Álgebras admisibles e isoálgebras de Lie-Santilli

(Aplicación en Mecánica Clásica y Cuántica).

Raúl Manuel Falcón Ganfornina

Dpto. de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
rafalgan@us.es

Resumen

La teoría de admisibilidad en álgebras, introducida por Albert en 1948, ha resultado tener aplicación en diversos campos de la Mecánica Cuántica. En concreto, en relatividad especial, la cual resulta obsoleta en el instante en que se trabaja con partículas no puntuales que se mueven en un medio físico: *sistemas dinámicos exteriores cerrados (interiores abiertos) no Hamiltonianos*.

En este sentido, en 1967, el físico matemático R. M. Santilli, analizando la generalización de Birkhoff de la Mecánica Hamiltoniana, fue el primero en captar la relación existente de ésta con la teoría admisible de Lie.

En la presente comunicación, se mostrarán los conceptos y resultados básicos de la teoría de admisibilidad, analizando posteriormente algunos de los estudios realizados al respecto por Santilli desde 1967 hasta la fecha. En particular, se desarrolla el concepto de isotopía que propuso en 1978, el cual actúa como paso intermedio hacia la aplicación en Mecánica Cuántica de estructuras algebráicas admisibles de Lie.

1. Introducción

1.1. Limitaciones de la teoría de Lie en MC

Marius Sophus Lie (1842-1899).

La teoría convencional de Lie posee claras limitaciones en sus aplicaciones en Física, al ser:

1. Lineal (variables, cantidades y derivadas).
2. Local - diferencial (sin representación integral de superficie o volumen).
3. Canónica-Hamiltoniana ($H = H(t, r, p) \hookleftarrow L = L(t, r, \dot{r})$) (derivable de un potencial).
4. Basada en cuerpos de característica 0.
5. Dotados de unidad trivial $I = +1$ y de un producto asociativo $a \times b$.

Con ello únicamente pueden representarse ***un número finito y aislado de partículas puntuales que interactúan entre sí en el vacío homogéneo e isotrópico, mediante fuerzas a distancia derivadas de un potencial*** (variacionalmente autoadjuntas):

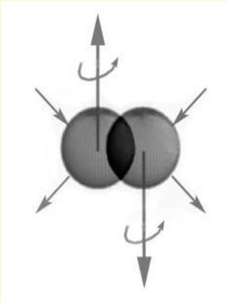
SISTEMAS DINÁMICOS EXTERIORES (SDE).

Ejemplo: Satelite en órbita terrestre; relatividad especial:

$$x^2 = x^t \eta x = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu = x^1 x^1 + x^2 x^2 + x^3 x^3 - x^4 c_0^2 x^4.$$

En cambio, la gran mayoría de sistemas en la realidad física que nos envuelve son ***no lineales, no locales-diferenciales y no representables enteramente a través de un Hamiltoniano en las coordenadas del observador***:

SISTEMAS DINÁMICOS INTERIORES (SDI).



Interacciones no locales entre partículas a distancia mínima.

Ejemplo: Entrada de satélite en atmósfera terrestre, estructura de los planetas, partículas de interacción fuerte (protones y neutrones), núcleos, moléculas o estrellas; relatividad especial generalizada:

$$x^2 = x^t g x = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x^1 b_1^2 x^1 + x^2 b_2^2 x^2 + x^3 b_3^2 x^3 - x^4 c^2 x^4.$$

$$(c = c(t, r, \dot{r}, ...)).$$

Permite considerar **carácter no puntual de las partículas**, con la consecuente posibilidad de una distribución no esférica de carga, haciendo uso de una asimetría rotacional.

$$E(r, \delta = diag(1,1,1), \mathbb{R}) \qquad\qquad T^*E(r, \delta, \mathbb{R})$$

$$a = (\dot{\mathrm{a}}^\mu) = \begin{pmatrix} \dot{\mathrm{r}}^{ia} \\ \dot{\mathrm{p}}_{ia} \end{pmatrix} = (\Gamma^\mu(t, a, \dot{\mathrm{a}}, ...)) = \Gamma =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{ia}/m_a \\ F_{ia}^{SA}(r) + F_{ia}^{NSA}(t, r, p, \dot{\mathrm{p}}, ...) + \int_\sigma d\sigma F_{ia}^{NSA}(t, r, p, \dot{\mathrm{p}}, ...) \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2, 3 (= x, y, z), a = 1, 2, ..., N, \mu = 1, 2, ..., 6N.$$

$r \equiv$ Coordenadas del observador.
$p \equiv$ Momento lineal.
$m \equiv$ Masa de las N partículas.
$(N)SA \equiv$ Variacional (no) autoadjunto.
$\sigma \equiv$ Superficie o volumen.

Para abordar los SDI hace falta:

a) Generalizar Hamiltoniano (Birkhoff -1947).

b) Incorporar términos externos en las ecuaciones de Dinámica:

Teoría de Lie $\rightarrow$ Teoría admisible de Lie (Albert - 1948)

1.2. Álgebras admisibles de Jordan (Lie)

Abraham Adrian Albert (1905-1972).

1948: Albert [1] introduce el concepto de **álgebra admisible**

a) De Jordan: k-álgebra U ($c(k) \neq 2$), dotado de producto ab, generalmente no asociativo, tal que el álgebra asociado U^+ (conmutativo), dotado del producto $\{a,b\}_U = ab + ba$ es de Jordan:

$$xy = yx$$

$$x((xx)y) = (xx)(xy) \equiv (xy)x^2 = x(yx^2)$$

(1955: Schafer [12]: *álgebras de Jordan no conmutativas*: Flexible + $(x^2y)x = x^2(yx)$).

b) De Lie: Análogo para el álgebra asociado U^- (anticonmutativo) dotado del producto $[a,b]_U = ab - ba$.

$$x \circ x = 0, \qquad ((x \circ y) \circ z) + ((y \circ z) \circ x) + ((z \circ x) \circ y) = 0$$

Lie $\Rightarrow$ Admisible de Lie.
Asociativa $\Rightarrow$ Admisible de Lie.

Ejemplo: (Albert)
U, álgebra de matrices con producto asociativo $A \times B$; p parámetro.
El producto:

$$(A, B) = p \times A \times B + (1 - p) \times B \times A,$$

es admisible de Jordan y de Lie:

$$\{A, B\}_U = A \times B + B \times A,$$
$$[A, B]_U = (2p - 1) \cdot (A \times B - B \times A),$$

Observación:

1. $p = 0 \rightarrow$ Álgebra de Jordan conmutativa.
2. No existe valor de p tal que se obtenga un álgebra de Lie.

Albert también introdujo el concepto de *álgebra flexible* como aquella que satisface la ley de flexibilidad:

$$(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x).$$

Problema original de Albert: Determinación de las álgebras flexibles admisibles de Lie A, con A^- semisimple.

Otros autores: Weiner (1957), Schafer (1960), Laufer y Tomber (1962), Oehmke (1964), Santilli (1967), Obuko y Myung (1981), Benkart y Osborn (1981).

1978: Primer Workshop sobre admisibilidad de Lie.

1.3. Álgebras admisibles de Malcev

Anatoly Ivanovich Malcev (1909-1967).

Álgebra de Malcev (Álgebra de Moufang-Lie) (Malcev, 1955):

$$[x, x] = 0,$$

$$[[x, y], [x, z]] = [[[x, y], z], x] + [[[y, z], x], x] + [[[z, x], x], y].$$

Lie $\Rightarrow$ Malcev.

Alternativa $((xx)y - x(xy) = (yx)x - y(xx) = 0)$ $\Rightarrow$ Flexible admisible de Malcev.

1.4. Otros ejemplos

Michel Goze - Elisabeth Remm (2004) [3].

Álgebra de Vinberg:

$$x(yz) - y(xz) = (xy)z - (yx)z$$

Ejemplo: $(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \nu)$, donde $\nu(f, g) = f \cdot g'$.

Asociativa $\Rightarrow$ Vinberg.

Álgebra de pre-Lie: Álgebra de Lie, tal que:

$$(xy)z - x(yz) = (xz)y - x(zy)$$

Ejemplo: $(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \nu)$, donde $\nu(f, g) = f' \cdot g$.

Asociativa $\Rightarrow$ Pre-Lie.

2. Resultados básicos en estructuras admisibles

$$A \text{ álgebra con multiplicación } xy$$
$$(x,y,z) := (xy)z - x(yz)$$
$$S(x,y,z) := (x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y)$$

En particular:

$$J(x,y,z)_{A^-} = S(x,y,z) - S(x,z,y)$$
$$A \text{ flexible } \Rightarrow (x,y,x) = 0 \Rightarrow J(x,y,z)_{A^-} = 2S(x,y,z)$$
$$A \text{ alternativa } \Rightarrow (x,x,y) = (y,x,x) = 0 \Rightarrow J(x,y,z)_{A^-} = 6(x,y,z)$$

Lema: A k-álgebra flexible.

i) A es admisible de Lie si y sólo si $2S(x,y,z) = 0$.

ii) A es admisible de Malcev si y sólo si $2S(x,y,[x,z]) = 2[S(x,y,z),x]$.

Lema: A alternativa es admisible de Lie si y sólo si A es asociativa o bien de característica 2 o 3.

Proposición: Alternativa $\Rightarrow$ flexible admisible de Malcev.

Lema:

a) A flexible $\Leftrightarrow ad_A \subseteq Der\ A^+$.

b) A admisible de Lie $\Leftrightarrow ad_A \subseteq Der\ A^-$.

c) A flexible admisible de Lie $\Leftrightarrow ad_A \subseteq Der\ A$.

Teorema $c(k) \neq 2$, A flexible, A^- isomorfo a un álgebra de Witt generalizado $\Rightarrow A$ AL.

Ejemplo: (Myung) $c(k) = 0$, $A = sl(n+1)$, $A^- = sl(n+1)$ de tipo A_n.

$$x * y = \frac{1}{2}[x, y] + \gamma\ x \sharp y.$$

$$x \sharp y = xy + yx - \frac{2}{n+1}(tr\ xy)I.$$

A flexible.

$(A, *)$ no es AL, pero sí admisible de Lie (simple).

Ejemplo: (Myung) $c(k) \neq 2$, $\quad A =< x, y, h >$, tal que:

$$xh = x, \quad yh = \frac{1}{2}(\alpha + 1), \quad hy = \frac{1}{2}(1 - \alpha)y, \quad h^2 = h.$$

$$\alpha \neq 0, 1.$$

A flexible, admisible de Lie.

A^- (resoluble) tal que:

$$[x, y] = 0, \quad [x, h] = x, \quad [y, h] = \alpha y.$$

En el estudio de un álgebra admisible A, la técnica básica es utilizar la estructura conocida de A^- y ver qué restricciones en A^- provoca la multiplicación de A.

Ejemplo: (Descomposición de Cartan).

En general, dada A con producto xy:

$$xy = \frac{1}{2}[x, y] + x \circ y.$$

$$([x, y] = xy - yx, \qquad x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)).$$

De esta forma, determinar A^- equivale a determinar el producto de Jordan conmutativo $x \circ y$. De hecho, dado $\circ$:

$$x * y = \frac{1}{2}[x, y] + x \circ y.$$

$$[x, y] = x * y - y * x.$$

$$(A, *)^- = A^-.$$

Ejemplo: $x \circ y = \tau(x)y + \tau(y)x$. ($\tau$ forma lineal en A).

$$x * y = \frac{1}{2}[x, y] + \tau(x)y + \tau(y)x.$$

3. Aplicación a MC

3.1. Deformaciones iniciales de la MC

Numerosos estudios han buscado la generalización de la estructura de la Mecánica Cuántica (MC), via la relajación de uno o varios de los axiomas en los que se basa ésta:

a) Estructura lineal, local y potencial.

b) Álgebra envolvente universal asociativa, con unidad fundamental $I = diag\ (1, 1, 1)$.

c) Operadores Hermiticos sobre un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert, dotado de un producto asociativo.

d) Invariancia de las unidades básicas de tiempo, longitud, energía, etc.

e) Conservación de la Hermiticidad bajo la evolución del tiempo de la teoría.

f) Verificación de la causalidad y de las leyes probabilísticas.

g) La evolución del tiempo finito e infinitesimal de Heisenberg para Hamiltonianos Hermíticos:

$$A(t) = U \times A(0) \times U^\dagger = e^{iHt} \times Q(0) \times e^{-itH} \approx -i(A \times H - H \times A) = -i[A, H].$$

h) La ecuación fundamental de Schrödinger:

$$H(t, r, p) \times \phi(t, r) = E \times \phi(t, r).$$

De hecho, Lagrange y Hamilton presentaron sus conocidas ecuaciones en mecánica analítica, en términos de factores externos.

Cualquier generalización de este tipo (→ Deformación) sufrirá serias limitaciones físicas, si es formulada desde el punto de vista matemático convencional de la MC:

a) *Teoría no lineal:* Las ecuaciones del tipo:

$$H(t, r, p, \phi) \times \phi(t, r) = E \times \phi(t, r),$$

no cumplen el principio de superposición, en caso de trabajar sobre cuerpos y espacios convencionales. Aparece además limitación en la topología utilizada y se produce violación de las relatividades establecidas.

b) *Teoría no local:* Requiere la adición en el Hamiltoniano de potenciales caraterizados por integrales de superficie o volumen, lo que matemáticamente implica la violación de las topologías relativistas y no relativistas (que son estrictamente locales-diferenciales), con la consecuente invalidación del fundamento matemático de la teoría.

c) *Teoría no potencial:* A partir de los conocidos modelos nucleares disipativos (los cuales representan los efectos no potenciales a través de potenciales imaginarios $iV(t, r)$), con Hamiltoniano no Hermítico $H = H_0 + iV \neq H^\dagger$ y evolución del tiempo finito e infinitesimal:

$$A(t) = U \times A(0) \times U^\dagger = e^{iHt} \times A(0) \times e^{-itH} \approx -i(A \times H^\dagger - H \times A) = -i(A, H, H^\dagger),$$

origina la pérdida del producto bilineal de Lie $[A, H]$ en relación al producto triple $(A, H, H^\dagger)$ y la consecuente pérdida de significado en simetrías como la $SU(2)$-spin.

d) Relajación en el álgebra envolvente universal asociativo:, (como ocurre en mecánica estadística o en la representación de colisiones):

$$\frac{id\rho}{dt} = (\rho, H) = \rho \times H - H \times \rho + C = [\rho, H] + C,$$

origina nuevamente la pérdida de los corchetes de Lie (ρ, H) en la evolución del tiempo.

3.2. Deformaciones Lie-admisibles y Lie isotópicas de la MC

SISTEMAS ABIERTOS NO CONSERVATIVOS IRREVERSIBLES.

(Ley de conservación de la energía: $i\dfrac{dH}{dt} \neq 0$).

1967: Santilli introduce la deformación paramétrica del producto de Lie:

$$(A, B) = pAB - qBA = m(AB - BA) + n(AB + BA).$$

$p = n + m, \quad q = n - m, \quad p \pm q$ parámetros (funciones) no nulos en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Evolución del tiempo de Heisenberg:

$$i\frac{dA}{dt} = pAH - qHA.$$

(No unitaria en espacios de Hilbert reales o complejos).

1978: Santilli introduce la deformación mediante operadores:

$$(A, B) = APB - BQA = (AMB - BMA) + (ANB + BNA).$$

$P = N + M, \quad Q = N - M, \quad P \pm Q$ operadores no singulares y no hermíticos.

Evolución del tiempo de Heisenberg:

$$i\frac{dA}{dt} = APH - HQA.$$

$$A(t) = e^{iHQt}\ A(0)\ e^{-itPH} \qquad \text{(No unitaria)}.$$

$$UU^\dagger \neq Id, \quad P = p(UU^\dagger), \quad Q = q(UU^\dagger).$$

SISTEMAS CERRADOS AISLADOS IRREVERSIBLES.

$$(i\frac{dH}{dt} = 0).$$

La deformación es admisible de Lie:

$$[A \widehat{,} B] = (A, B) - (B, A) = ATB - BTA.$$

$$i\frac{dA}{dt} = ATH - HTA.$$

$$A(t) = e^{iHTt}\ A(0)\ e^{-itTH} \qquad \text{(No unitaria)}.$$

$$(T = P - Q).$$

Engloba las deformaciones anteriormente indicadas:

a) Teoría no lineal:

$$H(t,r,p,\phi) \times \phi(t,r) = H_0(t,r,p) \times T(\phi) \times \phi(t,r) = E \times \phi(t,r).$$

c) *Teoría no potencial:*

$$(A, H, H^\dagger) = A \times H^\dagger - H \times A = A \times P \times H_0 - H_0 \times Q \times A,$$

$$H = H_0 \times Q, \quad H_0 = H_0^\dagger, \quad P = Q^\dagger.$$

d) Relajación en el álgebra envolvente universal asociativo:,

$$\rho \times H - H \times \rho + C = \rho \times P \times H - H \times Q \times \rho,$$

$$P = 1, \quad Q = 1 + H^{-1} \times C \times \rho^{-1}.$$

Sin embargo, al ser deformaciones no unitarias:

i) **No conservan la unidad convencional** en la evolución del tiempo:

$$i\frac{dI}{dt} = (I, H) = IPH - HQI \neq 0,$$

$$i\frac{dI}{dt} = [I \widehat{,} H] = ITH - HTI \neq 0.$$

ii) No posee únicas e invariantes prediciones numéricas, leyes físicas o probabilidades.

iii) Violan la causalidad y los axiomas de Galileo y Einstein en relatividad especial.

Para evitar la invariancia, Santilli propone englobar todos los términos no Hamiltonianos en una unidad generalizada del sistema en cuestión:

$$I = diag(1, ..., 1) \rightarrow \widehat{I} = (\widehat{I}_i^j) = \widehat{I}(t, r, v, p, \phi, ...) = T^{-I}.$$

Para que sea unidad del sistema, generaliza el producto inicial:

$$\times \rightarrow \widehat{\times} \equiv \times T \times,$$
$$A \widehat{\times} \widehat{I} = \widehat{I} \widehat{\times} A = A.$$

$$\widehat{U} \widehat{\times} \widehat{U}^{\widehat{\dagger}} = \widehat{U}^{\widehat{\dagger}} \widehat{\times} \widehat{U} = \widehat{I}.$$

$$\Downarrow$$

Isotopías de Santilli

1996: *Cálculo isodiferencial:*

$$\widehat{d}t = \widehat{I}_t dt, \qquad \widehat{d}r^k = \widehat{I}_i^k dr^i,$$

$$\frac{\widehat{\partial}}{\widehat{\partial} t} = T_t \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \frac{\widehat{\partial}}{\widehat{\partial} r^k} = T_k^i \frac{\partial}{\partial r^i}.$$

3.3. Otras deformaciones

1978: Modelo *star* (Bayer, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, Sternheimer [asociativo]; Weinberg (1989) [no asociativo]):

$$A * B = ATB.$$

1983: Superálgebras de Kac-Moody (Kac).
1989: Deformaciones q-paramétricas (Biedenharn, Macfarlane):

$$(A, B) = AB - qBA.$$

1989: Teorías de estado de presión (Janussis).
1991: Grupos cuánticos (Curtis, Gairlie, Zachos):

$$X_i X_j - X_j X_i = C_{ij}^k(q) X_k.$$

1992: k-deformaciones (Lukierski, Viowiski, Ruegg).
1992: Teorías de supersimetría (Mahopatra).

3.4. Realizaciones en MC

i) **Jordan conmutativa:** En MC clásica no es conocida ninguna realización.

ii) **Lie:** Corchetes de Poisson:

$$[A, B]_{Poisson} = \frac{\partial A}{\partial a^\mu} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial B}{\partial a^\nu} = \frac{\partial A}{\partial r^k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial B}{\partial r^k} \frac{\partial A}{\partial p_k}.$$

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \equiv \text{ Tensor contravariante canónico de Lie.}$$

iii) **Admisible de Lie:** (Santilli, 1978)

$$U \text{ álgebra asociativa } (xy), r, s \in U \text{ no nulos.}$$

$$(x, y)_U = xry - xsy.$$

$$[x, y]_U = (x, y)_U - (y, x)_U.$$

$$\Downarrow \text{ MC}$$

$$(A, B)_U = \frac{\partial A}{\partial r^k} \frac{\partial B}{\partial p_k}.$$

$$[A, B]_U = [A, B]_{Poisson}.$$

iv) **Flexible admisible de Lie** (Santilli, 1978)

$$(x, y)_U = \lambda ab - \mu ba.$$

No es conocida ninguna realización en MC clásica.

3.5. Estructura admisible de Lie de las ecuaciones de Hamilton con términos externos

William Rowan Hamilton (1805-1865).

El *Hamiltoniano* se obtiene a partir de la transformada de Legendre del *Lagrangiano* $L = L(t, q, \dot{q})(= T(q) - V(q))$ (conservándose a lo largo de trayectorias dinámicas si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$):

$$H = H(t, p, q) = p\dot{q} - L(t, q, \dot{q}) \quad (= T(q) + V(q) = E).$$

$$p = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}.$$

Acción canónica: $A = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q})dt = \int_{t_1, q_1}^{t_2, q_2} p\ dq - H\ dt.$

♯ **Ecuaciones de Hamilton:** (Hamilton, 1834)

$$\dot{\mathrm{q}}_i = \frac{\partial H(t,p,q)}{\partial p_i} = [q_i, H]_{\mathrm{Poisson}}, \qquad \dot{\mathrm{p}}_i = -\frac{\partial H(t,p,q)}{\partial q_i} = [p_i, H]_{\mathrm{Poisson}}.$$

♯ **Ecuaciones de Hamilton con términos externos:**

$$\dot{\mathrm{q}}_{ka} = \frac{\partial H(t,p,q)}{\partial p_{ka}} = \frac{p_{ka}}{m_a}, \qquad \dot{\mathrm{p}}_{ka} = -\frac{\partial H(t,p,q)}{\partial q_{ka}} + F_{ka},$$

$$H = \frac{p_{ka}^2}{2m_a} + V(q),$$

$$F_{ka} = F_{ka}^{NSA}(t, q, dotq, p, \dot{\mathrm{p}}, ...) + \int_\sigma d\sigma F_{ka}^{NSA}(t, q, \dot{q}, p, \dot{\mathrm{p}}, ...).$$

$$k = 1, 2, 3(= x, y.z); a = 1, 2, ..., N.$$

El Hamiltoniano H representa el conjunto de fuerzas locales y potenciales. No es conservativo necesariamente, por lo que las ecuaciones anteriores caracterizan:

SISTEMAS ABIERTOS NO CONSERVATIVOS.

F_{ka} representan el resto de fuerzas no lineales, no locales y no hamiltonianas.

Hamiltoniano no Hermítico: $H_d = H + H_{dis}$.
Evolución del tiempo: $-i[A\tilde{,}H] = AH_d^\dagger - H_d A$.

♯ Generalizando ahora los corchetes de Poisson en ecuaciones de Hamilton:

$$A \times B = [A, B]_{Poisson} + \frac{\partial A}{\partial p_{pa}} F_{ka}.$$

Estos corchetes **no caracterizan un álgebra**.

Pero en Dinámica: *"La ley de evolución del tiempo equivale al producto del álgebra que caracteriza una teoría dada"*.

Este problema origina la aplicación de las álgebras admisibles de Lie en Física (Santilli,1967):

i) Al estar dotadas de producto no antisimétrico, permiten representar la variación de la energía.

ii) Permite obtener el producto de Lie para fuerzas externas nulas:

$$(A, B)_{|F_{ka}=0} = [A, B].$$

En particular, el producto (A, B) asociado a éstas no es ni antisimétrico ni simétrico, lo que permite representar:

SISTEMAS ABIERTOS NO CONSERVATIVOS BAJO FUERZAS EXTERNAS.

3.6. Mecánica Birkhoffiana (MB)

George David Birkhoff (1884-1944).

$M(\mathbb{R})$ $2n-$ variedad diferenciable.

$x = (x^i)$ coordenadas locales.

t variable independiente.

La MB está basada en el principio variacional más general posible en $M(\mathbb{R})$, lineal y de primer orden (depende linealmente de $\dot{\mathrm{x}}$):

Acción de Pfaff - Birkhoff: $$\delta \widehat{A} = \delta \int_{t_1}^{t_2} (R_i(x)\dot{\mathrm{x}}^i - B(t,x))_{|_{\widetilde{E}}} dt = 0, \quad i = 1, 2, ..., 2n.$$

$$\Downarrow$$

$$\Omega_{ij}(x) = \frac{\partial R_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial R_i(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial B(t,x)}{\partial x^i}.$$

Corchetes de Birkhoff (generalizados de Poisson): (Birkhoff, 1927) $A(x), B(x) : M \to \mathbb{R}$

$$[A\widehat{,}B] = \frac{\partial A}{\partial x^i}\Omega^{ij}\frac{\partial B}{\partial x^j}.$$

($\Omega^{\mu\nu}$ tensor contravariante antisimétrico de Birkhoff).
(Sistemas locales-diferenciales (geometría simpléctica)).

Ecuaciones birkhoffianas de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial t} + B(t,x) = 0,$$

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial x^i} = R_i.$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{Ecuaciones de Hamilton-Jacobi} \\ \frac{\partial A}{\partial t} + H(t,r,p) = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial r_i} = p_i, \qquad \frac{\partial A}{\partial p_i} = 0.\end{array}\right)$$

En Mecánica Hamiltoniana, se asigna H y luego se obtienen las ecuaciones de movimiento. En MB, se puede comenzar con un sistema no lineal y no hamiltoniano y buscar entonces su representación de Birkhoff:

Teorema: (Universalidad directa de la MB para sistemas locales de primer orden) (Santilli, 1982). *Toda EDO local, analítica, regular, no autónoma, finito-dimensional, de primer orden, sobre M,*

$$\dot{x} = \Gamma^i(t, x),$$

siempre admite en un entorno estrellado de un punto regular, una representación en términos de la ecuación de Birkhoff:

$$\left[\frac{\partial R_j(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial R_i(t,x)}{\partial x^j}\right]\Gamma^j(t,x) = \frac{\partial B(t,x)}{\partial x^i} + \frac{\partial R_i(t,x)}{\partial t}.$$

La MB generaliza (conservando axiomas) la Mecánica Hamiltoniana, enfatizando las simetrías espacio-temporales y las integrales de primer orden, que representan el conjunto de leyes conservativas, pero no caracteriza ningún tipo de álgebra:

SDI CERRADOS AISLADOS.

Mecánica Hamiltoniana como caso particular:

$$r = (r_i) \equiv \text{ Coordenadas cartesianas}$$

$$p = dr/dt = (p_i), a = (a^\mu) = (r_i, p_i), \mu = 1, ..., 2n, i = 1, ..., n.$$

$$R = R^\circ = (R^\circ_\mu) = (p, 0) = (p_i, 0_i),$$

$$B = B(t, a) = B(t, r, p) = H(t, r, p) = H(t, a).$$

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i \cdot r^i - H(t, r, p)]|_{\widetilde{E}} dt = 0.$$

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial t} + B(t, x) = 0,$$

$$\frac{\partial \widehat{A}}{\partial x^i} = R_i.$$

$\Downarrow$

Mecánica admisible de Birkhoff (Santilli, 1981).
SDI ABIERTOS NO CONSERVATIVOS.

Esta última permite representar cualquier *sistema no lineal y no Hamiltoniano*, si bien desde una aproximación *local-diferencial*, pues atiende a la **geometría simpléctica**.

$\Downarrow$ (Santilli, 1988)

Geometría isosimpléctica.
Mecánica de Birkhoff-Santilli.

$$\widehat{R}^{\circ} = (\widehat{R}^{\circ}_{\mu}(a)) = (P_i(r,p), 0_i) = (pT_1, 0_i) = (p_k T^k_{1\,i}, 0_i),$$

$$T_1 = (T_{1ij})_{n\times n} = (T_{1ji}) = (T^i_{1j}) = (T_{1j}{}^{i}), \qquad diag(\frac{1}{m_1^2}, ..., \frac{1}{m_n^2}) \times \Gamma(t, r, v, ...)$$

$diag(\frac{1}{m_1^2}, ..., \frac{1}{m_n^2}) \equiv$ Deformación no esférica de partículas no puntuales.
$\Gamma(t, r, v, ...) \equiv$ Fuerzas no lineales, no locales y no potenciales.

$\Downarrow$

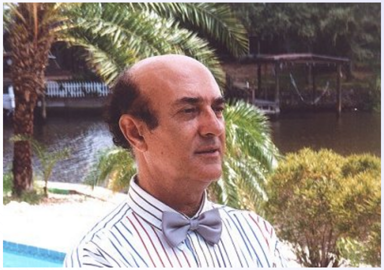
Acción Pfaff - Birkhoff - Santilli: $\delta \widehat{A}^{\circ} = \delta \int_{t_1}^{t_2} [p_i T_1^{ij} \dot{r}^j - H(t, r, p)]|_{\widetilde{E}} dt = 0.$

$$\Omega^{\circ}_{ij} = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & (T_2)_{n\times n} \\ -(T_2)_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix} = \omega \times diag(T_2, T_2), \qquad T_{2ij} = T_{1ij} + p_k \frac{\partial T_1{}^k{}_i}{\partial p_j}.$$

$$[A \widehat{,} B] = \frac{\partial A}{\partial a^i} \omega^{ij} I_2{}^k_\alpha \frac{\partial B}{\partial a^k}.$$

$$\frac{\partial \widehat{A}^{\circ}}{\partial t} + H(t, r, p) = 0, \qquad \frac{\partial \widehat{A}^{\circ}}{\partial r_i} = p_j T_1{}^j{}_i, \qquad \frac{\partial \widehat{A}^{\circ}}{\partial p_i} = 0.$$

4. Isoteoría de Lie-Santilli



Ruggero Maria Santilli (1935).

1967: R. M. Santilli aplica las teorías de Birkhoff y Albert en MC.
Generaliza la admisibilidad de Albert, haciendo uso de la deformación del producto de Lie:

$$[A, B] = A \times B - B \times A \rightarrow (A, B) = p \times A \times B - q \times B \times A$$

($p, q, p \pm q$ parámetros no nulos; A,B operadores hermíticos.)

Este producto es admisible de Jordan y de Lie, admitiendo producto de Jordan y de Lie como casos particulares.

1969:

$$(A, B) = A \times P \times B - B \times Q \times A$$

($P, Q, P \pm Q$ operadores no singulares, no hermíticos)

1978: Producto isotópico de Lie:

$$[A, B]_U = A \times T \times B - B \times T \times A$$

$$(T = P + Q = T^{\dagger})$$

$$\widehat{\times} \equiv \times T \times$$

R. M. Santilli [7] propone tratar la representación invariante de ***sistemas no lineales, no locales y no Hamiltonianos***, de tal forma que posteriormente se pueda reconstruir la linealidad, locacidad y canonicidad en ciertos espacios generalizados, dentro de las coordenadas fijadas por un observador inercial.

Esta propuesta se basa esencialmente en la construcción de **isotopías** (aplicaciones entre estructuras que conservan los axiomas básicos de éstas) de todas las ramas matemáticas que, basadas en una unidad trivial $I = +1$, son necesarias a la hora de trabajar con sistemas dinámicos interiores.

Ejemplo:
Estructura inicial: $(E, \times)$.

Isotopía fundamental de Santilli:

$$I = +1 \quad \rightarrow \quad \widehat{I} = \widehat{I}(x, dx, d^2x, t, v, \mu, \tau, ...) = T^{-I}$$

$$a \quad \rightarrow \quad \overline{\widehat{a}} = a \times \widehat{I}$$

$$\times \quad \rightarrow \quad \overline{\widehat{\times}} \equiv \times T \times$$

$$a \times b \quad \rightarrow \quad \overline{\widehat{a}}\,\overline{\widehat{\times}}\,\overline{\widehat{b}} = \overline{\widehat{a \times b}}$$

Interpretación física (Algoritmo):

i) Se considera un sistema de partículas inicial E, sometido a m grados de libertad $(\tau_1, ..., \tau_m)$.

ii) Se somete E a $m+n$ grados de libertad o parámetros $(\tau_1, ..., \tau_m, \tau_{m+1}, ..., \tau_{m+n})$ y obtenemos su espacio de fase.

iii) Se proyecta el espacio de fase al correspondiente a los n primeros grados de libertad.

La construcción isotópica de Santilli permite estudiar el sistema inicial E mediante dos tipos de observadores:

1) Un observador externo a E que dispone de una unidad de medida I y que distingue los $m+n$ grados de libertad existentes.

2) Un observador interno a E que dispone de una unidad de medida $\widehat{I}$, que engloba los n últimos grados de libertad, distinguiendo únicamente los m primeros parámetros existentes.

Aplicación a SDI: Es necesario el uso de dos cantidades:

1. El Hamiltoniano H para la representación de las fuerzas convencionales lineales, locales y potenciales: F^{SA}.

2. La isounidad $\widehat{I}$ para la representación de todos los efectos no lineales, no locales y no Hamiltonianos: F^{NSA}.

Aplicación a corchetes de Poisson:

$$[A,B]_{Poisson} = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} = \frac{\partial A}{\partial r^{k}} \frac{\partial B}{\partial p_{k}} - \frac{\partial B}{\partial r^{k}} \frac{\partial A}{\partial p_{k}}.$$

$$I = (I^{\sigma}_{\rho}) = I_{2n\times 2n} = diag_{2n}(1, ..., 1).$$

$$[A,B]_{Poisson} = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \omega^{\mu\rho} I^{\nu}_{\rho} \frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}.$$

$$\Downarrow$$

$$[A\widehat{,}B] = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \omega^{\mu\rho} \widehat{I}^{\nu}_{\rho}(t, a, \dot{a}, ...) \frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}$$ (Corchetes de Hamilton-Santilli (1988)).

(Admisible de Lie, no asociativa)

$$\Omega^{\mu\nu} = \omega^{\mu\rho} \widehat{I}^{\nu}_{\rho}(t, a, \dot{a}, ...).$$

$$\widehat{I} = diag(\widehat{\delta}_{n\times n}, \widehat{\delta}_{n\times n}), \qquad \widehat{\delta} = \widehat{\delta}^{\dagger}, \qquad det\ \widehat{\delta} \neq 0.$$

$$[A\widehat{,}B] = \frac{\partial A}{\partial r^{i}} \widehat{\delta}_{ij}(t, r, p, ...) \frac{\partial B}{\partial p_{j}} - \frac{\partial B}{\partial r^{i}} \widehat{\delta}^{ij}(t, r, p, ...) \frac{\partial A}{\partial p_{j}}.$$

4.1. Isoestructuras matemáticas

Isoespacios vectoriales:

$\overline{\widehat{V}}$ es un $\overline{\widehat{K}}$**-isoespacio vectorial** si existe una aplicación sobreyectiva (biyectiva para Moleai [5])

$$h_V \equiv \overline{\widehat{\pi \circ \mathbf{I}}} : V \to \overline{\widehat{V}} : v \to \overline{\widehat{v}},$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K \times V \arrow[rr, "\bullet"] \arrow[d, "(i \times \widehat{I}) \times h_V"'] & & V \arrow[d, "h_V"] \\
\overline{\widehat{K}} \times \overline{\widehat{V}} \arrow[rr, "\overline{\widehat{\bullet}}"] \arrow[urr, phantom, "\sharp"] & & \overline{\widehat{V}}
\end{tikzcd}$$

siendo:

$$(i \times \widehat{I}) \times h_V(a) = a * \widehat{I}$$

En definitiva:

$$\overline{\widehat{a}}\overline{\widehat{\bullet}}\overline{\widehat{X}} = \overline{\widehat{a \bullet X}}$$

4.2. Álgebras de Lie-Santilli

Definición Sea $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{\cdot})$ una $\widehat{K}(\widehat{a}, \widehat{+}, \widehat{\times})$-isoálgebra isoasociativa. Se denomina *producto corchete de Lie-Santilli* respecto a $\widehat{\cdot}$, y se representa por $[.,.]_S$, a la operación producto conmutador en $\widehat{U}$ asociado a $\widehat{\cdot}$, es decir, a la operación definida según: $[\widehat{X}, \widehat{Y}]_S = (\widehat{X}\widehat{\cdot}\widehat{Y}) - (\widehat{Y}\widehat{\cdot}\widehat{X})$, para todos $\widehat{X}, \widehat{Y} \in \widehat{U}$. A la isoálgebra $(\widehat{U}, \widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, [.,.]_S)$ se le denomina entonces *álgebra de Lie-Santilli*.

Aplicación: Fundamentos de la Mecánica Hadrónica (MH).

Álgebra envolvente universal A	$\widehat{A}$
$a \cdot b, \qquad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$	$\widehat{\cdot} \equiv \cdot T \cdot \qquad a\widehat{\cdot}\widehat{I} = \widehat{I}\widehat{\cdot}a = a$
PBW $A =< 1, X_i, X_i \cdot X_j, X_i \cdot X_j \cdot X_k, ... >$	$\widehat{PBW}$ $\widehat{A} =< \widehat{I}, X_i, X_i\widehat{\cdot}X_j, X_i\widehat{\cdot}X_j\widehat{\cdot}X_k, ... >$
$L \simeq A^- : [a,b]_A = a \cdot b - b \cdot a$	$\widehat{L} \simeq \widehat{A}^- : [a,b]_{\widehat{A}} = a\widehat{\cdot}b - b\widehat{\cdot}a$
$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$	$[X_i, X_j]_{\widehat{A}} = \widehat{C}_{ij}^k X_k$
$G : g(w) = exp_A^{iwX} =$ $= 1 + (iwX)/1! + (iwX)^2/2! + ...$	$\widehat{G} : \widehat{g}(w) = exp_{\widehat{A}}^{iwX} =$ $\widehat{I} + (iwX)/1! + (iwX)^{\widehat{2}}/2! + ... = \widehat{exp_A^{iwTX}}$

Evolución del tiempo de Heisenberg $Q(t) = e^{iHt} \times Q(0) \times e^{-itH} \approx$ $\approx -i(Q \times H - H \times Q) = -i[Q,H]$	$\widehat{Q}(t) = e^{iHTt} \times Q(0) \times e^{-itTH} \approx$ $\approx -i(Q \times T \times H - H \times T \times Q) = -i[Q,H]_{\widehat{A}}$
Representación de Schrödinger $H \times \phi = E \times \phi \quad (E \in \mathbb{R}, H = H^\dagger)$	$H\widehat{\times}\phi = \widehat{E}\widehat{\times}\phi$

$$H = T(\dot{\mathrm{x}}) + V(t, x, \dot{\mathrm{x}})$$

$$F^{SA} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathrm{x}}} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Ejemplo: Interacción entre dos partículas con ecuaciones de ondas solapadas $\psi(t, r), \phi(t, r)$ (Animalu, 1991)

$$\widehat{I} = e_A^{-itK\int dv\psi(t,r)\phi(t,r)} \qquad (K \in \mathbb{R}).$$

5. Mecánica Hadrónica: Teoría Lie-isotópica

La teoría isotópica de de Lie es aplicada para tratar:

SDE CERRADOS AISLADOS NO HAMILTONIANOS.

Permite considerar en estos sistemas el *carácter elipsoidal de la distribución de carga de las interacciones entre hadrones.*

$$\widehat{I} = T^{-1}, \qquad \widehat{\times} \equiv \times T \times .$$

Evolución del tiempo:

$$-i[Q \widehat{,} H] = -i(QTH - HTQ).$$

6. Mecánica Hadrónica: Teoría Lie-admisible

La teoría admisible de Lie es aplicada para tratar:

SDI ABIERTOS NO HAMILTONIANOS.

Principales diferencias:

a) Aparición de ***irreversibilidad*** (pérdida de la invariancia de procesos físicos bajo inversión del tiempo).

b) Relajación de la Hermiticidad de la unidad básica: $\widehat{I}^\dagger \neq \widehat{I}$.

1982: (Myung, Santilli) Se asocia dos isotopías (***genotopía***) a un álgebra envolvente, atendiendo a sentido directo $>$ o inverso en el tiempo $<$:

$$
\begin{aligned}
{}^<\widehat{I} = ({}^<T)^{-1} = \frac{1}{\widehat{P}}, &\qquad < \equiv \times {}^<T \times \equiv \times \widehat{P} \times, \\
I^> = (T^>)^{-1} = \frac{1}{\widehat{Q}}, &\qquad > \equiv \times T^> \times \equiv \times \widehat{Q} \times, \\
T^> \neq {}^< T, &\qquad \widehat{I}^> = ({}^<\widehat{I})^\dagger .
\end{aligned}
$$

Evolución del tiempo:

$$-i(A \widehat{,} H) = -i(A < H - H > A) = -i(A\widehat{P}H - H\widehat{Q}A).$$

$$\Downarrow$$

Lie - admisible

$$-i[A\widehat{,}H] = -i(ATH - HTA), \qquad T = {}^{<}T + T^{>} = \widehat{P} + \widehat{Q}.$$

En el caso de Hamiltonianos no Hermíticos:

$$H_d = HT^{>} = H\widehat{Q}, \qquad H_d^{\dagger} = {}^{<}TH = \widehat{P}H,$$

$$-i[A\widehat{,}H] = -i[A\widetilde{,}H] = AH_d^{\dagger} - H_dA = A\widehat{P}H - H\widehat{Q}A.$$

References

[1] A. A. Albert, Power-associative rings *Trans. Amer. Math. Soc.* **64**, (1948), 552-593.

[2] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience, New York, 1962.

[3] M. Goze, E. Remm, Lie-admissible algebras and Operads.

[4] J. V. Kadeisvili, Santilli's Isotopies of Contemporary Algebras, Geometries and Relativities, Second Edition, Ukraine Academy of Sciences, Kiev , Second Edition, ISBN 0-911767-61-4, (1997).

[5] Molaei, M. R., Santilli isomanifolds in arbitrary dimensions, *Algebras, groups and geometries* **19**, (2002), 347-356.

[6] Myung, H. C., Malcev-admissible algebras, Progress in Mathematics, Birkhuser, ISBN 0-8176-3345-6.

[7] R. M. Santilli, On a possible Lie-admissible covering of the Galilei Relativity in Newtonian Mechanics for nonconservative and Galilei noninvariant systems, *Hadronic J.* **1** (1978), 223-423. Addendum, ibid, **1**, (1978), 1279-1342.

[8] R. M. Santilli, Lie-isotopic lifting of the special relativity for extended-deformable particles, *Letter Nuovo Cimento* **37**, (1983), 545-555.

[9] R. M. Santilli, Isotopic Generalizations of Galilei's and Einstein's Relativities, Vols. I and II, Hadronic Press, (1991).

[10] R. M. Santilli, Isotopies of contemporary mathematical structures, I: Isotopies of fields, vector spaces, transformation theory, Lie algebras, analytic mechanics ans space-time symmetries, *Algebras, Groups and Geometries* **8**, (1991), 169-266.

[11] R. M. Santilli, Origin, Problematic aspect and invariant formulation of classical and operator deformations, *Intern. J. Modern Phys. A* **14:0** (1999), 1-50.

[12] Schafer, R. D. Nonconmutative Jordan algebras of characteristic 0, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 472-475.