$$

Como el procedimiento se ha llevado a cabo para un $r > |z|$ arbitrario, hacemos que tienda a 1 por la izquierda de forma que,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}\, \|f\|_{H^1}\,,$$

que es lo que queríamos probar. □

Aunque la cota obtenida en el Lema anterior es mejorable, lo que nos dice es que la convergencia de funciones en el espacio H^1 implica la convergencia puntual de las mismas en el disco unidad. Más aún, vamos a ver a continuación que en los compactos de $\mathbb{D}$ dicha convergencia es uniforme.

Corolario 2.11. *Sea K un compacto contenido en $\mathbb{D}$. Si $f_n \to f$ en el espacio H^1, entonces $f_n \to f$ uniformemente en K.*

Demostración. Dado un compacto $K \subset \mathbb{D}$, existe un valor $\rho \in (0,1)$ de forma que $K \subset \overline{B}(0,\rho)$. Por el Lema 2.10 podemos garantizar que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{1}{1-\rho}\, \|f_n - f\|_{H^1}\,, \qquad z \in K.$$

La convergencia en el espacio H^1 implica que el término de la derecha converge a 0 cuando n tiende a ∞, lo que conduce directamente a afirmar la convergencia de f_n a f uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{D}$. □

Con todo lo que tenemos hasta ahora podemos afirmar que la convergencia en H^1 implica la convergencia en compactos del disco unidad pero, a su vez, la convergencia en cualquier H^p con $p \geq 1$ implica la convergencia en H^1. En definitiva, contamos con el siguiente resultado:

Corolario 2.12. *Sea $p \geq 1$. Si $f_n \to f$ en H^p, entonces $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.*

Si consideramos la clase de Nevanlinna $\mathcal{N}$, formada por todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tales que

$$\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})|dt < +\infty; \tag{2.13}$$

donde $\log^+$ es la parte positiva del logaritmo, es posible probar que toda función en dicha clase tiene límite radial en casi todo punto $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$, es decir, existe el límite

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$$

en casi todo punto de la frontera del disco unidad.

Además, para $0 < p \leq +\infty$ se tiene que $H^p \subset \mathcal{N}$. Teniendo en cuenta ambas cosas podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *Sean $0 < p \leq +\infty$ y $f \in H^p$. En casi todo $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ existe el límite radial*

$$f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it}).$$

Es más, $f^* \in L^p(\partial\mathbb{D})$ y $\|f^*\|_{L^p(\partial\mathbb{D})} = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$.

Aunque de aquí en adelante es suficiente para nuestro trabajo el resultado anterior tal y como se ha enunciado, es de interés señalar que también es cierto para un concepto de límite más fuerte como es el límite no tangencial.

Hasta aquí la presentación de los espacios de Hardy junto a algunas de sus propiedades fundamentales y que más usaremos a lo largo del trabajo. A continuación vamos a estudiar otros espacios del mismo interés que los anteriores: los espacios de Bergman.

Definición 2.14. *Sea $1 \leq p < +\infty$ y $\mathbb{D}$ el disco unidad. Definimos el espacio de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ como el conjunto de funciones holomorfas $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tales que*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dm(w) < +\infty, \tag{2.14}$$

donde m denota a la medida de Lebesgue en $\mathbb{D}$.

Es decir, $A^p = \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D})$, dotando al espacio de la topología y la norma de $L^p(\mathbb{D})$, o sea,

$$\|f\|_{A^p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(w)| dm(w)\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in A^p. \tag{2.15}$$

Como se puede observar, vamos a trabajar con la medida de Lebesgue normalizada $\frac{1}{\pi}m$ (que en ocasiones denotaremos por A) y el dominio habitual será el disco unidad, salvo que se indique lo contrario.

Consideramos ahora r fijo de forma que $0 < r < 1$ y una función $f \in A^p$. Definimos la función f_r como

$$\begin{aligned} f_r\colon \ \frac{1}{r}\mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f_r(z) = f(rz). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Más adelante podremos probar propiedades para la función f_r y, mediante el siguiente resultado, extenderlas a su función correspondiente f a partir de la cual ha sido definida.

Proposición 2.15. *Sea $1 \leq p < +\infty$, $f \in A^p$ y f_r definida como se ha hecho arriba. Entonces $f_r \in A^p$ y $\|f - f_r\|_{A^p} \to 0$ cuando $r \to 1^-$.*

Demostración. En primer lugar, como $r < 1$ se tiene que $\overline{\mathbb{D}} \subset \frac{1}{r}\mathbb{D}$, de forma que f_r es una función acotada en $\mathbb{D}$. Como la propiedad de analiticidad se sigue de su propia definición, podemos afirmar que $f_r \in A^p$.

Para la parte de convergencia, consideramos $g \in L^p(\mathbb{D})$ y definimos g_r de la misma forma que se ha hecho anteriormente, de manera que tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |g(rw)|^p dA(w) = \frac{1}{r^2}\int_{r\mathbb{D}} |g(z)|^p dA(z) \leq \frac{1}{r^2}\left\|g\right\|^p_{L^p(\mathbb{D})},$$

donde se ha utilizado el cambio $rw = z$, siendo ahora $z \in r\mathbb{D}$. De esta forma, se tiene que

$$\left\|g_r\right\|^p_{L^p(\mathbb{D})} \leq \frac{1}{r^2}\left\|g\right\|^p_{L^p(\mathbb{D})},$$

probándose que para las funciones implicadas no solo nos quedamos en el espacio $L^p(\mathbb{D})$, sino que podemos controlar la norma de una función respecto a la de la otra.

Podemos afirmar también que si integramos la función f en una corona circular contenida en el disco lo suficientemente pequeña, esa integral tiene "poco peso", es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$\int_{\mathbb{D}\setminus(1-\delta)\mathbb{D}} |f|^p dA < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Por otra parte, se puede probar que $f_r \to f$ uniformemente en compactos cuando $r \to 1$, de forma que existe un r_0 tal que si $r > r_0$ entonces

$$|f_r(z) - f(z)| \leq \varepsilon, \qquad \text{para todo } z \in \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\overline{\mathbb{D}}. \tag{2.18}$$

En definitiva, la integral en la corona circular tiene un valor muy pequeño y, en su complementario, se tiene la convergencia de la función f_r a f al tratarse de un compacto. Por tanto, separando la integral de forma conveniente se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|f - f_r\right\|^p_{A^p} &= \int_{(1-\frac{\delta}{2})\overline{\mathbb{D}}} |f - f_r|^p dA + \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} |f - f_r|^p dA \\ &\leq \varepsilon^p + \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} (|f| + |f_r|)^p dA,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado los argumentos expuestos anteriormente, así como la desigualdad triangular.

No es difícil probar que para $a, b \geq 0$ se tiene que $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$. Teniendo en cuenta esta desigualdad y continuando con las acotaciones tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f - f_r\|_{A^p}^p &\leq \varepsilon^p + \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} (|f| + |f_r|)^p dA \\
&\leq \varepsilon^p + 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} |f|^p dA + \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} |f_r|^p dA\right) \\
&\leq \varepsilon^p + 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{D}\setminus(1-\delta)\mathbb{D}} |f|^p dA + \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} |f_r|^p dA\right) \\
&\leq \varepsilon^p + 2^{p-1}\left(\varepsilon + \frac{1}{r^2}\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

debiéndose la cota para la segunda integral a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} |f_r(w)|^p dA(w) &= \int_{\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D}} |f(rw)|^p dA(w) \\
&= \frac{1}{r^2}\int_{r(\mathbb{D}\setminus(1-\frac{\delta}{2})\mathbb{D})} |f(z)|^p dA(z) \\
&\leq \frac{1}{r^2}\int_{\mathbb{D}\setminus(1-\delta)\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \\
&\leq \frac{1}{r^2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

siempre que $r(1 - \frac{\delta}{2}) \geq 1 - \delta$.

Como el valor de $\varepsilon > 0$ es arbitrario, podemos hacer que tienda a 0 de forma que concluimos que

$$\lim_{r\to 1} \|f - f_r\|_{A^p} = 0,$$

que es lo que se quería probar. □

2.2.1. Productos de Blaschke. Teorema de factorización.

Definición 2.16. *Un producto de Blaschke es una función B que se escribe como*

$$B(z) = z^m \prod_{n\in\Lambda} \frac{|a_n|}{a_n}\left(\frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}\right), \tag{2.19}$$

donde m es un entero no negativo y $\{a_n\}_n$ una sucesión en $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ verificando que $\sum_{n\in\Lambda}(1 - |a_n|) < +\infty$. La sucesión puede ser infinita, en cuyo caso $\Lambda = \mathbb{N}$ y $\prod_{n\in\Lambda} = \prod_{n=1}^{\infty}$; finita, en cuyo caso $\Lambda = \{1, 2, \ldots, N\}$ y $\prod_{n\in\Lambda} = \prod_{n=1}^{N}$; o incluso puede ser vacía, en cuyo caso $B(z) = z^m$. También puede darse $\Lambda = \emptyset$ y $m = 0$, siendo en este caso $B(z) = 1$.

Definición 2.17. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ es tal que $\sum_n (1-|a_n|) < +\infty$ para la sucesión $\{a_n\}_n$ de ceros de f en $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, se llama producto de Blaschke asociado a f al que se forma en la expresión* (2.19) *con dicha sucesión y tomando como m la multiplicidad de* 0 *como cero de f ($m = 0$ si $f(0) \neq 0$).*

Una de las propiedades que utilizaremos del producto de Blaschke y que, por tanto, es importante destacar es que $|B(z)| \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, en particular, $B \in H^\infty$. Si denotamos por B^* al límite radial de B, se tiene que $|B^*(e^{it})| = 1$ en casi todo $e^{it} \in \partial\mathbb{D}$ y $\|B\|_{H^\infty} = 1$.

Antes de dar a conocer el Teorema de Factorización, vamos a enunciar un resultado que relaciona la propiedad de una función de pertenecer a los espacios de Hardy con la sucesión de sus ceros no nulos.

Proposición 2.18. *Sean $0 < p < +\infty$ y $f \in H^p$ no idénticamente nula. Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es la sucesión de ceros de f en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\sum_n (1-|a_n|) < +\infty. \tag{2.20}$$

La prueba de este resultado se puede encontrar, por ejemplo, en la obra correspondiente a [Dur].

Teorema 2.19 (Teorema de Factorización)**.** *Sea $0 < p < +\infty$. Si $f \in H^p$ no es idénticamente nula, B es el producto de Blaschke asociado a f, y $g = f/B$; entonces $g \in H^p$, y $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$. Por tanto, toda $f \in H^p$ se factoriza como $f = gB$, donde B es un producto de Blaschke, $g \in H^p$ no tiene ceros en $\mathbb{D}$, y $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$.*

Demostración. Dividiremos la prueba en dos casos, aunque realmente lo que se pide probar es el segundo, sirviéndonos el primero como punto de apoyo.

Supongamos, en primer lugar, que el producto de Blaschke B es finito. Como se trata de una función holomorfa en $\mathbb{D}$, continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y de módulo 1 en toda la frontera del disco unidad, existirá una corona circular donde el módulo sea mayor que un cierto valor menor que 1. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\rho \in (0,1)$ de forma que $|B(z)| \geq 1-\varepsilon$ para todo z con $\rho < |z| < 1$.

Sea ahora r de forma que $\rho < r < 1$. Como en esta región se satisface que $1-\varepsilon \leq |B| \leq 1$, si consideramos $g = f/B$, tenemos que

$$|f(re^{it})| \leq |g(re^{it})| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}|f(re^{it})|.$$

Cabe señalar que $g = f/B$ se trata de una función holomorfa puesto que, a lo más, posee singularidades evitables distintas de cero por la propia construcción del producto de Blaschke, de forma que "evitándolas" se puede conseguir la analiticidad del cociente en todo el disco unidad.

Si elevamos a p las desigualdades obtenidas en el paso anterior e integramos a lo largo de la circunferencia de radio r tenemos que

$$m_p(f,r) \leq m_p(g,r) \leq \frac{1}{1-\varepsilon} m_p(f,r).$$

Como el argumento se mueve en la corona circular comprendida entre los radios ρ y 1, podemos tomar límite cuando r tiende a 1 por la izquierda, de forma que se obtiene

$$\|f\|_{H^p} \leq \|g\|_{H^p} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|f\|_{H^p},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como dicho valor es arbitrario, hacemos que tienda a 0 de forma que concluimos que $g \in H^p$ y, además, $\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p}$.

Supongamos ahora que el producto de Blaschke B es infinito. Ya no es cierto el argumento de que B sea continuo en la frontera, de forma que tendremos que llevar a cabo un paso al límite.

Consideramos $B(z) = \lim\limits_{N\to\infty} B_N(z)$, donde para cada $N \in \mathbb{N}$, B_N es un producto finito. Entonces

$$g(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{f(z)}{B_N(z)}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Ahora bien, cada factor $B_N(z)$ es menor o igual que la unidad, de forma que la sucesión de producto de Blaschke finitos es decreciente en módulo. En consecuencia, si denotamos por $g_N(z)$ al cociente $f(z)/B_N(z)$ para cada $N \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{D}$, la sucesión determinada por $|g_N(z)|$ es creciente a $|g(z)|$.

Tenemos, para todo $N \in \mathbb{N}$ que $\|g_N\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ y, además, para $r < 1$,

$$\|f\|_{H^p}^p \geq \int_{\partial\mathbb{D}} |g_N(re^{it})|^p dm(t).$$

Por el Teorema de la Convergencia Monótona, el mismo resultado debe ser cierto para la función g. Por tanto,

$$\|f\|_{H^p}^p \geq \int_{\partial\mathbb{D}} |g(re^{it})|^p dm(t) = (m_p(g,r))^p,$$

lo que significa que $g \in H^p$. Además, esta última desigualdad nos da la cota $\|f\|_{H^p}^p \geq \|g\|_{H^p}^p$ si tomamos supremo en r. Como la otra cota se debe a que $|f| \leq |g|$, podemos concluir gracias a la definición de g que

$$\|f\|_{H^p} = \|g\|_{H^p},$$

que es lo que se quería probar. $\square$

2.3. Operadores de composición.

En esta sección vamos a introducir el concepto de *operador de composición*, estudiando previamente un par de resultados que serán necesarios para la materia que veremos en el resto del capítulo.

Lema 2.20. *Sea* $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *una función subarmónica y* $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *una función holomorfa verificando que* $w(0) = 0$*. Definimos una función* g *a partir de la composición de funciones* $g = G \circ w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$*. Entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta \tag{2.21}$$

para todo $0 < r < 1$*.*

Demostración. Fijamos un valor de $0 < r < 1$ y consideramos la función $U\colon r\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ continua en $r\overline{\mathbb{D}}$, armónica en $r\mathbb{D}$, y tal que $U(rz) = G(rz)$ si $z \in \partial\mathbb{D}$, es decir, se trata de la solución al Problema de Dirichlet.

Gracias a la igualdad anterior sobre la frontera y al hecho de que G es subarmónica y U armónica en los dominios correspondientes, se tiene por la Proposición 2.7 que

$$G(z) \leq U(z), \qquad \text{para todo } z \in r\overline{\mathbb{D}}. \tag{2.22}$$

Definimos ahora la función armónica $u = U \circ w\colon r\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$. Vamos a justificar que la aplicación u está bien definida a partir del Lema de Schwarz. Como $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y $w(0) = 0$, se tiene que $|w(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, tratándose de un giro si se da la igualdad en algún punto. En este caso, si tomamos $z \in r\overline{\mathbb{D}}$, tenemos que

$$|w(z)| \leq |z| \leq r,$$

de forma que podemos afirmar que $w(z) \in r\overline{\mathbb{D}}$, teniéndose que U toma valores en dicho conjunto y, por tanto, podemos afirmar que la aplicación u está correctamente definida. Además, u es armónica en $r\mathbb{D}$ y continua en $r\overline{\mathbb{D}}$ al tratarse de la composición de funciones holomorfas y armónicas en los dominios correspondientes.

Tomamos a continuación un punto z con $|z| \leq r$ de forma que se tiene

$$g(z) = G(w(z)) \leq U(w(z)) = u(z)$$

haciendo uso de la definición de cada una de las funciones anteriores, así como de la expresión (2.22). Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones armónicas es posible ahora hacer la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = u(0) = U(w(0))\\ &= U(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $w(0) = 0$, el hecho de que U y u son armónicas junto con la caracterización (2.2) y, por último que $U(z) = G(z)$ en la frontera del disco $r\overline{\mathbb{D}}$.

Como los cálculos se han hecho para un valor de $0 < r < 1$ arbitrario, se puede dar por concluida la prueba del presente resultado.

$\square$

Definición 2.21. *Sean las funciones holomorfas $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ y $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Decimos que f está subordinada a F, y lo denotamos por $f \prec F$ si existe otra función holomorfa $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ con $w(0) = 0$ de forma que $f = F \circ w$.*

Teorema 2.22 (Principio de subordinación de Littlewood)**.** *Sea $0 < p \leq +\infty$ y consideramos dos funciones analíticas $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ y $F\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Si $f \prec F$, entonces $m_p(f, r) \leq m_p(F, r)$ para $0 < r < 1$.*

Demostración. Sea $0 < r < 1$ fijo. Comenzaremos probando el caso $p = +\infty$.

Como $f \prec F$, existe una función holomorfa $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ de forma que $f = F \circ w$ y $w(0) = 0$. Debido a su definición y al hecho de que fija el origen, podemos hacer uso del Lema de Schwarz de forma que se tiene

$$|w(z)| \leq |z|, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Por tanto, si consideramos ahora los valores $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \leq r$, se tendrá gracias a la desigualdad anterior que $|w(z)| \leq r$. Esto, a su vez, nos conduce a la siguiente contención entre conjuntos:

$$\{|F(w(z))|\colon |z| \leq r\} \subset \{|F(z)|\colon |z| \leq r\}.$$

Finalmente, todo ello nos lleva a la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} m_\infty(f, r) &= \text{máx}\{|f(z)|\colon |z| \leq r\} = \text{máx}\{|F(w(z))|\colon |z| \leq r\} \\ &\leq \text{máx}\{|F(z)|\colon |z| \leq r\} = m_\infty(F, r), \end{aligned}$$

utilizándose en la desigualdad la contención probada previamente.

En cuanto al caso de p finito, volvemos a contar con una función $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ que fija el 0 de forma que $f = F \circ w$, gracias a la subordinación $f \prec F$.

Teniendo en cuenta que $|f|^p$ es una función subarmónica y la relación de composición anterior, hacemos uso del Lema 2.20 con las funciones $g = |f|^p$ y $G = |F|^p$ para afirmar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta, \qquad \text{para todo } 0 < r < 1. \tag{2.23}$$

Elevando la desigualdad anterior a $\frac{1}{p}$, podemos concluir que

$$m_p(f, r) \leq m_p(F, r)$$

para todo $0 < r < 1$. $\square$

A partir de este momento vamos a comenzar a trabajar con operadores de composición, con el objetivo de estudiar el comportamiento de éstos al restringirlos a diferentes espacios.

Definición 2.23. *Sea una función holomorfa $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Llamamos operador de composición de símbolo φ a la función*

$$\begin{array}{rccc} C_\varphi\colon & \mathcal{H}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\mathbb{D}) \\ & f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array} \tag{2.24}$$

Como se ha comentado anteriormente, la prioridad de nuestro trabajo será estudiar si al restringir la aplicación anterior a un espacio vectorial determinado, me conduce al mismo espacio vectorial; es decir, si el operador de composición está acotado. En concreto, estudiaremos el caso de los espacios de Hardy, $H^p(\mathbb{D})$, y de Bergman, $A^p(\mathbb{D})$.

Comenzamos estudiando el caso de los espacios de Hardy H^p. Para ello, lo haremos mediante una construcción en la que se irán estudiando casos particulares para dar finalmente una generalización.

Uno de los casos más sencillos que nos podemos encontrar es aquel en el que la aplicación de partida φ verifica que $\varphi(0) = 0$. En ese caso, podemos decir que la composición $f \circ \varphi$ está subordinada a la función f. Como ambas funciones son analíticas, se tendría gracias al Principio de subordinación de Littlewood (Teorema 2.22) que $m_p(f \circ \varphi, r) \leq m_p(f, r)$ para todo $0 < r < 1$ y, por tanto,

$$\|f \circ \varphi\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p} . \tag{2.25}$$

Además, la igualdad se daría para la función constante $f(z) = 1$, que no es difícil comprobar que pertenece a H^p, de forma que podemos afirmar para este caso que el operador de composición $C_\varphi\colon H^p \to H^p$ es acotado y, además, $\|C_\varphi\|_{H^p} = 1$.

El siguiente paso que vamos a dar es ver que el operador de composición está acotado en el caso $p = 2$ cuando restringimos nuestra función φ a los automorfirmos del disco, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Lema 2.24. *Sea $\tau \in \mathbb{D}$ y el automorfismo del disco α_τ definido como*

$$\begin{array}{rccc} \alpha_\tau\colon & \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\tau - z}{1 - \overline{\tau} z}. \end{array} \tag{2.26}$$

Entonces, el operador de composición $C_{\alpha_\tau}\colon H^2 \to H^2$ es acotado y, además,

$$\|C_{\alpha_\tau}\|_{H^2} \leq \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.27}$$

Demostración. Sea $f \in H^2$ un polinomio. Procedemos directamente a estimar el valor de $\|f \circ \alpha_\tau\|_{H^2}$, que por definición se trata de

$$\|f \circ \alpha_\tau\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\alpha_\tau(e^{it}))|^2 dt. \tag{2.28}$$

A continuación vamos a efectuar el cambio $e^{i\theta} = \alpha_\tau(e^{it})$. Si tenemos en cuenta que $\alpha_\tau \circ \alpha_\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ y, por tanto, $\alpha_\tau(e^{i\theta}) = e^{it}$, podemos comprobar que el cambio anterior es equivalente a $t = \dfrac{1}{i}\log(\alpha_\tau(e^{i\theta}))$. Por tanto, para el cálculo del diferencial dt se tiene que

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\alpha_\tau(e^{i\theta})}\cdot\alpha_\tau'(e^{i\theta})\cdot ie^{i\theta}d\theta = \frac{1-\overline{\tau}e^{i\theta}}{\tau - e^{i\theta}}\cdot\frac{|\tau|^2-1}{(1-\overline{\tau}e^{i\theta})^2}\cdot e^{i\theta}d\theta\\
&= \frac{|\tau|^2-1}{(\tau-e^{i\theta})(1-\overline{\tau}e^{i\theta})}\cdot e^{i\theta}d\theta = \frac{|\tau|^2-1}{(\tau e^{-i\theta}-1)(1-\overline{\tau}e^{i\theta})}d\theta\\
&= \frac{1-|\tau|^2}{(1-\tau e^{-i\theta})(1-\overline{\tau}e^{i\theta})}d\theta = \frac{1-|\tau|^2}{|1-\overline{\tau}e^{i\theta}|^2}d\theta,
\end{aligned}$$

de forma que, si utilizamos dicho cambio en la expresión (2.28), se tiene

$$\begin{aligned}
\|f \circ \alpha_\tau\|_{H^2}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\alpha_\tau(e^{it}))|^2 dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \left|\frac{1-|\tau|^2}{(1-\overline{\tau}e^{i\theta})^2}\right| d\theta.
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\tau \in \mathbb{D}$, podemos afirmar que $|1-\overline{\tau}e^{i\theta}| \geq 1-|\tau|$, por lo que si seguimos la cadena de desigualdades se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \left|\frac{1-|\tau|^2}{(1-\overline{\tau}e^{i\theta})^2}\right| d\theta &\leq (1-|\tau|^2)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{1}{(1-|\tau|)^2}d\theta\\
&= \frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\|f\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que

$$\|C_\varphi\|_{H^2} \leq \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

siempre que $f \in H^2$ sea un polinomio. A continuación vamos a ver qué ocurre cuando tomamos una función $f \in H^2$ arbitraria.

Como, en particular, se trata de una función holomorfa, tomamos su desarrollo en serie de Taylor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$, donde $\hat{f}(n)$ denota al n-ésimo coeficiente de Taylor de f. A partir de ésta, consideramos para cada $n \geq 0$ el polinomio $f_n(z)$ definido como

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}(k) z^k, \tag{2.29}$$

de forma que se pueden probar ciertas relaciones entre dichos polinomios y f en el espacio H^2, y que usaremos más adelante.

Una de ellas es que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$ cuando n tiende a ∞. Además, es posible probar que en el espacio H^2 se tiene la siguiente igualdad entre la norma de una función y sus coeficientes de Taylor:

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2,$$

lo que da lugar a la convergencia entre normas que se prueba a continuación,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{H^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{H^2}. \tag{2.30}$$

Por último, como los f_n son funciones polinómicas, podemos afirmar gracias al primer caso desarrollado en la prueba que

$$\|f_n \circ \alpha_\tau\|_{H^2} \leq \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|} \right)^{\frac{1}{2}} \|f_n\|_{H^2}, \qquad \text{para todo } n \geq 0. \tag{2.31}$$

Con esas tres propiedades nos disponemos a probar el resultado para la función $f \in H^2$ tomada al principio de forma arbitraria.

Fijado $0 < r < 1$, se tiene que

$$m_2(f \circ \alpha_\tau, r)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\alpha_\tau(re^{it}))|^2 dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(\alpha_\tau(re^{it}))|^2 dt,$$

donde hemos usado la convergencia de f_n a f en compactos y el hecho de que trabajamos en la circunferencia centrada en el origen y de radio r, que se trata de un compacto del disco unidad.

Continuando con las acotaciones se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(\alpha_\tau(re^{it}))|^2 dt &\leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n \circ \alpha_\tau\|_{H^2}^2 \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right) \|f_n\|_{H^2}^2 = \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right) \|f\|_{H^2}^2 ,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la convergencia en norma de la que se habló antes, así como la acotación probada previamente para el caso de los polinomios.

Haciendo un recorrido por las desigualdades obtenidas, acabamos de probar que $f \circ \alpha_\tau \in H^2$, por la propia definición del espacio y, además, que

$$\|C_{\alpha_\tau}(f)\|_{H^2} = \|f \circ \alpha_\tau\|_{H^2} \leq \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^2}$$

y, por tanto,

$$\|C_{\alpha_\tau}\|_{H^2} \leq \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dando por concluida, de esta forma, la prueba del presente lema.

$\square$

El siguiente paso será pasar de H^2 a H^p con p arbitrario, aunque por ahora seguimos suponiendo que la función φ que define al operador de composición es un automorfismo del disco unidad.

Lema 2.25. *Sea $0 < p < +\infty$, $\tau \in \mathbb{D}$ y el automorfismo del disco α_τ definido en* (2.26)*. Entonces el operador de composición $C_{\alpha_\tau}\colon H^p \to H^p$ es acotado y verifica*

$$\|C_{\alpha_\tau}\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|\tau|}{1-|\tau|}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.32}$$

Demostración. La herramienta principal que utilizaremos en esta prueba será la factorización de una función de H^p en un producto de Blaschke y otra función del mismo espacio sin ceros.

Rigurosamente, si tenemos $f \in H^p$ no idénticamente nula y consideramos el producto de Blaschke B asociado a f, entonces existe una función $g \in H^p$ que no se anula en ningún punto de forma que $\|g\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Además, es inmediato comprobar que $g^{p/2} \in H^2$, hecho que también utilizaremos más adelante.

Con todo ello se tiene que

$$\begin{aligned} m_p(f \circ \alpha_\tau, r)^p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\alpha_\tau(re^{it}))|^p dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(\alpha_\tau(re^{it}))|^p |g(\alpha_\tau(re^{it})|^p dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |g(\alpha_\tau(re^{it}))|^p dt, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la factorización de f, así como el hecho de que $\|B\|_\infty \leq 1$.

Continuando las acotaciones tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(\alpha_\tau(re^{it}))|^p dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g^{p/2}(\alpha_\tau(re^{it}))|^2 dt &= m_2(g^{p/2} \circ \alpha_\tau, r)^2 \\ &\leq \sup_{0 \leq r < 1} m_2(g^{p/2} \circ \alpha_\tau, r)^2 = \left(\sup_{0 \leq r < 1} m_2(g^{p/2} \circ \alpha_\tau, r) \right)^2 \\ &= \left\| g^{p/2} \circ \alpha_\tau \right\|_{H^2}^2, \end{aligned}$$

teniéndose la igualdad entre supremos al tratarse $m_2(g^{p/2} \circ \alpha_\tau, r)$ de una cantidad positiva.

Por último, como $g^{p/2} \in H^2$, utilizamos el Lema 2.24 de forma que se tiene

$$\begin{aligned} \left\| g^{p/2} \circ \alpha_\tau \right\|_{H^2}^2 &\leq \frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|} \left\| g^{p/2} \right\|_{H^2}^2 \\ &= \frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|} \|g\|_{H^p}^p = \frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|} \|f\|_{H^p}^p. \end{aligned}$$

Recapitulando todas las cotas obtenidas, hemos probado que

$$m_p(f \circ \alpha_\tau, r)^p \leq \frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|} \|f\|_{H^p}^p.$$

de forma que la función $m_p(f \circ \alpha_\tau, r)$ está uniformemente acotada, lo que implica de forma inmediata que $f \circ \alpha_\tau \in H^p$. Elevando a $1/p$ la desigualdad anterior y tomando supremo para $0 \leq r < 1$, llegamos a

$$\|C_{\alpha_\tau}(f)\|_{H^p} = \|f \circ \alpha_\tau\|_{H^p} \leq \left(\frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p},$$

que es la cota que se quería probar. □

Hasta ahora sabemos que los operadores de composición restringidos a los espacios de Hardy están acotados cuando se dan uno de los dos siguientes casos: si la función que define el operador de composición fija el cero o, si ésta se trata de un automorfismo del disco unidad como los que hemos descrito anteriormente.

Con todos los resultados que hemos probado previamente estamos en condiciones de enunciar y dar la prueba del resultado general, donde únicamente hará falta que la función que describe al operador de composición sea analítica en el disco unidad.

Teorema 2.26. *Sea $0 < p < +\infty$ y $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa. Entonces el operador de composición $C_\varphi\colon H^p \to H^p$ está acotado y verifica*

$$\|C_\varphi\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.33}$$

Demostración. En primer lugar consideramos $\tau = \varphi(0) \in \mathbb{D}$. A partir de dicho punto, definimos el automorfismo del disco unidad como lo hemos hecho hasta ahora, es decir,

$$\alpha_\tau(z) = \frac{\tau - z}{1 - \overline{\tau} z}.$$

Es posible comprobar que la composición de dicho automorfismo consigo mismo se trata de la función identidad en el disco unidad. En efecto,

$$\alpha_\tau(\alpha_\tau(z)) = \frac{\tau - \dfrac{\tau - z}{1-\overline{\tau}z}}{1 - \overline{\tau}\dfrac{\tau - z}{1-\overline{\tau}z}} = \frac{\tau - \overline{\tau}\tau z - \tau + z}{1 - \overline{\tau}z - \overline{\tau}\tau + \overline{\tau}z} = \frac{z(1-\overline{\tau}\tau)}{1-\overline{\tau}\tau} = z, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Por otra parte y, teniendo en cuenta lo anterior, podemos escribir φ como composición de funciones de la siguiente forma

$$\varphi = \alpha_\tau \circ \alpha_\tau \circ \varphi = \alpha_\tau \circ w,$$

siendo $w = \alpha_\tau \circ \varphi$. Se tiene que w una función holomorfa por la propia definición y, además, $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Más aún,

$$w(0) = \alpha_\tau(\varphi(0)) = \alpha_\tau(\tau) = 0,$$

por lo que w es una función que fija el origen.

Hasta este punto, contamos ya con dos funciones para las que sabemos que el resultado que queremos probar es cierto. Si consideramos ahora $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, se tiene que

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi = f \circ \alpha_\tau \circ w = C_w(f \circ \alpha_\tau) = (C_w \circ C_{\alpha_\tau})(f),$$

de forma que, como lo anterior es cierto para cualquier función f holomorfa, podemos afirmar que $C_\varphi = C_w \circ C_{\alpha_\tau}$.

Por los lemas probados anteriormente, sabemos que C_w y C_{α_τ} son operadores de composición acotados en el espacio de Hardy H^p, lo que implica que $C_\varphi\colon H^p \to H^p$ está acotado en el mismo espacio.

Por último, en cuanto a la cota de la norma que se quería probar tenemos que

$$\|C_\varphi\|_{H^p} = \|C_w \circ C_{\alpha_\tau}\|_{H^p} \leq \|C_w\|_{H^p} \|C_{\alpha_\tau}\|_{H^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde se han utilizado las desigualdades (2.25) y (2.32).

Con ello damos por concluida la prueba del presente teorema. □

Llegados a este punto podemos decir que queda probado el hecho de que los operadores de composición son acotados cuando restringimos el espacio de funciones holomorfas al espacio de Hardy H^p, donde ha sido bastante determinante el Principio de subordinación de Littlewood (Teorema 2.22).

Para finalizar con el estudio de los espacios H^p y antes de dar paso a los espacios de Bergman, concluimos con el siguiente resultado sobre el caso en que $p = +\infty$.

Teorema 2.27. *Sea $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa. El operador de composición $C_\varphi\colon H^\infty \to H^\infty$ está acotado y verifica $\|C_\varphi\|_{H^\infty} = 1$.*

Demostración. En efecto, dada $f \in H^\infty$ se tiene que

$$\|C_\varphi(f)\|_{H^\infty} = \|f \circ \varphi\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(\varphi(z))| = \sup_{w\in\varphi(\mathbb{D})} |f(w)| \leq \|f\|_{H^\infty},$$

donde se ha efectuado el cambio de notación $w = \varphi(z)$ teniendo en cuenta la hipótesis de que $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. De todo ello obtenemos de forma inmediata que C_φ es acotado y $\|C_\varphi\|_{H^\infty} \leq 1$.

Tomando ahora el caso particular de $f \equiv 1$, perteneciente al espacio H^∞, se tiene que

$$\|C_\varphi(f)\|_{H^\infty} = \|1\|_{H^\infty} = 1,$$

de forma que podemos concluir que $\|C_\varphi\|_{H^\infty} = 1$, como se quería probar.

□

A continuación nos disponemos a demostrar el mismo resultado para los espacios de Bergman A^p, donde veremos que el esquema de trabajo es similar al del caso anterior. Recordamos que A denota a la medida de Lebesgue normalizada.

Comenzamos estudiando las funciones que fijan el 0, para lo cual vamos a hacer antes la siguiente observación.

Sea $f \in A^p$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^p}^p &= \int_{\mathbb{D}} |f|^p dA = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f|^p dm \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p r dt\right) dr \\ &= 2\int_0^1 r m_p^p(f,r) dr,\end{aligned}$$

lo que nos dice que las normas en los espacios de Bergman se pueden estudiar a partir de la función $m_p(f,r)$. Más aún, podemos tomar supremo en $0 \leq r < 1$ y, si éste es finito, se tiene que $H^p \subset A^p$.

Por último, si $f \prec F$, gracias al Principio de subordinación de Littlewood se tiene

$$\|f\|_{A^p}^p = \left(2\int_0^1 r m_p^p(f,r) dr\right) \leq \left(2\int_0^1 r m_p^p(F,r) dr\right) = \|F\|_{A^p}^p .$$

Con todos estos preparativos podemos enunciar de manera formal el siguiente lema en términos de operadores de composición:

Lema 2.28. *Sea $1 \leq p < +\infty$ y $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa satisfaciendo $w(0) = 0$. Entonces, $C_w\colon A^p \to A^p$ está acotado y $\|C_w\|_{A^p} = 1$.*

Demostración. Como $C_w(f) = f \circ w$ por definición, para $f \in A^p$; y $w(0) = 0$, lo que tenemos es que $(f \circ w) \prec f$.

Por lo que se ha probado antes del enunciado del lema, tenemos que

$$\|C_w(f)\|_{A^p} = \|f \circ w\|_{A^p} \leq \|f\|_{A^p} ,$$

lo que nos indica que el operador C_w está acotado y $\|C_w\|_{A^p} \leq 1$.

Si tomamos la función constante $f(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, que es holomorfa y $p-$integrable (al ser $\mathbb{D}$ de medida finita), se alcanza la igualdad

$$\|f \circ w\|_{A^p} = \|f\|_{A^p} ,$$

de donde se concluye que $\|C_w\|_{A^p} = 1$. $\square$

Seguidamente vamos a estudiar qué ocurre con los automorfismos del disco tal y como los definimos para los espacios de Hardy H^p.

Lema 2.29. *Sea* $1 \leq p < +\infty$ *y* $\tau \in \mathbb{D}$. *Definimos el automorfismo del disco unidad* α_τ *como*

$$\begin{aligned} \alpha_\tau \colon \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{\tau - z}{1 - \overline{\tau} z}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Entonces el operador de composición $C_{\alpha_\tau} \colon A^p \to A^p$ *está acotado y su norma satisface*

$$\|C_{\alpha_\tau}\| \leq \left(\frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|}\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{2.35}$$

Demostración. Como en la mayoría de casos anteriores, vamos a estimar la norma del operador de composición $f \circ \alpha_\tau$ en A^p. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|f \circ \alpha_\tau\|_{A^p}^p &= \int_{\mathbb{D}} |f \circ \alpha_\tau(z)|^p dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p |\alpha_\tau'(w)|^2 dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \left| \frac{1 - |\tau|^2}{(1 - \overline{\tau} w)^2} \right|^2 dA(w), \end{aligned}$$

donde hemos efectuado el cambio de variable $\alpha_\tau(z) = w$ razonando como se hizo en algunas pruebas anteriores.

Como $\tau, w \in \mathbb{D}$, usando la desigualdad triangular inversa tenemos que

$$|1 - \overline{\tau} w| \geq |1 - |\overline{\tau} w|| = 1 - |\tau||w| \geq 1 - |\tau|.$$

Por tanto, $(1 - \overline{\tau} w)^4 \geq (1 - |\tau|)^4$. Continuando las estimaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \left| \frac{1 - |\tau|^2}{(1 - \overline{\tau} w)^2} \right|^2 dA(w) &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p \left| \frac{1 - |\tau|^2}{(1 - |\tau|)^2} \right|^2 dA(w) \\ &= \frac{(1 - |\tau|^2)^2}{(1 - |\tau|)^4} \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA(w) \\ &= \left(\frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|}\right)^2 \|f\|_{A^p}^p. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo un recorrido por las cotas obtenidas hemos probado que el operador de composición está acotado y, además,

$$\|C_{\alpha_\tau}(f)\|_{A^p} = \|f \circ \alpha_\tau\|_{A^p} \leq \left(\frac{1 + |\tau|}{1 - |\tau|}\right)^{\frac{2}{p}} \|f\|_{A^p}.$$

$\square$

Al igual que hicimos en el caso de los espacios de Hardy, vamos a obtener de los dos lemas anteriores el teorema general de acotación que estábamos buscando para los espacios de Bergman.

Teorema 2.30. *Sea $1 \leq p < +\infty$ y una función holomorfa $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Entonces el operador de composición $C_\varphi\colon A^p \to A^p$ está acotado y su norma satisface que*

$$\|C_\varphi\|_{A^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{2.36}$$

Demostración. Consideramos $\tau = \varphi(0) \in \mathbb{D}$ y definimos, a partir de dicho valor el automorfismo del disco unidad con el que hemos trabajado hasta ahora, es decir,

$$\alpha_\tau(z) = \frac{\tau - z}{1-\overline{\tau}z} = \frac{\varphi(0)-z}{1-\overline{\varphi(0)}z}.$$

Tal y como se probó anteriormente, se tiene que $\alpha_\tau \circ \alpha_\tau = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, por lo que podemos escribir

$$\varphi = \alpha_\tau \circ \alpha_\tau \circ \varphi = \alpha_\tau \circ w,$$

siendo w la función holomorfa $\alpha_\tau \circ \varphi$, de forma que $w\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y, además, fija el 0 tal y como probamos a continuación:

$$w(0) = \alpha_\tau(\varphi(0)) = \alpha_\tau(\tau) = 0,$$

haciendo uso de nuevo de la condición de automorfismo.

Si tomamos ahora una función $f \in A^p$, tenemos que

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi = f \circ \alpha_\tau \circ w = C_w(f \circ \alpha_\tau) = (C_w \circ C_{\alpha_\tau})(f).$$

Como la cuenta anterior es válida para cualquier función perteneciente al espacio de Bergman, hemos probado que $C_\varphi = C_w \circ C_{\alpha_\tau}$.

Por los Lemas 2.28 y 2.29, podemos afirmar que C_w y C_{α_τ} son operadores de composición acotados en el espacio de Bergman A^p. Por consiguiente, el operador C_φ también es acotado en el mismo espacio.

En último lugar, usando de nuevo los lemas anteriores, se tiene que

$$\|C_\varphi\|_{A^p} = \|C_w \circ C_{\alpha_\tau}\|_{A^p} \leq \|C_w\|_{A^p} \|C_{\alpha_\tau}\|_{A^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}\right)^{\frac{2}{p}},$$

que se trata de la desigualdad que aparece en el enunciado. Con ella damos por concluida la prueba del presente teorema. $\square$

Capítulo 3

Semigrupos de operadores de composición en espacios de funciones analíticas.

3.1. Semigrupos de funciones analíticas.

Tal y como se indica en el título de la presente sección, vamos a estudiar los semigrupos de funciones analíticas y, para ello, lo primero que vamos a hacer es dar su definición. Al igual que hicimos con los semigrupos de operadores, expondremos el concepto de semigrupo algebraico y, posteriormente, daremos cierta condición de continuidad sobre ellos.

Como hemos hecho hasta el momento, denotamos por $\mathbb{D}$ al disco unidad y consideramos X un espacio de Banach de funciones analíticas, que más adelante será un espacio de Hardy o un espacio de Bergman. Consideramos también una aplicación analítica $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

A partir de dicha aplicación y, tal y como se hizo en el Capítulo 2, podemos definir el siguiente operador de composición:

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in X. \tag{3.1}$$

De esta forma, para $n \geq 1$, los operadores C_φ^n son operadores de composición que se tratan precisamente de C_{φ_n}, es decir, los operadores inducidos por la composición de las iteradas de la función φ un número n de veces:

$$\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n}.$$

Si suponemos ahora que el número de veces que componemos la función φ no es natural, sino real y no negativo, obtenemos una familia de funciones analíticas del disco unidad en él mismo, $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$, que llamaremos semigrupo de funciones analíticas si verifica las condiciones de la siguiente definición.

Definición 3.1. *Se dice que* $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de funciones analíticas si para cada* $t \geq 0$ *la aplicación* $\varphi_t \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *es analítica y, además,*

1. φ_0 *es la identidad en* $\mathbb{D}$.
2. $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ *para todo* $t, s \geq 0$.

A partir de dicha familia, podemos definir las iteradas fraccionarias de C_φ, con $\varphi = \varphi_1$, de la siguiente forma

$$Q(t)f = f \circ \varphi_t, \qquad t \geq 0, f \in X.$$

Claramente, se sigue teniendo que $Q(n)f = C_{\varphi_n}$ para $n \geq 1$. Haciendo uso de su propia definición se tiene que

$$Q(0)f = f \circ \varphi_0 = f, \qquad f \in X,$$

por lo que $Q(0) = I$; y, por otra parte,

$$\begin{aligned} Q(s+t)f &= f \circ \varphi_{s+t} = f \circ (\varphi_s \circ \varphi_t) = \\ &= Q(s)(f \circ \varphi_t) = Q(s)Q(t)f. \end{aligned}$$

De esta forma, hemos construido un semigrupo de operadores $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ asociado al semigrupo de funciones analíticas $\{\varphi_t\}_{t\geq 0.}$

La definición que se ha dado de semigrupo de funciones analíticas es puramente algebraica. Añadiendo una condición de continuidad podemos enriquecer el concepto y, de hecho, será con el que habitualmente trabajemos de aquí en adelante.

Definición 3.2. *Un semigrupo de funciones analíticas* $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ *se dice continuo si verifica que* $\varphi_t \to \varphi_0$ *uniformemente en compactos del disco, cuando* $t \to 0$.

En el siguiente resultado vamos a ver dos caracterizaciones de la continuidad del semigrupo de funciones analíticas. Entre ellas, se encuentra la equivalencia entre la convergencia uniforme en compactos del disco de la definición anterior y la convergencia puntual de las funciones en cuestión. Para su prueba usaremos, entre otros resultados, el Teorema de convergencia de Vitali (o, simplemente, Teorema de Vitali), cuyo enunciado se puede consultar en el ejercicio 10 del Capítulo 6 de [Rud2] (página 125).

Teorema 3.3. *Sea* $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo de funciones analíticas de* $\mathbb{D}$ *en* $\mathbb{D}$. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El semigrupo* $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ *es continuo.*

2. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} [0,+\infty)\times\mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ (t,z) & \longmapsto & \varphi_t(z) \end{array}$$

es continua.

3. Para todo $z\in\mathbb{D}$, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} [0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ t & \longmapsto & \varphi_t(z) \end{array} \tag{3.2}$$

es continua en $t=0$.

Demostración. Es claro que la segunda condición implica la primera y que, a su vez, ésta implica la tercera, tratándose esta última de la convergencia puntual de las funciones del semigrupo de funciones analíticas. Por tanto, nos detenemos en demostrar que (3) implica (2).

En primer lugar, vamos a probar que para todo $z\in\mathbb{D}$, la aplicación (3.2) es continua por la derecha en el intervalo $[0,+\infty)$.

Fijamos $z\in\mathbb{D}$ y $T>0$ y consideramos una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ en $[T,+\infty)$ de forma que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = T.$$

Haciendo uso de las propiedades de los semigrupos de funciones analíticas y, gracias a la hipótesis de que la aplicación (3.2) es continua en 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{t_n}(z)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{t_n-T}(\varphi_T(z))=\varphi_T(z),$$

probándose, de esta forma, que para todo $z\in\mathbb{D}$ la aplicación $t\mapsto\varphi_t(z)$ es continua por la derecha en el intervalo $[0,+\infty)$.

En segundo lugar, vamos a probar una propiedad que utilizaremos más adelante. Concretamente, vamos a ver que para todo compacto K contenido en $\mathbb{D}$, existen ciertos valores $T_K>0$ y $R_K\in(0,1)$ de forma que

$$\begin{aligned} |\varphi_s(z)| &\leq R_K, && \text{para todo } z\in K \text{ y } s\in[0,T_K]; \\ |\varphi_s'(z)| &\leq 2, && \text{para todo } |z|\leq R_K \text{ y } s\in[0,T_K]. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos considerar el compacto $K=\{z\in\mathbb{D}\colon |z|\leq r\}$ para $r\in(0,1)$. Fijado dicho valor de r, tomamos ahora $R_K=\dfrac{1+r}{2}$. Haciendo uso de (3) y del Teorema de Vitali, tenemos que $\varphi_t\to\varphi_0$ uniformemente en compactos del disco unidad cuando $t\to 0$, por lo que existe un valor T_1 de forma que para todo $t\in[0,T_1]$ y todo $|z|\leq r$ se tiene,

$$|\varphi_t(z)-z|\leq R_K-r\leq R_K-|z|.$$

De esta forma,

$$|\varphi_t(z)| \leq |z| + |\varphi_t(z) - z| \leq R_K.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que la convergencia uniforme en compactos implica la convergencia de las derivadas en la misma topología, tenemos que

$$\lim_{t\to 0} \varphi_t'(z) = \varphi_0'(z) = 1.$$

Por tanto, existe un valor $T_2 > 0$ de forma que para todo $t \in [0, T_2]$ y todo $|z| \leq R_K$ se tiene que

$$|\varphi_t'(z) - 1| \leq 1.$$

De esta forma,

$$|\varphi_t'(z)| \leq 1 + |\varphi_t'(z) - 1| \leq 2.$$

Tomando $T_K = \min\{T_1, T_2\}$, tenemos probada la propiedad que enunciábamos anteriormente.

A continuación, vamos a probar que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} [0, T_K] & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ t & \longmapsto & \varphi_t(z) \end{array} \tag{3.3}$$

es continua para todo $z \in K$. Podemos observar que, con lo probado hasta ahora, es suficiente demostrar la continuidad por la izquierda de la aplicación anterior.

Como al comienzo de la demostración probamos que la aplicación anterior es continua por la derecha en $[0, +\infty)$ para todo $z \in \mathbb{D}$, tenemos que es medible y, de hecho, pertenece al espacio $L^\infty([0, +\infty), \mathbb{C})$, puesto que

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} \mathrm{ess} |\varphi_t(z)| \leq 1, \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Fijamos $T \in (0, T_K]$ y consideramos una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ en $(0, T]$ convergiendo a T. Para probar la continuidad de la aplicación (3.3) acotaremos el valor absoluto de la diferencia $\varphi_{t_n}(z) - \varphi_T(z)$ por una cantidad que tienda a 0. Se tiene que

$$\begin{aligned} |\varphi_{t_n}(z) - \varphi_T(z)| &= |\varphi_{t_n}(z) - \varphi_{t_n}(\varphi_{T-t_n}(z))| \\ &\leq \left(\sup_{|w|\leq R_K; 0\leq s\leq T_K} |\varphi_s'(w)| \right) |z - \varphi_{T-t_n}(z)| \\ &\leq 2|z - \varphi_{T-t_n}(z)|, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el Teorema del Valor Medio, así como una de las hipótesis sobre el compacto probadas en la etapa anterior. Ahora bien, si consideramos el límite de la cantidad positiva que hemos obtenido como cota superior tenemos que

$$\lim_{t_n\to T} \varphi_{T-t_n}(z) = \lim_{T-t_n\to 0} \varphi_{T-t_n}(z) = \varphi_0(z) = z,$$

donde hemos utilizado la continuidad por la derecha de la aplicación φ_t probada al principio de la demostración.

Por tanto, la diferencia obtenida tiende a 0 cuando la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ se acerca al valor T, de forma que podemos afirmar que

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_{t_n}(z) - \varphi_T(z)| = 0.$$

Como el compacto que tomamos al principio es arbitrario, queda probado de esta forma la continuidad de la aplicación (3.2) en $[0, T_K]$, siendo T_K una constante dependiente del compacto al que pertenezca z.

Para finalizar la demostración, nos disponemos a probar que para todo $z \in \mathbb{D}$, la aplicación $t \in [0, +\infty) \to \varphi_t(z)$ es continua.

Fijados $z \in \mathbb{D}$ y $T > 0$, consideramos una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ en $(0, T]$ convergiendo a T. Tomando el conjunto $\{z\}$ como compacto, sabemos por el paso anterior que existe una constante $T_z > 0$ con $0 < T_z < T$ de forma que la aplicación es continua en $[0, T_z]$.

Por tanto, podemos escribir la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ como $t_n = s_n + N_n T_z$, donde $\{s_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión en $(0, T_z)$ y $\{N_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números naturales. Pero como $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tiende a T, la sucesión $\{N_n\}_{n\geq 1}$ no puede marcharse al infinito al estar contenida en un intervalo acotado, de forma que podemos tomar una subsucesión (que denotamos de la misma forma) cuyos términos sean constantes. De esta forma, podemos escribir $t_n = s_n + NT_z$ para cierto entero no negativo N y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\{s_n\}_{n\geq 1}$ converge a algún elemento $s \in [0, T_z]$, con $T = s + NT_z$ y, haciendo uso de lo que se probó en el paso anterior,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{s_n}(z) = \varphi_s(z).$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{t_n}(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{NT_z}(\varphi_{s_n}(z)) = \varphi_{NT_z}(\varphi_s(z)) = \varphi_{NT_z+s}(z) = \varphi_T(z)$$

quedando probada, de esta forma, la continuidad del semigrupo de funciones analíticas.

Haciendo uso del Teorema de Vitali, podemos concluir que (3)⇒(2), como se quería probar.

□

Recordamos que una función compleja definida en un dominio cualquiera del plano complejo es univalente si es holomorfa e inyectiva. En el siguiente teorema vamos a probar que toda función perteneciente a un semigrupo de funciones analíticas es univalente en el disco unidad $\mathbb{D}$.

Teorema 3.4. *Toda iterada de un semigrupo de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ es univalente.*

Demostración. Dado un semigrupo de funciones analíticas en $\mathbb{D}$, $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$, vamos a probar que cada una de las funciones de la familia es inyectiva. Para ello, supongamos que existen $t_0 > 0$ y dos valores $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ con $z_1 \neq z_2$, de forma que $\varphi_{t_0}(z_1) = \varphi_{t_0}(z_2)$.

Denotamos ahora por T al valor

$$T = \text{ínf}\{t \geq 0\colon \varphi_t(z_1) = \varphi_t(z_2)\}.$$

En realidad, como la función φ_t es continua en la variable t, el ínfimo de la definición se alcanza, por lo que estamos hablando de un mínimo.

Si $T = 0$, estaríamos hablando de la función identidad, por lo que tendríamos que $z_1 = z_2$. Por tanto podemos suponer que $T > 0$.

Denotamos por $\xi = \varphi_T(z_1) = \varphi_T(z_2)$ y consideramos una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ en $[0, T)$ convergiendo a T. Por la propiedad de convergencia de nuestro semigrupo de funciones analíticas, tenemos que $\{\varphi_{T-t_n}\} \to \varphi_0$ uniformemente en compactos del disco unidad $\mathbb{D}$. Vamos a demostrar ahora que existe un disco abierto $D \subset \mathbb{D}$ centrado en ξ de forma que φ_{T-t_n} es inyectiva en dicho disco para todo valor $N \geq n$.

Fijamos $0 < r < 1$ de forma que $\overline{B(\xi, r)} \subset \mathbb{D}$ y un valor $m \in B(\xi, \frac{r}{2})$. Por el argumento de convergencia comentado anteriormente, sabemos que existe un número n_0 de forma que si $n \geq n_0$ se tiene que

$$|\varphi_{T-t_n}(z) - z| < \frac{r}{3} \tag{3.4}$$

siempre que $z \in \overline{B(\xi, r)}$. Si tomamos ahora $z \in \partial B(\xi, r)$ se siguen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} |\varphi_{T-t_n}(z) - m - (\varphi_0(z) - m)| &= |\varphi_{T-t_n}(z) - z| < \frac{r}{3} < \frac{r}{2} \leq |z - m| \\ &= |\varphi_0(z) - m| \leq |\varphi_0(z) - m| + |\varphi_{T-t_n}(z) - m|, \end{aligned}$$

de manera que si hacemos uso del Teorema de Rouché con la curva $\partial B(\xi, r)$ podemos afirmar que la función $\varphi_{T-t_n}(z) - m$ tiene el mismo número de raíces que $\varphi_0(z) - m$ en $B(\xi, r)$, siendo en este caso una sola raíz. Por consiguiente, queda probada la inyectividad de la sucesión $\{\varphi_{T-t_n}\}$ a partir de un cierto $N \in \mathbb{N}$ en un disco D centrado en ξ. Además, podemos suponer que $\varphi_{t_n}(z_1), \varphi_{t_n}(z_2) \in D$ para todo $n \geq N$ (ya que ambas sucesiones convergen a ξ).

Así,

$$\varphi_{T-t_n}(\varphi_{t_n}(z_1)) = \varphi_T(z_1) = \varphi_T(z_2) = \varphi_{T-t_n}(\varphi_{t_n}(z_2)).$$

Como φ_{T-t_n} es inyectiva en D para todo valor de $n \geq N$, se sigue de las igualdades anteriores que $\varphi_{t_n}(z_1) = \varphi_{t_n}(z_2)$ para todo $n \geq N$. Pero $t_n < T$, siendo éste el ínfimo de todos los valores en los que se daba la igualdad $\varphi_t(z_1) = \varphi_t(z_2)$, lo que supone una contradicción.

Por tanto, φ_t es inyectiva para todo $t \geq 0$.

$\square$

3.2. Ejemplos de semigrupos de funciones analíticas.

Vamos a ver algunos ejemplos de semigrupos de funciones analíticas comprobando, además, que cada uno de ellos se trata de un semigrupo continuo. En todo momento tendremos en cuenta que, tal y como se indicó en las observaciones iniciales del capítulo, la convergencia en compactos de $\mathbb{D}$ es equivalente a la convergencia puntual en el disco.

Ejemplo 3.5. Consideramos $c \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(c) \geq 0$, de forma que definimos $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ como

$$\varphi_t(z) = e^{-ct}z, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En primer lugar, vamos a comprobar que la definición es correcta, es decir, que se trata de una función analítica que va al disco unidad y que constituye un semigrupo de funciones analíticas.

Es evidente que se trata de una función analítica para cada $t \geq 0$ y, además, dado $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$|\varphi_t(z)| = |e^{-ct}z| = e^{-\mathrm{Re}(c)}|z| < 1,$$

por lo que $\varphi_t \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ con $\|\varphi_t\|_\infty \leq 1$.

En cuanto a las condiciones para que sea un semigrupo de funciones analíticas, se tiene que

1. $\varphi_0(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que φ_0 se trata de la función identidad.
2. $\varphi_{s+t}(z) = e^{-c(s+t)}z = e^{-cs}e^{-ct}z = \varphi_s(e^{-ct}z) = \varphi_t(\varphi_s(z))$, para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s, t \geq 0$.
3. $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_t(z) = \lim\limits_{t\to 0} e^{-ct}z = z, \qquad z \in \mathbb{D}.$

Con todo ello podemos afirmar que $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ se trata de un semigrupo continuo de funciones analíticas.

Si $\mathrm{Re}(c) = 0$, estamos simplemente ante un semigrupo de rotaciones. Si además, $c = 0$, se trataría del semigrupo trivial.

En otro caso, si $\mathrm{Re}(c) > 0$ y consideramos t fijo, la aplicación φ_t manda el disco unidad en el disco de radio $e^{-\mathrm{Re}(c)t}$, por lo que podemos decir, en general, que cada función del semigrupo de funciones analíticas que estamos tratando en este ejemplo se trata de una rotación mas una contracción del disco unidad.

♣

Ejemplo 3.6. Consideramos ahora la familia $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ determinada por la función

$$\varphi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Claramente, se trata de una función analítica en el disco para cada valor de $t \geq 0$. Vamos a estudiar ahora a qué conjunto conduce la aplicación φ_t al disco unidad. En primer lugar, la aplicación $T(z) = e^{-t}z$, con $z \in \mathbb{D}$, envía puntos del disco unidad al disco centrado en el origen y de radio e^{-t}, de modo que $D(0, e^{-t}) \subset \mathbb{D}$. Al sumarle el término $1 - e^{-t}$ a la función anterior, el disco sufre una traslación sobre el eje real de forma que el centro del nuevo disco imagen pasa a ser $1 - e^{-t}$ y el punto 1 es el único punto frontera común de este nuevo disco y $\mathbb{D}$.

En definitiva, para cada $t \geq 0$ fijo la función φ_t lleva el disco unidad en el disco $D(1 - e^{-t}, e^{-t}) \subset \mathbb{D}$, de forma que si hacemos tender t a ∞ el disco unidad se contrae a un punto, el 1. Por otra parte, esto confirma que la aplicación está bien definida, es decir, que $\varphi_t(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Para comprobar que se trata de un semigrupo de funciones analíticas seguimos el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior.

1. $\varphi_0(z) = z + 1 - 1 = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que φ_0 es la función identidad.
2. $\varphi_{s+t}(z) = e^{-s}e^{-t}z + 1 - e^{-s}e^{-t} - e^{-s} + e^{-s} = e^{-s}(e^{-t}z + 1 - e^{-t}) + 1 - e^{-s}$
 $= e^{-s}\varphi_t(z) + 1 - e^{-s} = \varphi_s(\varphi_t(z)), \qquad$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s, t \geq 0$.
3. $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_t(z) = \lim\limits_{t\to 0} e^{-t}z + 1 - e^{-t} = z, \qquad z \in \mathbb{D}.$

De esta forma, queda probado que se trata de un semigrupo continuo de funciones analíticas y que está bien definido. ♣

Ejemplo 3.7. El tercer ejemplo que vamos a tratar es el de la familia de funciones definida por

$$\varphi_t(z) = 1 - (1 - z)^{e^{-t}}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Es fácil comprobar que se trata de una función analítica en el disco por composición de funciones analíticas. Para estudiar qué región obtenemos a través de la función φ_t, para cada $t \geq 0$, lo haremos en diferentes etapas mediante la composición de diferentes funciones más simples.

En primer lugar, consideramos la función $R(z) = 1 - z$, con la que se obtiene el disco $D(1, 1)$ al aplicarla al disco unidad $\mathbb{D}$. Para ello, basta observar que al cambiar el signo, el módulo de la función el disco unidad queda invariante, mientras que al sumarle 1, estamos desplazando a la derecha en una unidad la parte real de la imagen.

A continuación, para $w = re^{i\beta} \in D(1,1)$, con $0 < r < 1$ y $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, consideramos la función $S(w) = w^\alpha$, donde $\alpha = e^{-t}$. Por tanto, $0 < \alpha \leq 1$. Vamos a demostrar, en primer lugar, que $w \in D(1,1)$ si y solo si $r \leq 2\cos\beta$. En efecto, que $w \in D(1,1)$ es equivalente a decir

$$|re^{i\beta} - 1|^2 \leq 1.$$

Escribiendo el cuadrado del módulo como $(re^{i\beta} - 1)(re^{-i\beta} - 1)$ y desarrollando dicho producto se tiene que

$$r^2 - re^{i\beta} - re^{-i\beta} + 1 \leq 1,$$

de forma que

$$r^2 \leq r(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) = 2r\cos\beta$$

y, en consecuencia, $r \leq 2\cos\beta$, como se quería probar.

El objetivo ahora es ver que $w^\alpha \in D(1,1)$, con $w \in D(1,1)$ y $0 < \alpha \leq 1$ haciendo uso de la equivalencia anterior. Se tiene ahora que $w^\alpha = r^\alpha e^{i\beta\alpha}$. Por tanto,

$$r^\alpha \leq (2\cos\beta)^\alpha = 2^\alpha(\cos\beta)^\alpha \leq 2(\cos\beta)^\alpha.$$

Ahora bien, el coseno es una función cóncava en el intervalo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, se tiene que

$$\cos(\alpha\beta) = \cos(\alpha\beta + (1-\alpha)\cdot 0) \geq \alpha\cos(\beta) + (1-\alpha)\cos 0 = 1 - \alpha(1-\cos\beta),$$

con $\beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y $0 < \alpha < 1$.

Por otra parte, la función $t \to t^{\frac{1}{\alpha}}$ es convexa en el intervalo $[0, +\infty)$. Por tanto, mediante la caracterización de funciones convexas y diferenciación, se tiene que

$$y^{\frac{1}{\alpha}} \geq x^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}(y - x),$$

para todo $y, x \in [0, +\infty)$. En particular, si tomamos los elementos $1 + y$, con $y \geq -1$, y $x = 1$, se llega a que

$$(1+y)^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 + \frac{1}{\alpha}y,$$

con $y \geq -1$.

Como $\cos(\alpha\beta)$ y $1 - \alpha(1-\cos\beta)$ pertenecen al intervalo $(0,1)$, haciendo uso del argumento anterior, así como de la monotonía de la función $t^{\frac{1}{\alpha}}$ se tiene que

$$(\cos(\alpha\beta))^{\frac{1}{\alpha}} \geq (1 - \alpha(1-\cos\beta))^{\frac{1}{\alpha}} \geq 1 - \frac{\alpha(1-\cos\beta)}{\alpha} = \cos\beta,$$

con $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Elevando a α la expresión anterior podemos concluir que

$$r^\alpha \leq 2(\cos\beta)^\alpha \leq 2\cos(\alpha\beta)$$

y, por tanto, $w^\alpha \in D(1,1)$.

Finalmente, se tiene que $-w^\alpha \in D(-1,1)$ y, al sumarle a esta expresión una unidad, la función sufre una traslación en el eje real de forma que $1 - w^\alpha \in D(0,1)$. Componiendo las funciones que se han ido utilizando podemos concluir que, para cada $t \geq 0$, φ_t es una función de $\mathbb{D}$ en sí mismo.

Más aún, se puede comprobar en este caso que

$$\bigcap_{t\geq 0} \varphi_t(\mathbb{D}) = [0,1].$$

Comprobamos ahora las propiedades necesarias para verificar que se trata de un semigrupo de funciones analíticas.

1. $\varphi_0(z) = 1 - (1-z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
2. Sea $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\varphi_s \circ \varphi_t)(z) &= 1 - (1-\varphi_t(z))^{e^{-s}} = 1 - [1-(1-(1-z)^{e^{-t}})]^{e^{-s}} \\ &= 1-(1-z)^{e^{-(s+t)}} = \varphi_{s+t}(z), \qquad s,t \geq 0.\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_t(z) = \lim\limits_{t\to 0} 1-(1-z)^{e^{-t}} = z, \qquad z \in \mathbb{D}.$

Con ello queda probado que se trata de un semigrupo continuo de funciones analíticas.

♣

Ejemplo 3.8. Consideramos ahora una nueva familia $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ definida por la función

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En primer lugar, veamos que se trata de una función analítica en el disco. De hecho, el denominador únicamente se anula en el punto $z_0 = -1/(e^{-t}-1)$ para todo $t > 0$. Como $-1 \leq e^{-t}-1 \leq 0$, se tiene que $z_0 \geq 1$, es decir, $z_0 \notin \mathbb{D}$, por lo que el denominador se anula en un punto no perteneciente al dominio. Por otra parte, para el caso $t = 0$, se comprueba de forma inmediata que la función es holomorfa, puesto que se trata de la identidad.

A continuación, vamos a estudiar en qué región transforma la familia de funciones el disco unidad, lo que nos permitirá verificar, a su vez, que se trata de funciones que llevan el disco en el disco.

Puesto que para cada $t \geq 0$, φ_t es una transformación de Möbius, dicha función lleva el disco unidad en un disco o en un semiplano. Como $\varphi_t(\overline{\mathbb{D}})$ es una región acotada, la imagen del disco unidad ha de ser otro disco.

Ahora bien, observamos que $\varphi_t(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Para ello, tomamos un número real z, de forma que por la expresión que define a φ_t se tiene de inmediato que su imagen es también real. Por tanto, con esta propiedad y sabiendo que φ_t es conforme, tenemos que $\varphi_t([-1,1])$ es un segmento que corta ortogonalmente a $\partial\varphi_t(\mathbb{D})$. En consecuencia, se trata de un diámetro del disco imagen. Calculando su centro y su radio determinaremos, finalmente, el disco imagen de $\mathbb{D}$ a través de la aplicación φ_t.

Sabiendo que el centro es el punto medio de las imágenes de -1 y 1, tenemos que

$$C = \frac{\varphi_t(-1) + \varphi_t(1)}{2} = \frac{\dfrac{-e^{-t}}{-e^{-t}+2} + 1}{2} = \frac{-2e^{-t}+2}{2(-e^{-t}+2)} = \frac{1-e^{-t}}{2-e^{-t}} \leq 1.$$

Para el radio, calculamos la mitad de la distancia entre las imágenes de -1 y 1. De esta forma,

$$R = \left|\frac{\varphi_t(-1) - \varphi_t(1)}{2}\right| = \left|\frac{\dfrac{-e^{-t}}{-e^{-t}+2} - 1}{2}\right| = \left|\frac{e^{-t}-2-e^{-t}}{2(-e^{-t}+2)}\right| = \frac{1}{2-e^{-t}} \leq 1.$$

Por tanto φ_t lleva el disco unidad en $D(C,R) \subset \mathbb{D}$, por lo que φ_t está bien definida para cada $t \geq 0$.

Comprobamos ahora que se trata de un semigrupo de funciones analíticas.

1. $\varphi_0(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo que φ_0 se trata de la función identidad.

2. En cuanto a la composición, tenemos que, dado $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}(\varphi_s \circ \varphi_t)(z) &= \frac{e^{-s}\varphi_t(z)}{(e^{-s}-1)\varphi_t(z)+1} = \frac{e^{-s}\dfrac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1}}{(e^{-s}-1)\dfrac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1}+1} \\ &= \frac{e^{-s}e^{-t}z}{e^{-s}e^{-t}z - z + 1} = \frac{e^{-(s+t)}z}{(e^{-(s+t)}-1)z+1} = \varphi_{s+t}(z), \qquad s,t \geq 0.\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_t(z) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1} = z, \qquad z \in \mathbb{D}.$

Con las tres condiciones damos por finalizada la prueba de que se trata de un semigrupo continuo de funciones analíticas.

♣

Ejemplo 3.9. Por último, consideramos la familia de funciones $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ definida por

$$\varphi_t(z) = \frac{(1+e^t)z - 1 + e^t}{(-1+e^t)z + 1 + e^t}.$$

Denotando por $a = a_t = 1 + e^t$ y $b = b_t = -1 + e^t$, observamos que se trata de una transformación de Möbius, cuyo denominador se anula en el punto

$$-\frac{a}{b} = \frac{1+e^t}{1-e^t} \leq -1,$$

por lo que se trata de una función holomorfa en el disco unidad. Más aún, con la notación que acabamos de introducir tenemos que

$$\varphi_t(z) = \frac{az+b}{bz+a} = -\frac{\dfrac{-b}{a} - z}{1 - \dfrac{-b}{a} z} = e^{i\pi}\frac{c - z}{1 - \overline{c}z},$$

siendo $c = -b/a$ con $c = \overline{c}$. Por la forma en la que ha sido posible escribir la función para cada $t \geq 0$ podemos afirmar que se trata de un automorfismo de $\mathbb{D}$.

Es fácil comprobar que el semigrupo de funciones analíticas posee dos puntos fijos en $\overline{\mathbb{D}}$: 1 y -1, de forma que podemos afirmar que se trata de un automorfismo hiperbólico.

Vamos a comprobar ahora que se satisfacen las tres condiciones de semigrupo de funciones analíticas.

1. $\varphi_0(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$.
2. En cuanto a la composición, sea $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\varphi_s \circ \varphi_t)(z) &= \frac{(1+e^s)\varphi_t(z) - 1 + e^s}{(-1+e^s)\varphi_t(z) + 1 + e^s} = \frac{(1+e^s)\dfrac{(1+e^t)z - 1 + e^t}{(-1+e^t)z + 1 + e^t} - 1 + e^s}{(-1+e^s)\dfrac{(1+e^t)z - 1 + e^t}{(-1+e^t)z + 1 + e^t} + 1 + e^s} \\ &= \frac{(1+e^s)(1+e^t)z + [e^s(-1+e^t) + 1 - e^t]z - 2 + 2e^s e^t}{(-1+e^s)(1+e^t)z + [e^s(-1+e^t) - 1 + e^t]z + 2 + 2e^s e^t} \\ &= \frac{2(1+e^{s+t})z - 2 + 2e^{s+t}}{2(-1+e^{s+t})z + 2 + e^{s+t}} = \varphi_{s+t}(z), \qquad s,t \geq 0.\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_t(z) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(1+e^t)z - 1 + e^t}{(-1+e^t)z + 1 + e^t} = z, \qquad z \in \mathbb{D}.$

Con ello, queda probado que se trata, de nuevo, de un semigrupo continuo de funciones analíticas.

♣

3.3. Semigrupos fuertemente continuos.

Cuando estudiamos los semigrupos de operadores, así como las propiedades de ser fuertemente y uniformemente continuos, vimos en la Proposición 1.6 que, bajo ciertas hipótesis, si teníamos un semigrupo de operadores fuertemente continuo en un espacio Y y éste era denso en un espacio de Banach X, entonces el semigrupo de operadores también era fuertemente continuo en el espacio X.

El siguiente resultado está estrechamente ligado con la idea anterior. Bajo ciertas condiciones, probaremos la continuidad fuerte de semigrupos de operadores de composición en espacios de Banach de funciones analíticas utilizando, entre otras cosas, que los polinomios son densos en dichos espacios.

Proposición 3.10. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de funciones analíticas en el disco unidad y X un espacio de Banach de funciones analíticas, de forma que se verifica*

1. *Los polinomios son densos en X.*
2. *Existe una constante $C > 0$ de forma que si f y g pertenecen a X, verificando que $|f| \leq |g|$, se tiene que $\|f\|_X \leq C\,\|g\|_X$.*
3. $\limsup_{t\to 0^+} \|Q(t)\| < +\infty$.
4. $\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_X = 0$.

Entonces el semigrupo de operadores $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en X.

Demostración. Para probar que el semigrupo de operadores es fuertemente continuo tenemos que ver que para toda $f \in X$ se tiene

$$\lim_{t\to 0} \|Q(t)f - f\|_X = 0.$$

Como se trata de un semigrupo de operadores de composición, por su propia definición lo anterior es equivalente a decir

$$\lim_{t\to 0} \|f\circ\varphi_t - f\|_X = 0.$$

En el desarrollo de la demostración probaremos que el resultado es cierto para los polinomios y, posterioremente, lo probaremos para cualquier función $f \in X$ haciendo uso de la condición de densidad de los polinomios en X.

Para un valor $n \in \mathbb{N}$ fijo y dos números cualesquiera a y b no es difícil probar que se tiene la siguiente identidad

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1}b^{n-k}\right).$$

Por tanto, si consideramos ahora la potencia n-ésima para el semigrupo de funciones analíticas se tiene para todo $z \in \mathbb{D}$ que

$$\varphi_t^n(z) - z^n = (\varphi_t(z) - z)\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_t^{k-1}(z)z^{n-k}\right).$$

Acotando en valor absoluto y, teniendo en cuenta que $\varphi_t \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, se tiene que

$$|\varphi_t^n(z) - z^n| \leq n|\varphi_t(z) - z|,$$

es decir, hemos obtenido una cota en la que aparecen los n sumandos anteriores, cada uno de ellos acotado por 1.

Gracias a la desigualdad obtenida y a la segunda hipótesis del enunciado podemos afirmar que existe una constante $C > 0$ de forma que

$$\|\varphi_t^n - \varphi_0^n\|_X \leq nC\,\|\varphi_t - \varphi_0\|_X\,,$$

donde se ha utilizado que φ_0 es la función identidad.

Tomando límite cuando t tiende a 0 por la derecha y considerando la cuarta hipótesis, se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t^n - \varphi_0^n\|_X \leq nC \lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_X = 0,$$

y, consecuentemente,

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t^n - \varphi_0^n\|_X = 0.$$

De esta forma, dado cualquier polinomio $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|p\circ\varphi_t - p\|_X &= \left\|\sum_{k=0}^{N} a_k\varphi_t^k - \sum_{k=0}^{N} a_k z^k\right\|_X = \left\|\sum_{k=0}^{N} a_k(\varphi_t^k - z^k)\right\|_X \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} |a_k|\,\left\|\varphi_t^k - z^k\right\|_X.\end{aligned}$$

Al hacer tender t a 0 en la desigualdad anterior, llegamos a

$$\lim_{t\to 0} \|p\circ\varphi_t - p\|_X = 0,$$

de forma que queda probada la continuidad fuerte del semigrupo de operadores para el caso de los polinomios.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como los polinomios son densos en el espacio de funciones analíticas X, para toda función $f \in X$ existe un polinomio p de forma que $\|p - f\|_X < \varepsilon$. Para probar la continuidad fuerte vamos a acotar en norma la función $f \circ \varphi_t - f$ por una cantidad que se haga tan pequeña como queramos. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi_t - f\|_X &\leq \|f \circ \varphi_t - p \circ \varphi_t\|_X + \|p \circ \varphi_t - p\|_X + \|p - f\|_X \\
&= \|Q(t)f - Q(t)p\|_X + \|p \circ \varphi_t - p\|_X + \|p - f\|_X \\
&\leq \|Q(t)\| \, \|f - p\|_X + \|p \circ \varphi_t - p\|_X + \|p - f\|_X \\
&\leq (\|Q(t)\| + 1) \, \|f - g\|_X + \|p \circ \varphi_t - p\|_X \\
&< (\|Q(t)\| + 1)\varepsilon + \|p \circ \varphi_t - p\|_X .
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la tercera hipótesis del enunciado, así como de la continuidad fuerte del semigrupo de operadores para los polinomios se tiene que

$$\limsup_{t \to 0^+} \|f \circ \varphi_t - f\|_X \leq M\varepsilon$$

para cierta constante positiva M independiente de f y de ε. Como el valor de ε es arbitrario, se tiene finalmente que

$$\lim_{t \to 0^+} \|f \circ \varphi_t - f\|_X = 0, \qquad \text{para toda } f \in X,$$

por lo que podemos afirmar que el semigrupo de operadores $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo en X. □

A partir del resultado anterior vamos a ver que el semigrupo de operadores de composición inducido por un semigrupo de funciones analítica $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo en el caso de los espacios de Bergman A^p y los espacios de Hardy H^p.

Comenzando con los espacios de Bergman, consideramos un semigrupo continuo de funciones analíticas $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ en el disco unidad y $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ el semigrupo de operadores de composición inducido por el primero, es decir,

$$Q(t)f = f \circ \varphi_t,$$

para todo $t \geq 0$ y $f \in A^p$. Vamos a comprobar en primer lugar que los polinomios son densos en el espacio de Bergman A^p. Cabe señalar que en todo momento consideramos $1 \leq p < +\infty$.

Sea $f \in A^p$ y $\varepsilon > 0$. Gracias a la Proposición 2.15, sabemos que $\|f_r - f\|_{A^p} \to 0$ cuando $r \to 1$, de forma que podemos garantizar la existencia de un valor $r \in (0, 1)$ tal que

$$\|f - f_r\|_{A^p} < \frac{\varepsilon}{2}$$

donde $f_r(z) = f(rz)$ para $0 < r < 1$.

Ahora bien, considerando el desarrollo en serie de Taylor de la función f_r, tenemos que

$$f_r(z) = f(rz) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) r^n z^n,$$

de forma que para un N fijo la serie

$$\sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n) r^n z^n$$

se trata de un polinomio.

Puesto que f_r es analítica en el disco $\frac{1}{r}\mathbb{D}$, su serie de Taylor converge uniformemente a f_r en cualquier compacto contenido en el dominio anterior, por lo que en particular lo hace en $\overline{\mathbb{D}}$. Por tanto, para el $\varepsilon > 0$ anterior existe un valor $N \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\left\| f_r - \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n) r^n z^n \right\|_{A^p} \leq \left\| f_r - \sum_{n=0}^{N} \hat{f}(n) r^n z^n \right\|_{H^\infty} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como la serie finita es en definitiva un polinomio, concluimos que dada la función f_r y el $\varepsilon > 0$ del principio, existe un polinomio p de forma que

$$\|f_r - p\|_{A^p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

De esta forma,

$$\|f - p\|_{A^p} = \|f - f_r + f_r - p\|_{A^p} \leq \|f - f_r\|_{A^p} + \|f_r - p\|_{A^p} < \varepsilon.$$

Como el valor de $\varepsilon > 0$ es arbitrario, podemos concluir que los polinomios son densos en el espacio de Bergman A^p.

En segundo lugar, si $|f| \leq |g|$ para f y g funciones en A^p, es evidente que

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^p dA \leq \int_{\mathbb{D}} |g|^p dA,$$

puesto que $p \geq 1$. Tomando raíz $p-$ésima a ambos lados concluimos que

$$\|f\|_{A^p} \leq \|g\|_{A^p},$$

verificándose de esta forma la segunda hipótesis de la Proposición 3.10 con constante $C = 1$.

En cuanto a la tercera, recordamos que el Teorema 2.30 afirmaba que el operador de composición $Q(t)$ era acotado y, además, se verificaba que

$$\|Q(t)\|_{A^p} \leq \left(\frac{1+|\varphi_t(0)|}{1-|\varphi_t(0)|}\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{3.6}$$

Gracias a la continuidad de φ_t como función de t, tenemos que $\varphi_t(0) \to \varphi_0(0) = 0$ cuando $t \to 0$. Por tanto, la cantidad que parece entre paréntesis está acotada cuando t es próximo a 0. Este hecho nos permite afirmar que

$$\limsup_{t\to 0^+} \|Q(t)\|_{A^p} < +\infty.$$

Por último, como el semigrupo de funciones analíticas que caracteriza al semigrupo de operadores de composición es continuo, tenemos que $\varphi_t \to \varphi_0$ uniformemente en compactos del disco unidad. Haciendo uso del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_t(z) - \varphi_0(z)|^p dA(z) = 0.$$

Es decir,

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\| = 0. \tag{3.7}$$

Una vez probadas las cuatro hipótesis del teorema para el caso de los espacios de Bergman, estamos en condiciones de afirmar formalmente el siguiente resultado.

Corolario 3.11. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas en el disco unidad y $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de operadores de composición inducido por el primero. Entonces el semigrupo $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en el espacio de Bergman A^p para $1 \leq p < +\infty$.*

De forma análoga a como se ha hecho en el caso de los espacios de Bergman, vamos a comprobar el mismo resultado para los espacios de Hardy.

La densidad de los polinomios se prueba siguiendo exactamente el mismo esquema que en caso anterior, por lo que damos por cierta esta hipótesis.

En segundo lugar, si $|f| \leq |g|$ para f y g funciones en H^p, es evidente que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^p dt,$$

para todo $0 < r < 1$. Tomando raíz $p-$ésima a ambos lados y supremo en r, concluimos que

$$\|f\|_{H^p} \leq \|g\|_{H^p},$$

verificándose de esta forma la segunda hipótesis de la proposición y, al igual que para los espacios de Bergman, con constante $C = 1$.

Recordamos que el Teorema 2.26 garantizaba que el operador de composición $Q(t)$ era acotado y se cumplía la desigualdad

$$\|Q(t)\|_{H^p} \leq \left(\frac{1 + |\varphi_t(0)|}{1 - |\varphi_t(0)|} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.8}$$

Tal y como se razonó anteriormente, la continuidad de φ_t como función de t nos permite afirmar que $\varphi_t(0) \to \varphi_0(0) = 0$ cuando $t \to 0$, de forma que la cota superior que acabamos de recordar está acotada cuando t se encuentra en un entorno de 0. Por consiguiente, podemos decir que

$$\limsup_{t \to 0^+} \|Q(t)\|_{H^p} < +\infty,$$

verificándose, de esta forma, la tercera hipótesis de la Proposición 3.10.

Por último, queremos probar que para todo $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$\lim_{t \to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^p} = 0, \tag{3.9}$$

sabiendo que, como el semigrupo de funciones analíticas que caracteriza al semigrupo de operadores de composición es continuo, se tiene que $\varphi_t \to \varphi_0$ uniformemente en compactos del disco unidad. El procedimiento que vamos a seguir es demostrar dicha convergencia para $p = 2$ y, a partir de ello, deducir el resto de los casos.

Puesto que la convergencia uniforme en compactos del disco unidad implica la convergencia de los coeficientes de Taylor, se tiene que

$$\lim_{t \to 0^+} \hat{\varphi}_t(n) = \hat{\varphi}_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\varphi}_t(n)|^2 = \|\varphi_t\|_{H^2}^2 \leq \|\varphi_t\|_{H^\infty}^2 \leq 1,$$

donde se ha utilizado en la primera igualdad una caracterización de la norma en el espacio H^2 probada en la asignatura "Variable Compleja y Operadores". Despejando convenientemente, obtenemos a partir de lo anterior que

$$\lim_{t \to 0^+} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} |\hat{\varphi}_t(n)|^2 \leq \lim_{t \to 0^+} (1 - |\hat{\varphi}_t(1)|^2) = 0.$$

De esta forma, llegamos a que

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\varphi}_t(n) - \hat{\varphi}_0(n)|^2 = 0,$$

si consideramos en la suma anterior el caso $n = 1$ y el resto de casos de forma separada. De nuevo, haciendo uso de la caracterización de la norma en H^2 a partir de los coeficientes de Taylor, podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^2} = 0.$$

Ahora bien, sabemos gracias a las desigualdades de la expresión (2.11) que, para $1 \le p < 2$, se tiene

$$\|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^p} \le \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^2},$$

de forma que, a partir del primer caso, afirmamos que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^p} = 0$$

siempre que $p < 2$.

Veamos que ocurre con el caso en el que $2 < p < +\infty$. Tenemos que

$$\begin{aligned} m_p^p(\varphi_t - \varphi_0, r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_t(re^{i\theta}) - \varphi_0(re^{i\theta})|^p d\theta \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_t(re^{i\theta}) - \varphi_0(re^{i\theta})|^2 d\theta \cdot \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^\infty}^{p-2} \\ &\le m_2^2(\varphi_t - \varphi_0, r) \cdot 2^{p-2}. \end{aligned}$$

De esta forma, teniendo en cuenta las desigualdades obtenidas, así como el caso particular de $p = 2$ llegamos a que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^p}^p \le \lim_{t\to 0^+} 2^{p-2} \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^2}^2 = 0.$$

Así, podemos concluir finalmente que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\varphi_t - \varphi_0\|_{H^p} = 0, \tag{3.10}$$

para todo $1 \le p < +\infty$.

Con todas las propiedades anteriores verificadas, estamos en condiciones de enunciar un nuevo corolario de la Proposición 3.10.

Corolario 3.12. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\ge 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas en el disco unidad y $\{Q(t)\}_{t\ge 0}$ el semigrupo de operadores de composición inducido por el primero. Entonces el semigrupo $\{Q(t)\}_{t\ge 0}$ es fuertemente continuo en el espacio de Hardy H^p para $1 \le p < +\infty$.*

Cabe señalar que el caso $p = +\infty$ será estudiado en el Capítulo 4.

3.4. El generador infinitesimal.

Al igual que hicimos en el caso de semigrupos de operadores, vamos a estudiar la definición y, por tanto, la existencia del generador infinitesimal en el caso de los semigrupos de funciones analíticas. Así mismo, veremos un par de resultados en el que se relaciona este operador con el generador infinitesimal estudiado en el Capítulo 1 para los semigrupos de operadores, en el caso particular de los operadores de composición.

Para estudiar la existencia del generador infinitesimal de un semigrupo continuo de funciones analíticas, es necesario recurrir de forma previa al Lema 10.5.1. de [Rud2], cuya prueba veremos a continuación y siendo su enunciado el siguiente:

Lema 3.13. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ y g se define en $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ mediante*

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & si \quad z \neq w, \\ \\ f'(z) & si \quad z = w, \end{cases}$$

entonces g es continua en $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Demostración. Es claro que los únicos puntos $(z,w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ en los que la aplicación g puede no ser continua son aquellos en los que $z = w$. Por tanto, es en dichos puntos donde estudiaremos la continuidad de la aplicación en cuestión.

Fijemos un punto $a \in \mathbb{D}$. El objetivo es probar, tal y como se ha indicado arriba, que g es continua en el punto (a,a). Dado $\varepsilon > 0$, existe un valor $r > 0$ de forma que $D(a,r) \subset \mathbb{D}$ y

$$|f'(\zeta) - f'(a)| < \varepsilon, \tag{3.11}$$

para todo $\zeta \in D(a,r)$, debido a la analiticidad de f en el disco unidad. Consideramos dos puntos z y w en $D(a,r)$, tales que $z \neq w$, y el segmento que los une a ambos, es decir,

$$\zeta(t) = (1-t)z + tw, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

de forma que se tiene que $\zeta(t) \in D(a,r)$ para $0 \leq t \leq 1$. Además,

$$g(z,w) - g(a,a) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - f'(a) = \int_0^1 (f'(\zeta(t)) - f'(a))dt.$$

Como se tiene gracias a la expresión (3.11) que

$$|f'(\zeta(t)) - f'(a)| < \varepsilon$$

para todo $0 \leq t \leq 1$, podemos concluir que

$$|g(z,w) - g(a,a)| < \varepsilon,$$

para todos z y w en $D(a,r)$, con $z \neq w$.

Es claro que si $z = w \in D(a,r)$ entonces, usando de nuevo la expresión (3.11), se tiene que

$$|g(z,w) - g(a,a)| = |f'(z) - f'(a)| < \varepsilon.$$

El estudio de los dos casos anteriores demuestra que la función g es continua en (a,a).

Como el punto $a \in \mathbb{D}$ tomado al principio es arbitrario, podemos concluir que la función g es continua en todo el dominio $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$. □

Veamos a continuación el resultado que prueba la existencia del generador infinitesimal de un semigrupo continuo de funciones analíticas.

Teorema 3.14. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas. Existe una función holomorfa $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ de forma que*

$$G(z) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(z) - z}{t}. \tag{3.12}$$

Dicho límite es, de hecho, uniforme en compactos de $\mathbb{D}$.

Demostración. En primer lugar, tenemos gracias al Corolario 3.12 que el semigrupo de operadores de composición $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ inducido por el semigrupo de funciones analíticas es fuertemente continuo, por ejemplo, en el espacio H^2. Por el Teorema 1.13 sabemos que, en ese caso, $\mathscr{D}(A)$ es denso en H^2, donde A es el generador infinitesimal del semigrupo de operadores. Esto significa que dada $f \in \mathscr{D}(A)$ existe el siguiente límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{Q(t)f - f}{t}$$

y es igual a $Af \in H^2$.

Fijamos un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ y tomamos una función $f \in \mathscr{D}(A)$ de forma que $f'(z_0) \neq 0$. Si esto no fuera posible, tendríamos que $f'(z_0) = 0$ para toda $f \in \mathscr{D}(A)$ y, por la densidad de $\mathscr{D}(A)$ en el espacio de Hardy H^2, tendríamos que $f'(z_0) = 0$ para toda función $f \in H^2$, lo que resulta ser una contradicción si consideramos, por ejemplo, la función $f(z) = z$.

Ahora bien, existe un valor $\varepsilon = \varepsilon(z_0) > 0$ tal que $\overline{D(z_0,\varepsilon)} \subset \mathbb{D}$ y f es univalente en $\overline{D(z_0,\varepsilon)}$. En particular, se tiene que $f'(z) \neq 0$ para todo punto $z \in D(z_0,\varepsilon)$.

Por otra parte, consideramos la función g asociada a f definida en el Lema 3.13. Fijamos un valor $\delta > 0$ de forma que si $t < \delta$ entonces

$$|\varphi_t(z) - z| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $z \in D(z_0, \frac{\varepsilon}{2})$, hecho que queda justificado gracias al Teorema 3.3.

Por tanto, $g(\varphi_t(z), z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, \frac{\varepsilon}{2})$ y todo $t < \delta$. Además, $\lim_{t\to 0} \varphi_t(z) = z$ uniformemente en $\overline{D(z_0, \frac{\varepsilon}{2})}$ y, en consecuencia,

$$\lim_{t\to 0} g(\varphi_t(z), z) = f'(z)$$

uniformemente en $\overline{D(z_0, \frac{\varepsilon}{2})}$.

Por otro lado, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \left\| \frac{f \circ \varphi_t - f}{t} - Af \right\|_{H^2} = 0$$

y, en particular,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi_t(z)) - f(z)}{t} = Af(z)$$

uniformemente en $\overline{D(z_0, \frac{\varepsilon}{2})}$.

Puesto que

$$g(\varphi_t(z), z) \cdot \frac{\varphi_t(z) - z}{t} = \frac{f(\varphi_t(z)) - f(z)}{t},$$

tenemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t(z) - z}{t} = \frac{Af(z)}{f'(z)}$$

uniformemente en $\overline{D(z_0, \varepsilon)}$.

Definimos, de esta forma, $G_{z_0}(z) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t(z) - z}{t} = \frac{Af(z)}{f'(z)}$ en $D(z_0, \varepsilon)$.

Supongamos que, siguiendo el proceso anterior, fijamos dos puntos $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ distintos y dos valores $\varepsilon_0 = \varepsilon(z_0) > 0$ y $\varepsilon_1 = \varepsilon(z_1) > 0$ tales que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t(z) - z}{t} = G_{z_j}(z)$$

en $D(z_j, \varepsilon_j)$ para $j = 0, 1$. Es claro que si $D(z_0, \varepsilon_0) \cap D(z_1, \varepsilon_1) \neq \emptyset$, entonces $G_{z_0} = G_{z_1}$ en dicha intersección.

Este proceso permite definir una función $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ de forma que $G(z) = G_z(z)$ para todo punto $z \in \mathbb{D}$, tratándose de una función holomorfa.

Finalmente, fijamos un compacto $K \subset \mathbb{D}$ con el fin de probar que la convergencia anterior es uniforme en compactos.

Para cada $z \in K$, existe un valor $\varepsilon_z = \varepsilon(z) > 0$ tal que $\lim_{t \to 0} \dfrac{\varphi_t(z) - z}{t} = G(z)$ uniformemente en $D(z, \varepsilon_z)$. La compacidad de K garantiza que existe un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_n \in K$ tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} D(z_j, \varepsilon(z_j)).$$

Puesto que en cada uno de estos discos la convergencia del cociente $\dfrac{\varphi_t(z) - z}{t}$ a G es uniforme, se tiene la convergencia uniforme en todo el compacto K.

Con ello, se da por finalizada la demostración del presente resultado.

□

Definición 3.15. *A la función analítica $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definida en la expresión* (3.12) *se le llama generador infinitesimal del semigrupo continuo de funciones analíticas.*

A partir del resultado anterior se deduce la siguiente propiedad entre generador infinitesimal de semigrupo de operadores de composición y generador infinitesimal de semigrupo de funciones analíticas.

Proposición 3.16. *Sea $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas, $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ el semigrupo de operadores de composición inducido por el primero y A su generador infinitesimal. Si el semigrupo de operadores de composición es fuertemente continuo en el espacio de funciones analíticas X y $f \in \mathscr{D}(A)$, entonces*

$$Af(z) = G(z) f'(z), \tag{3.13}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Razonando como en el resultado anterior se tiene que si $f \in \mathscr{D}(A)$ entonces

$$Af(z) = f'(z) \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t(z) - z}{t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Es decir, $Af(z) = G(z) f'(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. □

Proposición 3.17. *Sea $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas y $G\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ su generador infinitesimal. Se tiene para todo $t \geq 0$ que*

$$G(\varphi_t(z)) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(z), \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{3.14}$$

En particular, $G(z) = \dfrac{\partial}{\partial t} \varphi_t(z)|_{t=0}$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Para probar la igualdad que se enuncia arriba lo haremos por la propia definición de derivada, estudiando los límites laterales a derecha e izquierda por separado.

Sabiendo que

$$G(z) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(z) - z}{t}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, se tiene para el límite lateral por la derecha que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_{s+t}(z) - \varphi_s(z)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(\varphi_s(z)) - \varphi_s(z)}{t} = G(\varphi_s(z)), \qquad z \in \mathbb{D},$$

pues $\varphi_s(z) \in \mathbb{D}$ para todo $s \geq 0$. De esta forma, queda probado que la derivada por la derecha de la función φ_t como función de t coincide con la evaluación de G en dicha función.

Fijamos ahora $z \in \mathbb{D}$. Para la derivada por la izquierda se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^-} \frac{\varphi_{s+t}(z) - \varphi_s(z)}{t} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_{s-t}(z) - \varphi_s(z)}{-t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_s(z) - \varphi_{s-t}(z)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(\varphi_{s-t}(z)) - \varphi_{s-t}(z)}{t}\end{aligned}$$

Si denotamos por ψ_t a la función definida por

$$\psi_t(z) = \frac{\varphi_t(z) - z}{t}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

el objetivo es ahora estudiar el valor de $|\psi_t(\varphi_{s-t}(z)) - \psi_t(\varphi_s(z))|$ y ver que está acotado superiormente por una cantidad que tiende a 0 cuando $t \to 0^+$.

Dado $R > 0$ se verifica que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(z) - z}{t} = G(z)$$

uniformemente en $\overline{D(0,R)}$ y, en consecuencia, ψ_t' converge uniformemente a G' en el mismo dominio. Por tanto, existen unas constantes $C > 0$ y $\delta > 0$ de forma que $|\psi_t'(z)| \leq C$ siempre que $|z| \leq R$ y $0 \leq t \leq \delta$. Haciendo ahora uso del Teorema del Valor Medio se tiene que

$$\begin{aligned}|\psi_t(\varphi_{s-t}(z)) - \psi_t(\varphi_s(z))| &\leq \left(\sup_{|w|\leq R; 0\leq v\leq \delta} |\psi_v'(w)| \right) |\varphi_{s-t}(z) - \varphi_s(z)| \\ &\leq C|\varphi_{s-t}(z) - \varphi_s(z)|,\end{aligned}$$

siempre que $|z| \leq R$ y $0 \leq t \leq \delta$.

Ahora bien, si hacemos tender $t \to 0^+$, la cota superior tiende a 0 ya que $\varphi_{s-t} \to \varphi_s$ uniformemente en compactos. Es por ello que podemos afirmar que

$$\lim_{t\to 0^+} \psi_t(\varphi_{s-t}(z)) = \lim_{t\to 0^+} \psi_t(\varphi_s(z)), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Reescribiendo las funciones anteriores a partir de sus respectivas definiciones se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(\varphi_{s-t}(z)) - \varphi_{s-t}(z)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi_t(\varphi_s(z)) - \varphi_s(z)}{t} = G(\varphi_s(z)), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Con ello, damos por concluida la prueba afirmando finalmente que

$$G(\varphi_t(z)) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $t \geq 0$. □

Aprovechando este último resultado vamos a calcular el generador infinitesimal de los ejemplos de semigrupos de funciones analíticas que se vieron en la Sección 3.2.

Ejemplo 3.18. El primer semigrupo con el que nos encontrábamos estaba definido por

$$\varphi_t(z) = e^{-ct}z,$$

con $z \in \mathbb{D}$ y $\mathrm{Re}(c) \geq 0$. Si derivamos respecto a t el resultado es

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = -ce^{-ct}z, \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que si evaluamos la función anterior en $t = 0$ obtenemos que el generador infinitesimal es la función

$$G(z) = -cz, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

♣

Ejemplo 3.19. En segundo lugar, estudiamos el semigrupo dado por

$$\varphi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De nuevo, derivando respecto a t la función anterior se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = -e^{-t}z + e^{-t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Si, por último, la evaluamos en $t = 0$, el generador infinitesimal resulta ser la función

$$G(z) = -z + 1, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

♣

Ejemplo 3.20. Otro semigrupo que aparecía en los ejemplos era

$$\varphi_t(z) = 1 - (1-z)^{e^{-t}}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Derivando la expresión anterior como función de t se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = -(1-z)^{e^{-t}} \log(1-z)(-e^{-t}) = (1-z)^{e^{-t}} \log(1-z)e^{-t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Evaluando lo anterior en $t = 0$ obtenemos como generador infinitesimal la función

$$G(z) = (1-z)\log(1-z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

♣

Ejemplo 3.21. El siguiente ejemplo que se expuso era el semigrupo de funciones analíticas dado por

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)z+1}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Derivando respecto a t la expresión anterior se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z(z-1)}{((e^{-t}-1)z+1)^2}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que al evaluar en $= 0$ la función resultante es

$$G(z) = z(z-1), \qquad z \in \mathbb{D},$$

que se trata del generador infinitesimal de este semigrupo de funciones analíticas. ♣

Ejemplo 3.22. Por último, el semigrupo de funciones analíticas con el que se trabajó fue

$$\varphi_t(z) = \frac{(1+e^t)z - 1 + e^t}{(-1+e^t)z + 1 + e^t}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Si calculamos la derivada de la función anterior respecto a t obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = \frac{-2e^t(z+1)(z-1)}{((-1+e^t)z+1+e^t)^2}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que al evaluarla en $t = 0$ da como resultado el generador infinitesimal

$$G(z) = -\frac{(z+1)(z-1)}{2}, z \in \mathbb{D}.$$

♣

En el Capítulo 1 vimos que si teníamos un semigrupo de operadores fuertemente continuo $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continuo, existían dos contantes C y γ de forma que

$$\|Q(t)\| \leq Ce^{\gamma t},$$

para todo $t \geq 0$.

Además, el Teorema 1.13 afirma que dado $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$, existe un operador acotado $R(\lambda)$ llamado resolvente del semigrupo de operadores cuya imagen es $\mathscr{D}(A)$ y cuya inversa es $\lambda I - A$, siendo A el generador infinitesimal del semigrupo de operadores en cuestión.

Con todo ello, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el siguiente resultado.

Teorema 3.23. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de funciones analíticas en el disco unidad con generador infinitesimal G y X un espacio de Banach de funciones analíticas de forma que el semigrupo de operadores de composición $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ inducido por $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo. Entonces el generador infinitesimal A de $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ viene dado por $Af = f'G$ y su dominio $\mathscr{D}(A)$ viene dado por*

$$\mathscr{D}(A) = \{f \in X \colon Gf' \in X\}. \tag{3.15}$$

Demostración. En primer lugar, cabe señalar que la igualdad $Af = f'G$ se sigue inmediatamente de la proposición vista anteriormente.

En cuanto al dominio del generador infinitesimal A, consideramos un valor $\lambda \in \mathbb{C}$ de forma que $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$, para un cierto γ. Tenemos que

$$\begin{aligned}\{f \in X : Gf' \in X\} &= \{f \in X : Gf' - \lambda f \in X\} \\ &= \{f \in X : \text{existe } m \in X \text{ tal que } m = Gf' - \lambda f\} \\ &= \{f \in X : \text{existe } m \in X \text{ tal que } f = R(\lambda)(m)\} \\ &= R(\lambda)(X) = \mathscr{D}(A),\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

Para dar por concluido el presente capítulo vamos a estudiar dos equivalencias en las que entran en juego las propiedades de los semigrupos de operadores de ser fuertemente continuo y uniformemente continuo, así como la posibilidad de definir el espacio de trabajo a partir del generador infinitesimal de los semigrupos de funciones analíticas.

Teorema 3.24. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas con generador infinistesimal G, X un espacio de Banach de funciones analíticas que contiene a las funciones constantes y tal que $M = \sup_{t\in[0,1]} \|Q(t)\|_X < +\infty$. Entonces,*

1. *$\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en X si y solo si $X = \overline{\{f \in X \colon Gf' \in X\}}$.*
2. *$\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es uniformemente continuo en X si y solo si $X = \{f \in X \colon Gf' \in X\}$.*

Demostración. 1. Supongamos que el semigrupo de operadores de composición $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo en X. Gracias al Teorema 3.23 tenemos que

$$\mathscr{D}(A) = \{f \in X \colon Gf' \in X\}.$$

Por otra parte, en el Teorema 1.13 se probó que $\mathscr{D}(A)$ es denso en X, es decir, $\overline{\mathscr{D}(A)} = X$.

Ligando ambos resultados se tiene de forma inmediata que

$$X = \overline{\mathscr{D}(A)} = \overline{\{f \in X \colon Gf' \in X\}},$$

quedando probada así una de las implicaciones de la equivalencia.

Para probar la implicación contraria, dada una función arbitraria $f \in X$ queremos probar que

$$\lim_{t \to 0} \|Q(t)f - f\|_X = 0,$$

donde recordamos que $\{Q(t)\}_{t \geq 0}$ viene dado por $Q(t)f = f \circ \varphi_t$ para todo $t \geq 0$.

Tomamos una función $f \in X$ tal que $Gf' \in X$ y, para simplificar la notación, denotamos por m a dicho producto, es decir,

$$m(z) = G(z)f'(z), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

A continuación vamos a probar que se satisface la igualdad

$$(f \circ \varphi_t)'(z) - f'(z) = \int_0^t (m \circ \varphi_s)'(z)ds, \qquad t \geq 0, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En primer lugar observamos que las derivadas $\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \varphi_s)$ y $\frac{\partial}{\partial z}(f \circ \varphi_s)$ existen y son continuas. En efecto, $f \circ \varphi_s$ es una función de z analítica en el disco unidad por composición de funciones analíticas. En consecuencia, su primera derivada respecto a z existe y, al ser nuevamente derivable por ser la función de partida holomorfa, se tiene de inmediato que es continua. Para la derivada de la función compuesta anterior respecto a s procedemos a calcularla y estudiamos el resultado. Así, dado $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \varphi_s)(z) = f'(\varphi_s(z)) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\varphi_s(z) = f'(\varphi_s(z)) \cdot G(\varphi_s(z)) = (m \circ \varphi_s)(z),$$

que se trata de una función de s holomorfa por composición y, consecuentemente, es continua. Esta observación nos permite dar uno de los pasos que se muestran a continuación.

Dado $z \in \mathbb{D}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi_t)'(z) - f'(z) &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(f \circ \varphi_s)'(z)ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \varphi_s)(z) \right)' ds \\
&= \int_0^t \left(f'(\varphi_s(z)) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\varphi_s(z) \right)' ds \\
&= \int_0^t \left(f'(\varphi_s(z)) \cdot G(\varphi_s(z)) \right)' ds \\
&= \int_0^t (m \circ \varphi_s)'(z)ds,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema de Schwarz de las Derivadas Cruzadas en la segunda igualdad (cuya hipótesis se ha justificado en la observación previa), así como la caracterización del generador infinitesimal (3.14) en el cuarto paso.

De esta forma, si integramos la expresión anterior entre 0 y z se tiene que

$$\begin{aligned}
(f \circ \varphi_t)(z) - f(z) &= (f \circ \varphi_t)(0) - f(0) + \int_0^z \int_0^t (m \circ \varphi_s)'(\xi)dsd\xi \\
&= (f \circ \varphi_t)(0) - f(0) + \int_0^t \int_0^z (m \circ \varphi_s)'(\xi)d\xi ds \\
&= (f \circ \varphi_t)(0) - f(0) + \int_0^t [(m \circ \varphi_s)(z) - m(\varphi_s(0))]ds.
\end{aligned}$$

Como finalmente tomaremos límite cuando t tiende a 0, podemos considerar $t < 1$, de forma que se tiene

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi_t - f\|_X &\leq \|1\|_X |f(\varphi_t(0)) - f(0))| + \left\| \int_0^t [(m \circ \varphi_s)(z) - m(\varphi_s(0))]ds \right\| \\
&\leq \|1\|_X |f(\varphi_t(0)) - f(0))| + \int_0^t \|m \circ \varphi_s - m(\varphi_s(0))\|_X ds \\
&\leq \|1\|_X |f(\varphi_t(0)) - f(0))| + \int_0^t \|m \circ \varphi_s\|_X ds + \|1\|_X \int_0^t |m(\varphi_s(0))|ds \\
&\leq \|1\|_X |f(\varphi_t(0)) - f(0))| + \left(M \|m\|_X + \|1\|_X \sup_{|z| \leq \rho} |m(z)| \right) t,
\end{aligned}$$

donde $M > 0$ es una constante, $\rho = \sup_{s \in [0,1]} |\varphi_s(0)| < 1$ (puesto que φ_s va del disco unidad en sí mismo) y $\|1\|_X$ es otra constante. Nótese que aquí se ha utilizado el hecho de que $m = Gf' \in X$.

Al hacer tender t a 0, el primer sumando de la cota tiende a 0 por continuidad, mientras que el segundo lo hace por ser una constante multiplicada por la variable t. Por tanto, podemos afirmar que

$$\lim_{t\to 0} \|f\circ\varphi_t - f\|_X = 0$$

siempre que $Gf' \in X$.

Sea ahora una función $f \in X$ arbitraria y, haciendo uso del argumento de densidad de la hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ podemos garantizar la existencia de una función $g \in X$ con $Gg' \in X$ de forma que

$$\|f - g\|_X < \varepsilon.$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi_t - f\|_X &\le \|f\circ\varphi_t - g\circ\varphi_t\|_X + \|g\circ\varphi_t - g\|_X + \|g - f\|_X\\ &\le (M+1)\,\|g-f\|_X + \|g\circ\varphi_t - g\|_X\,,\end{aligned}$$

donde M se trata de una constante positiva. Por tanto, tomando límite superior cuando $t \to 0$ en la expresión anterior se obtiene

$$\limsup_{t\to 0} \|f\circ\varphi_t - f\| \le (M+1)\varepsilon + \lim_{t\to 0}\|g\circ\varphi_t - g\| = (M+1)\varepsilon,$$

donde hemos utilizado la condición de densidad y el hecho de que el límite del segundo sumando existe y es nulo, gracias al caso particular que probamos en primer lugar.

Como el valor de $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el límite superior anterior es cero. Aún más, al tratarse del límite superior de cantidades positivas podemos afirmar que

$$\lim_{t\to 0} \|f\circ\varphi_t - f\|_X = 0,$$

de forma que concluimos que el semigrupo de operadores de composición en cuestión es fuertemente continuo, como se quería probar.

2. Comenzamos suponiendo que el semigrupo de operadores es uniformemente continuo. Sabemos por el Teorema 3.23 que $\mathscr{D}(A) = \{f \in X : Gf' \in X\}$. Además, gracias al Teorema 1.14 se tiene que $\mathscr{D}(A) = X$. Teniendo en cuenta ambas afirmaciones queda probada una parte de la equivalencia.

Para la implicación contraria, suponemos que $X = \{f \in X : Gf' \in X\}$. Evidentemente, se tiene que

$$X = \{f \in X : Gf' \in X\} \subset \overline{\{f \in X : Gf' \in X\}} \subset X,$$

de forma que $X = \overline{\{f \in X \colon Gf' \in X\}}$. Aplicando la primera parte del presente teorema, tenemos que el semigrupo de operadores $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo.

Con dicha propiedad se tiene gracias al Teorema 3.23 que

$$\mathscr{D}(A) = \{f \in X \colon Gf' \in X\}$$

y, por tanto, $\mathscr{D}(A) = X$. Finalmente, esto último es equivalente a que el semigrupo de operadores de composición sea uniformemente continuo por el Teorema 1.14, dando por concluida, de esta forma, la prueba de la equivalencia y del teorema.

$\square$

Capítulo 4

Descomposición de Berkson-Porta y semigrupos de operadores de composición en H^∞.

En contraposición a los resultados centrales de capítulos anteriores, el objetivo de esta última parte será probar que, dado un semigrupo continuo de funciones analíticas, el semigrupo de operadores de composición asociado no es fuertemente continuo en H^∞.

Para ello, dividiremos el desarrollo teórico de este capítulo en tres partes claramente diferenciadas. En la primera de ellas presentaremos una serie de herramientas con las que se trabajará el resto del capítulo, ofreciendo una serie de resultados relacionados con el comportamiento de las iteradas de una función holomorfa φ en el disco unidad.

En la segunda sección estudiaremos la descomposición de Berkson-Porta, donde se expondrán una serie de resultados siguiendo cierta casuística que se indicará en su momento con el objetivo de estudiar la forma que tiene el generador infinitesimal de un semigrupo continuo de funciones analíticas.

La tercera parte se centrará en estudiar los semigrupos de operadores de composición en el espacio de las funciones holomorfas y acotadas, donde se abordará el objetivo comentado al principio. Seguiremos una serie de pasos, que resumimos a continuación, con el fin de probar que el semigrupo de operadores de composición en cuestión no es fuertemente continuo.

Probaremos que existe un valor $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de forma que

$$\lim_{r \to 1} G(r\sigma) = \lambda,$$

donde G es el generador infinitesimal del semigrupo de funciones analíticas. Es decir, vamos a probar que existe un punto de la frontera del disco unidad en el que hay límite radial no nulo.

El siguiente paso será probar que dada una función $f \in H^\infty$ con $Gf' \in H^\infty$, la función $h(r) = f(r\sigma)$ verifica que su derivada está acotada, de forma que se podrá concluir que existe el límite $\lim_{r\to 1} f(r\sigma)$.

A continuación, daremos un paso más probando que si $f \in \overline{\{f \in H^\infty : Gf' \in H^\infty\}}$ entonces también existe el límite de la etapa precedente a ésta.

Por último, construiremos una función $f \in H^\infty$ de forma que no exista el límite radial de f en σ. Poniendo en concordancia las cuatro cosas habremos llegado a nuestro objetivo.

Si bien este resultado es conocido, la prueba que mostramos en este capítulo es original y autocontenida. Las demostraciones alternativas usan resultados profundos del espacio H^∞ obtenidos por Bourgain unidos a herramientas no triviales de Análisis Funcional. Para estudiar esa línea con mayor detalle se pueden consultar las obras correspondientes a [Sis] y [Lot].

4.1. Dinámica discreta en el disco unidad.

Para poder dar la forma del generador infinitesimal de un semigrupo continuo de funciones analíticas en secciones posteriores a ésta, es necesario presentar previamente una serie de herramientras y resultados fundamentales que usaremos más adelante. En particular, vamos a hablar a continuación de la métrica hiperbólica y de elementos como los horodiscos, enunciando una serie de resultados en los que se implican ambos conceptos entre los que destaca, por ejemplo, el Lema de Julia.

Definición 4.1. *Sea $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ y $R > 0$. El horodisco $H(\sigma, R)$ de centro σ y radio hiperbólico R es el conjunto*

$$H(\sigma, R) = \{z \in \mathbb{D} \colon \frac{|\sigma - z|^2}{1 - |z|^2} < R\}. \tag{4.1}$$

Es posible comprobar que, desde el punto de vista de la geometría Euclídea, el horodisco $H(\sigma, R)$ es un disco de centro $\frac{\sigma}{1+R}$ y radio $R/(R+1)$ contenido en el disco unidad $\mathbb{D}$ y tangente a la frontera $\partial\mathbb{D}$ en el punto σ.

En el siguiente resultado vamos a ver cómo es posible expresar el concepto de horodisco en términos de la distancia hiperbólica, que se define de la siguiente forma: si consideramos el automorfismo del disco unidad $T_z(w)$ definido como

$$T_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}$$

para $z \in \mathbb{D}$ fijo, se define la *distancia hiperbólica* entre dos puntos z y w como

$$\omega(z,w) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |T_z(w)|}{1 - |T_z(w)|}. \tag{4.2}$$

Proposición 4.2. *Sea $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa. Entonces*

$$\omega(\varphi(z), \varphi(w)) \leq \omega(z,w), \tag{4.3}$$

para todos $z, w \in \mathbb{D}$. Además, la igualdad se da para algunos $z, w \in \mathbb{D}$, con $z \neq w$, si y solo si φ es un automorfismo.

Demostración. Sean $z, w \in \mathbb{D}$, tenemos por el Lema de Schwarz-Pick (véase Teorema 4 de [Gir]) que

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{1 - \overline{\varphi(z)}\varphi(w)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right|. \tag{4.4}$$

Si utilizamos la notación con la que hemos dado las definiciones previas, lo anterior equivale a decir que

$$|T_{\varphi(z)}(\varphi(w))| \leq |T_z(w)|,$$

para cualesquiera $z, w \in \mathbb{D}$.

Ahora bien, teniendo en cuenta esto último y el hecho de que la aplicación $x \in [0, +\infty) \to \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ es creciente, se obtiene que

$$\omega(\varphi(z), \varphi(w)) \leq \omega(z,w),$$

para todos $z, w \in \mathbb{D}$, como se quería probar.

Por último, si se da la igualdad en (4.3), entonces se da en la expresión (4.4) y, de nuevo, por el Lema de Schwarz-Pick se tiene que la aplicación φ es un automorfismo. $\square$

Proposición 4.3. *Sea $\sigma \in \partial\mathbb{D}$. Entonces, para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene*

$$\lim_{w \to \sigma} (\omega(z,w) - \omega(0,w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|\sigma - z|^2}{1 - |z|^2} \right). \tag{4.5}$$

En particular, para todo $R > 0$,

$$H(\sigma, R) = \{z \in \mathbb{D} \colon \lim_{w \to \sigma} (\omega(z,w) - \omega(0,w)) < \frac{1}{2} \log R\}. \tag{4.6}$$

Demostración. Dado $z \in \mathbb{D}$, consideramos el automorfismo del disco unidad T_z definido como

$$T_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}, \qquad w \in \mathbb{D},$$

es decir, la misma aplicación que se utiliza para definir la distancia hiperbólica, de forma que se tiene de forma inmediata que $T_z(z) = 0$. Con todo ello tenemos que

$$\begin{aligned}\omega(z,w) - \omega(0,w) &= \frac{1}{2}\log\frac{1+|T_z(w)|}{1-|T_z(w)|} - \frac{1}{2}\log\frac{1+|w|}{1-|w|}\\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|T_z(w)|}{1-|T_z(w)|}\cdot\frac{1-|w|}{1+|w|}\right), \qquad w\in\mathbb{D}.\end{aligned}$$

Como el módulo es una cantidad positiva, podemos multiplicar y dividir las fracciones obtenidas por $1+|w|$ y $1+|T_z(w)|$ de forma que la expresión anterior es igual a

$$\omega(z,w) - \omega(0,w) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-|w|^2}{1-|T_z(w)|^2}\cdot\frac{1+|T_z(w)|}{1+|w|}\right), \qquad w\in\mathbb{D}.$$

Ahora bien, no es difícil probar que, al tomar límite cuando $w\to\sigma\in\partial\mathbb{D}$ se verifica que

$$\lim_{w\to\sigma}\frac{1+|T_z(w)|}{1+|w|} = 1,$$

de forma que se tiene

$$\lim_{w\to\sigma}(\omega(z,w)-\omega(0,w)) = \frac{1}{2}\lim_{w\to\sigma}\log\left(\frac{1-|w|^2}{1-|T_z(w)|^2}\right).$$

Llevando a cabo unas sencillas cuentas de la función que aparece en el logaritmo se llega a que

$$\begin{aligned}\frac{1-|w|^2}{1-|T_z(w)|^2} &= (1-|w|^2)\frac{1}{1-\left|\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|^2}\\ &= (1-|w|^2)\frac{|1-\overline{z}w|^2}{|1-\overline{z}w|^2-|z-w|^2}\\ &= (1-|w|^2)\frac{|1-\overline{z}w|^2}{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}\\ &= \frac{|1-\overline{z}w|^2}{1-|z|^2}, \qquad w\in\mathbb{D}.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{w\to\sigma}(\omega(z,w)-\omega(0,w)) = \frac{1}{2}\lim_{w\to\sigma}\log\left(\frac{|1-\overline{z}w|^2}{1-|z|^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{|\sigma-z|^2}{1-|z|^2}\right),$$

donde se ha usado el hecho de que $\sigma\in\partial\mathbb{D}$.

Utilizando esto último y la propia definición de horodisco (Definición 4.1) se concluye que

$$H(\sigma, R) = \{z \in \mathbb{D} \colon \lim_{w \to \sigma} (\omega(z, w) - \omega(0, w)) < \frac{1}{2} \log R\},$$

para todo $R > 0$, dando por finalizada, de esta forma, la prueba del presente resultado. $\square$

Dada una función holomorfa $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y $\sigma \in \partial\mathbb{D}$, denotamos por $\alpha_\varphi(\sigma)$ al *coeficiente de dilatación* en la frontera de φ en σ, que viene definido como

$$\alpha_\varphi(\sigma) = \liminf_{z \to \sigma} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|}. \tag{4.7}$$

Lema 4.4. *Sea $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y $\sigma \in \partial\mathbb{D}$. Se tiene*

$$\frac{1}{2} \log \alpha_\varphi(\sigma) = \liminf_{w \to \sigma} (\omega(0, w) - \omega(0, \varphi(w)).$$

Además, $0 < \alpha_\varphi(\sigma) \leq +\infty$.

Demostración. Para todo $w \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\omega(0, w) - \omega(0, \varphi(w)) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |\varphi(w)|}{1 - |w|} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |w|}{1 + |\varphi(w)|} \right). \tag{4.8}$$

Como $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, se tiene que $0 \leq |w|, |\varphi(w)| \leq 1$ para todo $w \in \mathbb{D}$ y, por tanto,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 + |w|}{1 + |\varphi(w)|} \leq 2$$

para todo $w \in \mathbb{D}$. Teniendo en cuenta dichas desigualdades, en la expresión (4.8) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |\varphi(w)|}{1 - |w|} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{2} \right) &\leq \omega(0, w) - \omega(0, \varphi(w)) \\ &\leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - |\varphi(w)|}{1 - |w|} \right) + \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Por tanto, $\alpha_\varphi(\sigma) = +\infty$ si y solo si $\liminf_{w \to \sigma} (\omega(0, w) - \omega(0, \varphi(w)) = +\infty$.

Por otra parte, si tenemos una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{D}$ convergiendo a σ de forma que, o bien el límite $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - |\varphi(z_n)|}{1 - |z_n|}$ sea finito, o bien lo sea $\lim\limits_{n \to \infty} (\omega(0, z_n) - \omega(0, \varphi(z_n))$, necesariamente se tendrá que $|\varphi(z_n)| \to 1$ cuando $n \to \infty$. Por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} \log \left(\frac{1 + |z_n|}{1 + |\varphi(z_n)|} \right) = 0.$$

Con todo ello y teniendo en cuenta la expresión (4.8), llegamos a

$$\lim_{n\to\infty}(\omega(0,z_n)-\omega(0,\varphi(z_n)))=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-|\varphi(z_n)|}{1-|z_n|}\right),$$

teniéndose, por tanto, la primera parte del enunciado.

Finalmente, como las funciones holomorfas son contractivas para la distancia hiperbólica y, haciendo uso de la desigualdad triangular, se tiene que

$$\omega(0,w)-\omega(0,\varphi(w))\geq\omega(\varphi(0),\varphi(w))-\omega(0,\varphi(w))\geq-\omega(0,\varphi(0))>-\infty, \tag{4.9}$$

de donde se concluye que $\alpha_\varphi(\sigma)>0$. □

Teorema 4.5 (Lema de Julia)**.** *Sea $\varphi\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ una función holomorfa y $\sigma\in\partial\mathbb{D}$. Supongamos que $\alpha=\alpha_\varphi(\sigma)<+\infty$. Entonces existe un valor $\eta\in\partial\mathbb{D}$ de forma que para todo $\lambda>0$,*

$$\varphi(H(\sigma,\lambda))\subset H(\eta,\alpha\lambda). \tag{4.10}$$

Además, si tenemos una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{D}$ convergiendo a σ y verificando que

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1-|\varphi(z_n)|}{1-|z_n|}<+\infty, \tag{4.11}$$

entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi(z_n)=\eta$.

Demostración. Si $\alpha_\varphi(\sigma)<\infty$, existe una sucesión $\{w_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{D}$ convergiendo a σ de forma que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1-|\varphi(w_k)|}{1-|w_k|}=\alpha_\varphi(\sigma),$$

por la propia definición del coeficiente de dilatación.

De la prueba del Lema 4.4 se obtenía que $\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi(w_k)|=1$, de forma que, extrayendo subsucesiones convergentes, podemos asumir que existe un valor $\eta\in\partial\mathbb{D}$ de manera que $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(w_k)=\eta$.

Ahora bien, por la igualdad (4.8), lo anterior es equivalente a

$$\lim_{k\to\infty}(\omega(0,w_k)-\omega(0,\varphi(w_k))=\frac{1}{2}\log\alpha_\varphi(\sigma). \tag{4.12}$$

Fijemos $\lambda>0$ y sea ahora $z\in H(\sigma,\lambda)$. Para probar la contención del enunciado hay que ver que $\varphi(z)\in H(\eta,\alpha\lambda.)$ Gracias a la relación que hay entre los horodiscos con la distancia hiperbólica dada en la expresión (4.6), lo anterior es equivalente a probar

$$\lim_{k\to\infty}(\omega(\varphi(z),\varphi(w_k))-\omega(0,\varphi(w_k)))<\frac{1}{2}\log(\alpha\lambda). \tag{4.13}$$

Ahora bien, usando que las aplicaciones holomorfas son contractivas para la distancia hiperbólica (tal y como se probó en la Proposición 4.2) se tiene que

$$\begin{aligned}\omega(\varphi(z),\varphi(w_k))-\omega(0,\varphi(w_k)) &\leq \omega(z,w_k)-\omega(0,\varphi(w_k))\\ &=(\omega(z,w_k)-\omega(0,w_k))+(\omega(0,w_k)-\omega(0,\varphi(w_k))).\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $k\to\infty$, tenemos para el primer sumando que

$$\lim_{k\to\infty}\omega(z,w_k)-\omega(0,w_k)<\frac{1}{2}\log\lambda,$$

donde hemos usado que $z\in H(\sigma,\lambda)$, así como la caracterización de este conjunto mediante la distancia hiperbólica, dada por la expresión (4.6).

En cuanto al segundo sumando, tenemos que el límite es igual a $\dfrac{1}{2}\log\alpha_\varphi(\sigma)$, tal y como se justificó en la expresión (4.12).

Por tanto, se puede concluir que

$$\lim_{k\to\infty}\omega(\varphi(z),\varphi(w_k))-\omega(0,\varphi(w_k))<\frac{1}{2}\log\lambda+\frac{1}{2}\log\alpha_\varphi(\sigma)=\frac{1}{2}\log(\alpha_\varphi(\sigma)\lambda),$$

quedando probada la desigualdad deseada y, por tanto, que $\varphi(z)\in H(\eta,\alpha\lambda)$.

En segundo lugar, supongamos que tenemos una sucesión en el disco $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergiendo a $\sigma\in\partial\mathbb{D}$ y verificando la condición (4.11). Extrayendo subsucesiones y, haciendo un abuso de notación, podemos suponer que existe un valor $\eta'\in\overline{\mathbb{D}}$ de forma que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(z_n)=\eta'.$$

Vamos a suponer que $\eta'\neq\eta$ con el fin de llegar a una contradicción.

En realidad, para que el límite de la condición (4.11) sea finito, es necesario que $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi(z_n)|=1$, de forma que podemos garantizar que $\eta'\in\partial\mathbb{D}$.

Repitiendo el argumento anterior para la prueba de la contención entre conjuntos que se hizo con la sucesión $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, se puede demostrar que

$$\varphi(H(\sigma,\lambda))\subset H(\eta',L\lambda)$$

para todo $\lambda>0$, donde $L=\limsup_{n\to\infty}\dfrac{1-|\varphi(z_n)|}{1-|z_n|}$. Por otra parte, se tiene también que

$$\varphi(H(\sigma,\lambda))\subset H(\eta,\alpha\lambda)$$

para todo $\lambda>0$ y, en consecuencia,

$$\varphi(H(\sigma,\lambda))\subset H(\eta',L\lambda)\cap H(\eta,\alpha\lambda),$$

para todo $\lambda > 0$. Ahora, si $\eta' \neq \eta$ tal y como se ha supuesto previamente, dicha intersección es vacía para un valor de λ suficientemente pequeño, lo que resulta una contradicción.

Por tanto, podemos concluir que $\eta' = \eta$ y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \eta,$$

tal y como se quería probar. □

La importancia del siguiente resultado se debe a que garantiza la existencia de un valor b en la frontera del disco unidad de forma que la imagen del horodisco $H(b,\lambda)$ bajo cualquier función holomorfa en $\mathbb{D}$ sin puntos fijos sigue perteneciendo a dicho horodisco para todo $\lambda > 0$. Su uso será habitual en la prueba de resultados posteriores como el Teorema de Denjoy-Wolff.

Teorema 4.6. *Sea $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función holomorfa sin puntos fijos. Entonces existe un valor $b \in \partial\mathbb{D}$ de forma que*

$$\varphi(H(b,\lambda)) \subset H(b,\lambda), \tag{4.14}$$

para todo $\lambda > 0$.

Demostración. Dada una función $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa sin puntos fijos y $\delta > 0$, consideramos el conjunto G_δ definido como

$$G_\delta = \{z \in \mathbb{D}\colon |z| > 1-\delta, \quad |z-\varphi(z)| < \delta, \quad \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} < 1+\delta\}. \tag{4.15}$$

En primer lugar, vamos a probar que para todo $\delta > 0$ se tiene que $G_\delta \neq \emptyset$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe un valor $\delta > 0$ de forma que $G_\delta = \emptyset$. La idea es usar el Teorema de Rouché para probar que, con estas condiciones, φ tiene algún punto fijo y, por tanto, llegar a una contradicción con el enunciado del teorema.

Consideramos la curva $\gamma = \{|z| = r\}$, donde $1-\delta < r < 1$, y las funciones z y $z-\varphi(z)$, que utilizaremos en el Teorema de Rouché.

Sea $z \in \gamma$. Se tiene por la propia definición del conjunto que $|z| > 1-\delta$. Ahora bien, como $G_\delta = \emptyset$, se debe verificar o bien que $|z-\varphi(z)| \geq \delta$, o bien que $\dfrac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} \geq 1+\delta$.

Si estamos en el primer caso, se tiene que

$$|\varphi(z)| < 1 = 1-\delta+\delta < |z| + |z-\varphi(z)|$$

puesto que $1-\delta < r = |z|$ y $\delta \leq |z-\varphi(z)|$.

En el segundo caso, si despejamos convenientemente en la desigualdad implicada, tenemos que

$$|\varphi(z)| \leq 1-(1+\delta)(1-|z|) = -\delta+(1+\delta)|z| = -\delta+\delta|z|+|z|.$$

Ahora bien, como $|z| = r < 1$, se tiene que $-\delta+\delta|z| < 0$ y, en consecuencia,

$$|\varphi(z)| \leq -\delta+\delta|z|+|z| < |z| \leq |z|+|z-\varphi(z)|,$$

puesto que al sumar cantidades positivas se mantiene la misma desigualdad.

Haciendo uso del Teorema de Rouché en cualquiera de los dos casos, podemos afirmar que las funciones z y $z-\varphi(z)$ tienen el mismo número de ceros en el disco cuya frontera es γ. Pero z en dicha región tiene única solución, de forma que se tiene la misma propiedad para $z-\varphi(z)$. De esta forma, se tendría que $z = \varphi(z)$ para algún $z \in \mathbb{D}$ y, en consecuencia, φ contaría con puntos fijos en el disco unidad, lo que resulta una contradicción con la hipótesis de partida. Es por ello que podemos afirmar que $G_\delta \neq \emptyset$ para todo $\delta > 0$.

Con el fin de probar el enunciado del teorema, consideramos ahora $z_n \in G_{\frac{1}{n}}$ para cada $n \geq 1$. En primer lugar, una de las condiciones que se verifica en cada caso es

$$\frac{1-|\varphi(z_n)|}{1-|z_n|} < 1+\frac{1}{n}$$

y, por tanto, tomando límite cuando $n \to \infty$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1-|\varphi(z_n)|}{1-|z_n|} \leq 1. \tag{4.16}$$

Por otra parte, $1-\dfrac{1}{n} < |z_n| < 1$ para cada $n \geq 0$, puesto que $z_n \in \mathbb{D}$ en cada caso. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1. \tag{4.17}$$

A partir de esto último, podemos extraer una subsucesión $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la primera, de forma que $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = b \in \partial\mathbb{D}$. Ahora bien, como la sucesión inicial verifica la condición

$$|z_n-\varphi(z_n)| < \frac{1}{n}$$

por pertenecer cada z_n a $G_{\frac{1}{n}}$, también se tendrá dicha desigualdad para la subsucesión que hemos tomado, de forma que podemos afirmar que

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(z_{n_k}) = b. \tag{4.18}$$

Por último, como los cocientes de la expresión (4.16) son acotados, volvemos a tomar una subsucesión de la anterior, a la que denotamos por simplicidad $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-|\varphi(w_n)|}{1-|w_n|} = \delta \leq 1, \qquad \lim_{n\to\infty} w_n = b \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi(w_n) = b.$$

Aplicando el Lema de Julia (Teorema 4.5) con las tres condiciones anteriores, podemos afirmar finalmente que

$$\varphi(H(b,\lambda)) \subset H(b,\delta\lambda) \subset H(b,\lambda) \tag{4.19}$$

para todo $\lambda > 0$. □

Por último, es necesario detenerse en la siguiente observación que ofrece un pequeño matiz sobre el resultado que acabamos de probar.

Observación 4.7. Es posible probar que el valor $b \in \partial\mathbb{D}$ que aparece en el resultado anterior es único. En efecto, supongamos que existen dos valores $b_1 \neq b_2$ verificando dicho resultado. Dado $\lambda > 0$, se tendría que

$$\varphi(H(b_1,\lambda)) \subset H(b_1,\lambda) \qquad \text{y} \qquad \varphi(H(b_2,\lambda)) \subset H(b_2,\lambda).$$

Además, existe un valor $\lambda_0 > 0$ tal que los discos $H(b_1,\lambda_0)$ y $H(b_2,\lambda_0)$ son tangentes en un punto, al que denotamos por z_0. De esta forma, se tiene a partir de lo anterior que $\varphi(z_0) \in \overline{H(b_1,\lambda_0)} \cap \overline{H(b_2,\lambda_0)}$. Pero precisamente por tener un único punto de tangencia, debe ser $\varphi(z_0) = z_0$, siendo dicho punto un punto fijo de la aplicación φ, lo que resulta una contradicción con una de las hipótesis iniciales. Por tanto, podemos garantizar la unicidad del valor $b \in \partial\mathbb{D}$.

Aunque no es necesario para nuestro objetivo final, con el esfuerzo realizado hasta ahora podemos estudiar el comportamiento asintótico de $\varphi_n(z)$, con $z \in \mathbb{D}$ fijo, donde recordamos que dicha función corresponde con la composición

$$\varphi_n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi,$$

un número n de veces. Nos disponemos a ello con los resultados que vienen a continuación.

En el Teorema 4.6 se ha probado que para una función holomorfa φ del disco en sí mismo y sin puntos fijos, existía un valor b en la frontera del mismo de forma que $\varphi(H(b,\lambda)) \subset H(b,\lambda)$, para todo $\lambda > 0$. Iterando este procedimiento podemos afirmar que, para todo $n \geq 1$, $\varphi_n(H(b,\lambda)) \subset H(b,\lambda)$, para todo $\lambda > 0$. Más aún, fijado el valor de λ y tomando z en la frontera del horodisco en cuestión, se puede ver que $\varphi_n(z) \in \overline{H(b,\lambda)}$.

Lo que vamos a probar a continuación es el resultado que se conoce como Teorema de Denjoy-Wolff, en el que se afirma que, bajo ciertas condiciones, existe un valor $b \in \overline{\mathbb{D}}$

de forma que $\varphi_n(z) \to b$ cuando $n \to +\infty$, para un z en la frontera de un horodisco, fijado también de manera previa. Comenzaremos con el caso discreto, enunciando en dos resultados distintos el caso en el que la función φ tiene puntos fijos y el caso en el que no es así. El Teorema de Denjoy-Wolff continuo se probará en la siguiente sección del capítulo dando paso, además, a una serie de ejemplos en los que aplicaremos estos resultados.

Teorema 4.8 (Teorema de Denjoy-Wolff discreto)**.** *Sea $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa y sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. Existe un valor $b \in \partial\mathbb{D}$ de forma que*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(z) = b. \tag{4.20}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, la convergencia es uniforme sobre compactos.

Demostración. En primer lugar, supongamos que φ no es un automorfismo.

Sea b el punto cuya existencia es garantizada por el Teorema 4.6 y sea $\lambda > 0$ de forma que $z \in \partial H(b,\lambda)$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(z) \neq b$. En ese caso, existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{n_k\geq 1}$ y un valor $z_0 \in \mathbb{D}$ distinto de b de forma que

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_{n_k}(z) = z_0.$$

Se tiene que z_0 pertenece al disco abierto ya que el único punto que tienen en común $\partial\mathbb{D}$ y la frontera del horodisco es el punto b.

Si denotamos por δ a $\omega(z_0, \varphi(z_0))$, tenemos que

$$\delta = \omega(z_0, \varphi(z_0)) = \lim_{k\to+\infty} \omega(\varphi_{n_k}(z_0), \varphi_{n_k+1}(z_0)) \leq \omega(\varphi(z_0), \varphi_2(z_0)).$$

Por otra parte,

$$\omega(\varphi(z_0), \varphi(\varphi(z_0))) = \lim_{k\to+\infty} \omega(\varphi_{n_k+1}(z_0), \varphi_{n_k+2}(z_0)) \leq \lim_{k\to+\infty} \omega(\varphi_{n_k}(z_0), \varphi_{n_k+1}(z_0)) = \delta,$$

En particular,

$$w(z_0, \varphi(z_0)) = w(\varphi(z_0), \varphi_2(z_0)),$$

de forma que φ es un autormorfismo por la Proposición 4.2. Este hecho supone una contradicción, de forma que podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(z) = b.$$

Supongamos ahora que $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es un automorfismo sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. En ese caso, $\varphi\colon \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$ debe tener un punto fijo $b \in \partial\mathbb{D}$. Consideramos la aplicación $T_b\colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ definida por

$$T_b(z) = \frac{b+z}{b-z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$, es decir, el semiplano derecho.

A partir de las dos funciones anteriores construimos $\psi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ como la composición $T_b \circ \varphi \circ T_b^{-1}$, que se trata de un automorfismo del semiplano en él mismo de manera que fija el ∞, es decir, $\psi(\infty) = \infty$.

Es por ello que deben existir ciertos valores $a, c \in \mathbb{C}$ (de los que daremos más información a continuación) de forma que

$$\psi(z) = az + c, \qquad z \in \mathbb{H}.$$

Como $\psi\colon i\mathbb{R} \to i\mathbb{R}$, tenemos que $\psi(0) = c \in i\mathbb{R}$, de forma que podemos garantizar que $\operatorname{Re} c = 0$. En otras palabras, c es un número imaginario puro.

Por otra parte, $\psi(i) = ai + c \in i\mathbb{R}$, de donde se obtiene de forma necesaria que $a \in \mathbb{R}$ y, en particular, $a \in (0, +\infty)$, pues en caso contrario nos encontraríamos con el hecho de que ψ lleva $\mathbb{H}$ al semiplano izquierdo.

Si iteramos la función ψ, se puede probar de forma inductiva que

$$\psi_n(z) = a^n z + c \sum_{k=0}^{n-1} a^k, \qquad z \in \mathbb{H}, \tag{4.21}$$

para todo $n \geq 1$. Es por su forma que a la hora de calcular el límite cuando $n \to +\infty$ necesitamos distinguir varios casos.

En primer lugar, si $a = 1$ se tiene que $c \neq 0$ y

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n(z) = \lim_{n \to +\infty} z + nc = \infty,$$

siendo ∞ el único punto fijo en este primer caso.

Por otra parte, si $a \neq 1$, es posible desarrollar la expresión (4.21) de forma que

$$\psi_n(z) = a^n z + c \sum_{k=0}^{n-1} a^k, = a^n z + c\frac{1 - a^n}{1 - a}, \qquad z \in \mathbb{H}.$$

Así, si $a > 1$ se tiene también que

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n(z) = \lim_{n \to +\infty} a^n z + c\frac{1 - a^n}{1 - a} = \infty,$$

de manera que en este caso, así como en el primero estudiado, el ∞ es un punto fijo. Cabe señalar, aunque no es influyente para la conclusión final, que en este caso el punto

$\dfrac{c}{1-a}$ también se trata de un punto fijo. Es un punto de la frontera del disco unidad (que podría comprobarse que no es atractivo).

Por último, si $a < 1$, el resultado es

$$\lim_{n\to+\infty} \psi_n(z) = \lim_{n\to+\infty} a^n z + c\frac{1-a^n}{1-a} = \frac{c}{1-a},$$

de forma que ∞ y $\dfrac{c}{1-a}$ serían los dos puntos fijos de la aplicación que estamos tratando.

En definitiva, si vemos la función φ_n como

$$\varphi_n = T_b^{-1} \circ \psi_n \circ T_b,$$

y tenemos en cuenta que $T_b^{-1}(w) = b\dfrac{w-1}{w+1}$, para todo $w \in \mathbb{H}$, podemos concluir que

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(z) = \lim_{n\to+\infty} T_b^{-1}(\psi_n(T_b(z))) = T_b^{-1}(\chi) = b,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, siendo $\chi = \infty$ si $a > 1$ o $\chi = \dfrac{a}{1-a}$ si $a < 1$.

De hecho, al tratarse de una familia normal de funciones, la convergencia anterior es uniforme en compactos. $\square$

Demostramos ahora el mismo resultado anterior pero en el caso en el que φ tiene un punto fijo.

Teorema 4.9. *Sea $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica con un punto fijo $b \in \mathbb{D}$ y que no es un automorfismo elíptico de $\mathbb{D}$. Entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(z) = b$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. De hecho, la convergencia es uniforme en compactos.

Demostración. Por hipótesis, la aplicación φ tiene a lo más un punto fijo en el disco unidad. Para la prueba de este resultado distinguiremos dos casos sobre el punto fijo $b \in \mathbb{D}$.

En primer lugar, supongamos que $b = 0$. Como φ no es un automorfismo, por el Lema de Schwarz tenemos que $|\varphi(z)| < |z|$ para todo $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Fijemos ahora un valor $0 < r < 1$, de forma que llamamos $M(r) = \sup\{|\varphi(z)|\colon |z| \le r\}$ y $\delta = M(r)/r$. Haciendo uso de nuevo del Lema de Schwarz tenemos que $\delta < 1$.

A partir de todo lo anterior definimos una función ψ del disco unidad como

$$\psi(z) = \frac{\varphi(rz)}{M(r)}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que es analítica en $\mathbb{D}$, lleva el disco unidad en sí mismo y verifica $\psi(0) = 0$. Aplicando de nuevo el Lema de Schwarz se tiene que $|\psi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, en consecuencia, $|\varphi(rz)| \leq M(r)|z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. De esta forma, si tomamos $|z| \leq r$, tenemos que

$$|\varphi(z)| = \left|\varphi\left(r\frac{z}{r}\right)\right| \leq M(r)\left|\frac{z}{r}\right| = \delta|z|,$$

lo que además supone una pequeña mejora del Lema de Schwarz. Haciendo uso de que $|\varphi(z)| < |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ (y en particular para $|z| \leq r$) e iterando el proceso anterior tenemos que

$$|\varphi_n(z)| \leq \delta^n|z|$$

para todo z con $|z| \leq r$. Este hecho implica que φ_n converge a 0 uniformemente en $r\overline{\mathbb{D}}$.

En un segundo caso, supongamos que $b \neq 0$. Como ya hicimos en resultados anteriores, consideramos el automorfismo del disco unidad T_b definido como

$$T_b(z) = \frac{b - z}{1 - \bar{b}z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

y cuyo inverso era él mismo, de forma que construimos la aplicación ψ como la composición $\psi = T_b \circ \varphi \circ T_b$. De esta forma, ψ se trata de una aplicación analítica del disco unidad en sí misma que fija el origen y que no es automorfismo del disco unidad. Por lo visto en el primer caso, $\varphi_n(z)$ converge a cero uniformemente sobre compactos en el disco unidad.

Iterando la función que acabamos de definir y haciendo uso de que $T_b \circ T_b = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, tenemos que $\psi_n = T_b \circ \varphi_n \circ T_b$ para todo $n \geq 1$, de forma que $(\psi_n \circ T_b)(z)$ converge a cero y $\varphi_n(z) = (T_b \circ \psi_n \circ T_b)(z)$ converge a $T_b(0) = b$ uniformemente sobre compactos en el disco unidad.

Con ello finalizamos la prueba del Teorema de Denjoy-Wolff cuando φ tiene un punto fijo en el disco unidad. □

4.2. Descomposición de Berkson-Porta.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado debido a Berkson y Porta:

Teorema 4.10. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas con generador infinitesimal G. Entonces existe un punto $b \in \overline{\mathbb{D}}$ y una función P, analítica en $\mathbb{D}$ con* $\operatorname{Re} P \geq 0$, *tal que*

$$G(z) = (z - b)(\bar{b}z - 1)P(z), \tag{4.22}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Definición 4.11. *La expresión* (4.22) *es conocida como descomposición de Berkson-Porta del generador infinitesimal de un semigrupo continuo de funciones analíticas.*

Es necesario señalar que la prueba del resultado anterior dependerá de los puntos fijos que tengan las funciones del semigrupo, por lo que vamos a comenzar probando una disyuntiva sobre dichos elementos. De forma previa, enunciamos y demostramos un lema sobre automorfismos que nos hará falta más adelante.

Lema 4.12. *Sea* $T\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *un automorfismo cuyo inverso es él mismo, es decir* $T \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. *Entonces* T *tiene un punto fijo en* $\mathbb{D}$.

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que T no tiene ningún punto fijo en el disco unidad. Como $\overline{\mathbb{D}}$ es invariante por T, debe existir un valor $b \in \partial\mathbb{D}$ de forma que $Tb = b$. Fijado dicho valor $b \in \partial\mathbb{D}$, consideramos la función S definida como

$$S_b(z) = \frac{1 + \bar{b}z}{1 - \bar{b}z} = \frac{b + z}{b - z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que $S_b\colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, donde se recuerda que $\mathbb{H}$ es el semiplano derecho, es decir, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

A partir de dichas funciones, definimos ψ como la composición $\psi = S_b \circ T \circ S_b^{-1}$, de forma que $\psi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ se trata de un automorfismo sin puntos fijos en $\mathbb{H}$. De hecho, fija el ∞. Es por ello que deben existir dos valores $a, c \in \mathbb{C}$ de forma que $\psi(z) = az + c$ para todo $z \in \mathbb{H}$.

Sustituyendo unos valores determinados en la función ψ se puede comprobar, tal y como se hizo en el Teorema 4.8, que $a \in (0, +\infty)$ y $c \in i\mathbb{R}$.

Ahora bien, si componemos ψ con ella misma, se puede deducir a partir de una de las hipótesis del lema que $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{H}}$. Por tanto,

$$\psi(\psi(z)) = a(az + c) + c = a^2 z + c(a + 1) = z, \qquad z \in \mathbb{H}.$$

Para que sea cierta la igualdad anterior, debe ocurrir que $a^2 = 1$. Si $a = 1$, se tendría que $c = 0$, resultando ser el automorfismo T la identidad, lo que conduce a una contradicción. Por el contrario, si $a = -1$, llegaríamos a un absurdo de forma inmediata con el hecho de que $a > 0$.

Por tanto, como para ambos casos llegamos a hechos contradictorios, podemos afirmar que T tiene un punto fijo en el disco unidad. $\square$

Procedemos ya a enunciar y probar la disyuntiva de la que se hablaba al comienzo de la sección.

Proposición 4.13. *Sea* $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo continuo de funciones analíticas. Entonces, o bien ninguna función* φ_t*, para* $t > 0$*, tiene un punto fijo en* $\mathbb{D}$*; o bien, existe un punto* $a \in \mathbb{D}$ *de forma que* $\varphi_t(a) = a$ *para todo* $t \geq 0$*.*

Demostración. Si se da, por ejemplo, la primera posibilidad la prueba habría terminado. Tenemos que probar, por tanto, que si no se tiene el primer caso necesariamente se da el segundo.

Supongamos primero que para todo $t > 0$ se tiene $\varphi_t \neq \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$, siendo $\mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ la identidad en el disco unidad. Si no se da la primera opción del enunciado, existe un punto $a \in \mathbb{D}$ y un valor $t_0 > 0$ de forma que $\varphi_{t_0}(a) = a$. A partir de ello vamos a demostrar que $\varphi_{\frac{t_0}{2}}(a) = a$.

De no ser así, tomemos $b = \varphi_{\frac{t_0}{2}}(a) \neq a$. Ahora bien, utilizando las propiedades de la definición del semigrupo algebraico,

$$\varphi_{\frac{t_0}{2}}(b) = \varphi_{\frac{t_0}{2}}(\varphi_{\frac{t_0}{2}}(a)) = \varphi_{t_0}(a) = a.$$

En consecuencia,

$$\varphi_{t_0}(b) = \varphi_{\frac{t_0}{2}}(\varphi_{\frac{t_0}{2}}(b)) = \varphi_{\frac{t_0}{2}}(a) = b,$$

de forma que la función φ_{t_0} tendría un segundo punto fijo, b.

Haciendo uso del Lema de Schwarz tendríamos que, al poseer dos puntos fijos distintos, φ_{t_0} se trataría de la identidad, resultando ser una contradicción con una de nuestras hipótesis primeras. Por tanto, $\varphi_{\frac{t_0}{2}}(a) = a$ y, repitiendo de forma análoga el razonamiento, se puede probar que

$$\varphi_{2^{-n}t_0}(a) = a,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A partir de lo anterior, es inmediato ver ahora que $\varphi_{\frac{kt_0}{2^n}}(a) = a$ con $k, n \in \mathbb{N}$, de forma que obtenemos un conjunto denso de valores en $[0, +\infty)$ para los que la función φ_t tiene un punto fijo en a. Usando precisamente dicha densidad y el hecho conocido de que

$$\lim_{s \to t} \varphi_s(z) = \varphi_t(z),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, podemos concluir que $\varphi_t(a) = a$, para todo $t \geq 0$.

Supongamos ahora que existen valores de t para los cuales las funciones φ_t son la identidad. Podemos garantizar, entonces, la existencia de un valor t_0, donde

$$t_0 = \inf\{t > 0 \colon \varphi_t = I\}$$

que podemos suponer estrictamente positivo, puesto que si el ínfimo anterior vale 0, usando un argumento con iteradas y densidad concluiríamos que el semigrupo es trivial y, en ese caso, todo $a \in \mathbb{D}$ cumpliría que $\varphi_t(a) = a$, para todo $t \geq 0$. Dicho ínfimo debe ser un mínimo. Es decir, $\varphi_{t_0} = I$.

Como t_0 es el menor de los valores que cumplen la característica anterior, se tiene que $\varphi_{\frac{t_0}{2}} \neq I$, de forma que si consideramos su composición,

$$\varphi_{\frac{t_0}{2}} \circ \varphi_{\frac{t_0}{2}} = \varphi_{t_0} = I,$$

siendo lo anterior un automorfismo del disco. Por tanto, $\varphi_{\frac{t_0}{2}}$ es un automorfismo del disco unidad cuyo inverso es él mismo. La única posibilidad es que sea un automorfismo de tipo elíptico. En ese caso, existe un valor $a \in \mathbb{D}$ de forma que $\varphi_{\frac{t_0}{2}}(a) = a$, tal y como se probó en el Lema 4.12. Llegados a este punto, nos encontraríamos en la primera suposición de la prueba para los valores $t \in (0, t_0/2]$, de forma que si seguimos un procedimiento análogo al anterior se prueba que $\varphi_t(a) = a$ para todo $t \geq 0$.

Con ello damos por concluida la prueba de la disyuntiva que se presentaba en el enunciado. $\square$

A continuación vamos a estudiar la forma del generador infinitesimal del semigrupo continuo de funciones analíticas $\{\varphi_t\}_{t \geq 0}$ en cada uno de los dos casos anteriores. Comenzamos con el caso en que existe un punto $a \in \mathbb{D}$ con $\varphi_t(a) = a$ para todo $t \geq 0$.

Supongamos en primer lugar que el valor anterior es $a = 0$, es decir, $\varphi_t(0) = 0$ para todo $t \geq 0$. Si consideramos, para cada $z \in \mathbb{D}$, la aplicación ψ definida como

$$\begin{array}{rccc} \psi\colon & [0, +\infty) & \longrightarrow & [0, 1] \\ & t & \longmapsto & |\varphi_t(z)|^2, \end{array}$$

el Lema de Schwarz nos dice que es decreciente. En efecto, si $t > s > 0$ se tiene que

$$\varphi_t(z) = \varphi_{t-s}(\varphi_s(z))$$

y, aplicando dicho resultado,

$$|\varphi_t(z)| \leq |\varphi_s(z)|.$$

Por tanto, la derivada de la aplicación ψ es negativa. Teniendo en cuenta que $|\varphi_t(z)|^2 = \varphi_t(z)\overline{\varphi_t(z)}$ y que

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = G(\varphi_t(z)), \qquad z \in \mathbb{D},$$

como ya se probó en la Proposición 3.17, lo anterior quiere decir que

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t(z))\overline{\varphi_t(z)} + \varphi_t(z)\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\varphi_t(z)}) \\ &= G(\varphi_t(z))\overline{\varphi_t(z)} + \varphi_t(z)\overline{G(\varphi_t(z))} \leq 0, \qquad z \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Ahora bien, el resultado obtenido no es más que un número complejo más su conjugado o, equivalentemente, el doble de su parte real. Por tanto, estamos diciendo que

$$\operatorname{Re}(G(\varphi_t(z))\overline{\varphi_t(z)}) \leq 0,$$

para todo $t \geq 0$ y todo $z \in \mathbb{D}$.

En particular, para $t = 0$ se tendría que

$$\operatorname{Re}(G(z)\overline{z}) = \operatorname{Re}\left(G(z)\frac{|z|^2}{z}\right) \leq 0, \qquad z \in \mathbb{D}, \quad z \neq 0.$$

Como el cuadrado del módulo de z es real y positivo, puede salir fuera de la parte real de forma que afirmamos que

$$\operatorname{Re}\left(G(z)\frac{1}{z}\right) \leq 0, \qquad z \in \mathbb{D}, \quad z \neq 0.$$

Si definimos ahora la función P como $P(z) = -\dfrac{G(z)}{z}$ para $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, se tiene que $G(z) = -zP(z)$ con $\operatorname{Re}(P) \geq 0$, como se quería probar. Puesto que $G(0) = 0$, la función P tiene una singularidad evitable en 0 y es, por tanto, holomorfa en $\mathbb{D}$.

Recordamos que se ha probado la forma del generador para el caso en el que $a = 0$. Si ahora generalizamos, de forma que existe un valor $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ con $\varphi_t(a) = a$ para todo $t \geq 0$, podemos definir una función ψ_t como

$$\psi_t = \tau_a^{-1} \circ \varphi_t \circ \tau_a,$$

donde τ_a es la biyección del disco unidad en sí mismo definida por

$$\tau_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D};$$

y cuya inversa se puede comprobar que es ella misma. Es decir $\tau_a \circ \tau_a = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Por tanto, nuestra función realmente se define como $\psi_t = \tau_a \circ \varphi_t \circ \tau_a$. Claramente, $\{\psi_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de funciones analíticas.

Ahora bien, si evaluamos dicha función en el 0, tenemos que

$$\psi_t(0) = \tau_a^{-1}(\varphi_t(\tau_a(0))) = \tau_a^{-1}(\varphi_t(a)) = \tau_a^{-1}(a) = 0,$$

de forma que el semigrupo de funciones analíticas definido por dicha función se encuentra en el primero de los casos que se ha estudiado: cuando el punto fijo era el origen para todo $t \geq 0$. Por lo probado anteriormente, sabemos que la derivada de dicha función en $t = 0$ corresponde a

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(z)|_{t=0} = -zQ(z)$$

con $\mathrm{Re}(Q) \geq 0$, propiedad que utilizaremos a continuación.

Operando adecuadamente con la composición de funciones, es posible ver la función φ_t como

$$\varphi_t = \tau_a \circ \psi_t \circ \tau_a.$$

Si derivamos respecto a t con el fin de conocer la forma del generador infinitesimal del semigrupo de funciones analíticas, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = \tau_a'(\psi_t(\tau_a(z))) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\psi_t(\tau_a(z))), \qquad z \in \mathbb{D}$$

de forma que si evaluamos dicha expresión en $t = 0$ y tenemos en cuenta los resultados obtenidos previamente se tiene que

$$G(z) = \tau_a'(\tau_a(z)) \cdot (-\tau_a(z))Q(\tau_a(z)), \qquad z \in \mathbb{D},$$

con $\mathrm{Re}(Q(\tau_a(z))) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Desarrollando ahora el término de la derivada se tiene que

$$\tau_a'(z) = \frac{-1 + \overline{a}z + |a|^2 - \overline{a}z}{(1 - \overline{a}z)^2} = \frac{|a|^2 - 1}{(1 - \overline{a}z)^2}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\tau_a'(\tau_a(z)) &= \frac{|a|^2 - 1}{\left(1 - \overline{a}\dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}\right)^2} = \frac{|a|^2 - 1}{\left(\dfrac{1 - \overline{a}z - |a|^2 + \overline{a}z}{1 - \overline{a}z}\right)^2} \\
&= \frac{|a|^2 - 1}{\left(\dfrac{1 - |a|^2}{1 - \overline{a}z}\right)^2} = \frac{(1 - \overline{a}z)^2}{|a|^2 - 1}, \qquad z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Al efectuar el producto con $-\tau_a(z)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\tau_a'(\tau_a(z)) \cdot (-\tau_a(z)) &= \frac{(1 - \overline{a}z)^2}{|a|^2 - 1} \cdot \left(-\frac{a - z}{1 - \overline{a}z}\right) = -\frac{1 - \overline{a}z}{|a|^2 - 1}(a - z) \\
&= \frac{1}{1 - |a|^2}(1 - \overline{a}z)(a - z) = \frac{1}{1 - |a|^2}(z - a)(\overline{a}z - 1), \qquad z \in \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

Tenemos así que el generador infinitesimal del semigrupo de funciones analíticas para este caso es

$$G(z) = (z - a)(\overline{a}z - 1)P(z), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{4.23}$$

con $a \in \mathbb{D}$ y $\mathrm{Re}(P) \geq 0$, siendo P la función definida como

$$P(z) = \frac{1}{1 - |a|^2}Q(\tau_a(z)), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Con ello finaliza la demostración del Teorema 4.10 si las funciones del semigrupo comparten un punto fijo en $\mathbb{D}$. Comenzamos ahora la demostración para los restantes casos. Hay una idea común con el caso anterior: tenemos que encontrar un disco $D \subset \mathbb{D}$ tal que $\varphi_t(D) \subset D$.

En el caso recién finalizado el papel del disco D lo jugaba $r\mathbb{D}$ con $r \in (0,1)$ y, por otra parte, el hecho de que $\varphi_t(D) \subset D$ lo garantizaba el Lema de Schwartz. La demostración de esto último cuando no hay puntos fijos para las funciones del semigrupo es considerablemente más complicada, y se basa en todo el desarrollo que hemos llevado a cabo en la Sección 4.1 del presente capítulo.

Como estamos ya trabajando con las funciones del semigrupo continuo de funciones analíticas, podemos hacer una observación apoyándonos en la Observación 4.7 que se hizo al final de la sección anterior.

Observación 4.14. Supongamos ahora que $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de funciones analíticas sin puntos fijos en $\mathbb{D}$. El Teorema 4.6 garantiza que para cada valor $t > 0$ existe un valor $b_t \in \partial\mathbb{D}$ tal que
$$\varphi_t(H(b_t,\lambda)) \subset H(b_t,\lambda),$$
para todo $\lambda > 0$. Veamos que $b_t = b_1$ para todo $t > 0$.

De hecho, supongamos que existe un valor $n \in \mathbb{N}$ con $b_{\frac{1}{n}} \neq b_1$ de forma que, para todo $\lambda > 0$,
$$\varphi_{\frac{1}{n}}(H(b_{\frac{1}{n}},\lambda)) \subset H(b_{\frac{1}{n}},\lambda).$$

En consecuencia, se tendrá si evaluamos φ_1 en $H(b_{\frac{1}{n}},\lambda)$ que
$$\varphi_1(H(b_{\frac{1}{n}},\lambda)) = \varphi_{\frac{1}{n}}(\varphi_{\frac{1}{n}}(\cdots\varphi_{\frac{1}{n}}(H(b_{\frac{1}{n}},\lambda)))) \subset \varphi_{\frac{1}{n}}(H(b_{\frac{1}{n}},\lambda)) \subset H(b_{\frac{1}{n}},\lambda),$$
donde la composición que aparece en esta última expresión se lleva a cabo un número n de veces. Esto último unido a la Observación 4.7 nos permite llegar a una contradicción con la hipótesis de que $b_{\frac{1}{n}} \neq b_1$.

Por otra parte, se puede demostrar lo mismo para cualquier múltiplo de $1/n$, de forma que dicha contención es cierta en un conjunto denso en $\mathbb{R}^+$. La continuidad en t nos permite afirmar que
$$\varphi_t(H(b_1,\lambda)) \subset \overline{H(b_1,\lambda)}$$
para todo $t > 0$ y todo $\lambda > 0$. Usando el Teorema de la Aplicación Abierta podemos afirmar que
$$\varphi_t(H(b_1,\lambda)) \subset \overset{\circ}{\overline{H(b_1,\lambda)}} = H(b_1,\lambda),$$
para todo $t > 0$ y todo $\lambda > 0$, dando por concluida, de esta forma, la justificación de esta observación. Llamaremos b a este punto destacado del semigrupo.

Finalmente, vamos a dar la forma del generador infinitesimal teniendo en cuenta todo lo anterior. Una vez más, recordamos el caso en el que estamos: ninguna función del semigrupo de funciones analíticas tiene puntos fijos.

Lo primero que vamos a hacer es construir una función T_b, donde b es el elemento de la frontera del disco unidad que aparece en el Teorema 4.6, definida como

$$T_b(z) = \frac{b+z}{b-z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Como $T_b(b) = \infty$, podemos garantizar que la imagen de $\mathbb{D}$ es un semiplano. Concretamente $T_b(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$, siendo $\mathbb{H}$ el semiplano derecho, es decir,

$$\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w > 0\}.$$

Si tenemos en cuenta la imagen de los horodiscos a través de dicha aplicación, es posible comprobar que, dado $\lambda > 0$,

$$T_b(H(b,\lambda)) = \{w \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} w > \frac{1}{\lambda}\}.$$

Denotaremos por Π_λ a este semiplano en lo que sigue.

En efecto, dado $z \in H(b,\lambda)$ se tiene por pertenecer a dicho horodisco que

$$\frac{|b-z|^2}{1-|z|^2} < \lambda.$$

Si estudiamos la parte real de la imagen de dicho punto, a través de T_b se tiene que

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} T_b(z) = 2\operatorname{Re}\left(\frac{b+z}{b-z}\right) &= \frac{b+z}{b-z} + \frac{\overline{b}+\overline{z}}{\overline{b}-\overline{z}} \\ &= \frac{(b+z)(\overline{b}-\overline{z}) + (\overline{b}+\overline{z})(b-z)}{(b-z)(\overline{b}-\overline{z})} \\ &= \frac{2|b|^2 - 2|z|^2}{|b-z|^2} = 2\frac{1-|z|^2}{|b-z|^2}, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $b \in \partial\mathbb{D}$. Haciendo uso de la hipótesis establecida sobre el punto $z \in H(b,\lambda)$ concluimos que

$$\operatorname{Re} T_b(z) = \frac{1-|z|^2}{|b-z|^2} > \frac{1}{\lambda}.$$

Denotamos por ψ_t a la composición $T_b \circ \varphi_t \circ T_b^{-1}$, para todo $t \geq 0$, que se trata de una función del semiplano en él mismo, es decir, $\psi_t \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Vamos a probar que, fijado $w \in \mathbb{H}$, la parte real de la derivada de $\psi_t(w)$ con respecto a t es positiva y, utilizando la regla de la cadena adecuadamente, llegaremos a la forma deseada del generador infinitesimal.

Si evaluamos, en primer lugar, la función ψ_t en el conjunto Π_λ se tiene que

$$\psi_t(\Pi_\lambda) = T_b(\varphi_t(T_b^{-1}(\Pi_\lambda))) = T_b(\varphi_t(H(b,\lambda))) \subset T_b(H(b,\lambda)) = \Pi_\lambda. \tag{4.24}$$

Fijados $w \in \mathbb{H}$ y $0 < s < t < +\infty$, tomamos como $1/\lambda$ el valor de $\mathrm{Re}(\psi_s(w))$. Se tiene entonces que

$$\psi_t(w) = \psi_{t-s}(\psi_s(w)) \in \psi_{t-s}(\overline{\Pi_\lambda}) \subset \overline{\Pi_\lambda},$$

donde se ha utilizado la relación probada en (4.24).

Por tanto, $\mathrm{Re}(\psi_t(w)) \geq \mathrm{Re}(\psi_s(w))$. Es decir, la función $t \mapsto \mathrm{Re}(\psi_t(w))$ es creciente en $[0,+\infty)$. Puesto que existe la derivada con respecto a t de φ_t para todo $t \geq 0$, obtenemos que también existe la derivada de ψ_t para todo $t \geq 0$ con respecto al mismo parámetro. Por último, la propiedad de monotonía implica que $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}(\psi_t(w)) \geq 0$ para todo $w \in \mathbb{H}$.

Teniendo en cuenta la definición de la función ψ_t, lo anterior es equivalente a decir que

$$\mathrm{Re}\left[T_b'(\varphi_t(T_b^{-1}(w))) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\varphi_t(T_b^{-1}(w)))\right] \geq 0$$

para todo $t \geq 0$ y todo $w \in \mathbb{H}$. Ahora bien, si evaluamos la expresión obtenida en $t = 0$ y, teniendo en cuenta la Proposición 3.17, la expresión del corchete anterior es igual a

$$T_b'(T_b^{-1}(w)) \cdot G(T_b^{-1}(w)), \qquad w \in \mathbb{H},$$

donde G es el generador infinitesimal del semigrupo de funciones analíticas. Ahora bien, como T_b es una función biyectiva del disco en el semiplano $\mathbb{H}$, dado $z \in \mathbb{D}$ y tomando $w = T_b(z)$, tenemos que

$$\mathrm{Re}[T_b'(z) \cdot G(z)] \geq 0, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Nos disponemos ahora a efectuar el cálculo de la derivada que aparece, de manera que obtenemos finalmente

$$T_b'(z)G(z) = \frac{2b}{(z-b)^2}G(z) = \frac{2b\bar{b}}{(z-b)(z-b)\bar{b}}G(z) = \frac{2}{(z-b)(\bar{b}z-1)}G(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

donde se ha utilizado el hecho de que $b \in \partial\mathbb{D}$ y, por tanto, $b\bar{b} = 1$.

Llamando $P(z)$ a la función

$$P(z) = \frac{G(z)}{(z-b)(\bar{b}z-1)}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

podemos concluir que

$$G(z) = (z - b)(\bar{b}z - 1)P(z), \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{4.25}$$

con $\operatorname{Re} P(z) \geq 0$.

Con ello damos por concluida la prueba del Teorema 4.10. Como ya se indicó al comienzo de la sección, la expresión obtenida en (4.23) y (4.25) es conocida como descomposición de Berkson-Porta del generador infinitesimal.

Tal y como se anunció en la Sección 4.1, vamos a enunciar y probar a continuación el caso continuo del Teorema de Denjoy-Wolff, de manera que al concluirlo podremos decir lo que se entiende por punto de Denjoy-Wolff.

Teorema 4.15 (Teorema de Denjoy-Wolff continuo)**.** *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas de forma que la primera iterada, φ_1, no es un automorfismo elíptico en $\mathbb{D}$. Entonces existe un valor $b \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(z) = b, \tag{4.26}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Si φ_1 tiene un punto fijo en $\mathbb{D}$, entonces $b \in \mathbb{D}$ y $\varphi_t(b) = b$ para todo $t \geq 0$.

Demostración. A partir del caso discreto vamos a desarrollar el continuo. Por ahora sabemos que $\varphi_n(z) \to b$ cuando $n \to +\infty$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Tomamos una sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$ de números reales tendiendo a $+\infty$, de forma que cada término lo podemos escribir como

$$t_n = s_n + r_n,$$

donde $s_n \in \mathbb{N}$, parte entera, y r_n es la parte decimal, es decir, $0 \leq r_n < 1$.

Utilizando la propiedad del semigrupo algebraico se tiene que

$$\varphi_{t_n}(z) = \varphi_{s_n}(\varphi_{r_n}(z)),$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Como $\varphi_{s_n}(z) \to b$ uniformemente en compactos, considerando el compacto K definido como el conjunto

$$K = \{\varphi_t(z) \colon 0 \leq t \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}\},$$

podemos concluir que

$$\lim_{t_n\to+\infty} \varphi_{t_n}(z) = b, \qquad z \in \mathbb{D},$$

como se quería probar. □

Definición 4.16. *El punto cuya existencia muestra el teorema anterior se conoce como el punto de Denjoy-Wolff del semigrupo de funciones analíticas $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$.*

A continuación vamos a recuperar los ejemplos ya vistos de semigrupos continuos de funciones analíticas para calcular, en cada uno de los casos, el punto de Denjoy-Wolff.

Ejemplo 4.17. En el primer caso vimos el semigrupo definido por

$$\varphi_t(z) = e^{-ct}z, \qquad z \in \mathbb{D},$$

con $\mathrm{Re}(c) > 0$. Puesto que $\varphi_t(0) = 0$ para todo $t \geq 0$, se tiene que 0 es el punto de Denjoy-Wolff del semigrupo en cuestión. ♣

Ejemplo 4.18. En el segundo caso, teníamos el semigrupo dado por la función

$$\varphi_t(z) = e^{-t}z + 1 - e^{-t}, \qquad z \in \mathbb{D}. \tag{4.27}$$

Calculando el límite de la definición tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t}z + 1 - e^{-t} = 1,$$

de forma que $1 \in \partial\mathbb{D}$ es el punto de Denjoy-Wolff del semigrupo definido por la función anterior. ♣

Ejemplo 4.19. El tercer caso con el que nos encontrábamos era

$$\varphi_t(z) = 1 - (1 - z)^{e^{-t}}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

De nuevo, como para todo $t \geq 0$ se tiene que $\varphi_t(0) = 0$, el punto de Denjoy-Wolff en este caso vuelve a ser el origen. ♣

Ejemplo 4.20. A continuación se tenía el semigrupo continuo de funciones analíticas dado por

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{(e^{-t} - 1)z + 1}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Como en el caso anterior, se tiene que $\varphi_t(0) = 0$ para todo $t \geq 0$, de forma que 0 vuelve a ser el punto de Denjoy-Wolff para el semigrupo de este ejemplo. ♣

Ejemplo 4.21. Por último, vimos el semigrupo definido por la función

$$\varphi_t(z) = \frac{(1 + e^t)z - 1 + e^t}{(-1 + e^t)z + 1 + e^t}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que si calculamos el límite cuando $t \to +\infty$, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(1 + e^t)z - 1 + e^t}{(-1 + e^t)z + 1 + e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^t(1 + z)}{e^t(1 + z)} = 1,$$

de forma que $1 \in \partial\mathbb{D}$ vuelve a ser punto de Denjoy-Wolff de este último semigrupo. ♣

4.3. El espacio H^∞.

Una vez probada la forma del generador infinitesimal, nos disponemos a dar el primer paso para llegar al objetivo del presente capítulo. Vamos a probar que existe un valor en la frontera del disco unidad en el que el límite radial del generador infinitesimal existe y se trata de un valor no nulo.

Proposición 4.22. *Sea $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo continuo de funciones analíticas no trivial con generador infinitesimal G. Entonces existe $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, de forma que* $\lim_{r\to 1^-} G(r\sigma) = \lambda$.

Demostración. Acabamos de ver que el generador infinitesimal del semigrupo continuo de funciones analíticas $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ es de la forma

$$G(z) = R(z)P(z)$$

con R polinomio y $\mathrm{Re}(P(z)) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esta característica va a ser determinante para probar el presente resultado.

Si la función P es idénticamente nula, ocurriría lo mismo con el generador infinitesimal y, por tanto, el semigrupo de funciones analíticas sería el trivial. Por tanto, suponemos que P no es idénticamente nula.

Gracias a que $\mathrm{Re}(P) \geq 0$, se tiene que $P \in H^{\frac{1}{2}}$. En efecto, si P es constante se tiene de inmediato. Por el contrario, si P no es constante, haciendo uso del Teorema de la Aplicación Abierta, podemos garantizar que $\mathrm{Re}(P) > 0$, lo que implica que dicha función no se anula nunca y, consecuentemente, podemos considerar la función $\sqrt{P(z)}$, para $z \in \mathbb{D}$.

Ahora bien, por lo que acabamos de decir, la función P lleva el disco unidad en el conjunto de números complejos con parte real positiva. A su vez, al calcular la raíz cuadrada de estos números, se tiene que

$$\sqrt{P(\mathbb{D})} \subset \{w \in \mathbb{D} \colon |\operatorname{Im} w| \leq \operatorname{Re} w\}.$$

Por tanto, dado w en ese conjunto, se tiene que

$$|w|^2 = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2 \leq 2(\operatorname{Re} w)^2$$

y, en consecuencia,

$$|\sqrt{(P(z))}| \leq \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\sqrt{P(z)})$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por último, si integramos en cada circunferencia de centro 0 y radio $0 < r < 1$, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} |\sqrt{P(re^{i\theta})}| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\sqrt{P(re^{i\theta})}) d\theta = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\sqrt{P(0)}) < +\infty,$$

donde se ha utilizado en la última igualdad el hecho de que la función del integrando sea armónica. Como hemos obtenido una cota superior finita que no depende del r, tomando supremo en estos valores y adaptando los resultados obtenidos convenientemente se tiene que

$$\sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(re^{i\theta})|^{\frac{1}{2}} \right)^2 < +\infty,$$

quedando probado que $P \in H^{\frac{1}{2}}$.

Recordemos ahora, como se ha visto en la asignatura "Variable Compleja y Operadores", que toda función de $H^{\frac{1}{2}}$ pertenece a la clase de Nevanlinna y, por tanto, tiene límite radial en casi todo punto. Puesto que P no es nula, este límite es distinto de cero salvo en un conjunto de medida nula. Tomando un punto $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ tal que $\lim_{r\to 1^-} P(r\sigma) \neq 0$ y $R(\sigma) \neq 0$ (que es posible puesto que R tiene un número finito de ceros al ser un polinomio de grado, como mucho, dos) se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} G(r\sigma) \neq 0,$$

como se quería probar. □

A continuación, vamos a probar bajo ciertas condiciones que, dada una función $f \in H^\infty$, existe el límite radial de la misma en el punto $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ del resultado anterior.

Proposición 4.23. *Sea $f \in H^\infty$ de forma que $Gf' \in H^\infty$, siendo G el generador infinitesimal del semigrupo de funciones analíticas en cuestión. Sea $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ el punto cuya existencia se garantiza en la Proposición 4.22. Entonces, la función h definida por*

$$\begin{array}{rccc} h\colon & (0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & r & \longmapsto & f(r\sigma) \end{array}$$

verifica que su derivada está acotada. En consecuencia, existe el límite

$$\lim_{r\to 1^-} f(r\sigma).$$

Demostración. En primer lugar, tenemos por una de las hipótesis que $Gf' \in H^\infty$, es decir, existe una constante $M > 0$ de forma que

$$|G(z)f'(z)| \leq M$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Por otra parte, se tiene gracias a la Proposición 4.22 que existe un valor $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ no nulo de forma que $\lim_{r\to 1} G(r\sigma) = \lambda$. Precisamente por ser el límite distinto de cero, podemos garantizar la existencia de una constante $\delta > 0$ de forma que $|G(r\sigma)| \geq \delta$ para todo $r \in (r_0, 1)$, para cierto $0 \leq r_0 < 1$.

Enlazando las cotas anteriores, se tiene que

$$M \geq |G(r\sigma)f'(r\sigma)| = |G(r\sigma)||f'(r\sigma)| \geq \delta |f'(r\sigma)|$$

para todo $r_0 < r < 1$.

Tomando supremo en r y despejando convenientemente, teniendo en cuenta que $\delta > 0$, se prueba que

$$\sup_{r_0<r<1} |f'(r\sigma)| \leq \frac{M}{\delta} = cte,$$

de forma que f' es una función acotada en el intervalo indicado en el supremo. En $[0, r_0\sigma]$ la propiedad de ser acotada se tiene gracias a que la función es acotada en compactos.

Como $h'(r) = \sigma f'(r\sigma)$ y $|\sigma| = 1$, h es una función derivable en $(0, 1)$ con derivada acotada.

Para probar la existencia del límite que aparece en el enunciado como consecuencia de lo anterior, tenemos en cuenta que

$$f(r\sigma) - f(0) = \int_0^{r\sigma} f'(z)dz.$$

Haciendo el cambio en el integrando $z = t\sigma$ y ajustando los nuevos límites de integración, lo anterior es igual a

$$h(r) - h(0) = \int_0^r f'(t\sigma)\sigma dt = \int_0^r h'(t)dt. \tag{4.28}$$

Ahora bien, por el Teorema de la Convergencia Dominada, sabemos que existe el límite

$$\lim_{r\to 1} \int_0^r h'(t)dt.$$

Por tanto, teniendo en cuenta todo lo anterior y calculando el límite en la expresión (4.28), se tiene que

$$\lim_{r\to 1} f(r\sigma) = f(0) + \lim_{r\to 1} \int_0^r f'(t\sigma)\sigma dt = f(0) + \int_0^1 f'(t\sigma)\sigma dt = f(0) + \int_0^1 h'(t)dt.$$

□

En el siguiente resultado vamos a dar un paso más probando que existe el límite anterior pero cuando f pertenece a la clausura del conjunto que se va a detallar en el enunciado.

Proposición 4.24. *Sea $f \in H^\infty$ de forma que $f \in \overline{\{g \in H^\infty \colon Gg' \in H^\infty\}}$, siendo G el generador del semigrupo de funciones analíticas en cuestión. Entonces existe el siguiente límite*

$$\lim_{r\to 1} f(r\sigma),$$

siendo $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ el valor cuya existencia se probó en la Proposición 4.22.

Demostración. Sea $f \in \overline{\{g \in H^\infty \colon Gg' \in H^\infty\}}$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que no existe el límite

$$\lim_{r\to 1} f(r\sigma).$$

Puesto que f es una función acotada, existen dos números $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, y dos sucesiones $\{r_n\}_{n\geq 1}$ y $\{s_n\}_{n\geq 1}$ en $(0,1)$, ambas convergentes a 1, de forma que

$$\lim_{n\to+\infty} f(r_n\sigma) = \lambda_1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(s_n\sigma) = \lambda_2.$$

Sea ahora $\varepsilon = \dfrac{1}{3}|\lambda_1 - \lambda_2| > 0$. Por hipótesis, existe una función $g \in H^\infty$ con $Gg' \in H^\infty$ de forma que

$$\|f - g\|_{H^\infty} < \varepsilon.$$

Sea $\lambda = \lim_{r\to 1^-} g(r\sigma)$, cuya existencia está garantizada gracias a la Proposición 4.23. Puesto que

$$|f(r_n\sigma) - g(r_n\sigma)| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|\lambda_1 - \lambda| \leq \varepsilon$.

Análogamente, tenemos que

$$|f(s_n\sigma) - g(s_n\sigma)| < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $|\lambda_2 - \lambda| \leq \varepsilon$.

Pero ambas estimaciones son imposibles simultáneamente puesto que, por hipótesis, $|\lambda_1 - \lambda_2| = 3\varepsilon$. Por tanto, hemos llegado a un absurdo y podemos afirmar que existe el límite

$$\lim_{r\to 1^-} f(r\sigma).$$

□

En último lugar, vamos a dar un ejemplo de una función holomorfa y acotada cuyo límite radial en $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ no existe. En particular, vamos a construir dicha función mediante la composición de una serie de funciones partiendo del disco unidad como primer dominio.

Consideramos la función $R(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, con $z \in \mathbb{D}$. Como hemos visto anteriormente en la presente memoria, se tiene que

$$R(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Calculando el logaritmo principal a la función anterior, que denotamos por log, obtenemos una nueva función $S(z)$ con $z \in \mathbb{D}$ definida por

$$S(z) = \log R(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + i\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En primer lugar es necesario observar que está bien definida, puesto que los únicos problemas que podría presentar sería en los puntos 1 y -1, que no pertenecen al disco unidad. Por tanto, tiene sentido definir una rama continua del logaritmo tal y como se ha hecho arriba.

En segundo lugar, como $\dfrac{1+z}{1-z} \in R(\mathbb{D})$, se tiene que

$$\operatorname{Im} S(z) = \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

De esta forma,

$$S(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Realizando una rotación de razón $\pi/2$ a la función anterior, obtenemos una nueva, a la que vamos a denotar por T, definida como

$$T(z) = iS(z) = i\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z \in \mathbb{D},$$

de forma que, por su propia construcción, el conjunto imagen del disco unidad es el siguiente:

$$T(\mathbb{D}) = \{z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Tomamos ahora exponencial en la función anterior de forma que obtenemos una nueva función V definida como

$$V(z) = \exp\left(T(z)\right) = \exp\left(i\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

En primer lugar, hay que señalar que se trata de una función acotada en el disco unidad, ya que

$$|V(z)| = |\exp(T(z))| = \exp(\mathrm{Re}(T(z)) \leq \exp\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Además es analítica en el disco unidad por composición de todas las funciones que se han ido construyendo. En definitiva, $V \in H^\infty$.

Claramente se tiene que no existe el límite $\lim_{r\to 1} V(r)$. En efecto, se tiene que

$$\lim_{r\to 1} \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \infty,$$

lo que implica que al calcular el límite cuando $r \to 1$ de $V(r)$, los valores que toma la función comienzan a moverse sobre la circunferencia unidad sin converger a un único punto, dando lugar a la no existencia del límite.

Finalmente, si $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ y consideramos la función f definida como

$$f(z) = V(\overline{\sigma}z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

se tiene, siguiendo todo lo anterior, que no existe el límite

$$\lim_{r\to 1} f(r\sigma).$$

Llegados a este punto, estamos en disposición de enunciar el siguiente y último resultado, con el que alcanzaremos el objetivo de este capítulo y cuya prueba será inmediata a partir de todos los preparativos previos.

Teorema 4.25. *Si $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo continuo de funciones analíticas no trivial, entonces el semigrupo de operadores de composición correspondiente $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ no es fuertemente continuo en el espacio H^∞.*

Demostración. Se acaba de probar justo antes del presente teorema que existe una función $f \in H^\infty$ de forma que el límite radial

$$\lim_{r\to 1} f(r\sigma)$$

no existe, donde $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ es el elemento cuya existencia se probó en la Proposición 4.22.

Por tanto, por la Proposición 4.24, tenemos que

$$f \notin \overline{\{f \in H^\infty : Gf' \in H^\infty\}},$$

siendo G el generador infinitesimal del semigrupo de funciones analíticas en cuestión.

En consecuencia, podemos afirmar que

$$H^\infty \neq \overline{\{f \in H^\infty \colon Gf' \in H^\infty\}},$$

puesto que hemos encontrado una función holomorfa y acotada que no está en la clausura del conjunto descrito arriba.

Finalmente, haciendo uso de la primera equivalencia que se probó en el Teorema 3.24, podemos afirmar que el semigrupo de operadores de composición $\{Q(t)\}_{t\geq 0}$ inducido por el semigrupo de funciones analíticas de partida no es fuertemente continuo en el espacio H^∞. $\square$

Apéndice A

Transformada de Fourier.

Al referirnos a los conceptos relacionados con la transformada de Fourier, que definiremos a continuación, denotaremos por m a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ normalizada, que no es más que la medida de Lebesgue usual dividida por $\sqrt{2\pi}$. Este cambio permitirá tratar con mayor simplicidad algunos resultados como el Teorema de Plancherel u otros de gran importancia pero que no trataremos al no ser necesarios para nuestro trabajo. De esta forma, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dm(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)dx. \tag{A.1}$$

Es cierto que la notación varía ahora con la que hemos utilizado a lo largo del trabajo, puesto que entonces m denotaba a la medida de Lebesgue sin normalizar, pero este hecho no nos debe preocupar puesto que lo que vamos a ver ahora son resultados generales necesarios para algunos ejemplos estudiados a lo largo de la memoria. Cabe señalar que las definiciones y enunciados, junto con las pruebas que no detallemos a continuación, pueden consultarse en el Capítulo 9 de [Rud2]. Tal y como se acaba de indicar, el fin principal de este apéndice es estudiar brevemente algunas propiedades de la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$, así como su relación con el espacio $L^2(\mathbb{R})$.

Definición A.1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se define la transformada de Fourier de f como*

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt}dm(x), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{A.2}$$

Debemos observar que por ser $f \in L^1(\mathbb{R})$, la integral anterior está bien definida para todo t real. Siendo un poco más precisos, llamaríamos transformada de Fourier a la aplicación que lleva f a $\hat{f}$. Cuando sea más conveniente, denotaremos a la transformada de Fourier por $\mathcal{F}(f)$ en lugar de $\hat{f}$.

Cabe esperar que exista alguna forma de recuperar la función en cuestión si conocemos su transformada de Fourier. Realizando un estudio detallado se puede comprobar que es cierto, aunque nosotros lo vamos a resumir con el enunciado del siguiente resultado.

Teorema A.2. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Definimos la función g como*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dm(t), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{A.3}$$

Entonces, $g \in C_0$ y $g(x) = f(x)$ en casi todo punto.

Cuando sea conveniente, denotaremos a la función anterior g como $\mathcal{F}^{-1}(f)$.

A continuación vamos a dar una serie de propiedades de la transformada de Fourier que serán necesarias en algunas ocasiones para el desarrollo del trabajo, aunque no daremos las pruebas de las mismas. Lo que sí cabe señalar es que la mayoría de ellas son consecuencia de la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue y, por tanto, de la medida normalizada m. Además, se utiliza que para cada α real, la aplicación $\varphi_\alpha \colon x \to e^{i\alpha t}$ verifica $\varphi_\alpha(s+t) = \varphi_\alpha(s)\varphi_\alpha(t)$ y $|\varphi(t)| = 1$ para todo s y t real. En otras palabras, φ_α constituye un homomorfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en el grupo multiplicativo de los números complejos con módulo igual a 1. Con esa notación, nos disponemos a enumerar las propiedades en el siguiente resultado.

Teorema A.3. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y que α y λ son números reales. Se tiene,*

1. *Si $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$.*
2. *Si $g(x) = f(x-\alpha)$, entonces $\hat{g}(t) = \hat{f}(t)e^{-i\alpha t}$.*
3. *Si $g(x) = \overline{f(-x)}$, entonces $\hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$.*
4. *Si $g(x) = f\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ y $\lambda > 0$, entonces $\hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$.*
5. *Si $g(x) = -ixf(x)$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{f}$ es diferenciable y $\hat{f}'(t) = \hat{g}(t)$.*

Demostración. Como se comentó anteriormente, no vamos a dar la prueba de las propiedades enumeradas salvo el último caso, en el que vamos a hacer una excepción al aparecer la derivada de la transformada de Fourier. Vamos a ver su significado y si está bien definida.

Si consideramos el cociente incremental tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(t)}{s-t} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)e^{-ixs} - f(x)e^{-ixt}}{s-t} dm(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt} \frac{e^{-ix(s-t)} - 1}{s-t} dm(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt} \zeta(x, s-t) dm(x), \qquad s \neq t,
\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $\zeta(x,u) = \dfrac{e^{-ixu}-1}{u}$.

Ahora bien, no es difícil comprobar que $|\zeta(x,u)| \leq |x|$ para todo $u \neq 0$ real y, además, $\lim_{u\to 0} \varphi(x,u) = -ix$. De esta forma, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada y, haciendo tender s a t en (A.4) se tiene que

$$\hat{f}'(t) = -i\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-ixt}dm(x) = -i\widehat{xf}(t) = \hat{g}(t), \tag{A.5}$$

como se quería probar.

$\square$

El espacio $L^2(\mathbb{R})$. Identidad de Plancherel.

Debido a que la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ es infinita, el espacio $L^2(\mathbb{R})$ no es un subconjunto de $L^1(\mathbb{R})$, por lo que la definición de la transformada de Fourier que se dio en la expresión (A.1) no se puede aplicar directamente a cualquier función $f \in L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, sí es posible utilizar dicha definición para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, teniéndose además que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$.

Más aún, se puede probar que la aplicación que a cada f le asocia su transformada de Fourier, y que va de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$ se trata de una isometría, que se extiende a otra isometría de $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$ definiendo, de esta forma, la transformada de Fourier de toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$.

En consecuencia, la teoría que se desarrolla para el espacio $L^2(\mathbb{R})$ guarda bastante parecido con el caso de $L^1(\mathbb{R})$.

Brevemente, vamos a enunciar a continuación los resultados que serán necesarios para nuestro trabajo, sin dar la prueba de los mismos.

Teorema A.4. *A cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se le puede asociar una función $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ de forma que verifican lo siguiente:*

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, entonces la transformada de Fourier de f en ambos espacios coincide.*

2. *La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ es lineal.*

3. *Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2$.*

La igualdad del tercer enunciado es la conocida Identidad de Plancherel, que prueba la isometría de la que se hablaba al comienzo.

Apéndice B

Caracterización de la función exponencial.

A la hora de construir el generador infinitesimal de los semigrupos de operadores se utiliza el hecho de que toda función compleja y continua satisfaciendo $f(s+t) = f(s)f(t)$ es de la forma e^{At} para cierta constante A. El objetivo es probar la veracidad de este enunciado y, además, podremos dar el valor de dicha constante.

Proposición B.1. *Sea* $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ *una función continua satisfaciendo*

$$\begin{cases} f(s+t) = f(s)f(t) & \text{para todo } s,t \geq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases} \tag{B.1}$$

Entonces f *es diferenciable y existe una única constante* $A \in \mathbb{C}$ *de forma que se verifica*

$$\begin{cases} f'(t) = Af(t) & \text{para } t \geq 0, \\ f(0) = 1. \end{cases} \tag{B.2}$$

Demostración. Sea la función g definida como

$$g(t) = \int_0^t f(s)ds, \qquad t \geq 0. \tag{B.3}$$

Como f es continua en $[0,+\infty)$, la función g es diferenciable y se tiene que

$$g'(t) = f(t), \qquad t \geq 0.$$

Como $g(0) = 0$, siguiendo la definición de derivada en el punto 0 se tiene que

$$1 = f(0) = g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t},$$

lo que significa que existe un $t_0 > 0$ lo suficientemente pequeño de forma que $g(t_0) \neq 0$. Equivalentemente, $g(t)$ es invertible (en el sentido de que existe g^{-1}) para valores cercanos a 0.

Teniendo ahora en cuenta la primera condición de (B.1) se tiene que

$$f(t) = g(t_0)^{-1}g(t_0)f(t) = g(t_0)^{-1}\left(\int_0^{t_0} f(s)ds\right) f(t) = g(t_0)^{-1}\int_0^{t_0} f(s+t)ds =$$
$$= g(t_0)^{-1}\int_t^{t+t_0} f(s)ds = g(t_0)^{-1}(g(t+t_0) - g(t))$$

para todo $t \geq 0$. Por tanto, la función f es también diferenciable y su derivada en un punto cualquiera t es

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)f(h)-f(t)}{h} = f(t)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h} \\ &= f(t)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = f(t)f'(0), \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Por tanto, denotando por A a la constante $f'(0)$ queda probado el presente resultado. □

Por resultados conocidos del campo de las ecuaciones diferenciales sabemos que el problema de valores iniciales (B.2) tiene solución única. Aún así, en la siguiente proposición damos una prueba alternativa para el problema de existencia y unicidad de solución.

Proposición B.2. *Sea $f(t) = e^{tA}$ para todo $t \geq 0$ con $A \in \mathbb{C}$. Entonces, la función f es la única función diferenciable que satisface el problema de valores iniciales* (B.2).

Demostración. En primer lugar, se tiene de forma inmediata que la función f satisface la condición (B.2).

Para demostrar que es única, consideramos otra función $g\colon [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ satisfaciendo las condiciones de (B.2). Fijemos $t > 0$. Consideramos una función $h\colon [0,t] \to \mathbb{C}$ definida como

$$h(s) = f(s)g(t-s), \qquad 0 \leq s \leq t. \tag{B.4}$$

Por construcción, esa función es diferenciable para cada valor de $t > 0$ fijo y su derivada es la siguiente:

$$\begin{aligned} h'(s) &= f'(s)g(t-s) - f(s)g'(t-s) \\ &= Af(s)g(t-s) - Af(s)g(t-s) = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que la función es constante y, en particular, $h(0) = h(t)$. Este hecho añadido a que $g(0) = f(0) = 1$ da lugar a

$$f(t) = h(t) = h(0) = g(t). \tag{B.5}$$

Por tanto, $f(t) = g(t)$ para todo $t \in [0,+\infty)$. □

Con todo ello, podemos dar respuesta afirmativa al problema que se planteó al principio y lo hacemos enunciando el siguiente teorema:

Teorema B.3. *Sea una función continua* $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ *satisfaciendo las condiciones* (B.1). *Entonces exite una única constante* $A \in \mathbb{C}$ *de forma que*

$$f(t) = e^{At}, \qquad \textit{para todo } t \geq 0. \tag{B.6}$$

Apéndice C

Integrales vectoriales.

Sea una medida positiva μ y un espacio de medida Q. En muchas ocasiones se desea integrar funciones f definidas en un espacio de medida como el anterior y con valores en algún espacio vectorial topológico X, tal y como ocurre en la mayor parte de nuestro trabajo. Por tanto, el problema que vamos a tratar es cómo definir o como asociar a f un vector del espacio X al que vamos a denotar por

$$\int_Q f d\mu, \tag{C.1}$$

es decir, pretendemos definir una "integral vectorial" que respete la mayoría de las propiedades que las integrales convencionales cumplen.

Por ejemplo, la ecuación

$$\Lambda \left(\int_Q f d\mu \right) = \int_Q (\Lambda f) d\mu$$

debería ser cierta para toda aplicación $\Lambda \in X^*$, puesto que las aplicaciones lineales y continuas respetan la suma y, en cierto modo, las integrales son límites de sumas. De hecho, la definición que vamos a ver estará basada únicamente en este requisito.

Por tanto, vamos a exponer a continuación la definición formal de integral vectorial, así como algunas propiedades cuyo uso es frecuente a lo largo de nuestro trabajo.

Definición C.1. *Supongamos que μ es una medida en un espacio de medida Q, X es un espacio vectorial topológico de forma que X^* separa puntos, y $f\colon Q \to X$ una función de forma que las funciones escalares Λf son integrables respecto a la medida μ, para todo operador $\Lambda \in X^*$. Cabe señalar que Λf se define como*

$$(\Lambda f)(q) = \Lambda(f(q)), \qquad q \in Q. \tag{C.2}$$

Si existe un vector $y \in X$ de forma que

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu$$

para todo $\Lambda \in X^*$, definimos la integral vectorial de f como

$$\int_Q f d\mu = y. \tag{C.3}$$

Debido a que X^* separa puntos en X, podemos garantizar que hay a lo más un y de los que se acaban de definir para cada f, de forma que no debemos preocuparnos de la unicidad del problema.

En cuanto a la existencia, en el Teorema 3.27 de [Rud1] se prueba únicamente el caso particular en el que Q es compacto y f es continua, pues es suficiente para bastantes aplicaciones posteriores. En ese caso, $f(Q)$ es compacto y, la otra condición que se impone es que la envoltura convexa cerrada de $f(Q)$ sea compacta. Cuando X es un espacio de Fréchet, se puede probar que esta última condición se tiene de manera inmediata. Siguiendo la referencia citada arriba, enunciamos de manera formal el problema de existencia de solución.

Teorema C.2. *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico de forma que su dual X^* separa puntos y que μ es una medida de probabilidad de Borel definida en un espacio de Hausdorff compacto Q. Si $f\colon Q \to X$ es continua y $\overline{co}(f(Q))$ es compacta en X, entonces la integral*

$$y = \int_Q f d\mu \tag{C.4}$$

existe en el sentido de la Definición C.1. Además, $y \in \overline{co}(f(Q))$.

A modo de recordatorio, una medida de Borel definida en un espacio compacto (o localmente compacto) y de Hausdorff Q es una medida definida en la $\sigma-$álgebra de todos los conjuntos de Borel de Q. Más aún, se trata de la menor $\sigma-$álgebra que contiene a todos los abiertos de Q. Si, además, hablamos de medida de probabilidad, estamos diciendo que la medida del espacio total es 1. En cuando a $co(f(Q))$, denotamos con dicha simbología a la envoltura convexa de $f(Q)$.

Situándonos por un momento al margen de la línea seguida en [Rud1], vamos a demostrar la existencia de la integral (C.4) en el sentido de la Definición C.1 para el caso particular de nuestra memoria. Es decir, Q se tratará de un intervalo real $[a, b]$ con la medida de Lebesgue y X será un espacio de Banach. De esta forma, consideramos la función $f\colon [a, b] \to X$ y queremos probar que existe la integral

$$\int_a^b f(t)dt. \tag{C.5}$$

Para ello, consideramos la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definida por

$$a_n = \sum_{k=1}^{2^n} f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right)\frac{b-a}{2^n}. \tag{C.6}$$

El objetivo es probar que dicha sucesión es de Cauchy.

Sean dos valores $m, n \in \mathbb{N}$ distintos de forma que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m > n$. Consideramos la diferencia $a_n - a_m$, de forma que se tiene

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= \sum_{k=1}^{2^n} f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right)\frac{b-a}{2^n} - \sum_{k=1}^{2^m} f\left(a + \frac{b-a}{2^m}k\right)\frac{b-a}{2^m} \\ &= \sum_{k=1}^{2^n}\left[f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right) - \sum_{j=(k-1)2^{m-n}+1}^{k2^{m-n}} f\left(a + \frac{b-a}{2^m}j\right)2^{n-m}\right]\frac{b-a}{2^n}. \end{aligned}$$

Los límites del segundo sumatorio se obtienen a partir del hecho de que

$$\frac{j}{2^m} \in \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right],$$

de forma que $(k-1)2^{m-n} < j \leq k2^{m-n}$. Si continuamos a partir de la última expresión obtenida se tiene que

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= \sum_{k=1}^{2^n}\left[\sum_{j=(k-1)2^{m-n}+1}^{k2^{m-n}}\left(f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right)2^{n-m} - f\left(a + \frac{b-a}{2^m}j\right)2^{n-m}\right)\right]\frac{b-a}{2^n} \\ &= \sum_{k=1}^{2^n}\left[\sum_{j=(k-1)2^{m-n}+1}^{k2^{m-n}}\left(f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right) - f\left(a + \frac{b-a}{2^m}j\right)\right)\right](b-a)2^{-m}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que el segundo sumatorio cuenta con 2^{m-n} sumandos. Acotando ahora en norma se tiene que

$$\|a_n - a_m\| \leq \sum_{k=1}^{2^n}\left[\sum_{j=(k-1)2^{m-n}+1}^{k2^{m-n}}\left\|f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right) - f\left(a + \frac{b-a}{2^m}j\right)\right\|\right](b-a)2^{-m}.$$

Haciendo uso de la continuidad uniforme de la función f podemos garantizar que la cantidad a la que se está calculando la norma es menor que un valor $\varepsilon > 0$ dado, puesto los argumentos de dicha función están lo suficientemente cercanos. De esta forma,

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &\leq \sum_{k=1}^{2^n}\left[\sum_{j=(k-1)2^{m-n}+1}^{k2^{m-n}} \varepsilon(b-a)2^{-m}\right] = \sum_{k=1}^{2^n} 2^{m-n}\varepsilon(b-a)2^{-m} \\ &= 2^n 2^{m-n}\varepsilon(b-a)2^{-m} = \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Como el valor de $\varepsilon > 0$ es arbitrario, podemos afirmar que $\{a_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de Cauchy. Al ser X un espacio de Banach podemos afirmar, además, que es una sucesión convergente, es decir, existe el límite

$$\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Tal y como se ha definido la sucesión, se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(a + \frac{b-a}{2^n}k\right)\frac{b-a}{2^n} = \int_a^b f(t)dt,$$

de forma que la función f es integrable. Para probar, finalmente, que lo es en el sentido de la Definición $C.1$, hay que ver que para todo $\Lambda \in X^*$ se tiene que

$$\Lambda\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \Lambda f(t)dt.$$

En efecto, por la propia definición de la integral de f a partir de sucesiones y por su propiedad de ser continua se tiene que

$$\Lambda\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \Lambda(\lim_{n\to+\infty} a_n) = \lim_{n\to+\infty} \Lambda a_n = \int_a^b \Lambda f(t)dt,$$

dando por concluida, de esta forma, la prueba de la integral en el sentido de la Definición C.1 para el caso particular de nuestra memoria.

En el siguiente resultado vamos a ver una caracterización en la que se toma el caso particular de $f(x) = x$, volviendo, de nuevo, al estudio general que se lleva a cabo en [Rud1].

Teorema C.3. *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico con X^* separando puntos, Q un subconjunto compacto de X y que la envoltura convexa cerrada de Q, $\overline{co}(Q)$ es compacta. Entonces $y \in \overline{co}(Q)$ si y solamente si existe una medida de probabilidad de Borel regular μ en Q de forma que*

$$y = \int_Q x d\mu(x), \tag{C.7}$$

donde la integral debe ser entendida en el sentido de la Definición C.1, con $f(x) = x$.

De nuevo, la condición de que la envoltura convexa cerrada de Q sea compacta sería consecuencia directa de la compacidad de Q en X si el espacio ambiente X se tratase de un espacio de Fréchet.

Es importante recordar que una medida de Borel en Q se dice regular si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset E\} = \inf\{\mu(G)\colon E \subset G\},$$

para todo conjunto de Borel $E \subset Q$; donde K representa a los compactos contenidos en E y G a los abiertos que contienen a E.

En definitiva, el resultado anterior representa al elemento y como una "media ponderada" de Q, o como el "centro de masa" de una cierta unidad de masa distribuida sobre Q.

Teorema C.4. *Supongamoa que Q es un espacio de Hausdorff compacto, X un espacio de Banach, $f\colon Q \to X$ una función continua y μ una medida de Borel positiva en Q. Entonces*

$$\left\| \int_Q f d\mu \right\| \leq \int_Q \|f\| \, d\mu. \tag{C.8}$$

Demostración. Denotamos por y a la integral

$$y = \int_Q f d\mu.$$

Es posible probar que existe un elemento $\Lambda \in X^*$ de forma que $\Lambda y = \|y\|$ y $|\Lambda x| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$ (pudiéndose consultar en el corolario del Teorema 3.3 de [Rud1]). En particular, se tiene que

$$|\Lambda f(s)| \leq \|f(s)\|$$

para todo $s \in Q$. Gracias al Teorema C.2 tenemos que la integral que define al elemento y anterior existe en el sentido de la Definición C.1. Con todo ello tenemos que

$$\|y\| = \Lambda y = \Lambda \left(\int_Q f d\mu \right) = \int_Q (\Lambda f) d\mu \leq \int_Q \|f\| \, d\mu,$$

quedando probado, de esta forma, el presente resultado. □

En el siguiente resultado vamos a probar otra de las propiedades que se ha utilizado a lo largo de la memoria, donde se ven involucrados los operadores lineales y continuos.

Teorema C.5. *Supongamos que se tienen las hipótesis del Teorema C.2. Sea Y un espacio vectorial de forma que Y^* separa puntos y $T\colon X \to Y$ una función lineal y continua. Entonces, Tf es integrable en el sentido de la Definición C.1 y, además,*

$$\int_Q (Tf) d\mu = T \left(\int_Q f d\mu \right). \tag{C.9}$$

Demostración. En primer lugar hagamos un par de observaciones. Como estamos en las hipótesis del Teorema C.2, se tiene que la función $f\colon Q \to X$ es integrable en el sentido de la Definición C.1. En consecuencia, $Tf\colon Q \to Y$ es integrable en el sentido de la Definición C.1 gracias al Teorema C.2. Por otra parte, dada $\Lambda \in Y^*$ podemos observar que

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{R},$$

es decir, $T\Lambda \in X^*$. Con todo ello, nos disponemos a probar la expresión (C.9).

Sea $\Lambda \in Y^*$, tenemos que

$$\Lambda \left(T \left(\int_Q f d\mu \right) \right) = (\Lambda \circ T) \left(\int_Q f d\mu \right) = \int_Q (\Lambda \circ T) f d\mu,$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\Lambda \circ T \in X^*$ y, además, f es integrable en el sentido de la Definición C.1, tal y como se dijo al comienzo de la demostración.

Continuando con la última expresión tenemos que

$$\int_Q (\Lambda \circ T) f d\mu = \int_Q \Lambda \circ (Tf) d\mu = \Lambda \left(\int_Q Tf d\mu \right),$$

usándose ahora que $\Lambda \in Y^*$ y Tf es integrable en el sentido de la Definición C.1.

En definitiva, hemos probado que

$$\Lambda \left(T \left(\int_Q f d\mu \right) \right) = \Lambda \left(\int_Q Tf d\mu \right)$$

para todo $\Lambda \in Y^*$. Precisamente por el hecho de que $\Lambda \in Y^*$ es arbitrario, podemos afirmar que

$$T \left(\int_Q f d\mu \right) = \int_Q Tf d\mu,$$

para $T \colon X \to Y$ lineal y continua. Con ello queda probada la expresión (C.9) y, tal y como se justificó al principio, el hecho de que Tf sea integrable en el sentido de la Definición C.1. $\square$

Bibliografía

[Blasco et al.] Blasco, 0., Conteras, M. D., Díaz-Madrigal, S., Martínez, J., Papadimitrakis, M. y Siskakis, A.G. *Semigroups of composition operators and integral operators in spaces of analytic functions.* Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Mathematica. 38, 2013, 67-89.

[Bou1] Bourgain, J. *New Banach space properties of the disc algebra and H^∞.* Acta Math. 162, 1984, 1-48.

[Bou2] Bourgain, J. *H^∞ is a Grothendieck space.* Studia Math. LXXV, 1983, 193-216.

[BP] Berkson, E. y Porta, H. *Semigroups of analytic functions and composition operators.* The Michigan Mathematical Journal. 25, 1978, 101-115.

[DS] Duren, Peter L. y Schuster, A. *Bergman spaces.* American Mathematical Society, 2004.

[Dur] Duren, Peter L. *Theory of H^p spaces.* Dover Publications. New York, 2000.

[Gar] Garrett, P. *Vector-valued integrals.* Universidad de Minnesota. Noviembre, 2016.

[Gir] Girela, D. *Basic theory of univalent functions.* Conference Paper. Universidad de Málaga. Febrero, 2013.

[Lot] Lotz, H. P. *Semigroups on L^∞ and H^∞.* One-parameter semigroups of positive operators, Lecture Notes Math. Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. 1184, 1986, 54-58

[Pog] Poggi-Corradini, P. *Iteration of analytic self-maps of the disk: an overview.* Cubo: a Mathematical Journal. 6, Marzo de 2004, 73-80.

[Rud1] Rudin, W. *Functional analysis.* McGraw-Hill, Inc. Second Edition, 1991.

[Rud2] Rudin, W. *Análisis real y complejo.* Alhambra. Segunda Edición, 1985.

[Sha] Shapiro, Joel H. *Composition operators and classical function theory.* Springer Verlag, New York. 1993.

[Sis] Siskakis, Aristomenis G. *Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review.* American Mathematical Society. 213, 1998, 229-252.