¿ES POSIBLE GEOGEBRIZAR UNA OLIMPIADA MATEMÁTICA?

Eva Barrena Algara[1], Raúl Manuel Falcón Ganfornina[2],

Rosana Ramírez Campos[3], Ricardo Ríos Collantes de Terán[4]

[1] E.U. de Arquitectura Técnica.
Universidad de Sevilla.
ebarrena@us.es

[2] E.U. de Arquitectura Técnica.
Universidad de Sevilla.
rafalgan@us.es

[3] I.E.S. Manuel de Góngora.
Tabernas.
roracam@gmail.com

[4] I.E.S. Sofía.
Jerez de la Frontera.
profesofricardo@yahoo.es

RESUMEN

En la presente comunicación se pretende abordar la resolución dinámica de algunos de los problemas geométricos que han aparecido en las diferentes fases desarrolladas en las veinticinco ediciones de la Olimpiada Matemática Thales destinada al alumnado de 2º de E.S.O. El trabajo se complementa con ciertas ideas que pueden ser de utilidad a la hora de abordar problemas no geométricos de la misma.

1. INTRODUCCIÓN.

A lo largo de la historia de la Olimpiada Matemática Thales se han publicado diversos materiales didácticos donde se presentan las soluciones a los problemas propuestos. Los formatos de dichos materiales han ido evolucionando a partir de las nuevas tecnologías disponibles en el aula. Se pasa así del libro publicado [1] con motivo del décimo aniversario, que recoge las soluciones planteadas por los propios participantes, al CD interactivo [2, 3 y 4], que ofrece las soluciones presentadas secuencialmente mediante diapositivas secuenciales.

Es así que, desde la decimoctava edición de la Olimpiada Matemática Thales (2002), el profesorado y alumnado participante en la misma dispone de presentaciones realizadas en *PowerPoint*, en las que pueden encontrarse resoluciones guiadas paso a paso de todos y cada uno de los problemas planteados en las distintas fases de la actividad. Este formato da la posibilidad al profesorado de adecuar el ritmo de trabajo en el aula, atendiendo a la diversidad de su alumnado. No obstante, el rol jugado en este caso por las nuevas tecnologías es el de mero guía en la resolución de problemas que terminan desarrollándose al final en papel.

Por su parte, cuando comenzó a gestarse la página web de la Olimpiada[1] en 2005, uno de los objetivos fue incorporar a la misma, de una forma fluida, dinámica y atractiva, las presentaciones anteriormente indicadas. Sin embargo, ante las características del software empleado, se optó por subir directamente los archivos correspondientes, con vistas a su descarga directa, lo que conllevaba la pérdida de la fluidez buscada. Aunque una alternativa que se ha ido planteando durante estos años ha sido la posibilidad de pasar las presentaciones a formato *Flash*, la experiencia desarrollada en el ámbito de educación virtual hace indicar que es más conveniente aprovechar un entorno *Java* que permita a los usuarios una interacción directa en la propia web.

Es en este punto por tanto cuando comienza a tomar forma la idea de usar el software libre de geometría dinámica Geogebra como alternativa al formato tradicionalmente utilizado, dada su versatilidad a la hora de generar *applets* interactivos en Java, fácilmente acoplables a un entorno *html*. Más aún, el uso de un software de geometría dinámica permitiría una construcción activa y algorítmica de la solución a partir de las distintas herramientas de construcción que tiene incorporadas, ofreciendo como consecuencia nuevas estrategias para abordar la resolución de los problemas olímpicos y favoreciendo además tanto la motivación del alumnado participante como la consecución de un aprendizaje significativo asociado.

Un par de objeciones aparecían no obstante ante el prometedor horizonte vislumbrado:

1. Si bien Geogebra dispone de herramientas como la "*Barra de navegación por pasos de construcción*" y posibilita la animación de ciertos elementos en las construcciones geométricas realizadas, no parece que pueda plantearse a priori como un programa diseñado para elaborar presentaciones secuenciales, con comentarios en cada paso que puedan guiar al alumnado en la resolución del problema en cuestión.
2. Aunque en Geogebra se complementan herramientas algebraicas y de geometría dinámica, no es menos cierto que, en los veinticinco años de historia de la Olimpiada, existe una gran diversidad de problemas, no todos ellos geométricos. ¿Se pueden abordar todos ellos en este nuevo formato?

[1] http://thales.cica.es/olimpiada2

En las siguientes secciones veremos cómo pueden solventarse estos inconvenientes, analizando ejemplos concretos en cada caso y presentando una posible metodología a seguir.

2. PRESENTACIONES SECUENCIALES EN GEOGEBRA.

Geogebra memoriza el orden de los pasos realizados a la hora de llevar a cabo una construcción geométrica, de tal forma que, habilitando la barra de navegación por pasos, se posibilita una presentación guiada de la misma. El problema estriba en que dicha barra obliga a una presentación completamente lineal, sin posibilidad de permitir alternativas en la solución. Además, aunque Geogebra enumera los pasos, no hay posibilidad de asociar eventos, como la desaparición de un texto o la animación de un elemento, en un paso concreto.

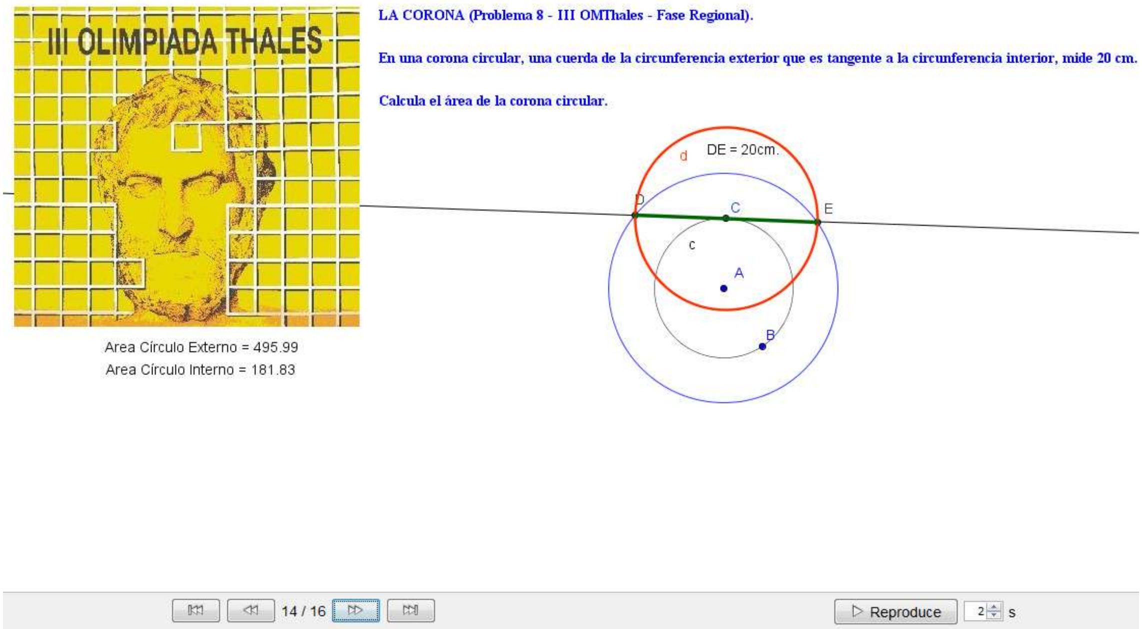

Figura 1: Presentación secuencial haciendo uso de la barra de navegación por pasos.

Ahora bien, la aparición y desaparición de textos es una necesidad primordial en toda presentación que se precie, por lo que se requiere buscar una alternativa a la barra de navegación. Una posibilidad que ofrece Geogebra es la herramienta *"Casilla de control para ocultar objetos"* (*checkbox button*), pero el caso que nos ocupa implicaría un número excesivamente alto de casillas de control. Puede ser más recomendable por tanto crear nuestra propia barra de navegación.

2.1 Barra de navegación.

Dado que no es posible incluir botones de control en la pantalla de trabajo, salvo las casillas de control anteriormente citadas, optaremos por construir un deslizador, cuyo parámetro *t* determine la etapa de la presentación en la que nos encontremos, atendiendo a su intervalo de definición. A posteriori podemos incluir un texto debajo del deslizador que marque explícitamente dicha etapa.

Figura 2: Barra de navegación constituida por un deslizador.

En caso de que el intervalo de definición fuese por ejemplo *[0,100]*, una posible subdivisión podría ser:

- **Enunciado**: Si $t < 15$.
- **Elección de la solución**: Si t se encuentra en *[15,30]*.
- **Planteamiento**: Si t se encuentra en *[30,60]*.
- **Resolución**: Si *t* se encuentra en *[60,90]*.
- **Fin**: Si $t > 90$.

Fijado un objeto incluido en la pantalla de trabajo, la anterior subdivisión tiene la ventaja de poder utilizarse como *condición para exponer el objeto*, dentro de sus propiedades avanzadas. En concreto, podemos introducir el enunciado del problema en cuestión e imponer como condición de exposición del texto que $t<15$. De esta forma, cuando el usuario mueve el deslizador a una etapa posterior, el texto del enunciado desaparece, tal y como ocurriría en una presentación secuencial.

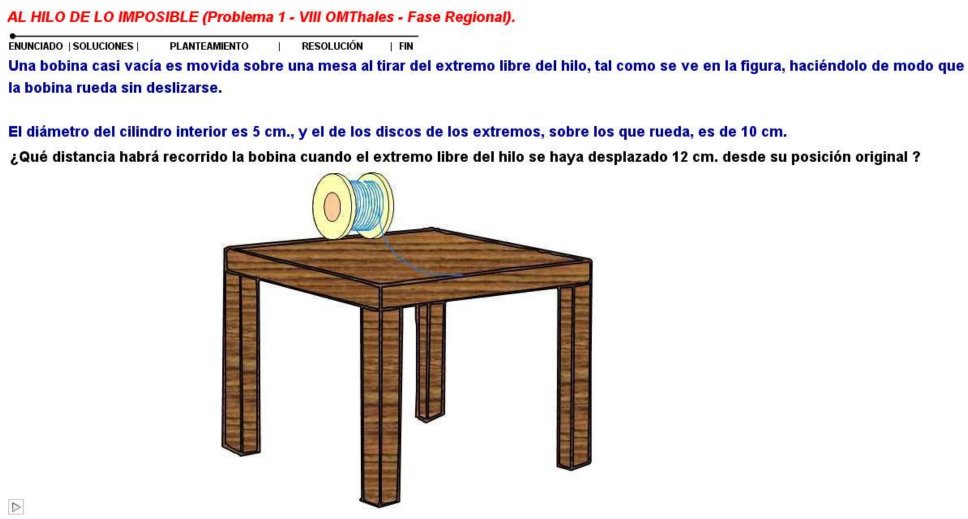

Figura 3: Enunciado de un problema en la primera etapa de la presentación secuencial.

Dependiendo del tipo de problema puede ser recomendable otra forma de subdivisión (véase el ejemplo en Fig. 4) e incluso la incorporación de un botón de inicio y parada de animación (*play* y *pause*). La combinación de este último con el intervalo de definición del parámetro del deslizador permite determinar la velocidad de la animación.

Figura 4: Barra de navegación constituida por un deslizador.

2.2 Elección de la solución.

La segunda etapa de la presentación sería posibilitar al usuario elegir una de las posibles soluciones del problema. Muchos de los problemas de la olimpiada pueden resolverse de forma inmediata con Geogebra, sin necesidad de utilizar construcciones algorítmicas ni conceptos matemáticos. Así por ejemplo, en los problemas de áreas, basta con construir la figura en cuestión y hacer uso de la herramienta área. De esta forma la dificultad del problema no estriba tanto en el cálculo del área pedido, como en la construcción de la figura. Si bien esta construcción puede ser interesante y abre nuevas posibilidades, no habría que descartar en ningún caso otras formas de resolución que impliquen los conceptos solicitados en el problema. Dentro de estas formas de resolución se pueden dar a su vez varias alternativas, para cuya elección sí parece recomendable hacer uso de las casillas de control de Geogebra, puesto que su valor booleano verdadero/falso (según esté activada o no la casilla, respectivamente), puede utilizarse nuevamente como condición para exponer un determinado objeto.

Figura 5: Pantalla de selección de solución.

Dado que Geogebra no permite casillas de control de selección única (*radio buttons*), habría que analizar los mencionados valores booleanos, para obligar al usuario a marcar una única casilla. De esta forma, al pasar a una etapa posterior mediante el deslizador, se puede incorporar un mensaje de error en la presentación.

Figura 6: Pantalla de error de selección de solución.

2.3 Planteamiento y resolución.

Es en estas dos etapas cuando pueden aplicarse explícitamente las herramientas algebraicas y geométricas del programa. En concreto se plantean dos opciones de presentaciones:

- **Opción 1**: Simplemente de presentación de la solución del problema: animaciones, figuras, ayudas, comentarios, etc. (Ver Fig. 7).
- **Opción 2**: Permitiendo que el alumnado interactúe con el programa, resolviendo el problema con las herramientas disponibles, a partir de una solución guiada y constructiva del mismo, que puede usarse además para el aprendizaje del programa en sí, así como para comprobar explícitamente soluciones obtenidas por otros métodos. (Ver Fig. 8).

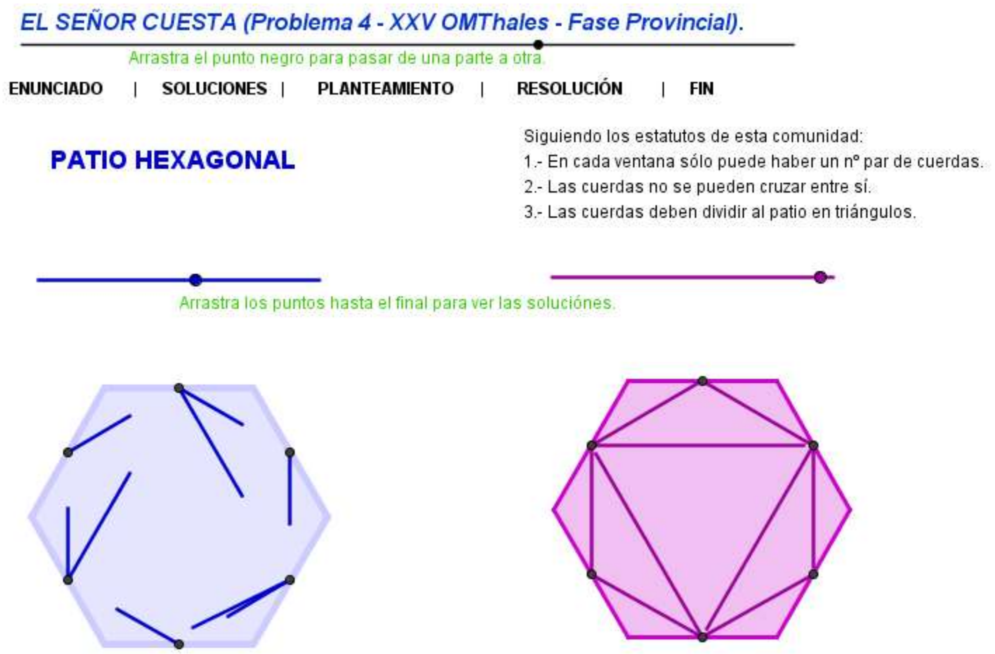

Figura 7: Ejemplo de la Opción 1.

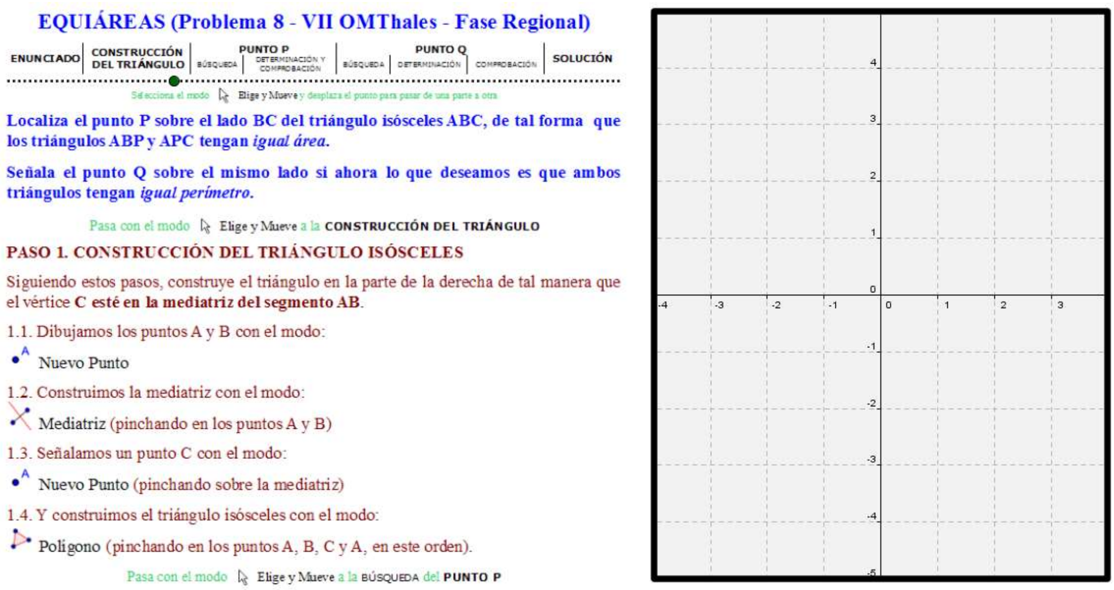

Figura 8: Ejemplo de la Opción 2.

En el caso de la primera opción, una de las características más atractivas de los programas de presentaciones secuenciales es que ofrecen una interfaz gráfica para incorporar animaciones como rotaciones, desplazamientos,... Si bien, a priori, Geogebra no dispone de esta opción, se pueden utilizar los deslizadores para conseguir efectos análogos. Así por ejemplo en el caso del problema "*Gira el cuadrado*" de la novena fase provincial, se puede conseguir el movimiento de rotación de un cuadrado respecto a otro dado fijando un deslizador con parámetro el ángulo de giro, como se muestra en la Fig. 9. Moviendo el deslizador se puede conseguir además el área de la intersección de ambos cuadrados, resolviendo así la cuestión planteada en el problema y aportando nuevos elementos no disponibles en un programa de presentación secuencial.

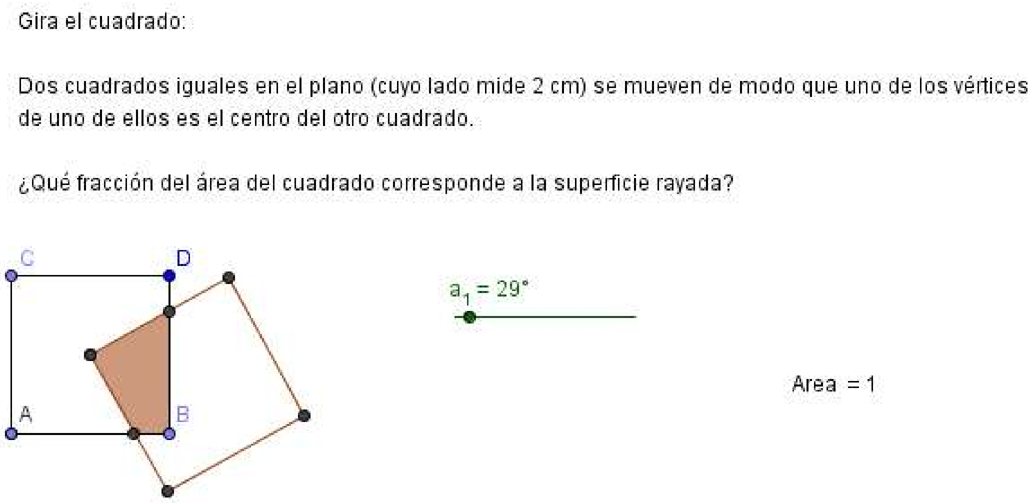

Figura 9: Ejemplo de deslizador para movimiento de rotación.

En la segunda opción, el inconveniente con el que nos encontramos es que sólo existe una única pantalla de trabajo en la que poder abordar, tanto la explicación del modo de resolución, como el trabajo del alumnado. Para diferenciar un área de trabajo específico, se puede crear un cuadro en el que se coloree de blanco su parte externa, de tal forma que pueda colocarse el mismo en una capa intermedia entre los textos de comentarios y la pantalla de trabajo en sí (ver Fig. 8).

Además de crear problemas de espacio, el hecho de que sólo exista una única pantalla de trabajo, con un único sistema de referencia asociado, dificulta el dar un ejemplo muestra en aquellos casos en los que se necesita trabajar con unas coordenadas específicas. Si bien esta situación se puede solventar fácilmente abriendo una nueva ventana de trabajo, esta opción no resulta recomendable si atendemos a que lo que nos interesa es disponer de un entorno fluido en html. En este sentido, la versatilidad del programa a la hora de exportar trabajos en Java, posibilita como mejor solución la incorporación de dos ventanas de trabajo en la misma página web (ver Fig. 10).

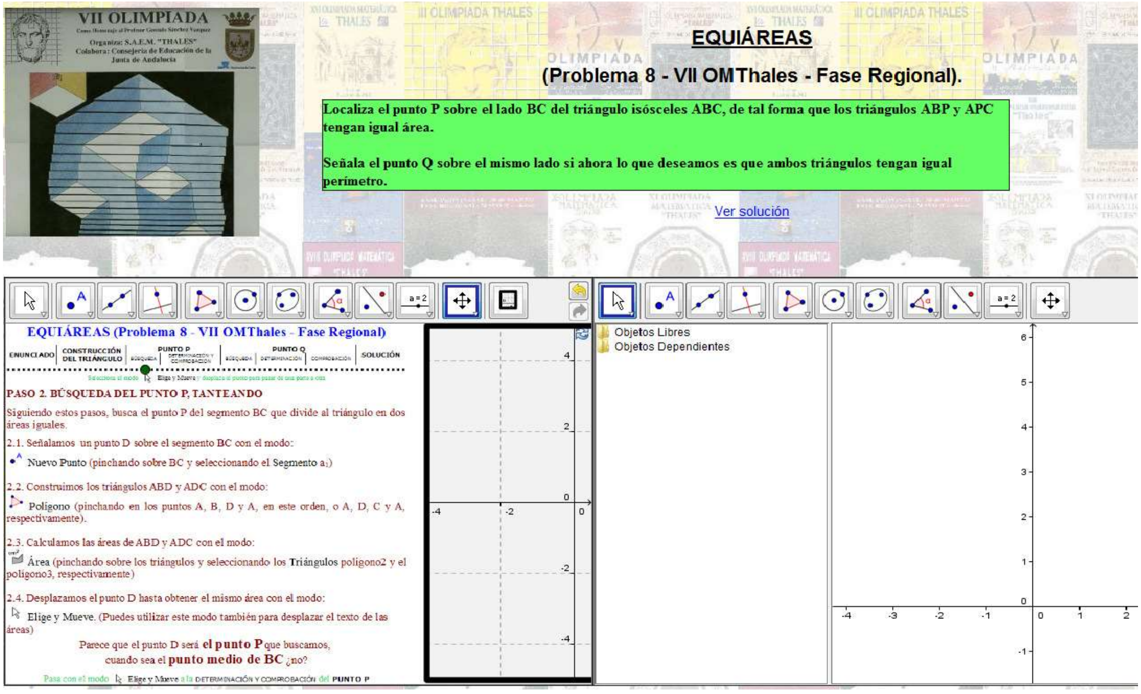

Figura 10: Ventanas simultáneas en una misma página web: una con comentarios y pasos a seguir y otra para trabajo del alumnado.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA.

Una vez planteado el formato a seguir, analizaremos a continuación una posible clasificación de los problemas olímpicos, con ejemplos concretos, a la hora de resolverlos en Geogebra. Atendiendo a lo visto hasta ahora, una clasificación general vendría dada separando aquellos problemas que pueden resolverse haciendo uso de Geogebra y aquéllos que no pueden resolverse usando el programa, aunque sí puede realizarse una presentación de su correspondiente resolución. Entre estos últimos se encuentra el mostrado en la Figura 7.

Centrándonos en aquellos problemas que pueden resolverse usando Geogebra, la clasificación propuesta es la siguiente:

3.1 Problemas geométricos.

Son los más acordes a la resolución en Geogebra. Dependiendo de su dificultad, pueden clasificarse en:

A) Problemas de resolución inmediata.

Problema 1. XIX Fase provincial (2003): "*Un cuadrado de papel de 20 cm de lado tiene una cara de color azul y la otra cara de color rojo. Dividimos cada lado en cuatro partes iguales y doblamos las puntas del cuadrado por los* *segmentos hasta obtener la situación de la Fig. 11. Pues bien, calcula la superficie del cuadrado azul y la del cuadrado ABCD que lo contiene."*

Para resolver este problema aplicando Geogebra, se construye paso a paso el cuadrado como se indica en la Fig. 11, marcando el modo área en el cuadrado azul central.

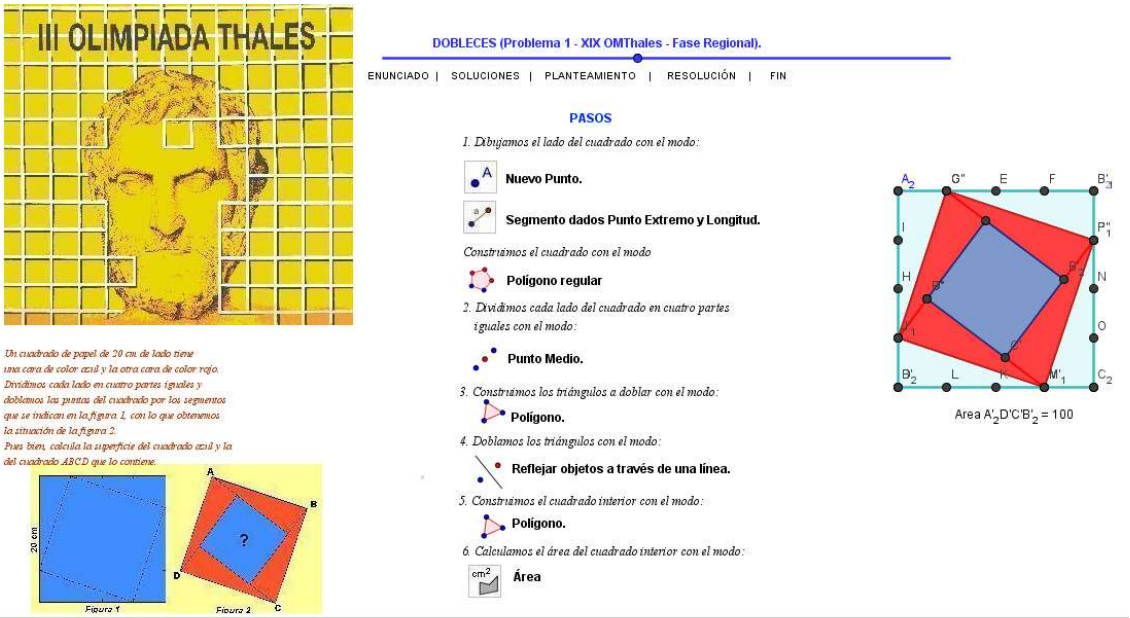

Figura 11: Ejemplo resolución del Problema 1. XIX Fase provincial (2003).

B) <u>Problemas de resolución no inmediata</u>.

<u>Problema 8. III Fase regional (1987):</u> *"En una corona circular, una cuerda de la circunferencia exterior que es tangente a la circunferencia interior, mide 20 cm. Calcula el área de la corona circular."*

Para resolver este problema aplicando Geogebra, se construye paso a paso la corona como se indica en la Fig. 12.

Figura 12: Ejemplo resolución del Problema 8. III Fase regional (1987).

Si se crea un deslizador para la longitud de la cuerda, se observa que se puede generalizar el concepto. Así, en la construcción dada en la Fig. 13, si se desplaza el deslizador para modificar la longitud de la cuerda dada y se mueve el punto B, se comprueba que el área de la corona permanece invariante.

Figura 13: Generalización del Problema 8. III Fase regional (1987).

3.2 Problemas no geométricos.

En las distintas fases de la Olimpiada Matemática Thales han sido propuestos una gran diversidad de problemas de carácter no geométrico. Cabe observar el interés que conlleva analizar cuáles de estos problemas pueden ser resueltos haciendo uso de

Geogebra, atendiendo además a su temática y dificultad. Se engloban en este conjunto aquellos problemas asociados a: Álgebra, Análisis, Estadística, Probabilidad, Lógica, etc. Análogamente al caso anterior, dependiendo de su dificultad, este tipo de problemas puede clasificarse en:

A) Problemas de resolución inmediata.

Problema 5. XVII Fase provincial (2001): *"Una muchacha bastante ajetreada que vive en la planta alta de un edificio, sube las escaleras de 2 en 2 y las baja de 3 en 3, con lo que en total da 100 saltos. ¿Cuántos escalones tiene la escalera?".*

Tras su planteamiento, basta introducir en Entrada: $x/2 + x/3 = 100$, donde x es el número de escalones. Geogebra indica directamente que $x=120$.

B) Problemas de resolución no inmediata.

Problema 3. IV Fase provincial (1988): *"En un congreso de matemáticos y matemáticas, mientras se celebraba una aburrida conferencia, uno de los asistentes se dio cuenta de que todos los allí reunidos pertenecían a cuatro países diferentes: España, Portugal, Francia e Italia. No teniendo nada mejor que hacer establece las ecuaciones siguientes y se las pasa a su vecino para ver si éste es capaz de descubrir cuántas son las personas de cada país. ¿Podrías ayudarle?*

$E + P + F = 56$
$I + F + P = 84$
$F + I + E = 88$
$I + E + P = 96$*"*

Para resolver este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, una de dichas incóginatas (por ejemplo, P) se considera un deslizador, otra (por ejemplo, E) se deja como variable x y las otras dos se toman como funciones de las anteriores:

Ejemplo: $F(x)=56-x-P$.

$I(x)=84-F(x)-P$.

La parte no nula de las otras dos ecuaciones, transformadas en homogéneas, servirá para resolver el sistema:

Ejemplo: $a(x)=F(x)+I(x)+x-88$.

$b(x)=I(x)+x+P-96$.

En concreto, para resolver el sistema bastará mover el deslizador hasta el punto en que las raíces de ambas funciones coincidan (véase Fig. 14).

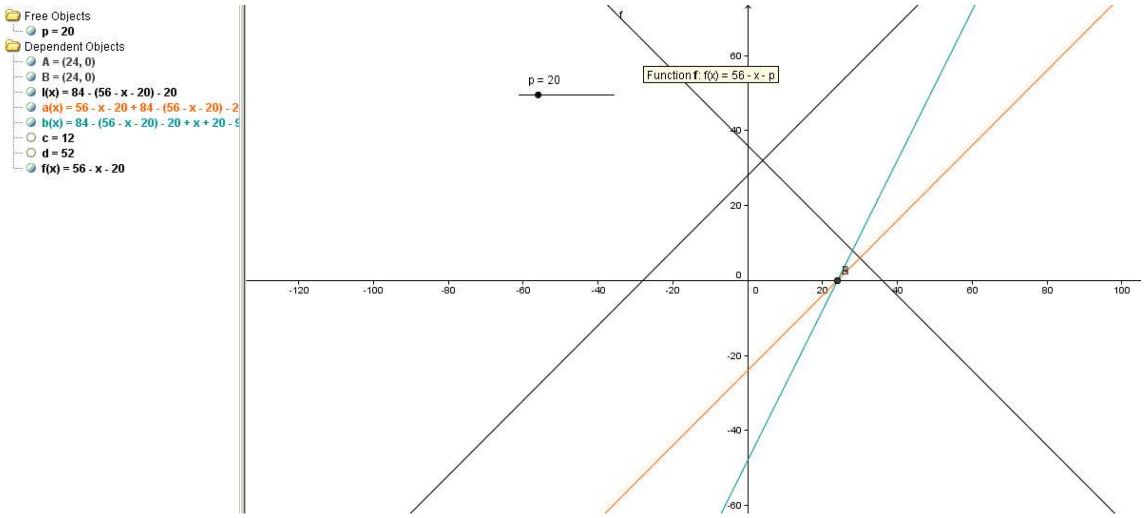

Figura 14: Ejemplo resolución del Problema 3. IV Fase provincial (1988).

3. CONCLUSIONES FINALES.

En el presente trabajo, se ha comprobado que Geogebra permite la presentación secuencial de resoluciones de problemas utilizando un deslizador como barra de navegación, para moverse por la presentación, y las casillas de control para optar a distintas alternativas. Aún más, permite que el alumno interactúe con el programa, resolviendo el problema con las herramientas disponibles, a partir de una solución guiada y constructiva del mismo, que puede usarse además para el aprendizaje del programa en sí, así como para comprobar explícitamente soluciones obtenidas por otros métodos. Estas presentaciones visuales y dinámicas permiten que el alumno vaya aprendiendo a su ritmo y además nos ofrece nuevas estrategias para abordar la resolución de problemas gracias a las herramientas que posee Geogebra.

Por otro lado, si bien la clasificación que parece natural en un principio es diferenciar entre problemas geométricos y no geométricos, existen problemas no geométricos en los que el uso de Geogebra permite resolverlos de una forma que sería imposible sin las herramientas dinámicas.

No obstante, es cierto que, dado que no todos los problemas pueden resolverse usando Geogebra, el esfuerzo necesario a la hora de construir una presentación secuencial de éstos, no llega a ser en general tan rentable en comparación con un programa específico de presentaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Berenguer, L. et al. (ed.) (1995). *Problemas propuestos en los 10 años de la Olimpiada Matemática Thales*. S.A.E.M. Thales. ISBN 84-920056-1-0.

[2] Anillo, F. J. et al. (2002). *"Tratamiento interactivo de la resolución de problemas: 18 años de Olimpiadas Matemáticas Thales"*. S.A.E.M. Thales. ISBN

[3] Anillo, F. J. et al. (2004). *"Tratamiento interactivo de la resolución de problemas: 20 años de Olimpiadas Matemáticas Thales"*. S.A.E.M. Thales. ISBN

[4] Anillo, F. J. et al. (2009). *"25 Olimpiadas Matemáticas Thales. Situaciones problemáticas"*. S.A.E.M. Thales. ISBN 978-84-935760-5-9.