

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

Determinación de la eficiencia y procedimiento de selección de fondos de inversión de renta variable o mixta

Autor: Bruno Moro Barroso

Tutor: Gabriel Villa Caro

**Dep. Organización Industrial y Gestión de
Empresas I**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2017



Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales

**Determinación de la eficiencia y procedimiento de selección de fondos
de inversión de renta variable o mixta**

Autor:

Bruno Moro Barroso

Tutor:

Gabriel Villa Caro

Profesor titular

Dep. Organización Industrial y Gestión de Empresas I

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2017

Trabajo Fin de Grado: “Determinación de la eficiencia y procedimiento de selección de fondos de inversión de renta variable o mixta”

Autor: Bruno Moro Barroso

Tutor: Gabriel Villa Caro

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2017

El Secretario del Tribunal

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	11
ÍNDICE DE TABLAS	13
1. OBJETO DEL PROYECTO	15
<u>DESARROLLO CONCEPTUAL</u>	
2. SOBRE LOS FONDOS DE INVERSIÓN	18
2.1. Breve introducción: ¿qué es un fondo de inversión?	18
2.2. Particularidades y elementos de un fondo	19
2.2.1. Partícipes	19
2.2.2. Valor liquidativo	19
2.2.3. Tamaño de un fondo de inversión	19
2.2.4. Comisiones	19
2.2.5. Inversión mínima inicial	20
2.3. Clasificación de los fondos de inversión	21
2.4. Fondos de inversión. Ventajas e inconvenientes	22
2.5. Criterios generales de análisis de los fondos	23
2.5.1. Rentabilidad anualizada a “N” años	24
2.5.2. Volatilidad	24
2.5.3. Benchmark	24
2.5.4. Beta	25
2.5.5. Alfa	25
2.5.6. Correlación	25
2.5.7. Tracking error	26
2.5.8. Índice de Sharpe	27
2.5.9. Índice de Treynor	27
2.5.10. Índice de Información	28
3. ANÁLISIS POR ENVOLTURA DE DATOS (DEA)	29
3.1. Breve introducción	29
3.2. Tecnología y orientación en DEA	30
3.3. Modelos básicos DEA	32
3.3.1. Modelos de retorno de escala constante	32
3.3.1.1. Modelo RATIO	32

3.3.1.2.	Modelo CCR-Input	33
3.3.1.3.	Modelo CCR-Output	34
3.3.2.	Modelos de retorno de escala variable	35
3.3.2.1.	Modelo BCC-Input	35
3.3.2.2.	Modelo BCC- Output	36
3.3.3.	Modelo con entradas y salidas no discrecionales	36
4.	LÓGICA DIFUSA APLICADA A MODELOS DEA	37
4.1.	Conceptos básicos de lógica difusa.	37
4.1.1.	Conjuntos difusos y funciones de pertenencia	37
4.1.2.	Variables lingüísticas	39
4.2.	Aplicaciones de la lógica difusa	39
4.3.	Variables no monótonas	40
4.4.	Adaptación de las variables no monótonas al DEA	40
4.4.1.	Funciones de pertenencia para las entradas	41
4.4.2.	Funciones de pertenencia para las salidas	41
4.4.3.	Funciones de pertenencia para las variables no monótonas	42
4.5.	Fuzzy DEA y DEA con variables no monótonas	43
4.6.	Construcción de un modelo de retorno de escala constante con variables no monótonas	44
4.6.1.	Notación	44
4.6.1.1.	Índices	44
4.6.1.2.	Datos	44
4.6.1.3.	Variables	45
4.6.2.	Descripción matemática del modelo DEA con variables no monótonas	46
4.6.3.	Explicación del modelo	47

APLICACIÓN: DETERMINACIÓN Y SELECCIÓN DE FONDOS DE INVERSIÓN EFICIENTES

5.	CONSTRUCCIÓN DEL MODELO TEÓRICO Y MATEMÁTICO DEL PROBLEMA USANDO DEA	53
5.1.	Enfoque del problema	53
5.2.	Persistencia de resultados en los fondos de inversión	54
5.3.	Consideraciones sobre los datos	55
5.3.1.	Tratamiento de los datos	55
5.3.2.	Categorías de fondo empleadas	55
5.4.	Consideraciones sobre las variables	56
5.4.1.	Variables de entrada	56
5.4.2.	Variables de salida	57
5.4.3.	Variables no monótonas	59
5.4.4.	Asignación justificada de pesos a las variables	60

5.4.5. Variables no incluidas en el modelo	62
5.5. Desarrollo del modelo de determinación de fondos eficientes	63
5.5.1. Modelo teórico	63
5.5.2. Modelo Matemático	64
6. ANÁLISIS DE RESULTADOS	65
6.1. Procesamiento de los resultados obtenidos. Eficiencia	65
6.2. Observaciones generales	67
6.3. Análisis de las funciones de pertenencia. Dispersión	67
6.4. Análisis de las ineficiencias por variables	69
6.5. Análisis del benchmark	72
6.6. Análisis de sensibilidad de la variable no monótona	74
6.7. Comparativa con VRS. Eficiencia de escala	75
7. PRIORIZACIÓN DE LOS FONDOS DE INVERSIÓN	77
7.1. Introducción y objetivos	77
7.2. Breve explicación del procedimiento AHP	78
7.2.1. Jerarquía	78
7.2.2. Importancias relativas de los criterios y de las alternativas	78
7.3. Resultado del AHP y análisis	80
8. RESUMEN Y CONCLUSIONES	83
9. BIBLIOGRAFÍA	85
ANEXOS	88
Anexo I: Proceso de Análisis Jerárquico (AHP)	89
Anexo II: Particularización del modelo matemático	93
Anexo III: Correspondencia entre Nº de DMU y fondos de inversión	98
Anexo IV: Datos de DMUs escalados positivamente	99
Anexo V: Funciones de pertenencia dato	103
Anexo VI: Solución CRS- Variables objetivo	107
Anexo VII: Solución CRS-Funciones de pertenencia objetivo	111
Anexo VIII: Solución CRS- Eficiencias	115
Anexo IX: Solución VRS- Variables objetivo	119
Anexo X: Solución VRS- Eficiencias	123

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig.1: Tracking error vs índice de referencia	26
Fig.2: Tecnología CRS para el caso de una entrada y una salida	30
Fig.3: Tecnología VRS para el caso de una entrada y una salida	31
Fig.4: Función de pertenencia en "L"	41
Fig.5: Función de pertenencia "Gamma"	41
Fig. 6: Función de pertenencia "triangular"	42
Fig. 7: Función de pertenencia "trapecio"	42
Fig.8: Relación entre entrada objetivo y su correspondiente función de pertenencia objetivo	48
Fig.9: Relación entre salida objetivo y su correspondiente función de pertenencia objetivo	49
Fig.10: Relación entre variable no monótona objetivo y su correspondiente función de pertenencia objetivo	50
Fig. 11: Distribución de pesos por variables	61
Fig.12: Modelo teórico del modelo DEA de selección de fondos eficientes	63
Fig.13: Dispersión de las funciones de pertenencia correspondientes a la salida "Rendimiento a 6 meses"	68
Fig. 14: Dispersión de las funciones de pertenencia correspondientes a la salida "Alfa"	68
Fig.15: Ineficiencia acumulada ponderada por cada variable	69

Fig. 16: Composición de la función de pertenencia objetivo de cada DMU para la salida “Treynor”	70
Fig.17: Composición de la pertenencia objetivo de la DMU 100 para cada variable	71
Fig.18: Composición de la pertenencia objetivo de la DMU 25 para cada variable	71
Fig.19: Distribución de proyecciones sobre las DMUs eficientes	72
Fig.20: Funciones de pertenencia por variables de las DMUs 22, 82, 79 y comparación con la media	73
Fig.21: Jerarquía AHP	78

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Resultados del análisis de sensibilidad de la variable no monótona	74
Tabla 2: Comparativa de eficiencias de las tecnologías CRS y VRS.	
Eficiencias de escala	76
Tabla 3: Pesos de las variables del DEA	79
Tabla 4: Priorización de los fondos de inversión eficientes aplicando AHP	81
Tabla 5: Análisis de las funciones de pertenencia de los 5 primeros fondos de inversión	81
Tabla 6: Abreviatura de las variables del DEA	89
Tabla 7: Escala de Saaty	90
Tabla 8: Índice de consistencia aleatorio (ICA)	92

1. OBJETO DEL PROYECTO

Por falta de tiempo, de conocimientos o por gozar de las ventajas fiscales, invertir en un fondo de inversión es a menudo más conveniente que la inversión directa.

Sin embargo un inversor particular puede llegar a tener verdaderos problemas a la hora de contratar uno o varios fondos de inversión que se adapten a su perfil: la oferta de fondos de inversión es muy amplia, existe un gran número de criterios de bondad de cierta dificultad conceptual con los que el inversor particular no suele estar familiarizado y por último los intereses de las entidades financieras no tienen por qué coincidir con los del decisor, por lo que las recomendaciones y la información suministrada por las entidades financieras pueden llegar a considerarse poco fiables.

Además los fondos de inversión buscan componer una cartera lo más diversificada posible, formada por acciones y otros productos financieros. Con ello se pretende el doble objetivo de aumentar la rentabilidad de la inversión al tiempo que se reduce el riesgo de la misma, puesto que posibles caídas en un sector concreto sólo afectaría a una parte de la inversión.

Por tanto el objetivo del proyecto es determinar, a partir los criterios de bonanza, qué fondos de inversión son eficientes y seleccionar uno de ellos que se adapte al perfil del decisor, o al menos establecer una cierta priorización entre dichos fondos.

Los datos reales de fondos de inversión necesarios para el estudio se obtendrán de la Organización de Consumidores y Usuarios (OCU), a fecha del 2/12/2016.

La metodología del proyecto contempla dos fases diferenciadas:

En primer lugar se aplicará el Análisis por Envoltura de Datos (DEA) a todos los fondos de inversión a fin de obtener los “K” fondos de inversión más eficientes para el inversor en función de las características técnicas y otros criterios de bonanza de los mismos. Para ello será necesario incorporar al modelo DEA algunos conceptos y aplicaciones propias de la lógica difusa, tales como las funciones de pertenencia.

La segunda fase consiste en la aplicación de optimización multicriterio (AHP) al subconjunto de “K” fondos de inversión eficientes, de forma que se obtenga una priorización entre los fondos de inversión eficientes, todo ello adaptado a las necesidades de un decisor concreto.

DESARROLLO CONCEPTUAL

2. SOBRE LOS FONDOS DE INVERSIÓN

Existe una serie de cuestiones y características sobre los fondos de inversión que son necesarias describir para que el lector que no esté habituado a trabajar con estos conceptos pueda seguir los razonamientos y argumentaciones que se realizarán posteriormente. El objeto de este capítulo es, por tanto, realizar un esbozo general del concepto de fondo de inversión, de sus características principales y del interés que despierta este modelo de inversión, sin entrar en detalles excesivamente técnicos.

2.1. BREVE INTRODUCCIÓN: ¿QUÉ ES UN FONDO DE INVERSIÓN?

Según la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV) un fondo de inversión es un patrimonio formado por las aportaciones de un número variable de ahorradores denominados partícipes. En ellos, una entidad denominada gestora invierte de forma conjunta estas aportaciones en diferentes activos financieros (renta fija, renta variable, derivados o cualquier combinación de estos) siguiendo unas pautas fijadas de antemano.

Cada inversor (partícipe) es propietario de una parte del patrimonio del fondo en proporción al valor de sus aportaciones. El resultado de la inversión es decir, los aumentos o disminuciones del valor del patrimonio, se atribuye proporcionalmente a los partícipes. [1]

El valor de la participación, denominado valor liquidativo, fluctúa constantemente en función de la cotización de los activos que componen el fondo de inversión.

Todo ello está constantemente supervisado por la CNMV, que es el órgano responsable de vigilar la estabilidad del sistema financiero y encargado de la protección de los inversores.

2.2. PARTICULARIDADES Y ELEMENTOS DE UN FONDO

2.2.1. PARTÍCIPIES:

Los partícipes de un fondo de inversión son aquellas personas que, mediante aportaciones de capital al patrimonio del fondo, obtienen una participación del mismo. Pueden entrar en el fondo en cualquier momento, siempre que inviertan una cantidad mayor a la inversión mínima inicial. Del mismo modo, también pueden salirse cuando deseen mediante la venta o traspaso de las participaciones que poseen.

2.2.2. VALOR LIQUIDATIVO (VL):

El valor liquidativo (VL) es el precio de cada participación del fondo en cuestión en un instante determinado. Se calcula sumando el valor de todos los activos del fondo, restándole los gastos y dividiendo esa cantidad entre el número de participaciones:

$$VL = \frac{\textit{Patrimonio Neto}}{\textit{N}^{\circ} \textit{ de Participaciones}}$$

La entidad gestora tiene la obligación de calcularlo con los precios de cierre y hacerlo público diariamente, de forma que permite al inversor seguir la evolución de su inversión en todo momento. Un detalle importante a fin de realizar cálculos es que las comisiones de gestión y de depósito son implícitas, es decir, se descuentan diariamente del valor liquidativo.

2.2.3. TAMAÑO DEL FONDO DE INVERSIÓN:

El tamaño o patrimonio de un fondo de inversión es la cantidad de dinero que lo forma, esté invertido o no en activos financieros. Cabe diferenciar el concepto de tamaño con el de cartera de un fondo inversión, siendo esta última el conjunto de títulos que posee dicho fondo.

2.2.4. COMISIONES:

Según el Banco de España y la CNMV [2] existen cinco tipos de comisiones que se pueden aplicar en un fondo de inversión:

- *Comisión de suscripción:* Es la que cobra la gestora individualmente a cada partícipe en el momento de invertir en el fondo, por lo que es una comisión explícita. Se calcula como porcentaje del capital invertido. No puede superar el 5% del valor liquidativo de las participaciones suscritas.
- *Comisión de reembolso:* Es la que cobra la gestora individualmente a cada partícipe en el momento en que se deshace la inversión en el fondo, tanto por reembolso como por traspaso, por lo que es una comisión explícita. No puede superar el 5% del valor liquidativo de las participaciones reembolsadas.
- *Comisión de depósito:* Es la que cobran los depositarios al fondo de inversión por la administración y custodia de los valores que componen la cartera. Se devenga diariamente y es implícita; es decir, ya está deducida del valor liquidativo al que el partícipe suscribe o reembolsa participaciones.
- *Comisión anual de gestión:* Es la que cobra la sociedad gestora al fondo de inversión como remuneración por sus servicios. Se devenga diariamente y es implícita; es decir, ya está deducida del valor liquidativo al que el partícipe suscribe o reembolsa participaciones. Puede establecerse en función del patrimonio, de los rendimientos o de ambas variables (debe consultarse en el folleto la posibilidad de que se apliquen distintas comisiones en función de la permanencia u otros parámetros). Los límites máximos son: el 2,25% si se calcula sobre el patrimonio, el 18% si depende de los resultados, y en caso de que se empleen ambas magnitudes, no podrá exceder el 1,35% del patrimonio y el 9% de los resultados.
- *Comisión anual de gestión vinculada al rendimiento:* Tipo de comisión de gestión que se calcula sobre los rendimientos obtenidos por un fondo aplicando un porcentaje que puede llegar hasta el 18% del rendimiento del fondo.

2.2.5. INVERSIÓN MÍNIMA INICIAL:

La inversión mínima inicial es la cantidad necesaria para poder invertir por primera vez en un determinado fondo de inversión. Estas cantidades varían considerablemente en función del tipo o la política del fondo en cuestión, pudiéndose encontrar desde importes de acceso casi nulos equivalentes al precio de una participación (VL) hasta importes de acceso que pueden resultar enormes a ojos de inversores particulares.

2.3. CLASIFICACIÓN DE LOS FONDOS DE INVERSIÓN

Existen varios criterios para clasificar los fondos de inversión, pero el más habitual es el que se realiza según la vocación inversora del fondo, es decir, el tipo de activos financieros en los que el gestor invierte las aportaciones de los partícipes. Bajo este criterio se pueden distinguir [1] [3]:

- *Fondos monetarios*: son aquéllos que no se exponen a renta variable, riesgo de divisa y materias primas. Tienen como objetivo mantener el principal y obtener una rentabilidad acorde con los tipos del mercado monetario.
- *Fondos de renta fija*: se caracterizan por la ausencia de exposición a renta variable y por invertir la mayoría de su patrimonio en activos de renta fija, como obligaciones, bonos, letras, pagarés, etc.
- *Fondos de renta variable*: tienen una exposición mínima del 75% en renta variable. Suelen establecerse subcategorías según los mercados en los que invierta, los sectores de actividad u otras características de los valores.
- *Fondos mixtos*: invierten una parte de su patrimonio en activos de renta fija y parte en renta variable. Podemos encontrar fondos de renta fija mixta, cuya exposición máxima a renta variable es inferior al 30%, o fondos de renta variable mixta, con exposición a renta variable superior al 30% pero inferior al 75%.
- *Fondos de gestión pasiva*: consiste en replicar o reproducir un índice bursátil o financiero.
- *Fondos garantizados*: estos fondos aseguran la recuperación del capital inicialmente invertido más una rentabilidad, fija o variable, en una fecha futura determinada. La garantía sólo es efectiva en la fecha de vencimiento, de forma que si el inversor reembolsa antes de la fecha de vencimiento no se beneficiará de ella. Además es habitual que estos fondos tengan comisión de reembolso si el inversor vende sus participaciones antes del vencimiento de la garantía.
- *Fondos de retorno absoluto*: persiguen con su gestión, de forma no garantizada, un objetivo de rentabilidad consistente en el tiempo con un rango de volatilidad fijada de antemano. Un ejemplo son los Hedge funds.
- *Fondos globales*: no tienen definida con precisión su política de inversión. Tienen libertad para no fijar de antemano los porcentajes que van a invertir en renta fija o variable, la moneda en que estarán denominados los activos en los que se invierta o la distribución geográfica de la inversión. En esta categoría se pueden encontrar fondos con elevados niveles de riesgo.

- *Otros tipos de Instituciones de Inversión Colectiva*: es el caso de los fondos de inversión inmobiliaria (FII), sociedades de inversión mobiliaria (SICAV), fondos cotizados (ETF) o fondos de fondos de inversión libre (FFIL).

2.4. FONDOS DE INVERSIÓN. VENTAJAS E INCONVENIENTES

Los fondos de inversión nacieron como un instrumento financiero para que el pequeño inversor pudiera diversificar sus activos correctamente. Entre sus principales ventajas se encuentran:

- *Traspasos entre fondos*: la fiscalidad es una de las características más atractivas de los fondos de inversión, ya que el inversor no tiene que tributar hasta que se produzca la venta de las participaciones. Desde el año 2003 la legislación española permite realizar traspasos entre fondos sin pagar impuestos. Es en el instante del reembolso cuando la plusvalía se considera una ganancia patrimonial, permitiendo al inversor obtener un beneficio extra a través del denominado interés compuesto.
- *Diversificación*: tener una cartera correctamente diversificada es el objetivo de cualquier inversor, ya que se reduce el riesgo no sistemático de la inversión. Diversificar consiste en distribuir el capital entre varios activos diferentes de forma que posibles caídas en alguno de ellos se vea compensada con subidas en otros y el conjunto de la inversión asuma un menor riesgo. En el caso de los fondos de inversión se supone que esta diversificación ha sido llevada a cabo correctamente por parte de los gestores del fondo. Esto permite al inversor del fondo participar en la propiedad de una gran cantidad de activos que estarían fuera de su alcance si actuase como un inversor particular.
- *Gestión profesional*: en los fondos de inversión el inversor no se hace cargo personalmente de las operaciones financieras, sino que tiene un gestor profesional que se encarga de buscar las mejores oportunidades. Es por tanto un buen producto para inversores con poca disponibilidad de tiempo libre o escasos conocimientos financieros.
- *Seguimiento de resultados*: el valor liquidativo del fondo debe ser actualizado diariamente, de forma que el inversor puede conocer en todo momento cuál es la evolución de su inversión.
- *Diversidad de fondos*: o dicho de otra forma, existe un fondo para cada perfil de inversor. Los hay desde con importe de acceso bajos a elevados, de perfil de riesgo desde conservador a lo más arriesgado.

- *Escaso capital inicial:* en la mayoría de fondos de inversión el capital inicial no es muy elevado, lo que facilita el acceso a nuevos inversores.

Por otro lado también se pueden citar algunas desventajas de los fondos de inversión:

- *Dividendos:* la inmensa mayoría de fondos de inversión existentes en España son acumulativos, es decir, reinvierten los dividendos repartidos por las diversas acciones que lo componen sin permitir al inversor decidir si prefiere darle otra utilidad. Sin embargo los dividendos de las acciones que conforman la cartera de valores generan una renta periódica. El inversor tiene disponibilidad total sobre dicho efectivo sin necesidad de vender las acciones, por lo que puede decidir en qué emplearlo según le resulte más conveniente en cada momento. Cabe destacar que tras el pago del dividendo el precio de la cotización de la acción se reduce un importe aproximadamente equivalente al dividendo. Por otra parte en el caso de los fondos de inversión la única forma de conseguir una renta sería descapitalizando parte de la inversión mediante la venta de participaciones.
- *Comisiones:* Las comisiones de gestión de un fondo de inversión son mayores que las correspondientes de mantenimiento de una cartera de valores.
- *Peores rentabilidades que el benchmark:* analizando la persistencia de los resultados, diversos estudios han concluido que los fondos de inversión tienen dificultades para alcanzar la rentabilidad del benchmark.
- *Menor libertad de acción para el gestor:* el gestor tiene que invertir el dinero que depositan los inversores en el fondo o debe vender si éstos deciden retirar sus participaciones, aunque considere que no es un buen momento para ello. Además, dado el alto volumen de dinero que maneja, un gestor tarda mucho más en entrar o salir de una posición que un inversor particular, pudiendo conseguir peores precios para el conjunto de su portafolio.

2.5. CRITERIOS GENERALES DE ANÁLISIS DE LOS FONDOS

A la hora de elegir un fondo de inversión el decisor debe tener en cuenta, además de sus objetivos personales ligados a un determinado perfil de inversor, criterios objetivos y cuantitativos que permitan determinar la bonanza de un fondo en comparación con otro. A continuación se expondrán los más usados, junto con algunas características propias de los fondos que afectan a la rentabilidad o al riesgo.

2.5.1. RENTABILIDAD ANUALIZADA A “N” AÑOS:

Es la rentabilidad histórica del periodo comprendido desde N años atrás hasta la actualidad tras ser anualizada. Hay que ser precavidos, puesto que las rentabilidades históricas no aseguran las rentabilidades futuras. Sin embargo, y teniendo también en consideración el contexto económico, pueden ayudar en la elección del fondo. Para su cálculo se utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{Rentabilidad} = \frac{\text{Valor Liquidativo Final} - \text{Valor Liquidativo Inicial}}{\text{Valor Liquidativo Final}} \times 100$$

2.5.2. VOLATILIDAD:

La volatilidad nos indica si históricamente los valores liquidativos del fondo han experimentado variaciones importantes o si, por el contrario, han evolucionado de manera estable. Un fondo muy volátil tiene más riesgo porque es difícil prever si el valor liquidativo va a subir o a bajar, por lo que, en el momento del reembolso, lo mismo podría obtenerse ganancias significativas que pérdidas importantes [1].

La volatilidad (o desviación típica) es, junto con la rentabilidad, uno de los datos más importantes para el análisis de fondos de inversión, ya que indica el riesgo que ha soportado históricamente un fondo de inversión. Según la teoría de selección de carteras de Markowitz el inversor tiene un comportamiento racional a la hora de seleccionar una cartera de inversión, deseando la rentabilidad y rechazando el riesgo.

Esta teoría toma en consideración el retorno esperado a largo plazo y la volatilidad esperada a corto plazo [4]. Dicha volatilidad o desviación típica está calculada como:

$$\text{Desviación Típica} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(\text{Rentabilidad}(i) - \text{Rentabilidad Promedio})^2}{N}}$$

2.5.3. BENCHMARK:

El benchmark es un punto de referencia utilizado para medir el rendimiento de una inversión. Se trata de un indicador financiero utilizado como herramienta de comparación para evaluar el rendimiento de una inversión [5].

Cada fondo de inversión utilizará como referencia para compararse un benchmark distinto en función de su objetivo de inversión. De esta forma, el inversor puede saber si el gestor ha obtenido rentabilidad gracias a su habilidad de inversión o debido al mercado.

2.5.4. BETA:

El coeficiente Beta cuantifica cómo se ve afectado un fondo ante variaciones del mercado. Es por tanto una medida del riesgo sistémico, puesto que compara las oscilaciones de un valor bursátil con las del mercado en que se negocia dicho activo. En cuanto a su interpretación, se pueden dar tres casos:

- $\beta < 1$: significa que el valor que estamos analizando es menos volátil que el mercado con el que se compara. Si el mercado está en situación alcista se obtendrá un beneficio menor, pero si está en situación bajista las pérdidas también serán menores.
- $\beta = 1$: quiere decir que el fondo replica la volatilidad del mercado.
- $\beta > 1$: en esta situación el fondo tiene mayor riesgo que el mercado, exagerando sus movimientos. De esta forma, si el mercado está en situación alcista la rentabilidad será mucho mayor pero en situación bajista las pérdidas también se verán aumentadas.

Hay que hacer hincapié en que la beta únicamente valora la parte de la rentabilidad del fondo de inversión que tiene correlación con el benchmark. Esto implica que si comparamos la rentabilidad real de dicho fondo con la rentabilidad calculada a partir del coeficiente beta, los resultados pueden variar sensiblemente.

2.5.5. ALFA:

Cuantifica el rendimiento de un fondo respecto a su índice de referencia ajustado por el riesgo, siendo este último medido por Beta. Cuando se genera alfa se dice que el gestor añade valor adicional con su gestión, ya que supera el rendimiento que se había previsto. Se pueden distinguir, por tanto, dos casos:

- $\alpha > 0$: significa que el rendimiento real obtenido por la inversión ha superado el rendimiento esperado y que por tanto el gestor ha añadido valor adicional.
- $\alpha < 0$: un alfa negativo implica lo contrario a lo anteriormente descrito.

$$\alpha = \text{Rendimiento Real} - \text{Rendimiento Previsto}$$

2.5.6. CORRELACIÓN:

El coeficiente de correlación es un coeficiente que determina cuanto explica un activo la variación de otro y varía entre 0 y 1. Cuanto más cercano sea a 1, más explicados están sus resultados por la variación de índice de referencia [6].

2.5.7. TRACKING ERROR:

Se define como el riesgo incremental de alejarse del benchmark e indica cuánto se ha desviado la rentabilidad respecto a su índice de referencia. Es decir, se utiliza para cuantificar la fluctuación del fondo de inversión respecto al benchmark o índice que está tratando de imitar o superar.

También se conoce como riesgo gestor, puesto que representa la libertad del gestor para invertir en activos fuera del índice de referencia.

El tracking error constituye una excelente medida de la calidad de la gestión de los fondos indexados, pues mide en qué grado el gestor del fondo se separa o aleja de su índice de referencia o benchmark [7].

Una interpretación correcta del tracking error permite conocer si la gestión del fondo se lleva a cabo de forma más activa o pasiva.

En la gestión pasiva el fondo replica la composición de activos del benchmark, de forma que el gestor se limita a mantener dicha composición en función de las nuevas suscripciones o reembolsos de participaciones que se produzcan. La rentabilidad que se espera en la gestión pasiva es la del índice menos las comisiones propias del fondo y su tracking error es pequeño, tanto más próximo a cero cuanto más se acerque al benchmark.

Por el contrario, en la gestión activa el gestor altera la composición de la cartera del fondo respecto al benchmark, buscando obtener un plus de rentabilidad sobre el mercado o menor volatilidad que este. El tracking error de los fondos activos suele ser elevado.

Estas diferencias se pueden apreciar gráficamente:

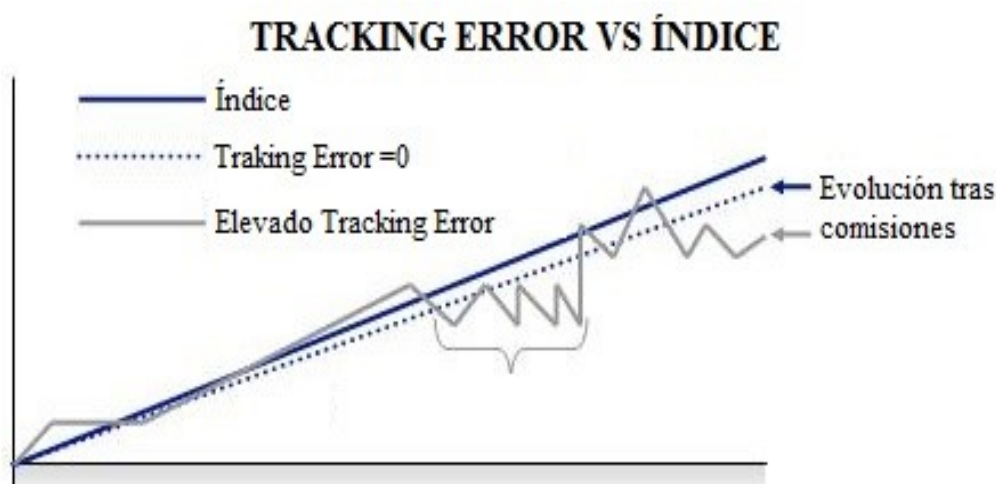


Fig.1: Tracking error vs índice de referencia - Fuente: Enciclopediafinanciera.com [8]

Existen numerosos artículos y estudios posicionándose a favor o en contra de cada una de estas filosofías de gestión. Por un lado los partidarios de la gestión pasiva abogan que suelen tener menores comisiones y que la gestión activa rara vez bate al índice de referencia. También dicen que algunos fondos justifican tener comisiones más elevadas argumentando que son de gestión activa cuando en realidad, encubiertamente, son de gestión pasiva. Por su parte, los partidarios de una filosofía de gestión activa abogan que con esta se justifican las comisiones que cobra el fondo, ya que el gestor se encuentra trabajando activamente en el fondo tratando de obtener mejores rentabilidades que el índice.

2.5.8. ÍNDICE DE SHARPE:

Mide el exceso de rendimiento de un fondo respecto a su tasa de interés libre de riesgo según la volatilidad que asume. Por tanto valora la consistencia de los resultados del fondo en función del riesgo asumido. Permite comparar fondos de distintas categorías, ya que no está ligado a un mercado en concreto. Como regla general se prefiere un fondo con mayor Sharpe, ya que permite obtener mayor retorno por unidad de riesgo.

$$Sharpe = \frac{\text{Rentabilidad Fondo} - \text{Rentabilidad Libre De Riesgo}}{\text{Desviación Típica Fondo}}$$

2.5.9. ÍNDICE DE TREYNOR:

El índice de Treynor es similar al de Sharpe, ya que ambos cuantifican el exceso de rendimiento de un fondo por unidad de riesgo y respecto a la tasa de interés libre de riesgo. La diferencia radica en que Treynor utiliza el coeficiente Beta como un buen indicador del riesgo sistemático o no diversificable de un fondo de inversión. Si el coeficiente Beta es alto entonces el riesgo asumido ante variaciones del mercado es mayor. Para compensarlo y que siga siendo un fondo atractivo para el inversor el rendimiento también debería crecer en la misma proporción.

$$Treynor = \frac{\text{Rentabilidad Fondo} - \text{Rentabilidad Libre De Riesgo}}{\text{Beta}}$$

2.5.10. ÍNDICE DE INFORMACIÓN:

Es otra variante del índice de Sharpe, diferenciándose de éste en que la rentabilidad obtenida se compara con un índice de referencia específico en lugar de con la tasa libre de riesgo. Hay que ser precavidos, puesto que el *índice de información* sólo indica si el riesgo asumido aporta una rentabilidad extra sobre la del benchmark, pero no valora si las rentabilidades del fondo y del índice son positivas o negativas.

$$\text{Índice de Información} = \frac{\text{Rentabilidad Fondo} - \text{Rentabilidad Benchmark}}{\text{Desviación Típica Fondo}}$$

3. ANÁLISIS POR ENVOLTURA DE DATOS (DEA)

3.1. BREVE INTRODUCCIÓN

En este capítulo se introducirán algunos conceptos generales que serán utilizados a lo largo de este TFG.

El Análisis por Envoltura de Datos (DEA por sus siglas en inglés) es una herramienta de programación lineal que mide la eficiencia relativa de unidades productivas que fabrican de forma similar, llamadas DMUs (Decision Making Unit). Para ello sólo es necesario conocer por una parte la cantidad que es consumida de cada recurso por cada DMU, y por otra, la cantidad de cada producto que es generado por cada unidad productiva [9].

En el trabajo seminal "*Measuring the efficiency of decision making units*" [10] se amplía y generaliza el concepto de eficiencia desarrollado por Farrell en 1957, aplicando programación lineal para estimar por primera vez una frontera de tecnología de producción empírica. Desde entonces, se han publicado una gran cantidad de artículos y libros en torno al DEA y ha sido aplicado con éxito a diversos y numerosos problemas.

El DEA es un método de optimización no paramétrico, por lo que no requiere ninguna hipótesis sobre la frontera de producción, sino que evalúa dicha frontera de forma empírica y cuantifica la eficiencia relativa cada unidad productiva respecto a las demás unidades observadas. Por tanto identifica las unidades con mejor comportamiento entre las que componen el estudio y expresa como combinación lineal de ellas al resto de unidades.

DEA simplifica el benchmarking (la comparación de ciertas unidades contra las unidades que obtienen mejores resultados en la misma área). Existen ocasiones en las que necesitamos comparar unidades productivas sobre las cuales podemos tener influencia en el desempeño de los mismos, y necesitamos conocer cuáles son las unidades que no son eficientes, no proporcionan la calidad esperada, y/o no son

efectivos, para identificar sus debilidades y poder tomar acción para elevar su nivel de eficiencia. Comúnmente tenemos toda la información disponible para todas las unidades productivas, pero no tenemos la forma de analizar la información sobre su desempeño y tampoco podemos compararla [11] .

3.2. TECNOLOGÍAS Y ORIENTACIÓN EN DEA

La metodología DEA requiere de un importante primer paso que sería la identificación de un conjunto de posibilidades de producción del problema, esto es, definir los posibles puntos de operación. Las dos alternativas más frecuentes son las tecnologías denominadas Retornos de Escala Constante (Constant Return to Scale, CRS) y Retornos de Escala Variable (Variable Return to Scale, VRS) [12].

Se dice que un modelo es de **Retorno de Escala Constante (CRS)** si en el análisis de una DMU se compara con las unidades que poseen la mayor eficiencia observada. En CRS se considera que cualquier unidad puede alcanzar la productividad de las eficientes, sea cual sea su tamaño, por lo que se calcula la eficiencia global. Las unidades admisibles serían las comprendidas por el siguiente conjunto:

$$T_{CRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}) : \exists \vec{\lambda} \geq 0, \quad \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \quad \vec{\lambda}Y \geq \vec{y}\}$$

Donde $\vec{\lambda}$ es un vector con tantas componentes como DMUs tenga el problema, mientras que X e Y son respectivamente las matrices de entrada y salidas con tantas filas como DMUs y tantas columnas como entradas o salidas haya respectivamente. Es decir, se considera como unidad posible cualquier combinación lineal de las DMUs existentes. La representación gráfica del conjunto CRS para una entrada y una salida es:

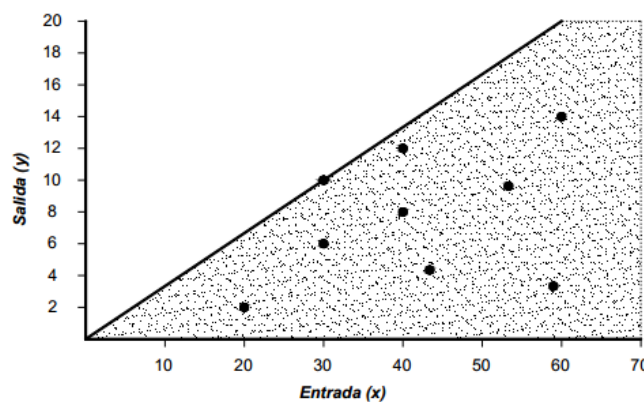


Fig.2: Tecnología CRS para el caso de una entrada y una salida

Fuente: Villa, G. *Análisis por Envoltura de Datos (DEA). Nuevos modelos y aplicaciones* [12]

Donde los puntos son las DMUs observadas en el problema, mientras que el conjunto T_{CRS} de puntos admisibles es la zona sombreada. Las líneas de puntos discontinuos representan que el conjunto se extiende hasta el infinito.

Por otra parte, se denomina **Retornos de Escala Variable (VRS)** si se considera en el análisis que determinadas unidades de tamaño diferente al de las eficientes pueden no ser capaces de alcanzar las productividades de estas. El análisis se realiza mediante la eficiencia técnica, comparando cada DMU con la de mayor productividad entre las de su tamaño. El conjunto de puntos admisibles del problema para la tecnología VRS será:

$$T_{VRS} = \{(\vec{x}, \vec{y}): \exists \vec{\lambda} \geq 0, \quad \vec{\lambda}X \leq \vec{x}; \quad \vec{\lambda}Y \geq \vec{y}; \quad \vec{\lambda}e^{-T} = 1 \}$$

La diferencia con el conjunto T_{CRS} es que la suma de las componentes del vector $\vec{\lambda}$ debe sumar la unidad. Esto quiere decir que, a diferencia de la tecnología CRS, en VRS sólo se consideran puntos posibles las combinaciones lineales convexas. Nuevamente, la representación gráfica del conjunto para el caso de una entrada y una salida sería:

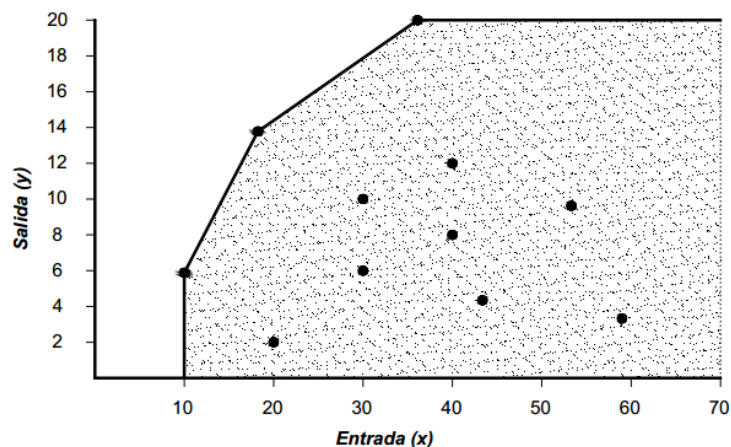


Fig.3: Tecnología VRS para el caso de una entrada y una salida

Fuente: Villa, G. *Análisis por Envoltura de Datos (DEA). Nuevos modelos y aplicaciones* [12]

Para la cual se realizan las mismas consideraciones que para la representación gráfica del CRS.

El concepto de Orientación del problema es bastante intuitivo y su correcta aplicación depende en gran medida del enfoque que tenga el problema que se quiera abordar.

La **Orientación de Entrada** (Input Orientation) se refiere al hecho de que una DMU alcance la productividad de la unidad de referencia a costa de reducir la cantidad de recursos que consume.

En la **Orientación de Salida** (Output Orientation) en cambio, para alcanzar la productividad de la unidad con la que se compara, se aumenta las salidas que produce una DMU.

3.3. MODELOS BÁSICOS DEA.

Existen multitud de modelos DEA, todos ellos con el mismo objeto: encontrar un punto admisible de mayor productividad con el que puedan compararse las diferentes DMUs del problema [12].

En este apartado únicamente se tratarán los modelos más básicos y no se va a demostrar el desarrollo de los modelos, sino que se expondrá el resultado final de los mismos.

3.3.1. MODELOS DE RETORNO DE ESCALA CONSTANTE

3.3.1.1. Modelo RATIO:

En el modelo RATIO [10] cada unidad productiva elige libremente los pesos que optimizan su eficiencia y una vez elegidos serán utilizados por el resto de DMUs. Es decir, se van a resolver “n” problemas de optimización (un problema para cada DMU existente).

$$MAX h_j = \left[\frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \right]$$

s.a:

$$\frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Donde la notación utilizada es:

j=1,2,..., n subíndice para las DMUs
i=1,2,..., m subíndice para las entradas

$k=1,2,\dots, s$	subíndice para las salidas
x_{ij}	Cantidad de entrada i consumida por DMU j
y_{kj}	Cantidad de salida k consumida por DMU j
ε	Constante no arquimediana
J	Variable que está en estudio

La primera restricción implica que ninguna DMU pueda tener eficiencia mayor que uno para unos pesos dados. Esto quiere decir que si una DMU no es eficiente, aun eligiendo los mejores pesos posibles, es porque existe otra DMU con los mismos pesos que ya es eficiente. Dicho de otra forma, una unidad productiva es ineficiente si al tratar de mejorar sus pesos para conseguir la eficiencia hace inadmisibles a al menos una de las otras DMUs.

Es trivial observar que el modelo Ratio es no lineal, motivo por el cual su resolución es compleja. De ahí surge la necesidad de transformar el modelo Ratio en un problema lineal que sea equivalente, sustituyendo los cocientes por expresiones lineales.

3.3.1.2. Modelo CCR-Input:

Las siglas CCR corresponden a las iniciales de los autores que lo propusieron: Charnes, Cooper y Rhodes [10].

A continuación se expondrá el modelo dual, conocido como forma envolvente, debido a que su utilización es más frecuente a la hora de analizar los resultados que el modelo primal.

$$MIN \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{ij} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kj} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

En la práctica este modelo se resuelve en dos fases secuenciales, de forma que la solución de la fase 1 se aplica en la fase 2. En ambas fases el conjunto de restricciones es el mismo, diferenciándose en la función objetivo:

- Fase 1 (radial): $MIN \theta_j$
- Fase 2 (rectangular): $MIN - [\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^-]$

Las funciones objetivo de los problemas primal y dual coinciden en el óptimo, por lo que:

$$h_j^* = \theta_j^* - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^{+*} + \sum_{i=1}^m h_i^{-*} \right] = \sum_{k=1}^s v_{kj}^* y_{kj}$$

En cuanto a la interpretación de las variables cabe observar que θ_j es la proporción de entradas virtuales que deben utilizarse para conseguir la eficiencia y λ_j mide la proximidad de la proyección resultante de cada DMU con las unidades eficientes de las que es combinación lineal.

3.3.1.3. Modelo CCR-Output:

En este modelo se realizan consideraciones análogas al modelo CCR-Input. El modelo en forma envolvente quedaría como:

$$MAX \gamma_j + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{ij} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \gamma_j y_{kj} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\gamma_j \text{ libre}$$

En este caso aparece la variable γ_j representando la amplificación radial que debe producirse en las salidas para proyectarse en la frontera eficiente.

3.3.2. MODELOS DE RETORNO DE ESCALA VARIABLE

3.3.2.1. Modelo BCC-Input:

El término BCC se corresponde con las iniciales de los autores que lo propusieron: Banker, Charnes y Cooper [13].

Para que el modelo considere retornos de escala variable y se compare exclusivamente con aquellas DMUs de su tamaño debe introducirse una restricción extra en el modelo CCR-Input.

$$\text{MIN } \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{ij} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kj} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\theta_j \text{ libre}$$

Al incluir que la suma de las componentes del vector λ_j se reduce la región factible, de manera que obliga a que la proyección de la DMU se efectúe sobre el hiperplano que forman las unidades más productivas de su tamaño.

3.3.2.2. Modelo BCC-Output:

Análogamente al Modelo BCC-Input se obtiene [13]:

$$MAX \gamma_j + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

s.a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{ij} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \gamma_j y_{kj} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\gamma_j \text{ libre}$$

3.3.3. MODELOS CON ENTRADAS Y SALIDAS NO DISCRECIONALES

Una entrada o salida se dice que es no discrecional si la unidad no tiene capacidad para variar su cantidad. Es decir, son entradas y salidas cuyo valor está fijado de forma externa a la DMU.

Para su inclusión en el modelo hay que subdividir los conjuntos de entradas y salidas:

$$I = I_D \cup I_{ND}$$

$$O = O_D \cup O_{ND}$$

Donde el subíndice D indica el conjunto discrecional y el subíndice ND indica el conjunto no discrecional.

A la hora de particularizar para cada modelo únicamente se incluyen en la función objetivo las entradas y salidas discretionales, mientras que en las restricciones se incluyen ambos conjuntos por separado y teniendo en cuenta que la variable radial (θ_j ó γ_j) no afecta a las entradas no discretionales.

4. LÓGICA DIFUSA APLICADA A MODELOS DEA

4.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA LÓGICA DIFUSA

La lógica difusa nació en 1965 en la Universidad de Berkeley (California) de la mano del ingeniero Lotfy A. Zadeh, al percatarse de lo que posteriormente llamó principio de incompatibilidad: “Conforme la complejidad de un sistema aumenta, nuestra capacidad para ser precisos y construir instrucciones sobre su comportamiento disminuye hasta el umbral más allá del cual, la precisión y el significado son características excluyentes”. Originó así el concepto de conjunto difuso, basándose en la idea de que el pensamiento humano se construye sobre etiquetas lingüísticas.

En el campo de la toma de decisiones existen hechos que no se pueden definir como totalmente verdaderos o totalmente falsos, sino que tienen un grado de verdad o falsedad que puede variar de 0 a 1. Precisamente, en la búsqueda de modelos que tengan en cuenta estas realidades surge la lógica difusa como un modelo matemático que permite utilizar conceptos relativos a la realidad siguiendo patrones de comportamiento similares al pensamiento humano [14].

Aplicado a la práctica, un concepto se puede modelar en función de su grado de veracidad o deseabilidad dentro de un rango de valores de tal forma que se pueda tratar información no exacta. En última instancia esto permite cuantificar conceptos específicos al tiempo que también permite establecer conjuntos de reglas para controlar acciones específicas con dicha información.

4.1.1. CONJUNTOS DIFUSOS Y FUNCIONES DE PERTENENCIA

Se define como un conjunto de objetos o elementos con grados de pertenencia, y se caracteriza a través una función de pertenencia $\mu_A(x)$, la cual asigna a cada elemento x un grado de pertenencia en el intervalo $[0,1]$, donde 0 representa la no pertenencia absoluta y 1 representa pertenencia absoluta. [15].

La forma más ilustrativa de explicar el concepto de pertenencia es a través de un ejemplo. En el caso del departamento de recursos humanos de una empresa se puede plantear el conjunto “Buenos expedientes” para seleccionar entre los candidatos un becario que incorporar a la plantilla, asumiendo que un expediente es bueno si su calificación media es igual o superior a un 8 sobre 10. Esto quedaría definido según la teoría clásica como:

$$Buenos_Expedientes = \{x \in Candidatos \mid Nota_Media(x) \geq 8\}$$

La función de pertenencia según la teoría clásica sería:

$$\mu_{Buenos_Expedientes}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Nota_Media(x) \geq 8 \\ 0 & \text{si } Nota_Media(x) < 8 \end{cases}$$

Sin embargo, un candidato que tenga un 7,9 de nota media puede resultar idóneo según otros criterios pero quedaría fuera del proceso de selección debido a la existencia de una frontera tan abrupta. Sin embargo, en el caso de definir el conjunto “Buenos expedientes” como difuso la función de pertenencia quedaría como:

$$\mu_{Buenos_Expedientes}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Nota_Media(x) \geq 8 \\ 1 - \frac{8 - Nota_Media(x)}{3} & \text{si } 5 < Nota_Media(x) < 8 \\ 0 & \text{si } Nota_Media(x) \leq 5 \end{cases}$$

El candidato del 7,9 anterior tendría un grado de pertenencia al conjunto “Buenos expedientes” del 0,9667 y podría llegar a acceder al puesto de becario.

Como resumen, destacar las principales diferencias entre conjuntos concretos y conjuntos difusos son las siguientes [16]:

- La función de pertenencia asociada a los conjuntos concretos sólo puede tener dos valores: 1 ó 0, mientras que los conjuntos difusos puede tener cualquier valor entre 0 y 1.
- Un elemento puede pertenecer (parcialmente) a un conjunto difuso y simultáneamente pertenecer (parcialmente) al complemento de ese conjunto. Lo anterior no es posible en los conjuntos concretos, ya que constituiría una violación al principio del tercer excluido.
- Las fronteras de un conjunto concreto son exactas, en tanto que las de un conjunto difuso son, precisamente, difusas, ya que existen elementos en las fronteras mismas, y estos elementos están a la vez dentro y fuera del conjunto.

4.1.2. VARIABLES LINGÜÍSTICAS:

El cubrimiento del dominio de una variable con varios conjuntos difusos y con la correspondiente interpretación semántica resulta en una *variable lingüística*, permitiendo el cálculo con palabras. Este tipo de representación es especialmente útil y apropiado para muchas aplicaciones del mundo real donde ciertos conceptos son inherentemente vagos en su naturaleza, debido a su medición imprecisa o a la subjetividad. La superposición de las funciones de pertenencia refleja la naturaleza imprecisa de los conceptos. Esta forma de definir conjuntos difusos sobre el dominio de la variable a menudo se conoce como *granulación* [17].

Siguiendo el ejemplo anterior se puede definir una variable lingüística denominada "*Expediente_Candidato*" que puede utilizar para describir a los que optan a la plaza de becario mediante los conjuntos "Buenos expedientes", "Expedientes aceptables" o "Expedientes deficientes".

4.2. APLICACIONES DE LA LÓGICA DIFUSA

Las aplicaciones de la lógica difusa en las más diversas ramas tecnológicas no han dejado de sucederse desde su aparición en la década de los 60. En el ámbito teórico se ha investigado en torno al álgebra difusa, funciones de pertenencia, estructuras lógicas, programación lineal y multiobjetivo y otros algoritmos. Mientras, en el ámbito práctico destacan especialmente sus aplicaciones a los sistemas de control automático de procesos.

No es de extrañar esta proliferación, ya que es una técnica que permite tratar datos imprecisos o incluso modelar un determinado comportamiento siguiendo la vaguedad del pensamiento humano.

Son precisamente esas dos cualidades las que hacen que sea muy interesante utilizar de forma combinada lógica difusa y Análisis por Envoltura de Datos, especialmente si se tiene en cuenta la sensibilidad del DEA ante errores en los datos o en el modelado del problema.

4.3. VARIABLES NO MONÓTONAS

En matemáticas, y más concretamente en la teoría del orden, se dice que una función es monótona si conserva el orden dado. El concepto de monotonía se aplica en el DEA para las variables de entrada puesto que todas verifican que a menor cantidad de una entrada consumida esa unidad productiva será mejor. Análogamente se puede afirmar la monotonía de las variables de salida puesto que a mayor cantidad de salida producida la unidad será más eficiente.

Pero, ¿cómo representar en el modelo DEA aquellas variables que no se puedan encasillar en el comportamiento de las entradas o las salidas? En economía, un ejemplo muy ilustrativo es el caso de la inflación.

La tasa de Inflación se puede definir como el porcentaje de variación del nivel general de precios entre dos periodos consecutivos. El BCE ha definido su objetivo de inflación en términos de un Índice de Precios de Consumo Armonizado que se construye en todos los países europeos con criterios homogéneos, crecimiento medio del IPCA por debajo, pero próximo, al 2%. El BCE considera que este indicador mejora la transparencia de la política monetaria [18].

Es evidente que a la hora de incorporar al DEA la variable *tasa de inflación*, ésta no puede tratarse ni como una entrada ni como una salida, puesto que el valor eficiente de dicha variable se sitúa en torno a un punto concreto (2%). En el caso de que se incorporase como entrada se podría llegar a valorar positivamente la deflación, mientras que si se incluyese como salida cabe la posibilidad de considerar positivamente inflaciones elevadas.

Por tanto la inclusión en el Análisis por Envoltura de Datos de variables no monótonas viene justificada por la necesidad de modelar comportamientos más complejos, que se salen del orden monótono de las variables de entrada y salida.

4.4. ADAPTACIÓN DE LAS VARIABLES NO MONÓTONAS AL DEA

Para incorporar variables no monótonas al DEA es necesario aplicar los conceptos de lógica difusa y transformar todas variables del modelo (entradas, salidas y variables no monótonas) en variables lingüísticas, asociándoles funciones de pertenencia.

4.4.1. FUNCIONES DE PERTENENCIA PARA LAS ENTRADAS:

Una unidad productiva se considera mejor cuanto menos cantidad de entrada consume. Por tanto se puede afirmar que la deseabilidad de cualquier entrada aumenta al disminuir esta. Esto se puede modelar mediante una función de pertenencia tipo "L":

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

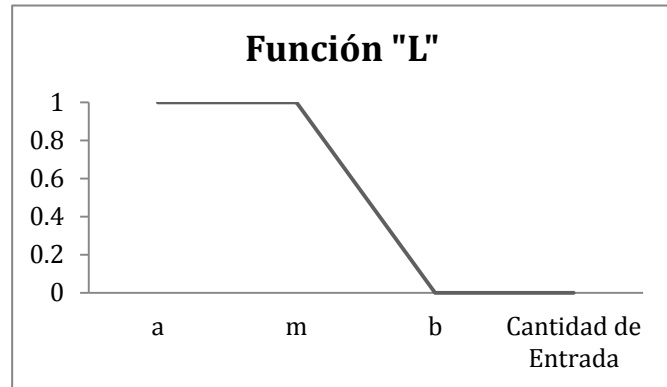


Fig.4: Función de pertenencia en "L"

Para poder comparar adecuadamente las unidades productivas, la función de pertenencia de cada entrada debe modelarse de forma que todos los valores de dicha entrada queden comprendidos dentro del intervalo [m,b]. De lo contrario no se estarían tratando las entradas conforme a las consideraciones del DEA para dichas variables.

4.4.2. FUNCIONES DE PERTENENCIA PARA LAS SALIDAS:

Siguiendo el mismo razonamiento que para las entradas, una unidad se considera más deseable cuanto mayor cantidad de salida produzca. Este comportamiento se asemeja a la función de pertenencia "Gamma":

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } x \in (a, m) \\ 1 & \text{si } x \geq m \end{cases}$$

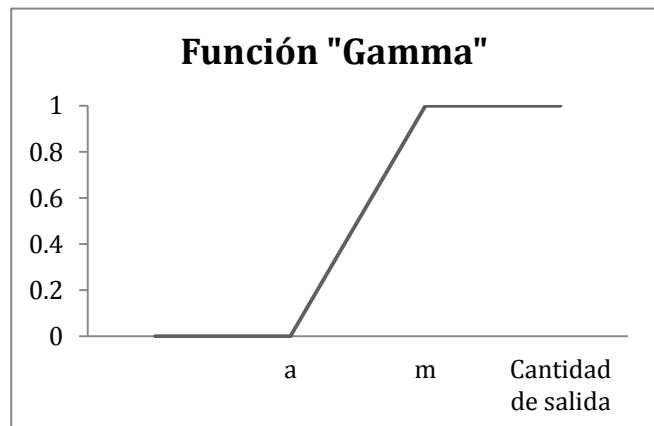


Fig.5: Función de pertenencia "Gamma"

Nuevamente cabe mencionar que habría que construir dicha función de pertenencia de forma que todas las salidas estén comprendidas en el intervalo $[a, m]$. Esto es especialmente importante, puesto que en caso de que algunas salidas estuviesen fuera de dicho rango lo que en realidad se estaría modelando sería una variable no monótona en lugar de una salida del DEA.

4.4.3. FUNCIONES DE PERTENENCIA PARA LAS VARIABLES NO MONÓTONAS:

Por último, en las variables no monótonas, la construcción de una función de pertenencia está sujeta al comportamiento que se desee que presente dicha variable no monótona (o variable lingüística, si se desea utilizar la terminología de la lógica difusa). Se puede modelar infinidad de conductas para las variables, desde las más simples a las más complejas, mediante la propiedad conocida como granulación, que consiste en la superposición de funciones de pertenencia hasta construir el dominio de la variable no monótona.

Además de las dos funciones de pertenencia explicadas anteriormente, algunas de las más sencillas y útiles son:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{si } x \in (a, m] \\ \frac{b-x}{b-m} & \text{si } x \in (m, b) \\ 0 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

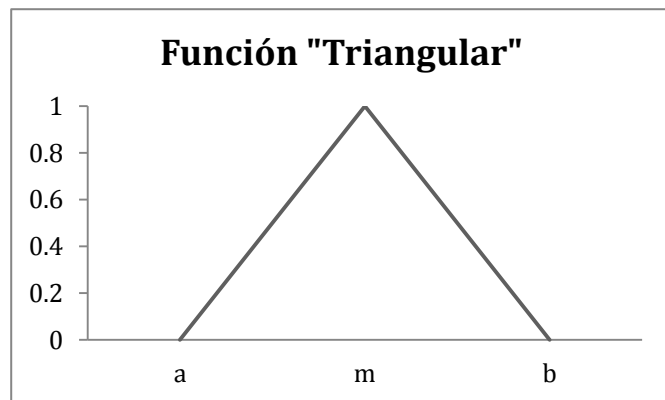


Fig. 6: Función de pertenencia "triangular"

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in (a, b) \\ 1 & \text{si } x \in [b, c] \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } x \in (c, d) \\ 0 & \text{si } x \geq d \end{cases}$$

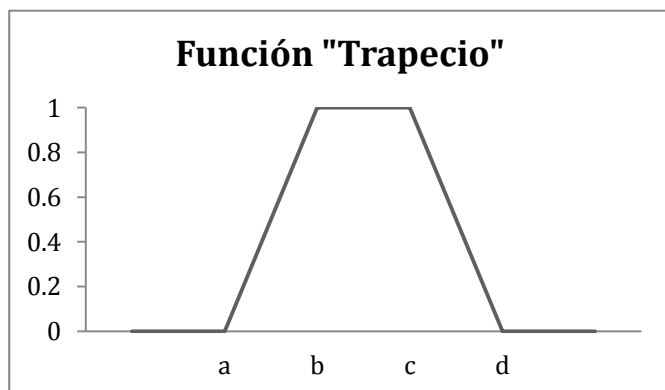


Fig. 7: Función de pertenencia "trapezio"

4.5. FUZZY DEA Y DEA CON VARIABLES NO MONÓTONAS

Este apartado tiene como objetivo explicar brevemente el concepto de Fuzzy DEA (DEA difuso) y matizar las diferencias existentes respecto al DEA con variables no monótonas.

Se puede decir que el Fuzzy DEA surge ante la necesidad de evaluar la eficiencia de DMU cuyas observaciones sean difusas. Utilizando funciones de pertenencia, permite incluir en el modelo DEA datos inexactos y criterios que reflejen la opinión de expertos o del entorno dados a través de variables lingüísticas. Por tanto, el término Fuzzy DEA se refiere principalmente a que los datos reciben un tratamiento difuso.

Sin embargo el modelo DEA con variables no monótonas propuesto por Villa y Lozano [19] hace referencia a ciertas variables que, en función del valor de las observaciones de cada DMU, se pueden comportar como entrada, como salida o de forma indiferente (si se encuentra dentro del intervalo de máxima deseabilidad). Para representar este comportamiento utiliza funciones de pertenencia y considera, además de las variables de entradas y salidas habituales en modelos DEA, un tercer conjunto de variables: las no monótonas.

La tecnología con variables no monótonas resultante para el caso de retornos de escala variable (VRS) es [19]:

$$T(\hat{x}, \hat{y}, \hat{v}) = \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \hat{x}_{ij}; \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq \hat{y}_{kj}; \sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} = \hat{v}_{rj}; \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1; \lambda_j \geq 0 \right\}$$

Por tanto la principal diferencia entre ambos es que, mientras el Fuzzy DEA se centra en el tratamiento de datos inexactos mediante lógica difusa, el DEA con variables no monótonas utiliza la lógica difusa para modelar comportamientos de variables más complejas a las habituales.

4.6. CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO DEA DE RETORNO DE ESCALA CONSTANTE CON VARIABLES NO MONÓTONAS

4.6.1. NOTACIÓN:

4.6.1.1. Índices:

n	<i>Número de DMUs que se estudian.</i>
j	<i>Subíndice de DMU. $j \in [1, n]$.</i>
o	<i>DMU cuyo objetivo se está estableciendo.</i>
i	<i>Subíndice para las entradas (o recursos).</i>
k	<i>Subíndice para las salidas (o productos).</i>
r	<i>Subíndice para las variables no monótonas.</i>
\wedge	<i>Indica la variable objetivo que se pretende determinar.</i>

4.6.1.2. Datos:

x_{ij}	<i>Cantidad de entrada "i" que consume la DMU "j".</i>
y_{kj}	<i>Cantidad de salida "k" que produce la DMU "j".</i>
v_{rj}	<i>Cantidad de variable no monótona r que utiliza la DMU "j".</i>
x_i^{min}	<i>Valor mínimo de la entrada "i" considerado como aceptable.</i>
x_i^{max}	<i>Valor máximo de la entrada "i" considerado como aceptable.</i>
y_k^{min}	<i>Valor mínimo de la salida "k" considerado como aceptable.</i>
y_k^{max}	<i>Valor máximo de la salida "k" considerado como aceptable.</i>
v_r^{min}	<i>Valor mínimo de la variable no monótona "r" considerado aceptable.</i>
v_r^{max}	<i>Valor máximo de la variable no monótona "r" considerado aceptable.</i>
$v_r^{ideal,min}$	<i>Valor ideal mínimo para la variable no monótona "r".</i>
$v_r^{ideal,max}$	<i>Valor ideal máximo para la variable no monótona "r".</i>
μ_{i_0}	<i>Función de pertenencia de la variable x_{i_0}.</i>

μ_{ko}	<i>Función de pertenencia de la variable y_{ko}.</i>
μ_{ro}	<i>Función de pertenencia de la variable v_{ro}.</i>
w_i	<i>Importancia relativa de la entrada "i" respecto el resto de variables.</i>
w_k	<i>Importancia relativa de la salida "k" respecto el resto de variables.</i>
w_r	<i>Importancia relativa de la variable no monótona "r" respecto el resto de variables.</i>

Variables:

\hat{x}_i	<i>Valor objetivo de la entrada "i" de la DMU que se está estableciendo.</i>
\hat{y}_k	<i>Valor objetivo de la salida "k" de la DMU que se está estableciendo.</i>
\hat{v}_r	<i>Valor objetivo de la variable "r" de la DMU que se está estableciendo.</i>
$\hat{\mu}_i$	<i>Función de pertenencia de \hat{x}_i.</i>
$\hat{\mu}_k$	<i>Función de pertenencia de \hat{y}_k.</i>
$\hat{\mu}_r$	<i>Función de pertenencia de \hat{v}_r.</i>
λ_j	<i>Variable de intensidad de la DMU "j".</i>

4.6.2. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO DEA CON VARIABLES NO MONÓTONAS:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^m w_i(\widehat{\mu}_i - \mu_{io}) + \sum_{k=1}^p w_k(\widehat{\mu}_k - \mu_{ko}) + \sum_{r=1}^v w_r(\widehat{\mu}_r - \mu_{ro})$$

s.a.:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \widehat{x}_i \quad \forall i \in I \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \widehat{y}_k \quad \forall k \in O \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} = \widehat{v}_r \quad \forall r \in V \quad (3)$$

$$\widehat{\mu}_i \leq \frac{x_i^{\max} - \widehat{x}_i}{x_i^{\max} - x_i^{\min}} \quad \forall i \in I \quad (4)$$

$$\widehat{\mu}_k \leq \frac{\widehat{y}_k - y_k^{\min}}{y_k^{\max} - y_k^{\min}} \quad \forall k \in O \quad (5)$$

$$\widehat{\mu}_r \leq \frac{\widehat{v}_r - v_r^{\min}}{v_r^{\text{ideal},\min} - v_r^{\min}} \quad \forall r \in V \quad (6)$$

$$\widehat{\mu}_r \leq \frac{v_r^{\max} - \widehat{v}_r}{v_r^{\max} - v_r^{\text{ideal},\max}} \quad \forall r \in V \quad (7)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \quad (8)$$

$$\widehat{\mu}_i \geq \mu_{ij} \quad \forall i \in I \quad (9)$$

$$\widehat{\mu}_k \geq \mu_{kj} \quad \forall k \in O \quad (10)$$

$$\widehat{\mu}_r \geq \mu_{rj} \quad \forall r \in V \quad (11)$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_i \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_k \leq 1 \quad \forall k \in O \quad (13)$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_r \leq 1 \quad \forall r \in V \quad (14)$$

4.6.3. EXPLICACIÓN DEL MODELO

En un primer instante puede resultar complicado encontrar la relación entre el modelo construido y el Análisis por Envoltura de Datos. Por tanto se va a proceder a explicar detenidamente el funcionamiento del modelo.

En primer lugar cabe destacar que el modelo anterior plantea un problema de optimización que debe resolverse “n” veces, una vez por cada DMU “j” existente.

Por otra parte en el modelo se utilizan las llamadas variables y funciones de pertenencia objetivo, que son las denotadas por “^”, a saber: $\widehat{x}_i, \widehat{y}_k, \widehat{v}_r, \widehat{\mu}_i, \widehat{\mu}_k, \widehat{\mu}_r$. Representan el valor que debería tomar los datos análogos para que una unidad productiva alcance la eficiencia.

Por tanto, lo que ha mejorado una variable se puede cuantificar como la diferencia entre una función de pertenencia objetivo y la función de pertenencia observada como dato del problema.

$$Max \sum_{i=1}^m w_i(\widehat{\mu}_i - \mu_{io}) + \sum_{k=1}^p w_k(\widehat{\mu}_k - \mu_{ko}) + \sum_{r=1}^v w_r(\widehat{\mu}_r - \mu_{ro})$$

Partiendo de dicho concepto, la interpretación de la función objetivo es muy sencilla: se trata de mejorar en todo lo posible las variables del problema, maximizando el sumatorio de cada entrada, salida y variable no monótona la diferencia entre el nivel de pertenencia que se aspira alcanzar y la pertenencia que en realidad se observa como dato. Todo ello multiplicando previamente dicha mejora por la importancia relativa de la variable en cuestión.

Las primeras tres restricciones son las habituales en modelos de Análisis por Envoltura de Datos, e indican que cada variable objetivo debe ser combinación lineal de las DMUs existentes:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = \widehat{x}_i \quad \forall i \in I \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} = \widehat{y}_k \quad \forall k \in O \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j v_{rj} = \widehat{v}_r \quad \forall r \in V \quad (3)$$

La primera ecuación hace referencia a las entradas o inputs (I), la segunda a las salidas u outputs (O) y la tercera a las variables no monótonas (V).

El siguiente grupo de restricciones se encarga de construir las funciones de pertenencia objetivo a partir de las variables objetivo calculadas y las variables dato. Si se analizan por separado:

La cuarta restricción construye la función de pertenencia objetivo para las entradas (I).

$$\hat{\mu}_i \leq \frac{x_i^{max} - \hat{x}_i}{x_i^{max} - x_i^{min}} \quad \forall i \in I \quad (4)$$

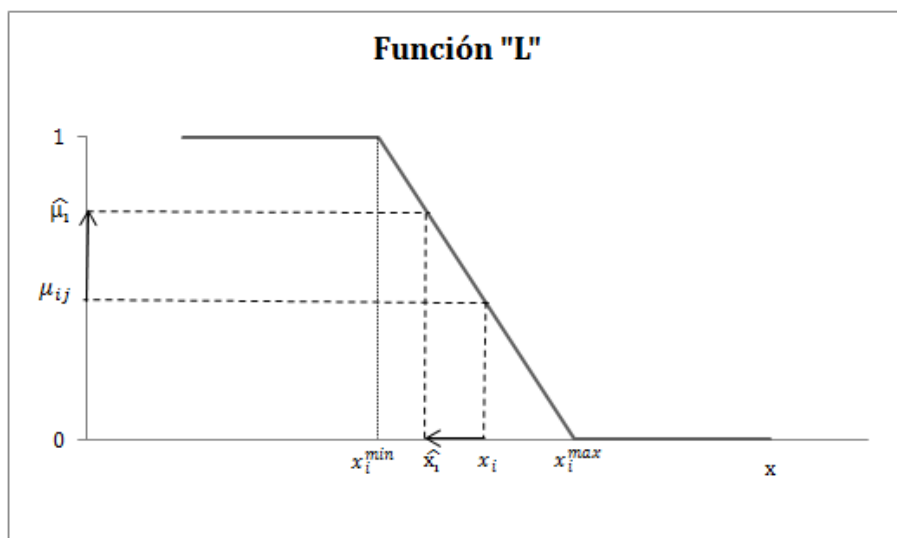


Fig.8: Relación entre entrada objetivo y su correspondiente función de pertenencia objetivo

En la Fig.8 se puede constatar que cuanto más cerca de x_i^{max} esté \hat{x}_i , menor será la función de pertenencia objetivo ($\hat{\mu}_i$) y viceversa. Además también aparece representada la mejora objetivo en la entrada x_i , como una flecha en el eje de abscisas que reduce la entrada. La consecuente mejora objetivo de la función de pertenencia μ_i se encuentra representada como una flecha sobre el eje de ordenadas.

La quinta restricción es análoga a la cuarta pero aplicada a las salidas (O):

$$\hat{\mu}_k \leq \frac{\hat{y}_k - y_k^{min}}{y_k^{max} - y_k^{min}} \quad \forall k \in O \quad (5)$$

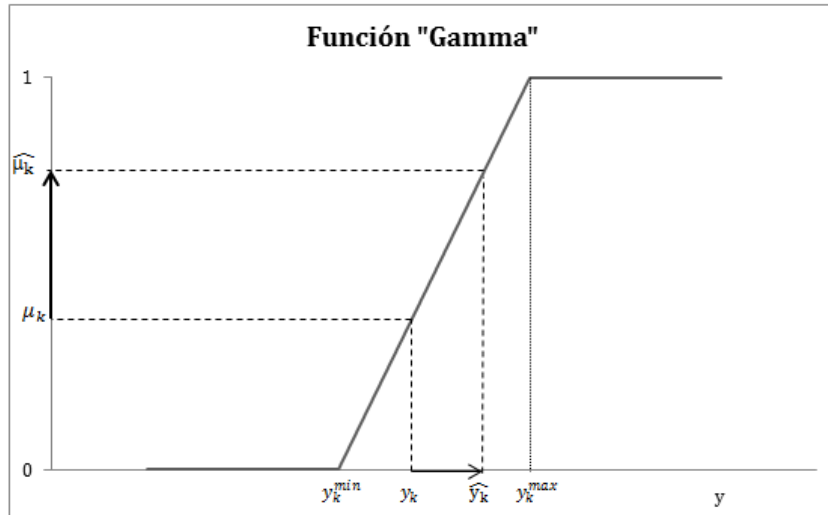


Fig.9: Relación entre salida objetivo y su correspondiente función de pertenencia objetivo

Nuevamente aparece representada la mejora objetivo a través de flechas sobre los ejes de coordenadas. También se observa que las salidas objetivo siempre son mayores o iguales que las salidas dato.

Finalmente, hay dos restricciones para construir la función de pertenencia objetivo de las variables no monótonas:

$$\hat{\mu}_r \leq \frac{\hat{v}_r - v_r^{\min}}{v_r^{\text{ideal},\min} - v_r^{\min}} \quad \forall r \in V \quad (6)$$

$$\hat{\mu}_r \leq \frac{v_r^{\max} - \hat{v}_r}{v_r^{\max} - v_r^{\text{ideal},\max}} \quad \forall r \in V \quad (7)$$

Resulta sencillo observar que la restricción (6) se comporta de la misma forma que la restricción (5) de la función de pertenencia objetivo de las salidas, mientras que la restricción (7) es análoga a la restricción (4) de la función de pertenencia objetivo de las entradas. Esto se debe a que estamos modelando una función de pertenencia tipo trapecio, que se puede construir mediante la superposición de las funciones de pertenencias de las salidas y las entradas. Así, se podría considerar que la función de pertenencia “trapecio” está formada por una función de pertenencia “Gamma” en su primer tramo y una función “L” en el segundo.

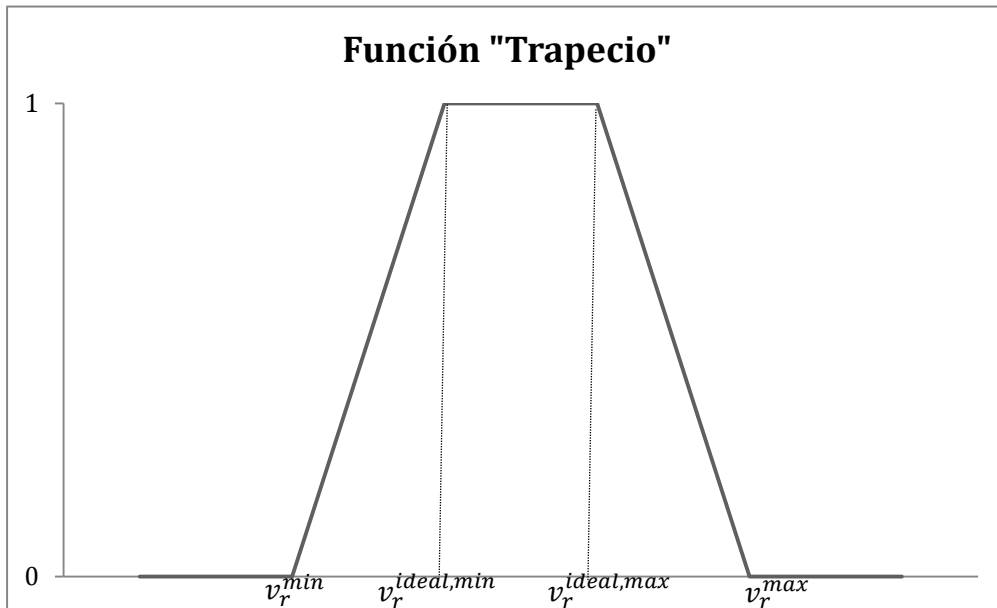


Fig.10: Relación entre variable no monótona objetivo y su correspondiente función de pertenencia objetivo

Gráficamente se aprecia que solamente puede existir un valor de la función de pertenencia para cada valor de \hat{v}_r . Sin embargo, puede no ser tan sencillo apreciar eso mismo en las restricciones.

Consideremos por ejemplo los siguientes valores de la variable no monótona:

$$v_r^{min} = 2$$

$$v_r^{ideal,min} = 6$$

$$v_r^{ideal,max} = 8$$

$$v_r^{max} = 16$$

Si la variable no monótona objetivo se sitúa en el primer tramo, $\hat{v}_r = 5$, las restricciones toman los valores:

$$\hat{\mu}_r \leq \frac{\hat{v}_r - v_r^{min}}{v_r^{ideal,min} - v_r^{min}} = \frac{5 - 2}{6 - 2} = \frac{3}{4} \quad (6)$$

$$\hat{\mu}_r \leq \frac{v_r^{max} - \hat{v}_r}{v_r^{max} - v_r^{ideal,max}} = \frac{16 - 5}{16 - 8} = \frac{11}{8} \quad (7)$$

Luego la función de pertenencia objetivo toma como valor el menor de ambas restricciones, correspondiente a la restricción del primer tramo, (6), de forma que:

$$\hat{\mu}_r = \frac{3}{4}$$

En caso de que la variable no monótona se sitúe en el segundo tramo, por ejemplo $\hat{v}_r = 10$, las restricciones toman los valores:

$$\hat{\mu}_r \leq \frac{\hat{v}_r - v_r^{min}}{v_r^{ideal,min} - v_r^{min}} = \frac{10 - 2}{6 - 2} = 2 \quad (6)$$

$$\hat{\mu}_r \leq \frac{v_r^{max} - \hat{v}_r}{v_r^{max} - v_r^{ideal,max}} = \frac{16 - 10}{16 - 8} = \frac{6}{8} \quad (7)$$

De nuevo la función de pertenencia objetivo toma como valor el menor de ambas restricciones, esta vez correspondiente a la restricción del segundo tramo, (7), de forma que $\hat{\mu}_r = \frac{6}{8}$.

Se puede concluir que, debido a que sólo se activa la restricción más restrictiva de ambas, la función de pertenencia objetivo toma siempre el valor correcto en función del tramo en que se sitúe \hat{v}_r .

También hay que destacar que, si se deseara construir una función de pertenencia tipo “triangular”, bastaría con particularizar la función de pertenencia “trapezio” haciendo que:

$$v_r^{ideal,min} = v_r^{ideal,max}$$

Por último hay un conjunto de siete restricciones sobre el dominio de las variables. En concreto se impide que las variables tomen valores negativos y hace que las funciones de pertenencia objetivo sean mayores o iguales que las funciones de pertenencia datos y menores o iguales que uno:

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \quad (8)$$

$$\hat{\mu}_i \geq \mu_{ij} \quad \forall i \in I \quad (9)$$

$$\hat{\mu}_k \geq \mu_{kj} \quad \forall k \in O \quad (10)$$

$$\hat{\mu}_r \geq \mu_{rj} \quad \forall r \in V \quad (11)$$

$$0 \leq \hat{\mu}_i \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (12)$$

$$0 \leq \hat{\mu}_k \leq 1 \quad \forall k \in O \quad (13)$$

$$0 \leq \hat{\mu}_r \leq 1 \quad \forall r \in V \quad (14)$$

APLICACIÓN: DETERMINACIÓN Y SELECCIÓN DE FONDOS DE INVERSIÓN EFICIENTES

5. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO TEÓRICO Y MATEMÁTICO DEL PROBLEMA USANDO DEA

5.1. ENFOQUE DEL PROBLEMA

Se pretende analizar el problema desde el punto de vista de las necesidades de un posible inversor particular, que pretende seleccionar uno o varios fondos de inversión pero se encuentra indeciso por la abundancia de oferta existente en el mercado o por la abrumadora cantidad de información técnica que hay que analizar.

Para ello lo primero es definir qué significa que un fondo sea eficiente para el inversor. Siguiendo el modelo propuesto por Markowitz [20], el inversor es racional y busca maximizar la rentabilidad asumiendo el menor riesgo posible. Partiendo de esta premisa, está claro que el concepto de eficiencia para el inversor está basado en la relación rentabilidad/riesgo, de forma que cuanto mayor sea más eficiente será el fondo. Sin embargo este análisis es un poco simplista, ya que no tiene en cuenta otras consideraciones que también son relevantes a la hora de tomar la decisión de contratar un fondo u otro. Por tanto, en este estudio se propone un criterio de eficiencia que valore los criterios de bondad (entre los que se encuentra la rentabilidad del fondo) en función de los costes en la decisión. Estos costes se pueden entender como todo aquel criterio negativo que puede lastrar o simplemente no aporta valor a la elección de un determinado fondo de inversión.

Por otra parte tampoco se incluyen los fondos de inversión en renta fija ya que, debido a su naturaleza, su comportamiento se explica mejor con otros criterios de bonanza (como por ejemplo convexidad y duración) diferentes a los de renta variable y mixta.

Por tanto, no se pretende ni entra dentro de las competencias de este estudio analizar el problema desde el enfoque de un gestor de fondos de inversión, ni evaluar la eficiencia de fondos de renta fija.

5.2. PERSISTENCIA DE RESULTADOS EN LOS FONDOS DE INVERSIÓN

Aunque este apartado podría pertenecer al capítulo 2 por su contenido teórico, se ha decidido incluirlo aquí por las múltiples implicaciones que tiene en relación con la construcción del modelo teórico e incluso con la asignación de pesos a las variables.

Se puede afirmar que el grado o nivel de habilidad de un decisor viene determinado por su capacidad para evaluar previamente y seleccionar un fondo de inversión que mejore los resultados actuales a partir de la información histórica de la que dispone. Por tanto el objetivo de este apartado es determinar si los rendimientos pasados o históricos influyen de forma positiva en los rendimientos futuros. A esta hipótesis se la denomina persistencia de resultados.

En este caso se han obtenido resultados generalmente favorables a dicha hipótesis. Ello nos indicaría que esta variable, en conjunción con otras, puede ser importante para la explicación de la evolución a corto plazo de las cuotas relativas de los fondos de inversión [21].

A favor de esta persistencia de resultados se muestra Rocío Marco [22], considerando que el inversor actúa correctamente “al tener en cuenta las rentabilidades obtenidas el año anterior, ya que el rendimiento pasado es efectivamente un indicador del rendimiento actual. Además no sólo influye la rentabilidad del año anterior, sino también la histórica debido a la persistencia que muestra la rentabilidad.”

Otro estudio [23], aunque también se muestra a favor de la persistencia en la performance de los fondos de inversión españoles, señala sin embargo que “la información en que debe basarse el decisor financiero en su proceso de toma de decisiones es de corto plazo, puesto que se ha demostrado que un incremento de la información histórica sobre la performance no mejora la capacidad predictiva de la misma.”

Como colofón, se pueden extraer dos conclusiones de estos trabajos. Por una parte, existen evidencias de la persistencia de resultados. Por otra, que es más indicativa y debe darse más importancia a la información sobre el corto plazo, aunque tampoco se considera que deba despreciarse por completo periodos de evaluación más largos. En cualquier caso, queda claro que sería un error evaluar exclusivamente las rentabilidades históricas sin tener en cuenta otros criterios y factores. Por último, añadir que este estudio no tendría sentido alguno si no se observase persistencia de resultados, ya que implicaría que el decisor no posee ninguna información en la que se basarse al realizar su inversión, es decir, su decisión sería aleatoria.

5.3. CONSIDERACIONES SOBRE LOS DATOS

5.3.1. TRATAMIENTO DE LOS DATOS:

Los datos han sido recopilados del comparador de fondos de inversión de la Organización de Consumidores y Usuarios (OCU) [24] a fecha del 02/12/2016. El hecho de obtener los datos de una única fuente se ha considerado positivo, ya que se ha observado que para un mismo fondo de inversión existen algunas diferencias en determinadas variables según la fuente que se consulte.

La herramienta DEA puede presentar problemas al tratar datos negativos. Esto se ha solucionado redimensionando los datos positivamente para que no presenten valores menores de cero. Para evitar que se modifique la información se ha mantenido la misma escala (la diferencia entre valor máximo y mínimo) dentro de una variable.

Además las funciones de pertenencia se han construido, tal y cómo se explicó en el apartado 4.4, según sea una entrada, salida o variable no monótona.

5.3.2. CATEGORÍAS DE FONDOS EMPLEADAS:

Lo primero es destacar que se han utilizado fondos de inversión de más de 5 años de antigüedad denominados en divisa euro. También se ha descartado aquellos productos financieros cuyas características específicas impedían evaluarlos junto con el resto. Éste es el caso de los fondos de renta fija, o los fondos de inversión garantizados. Sin embargo se ha hecho hincapié en los fondos de renta variable, globales y renta mixta (ya sea mixta fija, mixta neutra o mixta variable).

En cuanto a la diversificación de los fondos empleados según zona geográfica, buena parte (algo menos de la mitad de los fondos) son españoles, mientras que el resto lo componen fondos que invierten en: zona Euro, EEUU, Latinoamérica, Alemania, Italia, Gran Bretaña, Suecia, Suiza, Europa del Este, México, Brasil, Canadá, India, Turquía, Rusia, Japón y China.

5.4. CONSIDERACIONES SOBRE LAS VARIABLES:

5.4.1. VARIABLES DE ENTRADA:

Las variables de entradas son los recursos que utiliza la unidad productiva. Dado el enfoque del problema, puede resultar complicado entender cuáles son las entradas de un fondo de inversión. Hay que ponerse en el lugar del decisor para entender correctamente el modelado del problema.

El objetivo del decisor es seleccionar un fondo de inversión. Para un inversor, una entrada o recurso es todo aquel criterio presente en el fondo de inversión que lastra su rentabilidad y que consigue, por tanto, que el fondo sea menos deseable. A continuación se describen las variables de entrada que se han considerado en este trabajo:

Volatilidad del fondo:

Representa el riesgo de una inversión, es decir, la magnitud de las fluctuaciones que históricamente ha presentado el fondo. Es una de las variables de más importancia en el análisis, ya que volatilidades altas pueden ocasionar pérdidas cuantiosas al inversor.

Riesgo sistemático:

Permite comparar el riesgo asumido debido a variaciones del mercado, es decir, el riesgo sistemático o no diversificable del fondo de inversión. Se calcula como:

$$Riesgo_{Sistemático} = Correlación * Beta * Volatilidad_{Benchmark}$$

Se puede apreciar como el riesgo del mercado que asume un determinado fondo de inversión no se iguala directamente a la volatilidad del benchmark, sino que viene corregido por dos factores. Por un lado, la *Beta* indica si el fondo tiende a amplificar los movimientos del mercado o a reducirlos. Por otro, la *Correlación* pondera en qué medida influye el benchmark en los resultados del fondo. Esta última consideración es muy importante ya que el coeficiente Beta, aunque tradicionalmente se ha utilizado como medida del riesgo sistemático, únicamente evalúa la parte del riesgo del fondo que está correlacionada con el riesgo del mercado.

El riesgo sistemático es un indicador especialmente útil ya que valora la fracción del riesgo que no se puede reducir mediante la diversificación. Además es necesario agregar estas tres entradas para darles un sentido útil de cara a la toma de decisiones por parte del decisor, ya que resulta complicado analizarlas independientemente.

Comisión anual de gestión:

Es la comisión que cobra la gestora por su labor y se descuenta diariamente del valor liquidativo. Según diversos estudios, es la causante de que los fondos de inversión rara vez mejoren los resultados del benchmark. Al inversor le interesa contratar un fondo con buenos resultados y cuya comisión de gestión sea lo menor posible para que parte de los beneficios obtenidos no se lo quede la gestora.

5.4.2. VARIABLES DE SALIDA:

Se considera una salida o producto es toda aquella característica del fondo de inversión que pueda favorecer la generación de beneficios, ya sean económicos o de otra índole.

Rendimiento del fondo:

Es la salida más importante de las valoradas, puesto que representa numéricamente el beneficio que espera el inversor. Esto, junto con la a menudo gran diferencia de valores para un mismo fondo en diferentes periodos de tiempo, hace que seleccionar un único periodo para el análisis sea cometer un error de modelado que puede beneficiar o perjudicar a determinadas unidades productivas. En otras palabras equivale a decir que asignamos un peso mayor a esta entrada. Se ha optado por tomar 6 valores de rendimientos para cada DMU, de la siguiente forma:

Rendimiento anualizado del fondo a 3 meses.

Rendimiento anualizado del fondo a 6 meses.

Rendimiento anualizado del fondo a 1 año.

Rendimiento anualizado del fondo a 2 años.

Rendimiento anualizado del fondo a 3 años.

Rendimiento anualizado del fondo a 5 años.

Nótese que tres de los seis rendimientos evaluados están referidos a un periodo igual o inferior a un año. Esta elección no es aleatoria, ya que se pretende que el DEA evalúe la tendencia actual del fondo de inversión. Según diversos estudios los resultados a corto plazo presentan mayor probabilidad de persistir en el futuro. Sin embargo también se incluyen los resultados históricos a más largo plazo como una forma de valorar el saber hacer de los gestores del fondo en el pasado.

El hecho de presentar los rendimientos como anualizados se debe a que de esta forma se pueden comparar unos periodos de tiempo con otros distintos. Facilita la comprensión de los datos por parte del analista, pero cabe reseñar que el DEA podría trabajar de igual forma con los rendimientos sin anualizar.

Alfa:

El indicador Alfa (α) mide la importancia que tiene el gestor en los resultados del fondo. Describe la rentabilidad extra obtenida por el inversor por asumir el riesgo, en vez de aceptar la rentabilidad del mercado expresada por el índice de referencia. Un alfa elevado indica un buen comportamiento en relación con el mercado y una buena gestión, ya que el gestor genera valor adicional al superar el rendimiento previsto.

Rendimiento del mercado:

Se puede obtener la rentabilidad del mercado como:

$$Rentabilidad_{Mercado} = Beta * Rentabilidad_{Benchmark}$$

Que una *Beta* sea igual a 1 significa que se reproducen exactamente las fluctuaciones del mercado, si es inferior a 1 que se atenúan y si es superior a 1 que se amplifican.

Nótese que, a diferencia de la variable de entrada “Riesgo sistemático”, no se ha incluido la correlación entre mercado y el fondo. Esto se debe a que se pretende evaluar exclusivamente el rendimiento del benchmark y si el fondo atenuará o amplificará los movimientos de este, mientras que si se incluyese la correlación equivale a evaluar la parte del fondo que debe su rentabilidad a variaciones del benchmark.

Dicho de otra forma, la rentabilidad de un fondo está compuesta por dos factores: por un lado la rentabilidad del fondo debida a variaciones del mercado en que se encuentra y por otro la rentabilidad propia, independiente del mercado, del fondo. Es el primero de estos factores el que se evalúa al utilizar la correlación, dejando al margen el segundo, de forma que el modelo no valoraría de forma positiva fondos con rentabilidades propias altas.

Sin embargo, al no incluirse la correlación, el modelo pretende cuantificar exclusivamente el grado de bondad del mercado en que invierte un determinado fondo. Es una diferencia sutil pero necesaria, ya que en caso de incluirse la correlación se estaría favoreciendo a los llamados fondos índices, que tienen la correlación más alta.

Además cabe destacar que es una salida no discrecional, puesto que la unidad no tiene capacidad para variar su cantidad. Es decir es una salida cuyo valor está fijado de forma externa a la DMU.

Se usará el rendimiento del benchmark a 1 año.

Índice de Sharpe:

Valora la consistencia de los resultados del fondo en función del riesgo asumido. Es una medida de la eficiencia del gestor, ya que permite cuantificar la calidad de los resultados de un fondo: cuanto mayor sea Sharpe, mejor es la rentabilidad del fondo respecto al riesgo soportado. Por el contrario, si es negativo implica que la rentabilidad del fondo ha sido menor que la de la deuda pública.

Índice de Información:

Compara el fondo de inversión directamente con su benchmark. Nos da idea de cómo se compensa el riesgo asumido de alejarse el índice de referencia en la rentabilidad final obtenida. Cuanto más elevado sea el índice de información mejor, más valor se crea por encima del índice de referencia y más interesante será el fondo y el gestor para los inversores.

Índice de Treynor:

Al igual que Sharpe, Treynor valora los resultados del fondo en función del riesgo pero, en lugar de evaluar el riesgo de la cartera en su conjunto, pondera únicamente el riesgo sistemático suponiendo que beta es un buen indicador de dicho riesgo. No obstante, a diferencia de Sharpe, Treynor no valora el riesgo específico del fondo debido a una incorrecta diversificación.

5.4.3. VARIABLES NO MONÓTONAS

Tracking error:

Es una medida del riesgo relativo que asume el gestor por alejarse del índice de referencia. Tal y como se ha explicado anteriormente, su utilidad radica en que permite desenmascarar el tipo de gestión que realiza el fondo: activa o pasiva.

Aunque no existen referencias claras que delimiten de forma tajante los valores del tracking error para cada tipo de gestión, popularmente varias fuentes hablan que la gestión se empieza a considerar pasiva si el tracking error se encuentra por debajo del 2% y gestión activa si este se encuentra por encima del 5%. [25] [26] [27]

Posicionarse a favor de uno de estos tipos de gestión depende de la filosofía del propio decisor, ya que existen argumentos para ambas.

No obstante, en el estudio que nos ocupa se ha optado por posicionarse a favor de una gestión intermedia, que no sea puramente activa o pasiva, ya que en el primer caso el gestor asume mayor riesgo mientras que en el segundo caso se limita a replicar un índice y no protege la inversión ante las fluctuaciones de este. Se considera gestión intermedia a aquella cuyo tracking error se encuentra en el intervalo comprendido entre el 2% y el 5%. Por tanto, para que lo deseable sea una gestión intermedia, se modelará la función de pertenencia del tracking error como triangular, de forma que el *valor ideal* del tracking error sea $v_{TE}^{ideal} = 3,5\%$, es decir, el punto medio del intervalo.

Se ha preferido utilizar una función de pertenencia triangular en lugar de trapezoidal porque, al ser el intervalo de gestión intermedia tan muy amplio, las funciones de pertenencias trapezoidales de casi todas las DMUs saldrían elevadas y muy próximas entre sí, de forma que la variable tracking error perdería relevancia.

Por otro lado, es de destacar la flexibilidad de la lógica difusa aplicada al DEA. Simplemente cambiando el *valor ideal* de la función de pertenencia del tracking error se puede adaptar el modelo y realizar un análisis de escenarios. Así, en un posible escenario en el que haya un decisor que prefiere fondos de gestión pasiva basta con hacer $v_{TE}^{ideal} = 0\%$, de forma que queda modelado como una entrada. Del mismo modo, en el escenario de un decisor que se decanta por la gestión activa basta con asignarle un valor ideal muy alto (por ejemplo el máximo tracking error de todas las DMUs). De esta forma se pueden ir modelando de manera rápida y sencilla funciones de pertenencia para cada uno de los escenarios que se quieran estudiar.

5.4.4. ASIGNACIÓN JUSTIFICADA DE PESOS A LAS VARIABLES

La asignación de pesos a las variables no es una cuestión trivial, ya que puede llegar a afectar de forma significativa a la solución obtenida. Cabe destacar que si se decidiese no asignar pesos de manera directa equivaldría a equiparar la importancia de todas las variables del problema con un peso $w = \frac{1}{N^{\circ} \text{ de variables total}}$.

Sin embargo es evidente, por las características del problema, que las variables tienen importancias diferentes y que por tanto los pesos no pueden ser asignados de dicha forma. Para percatarse de ello no hay más que observar la variable *Volatilidad del fondo*. Esta variable constituye un criterio de decisión en sí misma, ya que los inversores se fijan en ella para buscar el fondo que más se ajusten a su perfil de riesgo. Por tanto debería tener una importancia sustancialmente mayor a otras variables no tan influyentes.

Pero, ¿qué tanto por ciento de peso es el adecuado para asignarle a cada variable? Para establecer las importancias relativas de la forma más fidedigna posible a la realidad se ha recurrido a los estudios sobre la persistencia de resultados, complementados con el criterio de un experto en fondos de inversión, y como metodología se ha utilizado AHP.

Aunque el AHP es una técnica de decisión en sí misma, que puede ayudar al decisor a encontrar una opción que se ajuste adecuadamente a sus problemas, por el momento únicamente se utilizará AHP para la obtención de los pesos. Para ello se usará una jerarquía que incluye las 14 variables discrecionales del DEA agregadas en 3 niveles según se ha considerado más conveniente para representar el problema. La variable no discrecional no se incluye, puesto que no participa en la función objetivo del DEA y por tanto no tiene sentido asignarle un peso relativo.

Para no perder perspectiva respecto al problema, no se incluye en este apartado el desarrollo de la obtención de los pesos. Si algún lector está interesado puede encontrarlo en el Capítulo 8.

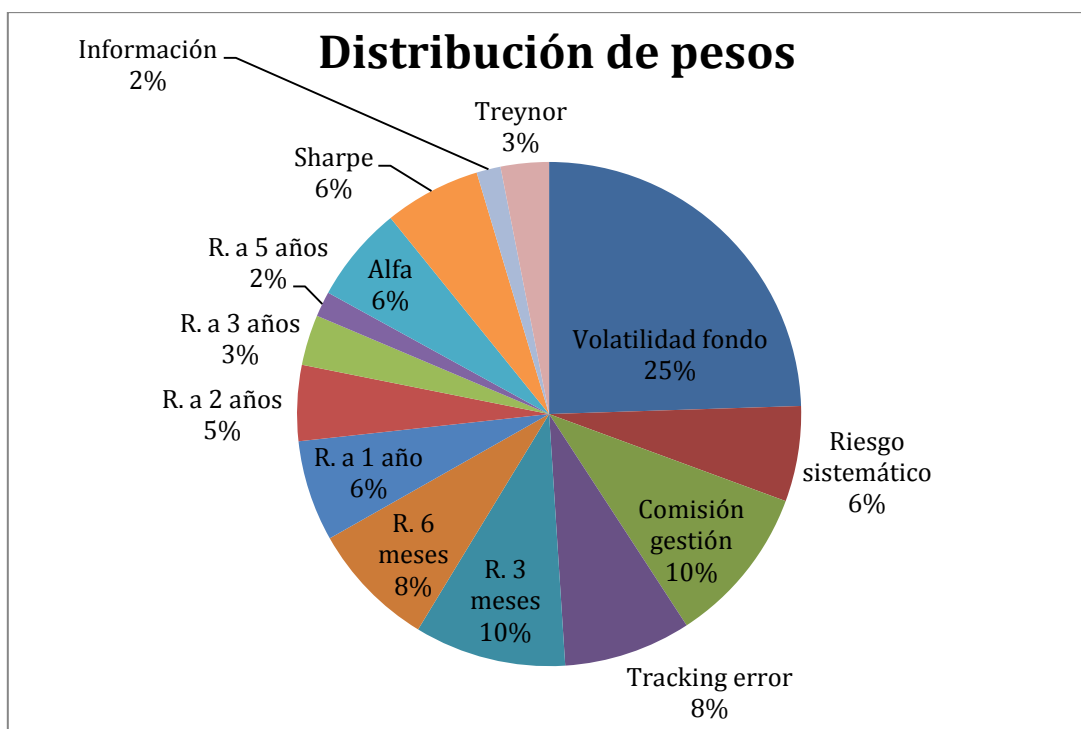


Fig. 11: Distribución de pesos por variables

Nota: la Fig.11 se ha construido con los pesos redondeados para poder interpretarla de una forma más intuitiva. El modelo DEA trabaja con los pesos sin redondear.

5.4.5. VARIABLES NO INCLUIDAS EN EL MODELO

Inversión mínima inicial:

Se ha descartado en el DEA porque es una característica que no influye directamente en la bondad de un fondo de inversión. Sin embargo sí deberá ser tomada en cuenta más adelante como umbral mínimo de inversión a la hora de invertir en un fondo.

Valor liquidativo:

En los fondos de inversión lo relevante es la cantidad que se invierte y no el número de participaciones que recibe, que de hecho pueden ser un número de participaciones no entero. El valor liquidativo informa de en cuanto está valorada la inversión día tras día y con él se realizan los cálculos de rentabilidades y volatilidades. Por tanto es más importante para el seguimiento de la inversión una vez está realizada que para la elección inicial de compra.

Tamaño del fondo de inversión:

Esta variable es un tanto controvertida, puesto que existe la creencia entre los inversores de que influye en las rentabilidades esperadas, si bien discrepan sobre si es mejor un fondo de tamaño pequeño o grande. Un estudio de la CNMV se muestra tajante al respecto: “la evidencia presentada en este artículo indica que la edad o el tamaño del fondo no parecen tener una influencia significativa sobre su rendimiento” [28]. Por tanto se ha decidido descartar la variable tamaño del DEA.

Comisión de suscripción, de depósito y de reembolso:

Aunque inicialmente se incluyeron como entrada se decidió eliminarla, puesto que la mayoría de fondos estudiados no presentaban ninguna de estas comisiones y el DEA presenta problemas con aquellas variables que presentan muchos ceros en sus datos.

5.5. DESARROLLO DEL MODELO DE SELECCIÓN DE FONDOS EFICIENTES

5.5.1. MODELO TEÓRICO:

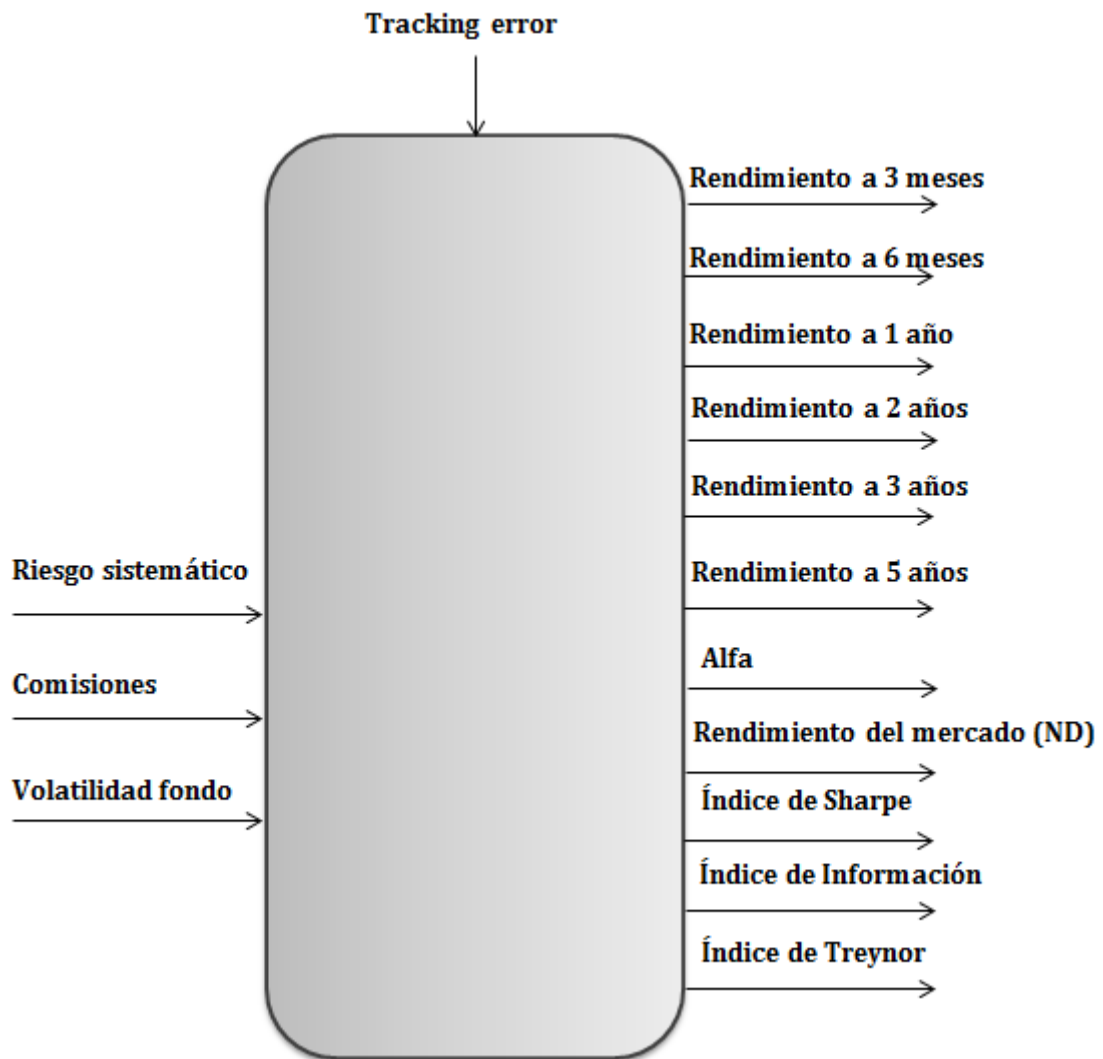


Fig.12: Modelo teórico del modelo DEA de selección de fondos eficientes

5.5.2. MODELO MATEMÁTICO CON VARIABLES NO DISCRECIONALES

Dado el elevado número de variables del modelo, no se va a realizar la particularización en este apartado para no perder la perspectiva del problema. Dicha particularización puede encontrarse desarrollada en el ANEXO II. Observar que al ser la variable rentabilidad del mercado no discrecional hay que dividir las salidas en dos conjuntos:

$$O = O_D \cup O_{ND}$$

Las variables no discretionales no se evalúan en la función objetivo y por tanto no es necesario construirle una función de pertenencia. Únicamente se tiene en cuenta como restricción en las proyecciones, concretamente en los valores que toma el vector de variables λ_j .

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

6.1. PROCESAMIENTO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

EFICIENCIA

Para la resolución del modelo matemático se ha utilizado el software de optimización LINGO. Es una herramienta que permite formular problemas matemáticos de optimización lineal y no lineal y resolverlos.

Uno de los rasgos más poderosos de LINGO es su aplicación en el lenguaje de modelo matemático, el cual permite expresar un problema de una manera muy similar a la anotación matemática normal pudiendo también, expresar una serie entera de restricciones en una declaración compacta. Esto lleva a modelos que son mucho más fáciles de mantener. [29]

LINGO también permite importar los datos de una hoja de Excel externa. Este hecho se presenta particularmente útil dado la gran cantidad de datos con los que opera el modelo DEA desarrollado.

Una vez se ha corrido el modelo en LINGO y se obtiene la solución del mismo esta debe ser interpretada correctamente. En primer lugar hay que identificar las variables objetivo del problema para cada DMU_j : $\widehat{x}_{ij}, \widehat{y}_{kj}, \widehat{v}_{rj}$. Estas variables objetivo representan el valor que deben obtener sus homólogas para que una DMU_j alcance la productividad de las unidades eficientes. Por tanto, una forma de ver si una DMU_j es eficiente es comprobar que:

$$\widehat{x}_{ij} = x_{ij} \quad \forall i$$

$$\widehat{y}_{kj} = y_{kj} \quad \forall k$$

$$\widehat{v}_{rj} = v_{rj} \quad \forall r$$

Es decir, una DMU_j es eficiente si cumple la condición de que todas sus variables objetivo son iguales a sus homólogas variables dato.

Un segundo procedimiento para determinar si una unidad es eficiente pasa por utilizar las funciones de pertenencia objetivo. Dichas funciones pueden ser obtenidas directamente de la solución de LINGO, o bien pueden ser calculadas en un Excel utilizando las variables objetivo de igual forma que se calcularon las funciones de pertenencia dato. Para realizar correctamente el cálculo de las funciones de pertenencia objetivo de esta segunda forma hay que tener especial cuidado en utilizar los mismos intervalos que se usaron en los datos para los valores máximo, mínimo e ideal de cada variable.

El modelo tratará de maximizar la diferencia entre una variable objetivo y su correspondiente variable dato, lo que equivale a decir que trata de maximizar la ineficiencia de la unidad al tiempo que cumple las restricciones. Por tanto una unidad será eficiente si dicha diferencia es nula para todas sus variables o, lo que es lo mismo, si:

$$\widehat{\mu}_{ij} = \mu_{ij} \quad \forall i$$

$$\widehat{\mu}_{kj} = \mu_{kj} \quad \forall k$$

$$\widehat{\mu}_{rj} = \mu_{rj} \quad \forall r$$

Si al menos una de estas funciones de pertenencia objetivo es mayor que la función dato quiere decir que la unidad presenta ineficiencias.

Por tanto se puede calcular la ineficiencia en la pertenencia de una variable (de entrada, salida o no monótona) como:

$$Ineficiencia_{(i,k,r),j} = \widehat{\mu}_{(i,k,r),j} - \mu_{(i,k,r),j}$$

Y la ineficiencia de cada DMU_j se calcularía ponderando las ineficiencias en las pertenencias de todas las variables con su correspondiente peso, tal y como hace la función objetivo del modelo matemático:

$$Ineficiencia_j = \sum_{i=1}^m w_i (\widehat{\mu}_i - \mu_{ij}) + \sum_{k=1}^p w_k (\widehat{\mu}_k - \mu_{kj}) + \sum_{r=1}^v w_r (\widehat{\mu}_r - \mu_{rj})$$

Hallar la eficiencia de una DMU_j a partir de la ineficiencia de dicha unidad es trivial:

$$Eficiencia_j = 1 - Ineficiencia_j$$

6.2. OBSERVACIONES GENERALES

Una vez realizados los cálculos pertinentes se obtienen 37 DMUs eficientes de las 101 que hay en total en el estudio. Este número de unidades eficientes puede considerarse elevado, dado que el modelo opera con retornos de escala constante, pero hay que tener en cuenta que los fondos de inversión estudiados operan en un mercado muy competitivo. Esto ocasiona que los gestores de los fondos de inversión traten de ser más eficientes para que su producto financiero sobreviva el máximo tiempo posible.

Hay que matizar que el hecho de que un fondo de inversión sea eficiente no implica necesariamente que sea bueno a criterio del decisor. Es decir, cabe la posibilidad de que un fondo de inversión “malo” sea eficiente porque se den ciertas circunstancias que lo favorezcan. Un ejemplo puede ser que no se haya incluido en el estudio otro fondo de inversión “mejor” cuyo conjunto de variables formen un punto que defina una nueva región de la frontera eficiente que no incluya al fondo de inversión “malo”. También puede darse el caso inverso: un fondo de inversión “bueno” que no es eficiente porque existe un fondo “mejor” sobre el que proyectarse.

Resumiendo, se puede afirmar que una medida atípica puede sesgar las eficiencias obtenidas. Consecuentemente, hay que ser precavidos y realizar una preselección cuidadosa de los fondos de inversión a estudiar, no incluyendo fondos excesivamente dispares y en cantidad suficiente como para que definan correctamente la frontera eficiente.

En cuanto al análisis de la solución cabe destacar que resulta un tanto más complejo que el de un modelo DEA convencional ya que, al no haber orientación predefinida, el modelo puede alterar cualquier variable que suponga una mejora en la función objetivo. Esto en la práctica supone que hay que analizar las variaciones de todas las variables del problema en lugar de un subconjunto de ellas.

6.3 ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES DE PERTENENCIA. DISPERSIÓN

Las funciones de pertenencia facilitan este análisis, ya que representan de forma normalizada el grado de bondad de una de las variables de la DMU en relación con la misma variable del resto de DMUs. Sin embargo este razonamiento, aunque intuitivo, puede resultar confuso a la hora de interpretar ciertas variables, como por ejemplo el *Rendimiento a 6 meses*. Al observar las DMUs que son eficientes en esta variable resulta extraño que la mayor parte de las pertenencias sean del orden de 0,3. Esto es

porque no se ha tenido en cuenta la dispersión de los valores de las pertenencias de la variable *Rendimiento a 6 meses*:

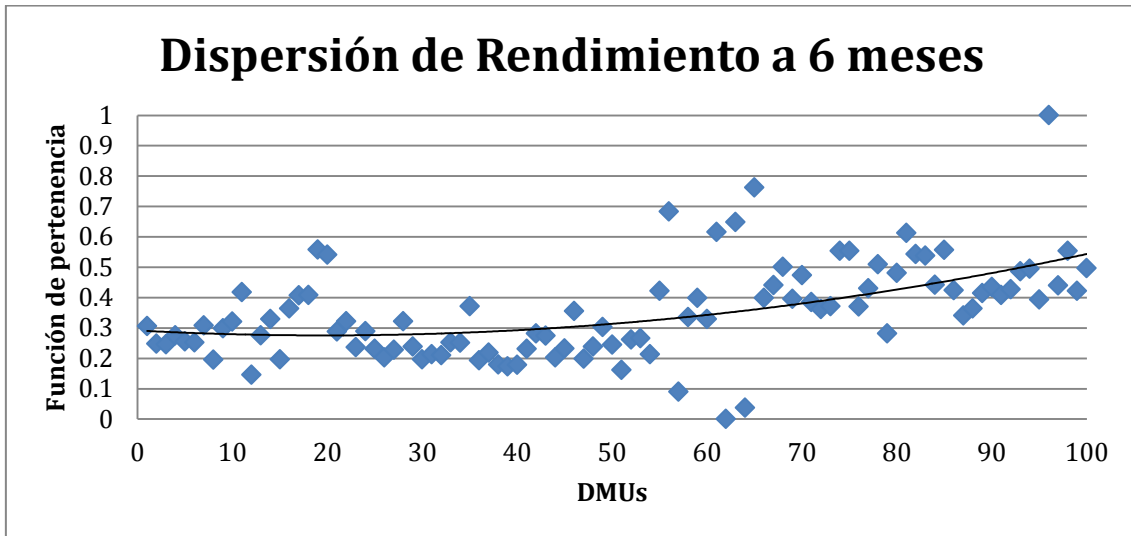


Fig.13: Dispersión de las funciones de pertenencia correspondientes a la salida "Rendimiento a 6 meses"

En el gráfico se puede observar con claridad cómo la mayoría de las DMUs tienen la pertenencia de la variable *Rendimiento a 6 meses* en el intervalo comprendido entre 0,2 y 0,5. Esto ha sido ocasionado porque la función de pertenencia se ha modelado utilizando como y_k^{max} una DMU (en concreto la DMU 96) cuyo valor de *Rendimiento a 6 meses* era mucho mayor que el resto de DMUs del estudio.

Por tanto se concluye que, aunque las funciones de pertenencia permiten obtener información útil sobre una variable, también hay que tener en cuenta la dispersión de la misma a la hora de interpretar si dichos valores de pertenencia son altos o bajos. Un ejemplo de una variable con una dispersión correcta que facilita el análisis de la pertenencia es el *Alfa*:

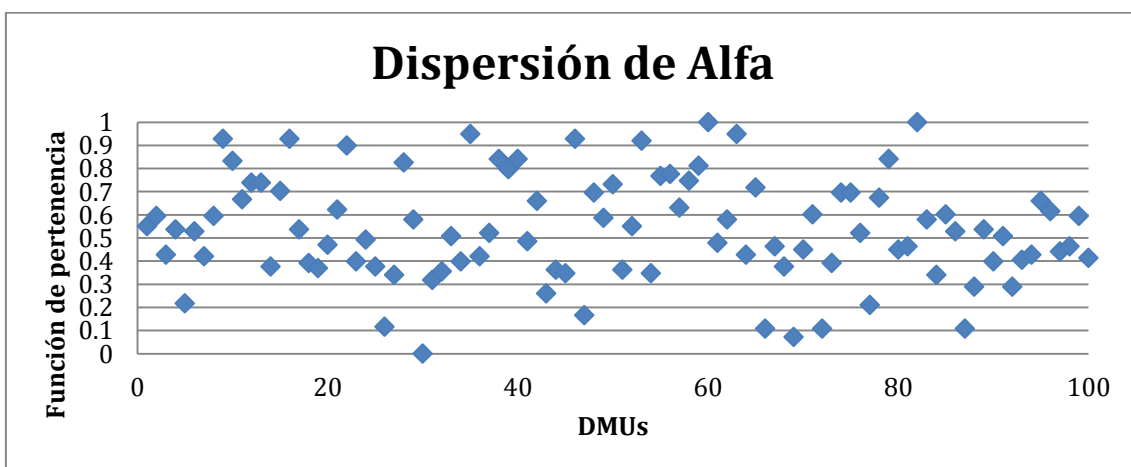


Fig. 14: Dispersión de las funciones de pertenencia correspondientes a la salida "Alfa"

El efecto de una dispersión no uniforme en las pertenencias de la variable no se percibe en las unidades eficientes, puesto que están en la frontera envolviendo al resto de DMUs. Sin embargo, si puede afectar a la hora de cuantificar las ineficiencias del resto de las DMUs ya que la función objetivo es sensible a cambios en los valores de las pertenencias.

6.4 ANÁLISIS DE LAS INEFICIENCIAS POR VARIABLES.

Al margen de un posible sesgo de dispersión en las variables, resulta interesante comparar tanto las ineficiencias entre DMUs dentro de una misma variable como genéricamente de unas variables respecto a otras.

Contabilizando para cada variable el sumatorio de todas sus ineficiencias y ponderándola con sus respectivos pesos (en adelante ineficiencia acumulada ponderada) y ordenando de mayor a menor se obtiene:

Comisión	Volatilidad	Alpha	Sharpe	R. a 2 años	Treynor	R. a 3 meses	R. a 1 año	R. a 3 años	Tracking error	R. a 6 meses	R. a 5 años	Información	Riesgo sist.
1.4727	1.2308	1.1889	0.9958	0.7538	0.7523	0.5141	0.4277	0.4091	0.3075	0.2659	0.2435	0.129	0

Fig.15: Ineficiencia acumulada ponderada por cada variable

Ya que el modelo DEA funciona maximizando el sumatorio de las ineficiencias de las variables en cada DMU, cabe esperar que aquellas variables con mayor peso presenten a su vez mayores ineficiencias acumuladas y viceversa, para que la función objetivo sea lo mayor posible. Sin embargo a partir de la tabla anterior apenas se observa una relación débil entre el peso de una variable y su ineficiencia acumulada ponderada. Por ejemplo la *Volatilidad*, que tiene un peso casi tres veces superior al de cualquier otra variable, aparece en segunda posición en vez de en la primera y el *Tracking error* o el *Rendimiento a 6 meses* tienen posiciones más bajas de las esperadas. Otras variables, como el *Alfa*, *Sharpe* o el *Índice de información* presentan una posición más acorde a esta hipótesis. Eso no quiere decir que dicha relación no exista, sólo que es más compleja y difícil de apreciar a priori, sin un estudio en profundidad. Lo que está claro es que el peso de una variable no es un factor lineal y determinante en la cantidad de ineficiencia que presenta.

Puesto que $Pertenencia\ Objetivo = Pertenencia\ Observada + Ineficiencia$, se puede descomponer la pertenencia objetivo de una variable en dicha suma y observar los resultados para cada DMU. Una de las variables que presentan mayor número de DMUs ineficientes es el *Índice de Treynor*:

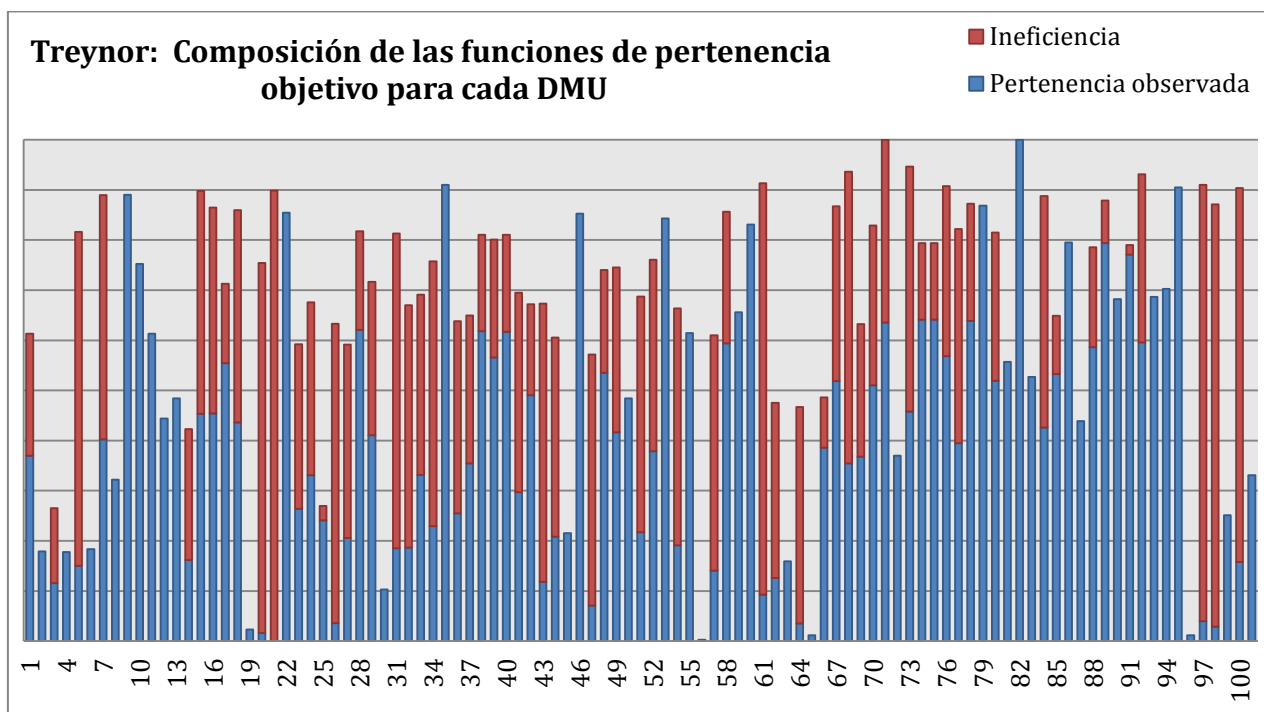


Fig. 16: Composición de la función de pertenencia objetivo de cada DMU para la salida "Treynor"

Es curioso observar como hay DMUs con valores de pertenencia bajos que no son mejorados, como la DMU 96, mientras que otros con buenas pertenencias son ineficientes y tienen que mejorar su Índice de Treynor, como es el caso de la DMU 89. La explicación a este comportamiento es que el DEA actúa sobre todas las variables de una DMU, por lo que analizar una variable concreta de forma aislada carece de sentido.

Es más interesante, por tanto, realizar el análisis para las variables de una DMU concreta. Al igual que antes, en este caso también se puede apreciar gráficamente las pertenencias objetivo de cada variable como la suma de la pertenencia observada y la ineficiencia para una DMU determinada. Se han elegido para ello dos DMUs: la de menor eficiencia global (DMU 100) y la de mayor eficiencia global de entre las ineficientes (DMU 25).

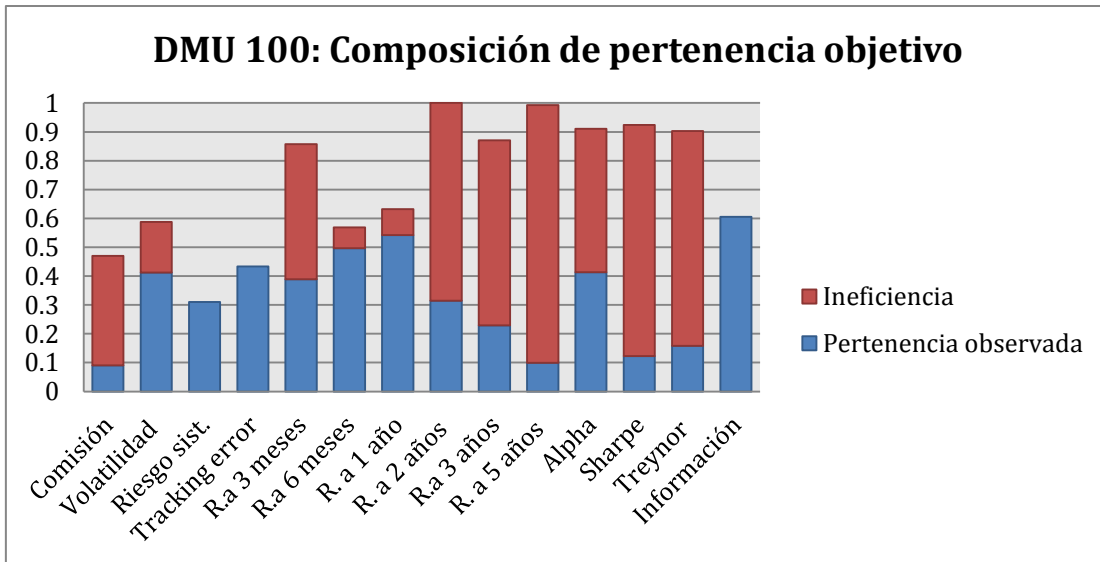


Fig.17: Composición de la pertenencia objetivo de la DMU 100 para cada variable

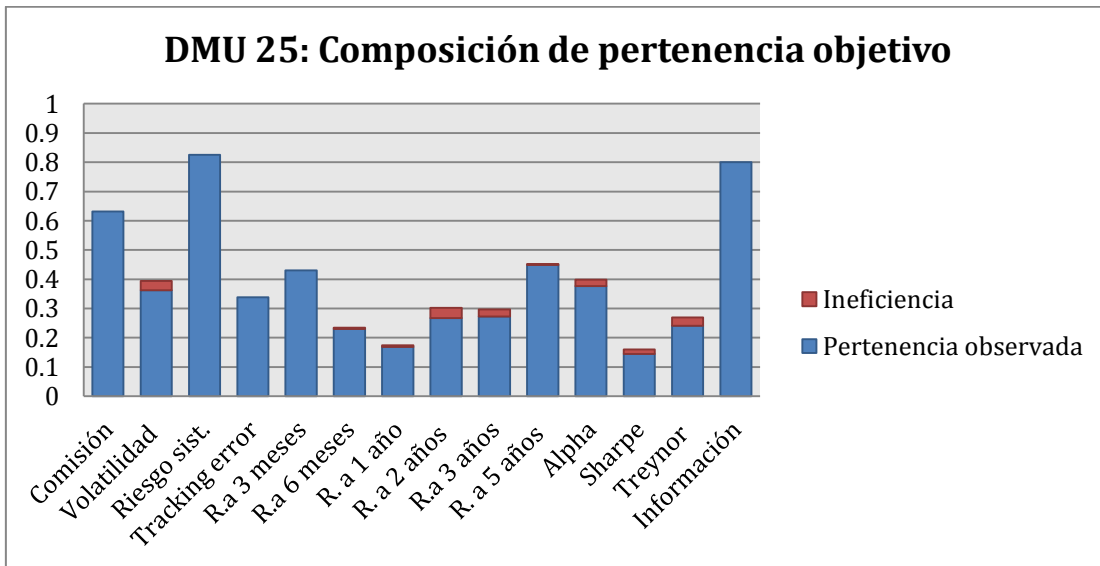


Fig.18: Composición de la pertenencia objetivo de la DMU 25 para cada variable

Estas gráficas son muy útiles, ya que se aprecia de forma rápida e intuitiva la mejora a la que debe aspirar un determinado fondo de inversión para alcanzar la productividad de los eficientes.

Además deja al descubierto la potente herramienta que es el DEA, ya que no sólo calcula la frontera que envuelve los datos, sino que es capaz de ponderar la mejora que tiene que afrontar una determinada DMU para alcanzar la eficiencia.

6.5 ANÁLISIS DEL BENCHMARK

A diferencia de otros métodos de evaluación de la eficiencia, el DEA también proporciona información sobre benchmarking, es decir, precisa sobre qué DMUs debe compararse una DMU ineficiente para alcanzar la eficiencia.

En los modelos DEA si una DMU es ineficiente se proyecta sobre la frontera eficiente creando lo que se denomina una unidad virtual. Esta unidad virtual es combinación lineal de una o varias DMUs eficientes, a las que se conoce como benchmark.

El benchmark de una DMU se puede analizar a partir de su variable λ , vector que representa la importancia que tienen otras DMUs en el punto proyección de la unidad ineficiente. Es decir, λ indica la combinación lineal de DMUs eficientes que forman la unidad virtual. Es necesario señalar que las unidades eficientes son combinación lineal de ellas mismas y que, a diferencia de los modelos de retorno de escala variable, las componentes de λ no tienen por qué sumar 1.

Aunque el aspecto más interesante del benchmarking es conocer qué unidades debe tomar como referencia una DMU ineficiente para tratar de mejorarla, en este estudio se pretende la selección de un fondo de inversión que sea eficiente y por tanto el análisis debe centrarse en estos últimos.

Bajo ese punto de vista, un dato relevante es la forma en la que se distribuyen las proyecciones acumuladas de los fondos ineficientes sobre los eficientes.

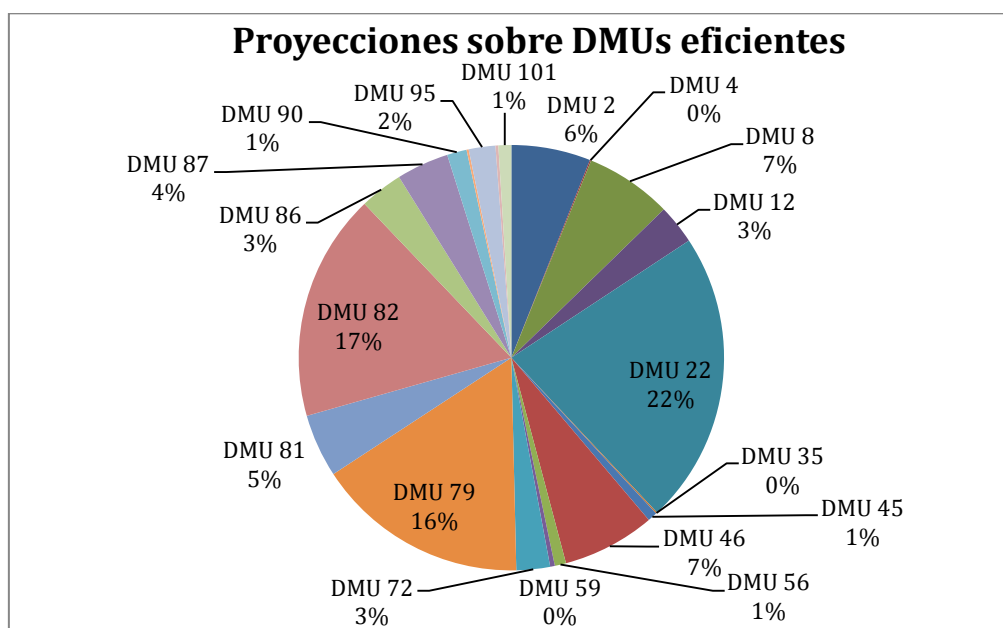


Fig.19: Distribución de proyecciones sobre las DMUs eficientes

En primer lugar resulta llamativo que un 55% de las proyecciones de fondos ineficientes se realicen únicamente sobre 3 fondos de inversión, en concreto los fondos 22, 82 y 79. Representando gráficamente sus funciones de pertenencia junto con la media del resto de DMUs para cada una de las variables:

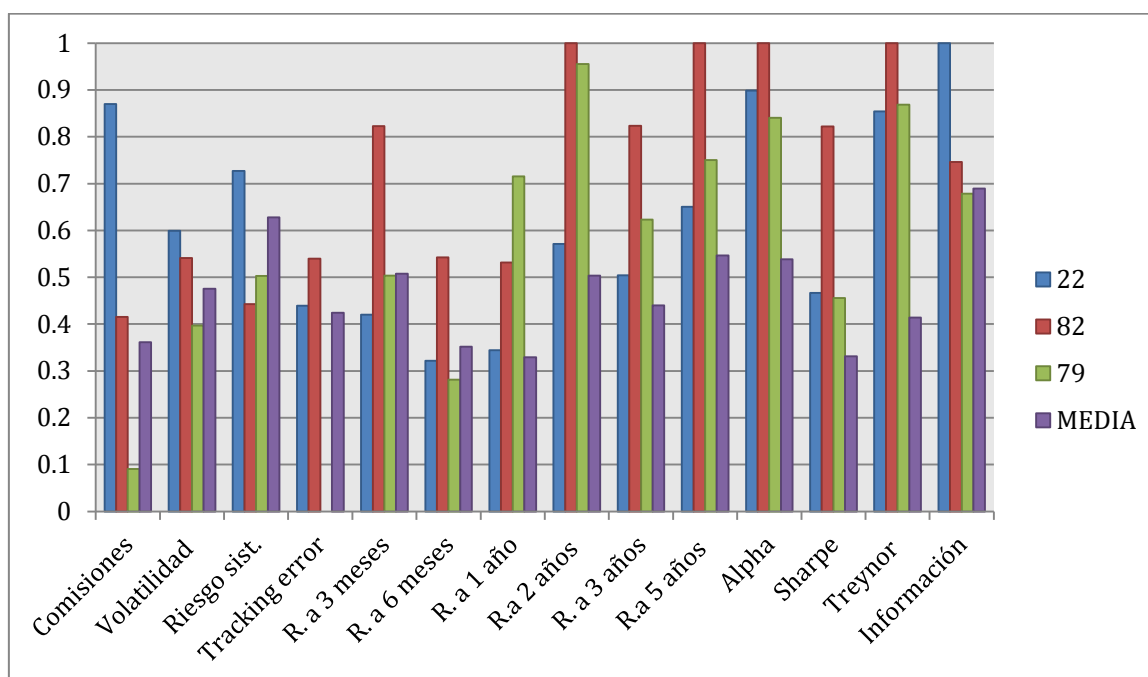


Fig.20: Funciones de pertenencia por variables de las DMUs 22, 82, 79 y comparación con la media

Observando el gráfico es lógico que las unidades ineficientes se proyecten sobre los fondos 22 y 82, ya que tienen resultados muy superiores a la media en prácticamente la totalidad de las variables. Por otra parte, los resultados del fondo 79 no son tan espectaculares, obteniendo resultados mejores que la media en 6 de los 14 criterios.

La validez del análisis del benchmark aplicado a las unidades eficientes es limitada, ya que se realiza bajo la hipótesis de que una DMU eficiente será mejor a mayor cantidad de proyecciones reciba. Sin embargo este planteamiento puede estar sesgado por una distribución no uniforme de las DMUs en el hiperespacio, de forma que el hecho de que una DMU eficiente reciba más proyecciones sea debido a que existe una mayor concentración de DMUs ineficientes en su zona.

6.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE LA VARIABLE NO MONÓTONA

El valor ideal de la función de pertenencia de la variable no monótona *Tracking error* se ha fijado de forma meditada y coherente con lo que se considera un modelado correcto del problema. Sin embargo, dicho valor depende en gran medida de las consideraciones realizadas por el analista. El objetivo de este apartado es comprobar en qué medida afectan a los resultados obtenidos hacer pequeños cambios en el valor ideal (v_r^{ideal}) de la variable no monótona.

Para ello se repetirán los cálculos cuatro veces, introduciendo las siguientes variaciones en el v_r^{ideal} original: +5%, -5%, +10% y -10%.

Con el fin de no explayarse demasiado se resumen los resultados en la tabla que se muestra a continuación, siendo la primera fila los resultados correspondientes al estudio original con el que se compara el resto:

v_r^{ideal}	Variación	Nº DMUs Eficientes	$\frac{\sum_{j=1}^n \text{Eficiencia}_{calculada} - \text{Eficiencia}_{original}}{\text{Nº de DMUs ineficientes}}$
3.5%	-	37	-
3.675%	+5%	37 (mismas)	0.024%
3.325%	-5%	37 (mismas)	-0.027%
3.85%	+10%	37 (mismas)	0.043%
3.15%	-10%	37 (mismas)	-0.07%

Tabla 1: Resultados del análisis de sensibilidad de la variable no monótona

NOTA: el ratio de la última columna de la tabla pondera la diferencia media entre la eficiencia calculada (cambiando el v_r^{ideal}) y la eficiencia original (con $v_r^{ideal} = 3,5\%$). Puesto que las DMUs eficientes no cambian durante el análisis de sensibilidad, este ratio mide dicha variación media de eficiencia únicamente en las DMUs ineficientes.

Al modificar ligeramente la función de pertenencia de la variable no monótona el modelo responde con pequeñísimas variaciones en los valores objetivos de las DMUs ineficientes mientras que las DMUs eficientes no cambian. Se concluye diciendo que estos resultados concuerdan plenamente con lo que se esperaba antes de realizar el análisis de sensibilidad.

6.7 COMPARATIVA CON VRS. EFICIENCIA DE ESCALA

El estudio se ha realizado considerando retornos de escala constante (CRS), puesto que se considera que todos los fondos de inversión son de características similares. Si por el contrario no se estuviera de acuerdo con dicha afirmación o simplemente se vuelve a realizar el estudio para otros fondos más dispares, entonces lo correcto sería utilizar la tecnología de retornos de escala variable (VRS). Transformar el modelo matemático de CRS a VRS es relativamente sencillo, basta con incluir la siguiente restricción:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

Cada tecnología mide un tipo de eficiencia. En CRS se cuantifica la eficiencia global, que refiere a cada DMU a la unidad de mayor productividad del problema. Por otro lado en VRS se valora la llamada eficiencia técnica, que consigue que cada DMU se compare con la de mayor productividad entre las de su tamaño. Ambas están relacionadas a través de la denominada eficiencia de escala de la siguiente forma [9]:

$$\textit{Eficiencia Global} = \textit{Eficiencia Técnica} * \textit{Eficiencia Escala}$$

Es decir, que la eficiencia global de una unidad viene determinada por la propia eficiencia de sus operaciones o por la escala en la que dicha unidad opera.

En la tabla que se muestra a continuación se pueden apreciar para cada DMU la Eficiencia Global solución del modelo CRS, la Eficiencia Técnica propia del modelo VRS, así como la Eficiencia de Escala que relaciona ambas. Aquellas DMUs que son eficientes en CRS también lo son en VRS, y por tanto tienen valores unitarios en las 3 eficiencias antes mencionadas. Por tanto, para facilitar la interpretación de resultados por parte del lector, se han incluido en la tabla únicamente aquellas DMUs que son ineficientes en CRS.

DMUs	Ef. Global	Ef. Técnica	Ef. Escala
1	0.916	0.920	0.995
3	0.929	0.931	0.997
5	0.829	0.835	0.993
7	0.828	0.829	0.999
14	0.929	0.930	1.000
15	0.858	0.863	0.994
16	0.916	1.000	0.916
17	0.934	0.934	0.999
18	0.850	0.852	0.998
20	0.831	0.833	0.998
21	0.819	0.835	0.982
23	0.884	0.885	1.000
24	0.911	0.918	0.993
25	0.986	1.000	0.986
26	0.797	0.797	1.000
27	0.887	0.930	0.953
28	0.924	0.926	0.998
29	0.877	0.877	1.000
31	0.740	0.744	0.995
32	0.819	0.823	0.995
33	0.845	0.851	0.993
34	0.864	0.870	0.993
36	0.825	0.829	0.995
37	0.869	0.870	0.998
38	0.894	0.894	1.000
39	0.882	0.883	0.999
40	0.893	0.894	1.000
41	0.874	0.881	0.993
42	0.926	0.926	1.000
43	0.835	0.835	1.000
44	0.856	0.863	0.992
47	0.809	0.811	0.997
48	0.906	0.908	0.999
49	0.911	0.916	0.994
51	0.843	0.843	1.000
52	0.891	0.895	0.996
54	0.873	0.873	1.000
57	0.789	0.793	0.996
58	0.886	0.905	0.980
61	0.762	1.000	0.762
62	0.738	0.741	0.996
64	0.738	0.744	0.993
66	0.957	0.958	1.000
67	0.913	1.000	0.913
68	0.782	0.782	1.000
69	0.925	1.000	0.925
70	0.866	0.868	0.997
71	0.886	0.894	0.991
73	0.867	0.868	0.999
74	0.913	0.916	0.997
75	0.913	0.916	0.997
76	0.888	0.890	0.998
77	0.873	0.877	0.996
78	0.877	0.878	0.999
80	0.918	0.922	0.995
84	0.838	0.840	0.998
85	0.920	1.000	0.920
88	0.881	0.890	0.990
89	0.961	0.963	0.998
91	0.956	0.963	0.993
92	0.890	0.890	1.000
97	0.705	0.784	0.900
98	0.716	0.785	0.912
100	0.689	0.762	0.905

Tabla 2: Comparativa de eficiencias de las tecnologías CRS y VRS. Eficiencias de escala

Aplicando tecnología VRS se obtienen un total de 43 fondos de inversión eficientes, 6 más que en CRS, lo cual corrobora lo esperado. Esas 6 DMUs que son eficientes en VRS y no lo son en CRS aparecen en la tabla sombreados para facilitar su identificación.

Nótese lo cercanas a la unidad que salen las eficiencias de escala calculadas en casi todas las DMUs. Exceptuando a la DMU 61, el resto tienen todas unas eficiencias de escala superior a 0.9. Esto quiere decir que existe poca diferencia de tamaño y que, por tanto, se ha hecho lo correcto aplicando tecnología CRS en el estudio.

La gran perjudicada de aplicar tecnología CRS sería la anteriormente mencionada DMU 61 ya que, analizando sus datos, se observa claramente que tiene un tamaño diferente a los del resto de DMUs. Es decir, mientras la mayoría de fondos de inversión tienen un perfil de riesgo más moderado, el fondo 61 tiene un claro perfil de riesgo alto, ofreciendo a cambio unas buenas rentabilidades que le hacen alcanzar la eficiencia en VRS.

7. PRIORIZACIÓN DE LOS FONDOS DE INVERSIÓN

7.1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVO

En los capítulos anteriores se han evaluado mediante DEA difuso todos los fondos de inversión y determinado cuáles son eficientes. A pesar de este filtrado, el resultado sigue siendo demasiado amplio como para presentárselo a un posible inversor. Así pues, el objetivo de este capítulo es tratar de reducir aún más el número de alternativas.

Para ello se hace uso del denominado Proceso Analítico Jerárquico (AHP por sus siglas en inglés) [30]. El AHP es una herramienta que permite hacer frente a decisiones complejas en las que se tienen que evaluar varias alternativas mediante una serie de criterios.

El método AHP subdivide el problema en una jerarquía para facilitar su tratamiento y comprensión, de forma que en su extremo superior se encuentre el GOAL o satisfacción a alcanzar, en su base se encuentren las alternativas a evaluar y en la zona intermedia los criterios agrupados en niveles.

Añadir que este capítulo está concebido como una aplicación del método AHP para un objetivo concreto: realizar una priorización justificada entre los fondos de inversión eficientes obtenidos mediante DEA difuso. Por tanto no se realizará una revisión teórica exhaustiva del método AHP, limitándonos a esbozar los conceptos generales. Un lector interesado puede encontrar más información en el Anexo I.

Cabe destacar que también justifica incluir la priorización de los fondos en este estudio el hecho de que para determinar los pesos de las variables del DEA es necesario realizar un AHP con la misma jerarquía.

7.2. BREVE EXPLICACIÓN DEL PROCEDIMIENTO AHP

7.2.1. JERARQUÍA:

La jerarquía del AHP es la encargada de relacionar las alternativas con el GOAL, a través de una serie de criterios agregados en niveles según considere el analista que modela mejor el problema. El objetivo de la jerarquía es facilitar las comparaciones dos a dos entre los criterios que cuelgan de un mismo nodo. De esta forma, una jerarquía que modele el problema de selección de fondos de inversión puede ser:

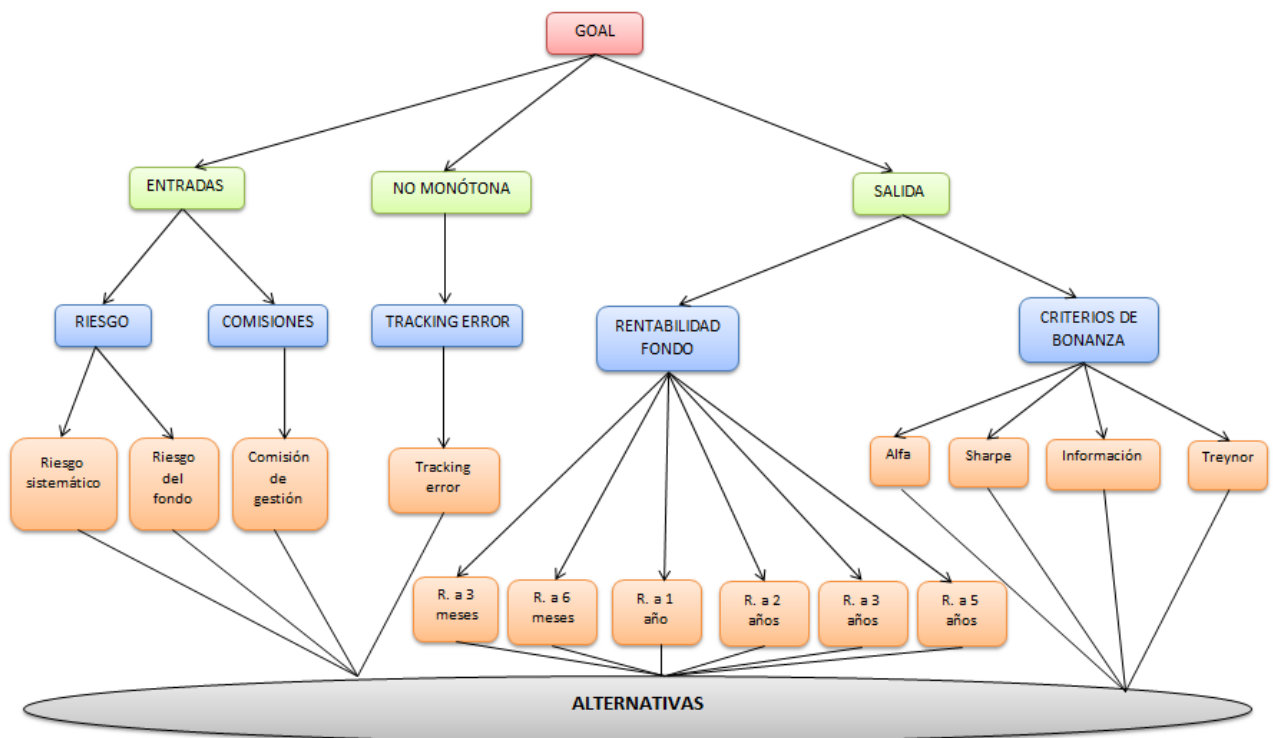


Fig.21: Jerarquía AHP

7.2.2. IMPORTANCIAS RELATIVAS DE LOS CRITERIOS Y DE LAS ALTERNATIVAS:

Una vez se obtiene la jerarquía del problema, se establecen las importancias relativas entre criterios. Esto es, empezando por el GOAL y para cada nivel, comparar dos a dos los criterios que cuelgan de un nodo. De esta forma, se construye una matriz cuadrada para cada nodo en la que se van estableciendo las importancias relativas de cada uno de los criterios. Para ello se ha contado con la ayuda de un experto en fondos de inversión. Posteriormente dicha matriz se normaliza por columnas, se establecen el vector de importancias relativas de cada uno de los criterios de un nodo y se analiza si su consistencia es válida. Tras este proceso se obtienen las importancias relativas de los criterios, que agregándose dan lugar a los pesos de las variables del DEA:

VARIABLES	PESOS
Volatilidad fondo	24.49%
Riesgo sistemático	6.12%
Comisión gestión	10.20%
Tracking error	8.16%
R. 3 meses	9.72%
R. 6 meses	8.10%
R. a 1 año	6.48%
R. a 2 años	4.86%
R. a 3 años	3.24%
R. a 5 años	1.62%
Alfa	6.18%
Sharpe	6.18%
Información	1.55%
Treynor	3.09%

Tabla 3: Pesos de las variables del DEA

El siguiente paso es establecer para cada criterio las importancias relativas de cada alternativa. El proceso es idéntico al anterior salvo por la forma en que se establecen dichas importancias ya que, en lugar de utilizar el criterio de un experto, se automatiza el cálculo a partir de los datos de cada fondo de inversión. Este cálculo varía en función de si se realiza para una entrada, una salida o una variable no monótona. Por ejemplo, si se quiere establecer la importancia relativa de la alternativa 1 (w_1) sobre la alternativa 2 (w_2) sería:

- Para las entradas, puesto que se considera mejor cuanto menor sean, se haría:

$$\frac{w_2}{w_1}$$

- Por el contrario para las salidas cuanto mayores sean mejor, por lo que:

$$\frac{w_1}{w_2}$$

- En cuanto a las variables no monótonas la única forma de establecer su importancia relativa es utilizar las funciones de pertenencia en lugar de los datos, ya que modela lo cerca que está una alternativa al valor ideal.

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Hay que destacar que las matrices de importancias relativas de alternativas que se obtienen de esta forma son plenamente consistentes, lo que facilita enormemente el proceso.

En cuanto a la utilización de funciones de pertenencia en el AHP hay que decir que no es algo novedoso, dando lugar al llamado AHP difuso o fuzzy AHP (FAHP). La metodología FAHP se puede dividir en 3 etapas "La primera implica el uso de números fuzzy triangulares para transformar las ideas de expertos en una matriz de reciprocidad positiva. En segundo lugar, un método de media geométrica que pesa los valores parciales para cada opción, con la conexión jerárquica establecida y, finalmente, una función de pertenencia para cada opción que desarrolló la clasificación de prioridades." [31]

El FAHP es especialmente útil a la hora de trabajar con información imprecisa. Sin embargo, ese no es el caso del estudio que nos ocupa, ya que se dispone información cuantitativa de cada una de los criterios. La dificultad está en establecer las importancias relativas entre las alternativas en la variable "Tracking error", puesto que se comporta de forma no monótona. Por tanto se ha decidido usar las funciones de pertenencia únicamente para establecer las importancias relativas de las alternativas en dicho criterio. Para las variables de entrada y salida se han utilizado los datos originales, ya que usar las funciones de pertenencia supondría escalar de forma diferente cada alternativa, pudiendo alterar las importancias relativas entre ellas.

7.3. RESULTADOS DEL AHP Y ANÁLISIS

El objetivo es seleccionar un fondo de inversión entre los 37 que han salido eficientes según el DEA difuso, por lo que se procederá según el modo de agregación ideal, que permite seleccionar una alternativa. Se realiza una priorización según la puntuación (score) que obtiene cada fondo de inversión.

DMU	Score GOAL	Prioridad	DMU	Score GOAL	Prioridad
86	0.651	1ª	53	0.433	20ª
2	0.636	2ª	35	0.427	21ª
82	0.572	3ª	60	0.420	22ª
94	0.536	4ª	10	0.420	23ª
95	0.534	5ª	11	0.414	24ª
93	0.513	6ª	55	0.402	25ª
65	0.510	7ª	59	0.393	26ª
81	0.509	8ª	13	0.386	27ª
56	0.500	9ª	6	0.382	28ª
63	0.491	10ª	19	0.380	29ª
99	0.486	11ª	4	0.380	30ª
22	0.477	12ª	87	0.373	31ª
79	0.474	13ª	72	0.372	32ª
46	0.474	14ª	8	0.361	33ª
101	0.466	15ª	50	0.361	34ª
90	0.463	16ª	45	0.302	35ª
83	0.453	17ª	12	0.279	36ª
9	0.437	18ª	30	0.200	37ª
96	0.434	19ª			

Tabla 4: Priorización de los fondos de inversión eficientes aplicando AHP

Es necesario puntualizar que la priorización que se ha realizado en este estudio no exime al decisor de realizar un análisis detallado. Es decir, el inversor debe tomar este estudio como una referencia o ayuda en su decisión, más que como la decisión en sí misma. Esto implica que no debe invertir en la primera opción a ciegas, sino que debería analizar como mínimo las 5 primeras opciones para asegurarse que elige un fondo de inversión adecuado a su perfil de inversor. También debe tener en cuenta otros detalles no incluidos en el estudio, como pueden ser el umbral mínimo de inversión, comisiones de suscripción, de depósito o de reembolso y situaciones anómalas e inestables del mercado.

Una forma rápida de realizar una comparativa es a través de las funciones de pertenencia. Poniendo como ejemplo a los 5 primeros fondos de inversión:

DMU	Comisión gestión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R. a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Índice de información
86	1.000	0.684	0.473	0.003	0.646	0.423	0.461	0.758	0.777	0.886	0.529	0.928	0.795	0.343
2	0.831	1.000	0.596	0.000	0.389	0.247	0.355	0.454	0.299	0.235	0.594	0.361	0.179	0.000
82	0.416	0.541	0.443	0.540	0.823	0.543	0.532	1.000	0.823	1.000	1.000	0.822	1.000	0.746
94	0.416	0.645	0.465	0.311	0.747	0.495	0.495	0.778	0.780	0.930	0.428	0.833	0.702	0.637
95	0.524	0.648	0.473	0.216	0.625	0.393	0.420	0.850	0.870	0.993	0.659	1.000	0.905	0.682

Tabla 5: Análisis de las funciones de pertenencia de los 5 primeros fondos de inversión

Se observa que los fondos seleccionados tienen resultados muy satisfactorios y se puede apreciar claramente su perfil de riesgo según la pertenencia de las entradas y salidas. Los fondos de inversión 86, 94 y 95 tienen un perfil de riesgo medio y resultados similares, lo cual tiene sentido ya que los tres operan principalmente en Norteamérica. Sin embargo el 86 destaca gracias a una comisión de gestión más baja y a una volatilidad algo menor. Por otra parte el fondo 2 es más bien de riesgo bajo, con resultados más modestos. Por último el fondo 82 entraría dentro de un perfil de riesgo medio-alto, con mayor volatilidad pero compensándolo con resultados notables tanto en las rentabilidades como en los criterios de bonanza.

8. RESUMEN Y CONCLUSIONES

La aplicación de lógica difusa permite que tanto el DEA como el AHP sean mucho más flexibles a la hora de modelar la realidad, permitiendo representar comportamientos complejos con cierta sencillez. Esta flexibilidad es tal que incluso se pueden realizar análisis de sensibilidad o análisis de escenarios sin cambios sustanciales en el modelo, declarando inicialmente la variable a estudiar cómo no monótona y modificando su función de pertenencia según convenga. Se puede afirmar que las posibilidades de la aplicación de la lógica difusa a las herramientas de toma de decisiones, como el DEA o el AHP, son enormes.

Además las funciones de pertenencia facilitan la comprensión y el análisis de las soluciones, ya que representan de forma normalizada el grado de bondad de una de las variables de la DMU en relación con la misma variable del resto de DMUs. Sin embargo este análisis debería realizarse atendiendo a la dispersión de las pertenencias de la variable en cuestión. El caso ideal, por la facilidad de su interpretación, sería el de una variable cuyas DMUs tengan las pertenencias uniformemente dispersas.

Hay que añadir que los resultados obtenidos tanto en el DEA como en el AHP han sido coherentes y en general bastante satisfactorios. Esto no implica que su validez sea incuestionable, puesto que en el marco de las decisiones financieras la incertidumbre y el riesgo siempre están presentes. Este trabajo se ha ideado más bien como una ayuda en la toma de decisiones de inversión: valora un gran número de criterios diferentes para cada fondo de inversión, descartando los que no son eficientes y posteriormente asignándole una prioridad a los que sí lo son. El DEA actúa por tanto como filtro o tamiz, eliminando aquellos que por sus características quedan fuera de la frontera envolvente mientras que el AHP ordena los fondos eficientes, recomendándoselos al decisor según la prioridad obtenida. En última instancia compete a éste realizar un análisis pormenorizado de los fondos de inversión que considere más relevantes antes de tomar su decisión definitiva.

En cuanto a los posibles puntos de mejora y las futuras líneas de investigación hay algunas ideas que comentar.

En primer lugar, convendría hacer una revisión exhaustiva de la solidez y conveniencia del modelo desde el punto de vista financiero. También existen variables que habrían sido interesantes incluirlas en el modelo, como pueden ser "Frecuencia de pérdida", "Máxima caída de un fondo" o "Promedio de pérdida".

Además cabe añadir que la lógica difusa se podría haber aplicado para modelar comportamientos más complejos a los estudiados, como pueden ser la categoría del fondo de inversión atendiendo a su perfil de riesgo o incorporar valoraciones subjetivas del fondo o del mercado por parte de expertos, publicaciones especializadas o incluso por parte del propio decisor.

En cuanto a la recopilación de los datos, se han observado ciertas discrepancias según la fuente que se consulte. Puesto que no especifican exactamente la forma de cálculo, se ha tenido que realizar algunas suposiciones. Por tanto lo ideal sería tomar el histórico de valores liquidativos y proceder al cálculo de las variables necesarias.

De cara a establecer correctamente la frontera eficiente del DEA es necesario hacer una preselección cuidadosa de los fondos de inversión a estudiar, sin incluir fondos de características muy dispares y en cantidad suficiente para que definan la frontera envolvente.

Aunque los fondos de inversión representan, por definición, a la diversificación, no está de más y es aconsejable repartir el capital entre varios fondos de inversión en lugar de destinarlo a uno sólo. Así se trata de evitar grandes pérdidas debido a malas decisiones de gestión, a fluctuaciones del mercado del fondo o a otras anomalías. Con este fin sería recomendable utilizar alguna técnica de optimización multiobjetivo que complete (o sustituya) la priorización del AHP. Los objetivos a evaluar serían maximizar el beneficio esperado de la cartera construida, minimizar su volatilidad y minimizar el sumatorio de las correlaciones entre los fondos de inversión de la cartera. En esta última función objetivo cuanto menor sumatorio de correlaciones significa que la cartera está mejor diversificada. Previamente habría que construir una matriz de correlaciones entre los fondos dos a dos a partir del histórico de datos. Además en las restricciones debe incluirse que para invertir en un fondo hay que sobrepasar el umbral mínimo de inversión, que se adapte al perfil del decisor en función de su nivel de aversión al riesgo, a la inversión inicial que pretenda realizar y al horizonte temporal previsto para su inversión. Incluso, siguiendo con la temática de este trabajo, se podría aplicar con éxito los principios de la lógica difusa para modelar el problema lo más fielmente a la realidad posible.

Por último, futuras investigaciones pueden estar relacionadas con la realización de un módulo para el seguimiento de la inversión realizada. En esta línea, en DEA se puede utilizar el índice de Malmquist para evaluar cómo ha afectado el tiempo transcurrido a los fondos de inversión. También sería interesante combinarlo con otras herramientas de decisión, como AHP u optimización multiobjetivo para, aprovechando que los fondos de inversión no tributan en los traspasos, reposicionar nuestra inversión en un lugar más ventajoso.

9. BIBLIOGRAFÍA

- [1] CNMV. (s.f.). *CNMV-Curso: Los fondos de inversión y la inversión colectiva*. Recuperado el 28 de diciembre de 2016, de CNMV:
<http://www.cnmv.es/TutorialFondos/tema1/cap0/acces/pag1.html>
- [2] Banco de España & CNMV. (s.f.). *Glosario*. Recuperado el 12 de diciembre de 2016, de Finanzas para todos:
http://www.finanzasparatodos.es/es/secciones/glosario?matchesPerPage=10&displayPages=10&searchPage=4&query=C*
- [3] CNMV. (s.f.). *Vocación inversora*. Recuperado el 12 de febrero de 2017, de CNMV:
<https://www.cnmv.es/Portal/inversor/Fondos-Vocacion.aspx>
- [4] Markowitz, H. M. (1968). *Portfolio selection: efficient diversification of investments* (Vol. 16). Yale University Press.
- [5] Sevilla-Arias, A. (s.f.). *Benchmark*. Recuperado el 12 de febrero de 2017, de Economipedia: <http://economipedia.com/definiciones/benchmark.html>
- [6] Alegre, D. P. (2016). *Análisis rentabilidad-riesgo de los Fondos de inversión de renta variable en España en la última década*. (Tesis doctoral).
- [7] Sánchez, J. L. F. (2014). Fondos y sociedades de inversión mobiliaria. En *Manual del asesor financiero* (pp. 277-294). Thomson-Paraninfo.
- [8] Enciclopediafinanciera.com. (s.f.). *Tracking error*. Recuperado el 23 de febrero de 2017, de <http://www.encyclopediafinanciera.com/definicion-tracking-error.html>
- [9] Cook, W. D., Cooper, W. W., Seiford, L. M., & Tone, K. (2001). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*.
- [10] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- [11] Güemes-Castorena, D. *Análisis de la Envoltura de Datos: Usos y Aplicaciones* (2004). *Sinergi@ Productiv@*, Vol. 2, 2, 7- 12/ Recuperado de http://homepages.mty.itesm.mx/guemes/documents/An%E1lisis_de_la_Envoltura_

de_Datos.pdf

- [12] Villa, G. (2003). Análisis por envoltura de datos (DEA): Nuevos modelos y aplicaciones. Tesis doctoral.
- [13] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078-1092.
- [14] Hurtado, S. M. (2006). Estado de la cuestión acerca del uso de la lógica difusa en problemas financieros. *Cuadernos de administración*, 19(32), 195-223.
- [15] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.
- [16] Velasco, O. G. D. (1999). Sistemas de lógica difusa: fundamentos. *Ingeniería e Investigación*, (42), 22-30.
- [17] Salas, R. (2007). Lógica Difusa. *Universidad de Valparaíso*. Recuperado el 24 de enero de 2017, 11.
- [18] Arroyo-Fernández, M. J. (s.f.). *Inflación*. Recuperado el 7 de febrero de 2017, de Expansión: <http://www.expansion.com/diccionario-economico/inflacion.html>
- [19] Villa, G., & Lozano, S. (2016). DEA with non-monotonic variables. Application to EU governments' macroeconomic efficiency. *Journal of the Operational Research Society*, 67(12), 1510-1523.
- [20] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- [21] Ciriaco, A., Del Rio, C., & Santamaría, R. (2003). ¿Tienen los inversores habilidades de selección?: Resultados con fondos de inversión. *Revista de Economía Aplicada*, 11(32), 51-75.
- [22] Crespo, R. M. (2007). Rentabilidad y crecimiento patrimonial en el mercado de fondos de inversión. *Revista de Economía Aplicada*, 15(44), 41-84.
- [23] Ferruz Agudo, L., & Vargas Magallón, M. S. (2004). *Persistencia en la performance de los fondos de inversión españoles de renta variable nacional (1994-2002)*. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Zaragoza.
- [24] OCU Inversiones. (s.f.). *Fondos de Inversión*. Recuperado el 2 de diciembre de 2016, de OCU Inversiones: <https://www.ocu.org/inversiones/fondos/>

- [25] ANDBANK-Private Bankers. (2 de diciembre de 2014). *¿Qué es el tracking error?* Recuperado el 7 de enero de 2017, de ANDBANK-Private Bankers: <http://www.andbank.es/observatoriodelinversor/que-es-el-tracking-error/>
- [26] Jiménez, J. (16 de Enero de 2015). *Fondos de inversión: Los ratios más populares para hacer comparaciones*. Recuperado el 7 de enero de 2017, de Inversión y Finanzas: <http://www.finanzas.com/noticias/mercados/fondos-inversion/20150116/fondos-inversion-ratios-populares-2847545.html>
- [27] Rodríguez Graña, Ó. (24 de Abril de 2014). *Guía para interpretar correctamente las ratios de la ficha de un fondo*. Recuperado el 8 de enero de 2017, de Funds people: <http://es.fundspeople.com/news/guia-para-interpretar-correctamente-las-ratios-de-la-ficha-de-un-fondo>
- [28] Cambón, M. I. C. (2011). *Rentabilidad de los fondos de inversión españoles: un análisis de sus determinantes*. CNMV: Documento de trabajo, (48).
- [29] Canizo, E., & Lucero, P. (2002). *Software Para Programación Lineal– LINGO/LINDO*. Recuperado de UTN-FRM: http://www1.frm.utn.edu.ar/ioperativa/lingo_lindo.pdf
- [30] Saaty, T. L. (2000). *Fundamentals of decision making and priority theory with the analytic hierarchy process* (Vol. 6). Rws Publications.
- [31] Huang, L. C., & Wu, R. Y. H. (2005). Applying fuzzy analytic hierarchy process in the managerial talent assessment model—an empirical study in Taiwan's semiconductor industry. *International Journal of Technology Management*, 30(1-2), 105-130.
- [32] Jiménez, J. M. M. (2002). El proceso analítico Jerárquico (AHP). Fundamentos, metodología y aplicaciones. En: Caballero, R. y Fernández, G.M. Toma de decisiones con criterios múltiples. *RECT@. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*. Serie Monografías, núm. 1, 21-53
- [33] Wind, Y., & Saaty, T. L. (1980). Marketing applications of the analytic hierarchy process. *Management science*, 26(7), 641-658.

ANEXOS

Anexo I: Proceso de Análisis Jerárquico (AHP)

El Analytic Hierarchy process (AHP) fue desarrollado en los setenta por Thomas Saaty [30] como un instrumento de decisión multicriterio. El objetivo del AHP es establecer una priorización entre las alternativas o bien distribuir cierto recurso entre ellas teniendo en consideración diversos criterios tanto cuantitativos como cualitativos.

Para poder aplicar la herramienta AHP a un problema, éste tiene que cumplir ciertos principios:

- Principio de descomposición: el problema debe poder estructurarse en una jerarquía bien definida.
- Principio de comparación: permite hacer comparaciones por parejas de forma unívoca entre los atributos de un mismo nivel que cuelgan de una rama.
- Principio de síntesis: permite obtener las prioridades globales agregando las prioridades locales.

El problema se modela a través de una jerarquía para su resolución, la cual incluye:

- En la parte superior de la jerarquía se encuentra el objetivo global (GOAL) del problema.
- Los criterios, que relacionan el GOAL con las alternativas. Pueden estar agregados en más de un nivel, según considere el decisor que simplifica el entendimiento del problema.
- En la base de la jerarquía se encuentran las alternativas que se pretenden estudiar.

La jerarquía resultante debe ser completa, representativa (incluye todos los atributos relevantes), no redundante, y minimalista (no incluye aspectos irrelevantes). Su construcción es la parte más creativa del proceso de resolución, pudiendo aparecer posiciones enfrentadas entre los distintos participantes [32].

El siguiente paso del método AHP es realizar matrices de comparaciones por pares para los criterios y las alternativas. Es decir, siguiendo la jerarquía, se comparan dos a

dos los criterios que cuelgan de una rama (u objetivo principal), estableciendo las importancias relativas de cada par. Igualmente, se establecen las importancias relativas según cada uno de los criterios con los que se relaciona. De esta forma, una matriz de comparación "A" quedaría como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo el elemento a_{12} expresa la preferencia del criterio 1 respecto al criterio 2. Es trivial señalar que la diagonal siempre va a estar compuesta por unos, ya que se está comparando al criterio o a la alternativa correspondiente consigo mismo.

Se puede afirmar que una matriz de comparaciones es totalmente consistente si cumple la propiedad de transitividad para todos sus elementos: $a_{ij} = a_{ik} * a_{kj}$

Cuando los criterios son cualitativos se recurre a la denominada "escala de Saaty" para establecer las importancias relativas de los pares y rellenar la matriz:

a_{ij}	ESCALA DE SAATY
1	Los elementos "i" y "j" son de igual importancia para el criterio "k"
3	El elemento "i" es preferible al "j" para el criterio "k"
5	El elemento "i" es claramente preferible al "j" para el criterio "k"
7	El elemento "i" mucho mejor que "j" para el criterio "k"
9	El elemento "i" es absolutamente superior al "j" para el criterio "k"
2,4,6,8	Valores intermedios a los anteriores

Tabla 7: Escala de Saaty

Saaty también propone 4 axiomas para realizar buenas aproximaciones siguiendo la metodología AHP [30]:

- Axioma de reciprocidad: al completar la matriz de comparación por pares para los criterios y las alternativas, todos los elementos de dicha matriz deben cumplir que $a_{ij} = 1/a_{ji}$.
- Axioma de homogeneidad: los elementos que se comparan deben tener el mismo orden de magnitud.
- Axioma de independencia: las prioridades de los criterios son independientes de las características de las alternativas.
- Axioma de completitud: la jerarquía se supone completa a efecto de la toma de decisiones.

El siguiente paso es estimar el autovector de importancias relativas. Las matrices de comparación se normalizan por columnas:

$$A_{normalizada} = \begin{bmatrix} 1/c_1 & a_{12}/c_2 & \dots & a_{1n}/c_n \\ a_{21}/c_1 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/c_1 & a_{n2}/c_2 & \dots & 1/c_n \end{bmatrix}$$

Siendo $c_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$

A partir de la matriz de comparación normalizada se calculan el vector columna de pesos de los criterios haciendo el promedio por filas:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{1j}/c_j \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{2j}/c_j \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{nj}/c_j \end{bmatrix}$$

El procedimiento matemático seguido en la obtención de las prioridades locales es el método del autovector principal por la derecha [33]:

$$Aw = \lambda_{max}w$$

Siendo A la matriz de comparaciones recíproca, λ_{max} su autovalor principal y w el vector de prioridades locales.

Si la matriz es consistente entonces $\lambda_{max} = n$.

Una de las propiedades del AHP es que se permite cierta inconsistencia en los juicios del decisor e incluye una metodología para evaluarla. No se exige, por tanto, la propiedad de transitividad. Si dicho grado de inconsistencia es aceptable, puede continuarse con el proceso de decisión, pero en caso contrario deberá revisarse la matriz de comparación correspondiente.

Para calcular la inconsistencia, se calcula la razón de consistencia (RC) como el cociente del índice de consistencia (IC) y el índice de consistencia aleatorio (ICA):

$$RC = \frac{IC}{ICA}$$

Siendo:

$$IC = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

El índice de consistencia aleatorio está tabulado para los distintos tamaños de matrices (n):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
ICA	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	...

Tabla 8: Índice de consistencia aleatorio (ICA)

Se considera que la consistencia de una matriz es aceptable si RC <10%.

Por otra parte, antes de calcular la importancia global de cada alternativa hay que decidir qué modo de agregación resulta más conveniente utilizar.

- Modo distribuido: los pesos se normalizan según su suma. De esta forma el sumatorio de los pesos da como resultado 1. El modo distribuido es especialmente adecuado para ordenar alternativas o para repartir recursos entre ellas.
- Modo ideal: el autovector de pesos se normaliza entre su máxima componente. El modo ideal resulta apropiado si se pretende elegir una alternativa o establecer prioridades y es más conveniente que el distribuido si existen un gran número de alternativas.

Posteriormente, se puede proceder al cálculo de las importancias de cada alternativa en cada nodo, empezando desde el nivel más bajo y normalizando según el modo de agregación que se haya elegido, hasta obtener la importancia global o GOAL de dicha alternativa.

Anexo II: Particularización del modelo matemático

Variable	Tipo	Abreviatura
Comisión de gestión	I	COM
Volatilidad	I	VOL
Riesgo sistemático	I	RSIST
Tracking error	V	TE
Rendimiento mercado (ND)	O_{ND}	RMER
Rendimiento a 3 meses	O_D	R3M
Rendimiento a 6 meses	O_D	R6M
Rendimiento a 1 año	O_D	R1A
Rendimiento a 2 años	O_D	R2A
Rendimiento a 3 años	O_D	R3A
Rendimiento a 5 años	O_D	R5A
Índice Alfa	O_D	ALFA
Índice Sharpe	O_D	SHARPE
Índice Treynor	O_D	TREYNOR
Índice de información	O_D	INFO

Tabla 6: Abreviatura de las variables del DEA

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \left[& \left(w_{COM}(\widehat{\mu}_{COM} - \mu_{COM,o}) + (w_{VOL}(\widehat{\mu}_{VOL} - \mu_{VOL,o}) + (w_{RSIST}(\widehat{\mu}_{RSIST} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \mu_{RSIST,o})) + (w_{TE}(\widehat{\mu}_{TE} - \mu_{TE,o})) + (w_{R3M}(\widehat{\mu}_{R3M} - \mu_{R3M,o}) + w_{R6M}(\widehat{\mu}_{R6M} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \mu_{R6M,o}) + w_{R1A}(\widehat{\mu}_{R1A} - \mu_{R1A,o}) + w_{R2A}(\widehat{\mu}_{R2A} - \mu_{R2A,o}) + w_{R3A}(\widehat{\mu}_{R3A} - \mu_{R3A,o}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. w_{R5A}(\widehat{\mu}_{R5A} - \mu_{R5A,o}) + w_{ALFA}(\widehat{\mu}_{ALFA} - \mu_{ALFA,o}) + w_{SHARPE}(\widehat{\mu}_{SHARPE} - \mu_{SHARPE,o}) + \right. \right. \\
 & \left. \left. w_{TREYNOR}(\widehat{\mu}_{TREYNOR} - \mu_{TREYNOR,o}) + w_{INFO}(\widehat{\mu}_{INFO} - \mu_{INFO,o})) \right]
 \end{aligned}$$

s.a.:

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j x_{COM,j} = \widehat{x}_{COM}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j x_{VOL,j} = \widehat{x}_{VOL}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j x_{RSIST,j} = \widehat{x}_{RSIST}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{R3M,j} = \widehat{y}_{R3M}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{R6M,j} = \widehat{y}_{R6M}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{R1A,j} = \widehat{y}_{R1A}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{R2A,j} = \widehat{y}_{R2A}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{R3A,j} = \widehat{y}_{R3A}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{R5A,j} = \widehat{y}_{R5A}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{ALFA,j} = \widehat{y}_{ALFA}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{SHARPE,j} = \widehat{y}_{SHARPE}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{TREYNOR,j} = \widehat{y}_{TREYNOR}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{INFO,j} = \widehat{y}_{INFO}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j y_{RMER,j} \geq y_{RMER,o}$$

$$\sum_{j=1}^{101} \lambda_j v_{TE,j} = \widehat{v}_{TE}$$

$$\widehat{\mu}_{COM} \leq \frac{x_{COM}^{max} - \widehat{x}_{COM}}{x_{COM}^{max} - x_{COM}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{VOL} \leq \frac{x_{VOL}^{max} - \widehat{x}_{VOL}}{x_{VOL}^{max} - x_{VOL}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{RSIST} \leq \frac{x_{RSIST}^{max} - \widehat{x}_{RSIST}}{x_{RSIST}^{max} - x_{RSIST}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{R3M} \leq \frac{\widehat{y}_{R3M} - y_{R3M}^{min}}{y_{R3M}^{max} - y_{R3M}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{R6M} \leq \frac{\widehat{y}_{R6M} - y_{R6M}^{min}}{y_{R6M}^{max} - y_{R6M}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{R1A} \leq \frac{\widehat{y}_{R1A} - y_{R1A}^{min}}{y_{R1A}^{max} - y_{R1A}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{R2A} \leq \frac{\widehat{y}_{R2A} - y_{R2A}^{min}}{y_{R2A}^{max} - y_{R2A}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{R3A} \leq \frac{\widehat{y}_{R3A} - y_{R3A}^{min}}{y_{R3A}^{max} - y_{R3A}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{R5A} \leq \frac{\widehat{y}_{R5A} - y_{R5A}^{min}}{y_{R5A}^{max} - y_{R5A}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{ALFA} \leq \frac{\widehat{y}_{ALFA} - y_{ALFA}^{min}}{y_{ALFA}^{max} - y_{ALFA}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{SHARPE} \leq \frac{y_{SHARPE} - y_{SHARPE}^{min}}{y_{SHARPE}^{max} - y_{SHARPE}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{TREYNOR} \leq \frac{y_{TREYNOR} - y_{TREYNOR}^{min}}{y_{TREYNOR}^{max} - y_{TREYNOR}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{INFO} \leq \frac{\widehat{y}_{INFO} - y_{INFO}^{min}}{y_{INFO}^{max} - y_{INFO}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{TE} \leq \frac{\widehat{v}_{TE} - v_{TE}^{min}}{v_{TE}^{ideal,min} - v_{TE}^{min}}$$

$$\widehat{\mu}_{TE} \leq \frac{v_{TE}^{max} - \widehat{v}_{TE}}{v_{TE}^{max} - v_{TE}^{ideal,max}}$$

$$\widehat{\mu}_{COM} \geq \mu_{COM,j}$$

$$\widehat{\mu}_{VOL} \geq \mu_{VOL,j}$$

$$\widehat{\mu}_{RSIST} \geq \mu_{RSIST,j}$$

$$\widehat{\mu}_{R3M} \geq \mu_{R3M,j}$$

$$\widehat{\mu}_{R6M} \geq \mu_{R6M,j}$$

$$\widehat{\mu}_{R1A} \geq \mu_{R1A,j}$$

$$\widehat{\mu}_{R2A} \geq \mu_{R2A,j}$$

$$\widehat{\mu}_{R3A} \geq \mu_{R3A,j}$$

$$\widehat{\mu}_{R5A} \geq \mu_{R5A,j}$$

$$\widehat{\mu}_{ALFA} \geq \mu_{ALFA,j}$$

$$\widehat{\mu}_{SHARPE} \geq \mu_{SHARPE,j}$$

$$\widehat{\mu}_{TREYNOR} \geq \mu_{TREYNOR,j}$$

$$\widehat{\mu}_{INFO} \geq \mu_{INFO,j}$$

$$\widehat{\mu}_{TE} \geq \mu_{TE,j}$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{COM} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{VOL} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{RSIT} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{R3M} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{R6M} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{R1A} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{R2A} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{R3A} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{R5A} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{ALFA} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{SHARPE} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{TREYNOR} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{INFO} \leq 1$$

$$0 \leq \widehat{\mu}_{TE} \leq 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j$$

ANEXO III: CORRESPONDENCIA ENTRE N°DMU Y FONDOS DE INVERSIÓN

N° DMU	Fondo de Inversión	N° DMU	Fondo de Inversión	N° DMU	Fondo de Inversión
1	Bestinver Mixto, FI	35	EDM Inversion R, FI	69	BBVA Bolsa Indice Japon (Cubierto), FI
2	Bestinver Renta, FI	36	Eurovalor Bolsa, FI	70	BBVA Bolsa Japon, FI
3	Fonbilbao Mixto, FI	37	Eurovalor Bolsa Espanola, FI	71	BGF Japan Small & MidCap Opportunities E2 EUR
4	Gescoconsult Renta Fija Flexible A, FI	38	Fidelity Funds - Iberia A-ACC-EUR	72	Bankia Bolsa Japonesa, FI
5	Ibercaja Capital, FI	39	Fidelity Funds - Iberia E-ACC-EUR	73	Fidelity Funds - Japan Advantage A-ACC-EUR
6	Santander Tandem 0-30, FI	40	Fidelity Funds - Iberia A-EUR	74	Fidelity Funds - Greater China E-ACC-EUR
7	Candriam Equities L Germany C Cap	41	Fonbilbao Acciones, FI	75	Fidelity Funds - Greater China E-ACC-EUR
8	CS (Lux) Italy Equity Fund B EUR	42	Gescoconsult Renta Variable A, FI	76	Goldman Sachs Japan Equity Pf E Acc EUR (Snap)
9	CS (Lux) Small and Mid Cap Germany Eq Fd B EUR	43	GVC Gaesco Bolsalider A, FI	77	Ibercaja Japon A, FI
10	DWS Aktien Strategie Deutschland LC	44	Ibercaja Bolsa A, FI	78	Invesco Greater China Equity E Acc EUR
11	DWS Deutschland LC	45	ING Direct Fondo Naranja Ibox 35, FI	79	Invesco Nippon Small/Mid Cap Equity E Acc EUR
12	Fidelity Funds - Italy A-EUR	46	Metavalor, FI	80	Julius Baer EF Japan-EUR E
13	Invesco UK Equity E Acc EUR	47	Selectiva Espana, FI	81	M&G Japan EUR A Acc
14	M&G Recovery A Euro Acc	48	UBS Espana Gestion Activa, FI	82	M&G Japan Smaller Companies EUR A Acc
15	Schroder ISF UK Opportunities EUR A Dis	49	Mirabaud - Equities Spain A EUR	83	Robeco Chinese Equities D EUR
16	Aviva Investors Emerging Europe Equity B EUR	50	Mutua fondo Espana A, FI	84	Santander Seleccion RV Japon, FI
17	AXA WF Framlington Switzerland AC EUR	51	Sabadell Espana Dividendo Base, FI	85	Threadneedle China Opportunities Ret Net Acc EUR
18	Caixabank Bolsa Gestion Suiza Estandar, FI	52	Santander Acciones Espanolas A, FI	86	Amundi Index MSCI North America - AE (C)
19	DWS Osteuropa	53	Santander Small Caps Espana A, FI	87	Bankinter Indice America, FI
20	Eurovalor Europa del Este, FI	54	Segurfondo Renta Variable, FI	88	Caja Ingenieros Bolsa USA, FI
21	UBS (Lux) Eq Fd - Central Europe (EUR) P-acc	55	BGF India E2 EUR	89	Fidelity Funds - America E-ACC-EUR
22	Aviva Espabolsa A, FI	56	DWS Russia	90	Invesco US Structured Equity E Acc EUR
23	Bankia Dividendo Espana, FI	57	DWS Tuerkei	91	ING Direct Fondo Naranja Standard&Poor's 500, FI
24	Bankinter Bolsa Espana, FI	58	Fidelity Funds - India Focus A-EUR	92	Threadneedle American Select Ret Net Inc EUR
25	Bankinter Futuro Ibox, FI	59	Franklin India A (acc) EUR	93	M&G North American Dividend A Euro Acc
26	BBVA Bolsa, FI	60	Goldman Sachs India Equity Pf E Acc EUR	94	M&G North American Value A Euro Acc
27	BBVA Bolsa Indice, FI	61	Horizon Access Russia Cap	95	Legg Mason ClearBridge US Lrg Cap Gro A Acc EUR
28	Bestinver Bolsa, FI	62	HSBC GIF Turkey Equity EC EUR	96	BNY Mellon Brazil Equity A EUR
29	Caixabank Bolsa All Caps Espana, FI	63	PARVEST Equity Russia Classic Cap EUR	97	Fidelity Funds - Latin America E-ACC-EUR
30	Caixabank Bolsa Espana 150, FI	64	PARVEST Equity Turkey N C EUR	98	BBVA Bolsa Latam, FI
31	Caixabank Bolsa Gestion Espana Estandar, FI	65	Pictet-Russian Equities-R EUR	99	Lyxor UCITS ETF Canada (S&P TSX 60) D-EUR
32	Cartera Variable, FI	66	Bankinter Indice Japon, FI	100	Santander Acciones Latinoamericanas, FI
33	Catalana Occidente Bolsa Espanola, FI	67	AXA Rosenberg Japan Equity Alpha B EUR	101	Metavalor Global, FI
34	Credit Suisse Bolsa, FI	68	BBVA Bolsa China, FI		

ANEXO IV: DATOS DMUS ESCALADOS POSITIVAMENTE

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. mercado (ND)	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
1	0.015	0.102	0.214	0.017	0.208	0.121	0.198	0.243	0.199	0.119	0.137	0.008	0.690	7.930	15.726
2	0.005	0.011	0.252	0.002	0.254	0.112	0.160	0.234	0.182	0.103	0.064	0.008	0.650	3.890	0.000
3	0.015	0.050	0.245	0.008	0.246	0.111	0.159	0.196	0.164	0.107	0.082	0.006	0.480	2.550	10.760
4	0.015	0.041	0.248	0.008	0.249	0.114	0.178	0.225	0.176	0.122	0.081	0.007	0.630	3.860	12.286
5	0.015	0.131	0.200	0.021	0.192	0.129	0.165	0.138	0.141	0.100	0.106	0.003	0.290	3.280	13.380
6	0.014	0.036	0.246	0.004	0.248	0.108	0.163	0.218	0.175	0.120	0.088	0.007	0.830	3.980	9.030
7	0.015	0.145	0.216	0.008	0.217	0.109	0.199	0.173	0.178	0.117	0.165	0.006	0.600	8.620	11.278
8	0.019	0.200	0.000	0.009	0.000	0.122	0.126	0.000	0.145	0.111	0.152	0.008	0.380	6.910	18.261
9	0.019	0.137	0.264	0.020	0.268	0.116	0.193	0.199	0.265	0.166	0.241	0.013	1.150	18.940	14.404
10	0.015	0.164	0.214	0.016	0.214	0.102	0.207	0.166	0.295	0.207	0.255	0.012	1.060	16.020	18.029
11	0.014	0.173	0.210	0.014	0.211	0.133	0.270	0.220	0.274	0.178	0.238	0.009	0.890	13.080	17.885
12	0.015	0.180	0.032	0.012	0.028	0.073	0.094	0.020	0.157	0.094	0.170	0.010	0.520	9.490	18.157
13	0.023	0.142	0.192	0.018	0.185	0.179	0.178	0.128	0.181	0.125	0.187	0.010	0.740	10.350	15.660
14	0.015	0.133	0.198	0.018	0.190	0.183	0.213	0.166	0.167	0.096	0.108	0.005	0.250	3.520	13.693
15	0.015	0.137	0.197	0.018	0.189	0.120	0.127	0.096	0.162	0.083	0.176	0.010	0.670	9.700	14.774
16	0.017	0.146	0.271	0.028	0.280	0.149	0.235	0.253	0.172	0.171	0.057	0.013	0.360	9.710	15.652
17	0.015	0.106	0.286	0.010	0.290	0.149	0.263	0.296	0.259	0.241	0.146	0.007	1.130	11.830	15.431
18	0.020	0.122	0.287	0.012	0.292	0.136	0.264	0.286	0.238	0.227	0.128	0.005	0.830	9.330	13.820
19	0.017	0.179	0.284	0.023	0.290	0.261	0.361	0.183	0.098	0.079	0.000	0.005	0.030	0.590	13.234
20	0.014	0.170	0.285	0.017	0.290	0.218	0.350	0.208	0.117	0.092	0.012	0.007	0.020	0.440	13.137
21	0.019	0.163	0.273	0.032	0.282	0.151	0.186	0.173	0.132	0.114	0.016	0.009	0.000	0.100	14.191
22	0.005	0.125	0.170	0.017	0.162	0.121	0.208	0.227	0.229	0.174	0.177	0.012	0.840	18.180	22.849
23	0.020	0.200	0.100	0.017	0.096	0.113	0.153	0.124	0.147	0.124	0.129	0.006	0.280	5.680	18.822

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. mercado (ND)	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
24	0.016	0.183	0.112	0.015	0.109	0.132	0.187	0.126	0.150	0.114	0.141	0.007	0.350	7.100	19.213
25	0.010	0.193	0.109	0.013	0.107	0.124	0.149	0.111	0.107	0.094	0.122	0.005	0.260	5.200	18.286
26	0.023	0.200	0.106	0.016	0.102	0.126	0.131	0.061	0.064	0.045	0.091	0.002	0.040	0.860	15.293
27	0.011	0.190	0.110	0.013	0.109	0.122	0.147	0.109	0.106	0.092	0.114	0.005	0.220	4.450	17.992
28	0.018	0.141	0.175	0.019	0.168	0.130	0.208	0.248	0.208	0.129	0.165	0.011	0.650	13.230	19.598
29	0.025	0.182	0.135	0.022	0.125	0.126	0.154	0.147	0.096	0.086	0.156	0.008	0.410	8.790	17.841
30	0.022	0.296	0.036	0.023	0.030	0.125	0.127	0.031	0.047	0.063	0.115	0.000	0.110	2.280	15.262
31	0.022	0.193	0.182	0.019	0.180	0.118	0.138	0.079	0.083	0.067	0.115	0.004	0.200	4.020	12.277
32	0.020	0.170	0.131	0.015	0.127	0.110	0.136	0.103	0.091	0.075	0.106	0.005	0.200	4.050	16.721
33	0.023	0.165	0.135	0.014	0.132	0.110	0.163	0.157	0.139	0.112	0.130	0.007	0.350	7.110	19.627
34	0.020	0.172	0.138	0.020	0.130	0.140	0.162	0.143	0.114	0.078	0.112	0.006	0.240	4.950	17.601
35	0.023	0.139	0.172	0.021	0.161	0.124	0.240	0.281	0.211	0.154	0.201	0.013	0.860	19.350	21.772
36	0.023	0.174	0.125	0.014	0.122	0.116	0.125	0.082	0.108	0.086	0.119	0.006	0.270	5.500	17.601
37	0.019	0.172	0.127	0.014	0.124	0.121	0.141	0.111	0.128	0.099	0.135	0.007	0.380	7.600	19.120
38	0.015	0.148	0.166	0.018	0.160	0.098	0.116	0.132	0.188	0.115	0.173	0.012	0.670	13.180	18.580
39	0.015	0.148	0.166	0.018	0.160	0.097	0.112	0.125	0.180	0.108	0.164	0.011	0.610	12.070	18.153
40	0.015	0.148	0.166	0.018	0.160	0.098	0.115	0.132	0.188	0.115	0.173	0.012	0.670	13.160	18.580
41	0.015	0.149	0.144	0.012	0.142	0.113	0.149	0.129	0.129	0.100	0.116	0.007	0.320	6.380	19.146
42	0.023	0.147	0.163	0.020	0.153	0.152	0.182	0.219	0.195	0.139	0.150	0.009	0.480	10.480	20.072
43	0.023	0.183	0.125	0.018	0.119	0.125	0.177	0.130	0.126	0.099	0.101	0.004	0.130	2.600	17.186
44	0.015	0.177	0.122	0.013	0.121	0.113	0.131	0.098	0.102	0.082	0.108	0.005	0.230	4.510	17.543
45	0.010	0.190	0.110	0.013	0.109	0.125	0.150	0.113	0.110	0.096	0.117	0.005	0.230	4.650	18.245
46	0.020	0.152	0.173	0.026	0.158	0.148	0.230	0.293	0.302	0.233	0.206	0.013	0.760	18.140	21.635
47	0.020	0.199	0.110	0.017	0.105	0.091	0.128	0.071	0.087	0.059	0.099	0.002	0.080	1.600	16.021
48	0.016	0.155	0.154	0.020	0.145	0.106	0.154	0.164	0.150	0.115	0.153	0.010	0.530	11.420	19.062
49	0.015	0.168	0.135	0.017	0.130	0.104	0.196	0.186	0.162	0.130	0.145	0.008	0.430	8.910	20.142

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. mercado (ND)	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
50	0.005	0.163	0.156	0.019	0.150	0.107	0.158	0.177	0.166	0.124	0.162	0.010	0.530	10.340	18.395
51	0.021	0.189	0.126	0.021	0.118	0.085	0.104	0.101	0.124	0.083	0.120	0.005	0.220	4.690	17.218
52	0.022	0.168	0.140	0.019	0.133	0.135	0.169	0.170	0.201	0.143	0.141	0.008	0.390	8.120	19.666
53	0.020	0.156	0.174	0.027	0.156	0.117	0.172	0.234	0.239	0.173	0.189	0.013	0.740	17.940	19.968
54	0.013	0.177	0.124	0.015	0.121	0.124	0.138	0.103	0.105	0.092	0.104	0.005	0.210	4.140	17.408
55	0.015	0.209	0.259	0.012	0.262	0.075	0.273	0.248	0.234	0.327	0.180	0.011	0.570	13.100	17.630
56	0.020	0.236	0.390	0.023	0.416	0.266	0.442	0.476	0.277	0.119	0.078	0.011	0.010	0.160	17.031
57	0.020	0.261	0.093	0.019	0.087	0.035	0.058	0.051	0.041	0.034	0.089	0.009	0.120	3.070	15.539
58	0.015	0.208	0.259	0.015	0.262	0.073	0.217	0.213	0.199	0.296	0.174	0.010	0.530	12.670	16.075
59	0.010	0.209	0.259	0.013	0.262	0.071	0.258	0.265	0.232	0.330	0.188	0.011	0.590	13.980	18.434
60	0.018	0.218	0.259	0.016	0.262	0.058	0.213	0.185	0.230	0.345	0.222	0.014	0.770	17.680	17.761
61	0.016	0.251	0.422	0.017	0.438	0.264	0.398	0.400	0.229	0.064	0.044	0.007	0.090	2.060	14.982
62	0.023	0.271	0.075	0.014	0.072	0.000	0.000	0.058	0.024	0.025	0.084	0.008	0.110	2.760	15.379
63	0.018	0.223	0.389	0.019	0.408	0.268	0.419	0.461	0.322	0.131	0.104	0.013	0.120	3.470	18.298
64	0.018	0.264	0.085	0.014	0.082	0.029	0.024	0.062	0.000	0.000	0.059	0.006	0.030	0.850	13.940
65	0.020	0.257	0.424	0.018	0.440	0.288	0.493	0.579	0.334	0.124	0.086	0.010	0.010	0.340	19.044
66	0.010	0.179	0.272	0.027	0.276	0.229	0.258	0.148	0.205	0.155	0.203	0.002	0.700	8.270	13.196
67	0.014	0.131	0.267	0.009	0.269	0.189	0.285	0.219	0.329	0.217	0.181	0.006	0.860	11.080	13.601
68	0.023	0.166	0.310	0.020	0.317	0.178	0.324	0.172	0.174	0.138	0.146	0.005	0.460	7.600	11.510
69	0.011	0.186	0.272	0.030	0.276	0.214	0.256	0.135	0.194	0.149	0.206	0.001	0.650	7.880	13.249
70	0.023	0.137	0.267	0.012	0.270	0.173	0.306	0.238	0.299	0.195	0.179	0.006	0.820	10.900	13.425
71	0.015	0.147	0.345	0.022	0.355	0.176	0.249	0.269	0.331	0.207	0.195	0.008	0.900	13.540	13.519
72	0.009	0.175	0.271	0.032	0.275	0.232	0.234	0.143	0.188	0.139	0.192	0.002	0.650	7.920	13.207
73	0.015	0.142	0.267	0.016	0.270	0.160	0.240	0.225	0.298	0.181	0.160	0.005	0.710	9.790	13.366
74	0.015	0.148	0.311	0.012	0.315	0.176	0.358	0.305	0.286	0.230	0.198	0.010	0.890	13.670	16.091
75	0.015	0.148	0.311	0.012	0.315	0.176	0.358	0.305	0.286	0.230	0.198	0.010	0.890	13.670	16.091

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. mercado (ND)	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
76	0.015	0.131	0.267	0.012	0.270	0.164	0.239	0.206	0.294	0.192	0.184	0.007	0.950	12.130	12.982
77	0.019	0.146	0.270	0.020	0.273	0.201	0.278	0.214	0.260	0.170	0.185	0.003	0.750	8.450	13.466
78	0.023	0.144	0.305	0.019	0.312	0.157	0.329	0.289	0.254	0.202	0.191	0.009	0.860	13.610	15.069
79	0.023	0.183	0.310	0.045	0.339	0.145	0.182	0.472	0.383	0.215	0.204	0.012	0.820	18.480	15.498
80	0.012	0.138	0.267	0.010	0.270	0.177	0.311	0.243	0.313	0.208	0.180	0.006	0.870	11.090	13.985
81	0.015	0.163	0.269	0.018	0.272	0.253	0.396	0.277	0.356	0.243	0.221	0.006	0.910	11.890	16.584
82	0.015	0.142	0.348	0.020	0.357	0.237	0.351	0.351	0.401	0.284	0.272	0.014	1.480	21.260	17.046
83	0.015	0.185	0.257	0.025	0.260	0.162	0.348	0.241	0.254	0.194	0.174	0.008	0.570	11.250	15.487
84	0.022	0.132	0.267	0.008	0.270	0.188	0.286	0.223	0.297	0.188	0.160	0.005	0.730	9.120	11.004
85	0.015	0.177	0.257	0.018	0.260	0.163	0.360	0.213	0.224	0.190	0.187	0.008	0.640	11.370	15.279
86	0.002	0.101	0.329	0.002	0.331	0.186	0.274	0.304	0.304	0.268	0.241	0.007	1.670	16.930	7.843
87	0.010	0.100	0.187	0.021	0.184	0.137	0.220	0.294	0.229	0.188	0.199	0.002	1.260	9.380	19.662
88	0.014	0.106	0.329	0.008	0.334	0.161	0.235	0.260	0.258	0.229	0.198	0.004	1.230	12.500	7.825
89	0.015	0.113	0.329	0.010	0.336	0.188	0.268	0.292	0.305	0.278	0.256	0.007	1.590	16.900	14.092
90	0.015	0.121	0.317	0.019	0.331	0.183	0.281	0.308	0.277	0.235	0.226	0.006	1.200	14.530	13.460
91	0.010	0.106	0.330	0.004	0.334	0.184	0.264	0.293	0.302	0.266	0.241	0.007	1.610	16.410	10.736
92	0.015	0.131	0.339	0.015	0.348	0.206	0.276	0.270	0.295	0.243	0.226	0.004	1.180	12.710	13.077
93	0.015	0.114	0.328	0.012	0.335	0.222	0.314	0.352	0.307	0.251	0.230	0.006	1.340	14.630	13.655
94	0.015	0.112	0.333	0.012	0.341	0.215	0.320	0.327	0.312	0.269	0.253	0.006	1.500	14.960	14.559
95	0.013	0.111	0.329	0.009	0.334	0.180	0.254	0.277	0.341	0.300	0.270	0.009	1.800	19.250	15.594
96	0.020	0.270	0.624	0.026	0.677	0.202	0.647	0.660	0.205	0.128	0.050	0.009	0.010	0.350	16.596
97	0.015	0.181	0.432	0.017	0.442	0.100	0.284	0.357	0.125	0.076	0.034	0.006	0.060	0.940	14.201
98	0.023	0.186	0.435	0.021	0.447	0.141	0.358	0.389	0.139	0.088	0.043	0.006	0.050	0.710	14.877
99	0.004	0.113	0.365	0.003	0.368	0.184	0.273	0.387	0.216	0.177	0.128	0.008	0.480	5.410	22.830
100	0.023	0.178	0.430	0.016	0.440	0.112	0.321	0.358	0.126	0.079	0.027	0.006	0.220	3.440	13.834
101	0.017	0.070	0.256	0.014	0.259	0.191	0.211	0.395	0.231	0.165	0.118	0.008	0.850	7.100	15.429

Anexo V: Funciones de pertenencia dato

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
1	0.416	0.682	0.657	0.445	0.420	0.306	0.368	0.496	0.345	0.504	0.551	0.383	0.370	0.688
2	0.831	1.000	0.596	0.000	0.389	0.247	0.355	0.454	0.299	0.235	0.594	0.361	0.179	0.000
3	0.437	0.865	0.607	0.186	0.385	0.246	0.297	0.409	0.310	0.301	0.428	0.267	0.116	0.471
4	0.416	0.895	0.602	0.186	0.396	0.275	0.341	0.439	0.354	0.298	0.536	0.350	0.178	0.538
5	0.416	0.578	0.680	0.561	0.448	0.255	0.209	0.352	0.290	0.390	0.217	0.161	0.150	0.586
6	0.459	0.914	0.605	0.061	0.375	0.252	0.330	0.436	0.348	0.324	0.529	0.461	0.183	0.395
7	0.416	0.531	0.654	0.165	0.378	0.308	0.262	0.444	0.339	0.607	0.420	0.333	0.403	0.494
8	0.234	0.338	1.000	0.192	0.424	0.195	0.000	0.362	0.322	0.559	0.594	0.211	0.322	0.799
9	0.234	0.559	0.577	0.543	0.403	0.298	0.302	0.661	0.481	0.886	0.928	0.639	0.890	0.630
10	0.437	0.462	0.657	0.424	0.354	0.320	0.252	0.736	0.600	0.938	0.833	0.589	0.752	0.789
11	0.459	0.431	0.663	0.357	0.462	0.417	0.333	0.683	0.516	0.875	0.667	0.494	0.613	0.783
12	0.416	0.407	0.948	0.308	0.253	0.145	0.030	0.392	0.272	0.625	0.739	0.289	0.444	0.795
13	0.091	0.539	0.692	0.476	0.622	0.275	0.194	0.451	0.362	0.688	0.739	0.411	0.484	0.685
14	0.416	0.573	0.682	0.470	0.635	0.329	0.252	0.416	0.278	0.397	0.377	0.139	0.162	0.599
15	0.416	0.558	0.684	0.488	0.417	0.196	0.145	0.404	0.241	0.647	0.703	0.372	0.454	0.647
16	0.329	0.527	0.565	0.771	0.517	0.363	0.383	0.429	0.496	0.210	0.928	0.200	0.454	0.685
17	0.416	0.668	0.542	0.226	0.517	0.406	0.448	0.646	0.699	0.537	0.536	0.628	0.554	0.675
18	0.199	0.612	0.539	0.311	0.472	0.408	0.433	0.594	0.658	0.471	0.391	0.461	0.436	0.605
19	0.329	0.409	0.544	0.634	0.906	0.558	0.277	0.244	0.229	0.000	0.370	0.017	0.023	0.579
20	0.481	0.443	0.543	0.445	0.757	0.541	0.315	0.292	0.267	0.044	0.471	0.011	0.016	0.575
21	0.255	0.468	0.563	0.909	0.524	0.287	0.262	0.329	0.330	0.059	0.623	0.000	0.000	0.621
22	0.870	0.599	0.727	0.439	0.420	0.321	0.344	0.571	0.504	0.651	0.899	0.467	0.854	1.000
23	0.199	0.335	0.840	0.442	0.392	0.236	0.188	0.367	0.359	0.474	0.399	0.156	0.264	0.824

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
24	0.372	0.395	0.820	0.399	0.458	0.289	0.191	0.374	0.330	0.518	0.493	0.194	0.331	0.841
25	0.632	0.362	0.826	0.338	0.431	0.230	0.168	0.267	0.272	0.449	0.377	0.144	0.241	0.800
26	0.091	0.336	0.830	0.409	0.438	0.202	0.092	0.160	0.130	0.335	0.116	0.022	0.036	0.669
27	0.589	0.370	0.823	0.335	0.424	0.227	0.165	0.264	0.267	0.419	0.341	0.122	0.206	0.787
28	0.307	0.542	0.719	0.518	0.451	0.321	0.376	0.519	0.374	0.607	0.826	0.361	0.621	0.858
29	0.000	0.401	0.784	0.610	0.438	0.238	0.223	0.239	0.249	0.574	0.580	0.228	0.411	0.781
30	0.113	0.000	0.942	0.631	0.434	0.196	0.047	0.117	0.183	0.423	0.000	0.061	0.103	0.668
31	0.113	0.362	0.708	0.503	0.410	0.213	0.120	0.207	0.194	0.423	0.319	0.111	0.185	0.537
32	0.199	0.440	0.790	0.402	0.382	0.210	0.156	0.227	0.217	0.390	0.355	0.111	0.187	0.732
33	0.091	0.460	0.783	0.372	0.382	0.252	0.238	0.347	0.325	0.478	0.507	0.194	0.331	0.859
34	0.199	0.434	0.779	0.527	0.486	0.250	0.217	0.284	0.226	0.412	0.399	0.133	0.229	0.770
35	0.091	0.552	0.725	0.564	0.431	0.371	0.426	0.526	0.446	0.739	0.949	0.478	0.910	0.953
36	0.091	0.427	0.799	0.354	0.403	0.193	0.124	0.269	0.249	0.438	0.420	0.150	0.255	0.770
37	0.242	0.436	0.797	0.345	0.420	0.218	0.168	0.319	0.287	0.496	0.522	0.211	0.354	0.837
38	0.416	0.519	0.733	0.473	0.340	0.179	0.200	0.469	0.333	0.636	0.841	0.372	0.618	0.813
39	0.416	0.519	0.733	0.470	0.337	0.173	0.189	0.449	0.313	0.603	0.797	0.339	0.566	0.795
40	0.416	0.519	0.733	0.473	0.340	0.178	0.200	0.469	0.333	0.636	0.841	0.372	0.617	0.813
41	0.437	0.514	0.769	0.308	0.392	0.230	0.195	0.322	0.290	0.426	0.486	0.178	0.297	0.838
42	0.091	0.524	0.739	0.546	0.528	0.281	0.332	0.486	0.403	0.551	0.659	0.267	0.491	0.878
43	0.091	0.397	0.800	0.476	0.434	0.274	0.197	0.314	0.287	0.371	0.261	0.072	0.118	0.752
44	0.416	0.418	0.804	0.341	0.392	0.202	0.148	0.254	0.238	0.397	0.362	0.128	0.208	0.768
45	0.636	0.370	0.823	0.335	0.434	0.232	0.171	0.274	0.278	0.430	0.348	0.128	0.215	0.799
46	0.199	0.506	0.723	0.713	0.514	0.355	0.444	0.753	0.675	0.757	0.928	0.422	0.853	0.947
47	0.199	0.340	0.823	0.463	0.316	0.198	0.108	0.217	0.171	0.364	0.167	0.044	0.071	0.701
48	0.372	0.493	0.753	0.543	0.368	0.238	0.248	0.374	0.333	0.563	0.696	0.294	0.535	0.834
49	0.416	0.447	0.784	0.448	0.361	0.303	0.282	0.404	0.377	0.533	0.587	0.239	0.416	0.882
50	0.848	0.466	0.750	0.509	0.372	0.244	0.268	0.414	0.359	0.596	0.732	0.294	0.484	0.805

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
51	0.156	0.374	0.798	0.582	0.295	0.161	0.153	0.309	0.241	0.441	0.362	0.122	0.217	0.754
52	0.134	0.450	0.775	0.503	0.469	0.261	0.258	0.501	0.414	0.518	0.551	0.217	0.379	0.861
53	0.199	0.491	0.722	0.762	0.406	0.266	0.355	0.596	0.501	0.695	0.920	0.411	0.843	0.874
54	0.524	0.418	0.802	0.381	0.431	0.213	0.156	0.262	0.267	0.382	0.348	0.117	0.191	0.762
55	0.416	0.304	0.585	0.290	0.260	0.422	0.376	0.584	0.948	0.662	0.768	0.317	0.614	0.772
56	0.199	0.209	0.375	0.646	0.924	0.683	0.721	0.691	0.345	0.287	0.775	0.006	0.003	0.745
57	0.199	0.121	0.851	0.503	0.122	0.090	0.077	0.102	0.099	0.327	0.630	0.067	0.140	0.680
58	0.416	0.309	0.585	0.378	0.253	0.335	0.323	0.496	0.858	0.640	0.746	0.294	0.594	0.704
59	0.632	0.304	0.585	0.317	0.247	0.399	0.402	0.579	0.957	0.691	0.812	0.328	0.656	0.807
60	0.307	0.273	0.585	0.430	0.201	0.329	0.280	0.574	1.000	0.816	1.000	0.428	0.831	0.777
61	0.372	0.157	0.323	0.445	0.917	0.615	0.606	0.571	0.186	0.162	0.478	0.050	0.093	0.656
62	0.091	0.085	0.880	0.363	0.000	0.000	0.088	0.060	0.072	0.309	0.580	0.061	0.126	0.673
63	0.307	0.257	0.376	0.509	0.931	0.648	0.698	0.803	0.380	0.382	0.949	0.067	0.159	0.801
64	0.307	0.111	0.864	0.357	0.101	0.037	0.094	0.000	0.000	0.217	0.428	0.017	0.035	0.610
65	0.199	0.137	0.320	0.470	1.000	0.762	0.877	0.833	0.359	0.316	0.717	0.006	0.011	0.833
66	0.632	0.411	0.563	0.741	0.795	0.399	0.224	0.511	0.449	0.746	0.109	0.389	0.386	0.578
67	0.481	0.580	0.572	0.207	0.656	0.440	0.332	0.820	0.629	0.665	0.464	0.478	0.519	0.595
68	0.091	0.455	0.502	0.530	0.618	0.501	0.261	0.434	0.400	0.537	0.377	0.256	0.354	0.504
69	0.589	0.386	0.564	0.854	0.743	0.396	0.205	0.484	0.432	0.757	0.072	0.361	0.368	0.580
70	0.091	0.558	0.572	0.287	0.601	0.473	0.361	0.746	0.565	0.658	0.449	0.456	0.510	0.588
71	0.416	0.524	0.447	0.591	0.611	0.385	0.408	0.825	0.600	0.717	0.601	0.500	0.635	0.592
72	0.675	0.424	0.566	0.909	0.806	0.362	0.217	0.469	0.403	0.706	0.109	0.361	0.370	0.578
73	0.416	0.541	0.572	0.418	0.556	0.371	0.341	0.743	0.525	0.588	0.391	0.394	0.458	0.585
74	0.416	0.519	0.502	0.311	0.611	0.553	0.462	0.713	0.667	0.728	0.696	0.494	0.641	0.704
75	0.416	0.519	0.502	0.311	0.611	0.553	0.462	0.713	0.667	0.728	0.696	0.494	0.641	0.704
76	0.416	0.579	0.572	0.302	0.569	0.369	0.312	0.733	0.557	0.676	0.522	0.528	0.569	0.568
77	0.242	0.527	0.567	0.552	0.698	0.430	0.324	0.648	0.493	0.680	0.210	0.417	0.395	0.589

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
78	0.091	0.532	0.511	0.506	0.545	0.509	0.438	0.633	0.586	0.702	0.674	0.478	0.638	0.659
79	0.091	0.397	0.503	0.000	0.503	0.281	0.715	0.955	0.623	0.750	0.841	0.456	0.869	0.678
80	0.545	0.555	0.571	0.250	0.615	0.481	0.368	0.781	0.603	0.662	0.449	0.483	0.519	0.612
81	0.416	0.467	0.568	0.473	0.878	0.612	0.420	0.888	0.704	0.813	0.464	0.506	0.557	0.726
82	0.416	0.541	0.443	0.540	0.823	0.543	0.532	1.000	0.823	1.000	1.000	0.822	1.000	0.746
83	0.416	0.390	0.588	0.683	0.563	0.538	0.365	0.633	0.562	0.640	0.580	0.317	0.527	0.678
84	0.113	0.575	0.571	0.177	0.653	0.442	0.338	0.741	0.545	0.588	0.341	0.406	0.426	0.482
85	0.416	0.417	0.587	0.494	0.566	0.556	0.323	0.559	0.551	0.688	0.601	0.356	0.533	0.669
86	1.000	0.684	0.473	0.003	0.646	0.423	0.461	0.758	0.777	0.886	0.529	0.928	0.795	0.343
87	0.632	0.688	0.700	0.564	0.476	0.340	0.445	0.571	0.545	0.732	0.109	0.700	0.439	0.861
88	0.481	0.666	0.472	0.168	0.559	0.363	0.394	0.643	0.664	0.728	0.290	0.683	0.586	0.342
89	0.416	0.644	0.472	0.241	0.653	0.414	0.442	0.761	0.806	0.941	0.536	0.883	0.794	0.617
90	0.416	0.615	0.492	0.518	0.635	0.434	0.467	0.691	0.681	0.831	0.399	0.667	0.682	0.589
91	0.636	0.669	0.471	0.061	0.639	0.408	0.444	0.753	0.771	0.886	0.507	0.894	0.771	0.470
92	0.416	0.579	0.457	0.381	0.715	0.427	0.409	0.736	0.704	0.831	0.290	0.656	0.596	0.572
93	0.416	0.639	0.475	0.287	0.771	0.485	0.533	0.766	0.728	0.846	0.406	0.744	0.687	0.598
94	0.416	0.645	0.465	0.311	0.747	0.495	0.495	0.778	0.780	0.930	0.428	0.833	0.702	0.637
95	0.524	0.648	0.473	0.216	0.625	0.393	0.420	0.850	0.870	0.993	0.659	1.000	0.905	0.682
96	0.199	0.091	0.000	0.735	0.701	1.000	1.000	0.511	0.371	0.184	0.616	0.006	0.012	0.726
97	0.416	0.403	0.308	0.442	0.347	0.439	0.541	0.312	0.220	0.125	0.442	0.033	0.040	0.622
98	0.091	0.385	0.303	0.561	0.490	0.553	0.589	0.347	0.255	0.158	0.464	0.028	0.029	0.651
99	0.892	0.642	0.415	0.037	0.639	0.422	0.586	0.539	0.513	0.471	0.594	0.267	0.251	0.999
100	0.091	0.412	0.310	0.433	0.389	0.496	0.542	0.314	0.229	0.099	0.413	0.122	0.158	0.605
101	0.329	0.795	0.590	0.357	0.662	0.326	0.599	0.576	0.479	0.433	0.580	0.472	0.331	0.675

Anexo VI: Solución CRS-Variables objetivo

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
1	0.008	0.102	0.214	0.017	0.139	0.224	0.281	0.242	0.182	0.179	0.008	1.064	13.079	18.671
2	0.005	0.011	0.252	0.002	0.112	0.160	0.234	0.182	0.103	0.064	0.008	0.650	3.890	0.000
3	0.013	0.050	0.245	0.010	0.156	0.188	0.323	0.205	0.140	0.096	0.008	0.748	5.713	10.760
4	0.015	0.041	0.248	0.008	0.114	0.178	0.225	0.176	0.122	0.081	0.007	0.630	3.860	12.286
5	0.007	0.131	0.200	0.021	0.136	0.224	0.278	0.258	0.192	0.195	0.011	0.991	17.373	22.849
6	0.014	0.036	0.246	0.004	0.108	0.163	0.218	0.175	0.120	0.088	0.007	0.830	3.980	9.030
7	0.010	0.145	0.216	0.025	0.134	0.211	0.300	0.280	0.193	0.192	0.013	0.876	18.928	21.597
8	0.019	0.200	0.000	0.009	0.122	0.126	0.000	0.145	0.111	0.152	0.008	0.380	6.910	18.261
9	0.019	0.137	0.264	0.020	0.116	0.193	0.199	0.265	0.166	0.241	0.013	1.150	18.940	14.404
10	0.015	0.164	0.214	0.016	0.102	0.207	0.166	0.295	0.207	0.255	0.012	1.060	16.020	18.029
11	0.014	0.173	0.210	0.014	0.133	0.270	0.220	0.274	0.178	0.238	0.009	0.890	13.080	17.885
12	0.015	0.180	0.032	0.012	0.073	0.094	0.020	0.157	0.094	0.170	0.010	0.520	9.490	18.157
13	0.023	0.142	0.192	0.018	0.179	0.178	0.128	0.181	0.125	0.187	0.010	0.740	10.350	15.660
14	0.015	0.133	0.198	0.018	0.183	0.243	0.262	0.244	0.182	0.180	0.006	0.922	9.048	18.054
15	0.006	0.133	0.197	0.018	0.137	0.229	0.253	0.258	0.192	0.193	0.013	0.932	19.104	22.849
16	0.016	0.146	0.271	0.028	0.157	0.235	0.361	0.323	0.210	0.204	0.013	0.969	18.399	17.848
17	0.012	0.106	0.286	0.015	0.177	0.263	0.300	0.308	0.241	0.227	0.008	1.422	15.186	15.431
18	0.011	0.122	0.287	0.017	0.191	0.290	0.301	0.329	0.233	0.223	0.013	1.210	18.283	16.257
19	0.017	0.179	0.284	0.023	0.261	0.361	0.183	0.098	0.079	0.000	0.005	0.030	0.590	13.234
20	0.014	0.147	0.285	0.018	0.228	0.350	0.296	0.353	0.248	0.232	0.010	1.117	16.056	17.012
21	0.015	0.163	0.273	0.032	0.162	0.242	0.388	0.341	0.229	0.227	0.011	1.102	19.111	21.667
22	0.005	0.125	0.170	0.017	0.121	0.208	0.227	0.229	0.174	0.177	0.012	0.840	18.180	22.849
23	0.015	0.159	0.100	0.017	0.113	0.156	0.146	0.208	0.149	0.169	0.010	0.596	12.621	18.822
24	0.012	0.171	0.112	0.015	0.133	0.187	0.151	0.215	0.161	0.180	0.011	0.694	14.395	22.132

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
25	0.010	0.184	0.109	0.013	0.124	0.152	0.115	0.121	0.102	0.123	0.005	0.287	5.798	18.286
26	0.013	0.163	0.106	0.016	0.126	0.175	0.151	0.210	0.157	0.172	0.011	0.639	13.493	20.501
27	0.011	0.146	0.110	0.013	0.122	0.172	0.139	0.197	0.146	0.161	0.010	0.646	12.612	18.525
28	0.008	0.134	0.175	0.019	0.130	0.214	0.248	0.246	0.187	0.188	0.012	0.877	17.400	22.587
29	0.019	0.161	0.135	0.022	0.126	0.186	0.216	0.259	0.189	0.192	0.012	0.677	15.261	20.066
30	0.022	0.296	0.036	0.023	0.125	0.127	0.031	0.047	0.063	0.115	0.000	0.110	2.280	15.262
31	0.007	0.127	0.182	0.020	0.118	0.194	0.252	0.240	0.171	0.172	0.012	0.794	17.300	20.597
32	0.008	0.128	0.131	0.015	0.110	0.170	0.181	0.201	0.149	0.156	0.010	0.664	14.277	19.020
33	0.008	0.130	0.135	0.015	0.112	0.174	0.184	0.204	0.151	0.159	0.011	0.688	14.722	19.627
34	0.015	0.167	0.138	0.020	0.140	0.205	0.208	0.251	0.190	0.193	0.012	0.734	16.129	22.400
35	0.023	0.139	0.172	0.021	0.124	0.240	0.281	0.211	0.154	0.201	0.013	0.860	19.350	21.772
36	0.009	0.132	0.125	0.014	0.116	0.173	0.161	0.199	0.148	0.158	0.010	0.675	13.599	18.579
37	0.010	0.139	0.127	0.014	0.121	0.179	0.162	0.205	0.152	0.164	0.010	0.693	13.848	19.120
38	0.006	0.126	0.166	0.018	0.118	0.197	0.228	0.230	0.170	0.173	0.012	0.793	17.244	21.423
39	0.006	0.122	0.166	0.018	0.117	0.195	0.230	0.227	0.169	0.169	0.012	0.780	17.042	20.955
40	0.006	0.126	0.166	0.018	0.118	0.197	0.228	0.230	0.170	0.173	0.012	0.793	17.244	21.423
41	0.008	0.130	0.144	0.017	0.113	0.175	0.197	0.212	0.153	0.160	0.011	0.695	14.809	19.146
42	0.016	0.147	0.163	0.020	0.152	0.232	0.241	0.265	0.201	0.194	0.009	0.803	14.313	20.072
43	0.014	0.150	0.125	0.018	0.125	0.182	0.188	0.226	0.169	0.172	0.011	0.654	14.346	19.846
44	0.009	0.130	0.122	0.014	0.113	0.166	0.158	0.195	0.143	0.153	0.010	0.645	12.907	17.543
45	0.010	0.190	0.110	0.013	0.125	0.150	0.113	0.110	0.096	0.117	0.005	0.230	4.650	18.245
46	0.020	0.152	0.173	0.026	0.148	0.230	0.293	0.302	0.233	0.206	0.013	0.760	18.140	21.635
47	0.013	0.129	0.110	0.017	0.095	0.141	0.167	0.201	0.141	0.152	0.009	0.556	12.190	16.021
48	0.012	0.126	0.154	0.020	0.119	0.189	0.237	0.241	0.180	0.170	0.011	0.692	15.764	19.062
49	0.011	0.158	0.135	0.017	0.131	0.196	0.187	0.228	0.171	0.183	0.012	0.745	15.876	22.398
50	0.005	0.163	0.156	0.019	0.107	0.158	0.177	0.166	0.124	0.162	0.010	0.530	10.340	18.395
51	0.018	0.159	0.126	0.021	0.118	0.173	0.199	0.247	0.177	0.188	0.011	0.659	14.637	19.521

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
52	0.013	0.158	0.140	0.019	0.135	0.203	0.207	0.244	0.184	0.188	0.012	0.740	16.201	22.179
53	0.020	0.156	0.174	0.027	0.117	0.172	0.234	0.239	0.173	0.189	0.013	0.740	17.940	19.968
54	0.010	0.148	0.124	0.015	0.124	0.181	0.162	0.209	0.155	0.169	0.011	0.695	14.141	20.116
55	0.015	0.209	0.259	0.012	0.075	0.273	0.248	0.234	0.327	0.180	0.011	0.570	13.100	17.630
56	0.020	0.236	0.390	0.023	0.266	0.442	0.476	0.277	0.119	0.078	0.011	0.010	0.160	17.031
57	0.017	0.177	0.093	0.019	0.103	0.144	0.131	0.220	0.147	0.189	0.011	0.629	13.006	19.684
58	0.015	0.208	0.259	0.017	0.163	0.295	0.270	0.313	0.296	0.244	0.014	1.032	18.221	22.331
59	0.010	0.209	0.259	0.013	0.071	0.258	0.265	0.232	0.330	0.188	0.011	0.590	13.980	18.434
60	0.018	0.218	0.259	0.016	0.058	0.213	0.185	0.230	0.345	0.222	0.014	0.770	17.680	17.761
61	0.016	0.181	0.422	0.023	0.264	0.420	0.415	0.401	0.285	0.269	0.013	1.409	19.422	18.224
62	0.012	0.137	0.075	0.014	0.078	0.109	0.099	0.166	0.109	0.145	0.009	0.500	10.152	15.379
63	0.018	0.223	0.389	0.019	0.268	0.419	0.461	0.322	0.131	0.104	0.013	0.120	3.470	18.298
64	0.011	0.117	0.085	0.014	0.076	0.110	0.119	0.161	0.109	0.131	0.008	0.475	9.973	13.940
65	0.020	0.257	0.424	0.018	0.288	0.493	0.579	0.334	0.124	0.086	0.010	0.010	0.340	19.044
66	0.010	0.165	0.272	0.027	0.229	0.273	0.193	0.241	0.175	0.204	0.004	0.801	10.389	14.402
67	0.013	0.131	0.267	0.019	0.189	0.285	0.294	0.329	0.237	0.226	0.012	1.153	18.451	17.178
68	0.013	0.140	0.310	0.020	0.215	0.324	0.326	0.367	0.260	0.250	0.013	1.314	19.914	17.724
69	0.011	0.176	0.272	0.030	0.214	0.264	0.239	0.264	0.186	0.211	0.007	0.824	13.473	17.940
70	0.011	0.136	0.267	0.018	0.198	0.306	0.287	0.327	0.233	0.224	0.011	1.121	17.642	18.042
71	0.015	0.146	0.345	0.022	0.228	0.337	0.362	0.398	0.280	0.268	0.014	1.442	21.260	17.237
72	0.009	0.175	0.271	0.032	0.232	0.234	0.143	0.188	0.139	0.192	0.002	0.650	7.920	13.207
73	0.011	0.142	0.267	0.021	0.178	0.275	0.312	0.326	0.232	0.227	0.013	1.146	20.131	20.314
74	0.015	0.148	0.311	0.021	0.234	0.358	0.344	0.373	0.267	0.257	0.010	1.359	16.894	19.141
75	0.015	0.148	0.311	0.021	0.234	0.358	0.344	0.373	0.267	0.257	0.010	1.359	16.894	19.141
76	0.011	0.131	0.267	0.018	0.183	0.282	0.293	0.321	0.231	0.225	0.013	1.174	19.303	18.666
77	0.014	0.146	0.270	0.020	0.201	0.301	0.312	0.335	0.247	0.249	0.010	1.343	17.489	20.211
78	0.014	0.138	0.305	0.019	0.218	0.329	0.316	0.362	0.255	0.243	0.012	1.262	18.560	16.737

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
79	0.023	0.183	0.310	0.045	0.145	0.182	0.472	0.383	0.215	0.204	0.012	0.820	18.480	15.498
80	0.012	0.138	0.267	0.018	0.201	0.311	0.288	0.329	0.234	0.225	0.011	1.120	17.337	18.090
81	0.015	0.163	0.269	0.018	0.253	0.396	0.277	0.356	0.243	0.221	0.006	0.910	11.890	16.584
82	0.015	0.142	0.348	0.020	0.237	0.351	0.351	0.401	0.284	0.272	0.014	1.480	21.260	17.046
83	0.015	0.185	0.257	0.025	0.162	0.348	0.241	0.254	0.194	0.174	0.008	0.570	11.250	15.487
84	0.011	0.132	0.267	0.018	0.188	0.290	0.290	0.323	0.232	0.226	0.012	1.167	18.886	18.491
85	0.015	0.164	0.257	0.018	0.233	0.360	0.275	0.344	0.237	0.223	0.008	0.950	13.827	18.086
86	0.002	0.101	0.329	0.002	0.186	0.274	0.304	0.304	0.268	0.241	0.007	1.670	16.930	7.843
87	0.010	0.100	0.187	0.021	0.137	0.220	0.294	0.229	0.188	0.199	0.002	1.260	9.380	19.662
88	0.011	0.106	0.329	0.015	0.201	0.300	0.334	0.341	0.233	0.210	0.013	1.247	16.727	13.556
89	0.013	0.113	0.329	0.012	0.191	0.274	0.295	0.346	0.282	0.256	0.010	1.632	18.699	14.872
90	0.015	0.121	0.317	0.019	0.183	0.281	0.308	0.277	0.235	0.226	0.006	1.200	14.530	13.460
91	0.006	0.106	0.330	0.007	0.192	0.284	0.319	0.321	0.266	0.242	0.008	1.619	16.818	10.736
92	0.014	0.131	0.339	0.018	0.226	0.334	0.341	0.382	0.269	0.254	0.013	1.408	19.803	15.644
93	0.015	0.114	0.328	0.012	0.222	0.314	0.352	0.307	0.251	0.230	0.006	1.340	14.630	13.655
94	0.015	0.112	0.333	0.012	0.215	0.320	0.327	0.312	0.269	0.253	0.006	1.500	14.960	14.559
95	0.013	0.111	0.329	0.009	0.180	0.254	0.277	0.341	0.300	0.270	0.009	1.800	19.250	15.594
96	0.020	0.270	0.624	0.026	0.202	0.647	0.660	0.205	0.128	0.050	0.009	0.010	0.350	16.596
97	0.014	0.131	0.432	0.017	0.247	0.370	0.420	0.401	0.302	0.272	0.013	1.668	19.360	14.201
98	0.017	0.131	0.435	0.021	0.245	0.366	0.433	0.401	0.289	0.260	0.013	1.536	18.536	14.877
99	0.004	0.113	0.365	0.003	0.184	0.273	0.387	0.216	0.177	0.128	0.008	0.480	5.410	22.830
100	0.014	0.129	0.430	0.016	0.247	0.368	0.417	0.401	0.300	0.270	0.013	1.662	19.215	13.834
101	0.017	0.070	0.256	0.014	0.191	0.211	0.395	0.231	0.165	0.118	0.008	0.850	7.100	15.429

Anexo VII: Solución CRS- Funciones de pertenencia objetivo

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
1	0.739	0.682	0.657	0.445	0.481	0.346	0.426	0.605	0.528	0.659	0.587	0.591	0.613	0.817
2	0.831	1.000	0.596	0.000	0.389	0.247	0.355	0.454	0.299	0.235	0.594	0.361	0.179	0.000
3	0.487	0.865	0.607	0.236	0.543	0.290	0.490	0.512	0.405	0.355	0.559	0.415	0.265	0.471
4	0.416	0.895	0.602	0.186	0.396	0.275	0.341	0.439	0.354	0.298	0.536	0.350	0.178	0.538
5	0.743	0.578	0.680	0.561	0.471	0.346	0.421	0.642	0.557	0.717	0.785	0.551	0.816	1.000
6	0.459	0.914	0.605	0.061	0.375	0.252	0.330	0.436	0.348	0.324	0.529	0.461	0.183	0.395
7	0.653	0.531	0.654	0.681	0.464	0.326	0.455	0.698	0.558	0.705	0.916	0.487	0.890	0.945
8	0.234	0.338	1.000	0.192	0.424	0.195	0.000	0.362	0.322	0.559	0.594	0.211	0.322	0.799
9	0.234	0.559	0.577	0.543	0.403	0.298	0.302	0.661	0.481	0.886	0.928	0.639	0.890	0.630
10	0.437	0.462	0.657	0.424	0.354	0.320	0.252	0.736	0.600	0.938	0.833	0.589	0.752	0.789
11	0.459	0.431	0.663	0.357	0.462	0.417	0.333	0.683	0.516	0.875	0.667	0.494	0.613	0.783
12	0.416	0.407	0.948	0.308	0.253	0.145	0.030	0.392	0.272	0.625	0.739	0.289	0.444	0.795
13	0.091	0.539	0.692	0.476	0.622	0.275	0.194	0.451	0.362	0.688	0.739	0.411	0.484	0.685
14	0.416	0.573	0.682	0.470	0.635	0.375	0.398	0.608	0.526	0.662	0.403	0.512	0.423	0.790
15	0.799	0.574	0.684	0.488	0.477	0.353	0.384	0.643	0.556	0.710	0.937	0.518	0.898	1.000
16	0.377	0.527	0.565	0.771	0.545	0.363	0.547	0.805	0.608	0.751	0.928	0.538	0.865	0.781
17	0.555	0.668	0.542	0.386	0.616	0.406	0.455	0.768	0.699	0.834	0.588	0.790	0.713	0.675
18	0.578	0.612	0.539	0.448	0.665	0.448	0.456	0.820	0.676	0.818	0.907	0.672	0.859	0.712
19	0.329	0.409	0.544	0.634	0.906	0.558	0.277	0.244	0.229	0.000	0.370	0.017	0.023	0.579
20	0.481	0.523	0.543	0.481	0.790	0.541	0.448	0.881	0.718	0.855	0.712	0.621	0.754	0.745
21	0.420	0.468	0.563	0.909	0.563	0.374	0.588	0.851	0.663	0.833	0.829	0.612	0.898	0.948
22	0.870	0.599	0.727	0.439	0.420	0.321	0.344	0.571	0.504	0.651	0.899	0.467	0.854	1.000
23	0.423	0.481	0.840	0.442	0.392	0.242	0.221	0.518	0.431	0.620	0.746	0.331	0.592	0.824
24	0.533	0.439	0.820	0.399	0.460	0.289	0.229	0.537	0.466	0.663	0.822	0.386	0.676	0.969

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
25	0.632	0.394	0.826	0.338	0.431	0.235	0.174	0.302	0.296	0.452	0.398	0.159	0.269	0.800
26	0.489	0.467	0.830	0.409	0.438	0.271	0.229	0.523	0.454	0.631	0.774	0.355	0.633	0.897
27	0.589	0.527	0.823	0.335	0.424	0.266	0.211	0.491	0.423	0.592	0.711	0.359	0.591	0.811
28	0.709	0.570	0.719	0.518	0.451	0.331	0.376	0.614	0.541	0.689	0.835	0.487	0.818	0.989
29	0.259	0.472	0.784	0.610	0.438	0.287	0.328	0.646	0.547	0.707	0.851	0.376	0.716	0.878
30	0.113	0.000	0.942	0.631	0.434	0.196	0.047	0.117	0.183	0.423	0.000	0.061	0.103	0.668
31	0.765	0.592	0.708	0.541	0.411	0.299	0.381	0.599	0.496	0.632	0.844	0.441	0.813	0.901
32	0.712	0.591	0.790	0.402	0.382	0.263	0.274	0.502	0.432	0.572	0.744	0.369	0.670	0.832
33	0.736	0.583	0.783	0.405	0.388	0.270	0.279	0.509	0.437	0.584	0.765	0.382	0.691	0.859
34	0.406	0.453	0.779	0.527	0.486	0.317	0.315	0.626	0.551	0.710	0.880	0.408	0.758	0.980
35	0.091	0.552	0.725	0.564	0.431	0.371	0.426	0.526	0.446	0.739	0.949	0.478	0.910	0.953
36	0.684	0.575	0.799	0.354	0.403	0.268	0.244	0.495	0.428	0.581	0.729	0.375	0.638	0.813
37	0.654	0.552	0.797	0.362	0.420	0.276	0.246	0.510	0.441	0.602	0.749	0.385	0.650	0.837
38	0.789	0.595	0.733	0.473	0.409	0.304	0.345	0.573	0.494	0.636	0.859	0.441	0.810	0.938
39	0.794	0.610	0.733	0.470	0.405	0.302	0.348	0.567	0.491	0.622	0.841	0.433	0.801	0.917
40	0.789	0.595	0.733	0.473	0.409	0.304	0.345	0.573	0.494	0.636	0.859	0.441	0.810	0.938
41	0.713	0.583	0.769	0.440	0.392	0.270	0.299	0.527	0.444	0.587	0.761	0.386	0.695	0.838
42	0.392	0.524	0.739	0.546	0.528	0.358	0.364	0.661	0.584	0.712	0.686	0.446	0.672	0.878
43	0.470	0.512	0.800	0.476	0.434	0.281	0.285	0.563	0.490	0.633	0.782	0.363	0.673	0.869
44	0.664	0.583	0.804	0.356	0.392	0.256	0.240	0.485	0.413	0.562	0.694	0.358	0.605	0.768
45	0.636	0.370	0.823	0.335	0.434	0.232	0.171	0.274	0.278	0.430	0.348	0.128	0.215	0.799
46	0.199	0.506	0.723	0.713	0.514	0.355	0.444	0.753	0.675	0.757	0.928	0.422	0.853	0.947
47	0.494	0.587	0.823	0.463	0.329	0.218	0.253	0.500	0.408	0.558	0.681	0.309	0.571	0.701
48	0.533	0.595	0.753	0.543	0.413	0.292	0.359	0.600	0.523	0.626	0.797	0.385	0.740	0.834
49	0.592	0.482	0.784	0.448	0.455	0.303	0.283	0.569	0.496	0.672	0.859	0.414	0.746	0.980
50	0.848	0.466	0.750	0.509	0.372	0.244	0.268	0.414	0.359	0.596	0.732	0.294	0.484	0.805
51	0.292	0.479	0.798	0.582	0.408	0.268	0.301	0.617	0.513	0.691	0.833	0.366	0.687	0.854

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
52	0.491	0.483	0.775	0.503	0.469	0.313	0.313	0.607	0.534	0.690	0.870	0.411	0.761	0.971
53	0.199	0.491	0.722	0.762	0.406	0.266	0.355	0.596	0.501	0.695	0.920	0.411	0.843	0.874
54	0.620	0.518	0.802	0.381	0.431	0.280	0.245	0.521	0.449	0.621	0.775	0.386	0.664	0.880
55	0.416	0.304	0.585	0.290	0.260	0.422	0.376	0.584	0.948	0.662	0.768	0.317	0.614	0.772
56	0.199	0.209	0.375	0.646	0.924	0.683	0.721	0.691	0.345	0.287	0.775	0.006	0.003	0.745
57	0.308	0.417	0.851	0.503	0.357	0.223	0.199	0.549	0.427	0.694	0.828	0.349	0.610	0.861
58	0.416	0.309	0.585	0.447	0.567	0.456	0.409	0.779	0.858	0.898	0.984	0.573	0.856	0.977
59	0.632	0.304	0.585	0.317	0.247	0.399	0.402	0.579	0.957	0.691	0.812	0.328	0.656	0.807
60	0.307	0.273	0.585	0.430	0.201	0.329	0.280	0.574	1.000	0.816	1.000	0.428	0.831	0.777
61	0.372	0.404	0.323	0.647	0.917	0.649	0.629	1.000	0.827	0.989	0.952	0.783	0.913	0.798
62	0.536	0.559	0.880	0.363	0.269	0.169	0.150	0.415	0.315	0.532	0.642	0.278	0.475	0.673
63	0.307	0.257	0.376	0.509	0.931	0.648	0.698	0.803	0.380	0.382	0.949	0.067	0.159	0.801
64	0.605	0.628	0.864	0.357	0.263	0.170	0.180	0.403	0.315	0.480	0.586	0.264	0.467	0.610
65	0.199	0.137	0.320	0.470	1.000	0.762	0.877	0.833	0.359	0.316	0.717	0.006	0.011	0.833
66	0.632	0.458	0.563	0.741	0.795	0.422	0.292	0.600	0.508	0.749	0.289	0.445	0.486	0.630
67	0.496	0.580	0.572	0.500	0.656	0.441	0.446	0.820	0.688	0.832	0.885	0.641	0.867	0.752
68	0.486	0.547	0.502	0.530	0.748	0.501	0.494	0.914	0.753	0.918	0.937	0.730	0.936	0.776
69	0.589	0.420	0.564	0.854	0.743	0.408	0.362	0.658	0.538	0.777	0.485	0.458	0.632	0.785
70	0.572	0.560	0.572	0.475	0.687	0.473	0.434	0.815	0.676	0.823	0.823	0.623	0.829	0.790
71	0.416	0.525	0.447	0.592	0.793	0.520	0.549	0.993	0.812	0.985	0.989	0.801	1.000	0.754
72	0.675	0.424	0.566	0.909	0.806	0.362	0.217	0.469	0.403	0.706	0.109	0.361	0.370	0.578
73	0.591	0.541	0.572	0.580	0.618	0.425	0.472	0.814	0.672	0.834	0.966	0.637	0.947	0.889
74	0.432	0.519	0.502	0.570	0.811	0.553	0.522	0.930	0.775	0.943	0.696	0.755	0.794	0.838
75	0.432	0.519	0.502	0.570	0.811	0.553	0.522	0.930	0.775	0.943	0.696	0.755	0.794	0.838
76	0.609	0.579	0.572	0.489	0.636	0.435	0.443	0.800	0.670	0.828	0.924	0.652	0.908	0.817
77	0.463	0.527	0.567	0.552	0.698	0.466	0.473	0.835	0.717	0.914	0.752	0.746	0.822	0.885
78	0.477	0.552	0.511	0.506	0.759	0.509	0.478	0.903	0.740	0.895	0.861	0.701	0.872	0.733

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
79	0.091	0.397	0.503	0.000	0.503	0.281	0.715	0.955	0.623	0.750	0.841	0.456	0.869	0.678
80	0.562	0.555	0.571	0.479	0.698	0.481	0.437	0.820	0.679	0.826	0.799	0.622	0.815	0.792
81	0.416	0.467	0.568	0.473	0.878	0.612	0.420	0.888	0.704	0.813	0.464	0.506	0.557	0.726
82	0.416	0.541	0.443	0.540	0.823	0.543	0.532	1.000	0.823	1.000	1.000	0.822	1.000	0.746
83	0.416	0.390	0.588	0.683	0.563	0.538	0.365	0.633	0.562	0.640	0.580	0.317	0.527	0.678
84	0.600	0.575	0.571	0.478	0.653	0.448	0.439	0.805	0.673	0.829	0.899	0.648	0.888	0.809
85	0.436	0.463	0.587	0.494	0.808	0.556	0.416	0.857	0.688	0.819	0.601	0.528	0.649	0.792
86	1.000	0.684	0.473	0.003	0.646	0.423	0.461	0.758	0.777	0.886	0.529	0.928	0.795	0.343
87	0.632	0.688	0.700	0.564	0.476	0.340	0.445	0.571	0.545	0.732	0.109	0.700	0.439	0.861
88	0.569	0.666	0.472	0.390	0.697	0.463	0.505	0.849	0.674	0.773	0.964	0.693	0.786	0.593
89	0.515	0.644	0.472	0.290	0.663	0.424	0.447	0.864	0.817	0.941	0.748	0.907	0.879	0.651
90	0.416	0.615	0.492	0.518	0.635	0.434	0.467	0.691	0.681	0.831	0.399	0.667	0.682	0.589
91	0.819	0.669	0.471	0.157	0.668	0.439	0.484	0.800	0.771	0.889	0.605	0.900	0.790	0.470
92	0.452	0.579	0.457	0.494	0.785	0.517	0.516	0.953	0.778	0.935	0.965	0.782	0.931	0.685
93	0.416	0.639	0.475	0.287	0.771	0.485	0.533	0.766	0.728	0.846	0.406	0.744	0.687	0.598
94	0.416	0.645	0.465	0.311	0.747	0.495	0.495	0.778	0.780	0.930	0.428	0.833	0.702	0.637
95	0.524	0.648	0.473	0.216	0.625	0.393	0.420	0.850	0.870	0.993	0.659	1.000	0.905	0.682
96	0.199	0.091	0.000	0.735	0.701	1.000	1.000	0.511	0.371	0.184	0.616	0.006	0.012	0.726
97	0.468	0.580	0.308	0.442	0.859	0.572	0.636	1.000	0.875	1.000	0.908	0.926	0.910	0.622
98	0.344	0.579	0.303	0.561	0.850	0.565	0.656	1.000	0.838	0.954	0.946	0.853	0.871	0.651
99	0.892	0.642	0.415	0.037	0.639	0.422	0.586	0.539	0.513	0.471	0.594	0.267	0.251	0.999
100	0.470	0.588	0.310	0.433	0.858	0.569	0.632	1.000	0.870	0.993	0.911	0.924	0.903	0.605
101	0.329	0.795	0.590	0.357	0.662	0.326	0.599	0.576	0.479	0.433	0.580	0.472	0.331	0.675

Anexo VIII: Solución CRS- Eficiencias

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
1	0.676	1.000	1.000	1.000	0.939	0.960	0.942	0.892	0.817	0.845	0.963	0.792	0.757	0.871	0.916
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0.950	1.000	1.000	0.950	0.842	0.956	0.807	0.897	0.906	0.947	0.869	0.851	0.851	1.000	0.929
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0.673	1.000	1.000	1.000	0.977	0.909	0.788	0.709	0.733	0.673	0.432	0.610	0.334	0.586	0.829
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	0.762	1.000	1.000	0.484	0.915	0.981	0.807	0.746	0.781	0.901	0.505	0.847	0.513	0.548	0.828
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.954	0.854	0.808	0.752	0.735	0.974	0.627	0.739	0.809	0.929
15	0.617	0.985	1.000	1.000	0.940	0.843	0.762	0.761	0.684	0.937	0.766	0.855	0.556	0.647	0.858
16	0.952	1.000	1.000	1.000	0.972	1.000	0.836	0.624	0.888	0.459	1.000	0.662	0.589	0.904	0.916
17	0.861	1.000	1.000	0.839	0.902	1.000	0.994	0.878	1.000	0.702	0.948	0.838	0.841	1.000	0.934
18	0.621	1.000	1.000	0.863	0.807	0.960	0.978	0.773	0.982	0.652	0.484	0.789	0.577	0.893	0.850
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
20	1.000	0.920	1.000	0.964	0.967	1.000	0.867	0.411	0.549	0.189	0.759	0.390	0.262	0.830	0.831
21	0.835	1.000	1.000	1.000	0.961	0.914	0.675	0.478	0.668	0.226	0.794	0.388	0.102	0.673	0.819
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
23	0.776	0.854	1.000	1.000	1.000	0.995	0.967	0.848	0.929	0.854	0.653	0.824	0.672	1.000	0.884
24	0.839	0.957	1.000	1.000	0.998	1.000	0.962	0.837	0.865	0.855	0.671	0.809	0.655	0.872	0.911
25	1.000	0.968	1.000	1.000	1.000	0.996	0.994	0.964	0.976	0.996	0.979	0.985	0.972	1.000	0.986

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
26	0.602	0.869	1.000	1.000	1.000	0.932	0.864	0.636	0.677	0.704	0.342	0.667	0.403	0.772	0.797
27	1.000	0.843	1.000	1.000	1.000	0.961	0.954	0.774	0.844	0.827	0.630	0.764	0.614	0.977	0.887
28	0.598	0.973	1.000	1.000	1.000	0.991	1.000	0.905	0.833	0.917	0.991	0.874	0.803	0.869	0.924
29	0.741	0.929	1.000	1.000	1.000	0.951	0.895	0.593	0.703	0.866	0.729	0.851	0.694	0.903	0.877
30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
31	0.348	0.771	1.000	0.962	0.999	0.914	0.738	0.608	0.698	0.790	0.475	0.670	0.372	0.636	0.740
32	0.487	0.849	1.000	1.000	1.000	0.947	0.882	0.725	0.786	0.818	0.611	0.742	0.517	0.899	0.819
33	0.355	0.877	1.000	0.967	0.993	0.982	0.959	0.838	0.888	0.894	0.742	0.812	0.640	1.000	0.845
34	0.793	0.981	1.000	1.000	1.000	0.933	0.902	0.658	0.675	0.702	0.519	0.726	0.472	0.790	0.864
35	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
36	0.407	0.852	1.000	1.000	1.000	0.925	0.880	0.774	0.822	0.856	0.692	0.775	0.617	0.957	0.825
37	0.589	0.884	1.000	0.983	1.000	0.942	0.923	0.809	0.846	0.894	0.773	0.826	0.705	1.000	0.869
38	0.627	0.924	1.000	1.000	0.932	0.875	0.855	0.896	0.840	1.000	0.982	0.932	0.808	0.876	0.894
39	0.621	0.908	1.000	1.000	0.932	0.871	0.842	0.882	0.822	0.981	0.956	0.906	0.765	0.877	0.882
40	0.627	0.924	1.000	1.000	0.932	0.874	0.855	0.896	0.840	1.000	0.982	0.932	0.807	0.876	0.893
41	0.725	0.931	1.000	0.867	1.000	0.960	0.897	0.794	0.846	0.839	0.724	0.792	0.602	1.000	0.874
42	0.699	1.000	1.000	1.000	1.000	0.923	0.967	0.825	0.819	0.840	0.973	0.821	0.819	1.000	0.926
43	0.621	0.886	1.000	1.000	1.000	0.993	0.912	0.751	0.797	0.738	0.479	0.709	0.445	0.884	0.835
44	0.752	0.835	1.000	0.985	1.000	0.947	0.908	0.769	0.824	0.835	0.668	0.770	0.603	1.000	0.856
45	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
46	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
47	0.705	0.753	1.000	1.000	0.987	0.980	0.855	0.717	0.763	0.806	0.486	0.736	0.500	1.000	0.809
48	0.839	0.898	1.000	1.000	0.955	0.946	0.890	0.774	0.810	0.937	0.899	0.910	0.795	1.000	0.906
49	0.824	0.965	1.000	1.000	0.906	1.000	0.998	0.835	0.881	0.861	0.728	0.825	0.671	0.901	0.911
50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
51	0.864	0.895	1.000	1.000	0.887	0.893	0.852	0.692	0.728	0.750	0.530	0.756	0.530	0.899	0.843
52	0.643	0.968	1.000	1.000	1.000	0.948	0.944	0.894	0.881	0.828	0.681	0.805	0.618	0.890	0.891

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
53	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
54	0.904	0.900	1.000	1.000	1.000	0.934	0.911	0.741	0.817	0.761	0.572	0.730	0.527	0.881	0.873
55	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
56	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
57	0.891	0.704	1.000	1.000	0.764	0.866	0.878	0.553	0.672	0.633	0.803	0.717	0.530	0.819	0.789
58	1.000	1.000	1.000	0.931	0.686	0.880	0.914	0.717	1.000	0.742	0.762	0.721	0.738	0.726	0.886
59	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
60	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
61	1.000	0.753	1.000	0.798	1.000	0.966	0.977	0.571	0.359	0.173	0.527	0.267	0.179	0.858	0.762
62	0.555	0.526	1.000	1.000	0.731	0.831	0.938	0.645	0.758	0.777	0.937	0.783	0.651	1.000	0.738
63	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
64	0.702	0.483	1.000	1.000	0.838	0.867	0.914	0.597	0.685	0.737	0.841	0.753	0.569	1.000	0.738
65	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
66	1.000	0.953	1.000	1.000	1.000	0.976	0.932	0.911	0.942	0.997	0.820	0.944	0.900	0.947	0.957
67	0.985	1.000	1.000	0.707	1.000	0.999	0.886	1.000	0.941	0.834	0.579	0.837	0.652	0.843	0.913
68	0.604	0.908	1.000	1.000	0.870	1.000	0.767	0.520	0.647	0.619	0.440	0.526	0.418	0.728	0.782
69	1.000	0.966	1.000	1.000	1.000	0.988	0.843	0.825	0.894	0.981	0.587	0.903	0.736	0.795	0.925
70	0.519	0.997	1.000	0.812	0.913	1.000	0.926	0.930	0.890	0.835	0.627	0.833	0.681	0.798	0.866
71	1.000	1.000	1.000	1.000	0.818	0.865	0.858	0.832	0.788	0.732	0.612	0.699	0.635	0.837	0.886
72	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
73	0.825	1.000	1.000	0.838	0.937	0.946	0.869	0.929	0.853	0.754	0.426	0.758	0.511	0.696	0.867
74	0.984	1.000	1.000	0.740	0.800	1.000	0.940	0.783	0.891	0.785	1.000	0.740	0.848	0.867	0.913
75	0.984	1.000	1.000	0.740	0.800	1.000	0.940	0.783	0.891	0.785	1.000	0.740	0.848	0.867	0.913
76	0.807	1.000	1.000	0.813	0.934	0.934	0.869	0.933	0.887	0.849	0.597	0.875	0.661	0.751	0.888
77	0.780	1.000	1.000	1.000	1.000	0.964	0.852	0.813	0.776	0.766	0.459	0.671	0.573	0.705	0.873
78	0.614	0.979	1.000	1.000	0.787	1.000	0.960	0.730	0.846	0.808	0.813	0.777	0.766	0.927	0.877
79	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
80	0.984	1.000	1.000	0.771	0.917	1.000	0.932	0.960	0.924	0.836	0.651	0.861	0.705	0.820	0.918
81	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
82	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
83	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
84	0.512	1.000	1.000	0.699	1.000	0.994	0.899	0.936	0.872	0.759	0.442	0.757	0.538	0.672	0.838
85	0.979	0.954	1.000	1.000	0.758	1.000	0.907	0.702	0.862	0.868	1.000	0.828	0.884	0.877	0.920
86	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
87	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
88	0.912	1.000	1.000	0.778	0.862	0.900	0.888	0.794	0.990	0.955	0.326	0.990	0.800	0.749	0.881
89	0.901	1.000	1.000	0.951	0.990	0.990	0.995	0.897	0.989	1.000	0.788	0.977	0.915	0.966	0.961
90	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
91	0.817	1.000	1.000	0.904	0.971	0.969	0.960	0.953	1.000	0.997	0.902	0.995	0.981	1.000	0.956
92	0.964	1.000	1.000	0.887	0.930	0.910	0.893	0.783	0.926	0.896	0.325	0.873	0.665	0.888	0.890
93	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
94	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
95	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
96	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
97	0.948	0.823	1.000	1.000	0.488	0.867	0.905	0.312	0.345	0.125	0.534	0.107	0.129	1.000	0.705
98	0.747	0.806	1.000	1.000	0.639	0.988	0.933	0.347	0.417	0.204	0.517	0.174	0.158	1.000	0.716
99	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
100	0.621	0.824	1.000	1.000	0.531	0.927	0.910	0.314	0.359	0.106	0.502	0.199	0.254	1.000	0.689
101	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Anexo IX: Solución VRS- Variables objetivo

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
1	0.008	0.102	0.214	0.017	0.143	0.226	0.273	0.247	0.185	0.184	0.008	1.074	13.058	17.514
2	0.005	0.011	0.252	0.002	0.112	0.160	0.234	0.182	0.103	0.064	0.008	0.650	3.890	0.000
3	0.012	0.050	0.245	0.010	0.145	0.190	0.299	0.204	0.140	0.103	0.007	0.787	5.686	10.760
4	0.015	0.041	0.248	0.008	0.114	0.178	0.225	0.176	0.122	0.081	0.007	0.630	3.860	12.286
5	0.008	0.131	0.200	0.021	0.133	0.215	0.270	0.259	0.187	0.188	0.011	0.912	17.685	21.326
6	0.014	0.036	0.246	0.004	0.108	0.163	0.218	0.175	0.120	0.088	0.007	0.830	3.980	9.030
7	0.009	0.139	0.216	0.023	0.136	0.214	0.292	0.277	0.192	0.191	0.012	0.887	18.495	20.745
8	0.019	0.200	0.000	0.009	0.122	0.126	0.000	0.145	0.111	0.152	0.008	0.380	6.910	18.261
9	0.019	0.137	0.264	0.020	0.116	0.193	0.199	0.265	0.166	0.241	0.013	1.150	18.940	14.404
10	0.015	0.164	0.214	0.016	0.102	0.207	0.166	0.295	0.207	0.255	0.012	1.060	16.020	18.029
11	0.014	0.173	0.210	0.014	0.133	0.270	0.220	0.274	0.178	0.238	0.009	0.890	13.080	17.885
12	0.015	0.180	0.032	0.012	0.073	0.094	0.020	0.157	0.094	0.170	0.010	0.520	9.490	18.157
13	0.023	0.142	0.192	0.018	0.179	0.178	0.128	0.181	0.125	0.187	0.010	0.740	10.350	15.660
14	0.015	0.133	0.198	0.018	0.183	0.244	0.255	0.246	0.181	0.176	0.006	0.849	9.465	17.278
15	0.007	0.130	0.197	0.018	0.136	0.224	0.252	0.256	0.189	0.189	0.013	0.915	18.557	21.848
16	0.017	0.146	0.271	0.028	0.149	0.235	0.253	0.172	0.171	0.057	0.013	0.360	9.710	15.652
17	0.012	0.106	0.286	0.015	0.178	0.263	0.300	0.308	0.241	0.227	0.008	1.419	15.176	15.431
18	0.011	0.122	0.287	0.017	0.187	0.283	0.307	0.326	0.229	0.217	0.013	1.182	18.070	16.270
19	0.017	0.179	0.284	0.023	0.261	0.361	0.183	0.098	0.079	0.000	0.005	0.030	0.590	13.234
20	0.014	0.151	0.285	0.019	0.225	0.350	0.301	0.351	0.245	0.231	0.010	1.093	16.197	17.713
21	0.016	0.158	0.273	0.032	0.153	0.218	0.376	0.338	0.213	0.207	0.012	0.934	18.840	18.041
22	0.005	0.125	0.170	0.017	0.121	0.208	0.227	0.229	0.174	0.177	0.012	0.840	18.180	22.849
23	0.015	0.166	0.100	0.017	0.113	0.158	0.140	0.210	0.148	0.176	0.011	0.626	13.054	19.763
24	0.013	0.162	0.112	0.015	0.133	0.187	0.153	0.215	0.160	0.173	0.010	0.648	13.217	20.211
25	0.010	0.193	0.109	0.013	0.124	0.149	0.111	0.107	0.094	0.122	0.005	0.260	5.200	18.286

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
26	0.013	0.162	0.106	0.016	0.126	0.175	0.151	0.210	0.156	0.171	0.011	0.637	13.440	20.414
27	0.011	0.174	0.110	0.014	0.122	0.157	0.126	0.170	0.131	0.159	0.009	0.534	9.574	17.992
28	0.009	0.132	0.175	0.019	0.130	0.214	0.248	0.247	0.186	0.185	0.011	0.851	17.159	21.951
29	0.019	0.163	0.135	0.022	0.126	0.186	0.215	0.260	0.189	0.194	0.012	0.683	15.339	20.237
30	0.022	0.296	0.036	0.023	0.125	0.127	0.031	0.047	0.063	0.115	0.000	0.110	2.280	15.262
31	0.008	0.138	0.182	0.020	0.125	0.200	0.252	0.248	0.177	0.180	0.012	0.814	17.651	21.527
32	0.009	0.148	0.131	0.016	0.122	0.185	0.177	0.214	0.159	0.172	0.011	0.715	15.150	21.259
33	0.009	0.148	0.135	0.016	0.123	0.186	0.184	0.217	0.160	0.172	0.011	0.722	15.335	21.245
34	0.016	0.159	0.138	0.020	0.140	0.205	0.209	0.251	0.189	0.187	0.011	0.692	15.071	20.655
35	0.023	0.139	0.172	0.021	0.124	0.240	0.281	0.211	0.154	0.201	0.013	0.860	19.350	21.772
36	0.010	0.153	0.125	0.016	0.123	0.180	0.171	0.213	0.157	0.171	0.011	0.691	14.591	20.881
37	0.010	0.153	0.127	0.016	0.123	0.180	0.173	0.214	0.157	0.171	0.011	0.694	14.650	20.872
38	0.006	0.132	0.166	0.018	0.119	0.199	0.224	0.232	0.171	0.178	0.012	0.815	17.567	22.165
39	0.006	0.132	0.166	0.018	0.119	0.199	0.224	0.231	0.171	0.178	0.012	0.816	17.580	22.192
40	0.006	0.132	0.166	0.018	0.119	0.199	0.224	0.232	0.171	0.178	0.012	0.815	17.567	22.165
41	0.010	0.149	0.144	0.018	0.124	0.186	0.199	0.225	0.163	0.174	0.011	0.728	15.520	20.971
42	0.015	0.147	0.163	0.020	0.152	0.231	0.241	0.263	0.201	0.195	0.009	0.832	14.085	20.297
43	0.014	0.157	0.125	0.018	0.125	0.183	0.183	0.228	0.168	0.179	0.011	0.682	14.746	20.715
44	0.012	0.157	0.122	0.016	0.124	0.176	0.169	0.214	0.155	0.171	0.011	0.673	14.154	20.495
45	0.010	0.190	0.110	0.013	0.125	0.150	0.113	0.110	0.096	0.117	0.005	0.230	4.650	18.245
46	0.020	0.152	0.173	0.026	0.148	0.230	0.293	0.302	0.233	0.206	0.013	0.760	18.140	21.635
47	0.013	0.159	0.110	0.017	0.102	0.153	0.148	0.213	0.145	0.179	0.011	0.669	13.888	19.924
48	0.012	0.145	0.154	0.020	0.124	0.197	0.225	0.248	0.183	0.187	0.012	0.761	16.794	21.430
49	0.012	0.152	0.135	0.017	0.131	0.196	0.188	0.228	0.170	0.177	0.011	0.710	14.989	20.950
50	0.005	0.163	0.156	0.019	0.107	0.158	0.177	0.166	0.124	0.162	0.010	0.530	10.340	18.395
51	0.018	0.163	0.126	0.021	0.118	0.175	0.196	0.249	0.177	0.191	0.012	0.673	14.851	20.014
52	0.014	0.153	0.140	0.019	0.135	0.202	0.208	0.243	0.183	0.183	0.011	0.713	15.509	21.039
53	0.020	0.156	0.174	0.027	0.117	0.172	0.234	0.239	0.173	0.189	0.013	0.740	17.940	19.968

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
54	0.011	0.154	0.124	0.016	0.124	0.181	0.167	0.212	0.157	0.171	0.011	0.692	14.476	20.822
55	0.015	0.209	0.259	0.012	0.075	0.273	0.248	0.234	0.327	0.180	0.011	0.570	13.100	17.630
56	0.020	0.236	0.390	0.023	0.266	0.442	0.476	0.277	0.119	0.078	0.011	0.010	0.160	17.031
57	0.017	0.174	0.093	0.019	0.102	0.143	0.133	0.213	0.144	0.182	0.011	0.601	12.538	19.026
58	0.015	0.186	0.259	0.017	0.127	0.262	0.254	0.281	0.296	0.221	0.013	0.898	16.973	18.147
59	0.010	0.209	0.259	0.013	0.071	0.258	0.265	0.232	0.330	0.188	0.011	0.590	13.980	18.434
60	0.018	0.218	0.259	0.016	0.058	0.213	0.185	0.230	0.345	0.222	0.014	0.770	17.680	17.761
61	0.016	0.251	0.422	0.017	0.264	0.398	0.400	0.229	0.064	0.044	0.007	0.090	2.060	14.982
62	0.013	0.169	0.075	0.014	0.098	0.134	0.090	0.183	0.124	0.170	0.010	0.591	11.698	19.316
63	0.018	0.223	0.389	0.019	0.268	0.419	0.461	0.322	0.131	0.104	0.013	0.120	3.470	18.298
64	0.013	0.166	0.085	0.014	0.112	0.153	0.110	0.189	0.136	0.167	0.010	0.603	12.229	19.874
65	0.020	0.257	0.424	0.018	0.288	0.493	0.579	0.334	0.124	0.086	0.010	0.010	0.340	19.044
66	0.010	0.165	0.272	0.027	0.229	0.273	0.192	0.240	0.175	0.204	0.004	0.801	10.358	14.359
67	0.014	0.131	0.267	0.009	0.189	0.285	0.219	0.329	0.217	0.181	0.006	0.860	11.080	13.601
68	0.014	0.142	0.310	0.020	0.216	0.324	0.325	0.368	0.261	0.252	0.013	1.325	20.100	17.931
69	0.011	0.186	0.272	0.030	0.214	0.256	0.135	0.194	0.149	0.206	0.001	0.650	7.880	13.249
70	0.012	0.137	0.267	0.019	0.199	0.306	0.297	0.327	0.237	0.230	0.010	1.195	16.903	18.555
71	0.015	0.144	0.344	0.022	0.223	0.329	0.363	0.392	0.274	0.261	0.013	1.411	20.567	16.282
72	0.009	0.175	0.271	0.032	0.232	0.234	0.143	0.188	0.139	0.192	0.002	0.650	7.920	13.207
73	0.011	0.137	0.267	0.020	0.180	0.277	0.303	0.324	0.231	0.226	0.013	1.157	19.727	19.523
74	0.014	0.148	0.311	0.019	0.236	0.358	0.319	0.376	0.264	0.249	0.011	1.248	17.885	17.227
75	0.014	0.148	0.311	0.019	0.236	0.358	0.319	0.376	0.264	0.249	0.011	1.248	17.885	17.227
76	0.010	0.131	0.267	0.019	0.178	0.275	0.299	0.318	0.227	0.220	0.013	1.143	19.076	18.680
77	0.013	0.146	0.270	0.020	0.201	0.309	0.304	0.338	0.238	0.227	0.011	1.094	17.626	18.558
78	0.014	0.144	0.305	0.019	0.221	0.329	0.315	0.366	0.261	0.252	0.012	1.320	19.061	17.536
79	0.023	0.183	0.310	0.045	0.145	0.182	0.472	0.383	0.215	0.204	0.012	0.820	18.480	15.498
80	0.012	0.138	0.267	0.019	0.201	0.311	0.296	0.328	0.233	0.223	0.010	1.122	16.493	18.097
81	0.015	0.163	0.269	0.018	0.253	0.396	0.277	0.356	0.243	0.221	0.006	0.910	11.890	16.584

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información
82	0.015	0.142	0.348	0.020	0.237	0.351	0.351	0.401	0.284	0.272	0.014	1.480	21.260	17.046
83	0.015	0.185	0.257	0.025	0.162	0.348	0.241	0.254	0.194	0.174	0.008	0.570	11.250	15.487
84	0.011	0.132	0.267	0.019	0.188	0.286	0.301	0.322	0.235	0.230	0.012	1.232	18.370	19.038
85	0.015	0.177	0.257	0.018	0.163	0.360	0.213	0.224	0.190	0.187	0.008	0.640	11.370	15.279
86	0.002	0.101	0.329	0.002	0.186	0.274	0.304	0.304	0.268	0.241	0.007	1.670	16.930	7.843
87	0.010	0.100	0.187	0.021	0.137	0.220	0.294	0.229	0.188	0.199	0.002	1.260	9.380	19.662
88	0.006	0.106	0.329	0.008	0.195	0.289	0.314	0.321	0.257	0.233	0.009	1.509	16.917	9.928
89	0.013	0.113	0.329	0.011	0.189	0.272	0.293	0.344	0.282	0.256	0.010	1.641	18.636	14.868
90	0.015	0.121	0.317	0.019	0.183	0.281	0.308	0.277	0.235	0.226	0.006	1.200	14.530	13.460
91	0.006	0.106	0.330	0.006	0.188	0.275	0.304	0.316	0.269	0.242	0.008	1.610	17.160	10.736
92	0.014	0.131	0.339	0.018	0.226	0.334	0.341	0.382	0.268	0.254	0.013	1.407	19.791	15.645
93	0.015	0.114	0.328	0.012	0.222	0.314	0.352	0.307	0.251	0.230	0.006	1.340	14.630	13.655
94	0.015	0.112	0.333	0.012	0.215	0.320	0.327	0.312	0.269	0.253	0.006	1.500	14.960	14.559
95	0.013	0.111	0.329	0.009	0.180	0.254	0.277	0.341	0.300	0.270	0.009	1.800	19.250	15.594
96	0.020	0.270	0.624	0.026	0.202	0.647	0.660	0.205	0.128	0.050	0.009	0.010	0.350	16.596
97	0.015	0.173	0.421	0.020	0.222	0.424	0.431	0.338	0.240	0.208	0.012	1.098	15.119	15.993
98	0.016	0.178	0.425	0.022	0.227	0.434	0.438	0.346	0.240	0.210	0.012	1.067	15.381	16.919
99	0.004	0.113	0.365	0.003	0.184	0.273	0.387	0.216	0.177	0.128	0.008	0.480	5.410	22.830
100	0.016	0.175	0.419	0.022	0.228	0.428	0.431	0.350	0.244	0.214	0.012	1.099	15.839	16.929
101	0.017	0.070	0.256	0.014	0.191	0.211	0.395	0.231	0.165	0.118	0.008	0.850	7.100	15.429

Anexo X: Solución VRS- Eficiencias

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
1	0.714	1.000	1.000	1.000	0.924	0.956	0.954	0.880	0.807	0.829	1.000	0.787	0.758	0.922	0.920
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0.911	1.000	1.000	0.948	0.884	0.952	0.845	0.900	0.904	0.923	0.906	0.829	0.852	1.000	0.931
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0.689	1.000	1.000	1.000	0.988	0.923	0.800	0.707	0.748	0.698	0.385	0.654	0.319	0.652	0.835
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	0.755	0.982	1.000	0.525	0.907	0.977	0.820	0.753	0.783	0.906	0.526	0.841	0.533	0.586	0.829
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.952	0.865	0.802	0.753	0.750	0.934	0.667	0.719	0.843	0.930
15	0.633	0.975	1.000	1.000	0.945	0.850	0.763	0.766	0.693	0.951	0.795	0.864	0.581	0.690	0.863
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
17	0.864	1.000	1.000	0.841	0.900	1.000	0.993	0.879	1.000	0.703	0.949	0.840	0.842	1.000	0.934
18	0.620	1.000	1.000	0.845	0.822	0.971	0.968	0.780	0.994	0.671	0.477	0.805	0.587	0.893	0.852
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
20	1.000	0.933	1.000	0.941	0.976	1.000	0.859	0.416	0.555	0.196	0.742	0.404	0.255	0.800	0.833
21	0.869	0.985	1.000	1.000	0.995	0.951	0.693	0.486	0.712	0.299	0.739	0.481	0.114	0.832	0.835
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
23	0.766	0.879	1.000	1.000	1.000	0.993	0.976	0.843	0.930	0.829	0.616	0.808	0.652	0.959	0.885
24	0.883	0.927	1.000	1.000	0.997	1.000	0.959	0.837	0.867	0.881	0.744	0.834	0.711	0.956	0.918
25	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
26	0.604	0.868	1.000	1.000	1.000	0.932	0.863	0.636	0.677	0.705	0.346	0.669	0.405	0.776	0.797
27	1.000	0.941	1.000	0.976	1.000	0.984	0.975	0.840	0.888	0.835	0.710	0.825	0.758	1.000	0.930
28	0.613	0.965	1.000	1.000	1.000	0.991	1.000	0.903	0.834	0.928	1.000	0.888	0.814	0.897	0.926
29	0.740	0.933	1.000	1.000	1.000	0.951	0.897	0.592	0.703	0.862	0.722	0.848	0.690	0.895	0.877
30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
31	0.390	0.807	1.000	0.949	0.977	0.904	0.738	0.590	0.682	0.762	0.444	0.659	0.356	0.595	0.744
32	0.538	0.921	1.000	0.989	0.957	0.925	0.887	0.694	0.757	0.759	0.541	0.714	0.475	0.801	0.823
33	0.429	0.940	1.000	0.944	0.956	0.965	0.959	0.806	0.860	0.845	0.689	0.793	0.611	0.929	0.851
34	0.832	0.954	1.000	1.000	1.000	0.933	0.899	0.658	0.678	0.726	0.585	0.749	0.522	0.866	0.870
35	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
36	0.477	0.925	1.000	0.935	0.976	0.915	0.865	0.739	0.795	0.809	0.623	0.766	0.570	0.856	0.829
37	0.629	0.933	1.000	0.921	0.993	0.939	0.906	0.786	0.832	0.867	0.723	0.826	0.667	0.923	0.870
38	0.625	0.944	1.000	1.000	0.927	0.872	0.860	0.890	0.837	0.981	0.956	0.920	0.793	0.843	0.894
39	0.618	0.943	1.000	1.000	0.924	0.865	0.851	0.872	0.818	0.949	0.912	0.886	0.740	0.823	0.883
40	0.625	0.944	1.000	1.000	0.927	0.870	0.860	0.890	0.837	0.981	0.956	0.920	0.792	0.843	0.894
41	0.802	0.999	1.000	0.836	0.963	0.943	0.894	0.760	0.816	0.787	0.666	0.773	0.568	0.920	0.881
42	0.691	1.000	1.000	1.000	1.000	0.924	0.966	0.830	0.821	0.834	0.999	0.805	0.830	0.990	0.926
43	0.611	0.909	1.000	1.000	1.000	0.991	0.920	0.746	0.799	0.714	0.445	0.693	0.426	0.846	0.835
44	0.849	0.932	1.000	0.909	0.963	0.930	0.893	0.722	0.788	0.770	0.579	0.754	0.544	0.871	0.863
45	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
46	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
47	0.695	0.861	1.000	1.000	0.960	0.961	0.883	0.687	0.750	0.705	0.346	0.673	0.419	0.829	0.811
48	0.833	0.964	1.000	1.000	0.939	0.934	0.907	0.755	0.803	0.876	0.814	0.872	0.746	0.896	0.908
49	0.857	0.943	1.000	1.000	0.906	1.000	0.997	0.835	0.883	0.881	0.783	0.845	0.713	0.965	0.916
50	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
51	0.863	0.909	1.000	1.000	0.884	0.890	0.856	0.688	0.726	0.737	0.512	0.748	0.520	0.878	0.843
52	0.668	0.950	1.000	1.000	1.000	0.949	0.943	0.894	0.883	0.844	0.724	0.821	0.651	0.940	0.895

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
53	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
54	0.917	0.918	1.000	0.972	1.000	0.934	0.903	0.733	0.813	0.753	0.553	0.732	0.512	0.851	0.873
55	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
56	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
57	0.880	0.695	1.000	1.000	0.766	0.868	0.876	0.572	0.681	0.659	0.848	0.733	0.553	0.847	0.793
58	1.000	0.922	1.000	0.938	0.812	0.931	0.938	0.794	1.000	0.829	0.835	0.795	0.797	0.909	0.905
59	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
60	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
61	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
62	0.602	0.640	1.000	1.000	0.659	0.793	0.951	0.602	0.714	0.684	0.821	0.733	0.578	0.828	0.741
63	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
64	0.799	0.656	1.000	1.000	0.710	0.801	0.927	0.527	0.606	0.601	0.677	0.682	0.462	0.740	0.744
65	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
66	1.000	0.952	1.000	1.000	1.000	0.977	0.933	0.912	0.942	0.998	0.822	0.944	0.901	0.949	0.958
67	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
68	0.612	0.914	1.000	1.000	0.868	1.000	0.767	0.517	0.643	0.611	0.426	0.519	0.409	0.719	0.782
69	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
70	0.554	1.000	1.000	0.782	0.909	1.000	0.910	0.929	0.879	0.811	0.707	0.792	0.716	0.775	0.868
71	1.000	0.993	0.998	1.000	0.836	0.877	0.857	0.848	0.804	0.756	0.651	0.716	0.668	0.879	0.894
72	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
73	0.818	0.983	1.000	0.877	0.930	0.942	0.881	0.936	0.855	0.758	0.446	0.752	0.530	0.731	0.868
74	0.973	1.000	1.000	0.800	0.793	1.000	0.980	0.777	0.903	0.812	0.884	0.801	0.801	0.950	0.916
75	0.973	1.000	1.000	0.800	0.793	1.000	0.980	0.777	0.903	0.812	0.884	0.801	0.801	0.950	0.916
76	0.805	1.000	1.000	0.793	0.950	0.945	0.859	0.940	0.900	0.869	0.590	0.893	0.672	0.751	0.890
77	0.743	1.000	1.000	1.000	1.000	0.952	0.863	0.804	0.802	0.846	0.396	0.809	0.566	0.777	0.877
78	0.649	1.000	1.000	0.997	0.777	1.000	0.960	0.720	0.830	0.774	0.779	0.744	0.742	0.892	0.878
79	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

DMUs	Comisión	Volatilidad	Riesgo sist.	Tracking error	R. a 3 meses	R. a 6 meses	R. a 1 año	R. a 2 años	R. a 3 años	R a 5 años	Alpha	Sharpe	Treynor	Información	EFICIENCIA
80	1.000	1.000	1.000	0.750	0.917	1.000	0.920	0.963	0.927	0.841	0.709	0.860	0.745	0.820	0.922
81	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
82	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
83	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
84	0.545	1.000	1.000	0.675	1.000	1.000	0.882	0.938	0.865	0.741	0.493	0.721	0.563	0.648	0.840
85	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
86	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
87	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
88	0.676	1.000	1.000	1.000	0.884	0.917	0.918	0.843	0.920	0.872	0.614	0.845	0.791	0.908	0.890
89	0.895	1.000	1.000	0.962	0.996	0.993	0.998	0.903	0.987	1.000	0.801	0.971	0.918	0.966	0.963
90	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
91	0.811	1.000	0.999	0.952	0.986	0.983	0.984	0.964	0.992	0.997	0.895	1.000	0.965	1.000	0.963
92	0.964	1.000	1.000	0.886	0.931	0.910	0.893	0.783	0.927	0.897	0.324	0.874	0.665	0.888	0.890
93	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
94	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
95	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
96	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
97	1.000	0.970	0.983	0.903	0.575	0.784	0.889	0.469	0.525	0.359	0.594	0.423	0.330	0.922	0.784
98	0.736	0.970	0.984	0.966	0.701	0.882	0.926	0.484	0.559	0.388	0.572	0.435	0.307	0.911	0.785
99	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
100	0.731	0.988	0.982	0.843	0.597	0.835	0.889	0.441	0.523	0.311	0.513	0.512	0.414	0.865	0.762
101	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000