Universidad de Sevilla

Departamento de Matemática Aplicada I

Álgebras de Leibniz de longitud máxima

Elisa María Cañete Molero

Sevilla, 2012

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Álgebras de Leibniz de longitud máxima

Memoria presentada por Elisa María Cañete Molero para optar al grado de Doctora en Matemáticas por la Universidad de Sevilla

Vº Bº
de la Directora,

Fdo. Luisa María Camacho Santana,
Prof. Titular de Universidad del
Departamento de Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Octubre de 2012

Índice general

Resumen

Non associative algebras appear at the beginning of the twentieth century as a consequence of the development of quantum mechanics. Pascual Jordan, John von Neumann and Eugene Wigner were the first researchers in introducing theses kinds of algebras in 1934 and then, Jean-Louis Loday introduced the Leibniz algebras in 1993 in his cyclic homology study [30].

Thanks to Levi's theorem, the nilpotent Lie algebras have played an important role in mathematics over the last years, either in the classification theory or in geometrical and analytical applications. In Leibniz algebras, Levi's theorem does not hold, although nilpotent algebras still play a central role.

The aim of this work is to continuing the study of nilpotent Leibniz algebras. Since the description of these algebras seen to be unsolvable, we reduce our discussion to the nilpotent family with some restriction on their characteristic sequences and their gradation. More precisely, we study the p-filiform Leibniz algebras whose gradation is of maximum length. This family is very interesting since it has a close relationship with their physical applications, making easier the cohomology study for instance, the space of derivation or the first space of cohomology.

The n-dimensional p-filiform Leibniz algebras of maximum length have already been studied with $0 \leq p \leq 2$. For Lie algebras whose nilindex is equal to $n-2$ there is only one characteristic sequence, $(n-2, 1, 1)$, while in Leibniz theory we obtain two possibilities: $(n-2, 1, 1)$ and $(n-2, 2)$. The first case- '*the 2-filiform case*'- is already studied

in [4] and [37]. The current work appears as a result of studying the case $(n-2,2)$.

Therefore, we present in the second chapter of this work, the study of the quasi-filiform non Lie Leibniz algebras of maximum length, with characteristic sequence $(n-2,2)$, completing the study of maximum length of Leibniz algebras with nilindex $n-p$ with $0 \leq p \leq 2$. The following chapter deals with the classification of the 3-filiform algebras, whereas the fourth one shows the generic case partially [1]: the study of p-filiform Leibniz algebras of maximum length, with p generic. In the last chapter we carry out the cohomological study of the obtained algebras.

Finally, we have to mention that the software *Mathematica* has been very useful throughout all this work. We present two algorithms to compute the space of derivations and to establish whether or not two algebras are isomorphic.

[1] We actually show the classification of the extension of the non-split p-filiform Lie algebras.

Agradecimientos

En la elaboración de esta memoria han sido muchas las personas que, de una forma u otra, me han apoyado. A todas ellas quiero darles mi más sincero agradecimiento:

En primer lugar, deseo dar las gracias de forma muy especial a los profesores Lisa Camacho y José Ramón Gómez. A Lisa, directora de esta memoria, no sólo por haber guiado mi camino investigador con su dedicación continua, orientaciones y ayuda, sino por haber compartido conmigo momentos muy especiales: primeros cogresos, estancias, charlas, etc. A José Ramón, por animarme a adentrarme de lleno en el mundo de la investigación de la mano de las álgebras de Lie y porque me ha ofrecido siempre su amistad y su cariño.

Al profesor Bakhrom Omirov, quien ha colaborado intensamente en la elaboración de este trabajo y quien con sus observaciones ha hecho posible la realización del mismo. También agradecerle su sincera amistad.

Gracias a mis compañeros de departamento, por acompañarme y enseñarme en esta etapa, sintiéndome rodeada de los mejores amigos que una pueda imaginar.

Finalmente quiero agradecer a mi familia su apoyo incondicional. A mis padres, mi hermana y María por no dejar nunca que me rinda y por hacerme creer que en la vida una es lo que se propone. A Álvaro, por hacerme crecer como persona y porque sin su ayuda esta memoria estaría incompleta.

Introducción

A principios del siglo XX, cuando se empieza a desarrollar la Mecánica Cuántica surge la necesidad de trabajar con objetos algebraicos infinitos dimensionales que fueran esencialmente diferentes a las matrices complejas, en definitiva, diferentes a las álgebras asociativas ya que las operaciones usuales definidas en ellas, la suma, multiplicación por un escalar o producto no tienen significado físico, pues no dan lugar a operaciones observables. Aparecen así las álgebras no asociativas, de las que cabe destacar las álgebras de Lie, pues juegan un papel muy importante en numerosas ramas de la Física y de las Matemáticas.

Un álgebra de Lie se define formalmente como un espacio vectorial $\mathcal{L}$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ provisto de una aplicación bilineal, llamada producto o ley del álgebra. La noción de álgebra de Leibniz es mucho más reciente, fue introducida en 1992 por Jean Louis Loday en [29]. Presenta unas álgebras que son, en cierto sentido, una generalización de las álgebras de Lie (en el sentido que toda álgebra de Lie es también un álgebra de Leibniz). Su aparición fue fundamental en física, pues Dirac observó en *The Principles of Quantum Mechanics* (ver [19]) que las identidades de Leibniz

$$[x,[y,z]] = [y,[x,z]] + [[x,y],z]$$

$$[[y,z],x] = [y,[z,x]] + [[y,x],z]$$

eran suficientes para determinar el commutador de dos operadores. Observó que las identidades de Leibniz simplemente nos dicen que, fijando un argumento en el producto obtenemos una derivación del álgebra. Esto demuestra que, de hecho, la mayoría de los axiomas del producto corchete de Lie para el correspondiente operador de álgebras son superfluos y uno puede quedarse sólo con la propiedad con respecto de la composición (la identidad de Leibniz).

En la actualidad, muchos aspectos de la teoría de álgebras de Leibniz permanecen sin ser estudiados y otros (álgebras de Leibniz simples y semisimples, radical de un álgebra de Leibniz, etc.) no han sido suficientemente considerados.

El primer problema que se plantea al estudiar cualquier estructura algebraica es el de su clasificación, salvo isomorfismos. Por ejemplo, el estudio de la clasificación de familias de álgebras no asociativas nilpotentes suele ser de una extraordinaria complejidad. Así, la clasificación de las álgebras de Lie (y por extensión, las de Leibniz) nilpotentes se antoja imposible.

El trabajo de Ancochea y Goze [2] tiene una enorme importancia en esta línea, pues introduce un nuevo invariante mucho más fino que el nilíndice, la sucesión característica, que ha permitido tratar de manera más sencilla el problema de la clasificación al descomponer las álgebras de Lie nilpotentes (y posteriormente las de Leibniz), en cada dimensión, en familias más sencillas.

En los últimos años se ha dedicado bastante esfuerzo a la clasificación de las álgebras de Leibniz, así autores como Albeverio, Ayupov, Casas, Gómez, Omirov, Rakhimov y otros han obtenido resultados relevantes en este campo (ver por ejemplo [3], [4], [12], [18], [20], [33], [36].

La gran dificultad de clasificar álgebras de Leibniz nilpotentes obliga a seleccionar subfamilias relevantes cuyo estudio pueda ser abordado, como son las p-filiformes y las graduadas naturalmente. La sucesión característica es ahora de gran ayuda. Sin más que generalizar la definición dada por Cabezas, Gómez y Jiménez-Merchán en [6], se definen las álgebras de Leibniz p-filiformes como aquellas que tienen sucesión característica $(n-p, 1, \ldots, 1)$, siendo n la dimensión del álgebra. Además, es interesante centrar nuestro estudio en las álgebras graduadas naturalmente pues su conocimiento nos aporta información relevante sobre su estructura (en cierta manera, cuando se clasifica un álgebra graduada naturalmente se conoce el esqueleto de todas las álgebras asociadas a la graduación natural considerada).

Loday estudió las álgebras de Leibniz en relación a las propiedades de homología cíclica y homología de Hochschild de álgebras de matrices. Así, son numerosos los artículos sobre álgebras de Leibniz que se dedican a estudiar problemas homológicos, como por ejemplo [16], [18], [20], [21], [29], [30] y [33]. Aparece aquí una familia de gran importancia, las álgebras de Leibniz de longitud máxima. La longitud de un álgebra $\mathcal{L}$ es el número máximo de subespacios de la graduación conexa más larga posible. Cuanto más próxima es la longitud a la dimensión de un álgebra, más fácil resulta el estudio de ciertas propiedades cohomológicas. Por esta razón, una interesante línea a seguir es el estudio de familias de álgebras cuya longitud sea máxima, es decir, igual a la dimensión del álgebra.

En relatividad general las variedades y las formas diferenciales son el lenguaje natural para expresar conceptos. En teoría cuántica de campos y en teoría de cuerdas, las formas diferenciables, la topología algebraica y diferencial en general, juegan muy diversos papeles esenciales de las mismas.

El concepto de cohomología expresado mediante formas diferenciables es un caso particular de la definición general de cohomología. En general una cohomología es el dual de una homología. La homología es una de las primeras técnicas que se introdujo para intentar clasificar espacios que fueran homeomorfos.

La clave de la homología y la cohomología desde el punto de vista matemático es que los grupos homológicos y cohomológicos son relativamente sencillos de calcular.

Los trabajos realizados hasta ahora sobre álgebras de longitud máxima, abarcan el estudio de las álgebras de Leibniz p-filiformes con $0 \leq p \leq 2$. Más concretamente, el caso de Lie filiforme se puede consultar en [25], mientras que el estudio de Lie 2-filiforme se da en [37]; la clasificación de las álgebras nulfiliformes de Leibniz no de Lie de longitud máxima aparece en [3] y por último, el estudio de las filiformes y 2-filiformes de Leibniz no de Lie está en [4]. En estos trabajos se obtuvieron las siguientes clasificaciones:

Gómez, Jiménez-Merchán y Reyes demostraron en [25] que existen 4 álgebras de

Lie filiformes de longitud máxima, L_n, R_n, k_n y W_n, no escindidas, si n es par y 5, L_n, R_n, K_n, W_n y Q_n si n es impar, siendo n la dimensión del álgebra,

Reyes mostró, en su tesis doctoral [37], que existen 5 álgebras de Lie 2-filiformes no escindidas de longitud máxima de dimensiones menores a 11 y 3 si la dimensión es mayor que 11, que denotó respectivamente por $\mathfrak{g}^2(5,1)$, $\mathfrak{g}^2(6,1)$, $\mathfrak{g}(7,1,7)$, $\mathfrak{g}(9,1,9)$, $\mathfrak{g}(11,1,11)$, $\mathfrak{g}^1(n,n-2)$, $\mathfrak{g}^2(n,1)$ y $\mathfrak{g}^3(n,1)$.

En cuanto a las álgebras de Leibniz no de Lie, Ayupov y Omirov probaron en [3] que existe un único álgebra nulfiliforme de longitud máxima.

Por último, Cabezas, Camacho y Rodríguez probaron que existe un único álgebra tanto en el caso filiforme como en el 2-filiforme (ver [4] para más detalles).

El objetivo principal de esta memoria es completar y generalizar los resultados mostrados en líneas anteriores, dando la clasificación de las álgebras de Leibniz n-dimensionales p-filiformes de longitud máxima, con n y p genéricos. Para poder abordar el caso más general, el de las álgebras p-filiformes, estudiamos en los capítulos 2 y 3 los casos casifiliformes y 3-filiformes respectivamente, cerrando así el estudio de longitud máxima de las álgebras de Leibniz p-filiformes, con $0 \leq p \leq 3$, y las casifiliformes completas. Se determina así un proceso algorítmico y las técnicas necesarias para abordar el caso más complejo.

El primer capítulo sólo pretende resaltar algunos conceptos y propiedades algebraicas bien conocidas, pero que son necesarios para el desarrollo de esta memoria, además de mostrar los resultados previos en los que se apoyarán los capítulos restantes.

La estructura de los siguientes tres capítulos es similar. Resulta clave para la clasificación de las álgebras de Leibniz consideradas en éstos partir del esqueleto de las mismas, es decir, de las álgebras graduadas naturalmente asociadas. Éstas dan una información relevante acerca de la estructura de las álgebras que las contienen, simplificando además el cálculo de las constantes de estructura. El siguiente paso común y fundamental para el desarrollo de la memoria, es la elección de una adecuada base homogénea y adaptada del álgebra.

En el segundo capítulo se cierra el estudio de las álgebras de Leibniz casifiliformes de longitud máxima. Nos centraremos en las álgebras nilpotentes de sucesión característica $(n-2,2)$, pues las 2-filiformes ya han sido clasificadas en [4] y [37]. En este capítulo se han obtenido 4 familias de álgebras: $N^{1,\alpha}$, $M^{1,\gamma}$, $M^{2,\lambda}$ y $M^{3,\alpha}$.

En el capítulo siguiente se estudian las álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima, obteniendo dos álgebras N y M y una familia de álgebras $M^{1,\alpha}$.

En el capítulo 4 se aborda el estudio de longitud máxima de las álgebras p-filiformes, siendo $p \geq 4$ y genérico. Nos restringimos al estudio de las álgebras obtenidas al extender las álgebras de Lie n-dimensionales p-filiformes graduadas naturalmente, obteniendo que no existe ningún álgebra en este caso.

En el último capítulo se estudian propiedades geométricas de las álgebras encontradas en los capítulos anteriores. Para ello es fundamental determinar las correspondientes álgebras de derivaciones, $Der(\mathcal{L})$, para, a partir de ellas, describir el primer espacio de cohomología $H^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$ de cada álgebra. La determinación del álgebra $Der(\mathcal{L})$ es, en general, muy laboriosa pero en nuestro caso se simplifica hasta hacerse abordable, por admitir las álgebras aquí consideradas una graduación conexa con el mayor número de subespacios ($= dim(\mathcal{L})$). En esta línea hay trabajos realizados, como [5], [15], [16] y [33].

Parece además razonable ayudarnos de técnicas computacionales a lo largo del estudio, como se hace, por ejemplo, en [12], [17] y [26]. Diseñamos dos algoritmos implementados en el software *Mathematica*, el primero determinará si dos álgebras son isomorfas o no y el segundo, calculará una base y la dimensión del espacio de derivaciones de un álgebra de longitud máxima. Estos algoritmos se aplicarán a las álgebras objeto de nuestro estudio en dimensiones *pequeñas*, ayudándonos a conjeturar resultados. A continuación demostramos dichos resultados por inducción sobre la dimensión del álgebra.

PRELIMINARES 1

En este capítulo se dan algunas definiciones y conceptos, necesarios para la realización del trabajo de investigación que se presenta.

1.1. NOTACIONES Y TERMINOLOGÍA

Se denomina álgebra a la estructura resultante de definir en un espacio vectorial V una ley de composición interna (producto) distributiva respecto de la operación suma en V. A este producto se le denomina ley algebraica o ley del álgebra, es decir, a la forma bilineal $\mu : V \times V \longrightarrow V$ cuya bilinealidad (distributividad) garantiza la compatibilidad de la ley μ con la estructura de espacio vectorial V. Por abuso de lenguaje, se notará mediante el par (V, μ) a un álgebra (donde V es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbf{K}$). En un sentido más estricto, un álgebra es una $5-$upla $(V, +, \cdot\mathbf{K}, \mathbf{K}, \mu)$ donde:

a) $\mathbf{K}$ es un cuerpo,

b) $(V, +, \cdot\mathbf{K}, \mathbf{K})$ es un $\mathbf{K}$-espacio vectorial, y

c) μ es una ley algebraica.

Un álgebra de Lie $\mathcal{L}$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ es un $\mathbf{K}-$espacio vectorial $\mathcal{L}$ dotado de una aplicación bilineal $\mu : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$, llamada producto o ley del álgebra, que cumple las propiedades:

$$\mu(x, x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{L},$$

y la identidad de Jacobi que se expresa como:

$$\mu(x, \mu(y, z)) + \mu(y, \mu(z, x)) + \mu(z, \mu(x, y)) = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L}.$$

Según sea la ley μ asociativa o no las álgebras se denominan asociativas o no asociativas. Esas son las dos grandes familias de álgebras conocidas hoy día, pero incluyen las no asociativas a otras subfamilias que suelen venir determinadas, con frecuencia, por necesidades físicas y que se suelen designar con nombres propios (álgebras de Jordan, de Leibniz y tantos otros casos, el más importante de los cuales sea, quizás, el de las álgebras de Lie).

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ es un $\mathbf{K}-$espacio vectorial $\mathcal{L}$ en el que se ha definido una multiplicación, es decir, una aplicación bilineal $\mu : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$, verificando que

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z) - \mu(\mu(x, z), y) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{L} \qquad \text{(identidad de Leibniz)}$$

Habitualmente se notará $\mu(X, Y)$ por $[X, Y]$ y se le designará el *producto corchete* de x e y. Por $\mathcal{L}$ se denota indistintamente el álgebra o el espacio vectorial subyacente. La *dimensión del álgebra* $\mathcal{L}$, $dim(\mathcal{L})$, es la dimensión del espacio vectorial subyacente. En este trabajo se van a considerar álgebras de Leibniz sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita.

Es fácil probar que toda álgebra de Lie es un álgebra de Leibniz. Las álgebras de Leibniz generalizan a las de Lie en el sentido de que pierden su “conmutatividad”(en sentido estricto, su anticonmutatividad).

Si $\mathcal{L}$ es un $\mathbf{K}$-álgebra de Leibniz de dimensión n y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base del espacio vectorial subyacente, todo par de vectores u y v se pueden expresar como

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \quad u_i \in \mathbf{K}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i, \quad v_i \in \mathbf{K}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

de donde se tiene que

$$[u, v] = [\sum_{i=1}^{n} u_i e_i, \sum_{i=1}^{n} v_i e_i] = \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j [e_i, e_j],$$

con lo que, para conocer el producto de dos elementos cualesquiera del álgebra, basta con conocer los productos de una base cualquiera. Así, la ley del álgebra está definida si se conocen los productos de los elementos de la base.

Como $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que $[e_i, e_j] \in \mathcal{L}$, han de existir n^3 constantes $C_{i,j}^k$, $1 \leq i, j \leq k \leq n$, llamadas *constantes de estructura del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ asociadas a la base* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ considerada y definidas por

$$\alpha(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k e_k.$$

Dichas constantes han de verificar, por la identidad de Leibniz, que

$$\sum_{s=1}^{n} C_{i,l}^s C_{j,k}^l = \sum_{s=1}^{n} (C_{i,j}^l C_{l,k}^s - C_{i,k}^l C_{l,j}^s) \quad 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{1.1}$$

Esto es, a un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ y una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se asocian n^3 constantes con las restricciones (1.1), las constantes de estructura. Recíprocamente, un álgebra de Leibniz está perfectamente determinada por sus constantes de estructura (fijada la base).

Es decir, si se denota mediante $\mathcal{L}_e^n$ al conjunto de todas las álgebras de Leibniz complejas (respectivamente sobre $\mathbf{K}$) de dimensión n, se tiene que $\mathcal{L}_e^n$ posee estructura de variedad algebraica sumergida en $\mathbb{C}^{n^3}$ (respectivamente en $\mathbf{K}^{\mathbf{n^3}}$).

Como las constantes de estructura dependen de la base elegida, parece natural fijar una base en la que la expresión de la ley sea "lo más cómoda posible" en el sentido de que se maximice el número de constantes nulas y, en caso de igualdad, se maximice el número de constantes que valen 1. Esto tiene especial interés cuando se abordan problemas de clasificación de familias de álgebras de Leibniz y se detallarán con detenimiento en la sección 1.4.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz. *Una subálgebra de Leibniz* de $\mathcal{L}$ es todo subespacio vectorial $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ que sea álgebra de Leibniz para la restricción a $\mathcal{L}'$ de la ley algebraica de $\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz y sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{J}$ subconjuntos de $\mathcal{L}$ no necesariamente subálgebras. Al menor espacio vectorial que incluya todos los elementos de la forma $[u, v]$, $u \in \mathcal{H}$, $v \in \mathcal{J}$, se le denomina *conmutador* de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{J}$ y se denota $[\mathcal{H}, \mathcal{J}]$.

Como la identidad de Leibniz es hereditaria, la definición de subálgebra es equivalente a decir que una subálgebra de Leibniz del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es todo subespacio vectorial $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ que sea estable para la ley algebraica, esto es,

$\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ subálgebra del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ si

a) $\mathcal{L}'$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}$

b) $[\mathcal{L}', \mathcal{L}'] \subset \mathcal{L}'$

Se llama *ideal (o ideal bilátero)* de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ a cualquier subálgebra $\mathcal{J}$ de $\mathcal{L}$ normal o distinguida, esto es, tal que

$$[x, y], [y, x] \in \mathcal{J} \quad \forall x \in \mathcal{J}, \forall y \in \mathcal{L}$$

Si sólo se verifica que $[y, x] \in \mathcal{J} \quad \forall x \in \mathcal{J}, \forall y \in \mathcal{L}$ se dice que $\mathcal{J}$ es un *ideal a la derecha* de $\mathcal{L}$.

Si sólo se verifica que $[x, y] \in \mathcal{J} \quad \forall x \in \mathcal{J}, \forall y \in \mathcal{L}$ se dice que $\mathcal{J}$ es un *ideal a la izquierda* de $\mathcal{L}$.

Toda álgebra de Leibniz posee dos ideales triviales (denominados ideales impropios): $\{0\}$ y $\mathcal{L}$.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz se definen

- el subconjunto $\mathcal{I}$ como $\mathcal{I} =< [x, x] : x \in \mathcal{L} >$.
- *la subálgebra derivada* de $\mathcal{L}$ como $[\mathcal{L}, \mathcal{L}]$.
- *el anulador o centro* de $\mathcal{L}$ como $Cent(\mathcal{L}) = \{z \in \mathcal{L} : [x, z] = [z, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}\}$.
- *el anulador a derecha* de $\mathcal{L}$, que se designa por $R(\mathcal{L})$ como

$$R(\mathcal{L}) = \{z \in \mathcal{L} : [x, z] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}\}.$$

- *el anulador a izquierda* de $\mathcal{L}$, que se designa por $L(\mathcal{L})$ como

$$L(\mathcal{L}) = \{z \in \mathcal{L} : [z, x] = 0, \quad \forall x \in \mathcal{L}\}.$$

Se verifica que $\mathcal{I}$ es un ideal abeliano de $\mathcal{L}$, mientras que la derivada, el anulador y el anulador a derecha son ideales de $\mathcal{L}$. El anulador a izquierda, $L(\mathcal{L})$, no es ideal de $\mathcal{L}$, aunque si es ideal a izquierda.

Se llama *morfismo (u homomorfismo)* entre las álgebras de Leibniz $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ a cualquier aplicación que sea mórfica para las tres leyes que definen la estructura de álgebras de Leibniz. Entre estas aplicaciones cabe destacar las derivaciones.

Una derivación d de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es una aplicación lineal, $d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, del espacio vectorial subyacente que verifica la regla de Leibniz para el producto

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)] \quad \forall x, y \in \mathcal{L}.$$

Se denotará $\mathcal{D}er(\mathcal{L})$ al conjunto de todas las derivaciones del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$.

Definiendo $[d, d'] = d'd - dd'$ resulta que $(\mathcal{D}er(\mathcal{L}), +, \cdot\mathbf{K}, [,]))$ tiene estructura de álgebra de Lie ($[d, d] = dd - dd = 0,\ \forall d \in \mathcal{D}er(\mathcal{L})$).

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz y $x \in \mathcal{L}$, se llama *operador multiplicación a derecha* (respectivamente a izquierda*) de* x y se denota por R_x (respectivamente L_x) a la aplicación $R_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (respectivamente $L_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$) tal que

$$R_x(y) = [y, x]$$

$$(\text{respectivamente} L_x(y) = [x, y])$$

Se verifica que R_x es una derivación pero L_x no lo es en general. Además,

$$\begin{array}{rccl} R: & \mathcal{L} & \to & \mathcal{D}er\mathcal{L} \\ & x & \to & R(x) = R_x \end{array}$$

es un homomorfismo entre álgebras de Leibniz.

Estas derivaciones (R_x) son llamadas derivaciones interiores. Además, el conjunto de las derivaciones interiores a derecha del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es un ideal bilátero del álgebra de Lie $\mathcal{D}er\mathcal{L}$.

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ se dice $\mathbb{Z}$-*graduada* si puede ser descompuesta vectorialmente como $\mathcal{L} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_i$, donde los $\mathcal{L}_i$ son los subespacios graduantes que verifican $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subseteq \mathcal{L}_{i+j}$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Se dirá entonces que $\mathcal{L} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_i$ ó $\oplus\mathcal{L}_i$ es una $\mathbb{Z}$-graduación o, por abuso del lenguaje, una graduación. La graduación se dice finita si el conjunto de los índices i para los que $\mathcal{L}_i \neq 0$ es finito, y conexa si existen $n_i, n_j \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathcal{L}_i \neq 0$ si $n \leq i \leq n_2$ y $\mathcal{L}_i = 0$ en otro caso.

Un álgebra de Leibniz se dice $\mathbb{Z}$-filtrada (o filtrada) si existen subespacios S_i, con $i \in \mathbb{Z}$ tales que:

- $\mathcal{L} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} S_i$,
- $[S_i, S_j] \subset S_{i+j} \forall i, j \in \mathbb{Z}$,
- $S_i \subset S_j$ si $i > j$ (filtración descendente).

Una filtración descendente $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es finita si existen $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, tales que:

- $S_i = \mathcal{L}\ si\ i \leq n_1$ y
- $S_i = \{0\}\ si\ i \geq n_2$.

Si un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es graduada con $\mathcal{L} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_i$, puede definirse una filtración asociada a dicha graduación tomando $S_k = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_i$.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz filtrada, con $\mathcal{L} = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} S_i$, se puede construir, a partir de ella, un álgebra de Leibniz graduada, poniendo

$$gr\mathcal{L} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_i \; con \; \mathcal{L}_i = S_i/S_{i+1}$$

y definiendo en $gr\mathcal{L}$ el producto $[\overline{X}, \overline{Y}] = \overline{[X, Y]}$ donde $\overline{[X, Y]}$ es la clase del elemento $[X, Y] \in S_{i+j}$, cuando X e Y son representantes de las clases $\overline{X}, \overline{Y}$ en S_i y S_j respectivamente.

Se define la $\mathbb{Z}$-longitud, $l(\mathcal{L})$, de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ como

$$l(\mathcal{L}) = max\{n_j - n_1 + 1 : \mathcal{L} = \mathcal{L}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n_j} \text{es una graduación conexa}\}.$$

Por abuso del lenguaje se hablará de longitud en lugar de $\mathbb{Z}$-longitud.

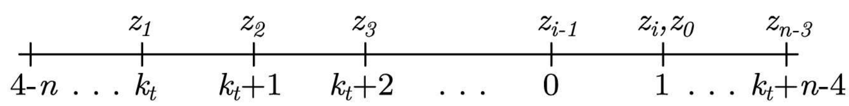
En otras palabras, la longitud $l(\mathcal{L})$ es el número de subespacios de la graduación conexa "más larga"que puede conseguirse en $\mathcal{L}$. Toda álgebra de Leibniz tiene al menos longitud uno, ya que se puede considerar la graduación conexa trivial $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Por otra parte, como la longitud de un álgebra no puede ser mayor que su dimensión, se tiene para toda álgebra $\mathcal{L}$ que:

$$1 \leq l(\mathcal{L}) \leq dim\mathcal{L}.$$

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ es de longitud máxima si $l(\mathcal{L}) = dim(\mathcal{L})$.

Se define la distancia entre dos subespacios de la graduación $\mathcal{L}_{n_i}$ y $\mathcal{L}_{n_j}$, y de denota por $dist(n_i, n_j)$, como el número de subespacios que hay del primer al segundo subespacio, es decir, $dist(n_i, n_j) := |n_j - n_i|$. También se usará la notación $dist(x_i, x_j)$, siendo $\mathcal{L}_{n_i} = \langle x_i \rangle$ y $\mathcal{L}_{n_j} = \langle x_j \rangle$.

En los capítulos dos y tres se adjuntará, al estudio de longitud máxima, una gráfica para aclarar dicho estudio. A continuación se pone una de esas gráficas, explicando brevemente lo que representa.



En esta gráfica estamos representando la siguiente graduación:

$$V_{k_t} \oplus V_{k_t+1} \oplus V_{k_t+2} \oplus \cdots \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_{k_t+n-4},$$

donde $k_t > 4 - n$ y

$$\begin{aligned} V_{k_t} &= \langle z_1 \rangle, \\ V_{k_t+1} &= \langle z_2 \rangle, \\ V_{k_t+2} &= \langle z_3 \rangle, \\ &\vdots \\ V_0 &= \langle z_{i-1} \rangle, \\ V_1 &= \langle z_0, z_i \rangle, \\ V_2 &= \langle z_{i+1} \rangle, \\ &\vdots \\ V_{k_t+n-4} &= \langle z_{n-3} \rangle. \end{aligned}$$

1.2. Álgebras de Leibniz Resolubles

Dada un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, se define *la sucesión derivada* de $\mathcal{L}$, $\{\mathcal{L}^{[n]} : n \in \mathbb{N}\}$, mediante

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L} \\ &\mathcal{L}^{[i+1]} = [\mathcal{L}^{[i]}, \mathcal{L}^{[i]}], \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Toda subálgebra de Leibniz que contenga a la derivada ($\mathcal{L}^{[2]}$)es ideal del álgebra.

Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz, cada elemento de la sucesión derivada de $\mathcal{L}$ es ideal del elemento anterior ($\mathcal{L}^{[i+1]} \lhd \mathcal{L}^{[i]}$).

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$ se llama *resoluble* si la sucesión de ideales $\{\mathcal{L}^{[n]} : n \in \mathbb{N}\}$ se estabiliza en cero. Al menor $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}^{[k]} \neq 0$ y $\mathcal{L}^{[k+1]} = 0$ se le llamará *índice de resolubilidad* de $\mathcal{L}$.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz. Se tiene que

$\mathcal{L}$ es resoluble $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}$ admite una sucesión decreciente de ideales

$\mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{J}_1 \lhd \mathcal{J}_2 \lhd \ldots \lhd \mathcal{J}_m = \{0\}$ tal que $[\mathcal{J}_k, \mathcal{J}_k] \subset \mathcal{J}_{k+1}$ para $1 \leq k \leq m-1$.

1.3. Álgebras de Leibniz Nilpotentes

Dada un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, se definen las siguientes sucesiones asociadas a $\mathcal{L}$

a) *sucesión central descendente a derecha* de $\mathcal{L}$, $\{L^{<n>} : n \in \mathbb{N}\}$, mediante

$$L^{<1>} = \mathcal{L},$$
$$L^{<n+1>} = [L^{<n>}, \mathcal{L}] \quad i \in \mathbb{N},$$

b) *sucesión central descendente* de $\mathcal{L}$, $\{L^n : n \in \mathbb{N}\}$, mediante

$$L^1 = \mathcal{L},$$
$$L^{n+1} = [\mathcal{L}, L^n] + [L^2, L^{n-1}] + \ldots + [L^{n-1}, L^2] + [L^n, \mathcal{L}] = \sum_{i=1}^{n} [L^i, L^{n+1-i}], \; i \in \mathbb{N}.$$

Se verifica que, para toda álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$, es

$$[L^{<i>}, L^{<j>}] \subseteq L^{<i+j>},$$

y como consecuencia se tiene que

$$L^{<n>} = L^n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión central descendente a derecha y la sucesión central descendente de cualquier álgebra de Leibniz coinciden. Además, cada elemento de la sucesión central descendente es ideal del anterior ($L^{n+1} \lhd L^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$ se llama *nilpotente a derecha* si la sucesión de ideales $\{L^{<n>} : n \in \mathbb{N}\}$ se estabiliza en cero.

Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$ se llama *nilpotente* si la sucesión de ideales $\{L^n : n \in \mathbb{N}\}$ se estabiliza en cero. Al menor entero m tal que $L^m \neq 0$ y $L^{m+1} = 0$ se dirá que es el *índice de nilpotencia o nilíndice* de $\mathcal{L}$, $nil(\mathcal{L})$.

Si $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente. Son equivalentes

$$\mathcal{L} \text{ es nilpotente a derecha} \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ es nilpotente.}$$

Toda álgebra de Lie nilpotente es un álgebra de Leibniz nilpotente. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie nilpotente sus nilíndices como álgebra de Lie y como álgebra de Leibniz coinciden.

En las álgebras de Lie el nilíndice máximo es $n-1$ si $dim(\mathcal{L}) = n$. En el caso de las álgebras de Leibniz es posible obtener el nilíndice n.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz. Las condiciones siguientes son equivalentes:

$$\mathcal{L} \text{ es nilpotente} \Leftrightarrow \mathcal{L} \text{ admite una sucesión decreciente de ideales}$$

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{J}_1 \lhd \mathcal{J}_2 \lhd \ldots \lhd \mathcal{J}_n = \{0\} \text{ tal que } [\mathcal{J}_k, \mathcal{L}] \subset \mathcal{J}_{k+1} \text{ para } 2 \leq k \leq n-1$$

Si $\mathcal{L}$ es nilpotente se verifican las siguientes propiedades:

1. Toda álgebra de Leibniz nilpotente es resoluble.

2. Toda subálgebra (y, por tanto, todo ideal) de un álgebra de Leibniz nilpotente es nilpotente.

3. La imagen homomórfica de un álgebra de Leibniz nilpotente es también un álgebra de Leibniz nilpotente.

4. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz nilpotente y $\mathcal{J}$ un ideal de $\mathcal{L}$ $\quad (\mathcal{J} \lhd \mathcal{L}) \Rightarrow$ el álgebra cociente $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ es nilpotente.

5. Si $\mathcal{L}$ es un álgebra de Leibniz tal que existe un ideal suyo $\mathcal{J} \lhd \mathcal{L}$ resoluble y tal que $\mathcal{L}/\mathcal{J}$ es nilpotente $\Rightarrow \mathcal{L}$ es nilpotente.

6. La intersección, suma y producto de ideales nilpotentes de un álgebra de Leibniz son también ideales nilpotentes del álgebra.

7. Toda álgebra de Leibniz nilpotente no nula posee centro no nulo.

   Se dice que un álgebra de Leibniz nilpotente $\mathcal{L}$ está *graduada naturalmente* si es isomorfa al álgebra graduada $gr\mathcal{L}$, obtenida de la filtración natural del álgebra. Es decir, $\mathcal{L}$ es un álgebra graduada naturalmente si, siendo

$$gr\mathcal{L} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_i \text{ } con \text{ } \mathcal{L}_i = L^i/L^{i+1}$$

   se tiene que $\mathcal{L} \simeq gr\mathcal{L}$.

   En todo el trabajo se van a considerar siempre $\mathbb{Z}$-graduaciones conexas finitas, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{k_1+t}$.

1.4. BASES ADAPTADAS. SUCESIÓN CARACTERÍSTICA.

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz con $dim(\mathcal{L}) < +\infty$. Se verifica entonces, que

$$\mathcal{L} \text{ es nilpotente} \Leftrightarrow R_x \text{ es nilpotente } \forall x \in \mathcal{L}$$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente. De entre los generadores del álgebra ($\equiv$ los elementos de $\mathcal{L} \setminus L^2$) se seleccionan aquellos cuyas matrices del operador multiplicación a derecha R_x tengan un bloque de Jordan lo mayor posible. De entre todos ellos, se eligen los que tengan también el segundo bloque de Jordan de mayor tamaño posible y así sucesivamente. Se asocia así a cada generador de $\mathcal{L}$ (a cada elemento $x \in \mathcal{L} \setminus L^2$) una sucesión finita decreciente

$$c(x) = (n_1(x), n_2(x), \cdots, n_k(x)), \quad x \in \mathcal{L} \setminus L^2$$

que corresponde a las dimensiones de los bloques de Jordan del operador R_x con $x \in \mathcal{L} \setminus L^2$, ordenados decrecientemente. En el conjunto de estas sucesiones finitas es posible definir el orden léxico-gráfico como habitualmente, es decir

$$c(x) = (n_1, n_2, \cdots, n_k) \leq c(y) = (m_1, m_2, \cdots, m_k) \quad x, y \in \mathcal{L} \setminus L^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } n_j = m_j \quad \forall j < i \ \wedge \ n_i < m_i.$$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz nilpotente. Para cada $x \in \mathcal{L} \setminus L^2$ se construye la sucesión finita

$$c_1(\mathcal{L}) = max\{n_1(x) : \forall x \in \mathcal{L} \setminus L^2\}$$

$$c_2(\mathcal{L}) = max\{n_2(x) : n_1(x) = c_1(\mathcal{L})\}$$

$$\vdots$$

$$c_i(\mathcal{L}) = max\{n_i(x) : n_j(x) = c_j(\mathcal{L}), 1 \leq j \leq i-1\}$$

Se llama *vector característico* de $\mathcal{L}$ a todo generador $x \in \mathcal{L} \setminus L^2$ tal que

$$c(x) = c(\mathcal{L}) = (c_1(\mathcal{L}), c_2(\mathcal{L}), \cdots)$$

y se llama *sucesión característica (o invariante de Goze)* de $\mathcal{L}$ a

$$c(\mathcal{L}) = (c_1(\mathcal{L}), c_2(\mathcal{L}), \cdots).$$

Se llama *base adaptada* de $\mathcal{L}$ a toda base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ de $\mathcal{L}$ tal que e_1 sea vector característico y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ una base de Jordan suya, es decir, tal que R_{e_1} venga expresado en la forma canónica de Jordan para esa base.

Se podría definir la sucesión característica de $\mathcal{L}$ como la mayor de las sucesiones decrecientes de dimensiones de los bloques de Jordan de los operadores multiplicadores a derecha R_x, para cada generador x de $\mathcal{L}$, con $x \in \mathcal{L} \setminus L^2$, ordenados en el orden lexicográfico. Es decir,

$$c(\mathcal{L}) = max\{c(x) : x \in \mathcal{L} \setminus L^2\}$$

Lógicamente, si $dim(\mathcal{L}) = n$ y el nilíndice de $\mathcal{L}$ es m, la dimensión del bloque mayor no puede superar al nilíndice, esto es,

$$c_1(x) \leq nil(\mathcal{L}) = m, \quad \forall x \in \mathcal{L} \setminus L^2,$$
$$c_1(\mathcal{L}) = nil(\mathcal{L}) = m.$$

Cuando $\mathcal{L}$ es de Lie, la sucesión característica termina en 1, pues se tiene que en estas álgebras es $[x,x]=0$ para todo $x\in\mathcal{L}$, lo que implica la existencia de, al menos, un bloque de Jordan de dimensión 1. Ahora, en las álgebras de Leibniz, no es obligatoria la existencia de bloques de Jordan de dimensión 1.

Así, son posibles sucesiones características como $(n-2,2)$, ó $(7,5,5,3,3,3)$ para las álgebras de Leibniz.

La máxima sucesión característica posible en álgebras de Leibniz n-dimensionales es, precisamente, n. Es ésta la única posibilidad cuando el nilíndice es máximo, es decir, n. Recuérdese que para las álgebras de Lie el máximo nilíndice posible era $n-1$ y la máxima sucesión característica $(n-1,1)$.

Así, para álgebras de nilíndice $n-1$ la única sucesión característica posible es $(n-1,1)$, mientras que a medida que disminuye el nilíndice ($\equiv$ disminuye la dimensión del mayor bloque de Jordan de los operadores $R_x, x\in\mathcal{L}\setminus L^2$) aumentan las posibles sucesiones características. Así se tiene que

Nilíndice	Sucesión Característica
n	n
$n-1$	$(n-1,1)$
$n-2$	$(n-2,1,1),(n-2,2)$
$n-3$	$(n-3,1,1,1),(n-3,2,1),(n-3,3)$
$n-4$	$(n-4,1,1,1,1),(n-4,2,1,1),(n-4,3,1),(n-4,4)$
$\vdots$	$\vdots$
2	$(2,1,\cdots,1),(2,2,1,\cdots,1),(2,2,2,1,\cdots,1),\cdots$
1	$(1,1,1,\cdots,1)$

Definición 1.1. *Un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ se denomina p-filiforme si su sucesión característica es $(n-p,\underbrace{1,\ldots,1}_{p-veces})$, con $p\geq 0$ y n la dimensión de $\mathcal{L}$. Si $p=0$ el álgebra se dice nulfiliforme y si $p=1$ se denomina filiforme.*

El caso $c(\mathcal{L})=(1,1,\cdots,1)$ (es decir, la menor sucesión característica para las álgebras de Leibniz n-dimensionales) corresponde a álgebras abelianas. Obviamente, las álgebras de Leibniz p-filiformes incluyen a las álgebras de Lie p-filiformes. Sólo hay álgebras de Lie p-filiformes de dimensión n para $1 \leq p \leq n-1$. Sin embargo, existen álgebras de Leibniz p-filiformes de dimensión n para $0 \leq p \leq n-1$.

Definición 1.2. *Un álgebra de Leibniz nilpotente $\mathcal{L}$ se dice casifiliforme si su nilíndice es $n-2$, siendo n la dimensión de $\mathcal{L}$.*

Nótese que en el caso de las álgebras de Lie la familia de las casifiliformes coincide con las 2-filiformes, mientras que en el caso de las álgebras de Leibniz, dentro de la familia de las casifiliformes encontramos las 2-filiformes y las que tienen sucesión característica $(n-2, 2)$.

Dada un álgebra de Leibniz p-filiforme de dimensión n, existe una base $\{e_1, \ldots, e_{n-p}, f_1, \ldots, f_p\}$ tal que $e_1 \in \mathcal{L}^2$ y $c(e_1) = (n-p, \underbrace{1, \ldots, 1}_{p-veces})$. Por la definición de sucesión característica, el operador R_{e_1} en la forma de Jordan tiene un bloque J_{n-p} de dimensión $n-p$ y p bloques J_1 de dimensión 1.

Las posibles formas de dicho operador son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} J_{n-p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n-p} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_1 \end{pmatrix}; \ldots \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_{n-p} \end{pmatrix}$$

Es fácil probar que estos casos se reducen a sólo dos no isomorfos entre sí:

$$\begin{pmatrix} J_{n-p} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n-p} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_1 \end{pmatrix}$$

Así, un álgebra p-filiforme se dice de tipo I (ó de primer tipo) si el operador R_{e_1} es de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{n-p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_1 \end{pmatrix}$$

y de tipo II (ó de segundo tipo) en otro caso.

Particularicemos esta última definición para las álgebras de Leibniz casifiliformes, con sucesión característica $(n-2,2)$. En este caso se tiene la existencia de un elemento $e_1 \in \mathcal{L} \setminus L^2$ y una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que el operador multiplicación a derecha R_{e_1} tiene una de las formas siguientes:

$$\left(\begin{array}{c|c} J_2 & 0 \\ \hline 0 & J_{n-2} \end{array}\right) \text{ ó } \left(\begin{array}{c|c} J_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right).$$

Definición 1.3. *Un álgebra de Leibniz no de Lie casifiliforme $\mathcal{L}$ se dice de primer tipo (o de tipo I) si existe un elemento de la base $e_1 \in \mathcal{L} \setminus L^2$ tal que el operador R_{e_1} es de la forma:* $\left(\begin{array}{c|c} J_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array}\right)$*; si el operador R_{e_1} presenta la otra forma, el álgebra se dirá de segundo tipo (o de tipo II).*

1.5. COHOMOLOGÍA

Todas las notaciones y propiedades mostradas a continuación están detalladas en [33].

Como se definió en líneas anteriores, una aplicación lineal d de un álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ se denomina una derivación de $\mathcal{L}$ si

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)] \text{ para cualquier } x,y \in \mathcal{L}.$$

Denotaremos por $Der(\mathcal{L})$ el espacio de todas las derivaciones.

Es claro que el operador multiplicación a derecha R_x es una derivación para todo $x \in \mathcal{L}$. Las derivaciones de este tipo se llaman derivaciones interiores. Al igual que en el caso de las álgebras de Lie , el conjunto de las derivaciones interiores forman un ideal del álgebra $Der(\mathcal{L})$.

Al ser nuestro álgebra de Leibniz $\mathbb{Z}-$graduada, es decir, $\mathcal{L} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} V_i$, esta graduación induce la correspondiente graduación del álgebra $Der(\mathcal{L}) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} W_i$ en el siguiente sentido:

$$W_i = \{d_i \in Der(\mathcal{L}) : d_i(x) \in V_{i+j} \text{ para cualquier } x \in V_j\}.$$

Para cualquier álgebra n-dimensional de longitud máxima es fácil ver que

$$Der(\mathcal{L}) = W_{-n} \oplus \cdots \oplus W_n.$$

Nótese que en los cálculos de las derivaciones se tendrá en cuenta que los ideales de la sucesión central descendente son característicos, es decir, estables para cualquier derivación.

Nota 1.1. *Recuérdese que si **K** es un cuerpo, entonces los conceptos de **K**-espacio vectorial y **K**-módulo son idénticos.*

Definición 1.4. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y sea M un $\mathbf{K}$-módulo. El módulo M se dice una representación de $\mathcal{L}$ si dos acciones del álgebra $\mathcal{L}$ sobre M están definidas, $[.,.] : \mathcal{L} * M \longrightarrow M$ y $[.,.] : M * \mathcal{L} \longrightarrow M$, verificando los siguientes tres axiomas:*

$$1)[m,[x,y]] = [[m,x],y] - [[m,y],x],$$
$$2)[x,[m,y]] = [[x,m],y] - [[x,y],m],$$
$$3)[x,[y,m]] = [[x,y],m] - [[x,m],y],$$

para cualquier $m \in M$ y $x, y \in \mathcal{L}$.

Sean $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz y M una representación de $\mathcal{L}$. Entonces denotamos

$$C^n(\mathcal{L}, M) := Hom(\mathcal{L}^{\otimes n}, M) \text{ con } n \geq 0 \text{ y}$$
$$C^*(\mathcal{L}, M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} Hom(\mathcal{L}^{\otimes n}, M).$$

Los elementos del conjunto $C^*(\mathcal{L}, M)$ son conocidos como cocadenas de $\mathcal{L}$ con valores en M y los elementos de $C^n(\mathcal{L}, M)$ como cocadenas de grado n o n-cocadenas.

Sea $d^n : C^n(\mathcal{L}, M) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{L}, M)$ un homomorfismo definido como sigue:

$$(d^n f)(x_1, \ldots, x_{n+1}) := [x_1, f(x_2, \ldots, x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[f(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{n+1}), x_i]$$

$$+ \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (-1)^{j+1} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{n+1}),$$

con $f \in C^n(\mathcal{L}, M)$ y $x_i \in \mathcal{L}$.

El operador $d : C^*(\mathcal{L}, M) \longrightarrow C^*(\mathcal{L}, M)$, donde d^n representa la restricción de d al espacio $C^n(\mathcal{L}, M)$, se llama el diferencial. Los elementos del centro de d^n ($Cent\ d^n := Z^n(\mathcal{L}, M)$) se llaman n-cociclos y los elementos de la imagen de d^{n-1} ($Im\ d^{n-1} := B^n(\mathcal{L}, M)$) son n-cobordes. Como $d^n d^{n-1} = 0$, se tiene $B^n(\mathcal{L}, M) \subseteq Z^n(\mathcal{L}, M)$.

El espacio cociente $H^n(\mathcal{L}, M) := Z^n(\mathcal{L}, M)/B^n(\mathcal{L}, M)$ se denomina el grupo de cohomología del álgebra $\mathcal{L}$ de grado n con valores en M.

Destacar que, como se muestra en [27, 30], el espacio 1-cociclo $Z^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ del álgebra $\mathcal{L}$ con valores en $\mathcal{L}$ es el espacio de derivaciones $Der(\mathcal{L})$, mientras que el espacio 1-coborde $B^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ es el espacio formado por las derivaciones interiores. Así, el primer grupo de cohomología $H^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ es el espacio cociente $Z^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})/B^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})$.

Consideremos la filtración descendente $\{S_k\}$, la cual induce la correspondiente filtración de los espacios de cociclos del espacio de cohomología $F_r(Z^1(\mathcal{L}, \mathcal{L}))$, donde $F_r(Z^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})) = \{g : g(S_i) \subseteq S_{i+r}\}$ y g se denomina 1-cociclo.

1.6. RESULTADOS PREVIOS

Cuando se considera la filtración natural que produce la sucesión central descendente de un álgebra de Leibniz nilpotente $\mathcal{L}$, se obtiene un álgebra graduada finita que, en cierto modo, constituye la estructura básica del álgebra que se considera y que, cuando es isomorfa a $\mathcal{L}$ se dice graduada naturalmente. Esta familia, la de las álgebras graduadas naturalmente, será el punto de partida de nuestro estudio. Es decir, para estudiar la longitud máxima de las álgebras de Leibniz casifiliformes, en el capítulo dos, y las 3-filiformes, en el capítulo tres, nos apoyaremos en las álgebras graduadas naturalmente correspondientes, cuyas clasificaciones se muestran a continuación.

Obsérvese que se ha mantenido la notación original de las leyes de las familias de los trabajos referenciados para mayor claridad en el estudio.

Los dos primeros teoremas muestran la clasificación de las álgebras filiformes, tanto las de Lie como las de Leibniz. El caso de Lie fue estudiado por Vergne en [39], que obtuvo que para $n \geq 4$ sólo existía un álgebra de Lie filiforme graduada naturalmente si la dimensión n es impar y dos si la dimensión n es par, denotadas por L_n y Q_n. La expresión de las leyes de estas álgebras en una base adaptada $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *[39] Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie n-dimensional filiforme graduada naturalmente, con $n \geq 3$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras:*

- *si n es par*

$$L_n\ (n \geq 4)\ : \quad \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

$$Q_n\ (n \geq 6)\ : \quad \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [x_i, x_{n-1-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1. \end{cases}$$

- *si n es impar*

$$L_n\ (n \geq 3)\ : \quad \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

El siguiente resultado puede encontrarse en [3].

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie n-dimensional filiforme graduada naturalmente. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras:*

$$NGF1 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1. \end{cases} \qquad NGF2 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$NGF3 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, e_{n+1-i}] = \alpha(-1)^{i+1} e_n, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_{n+1-i}, e_i] = \alpha(-1)^{i} e_n, & 2 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

siendo $\alpha \in \{0, 1\}$ si n es par y $\alpha = 0$ si n es impar.

A continuación se exponen las álgebras de Lie 2-filiformes graduadas naturalmente, estudiadas por Gómez y Jiménez-Merchán.

Teorema 1.3. *[24] Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie n-dimensional 2-filiforme graduada naturalmente, con $n \geq 4$. Entonces existe una base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}\}$ de $\mathcal{L}$ tal que la ley del álgebra es isomorfa a una de las siguientes:*

$$L(n,r)\ (n \geq 5,\ 3 \leq r \leq 2\lfloor \tfrac{n-1}{2} \rfloor - 1,\ r \text{ impar}) : \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}. \end{cases}$$

$$Q(n,r)\ (n \geq 7,\ n \text{ impar}, 3 \leq r \leq n-4,\ r \text{ impar}) : \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

$\mathfrak{t}(n,n-3)$ $(n \geq 6, n\ par)$:

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_{n-1},x_1] = \frac{(n-4)}{2} x_{n-2}, & \\ [x_i,x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-3}+x_{n-1}), & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\ [x_i,x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\frac{(n-2-2i)}{2} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

$\mathfrak{t}(n,n-4)$ $(n \geq 7, n\ impar)$

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_{n-1},x_i] = \frac{(n-5)}{2} x_{n-4+i}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_i,x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-4}+x_{n-1}), & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [x_i,x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}\frac{(n-3-2i)}{2} x_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2}, \\ [x_i,x_{n-2-i}] = (-1)^{i}(i-1)\frac{(n-3-i)}{2} x_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{E}(7,3)$:

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq 3, \\ [x_6,x_i] = x_{i+3}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1,x_2] = x_3 + x_6, & \\ [x_1,x_i] = x_{i+1}, & 3 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

$\mathcal{E}^1(9,5)$:

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [x_8,x_i] = 2x_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1,x_4] = x_5 + y, & \\ [x_1,x_5] = 2x_6, & \\ [x_1,x_6] = 3x_7, & \\ [x_2,x_3] = -x_5 - x_8, & \\ [x_2,x_4] = -x_6, & \\ [x_2,x_5] = -x_7. & \end{cases}$$

$\mathcal{E}^2(9,5)$:

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq 5, \\ [x_8,x_i] = 2x_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1,x_4] = x_5 + x_8, & \\ [x_1,x_5] = 2x_6, & \\ [x_1,x_6] = x_7, & \\ [x_2,x_3] = -x_5 - x_8, & \\ [x_2,x_4] = -x_6, & \\ [x_2,x_5] = x_7, & \\ [x_3,x_4] = -2x_7. & \end{cases}$$

$L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ $(n \geq 4)$:

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3. \end{cases}$$

$Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ $(n \geq 7,\ n\ impar)$:

$$\begin{cases} [x_0,x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i,x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

Camacho, Gómez, González y Omirov obtuvieron en [14] la clasificación de las álgebras de Leibniz no de Lie 2-filiformes graduadas naturalmente.

Teorema 1.4. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie 2-filiforme graduada naturalmente no* *escindida. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras:*

KF_4 :

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_n. \end{cases}$$

$KF5$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [e_1, e_{n-1}] = e_2 + e_n, \\ [e_i, e_{n-1}] = e_{i+1}. \end{cases}$$

Los siguientes lemas muestran la clasificación de las álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes con sucesión característica $(n-2, 2)$, graduadas naturalmente.

Lema 1.1. *[12] Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz casifiliforme graduada naturalmente de tipo I. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes familias, no isomorfas entre sí:*

$\mathcal{L}^{1,\lambda}$:

$$\begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, & \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{2,\lambda}$:

$$\begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, & \lambda \in \{0,1\}, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = y_n. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{3,\lambda}$:

$$\begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n + y_2, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, & \lambda \in \{-1,0,1\}. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{4,\lambda}$:

$$\begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n + y_2, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = \lambda y_n, & \lambda \ne 0. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{5,\lambda,\mu}$:

$$\begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3. \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n + y_2, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, & (\lambda,\mu) = (1,1) \text{ ó } (2,4), \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = \mu y_n. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{6}$:

$$\begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \\ [y_1, y_{n-1}] = -y_n, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = y_2, \\ [y_{n-1}, y_n] = y_3. \end{cases}$$

Lema 1.2. *[12] Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz casifiliforme graduada naturalmente de tipo II. Entonces $\mathcal{L}$ is isomorfa a una de las siguientes familias, no isomorfas entre sí:*
Si n es par

$\mathcal{L}^1$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^2$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_3] = y_2 - y_4, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^3$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_3, y_3] = y_2, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^4$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_3] = 2y_2 - y_4, \\ [y_3, y_3] = y_2, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Si n es impar $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4$

$\mathcal{L}^5$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{6,\lambda}$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_3] = \lambda y_2 - y_4, \quad \lambda \in \{1, 2\}, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \leq j \leq n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{7,\lambda}$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_3, y_3] = \lambda y_2, \quad \lambda \neq 0, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$\mathcal{L}^{8,\lambda,\mu}$:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_3] = \lambda y_2 - y_4, \\ [y_3, y_3] = \mu y_2, \\ [y_1, y_j] = -y_{j+1}, \quad 4 \leq j \leq n-1, \\ [y_i, y_{n+2-i}] = (-1)^i y_n, \quad 3 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

con $(\lambda, \mu) = (-2, 1), (2, 1)$ *ó* $(4, 2)$.

Como estudiar la longitud de la *extensión* de las muchas álgebras que se han obtenido en los Lemas 1.1 y 1.2 se antoja difícil y poco efectivo, recurrimos a las cuatro grandes familias con las que se trabaja en la demostración de dichos lemas (ver Teorema 9 y Teorema 10 de [12]), que vienen mostradas en la siguiente proposición.

Proposición 1.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz graduada naturalmente, n-dimensional con sucesión característica $(n-2, 2)$ y $n \geq 5$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes familias, no isomorfas entre sí:*

$NG1$ (*si* n *es par*) :

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4, & \lambda \in \mathbb{C}, \\ [e_3, e_3] = \mu e_2, & \mu \in \mathbb{C}, \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$NG2$ (*si* n *es impar*) :

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4, \\ [e_3, e_3] = \mu e_2, & (\lambda, \mu) = (1, 1) \text{ ó } (\lambda, \mu) = (2, 4), \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, & 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$NG3$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2, & \alpha \in \{0,1\}, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n, & \beta \in \mathbb{C}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n, & \gamma \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

$NG4$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, & \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n, & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_2, & \\ [e_{n-1}, e_n] = e_3. & \end{cases}$$

donde $NG1$ y $NG2$ corresponden a álgebras de tipo II y $NG3$ y $NG4$ a álgebras de tipo I.

El siguiente teorema muestra la clasificación de las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente, que fueron estudiadas por Cabezas y Pastor en 2005. En él se denotan por L_{r_1} y L_{r_2} los correspondientes espacios de la graduación natural.

Teorema 1.5. *[7] Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente y no escindida. Sea n la dimensión de $\mathcal{L}$ verificando $n \geq 11$. Entonces existe una base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-3}, y_1, y_2\}$, con $y_1 \in L_{r_1}$ y $y_2 \in L_{r_2}$, tal que $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras, no isomorfas entre sí:*

Si $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-6$, r_1 y r_2 son impares

$L(n, r_1, r_2)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{r_2-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$ (*si n es par*) :

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{r_2-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

Si $3 \leq r_1 \leq n-6$, $r_2 = n-5$ y r_1 es impar

$L(n, r_1, n-5)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-5-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}. \end{cases}$$

$\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-5-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \leq i \leq \frac{n-6}{2}, \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

$\tau(n, r_1, n-5)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-5-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-5} + y_2), & 1 \le i \le \frac{n-6}{2}, \\ [x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} \frac{n-2i-4}{2} x_{n-4}, & 1 \le i \le \frac{n-6}{2}, \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i}(i-1)(\frac{n-i-4}{2}) x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\ [x_i, y_2] = \frac{6-n}{2} x_{n-5+i}, & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

Si $3 \le r_1 \le n-6$, $r_2 = n-4$ *y* r_1 *es impar*

$L(n, r_1, n-4)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}. \end{cases}$$

$\tau(n, r_1, n-4)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-4, \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\ [x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-4} + y_2), & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(\frac{n-3-2i}{2}) x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\ [x_1, y_2] = \frac{5-n}{2} x_{n-3}. \end{cases}$$

Si $3 \le r_1 \le n-6$, $r_2 = n-3$ *y* r_1 *es impar:*

$L(n, r_1, n-3)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-4 \\ [x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2} \\ [x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}. \end{cases}$$

En dimensiones inferiores a 11 las únicas álgebras de Lie 3-filiformes obtenidas son las que se muestran en el siguiente teorema.

Teorema 1.6. *[7] Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie 3-filiforme graduada naturalmente, no escindida y de dimensión 10. Entonces existe una base $\{x_0, x_1, \ldots, x_7, y_1, y_2\}$, con $y_1 \in L_{r_1}$ y $y_2 \in L_{r_2}$, donde $3 \le r_1 < r_2 \le 7$ y r_1 y r_2 son número impares, tal que $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes* *álgebras, no isomorfas entre sí:*

$L(10, r_1, r_2)$, $Q(10,3,5)$,

$\varepsilon^{1,\gamma}(10,3,5)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [x_1, x_2] = y_1, & \\ [x_i, x_{5-i}] = (-1)^{i-1} y_2, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_i, x_{7-i}] = (-1)^{i-1} \gamma x_7, & 1 \leq i \leq 3, \\ [x_i, y_1] = x_{i+3}, & 1 \leq i \leq 4, \\ [x_i, y_2] = x_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2, \ \gamma \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

$\varepsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq 6, \\ [x_1, x_2] = y_1, & \\ [x_i, x_{5-i}] = (-1)^{i-1}(x_5 + y_2), & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1, x_5] = 2x_6, & \\ [x_1, x_6] = (3+\gamma)x_7, & \\ [x_2, x_4] = -x_6, & \\ [x_2, x_5] = (-1+\gamma)x_7, & \\ [x_3, x_4] = \gamma x_7, & \\ [x_i, y_2] = -2x_{i+5}, & 1 \leq i \leq 2, \ \gamma \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Para el caso de las álgebras de Leibniz, la siguiente clasificación fue obtenida por Camacho, Gómez, González y Omirov en [13].

Teorema 1.7. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra n-dimensional de Leibniz no de Lie 3-filiforme graduada naturalmente y no escindida, con $n \geq 7$. Entonces existe la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-3}, f_1, f_2, f_3\}$ del álgebra, tal que $\mathcal{L}$ es isomorfa a*

$$L^1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [e_1, f_1] = f_3, & \\ [e_i, f_2] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

El estudio de la clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes graduadas naturalmente fue realizado por Cabezas y Pastor en el trabajo de investigación [7]. En el siguiente teorema se muestran las álgebras generales que aparecen al considerar $n \geq \text{máx}\{3p-1, p+8\}$. Para aclarar la notación, vamos a considerar la siguiente base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-p}, y_1, \ldots, y_{p-1}\}$, respecto de la cual están escritas las leyes del álgebra y los parámetros $r_1, \ldots, r_{p-1}$, como los subíndices de los espacios de la graduación natural a los que pertenecen los vectores y_i, es decir, $y_i \in V_{r_i}$ con $1 \leq i \leq p-1$.

Teorema 1.8. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie n-dimensional, p-filiforme no escindida graduada naturalmente, con $p > 1$, $n \geq \text{máx}\{3p-1, p+8\}$ y $3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-1} \leq n-p$ todos impares. Entonces:*

- *Si $r_{p-1} = n-p$, $\mathcal{L}$ es isomorfa a $L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p)$,*
- *Si $r_{p-1} = n-p-1$, $\mathcal{L}$ es isomorfa a $L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-1)$ ó $\tau(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-1)$,*
- *Si $r_{p-1} = n-p-2$, $\mathcal{L}$ es isomorfa a $L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$, $Q(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$ ó $\tau(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$,*
- *Si $2p-1 \leq r_{p-1} \leq n-p-3$, entonces*
  - *Si $n-p$ es impar, $\mathcal{L}$ es isomorfa a $L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$ ó $Q(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$,*
  - *Si $n-p$ es par, $\mathcal{L}$ es isomorfa a $L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$.*

donde

$$L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}) \; : \;\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-p-1, \\ [x_i, x_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} y_j, & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2},\ 1 \leq j \leq p-1. \end{cases}$$

$$Q(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}) \; : \;\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-p-1, \\ [x_i, x_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} y_j, & 1 \leq i \leq \frac{r_j - 1}{2},\ 1 \leq j \leq p-1, \\ [x_i, x_{n-p-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-p}, & 1 \leq i \leq \frac{n-p-1}{2}. \end{cases}$$

$$\tau(n, r_1, r_2, \dots, r_{p-2}, n-p-1) \ :$$
$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-p-1, \\ [x_i, x_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} y_j, & 1 \le i \le \frac{r_j - 1}{2},\ 1 \le j \le p-2, \\ [x_i, x_{n-p-1-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-p-1} + y_{p-1}), & 1 \le i \le \frac{n-p-2}{2}, \\ [x_i, x_{n-p-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-2i-p}{2} x_{n-p}, & 1 \le i \le \frac{n-p-2}{2}, \\ [x_1, y_{p-1}] = \frac{p+2-n}{2} x_{n-p}. & \end{cases}$$

$$\tau(n, r_1, r_2, \dots, r_{p-2}, n-p-2) \ :$$
$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le n-p-1, \\ [x_i, x_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} y_j, & 1 \le i \le \frac{r_j - 1}{2},\ 1 \le j \le p-2, \\ [x_i, x_{n-p-2-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-p-2} + y_{p-1}), & 1 \le i \le \frac{n-p-3}{2}, \\ [x_i, x_{n-p-1-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-p-1-2i}{2} x_{n-p-1}, & 1 \le i \le \frac{n-p-3}{2}, \\ [x_i, x_{n-p-i}] = (-1)^{i}(i-1)\frac{n-p-1-i}{2} x_{n-p}, & 2 \le i \le \frac{n-p-1}{2}, \\ [x_i, y_{p-1}] = \frac{p+3-n}{2} x_{n-p-2+i}, & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

Por último, el siguiente teorema recoge la clasificación de las álgebras excepcionales que necesitaremos en el Capítulo 4 de esta memoria, es decir, cuando $n < \text{máx}\{3p-1, p+8\}$. Como $3p-1 > p+8$ para $p \ge 5$, se tiene que $\text{máx}\{3p-1, p+8\} = 3p-1$ para $p \ge 5$. Así, sólo es necesario considerar el caso $p \le 4$. Como las álgebras p-filiformes, con $0 \le p \le 3$, ya han sido estudiadas, sólo resta coniderar $p = 4$. Además, como $n < \text{máx}\{3p-1, p+8\}$, se tiene $n < 12$. Esto da lugar a las siguientes álgebras.

Teorema 1.9. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie 4-filiforme no escindida graduada naturalmente de dimensión 11. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las siguientes álgebras:*

$$\varepsilon^1(11, 3, 5, 7) \ :$$
$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \le i \le 6, \\ [x_i, x_{r_j - i}] = (-1)^{i-1} y_j, & 1 \le i \le \frac{r_j - 1}{2}, 1 \le j \le 3, (r_1, r_2, r_3) = (3, 5, 7), \\ [x_i, y_1] = x_{i+3}, & 1 \le i \le 4, \\ [x_i, y_2] = x_{i+5}, & 1 \le i \le 2. \end{cases}$$

$$\varepsilon^2(11,3,5,7)\ :$$
$$\begin{cases}
[x_0,x_i]=x_{i+1}, & 1\le i\le 6,\\
[x_1,x_2]=y_1, & \\
[x_i,x_{5-i}]=(-1)^{i-1}(x_5+y_2), & 1\le i\le 2,\\
[x_i,x_{7-i}]=(-1)^{i\frac{(i-3)(i-4)}{2}}(x_7-y_3), & 1\le i\le 3,\\
[x_i,x_{6-i}]=(-1)^i(3-i)x_6, & 1\le i\le 2,\\
[x_i,y_2]=-2x_{i+5}, & 1\le i\le 2.
\end{cases}$$

Álgebras de Leibniz casifiliformes de longitud máxima 2

En el segundo capítulo de esta memoria nos centraremos en el estudio de longitud máxima de las álgebras casifiliformes. Dentro de esta familia de álgebras, encontramos dos tipos de estructuras, las que tienen sucesión característica $(n-2,2)$ y las que tienen $(n-2,1,1)$. Las álgebras cuya sucesión característica es $(n-2,1,1)$ se denominan 2-filiformes y forman parte de la familia de las p-filiformes, es decir, aquellas que tienen sucesión característica $(n-p,1,\ldots,1)$ y que desempeñan un papel fundamental en este campo de las matemáticas.

La clasificación de las álgebras de Lie filiformes y 2-filiformes de longitud máxima está recogida en [24] y [25]. Destacar que no existen álgebras de Lie nulfiliformes (o también llamadas 0-filiformes), ya que al verificar la propiedad $[x,x]=0$ para todo vector del álgebra, la sucesión característica asociada siempre ha de tener la dimensión del bloque de Jordan más pequeña igual a 1. En el caso de las de Leibniz, las nulfiliformes fueron estudiadas en [3], mientras que las filiformes y las 2-filiformes fueron desarrolladas en [4]. Por esta razón nos centraremos en las siguientes secciones en álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes con sucesión característica $(n-2,2)$, cerrando así la clasificación de las álgebras nilpotentes de nilíndice $n-p$ con $0 \leq p \leq 2$, siendo n la dimensión del álgebra.

El esquema básico seguido en nuestro estudio consiste en extender las álgebras de Leibniz casifiliformes graduadas naturalmente usando la información que nos aporta la graduación natural, y construir una nueva base genérica adaptada. El hecho de tomar esa nueva base hace que la búsqueda de las constantes de estructura que determinan la ley del álgebra objeto de nuestro estudio sea lo más sencilla posible. A partir de ahí, razonaremos usando propiedades de la graduación asociada a dicha base, propiedades algebraicas tales como las propiedades de nilpotencia, de ideales, etc y resultados teóricos demostrados en la próxima sección. Para que el estudio resulte más sencillo distinguiremos cuando extendemos álgebras casifiliformes graduadas naturalmente de Lie y cuando extendemos las de Leibniz no de Lie.

Los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en [8].

En la siguiente sección se demuestra que al considerar la extensión de las álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente obtenemos álgebras de Lie, y como se comentó anteriormente, éstas ya están clasificadas.

2.1. EXTENSIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie casifiliforme de dimensión n. Si x_0 es un vector característico del álgebra, existe una base en la que el operador ad_{x_0} está determinado por la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c|c} J_{n-2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_1 \end{array}\right)$$

siendo J_i el correspondiente bloque de Jordan de dimensión i.

Si denotamos la base adaptada de $\mathcal{L}$ como $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, los productos del vector característico x_0 por los elementos de la base los podemos expresar como

$$\begin{aligned}
[x_0, x_0] &= 0, \\
[x_0, x_i] &= x_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_0, x_{n-2}] &= 0, \\
[x_0, x_{n-1}] &= 0.
\end{aligned}$$

Considerando ahora la filtración natural que produce la sucesión central descendente, se obtiene un álgebra graduada finita que, en cierto modo, constituye la estructura básica del álgebra que se considera y que, cuando es isomorfa a $\mathcal{L}$, se dice que está graduada naturalmente.

El resultado más importante de esta sección, el Teorema 2.3, demuestra que no es posible obtener ningún algebra de Leibniz no de Lie casifiliforme de longitud máxima al extender las álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente. El Teorema 1.3, mostrado en los preliminares, presenta la clasificación de las álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente, cuya demostración está en [23].

Los siguientes tres resultados serán de gran utilidad en esta sección, ya que son la herramienta fundamental con la que probaremos que todas las álgebras extendidas consideradas son álgebras de Lie.

Teorema 2.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz n-dimensional y $\mathcal{B} = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ una base del álgebra. Sean $\{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$ los generadores de $\mathcal{L}$. Si se verifica que $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i]$ con $0 \leq j \leq n-1$ y $0 \leq i \leq s$, entonces $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie.*

Demostración: Basta probar que el resto de multiplicaciones de la ley del álgebra son antisimétricas, es decir, basta probar que $[y_i, y_m] = -[y_m, y_i]$ para $i, m \in \{s+1, \ldots, n-1\}$. Probémoslo considerando dos etapas:

- Etapa 1: Si $y_m = [y_{i_0}, y_{j_0}]$, donde $i_0, j_0 \in \{0, 1, \ldots, s\}$, entonces la igualdad se tiene usando las hipótesis del teorema y la identidad de Leibniz. Veámoslo para todo $0 \leq i \leq n-1$:

  $$[y_i, y_m] = [y_i, [y_{i_0}, y_{j_0}]] = [[y_i, y_{i_0}], y_{j_0}] - [[y_i, y_{j_0}], y_{i_0}] = -[y_{j_0}, [y_i, y_{i_0}]] + [[y_{j_0}, y_i], y_{i_0}] =$$

$$-[[y_{j_0}, y_i], y_{i_0}] + [[y_{j_0}, y_{i_0}], y_i] + [[y_{j_0}, y_i], y_{i_0}] = -[[y_{i_0}, y_{j_0}], y_i] = -[y_m, y_i].$$

- Etapa 2: Si $y_m = [y_{i_0}, y_t]$ con $i_0 \in \{0, 1, \ldots, s\}$ y $t \in \{s+1, \ldots, n-1\}$, entonces la igualdad se verifica gracias a la identidad de Leibniz y a la etapa anterior, ya que se tiene:

$$[y_i, y_m] = [y_i, [y_{i_0}, y_t]] = [[y_i, y_{i_0}], y_t] - [[y_i, y_t], y_{i_0}] = [[y_i, y_{i_0}], y_t] + [y_{i_0}, [y_i, y_t]] =$$

$$= [[y_i, y_{i_0}], y_t] + [[y_{i_0, y_i}], y_t] - [[y_{i_0}, y_p], y_i] = [[y_i, y_{i_0}], y_t] - [[y_i, y_{i_0}], y_t] - [[y_{i_0}, y_t], y_i] =$$

$$= -[[y_{i_0}, y_t], y_i] = -[y_m, y_i]$$

con $0 \leq i \leq n-1$.

□

Corolario 2.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz n-dimensional y $\mathcal{B} = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ una base de ésta. Sean $\{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$ los generadores de $\mathcal{L}$, denotemos por y_{i_0} uno de ellos. Si los elementos de $\mathcal{B}$ satisfacen las siguientes condiciones:*

- $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i]$, *con* $0 \leq i, j \leq s$,
- $y_i = [y_{i_0}, y_{i-1}]$, *con* $s+1 \leq i \leq n-1$ *y* $0 \leq i_0 \leq s$,
- $[y_i, y_{i_0}] = -[y_{i_0}, y_i]$, *con* $0 \leq i_0 \leq s$ *y* $s+1 \leq i \leq n-1$.

entonces $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie.

Demostración: El resultado se obtiene directamente del teorema anterior. Cualquier vector del álgebra que no sea generador es de la forma

$$y_m = [y_{i_0}, y_{m-1}] \text{ con } s+1 \leq m \leq n-1.$$

Según la demostración del Teorema 2.1 (etapa 2) tenemos que

$$[y_m, y_i] = -[y_i, y_m] \text{ con } 0 \leq i \leq s.$$

Teniendo en cuenta las condiciones $i)$ e $ii)$ junto con lo anterior resulta que:

$$[y_i, y_j] = -[y_j, y_i] \text{ con } 0 \leq i \leq s \text{ y } 0 \leq j \leq n-1.$$

Por el Teorema 2.1 tenemos que $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie.

$\square$

Corolario 2.2. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz n-dimensional y $\mathcal{B} = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ una base. Sean $\{y_0, y_1\}$ los generadores del álgebra. Si se verifica que:*

- $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i], \quad 0 \leq i, j \leq 1,$
- $\begin{cases} y_i = [y_0, y_{i-1}], & 2 \leq i \leq n-1, \\ y_{n-1} = [y_1, y_t], & 2 \leq t \leq n-2, \end{cases}$
- $\begin{cases} [y_i, y_0] = -[y_0, y_i], & 2 \leq i \leq n-1, \\ [y_{n-1}, y_1] = -[y_1, y_{n-1}], \end{cases}$

entonces $\mathcal{L}$ es de Lie.

Demostración: Gracias a los anteriores resultados es suficiente demostrar la propiedad antisimétrica en los siguientes productos:

- $[y_1, y_i]$ con $2 \leq i \leq n-2$. Usando la identidad de Leibniz y las hipótesis del corolario se tiene fácilmente que

  $$[y_1, y_i] = -[y_i, y_1] \text{ con } 2 \leq i \leq n-2.$$

- $[y_j, y_i]$ con $2 \leq i, j \leq n-2$. Aplicamos directamente el Corolario 2.1 y obtenemos que:

  $$[y_i, y_j] = -[y_j, y_i] \text{ con } 0 \leq i \leq 1 \text{ y } 0 \leq j \leq n-1$$

  y por el Teorema 2.1 se tiene que $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie.

$\square$

Estamos ahora en posición de probar que es imposible obtener un álgebra de Leibniz no de Lie casifiliforme de longitud máxima al extender las álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente. Dicha afirmación se demuestra en los siguientes teoremas.

Teorema 2.2. *Cualquier álgebra de Leibniz casifiliforme n-dimensional, con $n \geq 9$, de longitud máxima obtenida al extender, vía la graduación natural, un álgebra de Lie no escindida casifiliforme graduada naturalmente, es un álgebra de Lie.*

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie casifiliforme graduada naturalmente no escindida, entonces existe un vector característico x_0 de la base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ verificando:

$$[x_0, x_i] = x_{i+1}, \text{ con } 1 \leq i \leq n-3.$$

Por la definición de la sucesión central descendente se deduce fácilmente que la graduación natural de $\mathcal{L}$ es de la forma:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_{n-2}$$

donde

$$L_1 = \langle x_0, x_1 \rangle, L_2 = \langle x_2 \rangle, \ldots, L_r = \langle x_r, x_{n-1} \rangle, \ldots, L_{n-2} = \langle x_{n-2} \rangle \text{ con } 2 \leq r \leq n-2.$$

Extendemos $\mathcal{L}$, lo cual denotaremos por $\widetilde{\mathcal{L}}$, usando la información que aporta la graduación natural, obteniendo así la estructura de $\widetilde{\mathcal{L}}$. A continuación se construirá una nueva base sobre la cual el cálculo de las constantes de estructura sea lo más sencillo posible. Tomamos por tanto los siguientes generadores para la construcción de esa nueva base

$$\widetilde{x}_s = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i; \qquad \widetilde{x}_t = b_0 x_0 + x_1 + \sum_{j=2}^{n-1} b_j x_j,$$

obteniendo los siguientes productos en el álgebra extendida:

$$[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$

$$[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.$$

Es claro que $1 - a_1 b_0 \neq 0$ ya que $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ son linealmente independientes.

Como $\widetilde{\mathcal{L}}$ es una extensión de un álgebra de Lie, se sigue verificando que

$$[x_i, x_j] = -[x_j, x_i] \ \text{ con } \ 0 \leq i, j \leq 1,$$

por lo que para construir una nueva base sólo necesitaremos trabajar el producto $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$. Además la estructura de $\widetilde{\mathcal{L}}$ siempre va a verificar:

$$[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}.$$

Por tanto, si consideramos el siguiente producto:

$$[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s}}_{i-veces}, \widetilde{x_t}]]] = (1 - a_1 b_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \ \text{ con } \ 2 \leq i \leq n-4,$$

siempre podremos construir la base $\mathcal{B}_1$ formada por $\{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ donde:

$$y_0 = \widetilde{x_s},$$
$$y_1 = \widetilde{x_t},$$
$$y_i = [y_0, y_{i-1}] \text{ con } 2 \leq i \leq n-3,$$

y los vectores y_{n-2} e y_{n-1} dependerán del álgebra que estemos extendiendo. En cualquier caso, los generadores de $\widetilde{\mathcal{L}}$ serán y_0 e y_1.

De la construcción de la base, de la propiedad de la graduación natural $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$ y de la propiedad $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ con $0 \leq i, j \leq 1$ se puede afirmar que $\widetilde{\mathcal{L}}$ siempre verifica

$$[y_i, y_0] = -[y_0, y_i] = -y_{i+1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-3. \tag{2.1}$$

Por lo tanto, será suficiente encontrar los vectores y_{n-2} e y_{n-1} y comprobar que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.1 o del Corolario 2.2, para demostrar que $\widetilde{\mathcal{L}}$ es siempre un álgebra de Lie.

Supongamos además que el álgebra extendida $\widetilde{\mathcal{L}}$ tiene longitud máxima, es decir, que la graduación asociada a la base tomada es conexa y que su longitud coincide con la dimensión de $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Detallemos ahora los pasos de la demostración al extender cada una de las álgebras de Lie casifiliformes no escindidas del Teorema 1.3.

Estudio del algebra extendida $\widetilde{L}(n, r)$.

De la sucesión central descendente

$$\begin{aligned}
L^1 &= \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle,\\
L^i &= \langle x_i, \ldots, x_{n-1}\rangle \text{ con } 2 \leq i \leq \frac{r-1}{2} + 1,\\
L^j &= \langle x_j, \ldots, x_{n-2}\rangle \text{ con } \frac{r-1}{2} + 2 \leq j \leq n-2,
\end{aligned}$$

se deduce que la graduación natural de este álgebra está formada por los subespacios:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \langle x_0, x_1\rangle,\\
L_i &= \langle x_i\rangle \text{ con } 2 \leq i \leq n-2 \text{ e } i \neq \frac{r-1}{2} + 1,\\
L_{\frac{r-1}{2}+1} &= \langle x_{\frac{r-1}{2}+1}, x_{n-1}\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces la extensión del álgebra tiene por ley:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i < \frac{r-1}{2},\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i < \frac{r-1}{2},\\
[x_0, x_{\frac{r-1}{2}}] = x_{\frac{r-1}{2}+1} + (*)x_{n-2}, & \\
[x_{\frac{r-1}{2}}, x_0] = -x_{\frac{r-1}{2}+1} + (*)x_{n-2}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & \frac{r-1}{2} + 1 \leq i \leq n-3,\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & \frac{r-1}{2} + 1 \leq i \leq n-3,\\
[x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2},\\
[x_{r-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2},\\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i, j \leq n-1,\ i + j \neq r,
\end{cases}$$

donde $(*)$ son los correspondientes coeficientes de los productos que no especificamos por no ser relevantes para este estudio. $\widetilde{L}(n,r)$ está generada por y_0 e y_1 siendo:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s,\\
y_1 &= \widetilde{x}_t,\\
y_i &= [y_0, y_{i-1}] = (1-a_1b_0)x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, \quad 2 \le i \le n-2,\\
y_{n-1} &= [y_1, y_{r-1}] = (1-a_1b_0)b_0x_r + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2} + (1-a_1b_0)x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que efectivamente es una base ya que es un conjunto de n vectores linealmente independientes:

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}\\
b_0 & 1 & b_2 & \dots & b_{r-1} & b_r & \dots & b_{n-2} & b_{n-1}\\
0 & 0 & 1-a_1b_0 & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-a_1b_0 & \dots & (*) & (1-a_1b_0)a_1\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1-a_1b_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (1-a_1b_0)b_0 & \dots & (*) & 1-a_1b_0
\end{pmatrix}
$$

cuyo determinante es distinto de cero porque $a_1b_0 - 1 \neq 0$.

Denotemos por V_i los subespacios de la graduación asociada a la nueva base.

Supongamos que $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, así $y_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \le i \le n-2$, $y_{n-1} \in V_{2k_t+(r-2)k_s}$ y la graduación asociada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{2k_t+(r-2)k_s}.$$

Dicha graduación tiene longitud máxima pues hemos supuesto que $\widetilde{L}(n,,r)$ es un álgebra de longitud máxima, luego se verifican las siguiente propiedades:

$$\begin{cases} 1.\ k_t \neq k_s, \\ 2.\ \text{ningún subespacio puede ser el subespacio nulo,} \\ 3.\ k_s = \pm 1,\ \text{en caso contrario habría subespacios nulos,} \\ 4.\ k_s \neq 0 \neq k_t \text{ por nilpotencia,} \\ 5.\ \text{todos los subíndices de los subespacios son distintos.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Además, el caso $k_s = -1$ es completamente análogo al caso $k_s = 1$, por lo que supondremos en toda la demostración que $k_s = 1$. Para mayor claridad en el estudio de longitud máxima, aunque hemos fijado $k_s = 1$, mantendremos la notación k_s.

Probaremos a continuación que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.2 y por consiguiente que $\widetilde{L}(n, r)$ es un álgebra de Lie.

- Tenemos, por la ley del álgebra, que $[y_0, y_0] = Ay_m$ con $3 \leq m \leq n-1$. Por las propiedades (2.2) y la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, podemos afirmar que sólo sería posible si $m \in \{n-2, n-1\}$. En caso contrario como

  $$\begin{cases} [y_0, y_0] \in V_{2k_s}, \\ y_m \in V_{mk_s} \text{ con } 3 \leq m \leq n-3, \end{cases}$$

  se obtendría $2k_s = mk_s$, es decir, $k_s = 0$, lo cual es imposible.

  Si $m = n-2$ se tienen las siguientes afirmaciones

  $$\begin{cases} [y_0, y_0] = Ay_{n-2}, \\ [y_0, y_0] \in V_{2k_s}, \\ y_{n-2} \in V_{k_t+(n-3)k_s}, \end{cases}$$

  llegando así a $2k_s = k_t + (n-3)k_s$, es decir, $k_t = (5-n)k_s$, que está en contradicción con el hecho de que la graduación tenga longitud máxima. Por tanto $A = 0$.

Por otro lado, si $m = n-1$, se tiene que

$$\begin{cases} [y_0, y_0] = Ay_{n-1}, \\ [y_0, y_0] \in V_{2k_s}, \\ y_{n-2} \in V_{2k_t+(r-2)k_s}, \end{cases}$$

dando lugar a $2k_s = 2k_t + (r-2)k_s$, es decir, $2k_t = (4-r)k_s$. Como

$$\begin{cases} 3 \leq r \leq 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, \\ k_s = 1, \\ 2k_t = (4-r)k_s, \end{cases}$$

se tiene que $\lfloor \frac{2-n}{2} \rfloor \leq k_t < 1$. Esto implica que $dist(k_t, k_s) < n-3$ (ya que $\lfloor \frac{2-n}{2} \rfloor < n-3$ si y solo si $n \geq 3$), lo cual contradice de nuevo que la graduación tenga longitud máxima, ya que entre V_{k_t} y V_{k_s} hay al menos $n-3$ subespacios. Se concluye por tanto que $[y_0, y_0] = 0$.

- Por la ley del álgebra tenemos que $[y_1, y_1] = By_m$ con $3 \leq m \leq n-1$. Si $m \neq n-1$ se cumple

  $$\begin{cases} [y_1, y_1] = By_m, \\ [y_1, y_1] \in V_{2k_t}, \\ y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s}, \end{cases}$$

  obteniendo $k_t = (m-1)k_s$, llegando de nuevo a una contradicción. Por lo tanto, aseguramos que $B = 0$. Si por el contrario $m = n-1$, usando el mismo razonamiento llegaríamos a que $k_s = 0$, que contradice (2.2). Afirmamos entonces que $[y_1, y_1] = 0$.

- $[y_0, y_1] = -[y_1, y_0]$ es trivial por construcción de la nueva base.

- Por (2.1) y por las conclusiones anteriores, se tiene que

  $$[y_0, y_i] = -[y_i, y_0] = y_{i+1} \text{ con } 1 \leq i \leq n-3$$

y también $[y_0, y_{n-2}] = -[y_{n-2}, y_0]$.

- $[y_{n-1}, y_0] = -[y_0, y_{n-1}]$ ya que por la ley del álgebra tenemos

$$\begin{aligned}
[y_{n-1}, y_0] &= -(1 - a_1 b_0)x_{r+1} + (*)x_{r+2} + \cdots + (*)x_{n-2} = -y_{r+1},\\
[y_0, y_{n-1}] &= (1 - a_1 b_0)x_{r+1} + (*)x_{r+2} + \cdots + (*)x_{n-2} = y_{r+1}.
\end{aligned}$$

- $[y_{n-1}, y_1] = -[y_1, y_{n-1}]$ ya que:

$$\begin{aligned}
[y_{n-1}, y_1] &= -b_0(1 - a_1 b_0)x_{r+1} + (*)x_{r+2} + \cdots + (*)x_{n-2} = -b_0 y_{r+1},\\
[y_1, y_{n-1}] &= b_0(1 - a_1 b_0)x_{r+1} + (*)x_{r+2} + \cdots + (*)x_{n-2} = b_0 y_{r+1}.
\end{aligned}$$

Por todas las conclusiones anteriores, estamos en condiciones de aplicar el Corolario 2.2. Así, $\widetilde{L}(n, r)$ es un álgebra de Lie.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{Q}(n, r)$

La sucesión central descendente y la graduación natural del álgebra $Q(n, r)$ coinciden con la del álgebra $L(n, r)$, por lo tanto la ley de $\widetilde{Q}(n, r)$ puede ser escrita como:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \le i < \frac{r-1}{2},\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \le i < \frac{r-1}{2},\\
[x_0, x_{\frac{r-1}{2}}] = x_{\frac{r-1}{2}+1} + (*)x_{n-2}, & \\
[x_{\frac{r-1}{2}}, x_0] = -x_{\frac{r-1}{2}+1} + (*)x_{n-2}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & \frac{r-1}{2} + 1 \le i \le n-3,\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & \frac{r-1}{2} + 1 \le i \le n-3,\\
[x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \le i \le \frac{r-1}{2},\\
[x_{r-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \le i \le \frac{r-1}{2},
\end{cases}$$

$$\begin{cases} [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i,j \leq n-1,\ i+j \neq r,\ i+j \neq n-2. \end{cases}$$

Análogamente al estudio hecho para $\widetilde{L}(n,r)$, tomamos $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ como generadores y los productos:

$$\begin{aligned} [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= (1 - a_1 b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] &= -(1 - a_1 b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \end{aligned}$$

con $1 - a_1 b_0 \neq 0$. Podemos distinguir los siguientes casos:

Caso 1: Si $a_1 \neq -1$ consideramos la base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} y_0 &= \widetilde{x}_s, \\ y_1 &= \widetilde{x}_t, \\ y_i &= [y_0, y_{i-1}] \text{ con } 2 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= [y_{r-2}, y_2] = (1 - a_1 b_0)^2 x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \ldots (*)x_{n-2}. \end{aligned}$$

Destacamos los vectores más significativos de este caso:

$$\begin{aligned} y_r &= [y_0, y_{r-1}] = (1 - a_1 b_0)x_r + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2} + (1 - a_1 b_0)a_1 x_{n-1}, \\ y_{n-2} &= [y_0, y_{n-3}] = (1 - a_1 b_0)(1 + a_1)x_{n-2}, \\ y_{n-1} &= [y_{r-2}, y_2] = (1 - a_1 b_0)^2 x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}. \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis de que $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes y que $a_1 \neq -1$, es evidente que la matriz del cambio de base es regular, ya que:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_r & b_{r+1} & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\
0 & 0 & 1-a_1b_0 & (*) & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) \\
0 & 0 & 0 & 1-a_1b_0 & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-a_1b_0 & (*) & \dots & (*) & (1-a_1b_0)a_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-a_1b_0 & \dots & (*) & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & (1-a_1b_0)(1+a_1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (*) & \dots & (*) & (1-a_1b_0)^2
\end{pmatrix}$$

Análogamente al caso anterior denotamos, por V_i los subespacios de la graduación asociada a la nueva base. Supongamos que $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, así $y_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \leq i \leq n-2$, $y_{n-1} \in V_{2k_t+(r-2)k_s}$ y la graduación asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{2k_t+(r-2)k_s}.$$

Por la misma razón que en el caso $\widetilde{L}(n,r)$, dicha graduación tiene longitud máxima si y sólo si $k_s = \pm 1$. Podemos trabajar, sin pérdida de generalidad, con $k_s = 1$, pero para mayor claridad en el estudio de longitud máxima, mantendremos la notación k_s.. Probemos a continuación que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.2.

- Por la estructura del álgebra $\widetilde{Q}(n,r)$ sabemos que $[y_0, y_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}$, es decir $[y_0, y_0] = Ay_m$ con $3 \leq m \leq n-1$. Por otro lado, utilizando las propiedades (2.2) tenemos que

$$\begin{cases} [y_0, y_0] \in V_{2k_s}, \\ y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s} \text{ si } 3 \leq m \leq n-2, \\ y_m \in V_{2k_t+(r-2)k_s} \text{ si } m = n-1. \end{cases}$$

  Si $3 \leq m \leq n-2$ se tiene que $2k_s = k_t + (m-1)k_s$, es decir, $k_t = (3-m)k_s$. Si $m = 3$ se tiene $k_t = 0$, lo cual es imposible por nilpotencia. Si $m > 3$ entonces

$k_t + (m-2)k_s = (3-m)k_s + (m-2)k_s = k_s$. Esto implica que existe algún y_i con $4 \leq i \leq n-2$ tal que $V_1 =< y_0, y_i >$, contradiciendo así la suposición de que la graduación es máxima.

Si $m = n-1$ tendríamos que $2k_t = (4-r)k_s$, es decir, $k_t = \frac{4-r}{2}k_s$, lo cual es imposible pues r es impar y $k_t \in \mathbb{Z}$. Se concluye así que $[y_0, y_0] = 0$.

- Según la ley del álgebra se puede asegurar que

  $[y_1, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$ es decir, $[y_1, y_1] = By_m$ con $B \in \mathbb{C}$ y $3 \leq m \leq n-1$.

  Si $m = n-1$ podemos asegurar por las propiedades (2.2) y por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ que:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] \in V_{2k_t}, \\ y_{n-1} \in V_{2k_t+(r-2)k_s} \text{ con } r-2 \neq 0, \\ V_{2k_t} = V_{2k_t+(r-2)k_s} \end{cases}$$

  es decir, $2k_t = 2k_t + (r-2)k_s$, lo cual implica que $k_s = 0$, que es imposible por nilpotencia. Por lo tanto $3 \leq m < n-1$. Por las propiedades (2.2) y por el hecho de que $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ tenemos que:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] \in V_{2k_t}, \\ y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s} \text{ con } m-1 \neq 0, \\ V_{2k_t} = V_{k_t+(m-1)k_s}, \end{cases}$$

  entonces $2k_t = k_t + (m-1)k_s$, es decir, $k_t = (m-1)k_s$. Analicemos la igualdad $k_t = (m-1)k_s$.

  Si $m = 3$ obtenemos $k_t = 2k_s$ y como la graduación es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{2k_t+(r-2)k_s}$$

(con $k_s = 1$), que es conexa y de longitud máxima, se llega a que $V_{2k_t+(r-2)k_s}$ ha de ser igual a V_0 o a V_n, lo cual es imposible debido a que $3 \leq r \leq n-4$.

Por otro lado si $4 \leq m \leq n-2$ se tiene $k_t \geq 3$. Sustituyendo los valores de k_s y k_t en la graduación se deduce que $V_2 =< 0 >$, lo cual contradice la conectividad de la graduación.

Por último, si $m = n-1$ se obtiene $(r-2)k_s = 0$. Como $r \geq 3$ es lo mismo que asegurar que $k_s = 0$, lo cual es imposible por nilpotencia.

Así se obtiene que $[y_1, y_1] = 0$.

- Por construcción de la nueva base y usando la ley del álgebra es trivial ver que

$$[y_i, y_0] = -[y_0, y_i] \text{ con } 1 \leq i \leq n-2.$$

Por otro lado sabemos que

$$\begin{aligned}[y_{n-1}, y_0] &= [(1-a_1b_0)^2 x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}] = \\ &= (*)x_{r+2} + \cdots + (*)x_{n-2},\end{aligned}$$

es decir,

$$[y_{n-1}, y_0] = Cy_m \text{ con } C \in \mathbb{C} \text{ y } r+2 \leq m \leq n-2.$$

Como $[y_{n-1}, y_0] \in V_{k_t+(r-2)k_s}$ e $y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s}$ deducimos que $r-2 = m-1$, pero eso es imposible pues $r+2 \leq m \leq n-2$. Se prueba así que $[y_{n-1}, y_0] = 0$. Siguiendo exactamente el mismo razonamiento se obtiene $[y_0, y_{n-1}] = 0$.

- Por último, usando las herramientas anteriores se tiene que

$$[y_{n-1}, y_1] = Dy_m \text{ con } D \in \mathbb{C} \text{ y } r+2 \leq m \leq n-2,$$

y que $k_t = m-r+2 \geq r+2-r+2 = 4$. Pero si $k_t \geq 4$, de nuevo podemos asegurar que la graduación no puede ser conexa ya que al menos $V_2 =< 0 >$. Así $A = 0$ y razonando de manera análoga se tiene $[y_1, y_{n-1}] = 0$.

Queda probado que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.2, por tanto $\widetilde{Q}(n,r)$ es un álgebra de Lie.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 = -1}$ como $a_1 b_0 \neq 1$, está claro que $b_0 \neq -1$. Tomemos la base homogénea $\{y_0, \dots, y_{n-1}\}$ cuyos vectores están definidos como sigue:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s, \\
y_1 &= \widetilde{x}_t, \\
y_i &= [y_0, y_{i-1}], \quad 2 \leq i \leq n-3, \\
y_{n-2} &= [y_{n-3}, y_1], \\
y_{n-1} &= [y_{r-2}, y_2].
\end{aligned}
$$

Supongamos $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, así $y_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \leq i \leq n-3$, $y_{n-2} \in V_{2k_t+(n-4)k_s}$ e $y_{n-1} \in V_{2k_t+(r-2)k_s}$ y la graduación asociada de longitud máxima está formada por los espacios:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(r-2)k_s}.$$

Basta ver que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.2 para demostrar que $\widetilde{Q}_{(}n,r)$ es un álgebra de Lie. La prueba es análoga a la del Caso 1, salvo que también habría que probar que $[y_{n-2}, y_0] = -[y_0, y_{n-2}]$. Esta igualdad es trivialmente cierta ya que $y_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\mathfrak{t}}_{(n,n-3)}$ *(siendo n par y $n \geq 6$).*

La graduación natural del álgebra $\mathfrak{t}_{(n,n-3)}$ está formada por los espacios

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \langle x_0, x_1 \rangle, \\
L_i &= \langle x_i \rangle \text{ con } 2 \leq i \leq n-4, \\
L_{n-3} &= \langle x_{n-3}, x_{n-1} \rangle, \\
L_{n-2} &= \langle x_{n-2} \rangle.
\end{aligned}
$$

La ley de $\widetilde{\mathfrak{t}}_{(n,n-3)}$ viene dada por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-5, \\
[x_0, x_{n-4}] = x_{n-3} + (*)x_{n-2}, & \\
[x_0, x_{n-3}] = x_{n-2}, & \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-5, \\
[x_{n-4}, x_0] = -x_{n-3} + (*)x_{n-2}, & \\
[x_{n-3}, x_0] = -x_{n-2}, & \\
[x_{n-1}, x_1] = \frac{n-4}{2}x_{n-2}, & \\
[x_1, x_{n-1}] = -\frac{n-4}{2}x_{n-2}, & \\
[x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-2-2i}{2}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i}\frac{n-2-2i}{2}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i, j \leq n-3,\ i+j \neq n-3,\ i+j \neq n-2.
\end{cases}$$

Hacemos a continuación un cambio de base, tomando

$$\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s, \\
y_1 &= \widetilde{x}_t, \\
y_i &= [y_0, y_{i-1}], 2 \leq i \leq n-4,
\end{aligned}$$

y eligiendo adecuadamente los vectores y_{n-3}, y_{n-2} e y_{n-1}. Para ello es de gran utilidad considerar los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s, \underbrace{[[\widetilde{x}_s, \dots, [\widetilde{x}_s, [\widetilde{x}_s,}_{(n-5)-veces} \widetilde{x}_t]]]] &= [x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}, (1-a_1b_0)x_{n-4} + (*)x_{n-3} + \cdots + (*)x_{n-1}] = \\
&= (1-a_1b_0)(1+a_1)x_{n-3} + (*)x_{n-2} + (1-a_1b_0)a_1x_{n-1}, \\
\underbrace{[[\widetilde{x}_s, \dots, [\widetilde{x}_s, [\widetilde{x}_s,}_{(n-3)-veces} x_t]]]] &= [\widetilde{x}_s, (1-a_1b_0)(1+a_1)x_{n-3} + (*)x_{n-2} + (1-a_1b_0)a_1x_{n-1}] = \\
&= (1-a_1b_0)(1+a_1\frac{n-2}{2})x_{n-2}, \\
[\widetilde{x}_t, \underbrace{[[\widetilde{x}_s, \dots, [\widetilde{x}_s, [\widetilde{x}_s,}_{(n-5)-veces} x_t]]]] &= (1-a_1b_0)(b_0+1)x_{n-3} + (*)x_{n-2} + (1-a_1b_0)x_{n-1}, \\
[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{[[\widetilde{x}_s, \dots, [\widetilde{x}_s, [\widetilde{x}_s,}_{(n-5)-veces} x_t]]]] &= [(1-a_1b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, (1-a_1b_0)x_{n-4} + (*)x_{n-3} + \\
&\cdots + (*)x_{n-1}] = -(1-a_1b_0)^2\frac{n-6}{2}x_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Obsérvese que por independencia de los generadores $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ tenemos la restricción $1 - a_1b_0 \neq 0$. Podemos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1 + 1 \neq 0}$ el vector y_{n-3} queda perfectamente definido por el producto $[y_0, y_{n-4}]$, pero para poder construir los vectores de la base y_{n-2} e y_{n-1} es conveniente considerar las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } 1 + a_1\frac{n-2}{2} \neq 0}$ la nueva base está finalmente formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s, \\
y_1 &= \widetilde{x}_t, \\
y_i &= [y_0, y_{i-1}], \qquad \text{con } 2 \leq i \leq n-2, \\
y_{n-1} &= [y_1, y_{n-4}],
\end{aligned}
$$

siendo la matriz del cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & (1-a_1b_0) & (*) & \dots & (*) & (*) & (*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-a_1b_0)(1+a_1) & (*) & (1-a_1b_0)a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (1-a_1b_0)(1+a_1\frac{n-2}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-a_1b_0)(1+b_0) & (*) & (1-a_1b_0) \end{pmatrix}$$

Esta matriz es regular si y sólo si y_{n-3} e y_{n-1} son linealmente independientes, lo cual es cierto ya que

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-a_1b_0)(a_1+1) & (*) & a_1(1-a_1b_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-a_1b_0)(b_0+1) & (*) & (1-a_1b_0) \end{pmatrix} = 2,$$

pues

$$det \begin{pmatrix} (1-a_1b_0)(a_1+1) & a_1(1-a_1b_0) \\ (1-a_1b_0)(b_0+1) & (1-a_1b_0) \end{pmatrix} = (1-a_1b_0)^2[a_1+1-a_1(b_0+1)] = (1-a_1b_0)^3 \neq 0.$$

Supongamos que $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, entonces según la base tomada y la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, la graduación obtenida es

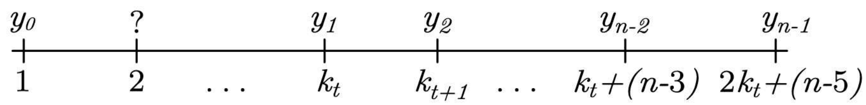
$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s}.$$

A continuación se prueba que bajo nuestras hipótesis (2.2), es imposible que esta graduación sea de longitud máxima, por lo que no habrá ningún álgebra casifiliforme de longitud máxima en este caso. Como en casos anteriores podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $k_s = 1$, aunque mantendremos la notación k_s para clarificar el estudio de longitud máxima. Entonces tenemos tres posibilidades:

- $k_t = 2$, en cuyo caso se llega a que $n-1 = 2k_t + (n-5)k_s = k_t + (n-3)k_s$, es decir, $V_{2k_t+(n-5)k_s} = V_{k_t+(n-3)k_s}$, lo cual contradice la hipótesis de que la graduación sea de longitud máxima.

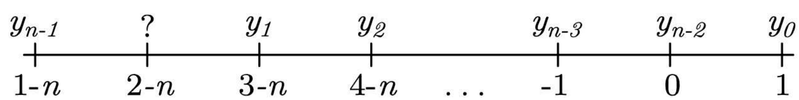
- $k_t > 2$, por construcción de la base, se tiene que $V_2 = \langle 0 \rangle$, contradiciendo que la graduación sea conexa.

  Se muestra a continuación una gráfica para más detalle. En ella se representan los valores de los subíndices de los espacios de la graduación en el que se encuentra cada vector de la base.



- $k_t < 0$, las únicas posibilidades para que se verifiquen las propiedades (2.2) son que o bien $k_t + (n-3)k_s = 0$ o bien $2k_t + (n-5)k_s = 0$.

  Por un lado, si $k_t + (n-3)k_s = 0$ entonces hay un subespacio nulo dentro de la graduación, el subespacio V_{2-n}, como muestra la siguiente gráfica:



  Por otro lado, si $2k_t + (n-5)k_s = 0$ obtenemos que $k_t = \frac{5-n}{2}$ que es imposible ya que $k_t \in \mathbb{Z}$ y n es par, por lo que $\frac{5-n}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Concluimos entonces que no existe ningún álgebra de longitud máxima bajo las hipótesis consideradas.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } 1 + a_1\frac{n-2}{2} = 0}$ como $n \geq 6$, se puede asegurar que $a_1 \neq 0$. Por otro lado se verifica que $a_1 b_0 \neq 1$, esto implica que $b_0 \neq \frac{2-n}{2}$. Entonces se puede elegir la base

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s, \\
y_1 &= \widetilde{x}_t, \\
y_i &= [y_0, y_{i-1}], \qquad \text{con } 2 \leq i \leq n-3, \\
y_{n-1} &= [y_1, y_{n-4}] = (1 - a_1 b_0)(b_0 + 1)x_{n-3} + (*)x_{n-2} + a_1(1 - a_1 b_0)x_{n-1}, \\
y_{n-2} &= [y_1, y_{n-1}] = (1 - a_1 b_0)(1 + b_0\frac{2}{n-2})x_{n-2}.
\end{aligned}
$$

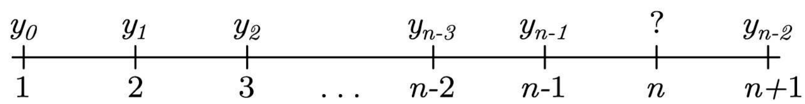
Análogamente a los casos anteriores, si $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, la graduación obtenida es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{3k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s},$$

que verifica las propiedades (2.2). Podemos trabajar, sin pérdida de generalidad, con $k_s = 1$, aunque mantendremos la notación k_s para mayor claridad en el estudio.

Veamos, analizando los posibles valores de k_t, que con la base tomada se llega a una contradicción con la suposición de longitud máxima:

- Si $k_t = 2$ obtenemos que $V_{n-1} = \langle y_{n-1} \rangle$, $V_{n+1} = \langle y_{n-2} \rangle$ pero $V_n = \langle 0 \rangle$, siendo esto imposible (véase la siguiente gráfica).



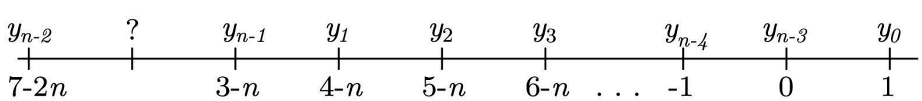
- Si $k_t > 2$ se obtiene por construcción de la base que $V_2 = \langle 0 \rangle$, contradiciendo que la graduación sea conexa.

- Si $k_t < 0$ los valores admisibles de k_t para que la graduación sea conexa son $k_t = 4 - n$, $k_t = \frac{5-n}{3}$ ó $k_t = \frac{5-n}{2}$. Este último valor se puede descartar ya que $k \in \mathbb{Z}$ y n es siempre un número par (ver Teorema 1.3.)

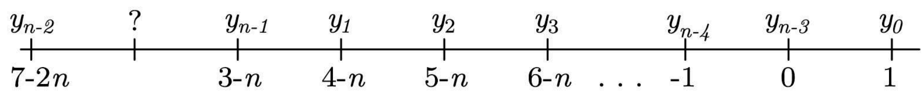
  Si $k_t = 4 - n$, entonces la graduación es

  $$V_{7-2n} \oplus V_{3-n} \oplus V_{4-n} \oplus V_{5-n} \oplus \cdots \oplus V_0 \oplus V_1.$$

  Como $n \geq 6$ está claro que $3 - n - 7 - 2n = n - 4 > 1$, así la graduación tiene un subespacio nulo, lo cual contradice que sea conexa, como se muestra a continuación.



  Si $k_t = \frac{5-n}{3}$ entonces $y_{n-3} \in V_{k_t+(n-4)k_s} = V_{\frac{2n-7}{3}}$. Como $n \geq 6$ entonces $\frac{2n-7}{3} > 1$, luego existe un vector y_j con $2 \leq j \leq n-4$ tal que $y_j \in V_0$, lo cual es imposible como se observa en la gráfica.



$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 + 1 = 0}$ se puede tomar la misma base que en el Caso 1.1, así el estudio es análogo. Por tanto, es imposible obtener un álgebra de longitud máxima.

Concluimos que no existe ningún algebra de Leibniz casifiliforme de longitud máxima al extender el álgebra graduada naturalmente $\mathfrak{t}_{(n,n-3)}$.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\mathfrak{t}}_{(n,n-4)}$ *(siendo n impar y $n \geq 7$).*

Como la graduación natural de $\mathfrak{t}_{(n,n-4)}$ está formada por los espacios

$$\begin{aligned}
L_1 &= \langle x_0, x_1 \rangle, \\
L_i &= \langle x_i \rangle, \ 2 \leq i \leq n-5, \\
L_{n-4} &= \langle x_{n-4}, x_{n-1} \rangle, \\
L_{n-3} &= \langle x_{n-3} \rangle, \\
L_{n-2} &= \langle x_{n-2} \rangle,
\end{aligned}$$

la extensión de $\mathfrak{t}_{(n,n-4)}$ viene definida por la ley:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-6, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & n-5 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-6, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & n-5 \leq i \leq n-3, \\
[x_{n-1}, x_i] = \frac{n-5}{2} x_{n-4-i} + (*)x_{i+2} + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq 2, \\
[x_i, x_{n-1}] = \frac{5-n}{2} x_{n-4-i} + (*)x_{i+2} + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq 2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
[x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-4}+x_{n-1}) + (*)x_{n-3} + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2},\\
[x_{n-4-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_{n-4}+x_{n-1}) + (*)x_{n-3} + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2},\\
[x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-3-2i}{2}x_{n-3} + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2},\\
[x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^{i}\frac{n-3-2i}{2}x_{n-3} + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-5}{2},\\
[x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i}(i-1)\frac{n-3-i}{2}x_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2},\\
[x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i+1}(i-1)\frac{n-3-i}{2}x_{n-2}, & 2 \leq i \leq \frac{n-3}{2},\\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + (*)x_{i+j+2} + \cdots + x_{n-1} & 1 \leq i, j \leq n-2,\\
 & i+j \notin \{n-2, n-3, n-4\}.
\end{cases}$$

Considérese la base $\mathcal{B}_1 = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ donde:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s},\\
y_1 &= \widetilde{x_t},\\
y_i &= [y_0, y_{i-1}] = (1-a_1b_0)x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-1},\ 1 \leq i \leq n-4,\\
y_{n-1} &= [y_2, y_{n-6}] = -(1-a_1b_0)^2 x_{n-4} + (*)x_{n-3} + (*)x_{n-2} - (1-a_1b_0)^2 x_{n-1},\\
y_{n-3} &= [y_0, y_{n-1}] = -(1-a_1b_0)^2 x_{n-3} + (*)x_{n-2},\\
y_{n-2} &= [y_3, y_{n-5}] = -(1-a_1b_0)^2 (n-6) x_{n-2}.
\end{aligned}$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1}\\
b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-5} & b_{n-4} & b_{n-3} & b_{n-2} & b_{n-1}\\
0 & 0 & 1-a_1b_0 & (*) & \ldots & (*) & (*) & (*) & (*) & (*)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_2 & (*) & (*) & (*) & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_2(1+a_1) & (*) & (*) & (1-a_1b_0)a_1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & C_1(1-a_1b_0) & (*) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & C_2(1-a_1b_0)(n-6) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_2(1-a_1b_0) & (*) & (*) & C_1(1-a_1b_0)
\end{pmatrix}$$

siendo $C_i = (-1)^i(1-a_1b_0)$. La matriz es regular ya que $n \geq 7$ y además

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (1-a_1b_0)(1+a_1) & (*) & (*) & (1-a_1b_0)a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (1-a_1b_0)^2 & (*) & (*) & -(1-a_1b_0)^2 \end{pmatrix} = 2$$

pues

$$det \begin{pmatrix} (1-a_1b_0)(1+a_1) & (1-a_1b_0)a_1 \\ (1-a_1b_0)^2 & -(1-a_1b_0)^2 \end{pmatrix} = -(1-a_1b_0)^3(1+a_1) + (1-a_1b_0)^3 a_1 =$$

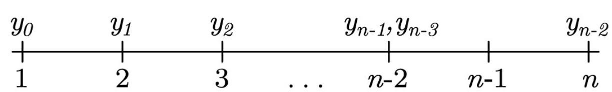
$$= -(1-a_1b_0)^3 \neq 0.$$

$\widetilde{\mathfrak{t}}_{(n,n-4)}$ tiene longitud máxima, por lo tanto, análogamente a los casos anteriores, la graduación asociada a la base tomada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \dots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-6)k_s},$$

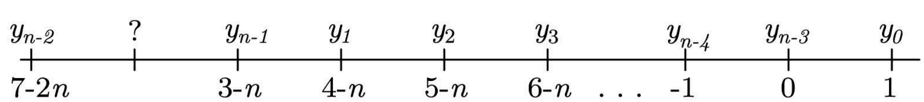
tomando $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$. Para que la graduación sea conexa y de longitud máxima hay dos posibilidades para k_t :

- $k_t = 2$, en ese caso se llegaría a $V_{2k_t+(n-6)k_s} = V_{n-2} = V_{k_t+(n-4)k_s}$, obteniendo así una contradicción. Véase el siguiente gráfico para mayor claridad:



- $k_t < 0$, lo cual implica que para que la graduación sea conexa $k_t + (n-4)k_s = 0$, ó $2k_t + (n-4)k_s = 0$ ó $2k_t + (n-6)k_s = 0$.

  Si $k_t + (n-4)k_s = 0$, sustituyendo los valores de k_t y k_s se obtendría $V_{2k_t+(n-4)k_s} = V_{k_t}$, contradiciendo así la hipótesis de longitud máxima.



  En los otros dos casos no se verifica que $k_t \in \mathbb{Z}$, ya que n es impar.

Por lo tanto no es posible obtener un álgebra casifiliforme de longitud máxima al extender el álgebra graduada naturalmente $\mathfrak{t}_{(n,n-4)}$.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}^1(9,5)$.

Como la graduación natural de $\varepsilon^1(9,5)$ está formada por los espacios:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \langle x_0, x_1 \rangle,\\
L_i &= \langle x_i \rangle,\ 2 \leq i \leq 4,\\
L_5 &= \langle x_5, x_8 \rangle,\\
L_6 &= \langle x_6 \rangle,\\
L_7 &= \langle x_7 \rangle,
\end{aligned}
$$

la ley de su álgebra extendida está definida por:

$$
\begin{cases}
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5,\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5,\\
[x_8, x_i] = 2x_{5+i} + (*)x_7, & 1 \leq i \leq 2,\\
[x_i, x_8] = -2x_{5+i} + (*)x_7, & 1 \leq i \leq 2,\\
[x_1, x_4] = x_5 + x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_4, x_1] = -x_5 - x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_1, x_5] = 2x_6 + (*)x_7, & \\
[x_5, x_1] = -2x_6 + (*)x_7, & \\
[x_1, x_6] = 3x_7, & \\
[x_6, x_1] = -3x_7, & \\
[x_2, x_3] = -x_5 - x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_3, x_2] = x_5 + x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_2, x_4] = -x_6 + (*)x_7 &
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} [x_4, x_2] = x_6 + (*)x_7 \\ [x_2, x_5] = -x_7, \\ [x_5, x_2] = x_7, \\ [x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_8, \quad 1 \leq i, j \leq 3, i+j \neq 5, \end{cases}$$

y el resto de productos nulos.

A continuación, construimos una nueva base homogénea sobre la que el cálculo de las constantes de estructura sea más sencillo, considerando los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1 = 1}$ está perfectamente definida la base formada por los vectores:

$$\begin{aligned}
&y_0 = \widetilde{x}_s, \\
&y_1 = \widetilde{x}_t, \\
&y_i = [y_{i-1}, y_0] = (-1)^{i+1}(1 - a_1 b_0)x_i + (*)x_4 + \cdots + (*)x_8 \text{ cuando } 2 \leq i \leq 4, \\
&y_5 = [y_4, y_0] = (-1)^6(1 - a_1 b_0)(1 + a_1)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (-1)^6(1 - a_1 b_0)a_1 x_8, \\
&y_6 = [y_4, y_2] = (-1)^7(1 - a_1 b_0)^2 x_6 + (*)x_7, \\
&y_7 = [y_5, y_2] = (-1)^8(1 - a_1 b_0)^2(1 + 3a_1)x_7, \\
&y_8 = [y_4, y_1] = (-1)^6(1 - a_1 b_0)(1 + b_0)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (-1)^6(1 - a_1 b_0)x_8,
\end{aligned}$$

cuya matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
b_0 & 1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\
0 & 0 & C_2 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\
0 & 0 & 0 & C_3 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & (*) & (*) & (*) & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_5(1 + a_1) & (*) & (*) & C_5 a_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6^2 & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_7^2(1 + 3a_1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_5(1 + b_0) & (*) & (*) & C_5
\end{pmatrix}$$

donde $C_i = (-1)^{i+1}(1 - a_1 b_0)$. El rango de esta matriz es igual a n ya que

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a_1b_0-1)(1+a_1) & (*) & (*) & -(a_1b_0-1)a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a_1b_0-1)(1+b_0) & (*) & (*) & -(a_1b_0-1) \end{pmatrix} = 2,$$

pues

$$det \begin{pmatrix} -(a_1b_0-1)(1+a_1) & -(a_1b_0-1)a_1 \\ -(a_1b_0-1)(1+b_0) & -(a_1b_0-1) \end{pmatrix} = (a_1b_0-1)^2(1+a_1)-(a_1b_0-1)^2(1+b_0)a_1 \neq 0.$$

Supongamos, al igual que en los casos anteriores de esta demostración, que el álgebra $\widetilde{\varepsilon}^1(9,5)$ tiene longitud máxima.

Tómense $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, entonces según la base tomada y la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, la graduación asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+5k_s}.$$

Probemos, usando el Corolario 2.2, que $\widetilde{\varepsilon}^1(9,5)$ es un álgebra de Lie. Para ello hay que probar las siguientes igualdades:

- $[y_0, y_0] = 0$ e $[y_1, y_1] = 0$. Se demuestra fácilmente, siguiendo un razonamiento análogo al seguido en las álgebras anteriores.

- $[y_i, y_0] = -[y_0, y_i]$ para $1 \leq i \leq 8$. Cuando $1 \leq i \leq 5$ la igualdad es trivial por (2.1).

  Para $i = 6$, por la ley del álgebra tenemos

  $$[y_6, y_0] = [(1-a_1b_0)^2 x_6 + (*)x_7, x_0 + a_1x_1 + \cdots + (*)a_8x_8] = 0,$$
  $$[y_0, y_6] = 0.$$

  Lo mismo ocurre con los productos $[y_7, y_0]$ y $[y_0, y_7]$.

  Para $i = 8$, considerando la ley del álgebra, tenemos

  $$[y_8, y_0] = (-1)^6(1-a_1b_0)[2a_1 - 1 - b_0]x_6 + (*)x_7,$$

  por otro lado,

  $$[y_0, y_8] = (-1)^7(1-a_1b_0)[2a_1 - 1 - b_0]x_6 + (*)x_7,$$

  lo cual prueba que efectivamente $[y_8, y_0] = -[y_0, y_8]$.

- $[y_i, y_1] = -[y_1, y_i]$ con $6 \leq i \leq 8$. Para $i = 6$ e $i = 7$ es inmediato ver que los productos corchetes son cero.

  Si $i = 8$, considerando la ley del álgebra como en el anterior punto, se ve fácilmente que $[y_8, y_1] = -[y_1, y_8]$.

Así, estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.2, por tanto el álgebra es de Lie.

Caso 2: Si $a_1 \neq 1$ tomamos la nueva base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s, \\
y_1 &= \widetilde{x}_t, \\
y_i &= [y_{i-1}, y_0] \text{ con } 2 \leq i \leq 4, \\
y_5 &= [y_4, y_1], \\
y_6 &= [y_4, y_2], \\
y_7 &= ?, \\
y_8 &= [y_4, y_0].
\end{aligned}$$

Falta por determinar el vector y_7, para ello diferenciamos los siguientes casos:

Caso 2.1: Si $a_1 = 0$ tomamos el vector

$$y_7 = [y_8, y_2] = -x_7,$$

por lo que la graduación asociada es la misma que en el Caso 1, obteniendo análogamente que el álgebra es de Lie.

Caso 2.2: Si $a_1 \neq 0$ tomamos y_7 de la siguiente forma

$$y_7 = \begin{cases} [y_2, y_5] \ \text{ si } a_1 \neq \frac{-1}{3}, \\ [y_8, y_2] = -(a_1 b_0 - 1)^2 (3 + b_0) x_7, \ \text{ si } a_1 = \frac{-1}{3}. \end{cases}$$

Para probar que se trata de un álgebra de Lie se usan las mismas herramientas que en casos anteriores. Dicha demostración se omitirá en esta memoria para no ser reiterativos.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}^2(9,5)$.

La estructura del álgebra graduada naturalmente $\varepsilon^2(9,5)$ es muy similar a la del álgebra $\varepsilon^1(9,5)$, diferenciándose sólo en que en la ley de $\varepsilon^2(9,5)$ aparecen los productos:

$$[x_3, x_4] = -2x_7,$$
$$[x_4, x_3] = 2x_7.$$

Dichos productos no impiden que se realice un estudio completamente análogo al caso anterior. Así se pueden considerar las mismas bases que en $\widetilde{\varepsilon}^1(9,5)$ y se obtiene que $\widetilde{\varepsilon}^2(9,5)$ es un álgebra de Lie.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}(7,3)$.

Ya que la graduación natural de $\varepsilon(7,3)$ está formada por los espacios

$$L_1 = \langle x_0, x_1\rangle,$$
$$L_2 = \langle x_2\rangle,$$
$$L_3 = \langle x_3, x_6\rangle,$$
$$L_i = \langle x_i\rangle,\ 4 \le i \le 5,$$

el álgebra $\widetilde{\mathcal{L}}$ viene dada por la ley:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_6, & 1 \le i \le 5,\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \le i \le 5,\\
[x_0, x_6] = (*)x_5, & \\
[x_6, x_0] = (*)x_5, & \\
[x_1, x_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, &
\end{cases}$$

$$\begin{cases} [x_1, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_6, & 3 \leq i \leq 4, \\ [x_i, x_1] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_6, & 3 \leq i \leq 4, \\ [x_6, x_i] = x_{3+i} + (*)x_5, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_i, x_6] = -x_{3+i} + (*)x_5, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1, x_2] = x_3 + x_6 + (*)x_4 + (*)x_5, \\ [x_2, x_1] = -x_3 - x_6 + (*)x_4 + (*)x_5, \\ [x_2, x_2] = (*)x_5, \end{cases}$$

y el resto de productos iguales a cero.

Las técnicas usadas para probar que $\widetilde{\varepsilon}(7,3)$ es un álgebra de Lie son análogas a los casos anteriores, por lo que vamos a omitir en esta memoria esta demostración. Tan solo vamos a especificar las bases usadas en cada uno de los casos que diferenciamos a continuación:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1 = -1}$ se puede tomar la base

$$\begin{aligned} y_0 &= \widetilde{x}_s, \\ y_1 &= \widetilde{x}_t, \\ y_2 &= [y_1, y_0] = (-1)^3(1 - a_1b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, \\ y_3 &= [y_2, y_1] = (-1)^4(1 - a_1b_0)(1 + b_0)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1 - a_1b_0)x_6, \\ y_4 &= [[y_2, y_0], y_0] = (-1)^5(1 - a_1b_0)(1 + 2a_1)x_4 + (*)x_5, \\ y_5 &= [y_4, y_0] = (-1)^6(1 - a_1b_0)(1 + 2a_1)a_1x_5, \\ y_6 &= [y_2, y_0] = (-1)^4(1 - a_1b_0)(1 + a_1)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1 - a_1b_0)a_1x_6 = \\ &= (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1 - a_1b_0)a_1x_6, \end{aligned}$$

cuya matriz del cambio de bases es

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_0 & 1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & -(1-a_1b_0) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & (1-a_1b_0)(1+b_0) & (*) & (*) & (1-a_1b_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-a_1b_0)(1+2a_1) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-a_1b_0)(1+2a_1)a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & (1-a_1b_0)a_1 \end{pmatrix}$$

y tiene rango igual a 7 porque

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(a_1b_0-1)(1+b_0) & (*) & (*) & -(a_1b_0-1) \\ 0 & 0 & 0 & -(a_1b_0-1)(1+a_1) & (*) & (*) & -(a_1b_0-1)a_1 \end{pmatrix} = 2,$$

pues

$$det \begin{pmatrix} -(a_1b_0-1)(1+b_0) & -(a_1b_0-1) \\ -(a_1b_0-1)(1+a_1) & -(a_1b_0-1)a_1 \end{pmatrix} = (a_1b_0-1)^2(1+b_0)a_1-(a_1b_0-1)^2(1+a_1) \neq 0$$

Nótese que $a_1 = -1$ y $a_1b_0 - 1 \neq 0$, por lo tanto $b_0 \neq -1$.

Llamemos V_i a los subespacios de la graduación asociada a la nueva base y tomemos $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, así la graduación asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s},$$

y bajo las hipótesis tomadas tiene longitud máxima.

Como hemos dicho en líneas anteriores, usando las mismas técnicas que en álgebras anteriores, se prueba que $\widetilde{\mathcal{L}}$ es un álgebra de Lie.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 \neq -1}$ es necesario considerar las siguientes restricciones para construir el vector y_5 de la nueva base:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } 1+2a_1 \neq 0}$ podemos tomar la base formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s},\\
y_1 &= \widetilde{x_t},\\
y_2 &= [y_1, y_0] = (-1)^3(1-a_1b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,\\
y_3 &= [y_2, y_0] = (-1)^4(1-a_1b_0)(1+a_1)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1-a_1b_0)a_1x_6,\\
y_4 &= [[y_3, y_0], y_0] = (-1)^5(1-a_1b_0)(1+2a_1)x_4 + (*)x_5,\\
y_5 &= [y_4, y_1] = (-1)^5(1-a_1b_0)(1+2a_1)a_1x_5,\\
y_6 &= [y_2, y_1] = (-1)^4(1-a_1b_0)(1+b_0)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1-a_1b_0)x_6,
\end{aligned}
$$

siendo regular la matriz del cambio de base.

Supongamos $y_0 \in V_{k_s}$ e $y_1 \in V_{k_t}$, entonces la graduación asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s},$$

cuya longitud es máxima por hipótesis.

Análogamente a los estudios anteriores obtenemos que el álgebra es de Lie.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } 1+2a_1 = 0}$ entonces $b_0 \neq -2$, ya que $a_1b_0 - 1 \neq 0$. Podemos tomar los siguientes vectores para la construcción de la nueva base:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s},\\
y_1 &= \widetilde{x_t},\\
y_2 &= [y_1, y_0] = (-1)^3(1-a_1b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,\\
y_3 &= [y_2, y_0] = (-1)^4(1-a_1b_0)(1+a_1)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1-a_1b_0)a_1x_6,\\
y_4 &= [[y_2, y_1], y_1] = (-1)^5(1-a_1b_0)(1+2b_0)x_4 + (*)x_5,\\
y_5 &= [y_4, y_1] = (-1)^5(1-a_1b_0)(1+2b_0)x_5,\\
y_6 &= [y_2, y_1] = (-1)^4(1-a_1b_0)(1+b_0)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^4(1-a_1b_0)x_6.
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que los vectores $\{y_0, y_1, \ldots, y_6\}$ forman una base.

Procediendo como en álgebras anteriores, se llega a que el álgebra considerada es de Lie.

□

En el siguiente teorema se muestra el estudio de la extensión de las álgebras graduadas naturalmente escindidas.

Teorema 2.3. *Cualquier álgebra de Leibniz casifiliforme n-dimensional, con $n \geq 6$, de longitud máxima obtenida al extender, vía la graduación natural, un álgebra de Lie escindida casifiliforme graduada naturalmente, es un álgebra de Lie.*

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Lie escindida casifiliforme graduada naturalmente. Entonces por el Teorema 1.3 sabemos que $\mathcal{L}$ es isomorfa a $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ ó $Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ y por tanto su graduación natural está formada por los siguientes espacios:

$$L_1 = \langle x_0, x_1, x_{n-1} \rangle,$$

$$L_i = \langle x_i \rangle,\ 2 \leq i \leq n-2.$$

Al igual que en el estudio del caso no escindido, haremos un cambio de base con el objetivo de simplificar los cálculos de las constantes de estructura. Tomemos los siguientes generadores para la construcción de esa nueva base

$$\widetilde{x_s} = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i, \qquad \widetilde{x_t} = b_0 x_0 + x_1 + \sum_{j=2}^{n-1} b_j x_j \quad \text{y} \quad \widetilde{x_u} = x_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k x_k,$$

obteniendo los siguientes productos en el álgebra extendida:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$

$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$

$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.$$

Al estar trabajando con extensiones de álgebras que provienen de álgebras de Lie y que denotaremos por $\widetilde{\mathcal{L}}$, se sigue verificando que

$$[x_i, x_j] = -[x_j, x_i] \quad \text{para todo } x_i, x_j \in L_1,$$

por lo que sólo necesitaremos trabajar con los productos $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$, $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ y $[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}]$. Además la estructura de $\widetilde{\mathcal{L}}$ siempre va a verificar:

$$[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}.$$

Por tanto, si tomamos los siguientes productos:

$$\underbrace{[[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s},}_{i-veces} \widetilde{x_t}]]]] = (1 - a_1 b_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + x_{n-1},$$

ó

$$\underbrace{[[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s},}_{i-veces} \widetilde{x_u}]]]] = (c_1 - a_1 c_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1},$$

ó

$$\underbrace{[[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s},}_{(i-1)-veces} [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}]]]] = (c_0 - b_0 c_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}$$

donde $2 \leq i \leq n-4$, podremos construir la nueva base adaptada en cada caso, donde los generadores de $\widetilde{\mathcal{L}}$ serán y_0, y_1 e y_{n-1}.

De la construcción de la base, de las propiedades de la graduación natural y de la propiedad $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ donde $x_i,\ x_j \in L_1$, se puede afirmar que $\widetilde{\mathcal{L}}$ siempre va a verificar

$$[y_i, y_0] = -[y_0, y_i] = -y_{i+1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-3. \tag{2.3}$$

Por lo tanto, será suficiente encontrar el vector y_{n-2} y comprobar que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.1 o del Corolario 2.2 para demostrar que $\widetilde{\mathcal{L}}$ es siempre un álgebra de Lie.

Análogamente al caso no escindido supondremos que el álgebra extendida $\widetilde{\mathcal{L}}$ tiene longitud máxima, es decir, que existe una graduación del álgebra de longitud máxima. Denotemos por V_i los subespacios de dicha graduación y consideramos $\widetilde{x_s} \in V_{k_s}, \widetilde{x_t} \in V_{k_t}$ y $\widetilde{x_u} \in V_{k_u}$. Para que la longitud de dicha graduación sea lo mayor posible tiene que ocurrir que k_s, k_t y k_u sean distintos entre sí. Además, por nilpotencia se verifica que

k_s, k_t y k_u no pueden ser nulos, en caso contrario la sucesión central descendente no se estabilizaría en cero. Así, la graduación considerada verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} 1.\ k_t, k_s \text{ y } k_u \text{ son distintos entre sí,} \\ 2.\ \text{ningún subespacio de la graduación puede ser nulo,} \\ 3.\ k_s \neq 0 \neq k_t \text{ y } k_u \neq 0 \text{ por nilpotencia} \\ 4.\ \text{todos los subíndices de los subespacios son distintos entre sí.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Detallemos los pasos de la demostración al extender cada una de las álgebras de Lie escindidas del Teorema 1.3.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.

La ley del álgebra extendida es:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_j] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}, & i, j \in \{0, 1, n-1\}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & i \in \{1, n-1\},\ 2 \leq j \leq n-2, \\ [x_j, x_i] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & i \in \{1, n-1\},\ 2 \leq j \leq n-2, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 2 \leq i, j \leq n-3, \end{cases}$$

y el resto de productos nulos, siendo $(*)$ constantes de estructura, las cuales no detallamos por no ser relevantes en este estudio. Además como $\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ son los generadores de la nueva base, se verifica que

$$rank \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ b_0 & 1 & \ldots & b_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Para la construcción de la nueva base necesitamos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1 - a_1 b_0 \neq 0}$ se toma la base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} y_0 &= \widetilde{x_s}, \\ y_1 &= \widetilde{x_t}, \\ y_i &= [y_0, y_{i-1}], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x_u}, \end{aligned}$$

cuya matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 - a_1 b_0 & (*) & \dots & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a_1 b_0 & \dots & (*) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 - a_1 b_0 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es regular ya que y_0, y_1 e y_{n-1} son linealmente independientes.

Como $y_0 \in V_{k_s}$, $y_1 \in V_{k_t}$ e $y_{n-1} \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la base tomada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t + k_s} \oplus V_{k_t + 2k_s} \oplus \dots \oplus V_{k_t + (n-3)k_s} \oplus V_{k_u}.$$

Para que la graduación sea conexa es necesario que $k_s = \pm 1$, ya que si no habría subespacios vacíos entre los subespacios de la graduación considerados. Destacar que son totalmente análogos los caso $k_s = 1$ y $k_s = -1$, por lo que podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $k_s = 1$. Para mayor claridad en el estudio de longitud, aunque hemos fijado $k_s = 1$, mantendremos la notación k_s.

A continuación, probaremos que estamos bajo las hipótesis del Corolario 2.1, y por tanto, que el álgebra es un álgebra de Lie.

Hay que probar que $[y_i, y_j] = -[y_j, y_i]$ con $i, j \in \{0, 1, n-1\}$ e $[y_i, y_0] = -[y_0, y_i]$ con $2 \leq i \leq n-2$.

- Veamos que $[y_0, y_0] = 0$. Como $[y_0, y_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}$, podemos escribir

$$[y_0, y_0] = Ay_m \quad \text{donde } 3 \leq m \leq n-2.$$

Por la graduación tomada tenemos que $[y_0, y_0] \in V_{2k_s}$ e $y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s}$, es decir:

$$2k_s = k_t + (m-1)k_s.$$

Si $m = 3$, se concluye que $k_t = 0$, lo cual está en contradicción con la nilpotencia del álgebra.

Si $m = 4$ tendríamos $k_t = -k_s$, lo cual implica que $V_{k_t+2k_s} = V_{-k_s+2k_s} = V_{k_s}$. Como

$$\begin{cases} y_3 \in V_{k_t+2k_s}, \\ y_0 \in V_{k_s}, \end{cases}$$

entonces $V_{k_s} = \langle y_0, y_3 \rangle$. Pero esto es imposible por las propiedades de la graduación (2.4).

Si $m = 5$, tendríamos $k_t = -2k_s$, lo cual implica que $V_{k_t+3k_s} = V_{-2k_s+3k_s} = V_{k_s}$. Como tenemos

$$\begin{cases} y_4 \in V_{k_t+3k_s}, \\ y_0 \in V_{k_s}, \end{cases}$$

entonces $V_{k_s} = \langle y_0, y_4 \rangle$. Pero esto es imposible por las propiedades de la graduación (2.4).

Si $6 \leq m \leq n-2$, tendríamos $k_t = (3-m)k_s$, lo cual implica que $V_{k_t+(m-4)k_s} = V_{(3-m)k_s+(m-4)k_s} = V_{k_s}$. Como tenemos

$$\begin{cases} y_{m-3} \in V_{k_t+(m-4k_s}, \\ y_0 \in V_{k_s}, \end{cases}$$

entonces $V_{k_s} = \langle y_0, y_{m-3} \rangle$. Pero esto es imposible por las propiedades de la graduación (2.4).

Se prueba así que $[y_0, y_0] = 0$.

- Veamos que $[y_0, y_i] = -[y_i, y_0]$ con $1 \leq i \leq n-2$. Por (2.3) se tiene que

$$[y_0, y_i] = -[y_i, y_0] \text{ con } 1 \leq i \leq n-3.$$

  Es fácil ver que $[y_0, y_{n-2}] = -[y_{n-2}, y_0]$.

- Calculemos los productos corchete $[y_{n-1}, y_0]$ e $[y_{n-1}, y_1]$. Tenemos

$$[y_{n-1}, y_0] = [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2} = By_m, \text{ con } B \in \mathbb{C} \text{ y } 3 \leq m \leq n-2,$$
$$[y_0, y_{n-1}] = [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2} = Cy_m, \text{ con } C \in \mathbb{C} \text{ y } 3 \leq m \leq n-2,$$
$$[y_{n-1}, y_0] + [y_0, y_{n-1}] \in R(\widetilde{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}).$$

  Si $m \neq n-2$, deducimos que

$$0 = [y_0, [y_{n-1}, y_0] + [y_0, y_{n-1}]] = [y_0, (B+C)y_m] = (B+C)y_{m+1}.$$

  Así $B = -C$.

  Si $m = n-2$, obtendríamos una contradicción, ya que se tendría:

$$\begin{cases} [y_0, y_{n-1}] = By_{n-2}, \\ [y_0, y_{n-1}] \in V_{k_s+k_u}, \\ y_{n-2} \in V_{(n-3)k_s+k_t}, \end{cases}$$

  obteniendo $k_s + k_u = (n-3)k_s + k_t$, es decir, $k_u = (n-4)k_s + k_t$. Entonces como:

$$\begin{cases} y_{n-3} \in V_{k_t+(n-4)k_s}, \\ y_{n-1} \in V_{k_u}, \end{cases}$$

  se tiene que $V_{k_u} = \langle y_{n-1}, y_{n-3} \rangle$, lo cual contradice que la graduación sea máxima.

  Queda probado que $[y_{n-1}, y_0] = -[y_0, y_{n-1}]$.

  Razonando análogamente se concluye que $[y_{n-1}, y_1] = -[y_1, y_{n-1}]$.

- Veamos que $[y_1, y_1] = 0$. Siguiendo el mismo razonamiento anterior podemos afirmar

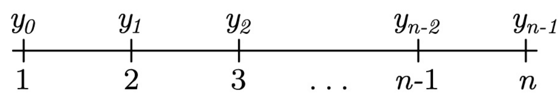
$$[y_1, y_1] = Dy_m \text{ con } D \in \mathbb{C} \text{ y } 3 \leq m \leq n-2.$$

Analicemos los posibles casos:

  - Si $m = 3$ tenemos $2k_t = k_t + 2k_s$, es decir, $k_t = 2$. Por las propiedades (2.4), se tiene que $k_u = 0$ ó $k_u = n$.

    Si $k_u = 0$, obtenemos una contradicción con la nilpotencia del álgebra.

    Si $k_u = n$, como $k_s = 1$ y $k_t = 2$ todos los subespacios de la graduación tienen subíndices positivos, como muestra el siguiente gráfico:



    Además se tiene

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ y_{n-1} \in V_{k_u} = V_n, \\ y_i \in V_t \text{ con } t > 0, \end{cases}$$

    entonces $[y_i, y_{n-1}] \in V_{n+t}$ para cualquier i. Pero todos esos subespacios son nulos, ya que nuestra graduación está formada por:

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus \cdots \oplus V_{n-1} \oplus V_n.$$

    Lo mismo ocurre con el producto corchete $[y_{n-1}, y_i]$, probando así que $y_{n-1} \in Cent(\widetilde{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C})$. Así $A = 0$, es decir, $[y_1, y_1] = 0$.

  - Si $m = 4$ entonces $2k_t = k_t + 3k_s$, es decir, $k_t = 3k_s = 3$. Como la graduación considerada es conexa, se tiene que $k_u = 2$.

    Como

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ y_0 \in V_{k_s}, \\ y_{n-1} \in V_{k_u}, y_1 \in V_{k_t} \end{cases}$$

se obtiene $[y_0, y_{n-1}] \in V_{k_s+k_u} = V_{k_t} = \langle y_1 \rangle$.

Por la sucesión central descendente de $\widetilde{L}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ tenemos:

$$\begin{cases} [y_0, y_{n-1}] \in \mathcal{L}^2, \\ y_1 \in \mathcal{L}^1 \setminus \mathcal{L}^2, \end{cases}$$

así $[y_0, y_{n-1}] = 0$.

Por otro lado, por la ley del álgebra sabemos que

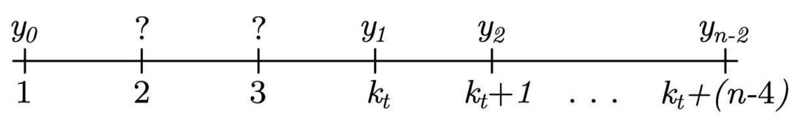
$$(1) \quad [y_0, y_{n-1}] = (c_1 - a_1 c_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \text{ por lo tanto } c_1 - a_1 c_0 = 0.$$

Por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ podemos asegurar que $[y_{n-1}, y_1] = Ay_3$ con $A \in \mathbb{C}$, pero por la ley del álgebra tenemos

$$(2) \quad [y_{n-1}, y_1] = (c_0 - b_0 c_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \text{ por lo tanto } c_0 - b_0 c_1 = 0.$$

Finalmente, por (1) y (2) obtenemos $a_1 = \frac{1}{b_0}$, lo cual es imposible pues $a_1 b_0 \neq 1$.

- Si $m > 4$ se tiene, por la construcción de la graduación, que $V_2 = \langle 0 \rangle$ ó $V_3 = \langle 0 \rangle$, (obsérvese la gráfica siguiente). Pero esto contradice la conectividad de la graduación.



Queda probado que el producto corchete $[y_1, y_1]$ es nulo.

- Veamos $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$. Razonando análogamente se tiene que

$$[y_{n-1}, y_{n-1}] = Ey_m \text{ con } E \in \mathbb{C} \text{ y } 3 \leq m \leq n-2.$$

Según el valor de m podemos distinguir:

- Si $m = 3$ tenemos $[y_{n-1}, y_{n-1}] = Ey_3$. Como sabemos que:

$$\begin{cases} y_{n-1} \in V_{k_u}, \\ [V_{k_u}, V_{k_u}] \subseteq V_{2k_u}, \\ y_3 \in V_{k_t+2k_s}, \end{cases}$$

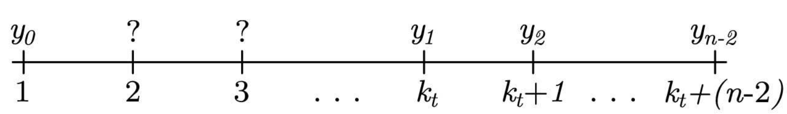
tenemos que $k_u = \frac{k_t+2k_s}{2}$. La única posibilidad para que la graduación sea conexa y de longitud máxima es que $k_s < k_u < k_t$, es decir, $1 < \frac{k_t}{2} + 1 < k_t$. Simplificando obtenemos $k_t > 2$.

Si $k_t = 3$ se obtiene $k_u = \frac{5}{2}$, pero $k_u \in \mathbb{Z}$.

Si $k_t = 4$ entonces $k_u = 3$, y por construcción de la graduación obtenemos $V_2 = \langle 0 \rangle$.

Si $k_t \geq 5$ se tiene $V_2 = \langle 0 \rangle$, por lo tanto no tiene sentido considerar $m = 3$.

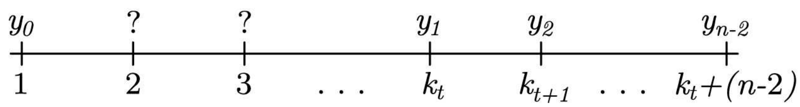
Para mayor claridad de los dos últimos casos, se muestra el siguiente gráfico:



- Si $m > 3$ tenemos $[y_{n-1}, y_{n-1}] = Ey_m$. Como sabemos que:

$$\begin{cases} y_{n-1} \subseteq V_{k_u}, \\ [V_{k_u}, V_{k_u}] \in V_{2k_u}, \\ y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s}, \end{cases}$$

tenemos que $k_u = \frac{k_t+(m-1)k_s}{2}$. Al ser $k_s = 1$, la única posibilidad para que la graduación sea conexa y de longitud máxima es que $k_s < k_u < k_t$, es decir $1 < \frac{k_t+m-1}{2} < k_t$, lo cual es cierto si y solo si $k_t > m-1 \geq 3$. Pero si k_t toma esos valores se obtiene que $V_2 =< 0 >$ ó $V_3 =< 0 >$, como se puede observar en la siguiente gráfica. Se llega así a contradicción.



Queda probado que $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$.

Se verifican las hipótesis del Corolario 2.1, por tanto, en este caso se obtiene un álgebra de Lie.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 - a_1 b_0 = 0}$ podemos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } c_1 - a_1 c_0 \neq 0}$ se toma la nueva base formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x}_s, \\
y_1 &= \widetilde{x_u}, \\
y_{i+1} &= [y_0, y_i], \quad 1 \leq i \leq n-3, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x}_t,
\end{aligned}
$$

cuya matriz del cambio de base es

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & 1 \\
0 & 0 & c_1 - a_1 c_0 & (*) & \dots & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_1 - a_1 c_0 & \dots & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_1 - a_1 c_0 & 0 \\
b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1}
\end{pmatrix}
$$

Esta matriz es regular ya que

$$rank \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_{n-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Veamos que no existe ningún álgebra bajo estas hipótesis. Por la ley del álgebra tenemos

$$[y_1, y_{n-1}] = [x_u, x_t] = (c_0 - b_0c_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}.$$

Si $c_0 - b_0c_1 \neq 0$, se tiene que $[y_1, y_{n-1}] = Ay_2$ con $A \neq 0$.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{cases} [y_1, y_{n-1}] \in V_{k_t+k_u}, \\ y_2 \in V_{k_t+k_s}, \end{cases}$$

es decir $k_u = k_s$, lo que contradice la definición de longitud máxima.

Por tanto $c_0 - b_0c_1 = 0$. Así se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} c_0 = b_0c_1, \\ a_1b_0 = 1 \text{ con } a_1 \neq 0, \\ a_1c_0 \neq c_1, \end{cases}$$

lo cual es imposible. Queda probado que no existe ningún álgebra de Leibniz casifiliforme de longitud máxima bajos las restricciones tomadas en este subcaso.

Caso 2.2: Si $a_1c_0 - c_1 = 0$ se tiene que $1 - a_1b_0 = c_1 - a_1c_0 = 0$, lo que implica que $c_0 - b_0c_1 = 0$. Por lo tanto, no podemos construir una base pues los productos entre los generadores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ son linealmente dependientes.

Luego, no existe ningún algebra de Leibniz casifiliforme de longitud máxima al extender $L_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$.

El álgebra extendida está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}, & i, j \in \{0, 1, n-1\}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & i \in \{1, n-1\},\ 2 \leq j \leq n-2, \\ [x_j, x_i] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & i \in \{1, n-1\},\ 2 \leq j \leq n-2, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 2 \leq i, j \leq n-3,\ i+j \neq n-2, \end{cases}$$

y el resto de productos iguales a cero.

Consideramos los productos entre los tres generadores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (1 - a_1 b_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2},$$

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (c_1 - a_1 c_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2},$$

$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = (b_0 c_1 - c_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2},$$

$$[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s}}_{i-veces}, \widetilde{x_u}]]] = (c_1 - a_1 c_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, \quad 2 \leq i \leq n-4,$$

$$[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s}}_{(n-3)-veces}, \widetilde{x_u}]]] = (c_1 - a_1 c_0)(1 + a_1)x_{n-2},$$

$$[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s}}_{i-veces}, \widetilde{x_t}]]] = (1 - a_1 b_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, \quad 2 \leq i \leq n-4,$$

$$[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \ldots, [\widetilde{x_s}, [\widetilde{x_s}}_{(n-3)-veces}, \widetilde{x_t}]]] = (1 - a_1 b_0)(1 + a_1)x_{n-2}.$$

Para construir la nueva base es de gran utilidad distinguir los siguientes casos:

Caso 1: Si $c_1 - a_1 c_0 \neq 0$.

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } 1 + a_1 \neq 0}$ considérese la nueva base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s}, \\
y_1 &= \widetilde{x_t}, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_u}, \\
y_2 &= [y_{n-1}, y_0] = (a_1c_0 - c_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}, \\
y_i &= [y_0, y_{i-1}] = (a_1c_0 - c_1)x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, \quad 3 \leq i \leq n-3, \\
y_{n-2} &= [y_0, y_{n-3}] = (a_1c_0 - c_1)(1 + a_1)x_{n-2},
\end{aligned}
$$

cuya matriz del cambio de base:

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\
0 & 0 & a_1c_0 - c_1 & (*) & \dots & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_1c_0 - c_1 & \dots & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (a_1c_0 - c_1)(1 + a_1) & 0 \\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & 1
\end{pmatrix}
$$

es regular por las hipótesis tomadas.

La graduación asociada a dicha base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus V_{k_u+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-3)k_s},$$

donde $y_0 \in V_{k_s}$, $y_1 \in V_{k_t}$ e $y_{n-1} \in V_{k_u}$. Veamos que se verifican las hipótesis del Corolario 2.2, es decir, comprobemos que

$$
\begin{cases}
[y_i, y_j] = -[y_j, y_i], \quad i, j \in \{0, 1, n-1\}, \\
[y_i, y_0] = -[y_0, y_i], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\
[y_{n-1}, y_2] = -[y_2, y_{n-1}],
\end{cases}
$$

y así $\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ será un álgebra de Lie.

- Veamos $[y_0, y_0] = [y_1, y_1] = [y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$. Como $[y_0, y_0] \in R(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C})$, se deduce que si $[y_0, y_0] = Ay_m$ con $3 \leq m \leq n-3$,

  $$[y_0, [y_0, y_0]] = Ay_{m+1} = 0,$$

  entonces $A = 0$.

  Si $[y_0, y_0] = By_{n-2}$, como se tiene que $[y_0, y_0] \in V_{2k_s}$ e $y_{n-2} \in V_{k_u+(n-3)k_s}$, se llega a que $k_u = (5-n)k_s$, lo que imposibilita que la graduación considerada tenga longitud máxima. Por lo tanto $[y_0, y_0] = 0$.

  Con un razonamiento análogo se prueba que $[y_1, y_1] = 0$ y que $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$.

- Veamos $[y_i, y_0] = -[y_0, y_i]$ con $1 \leq i \leq n-1$. Por (2.3) se tiene que

  $$[y_i, y_0] = -[y_0, y_i] \text{ con } 2 \leq i \leq n-3.$$

  Falta ver $[y_0, y_1] = -[y_1, y_0]$, $[y_{n-2}, y_0] = -[y_0, y_{n-2}]$ e $[y_{n-1}, y_0] = -[y_0, y_{n-1}]$.

  Tenemos que

  $$[y_0, y_1] = (1 - a_1 b_0)x_2 + \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_{n-2} x_{n-2},$$
  $$[y_1, y_0] = (a_1 b_0 - 1)x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_{n-2} x_{x-2},$$

  así $[y_0, y_1]$, $[y_1, y_0] \in \langle y_m \rangle$ con $2 \leq m \leq n-2$.

  Como

  $$\begin{cases} [y_0, y_1] + [y_1, y_0] = (\alpha_3 + \beta_3)x_3 + \cdots + (\alpha_{n-3} + \beta_{n-3})x_{n-3} + \\ \qquad\qquad +(\alpha_{n-2} + \beta_{n-2})x_{n-2} \in R(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}), \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n-3} \notin R(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}), \\ x_{n-2} \in Cent(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}) \end{cases}$$

  se tiene que $\alpha_i = -\beta_i$ para $3 \leq i \leq n-3$. Por lo tanto queda

  $$[y_0, y_1] + [y_1, y_0] = (\alpha_{n-2} + \beta_{n-2})x_{n-2}.$$

Veamos que también se tiene que $\alpha_{n-2} = -\beta_{n-2}$. Por las propiedades (2.4) y la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ sabemos que

$$\begin{cases} [y_0, y_1] + [y_1, y_0] \in V_{k_s+k_t}, \\ [y_0, y_1] + [y_1, y_0] = Ay_{n-2}, \\ y_{n-2} \in V_{k_u+(n-3)k_s}. \end{cases}$$

Entonces o bien $A = 0$, es decir, $\alpha_{n-2} = -\beta_{n-2}$, o bien $k_s + k_t = k_u + (n-3)k_s$, es decir $k_t = k_u + (n-4)k_s$. Pero $k_t = k_u + (n-4)k_s$ es imposible porque la graduación es de longitud máxima.

Por construcción tenemos $[y_{n-1}, y_0] = y_2$ y por la ley del álgebra es cierto que

$$[y_0, y_{n-1}] = (c_1 - a_1c_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}.$$

Como $c_1 - a_1c_0 \neq 0$, está claro que $[y_0, y_{n-1}] = -y_2$.

Por último $[y_{n-2}, y_0] = [y_0, y_{n-2}] = 0$ porque $y_{n-2} \in Cent(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C})$ ya que

$$\begin{cases} y_{n-2} = (a_1c_0 - c_1)(1 + a_1)x_{n-2}, \\ x_{n-2} \in Cent(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}). \end{cases}$$

- Veamos $[y_{n-1}, y_2] = -[y_2, y_{n-1}]$. Como $[y_{n-1}, y_{n-1}] \neq 0$ y aplicando la identidad de Leibniz se tiene:

$$[y_{n-1}, y_2] = [y_{n-1}, [y_{n-1}, y_0]] = [y_{n-1}, y_{n-1}], y_0] - [[y_{n-1}, y_0], y_{n-1}] = -[y_2, y_{n-1}].$$

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } 1 + a_1 = 0,}$ tomamos la nueva base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s}, \\
y_1 &= \widetilde{x_t}, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_u}, \\
y_2 &= [y_{n-1}, y_0] = (a_1c_0 - c_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}, \\
y_i &= [y_0, y_{i-1}] = (a_1c_0 - c_1)x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, \quad 3 \leq i \leq n-3, \\
y_{n-2} &= \begin{cases} [y_1, y_{n-3}] = (b_0+1)(c-1-a_1c_0)x_{n-2} \text{ si } b_0 \neq -1, \\ [y_{n-1}, y_{n-3}] = (c_0+c_1)(c_1 - a_1c_0) \text{ si } b_0 = -1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Si $b_0 = -1$ entonces $c_0 + c_1 = 0$. En caso contrario tendríamos

$$
det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_{n-1} \\ b_0 & 1 & b_{n-1} \\ c_0 & c_1 & 1 \end{pmatrix} = 0,
$$

y por tanto $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ serían linealmente dependientes, lo que es imposible pues son los generadores del álgebra.

Análogamente al caso anterior, se prueba, usando el Corolario 2.2, que el álgebra es de Lie.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1c_0 - c_1 = 0 \textbf{ y } 1 - a_1b_0 \neq 0.}$

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } 1 + a_1 \neq 0}$ construimos la nueva base formada por los siguientes vectores

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s}, \\
y_1 &= \widetilde{x_t}, \\
y_{i+1} &= [y_0, y_i], \quad 1 \leq i \leq n-3, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_u},
\end{aligned}
$$

y tomamos la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s},$$

donde $y_0 \in V_{k_s}$, $y_1 \in V_{k_t}$ e $y_{n-1} \in V_{k_u}$. En este caso la matriz del cambio es:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_0 & 1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 1-a_1b_0 & (*) & \dots & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a_1b_0 & \dots & (*) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1-a_1b_0)(1+a_1) & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-2} & 1 \end{pmatrix}$$

y es regular ya que los vectores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ son linealmente independientes y estamos suponiendo $(1-a_1b_0)(1+a_1) \neq 0$.

Por el Corolario 2.1, basta probar

$$\begin{aligned} &[y_i, y_j] = -[y_j, y_i], \quad \text{para todo } \ i, j \in \{0, 1, n-1\}, \\ &[y_i, y_0] = -[y_0, y_i], \ 2 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

para afirmar que el álgebra $\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ es un álgebra de Lie.

- Veamos $[y_0, y_0] = [y_1, y_1] = [y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$. Por la ley del álgebra podemos escribir

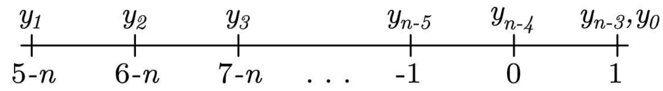
  $$[y_0, y_0] = Ay_m \text{ con } 3 \leq m \leq n-2 \text{ y } A \in \mathbb{C}.$$

  Si $m \neq n-2$ entonces, usando la identidad de Leibniz y que $[x, x] \in R(\mathcal{L})$, tenemos

  $$0 = [y_0, [y_0, y_0]] = A[y_0, y_m] = Ay_{m+1},$$

  de donde se deduce que $A = 0$.

  Si $m = n-2$ se obtendría, usando las propiedades de la graduación, que $k_t = (5-n)k_s$, lo que es imposible pues entonces $V_{k_s} = \langle y_0, y_{n-3} \rangle$, como se muestra en el siguiente gráfico:



Razonando análogamente se prueba que $[y_1, y_1] = [y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$.

- Veamos $[y_i, y_0] = -[y_0, y_i]$, con $1 \le i \le n-1$. Por la propiedad (2.3) se tiene que

$$[y_i, y_0] = -[y_0, y_i] \text{ con } 2 \le i \le n-3.$$

Falta ver $[y_0, y_1] = -[y_1, y_0]$, $[y_{n-2}, y_0] = -[y_0, y_{n-2}]$ e $[y_{n-1}, y_0] = -[y_0, y_{n-1}]$.

Como $y_{n-2} \in Cent(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C})$ está claro que $[y_{n-2}, y_0] = [y_0, y_{n-2}] = 0$.

Por construcción $[y_0, y_1] = y_2$ y por la ley del álgebra tenemos

$$[y_1, y_0] = (a_1 b_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-2}.$$

Como $a_1 b_0 - 1 \neq 0$, está claro que $[y_0, y_{n-1}] = -y_2$.

Veamos por último que $[y_0, y_{n-1}] = -[y_{n-1}, y_0]$. Tenemos que

$$[y_0, y_{n-1}] = \alpha_3 x_3 + \cdots + \alpha_{n-2} x_{n-2},$$

$$[y_{n-1}, y_0] = \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_{n-2} x_{x-2},$$

así $[y_0, y_{n-1}], [y_{n-1}, y_0] \in \langle y_m \rangle$ con $3 \le m \le n-2$.

Como

$$\begin{cases} [y_0, y_{n-1}] + [y_{n-1}, y_0] = (\alpha_3 + \beta_3)x_3 + \cdots + (\alpha_{n-2} + \beta_{n-2})x_{n-2} \in R(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}), \\ \{x_2, x_3, \ldots, x_{n-3}\} \notin R(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}), \\ x_{n-2} \in Cent(\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}) \end{cases}$$

se tiene que $\alpha_i = -\beta_i$ para $3 \le i \le n-3$. Por lo tanto queda

$$[y_0, y_{n-1}] + [y_{n-1}, y_0] = (\alpha_{n-2} + \beta_{n-2})x_{n-2}.$$

Por las propiedades (2.4) y la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ sabemos que

$$\begin{cases} [y_0, y_{n-1}] + [y_{n-1}, y_0] \in V_{k_s + k_u}, \\ [y_0, y_{n-1}] + [y_{n-1}, y_0] = A y_{n-2}, \\ y_{n-2} \in V_{k_t + (n-3)k_s}. \end{cases}$$

Entonces o bien $A = 0$, es decir, $\alpha_{n-2} = -\beta_{n-2}$, o bien $k_s + k_u = k_t + (n-3)k_s$, es decir, $k_u = k_t + (n-4)k_s$. Pero $k_u = k_t + (n-4)k_s$ es imposible pues la graduación tiene longitud máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } 1 + a_1 = 0}$ la nueva base viene dada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \widetilde{x_s}, \\
y_1 &= \widetilde{x_t}, \\
y_{i+1} &= [y_0, y_i], \quad 1 \leq i \leq n-4, \\
y_{n-2} &= [y_{n-1}, y_{n-3}] = (1 - a_1 b_0)(c_0 + c_1)x_{n-2}, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}
$$

Recurriendo a las mismas herramientas que en casos anteriores, se prueba que el álgebra $\widetilde{Q}_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ es un álgebra de Lie.

$\boxed{\textbf{Caso 3: Si } c_1 - a_1 c_0 = 0 \textbf{ y } 1 - a_1 b_0 = 0,}$ es fácil ver que no es posible obtener una base a partir de los generadores.

Concluimos que el álgebra casifiliforme obtenida al extender $Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}$ es siempre un álgebra de Lie.

$\square$

Para cerrar el estudio de las álgebras de Leibniz casifiliformes de longitud máxima, en la siguiente sección estudiaremos aquellas que se obtienen al extender las álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes graduadas naturalmente.

2.2. EXTENSIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ NO DE LIE

En este apartado de la memoria cerramos el estudio de longitud máxima de las álgebras de Leibniz casifiliformes. Para ello abordamos la clasificación de las álgebras obtenidas al extender las álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes graduadas naturalmente.

Como suele ocurrir en el estudio de estructuras algebraicas, los casos en los que la dimensión del álgebra es pequeña no suelen seguir el mismo patrón que cuando n es suficientemente grande, es por esto por lo que en el primer resultado propio de esta sección se da la clasificación de las álgebras de dimensión 4.

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra 4-dimensional de Leibniz no de Lie casifiliforme con sucesión característica $(2,2)$, de longitud máxima. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a un álgebra de la siguiente familia de álgebras:*

$$N^{1,\alpha}: \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_3, y_1] = y_4, \\ [y_1, y_3] = \alpha y_4, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Demostración: Al igual que se hará en los casos generales, para el estudio de la longitud se partirá del "*esqueleto*" de estas álgebras, es decir, del álgebra de Leibniz de dimensión 4 graduada naturalmente, cuya ley respecto de la base adaptada $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, \\ [e_3, e_1] = e_4, \\ [e_1, e_3] = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_4, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \\ [e_3, e_3] = \alpha_3 e_2 + \alpha_4 e_4, \quad \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

y el resto de productos nulos. La graduación natural de esta familia es la formada por los subespacios graduantes $L_1 = \langle e_1, e_3 \rangle$ y $L_2 = \langle e_2, e_4 \rangle$. Es fácil ver que los vectores de la base e_2 y e_4 están en el centro del álgebra.

En este caso particular, es interesante destacar que la *extensión* de esta familia graduada naturalmente coincide con la propia familia, debido a su carácter nilpotente y a la definición de graduación. Por tanto, se pasará a realizar el estudio de la longitud de la familia $\mathcal{L}$.

Consideremos los siguientes generadores, para la construcción de la nueva base adaptada, que vienen expresados como:

$$\widetilde{x}_s = e_1 + \sum_{i=2}^{4} a_i e_i \quad \text{y} \quad \widetilde{x}_t = \sum_{k=1}^{2} b_k e_k + e_3 + b_4 e_4,$$

verificándose

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] &= (1 + a_3\alpha_1 + a_3^2\alpha_3)e_2 + (a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4)e_4, \\
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] &= (\alpha_3 + b_1^2 + b_1\alpha_1)e_2 + (\alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2)e_4, \\
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] &= (b_1 + b_1a_3\alpha_1 + a_3\alpha_3)e_2 + (1 + b_1a_3\alpha_2 + a_3\alpha_4)e_4, \\
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= (b_1 + \alpha_1 + a_3\alpha_3)e_2 + (a_3b_1 + \alpha_2 + a_3\alpha_4)e_4.
\end{aligned}$$

Supongamos que $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima.

Como $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son vectores linealmente independientes, se tiene que $a_3b_1 \neq 1$.

Se pueden analizar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1 + a_3\alpha_1 + a_3^2\alpha_3 \neq 0}$ es interesante distinguir:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } \alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2 \neq 0}$ tómese la nueva base $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, cuyos vectores están definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x}_s, \\
y_2 &= [y_1, y_1], \\
y_3 &= \widetilde{x}_t, \\
y_4 &= [y_3, y_3].
\end{aligned}$$

Así, escribiendo $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$, la graduación asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{2k_t}.$$

Dicha graduación tiene longitud máxima.

Como los vectores $y_2, y_4 \in Cent(\mathcal{L})$, para conocer el resto de productos respecto a la nueva base es suficiente estudiar el operador multiplicación a derecha del resto de vectores.

Por la ley de la familia se tiene que $[y_2, y_1] = [[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s], \widetilde{x}_s] = 0$.

También se tiene que $[y_3, y_1] = 0$, ya que:

$$\begin{cases} [y_3, y_1] \in V_{k_t+k_s}, \\ k_t + k_s \notin \{k_s, k_t, 2k_s, 2k_t\} \text{ porque } k_s \neq k_t \text{ y } k_s, k_t \neq 0. \end{cases}$$

Análogamente se llega a que $[y_1, y_3] = 0$.

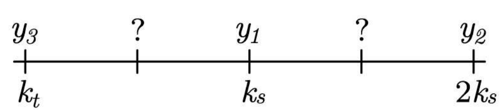
Por tanto, la ley del álgebra $\mathcal{L}$ respecto a la nueva base es:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_3, y_3] = y_4, \end{cases}$$

y el resto de productos corchetes nulos.

Por otro lado, obsérvese ahora la distancia entre los subíndices de los subespacios graduantes. Así, aparecen las siguientes posibilidades:

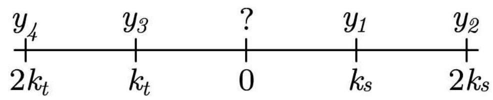
- Si $k_s > k_t > 0$, se llegaría a que $dist(2k_s, 2k_t) = 2$, como muestra la siguiente gráfica.



  Ésto contradice la conectividad de la graduación.

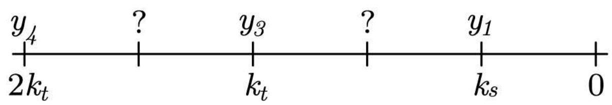
- Si $k_t > k_s > 0$, de igual forma se obtendría una graduación no conexa.

- Si $k_t < 0 < k_s$, ningún subíndice de los espacios graduantes tomaría el valor cero, por lo que la graduación no sería conexa, como se muestra a continuación:



- Si $k_s < 0 < k_t$, igual que en el caso anterior.

- Si $k_t, k_s < 0$, igualmente obtendríamos una graduación no conexa, como muestra el siguiente esquema:



Se concluye que en este caso no hay ningún álgebra que admita una graduación de longitud igual a cuatro.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } \alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2 = 0}$ entonces $1 + a_3b_1\alpha_2 + a_3\alpha_4 \neq 0$. En caso contrario se tendría

$$\begin{cases} \alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2 = 0, \\ 1 + a_3b_1\alpha_2 + a_3\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Despejando α_4 de la primera ecuación tenemos $\alpha_4 = -b_1 - b_1\alpha_2$, y sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación se tiene:

$$1 + a_3b_1\alpha_2 - a_3b_1 - a_3b_1\alpha_2 = 0,$$

es decir, $a_3b_1 = 1$, lo cual es imposible pues $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes. Por lo tanto, podemos tomar la base formada por:

$$y_1 = \widetilde{x}_s,$$
$$y_2 = [y_1, y_1],$$
$$y_3 = \widetilde{x}_t,$$
$$y_4 = [y_3, y_1],$$

cuya graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_s+k_t},$$

si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$.

Como los vectores $y_2, y_4 \in Cent(\mathcal{L})$, para conocer el resto de productos corchete respecto a la nueva base es suficiente estudiar el operador multiplicación a derecha del vector y_3.

Se tiene que $[y_1, y_3] = Ay_4$, ya que $[y_3, y_1], [y_1, y_3] \in V_{k_t+k_s}$.

Además se puede asegurar que $[y_3, y_3] = 0$ por nilpotencia.

Se obtiene así la ley de la familia:

$$N^{1,\alpha} : \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_3, y_1] = y_4, \\ [y_1, y_3] = \alpha y_4, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

$N^{1,\alpha}$ tiene longitud máxima, no hay más que tomar la graduación

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \text{ con } V_1 = \langle y_3 \rangle, V_2 = \langle y_1 \rangle, V_3 = \langle y_4 \rangle \text{ y } V_4 = \langle y_2 \rangle.$$

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_3\alpha_1 + a_3^2\alpha_3 = 0}$ podemos distinguir los siguientes casos:

Caso 2.1: Si $\alpha_3 + b_1^2 + b_1\alpha_1 \neq 0$

Caso 2.1.1: Si $a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4 \neq 0$ tomamos la base formada por:

$$y_1 = \widetilde{x_s},$$
$$y_3 = \widetilde{x_t},$$
$$y_2 = [y_3, y_3],$$
$$y_4 = [y_1, y_1].$$

Si $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$ se obtiene la graduación $V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{2k_t}$. Nótese que este caso es imposible ya que no hay valores admisibles para k_s y k_t tal que la graduación no tenga espacios nulos, siendo así la graduación no conexa.

Caso 2.1.2: Si $a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4 = 0$ podemos distinguir:

Caso 2.1.2.1: Si $1 + a_3b_1\alpha_2 + a_3\alpha_4 \neq 0$ la nueva base tomada sería

$$y_1 = \widetilde{x_s},$$
$$y_3 = \widetilde{x_t},$$
$$y_2 = [y_3, y_3],$$
$$y_4 = [y_3, y_1].$$

Un estudio análogo al Caso 1 permite obtener la familia de álgebras de longitud máxima dada por:

$$\begin{cases} [y_3, y_3] = y_2, \\ [y_3, y_1] = y_4, \\ [y_1, y_3] = By_4, \quad \text{con } B \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de bases $y_1' = y_3, y_3' = y_1, y_4' = By_4, y_2' = y_2$ se tiene la familia $N^{1,\alpha}$.

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.2.2: Si } 1 + a_3b_1\alpha_2 + a_3\alpha_4 = 0}$ entonces $a_3b_1 + \alpha_2 + a_3\alpha_4 \neq 0$. En caso contrario tendríamos:

$$[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] = 0,$$
$$[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] = (\alpha_3 + b_1^2 + b_1\alpha_1)e_2 + (\alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2)e_4,$$
$$[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1 + a_3b_1\alpha_1 + a_3\alpha_3)e_2,$$
$$[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (b_1 + \alpha_1 + a_3\alpha_3)e_2,$$

por lo que no se podría generar el vector y_4 en la nueva base.

Así, podemos tomar la base formada por los siguientes vectores:

$$y_1 = \widetilde{x}_s,$$
$$y_3 = \widetilde{x}_t,$$
$$y_2 = [y_3, y_3],$$
$$y_4 = [y_1, y_3].$$

Un estudio análogo al Caso 1 permite obtener la familia de álgebras de longitud máxima:

$$\begin{cases} [y_3, y_3] = y_2, \\ [y_1, y_3] = y_4, \\ [y_3, y_1] = By_4, \quad \text{con } B \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Es trivial ver que esta familia es isomorfa a $N^{1,\alpha}$ sin más que considerar el cambio de base dado por $y_1' = y_3$, $y_3' = y_1$, $y_2' = y_2$ e $y_4' = y_4$.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } \alpha_3 + b_1^2 + b_1\alpha_1 = 0}$ se pueden destacar los siguientes subcasos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.2.1: Si } b_1 + a_3b_1\alpha_1 + a_3\alpha_3 \neq 0}$

$\boxed{\textbf{Caso 2.2.1.1: Si } a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4 \neq 0}$ tomamos la nueva base $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, cuyos vectores son:

$$y_1 = \widetilde{x}_s,$$
$$y_3 = \widetilde{x}_t,$$
$$y_2 = [y_3, y_1],$$
$$y_4 = [y_1, y_1].$$

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$ se obtiene la graduación

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_t} \oplus V_{2k_s},$$

que suponemos conexa y de longitud 4.

Como $y_2, y_4 \in Cent(\mathcal{L})$, basta estudiar el operador multiplicador a derecha R_{y_3} para conocer la ley del álgebra respecto a la nueva base.

Por las propiedades de la graduación sabemos que $[y_3, y_1], [y_1, y_3] \in V_{k_t+k_s}$, por lo tanto podemos escribir:

$$[y_1, y_3] = Ay_2 \text{ con } A \in \mathbb{C}.$$

Además, se puede asegurar que $[y_3, y_3] = 0$ por nilpotencia.

Se obtiene así la familia de álgebras definida por los productos:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = y_4 \\ [y_3, y_1] = y_2 \\ [y_1, y_3] = Cy_2 \quad \text{con } C \in \mathbb{C} \end{cases}$$

que tiene longitud máxima, lo cual es trivial sin más que considerar la graduación

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \text{ con } V_1 = \langle y_3 \rangle, V_2 = \langle y_1 \rangle, V_3 = \langle y_2 \rangle \text{ y } V_4 = \langle y_4 \rangle.$$

Haciendo el cambio de base $y_2' = y_4, y_4' = y_2$ y no modificando los generadores, es trivial ver que esta familia es isomorfa a $N^{1,\alpha}$.

Caso 2.2.1.2: Si $a_3(\alpha_2 + 1 + a_3\alpha_4) = 0$ entonces $\alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2 \neq 0$. En caso contrario los únicos vectores que podrían generar la base serían $[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t]$ y $[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s]$. Así, la graduación asociada sería

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+k_s},$$

que no cumple las condiciones de una graduación de longitud máxima.

Como los vectores $[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s]$ y $[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t]$ juegan un papel simétrico en esta familia de álgebras de Leibniz, los razonamientos y resultados de este caso son análogos a los obtenido en el Caso 2.2.1.1, intercambiando los papeles de $\widetilde{x}_s$ por $\widetilde{x}_t$. Así se obtiene la familia de álgebras de longitud máxima:

$$\begin{cases} [y_3, y_3] = y_4, \\ [y_3, y_1] = y_2, \\ [y_1, y_3] = Cy_2, \text{ con } C \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Sin más que considerar el cambio de base $y_i' = y_1$, $y_2' = y_4$, $y_3' = y_3$ e $y_4' = y_2$, se prueba que la familia obtenida es isomorfa a $N^{1,\alpha}$.

Caso 2.2.2: Si $b_1 + a_3b_1\alpha_1 + a_3\alpha_3 = 0$ entonces $b_1 + \alpha_1 + a_3\alpha_3 \neq 0$. En caso contrario tendríamos:

$$\begin{aligned} [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] &= (a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4)e_4, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] &= (\alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2)e_4, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] &= (1 + a_3b_1\alpha_2 + a_3\alpha_4)e_4, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= (a_3b_1 + \alpha_2 + a_3\alpha_4)e_4, \end{aligned}$$

siendo imposible generar todos los vectores de la base.

Caso 2.2.2.1: Si $a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4 \neq 0,$ es este caso, análogamente a los casos anteriores, se obtiene una familia de álgebras de Leibniz casifiliformes de longitud máxima cuya ley expresada respecto de la base formada por los vectores $y_1 = \widetilde{x}_s$, $y_3 = \widetilde{x}_t$,

$y_2 = [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t]$ e $y_4 = [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s]$ es:

$$\begin{cases} [y_1, y_3] = y_2, \\ [y_3, y_1] = Dy_2, \qquad \text{con } D \in \mathbb{C}, \\ [y_1, y_1] = y_4. \end{cases}$$

Dicha familia es isomorfa a $N^{1,\alpha}$. Para probarlo es suficiente considerar el cambio de base dado por $y_2' = y_4$, $y_4' = y_2$ e $y_i' = y_i$ con $i = 1, 3$.

Caso 2.2.2.2: Si $a_3\alpha_2 + a_3 + a_3^2\alpha_4 = 0$ entonces $\alpha_4 + b_1 + b_1\alpha_2 \neq 0$. En caso contrario, sería imposible generar una base que de lugar a una graduación de longitud máxima, ya que la dimensión del subespacio $V_{k_t+k_s}$ sería 2.

Así, análogamente a los casos anteriores, se obtiene una famila de álgebras de Leibniz casifiliformes de longitud máxima, cuya ley expresada respecto de la base formada por los vectores $y_1 = \widetilde{x}_s$, $y_3 = \widetilde{x}_t$, $y_2 = [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t]$ e $y_4 = [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t]$ es:

$$\begin{cases} [y_1, y_3] = y_2, \\ [y_3, y_1] = Ey_2, \qquad \text{con } E \in \mathbb{C}, \\ [y_3, y_3] = y_4. \end{cases}$$

Es fácil probar que la familia obtenida es isomorfa a $N^{1,\alpha}$.

□

Para finalizar con esta sección de la memoria haremos, a continuación, el estudio de las álgebras n-dimensionales de Leibniz no de Lie casifiliformes de logitud máxima para $n \geq 5$. La siguiente proposición muestra la estructura de dichas álgebras, tanto las de primer tipo como las de segundo tipo (ver sección de preliminares).

Proposición 2.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie casifiliforme con sucesión característica $(n-2,2)$ de dimensión n, con $n \geq 5$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las álgebras de las siguientes familias, no isomorfas entre sí:*

$\widetilde{NG1}$ (*si n es par*) :

$$\begin{cases}
[e_1,e_1]=e_2, & \\
[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\leq i\leq n-1,\\
[e_1,e_3]=\lambda e_2-e_4+\mu_n e_n, & \lambda\in\mathbb{C},\\
[e_3,e_3]=\mu e_2+\gamma_n e_n, & \mu,\gamma\in\mathbb{C},\\
[e_1,e_i]=-e_{i+1}+\gamma_{i,n}e_n, & 4\leq i\leq n-1, \quad \gamma_{i,n}\in\mathbb{C},\\
[e_2,e_i]=z_ie_n, \quad i\neq 2,n, & z_i\in\mathbb{C},\\
[e_i,e_4]=(*)e_{i+3}+\cdots+(*)e_n, & 1\leq i\leq n-3,\ i\neq 4,\\
[e_4,e_i]=(*)e_{i+3}+\cdots+(*)e_n, & 1\leq i\leq n-3,\ i\neq 4,\\
[e_4,e_4]=(*)e_5+\cdots+(*)e_n, & \\
[e_i,e_j]=(*)e_{i+j+1}+(*)e_{i+j+2}+\cdots+(*)e_n, & 3\leq i,j\leq n-4,\ (i,j)\neq(3,3),\ i,j\neq 4.
\end{cases}$$

$\widetilde{NG2}$ (*si n es impar*) :

$$\begin{cases}
[e_1,e_1]=e_2+\alpha_n e_n, & \alpha_n\in\mathbb{C},\\
[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\leq i\leq n-1,\\
[e_1,e_3]=\lambda e_2-e_4+(*)e_n, & \lambda\in\mathbb{C},\\
[e_3,e_3]=\mu e_2+(*)e_n, & \mu\in\mathbb{C},\\
[e_1,e_i]=-e_{i+1}+(*)e_n, & 4\leq i\leq n-1,\\
[e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^ie_n, & 3\leq i\leq n-1,\\
[e_i,e_4]=(*)e_{i+3}+\cdots+(*)e_n, & 1\leq i\leq n-3,\ i\neq 4,\\
[e_4,e_i]=(*)e_{i+3}+\cdots+(*)e_n, & 1\leq i\leq n-3,\ i\neq 4,\\
[e_4,e_4]=(*)e_5+\cdots+(*)e_n, & \\
[e_i,e_j]=(*)e_{i+j+1}+(*)e_{i+j+2}+\cdots+(*)e_n, & 3\leq i,j\leq n-4,\ (i,j)\neq(3,3), i,j\neq 4,\ i+j\neq n+2.
\end{cases}$$

$\widetilde{NG3}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \alpha \in \{0, 1\}, \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \beta \in \mathbb{C}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \gamma \in \mathbb{C}, \\ [e_i, e_{n-1}] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_n, e_{n-1}] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}. \end{cases}$$

$\widetilde{NG4}$:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [e_{n-1}, e_n] = e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [e_i, e_j] = (*)e_{i+j+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i, j \leq n-2, \\ [e_i, e_{n-1}] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [e_n, e_{n-1}] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [e_j, e_n] = (*)e_5 + \cdots + (*)e_{n-2}, & j = 2, 5, \\ [e_i, e_n] = (*)e_{i+3} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 3 \leq i \leq n-2, \\ [e_n, e_n] = (*)e_5 + \cdots + (*)e_{n-2}. \end{cases}$$

siendo $(*)$ *las correspondientes constantes de estructura y el resto de productos nulos.*

Demostración: Estas familias de álgebras de Leibniz casifiliformes han sido obtenidas directamente a partir de las graduadas naturalmente (ver la Proposición 1.1 de los preliminares) y como consecuencia de ello, todas las graduaciones que se consideran en esta demostración son las graduaciones naturales. En la demostración se va a detallar únicamente el primer caso, es decir, se va a desarrollar la obtención de la familia $\widetilde{NG1}$, ya que las herramientas y argumentos usados en los demás casos son totalmente análogos.

- Obtención de $\widetilde{NG1}$

  Extendamos, de forma natural, la familia de álgebras:

$$NG1 = \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4, & \\ [e_3, e_3] = \mu e_2, & \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

  cuya graduación natural viene dada por:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_{n-1} \oplus L_{n-2}$$

  donde

$$\begin{aligned} L_1 &= \langle e_1, e_3 \rangle, \\ L_2 &= \langle e_2, e_4 \rangle, \\ L_i &= \langle e_{i+2} \rangle, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

  La *extensión* de dicha familia esta definida por:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_2 + \alpha_5 e_5 + \cdots + \alpha_n e_n, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_n, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n, & \\ [e_3, e_3] = \mu e_2 + \mu_5 e_5 + \cdots + \mu_{n-1} e_{n-1} + (*)e_n, & \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_n, & 4 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, e_j] = (*)e_{i+j+1} + (*)e_{i+j+2} + \cdots + (*)e_n, & 2 \leq i, j \leq n-1, \ (i,j) \neq (3,3), \end{cases}$$

  siendo $(*)$ los correspondientes coeficientes de los productos corchetes, que no se especifican por no ser relevantes para nuestro estudio.

Por las propiedades de la familia se verifica que $e_2 \in R(\widetilde{NG1})$, $e_n \in Cent(\widetilde{NG1})$ y $\{e_1, e_3, \dots, e_{n-1}\} \notin R(\widetilde{NG1})$.

Los parámetros α_i con $4 \leq i \leq n-1$ son nulos, como se prueba a continuación:

$[[e_1, e_1], e_1] = [e_2 + \alpha_5 e_5 + \cdots + \alpha_n e_n, e_1] = \alpha_5 e_6 + \cdots + \alpha_{n-1} e_n$

$\underbrace{[[e_1, e_1], \dots, e_1]}_{(n-4)-veces} = \alpha_5 e_{n-1} + \alpha_6 e_n$

Como $\underbrace{[[e_1, e_1], \dots, e_1]}_{(n-4)-veces} \in R(\widetilde{NG1})$, $e_n \in R(\widetilde{NG1})$, y $e_{n-1} \notin R(\widetilde{NG1})$, entonces necesariamente se verifica que $\alpha_5 = 0$.

Haciendo el mismo razonamiento $(n-4)$ veces, se obtiene que $\alpha_i = 0$ con $6 \leq i \leq n-1$. Si hacemos el mismo razonamiento con e_3 se prueba que $\mu_i = 0$ con $5 \leq i \leq n-1$, es decir

$$[e_3, e_3] = \mu e_2 + (*) e_n.$$

Por tanto, la familia se puede reescribir como:

$$\begin{cases}
[e_1, e_1] = e_2 + \alpha_n e_n, & \\
[e_i, e_1] = e_{i+1} + (*) e_{i+2} + \cdots + (*) e_n, & 3 \leq i \leq n-1, \\
[e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4 + (*) e_5 + \cdots + (*) e_n, & \\
[e_3, e_3] = \mu e_2 + (*) e_n, & \\
[e_1, e_i] = -e_{i+1} + (*) e_{i+2} + \cdots + (*) e_n, & 4 \leq i \leq n-1, \\
[e_i, e_j] = (*) e_{i+j-1} + (*) e_{i+j} + \cdots + (*) e_n, & 2 \leq i, j \leq n-1, \ (i,j) \neq (3,3).
\end{cases}$$

Consideremos el siguiente cambio de base:

$$\begin{aligned}
e'_1 &= e_1, \\
e'_2 &= e_2 + \alpha_n e_n, \\
e'_{i+1} &= [e'_i, e'_1], \quad 3 \leq i \leq n-1.
\end{aligned}$$

Obsérvese que $e'_2 \in R(\widetilde{NG1})$ y por tanto $e'_i \in R(\widetilde{NG1})$ con $3 \leq i \leq n$.

Si se escribe

$$[e'_1, e'_i] = -e'_{i+1} + \gamma_{i,i+2}e'_{i+2} + \cdots + \gamma_{i,n}e'_n \text{ con } 4 \leq i \leq n-1,$$

como

$$\begin{cases} [e'_i, e'_1] + [e'_1, e'_i] = \gamma_{i,i+2}e'_{i+2} + \cdots + \gamma_{i,n}e'_n, \\ [e'_i, e'_1] + [e'_1, e'_i] \in R(\widetilde{NG1}), \end{cases}$$

multiplicando suficientes veces a la derecha por e'_1, como anteriormente, se obtiene

$$\gamma_{i,i+2} = \cdots = \gamma_{i,n-1} = 0 \text{ para } 4 \leq i \leq n-1.$$

De forma similar para $[e'_3, e'_1] + [e'_1, e'_3]$, se obtiene $[e'_1, e'_3] = \lambda e'_2 - e'_4 + (*)e'_n$.

Un razonamiento análogo para e'_2 permite obtener $[e'_2, e'_1] = (*)e'_n$. De esta forma obtenemos la familia $\widetilde{NG1}$ del enunciado.

- Obtención de $\widetilde{NG2}$

  Sea el álgebra graduada naturalmente:

$$NG2 = \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_1, e_3] = \lambda e_2 - e_4, & \\ [e_3, e_3] = \mu e_2, & \\ [e_1, e_i] = -e_{i+1}, & 4 \leq i \leq n-1, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_n, & 3 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

  con $L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-2}$ su graduación natural, donde

$$L_1 =< e_1, e_3 >, L_2 =< e_2, e_4 > \text{ y } L_i =< e_{i+2} > \text{ con } 3 \leq i \leq n-2.$$

  Un estudio similar al hecho para la familia $NG1$ permite obtener la familia $\widetilde{NG2}$.

- Obtención de $\widetilde{NG3}$

  Sea el álgebra graduada naturalmente, definida por:

$$NG3: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2 & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n & \end{cases}$$

  Su extensión, que se notará como $\widetilde{NG3}$, se obtiene de manera análoga al caso $NG1$, considerando su graduación natural $L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-2}$, donde $L_1 = \langle e_1, e_{n-1} \rangle$, $L_2 = \langle e_2, e_n \rangle$, $L_i = \langle e_i \rangle$, con $3 \leq i \leq n-2$.

- Obtención de $\widetilde{NG4}$

  Sea el álgebra graduada naturalmente

$$NG4: \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} & 1 \leq i \leq n-3 \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n & \\ [e_1, e_{n-1}] = -e_n & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = e_2 & \\ [e_{n-1}, e_n] = e_3 & \end{cases}$$

  La extensión de $NG4$ es el álgebra $\widetilde{NG4}$, obtenida de forma natural de su graduación, como en los casos anteriores.

$\square$

Nota 2.1. *Las familias $\widetilde{NG1}$ y $\widetilde{NG2}$ están formadas por álgebras de tipo II mientras que las familias $\widetilde{NG3}$ y $\widetilde{NG4}$ están formadas por álgebras de tipo I.*

En el siguiente teorema se muestra la clasificación de las álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes de longitud máxima, obtenidas al extender las correspondientes álgebras graduadas naturalmente de tipo I.

Teorema 2.5. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie n-dimensional, con $n \geq 5$, de longitud máxima cuya álgebra graduada naturalmente asociada es de tipo I. Entonces el álgebra $\mathcal{L}$ es isomorfa a una de las álgebras de las siguientes familias, no isomorfas entre sí:*

$$M^{1,\gamma}: \begin{cases} [y_1, y_1] = y_n, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-3, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = \gamma y_4, \quad \gamma \in \{0,1\}, \\ [y_i, y_{n-1}] = \gamma y_{3+i}, \quad 2 \leq i \leq n-5. \end{cases} \qquad M^{2,\lambda}: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] = y_n, \\ [y_1, y_{n-1}] = \lambda y_n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Demostración: Considérese la base adaptada $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, respecto a la cual se expresan las álgebras de Leibniz casifiliformes de la Proposición 2.1. Podemos considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } e_n \notin R(\mathcal{L})}$ entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a $\widetilde{NG4}$, verificándose que $\{e_2, e_3, \ldots, e_{n-2}\} \in R(\mathcal{L})$. Supongamos que $\mathcal{L}$ es un álgebra de longitud máxima.

Haciendo un cambio general de los generadores de la base, tenemos que:

$$\widetilde{x_s} = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i \quad \text{y} \quad \widetilde{x_t} = \sum_{k=1}^{n-2} b_k e_k + e_{n-1} + b_n e_n,$$

verificándose

$$\begin{aligned} [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (1 + a_{n-1}^2)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (1 + b_1^2)e_2 + (*)e_3 + \cdots + +(*)e_{n-2}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (b_1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 - a_{n-1}b_1)e_n, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (b_1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}b_1 - 1)e_n. \end{aligned}$$

Como $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ son vectores linealmente independientes, se tiene que $a_{n-1}b_1 \neq 1$.

Se pueden considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } 1 + a_{n-1}^2 \neq 0}$ se tiene

$$[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s], \underbrace{\widetilde{x}_s], ..., \widetilde{x}_s]]}_{(i-2)-veces} = (1 + a_{n-1}^2)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2},\ 3 \leq i \leq n-2.$$

Así, podemos tomar la nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$, definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x}_t, \\ y_n &= [y_1, y_{n-1}]. \end{aligned}$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_{n-2} & 1 & b_n \\ 0 & 1 + a_{n-1}^2 & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + a_{n-1}^2 & \ldots & (*) & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 + a_{n-1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + a_{n-1} & (*) & \ldots & (*) & 0 & 1 - a_{n-1}b_1 \end{pmatrix}$$

que trivialmente es regular.

Si tomamos $\widetilde{x}_s \in V_{k_s}$ y $\widetilde{x}_t \in V_{k_t}$, la graduación asociada a dicha base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_t},$$

que por hipótesis, tiene máxima longitud. Esto implica que la graduación verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} 1.\ k_t \neq k_s \\ 2.\ \text{ningún subespacio puede ser el subespacio nulo,} \\ 3.\ k_s \neq 0 \neq k_t \text{ por nilpotencia,} \\ 4.\ \text{todos los subíndices son distintos entre sí.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Por construcción de la base se tienen los siguientes productos:

$$\begin{aligned}[y_i, y_1] &= y_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-3,\\ [y_1, y_{n-1}] &= y_n.\end{aligned}$$

A continuación calculamos los restantes productos, expresados respecto a la nueva base.

De las siguientes afirmaciones

$$\begin{cases} y_n \notin R(\mathcal{L}),\\ [y_1, y_{n-1}] + [y_{n-1}, y_1] \in R(\mathcal{L}),\\ [y_1, y_{n-1}] = y_n,\\ [y_{n-1}, y_1] = Ay_n,\end{cases}$$

se deduce que $A = -1$.

Además, como se verifican las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_1] = [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-1} + (1 - a_{n-1}b_1)e_n,\\ [y_1, y_{n-1}] = [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (b_1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-1} + (a_{n-1}b_1 - 1)e_n,\\ [y_{n-1}, y_1] = -[y_1, y_{n-1}],\end{cases}$$

se obtiene $b_1 = -a_{n-1}$.

Como $a_{n-1} = -b_1$ y $a_{n-1}b_1 \neq 1$, entonces $a_{n-1}^2 \neq -1$ y por tanto

$[y_{n-1}, y_n] = -(a_{n-1}^2 + 1)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_n,$ es decir, $[y_{n-1}, y_n] = By_3$ con $B \neq 0$.

Por otro lado, por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ se tiene:

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_n] \in V_{2k_t+k_s},\\ y_3 \in V_{3k_s},\\ V_{2k_t+k_s} = V_{3k_s},\end{cases}$$

así $k_t = k_s$, lo cual es imposible por nilpotencia.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } 1 + a_{n-1}^2 = 0}$ podemos escribir

$$\begin{cases} [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 - a_{n-1}b_1)e_n \neq 0, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (b_1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}b_1 - 1)e_n \neq 0. \end{cases}$$

Como $[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] - [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + 2(1 - a_{n-1}b_1)e_n$ pertenecen al ideal $R(\mathcal{L})$ y $e_n \notin R(\mathcal{L})$, se tiene que $1 - a_{n-1}b_1 = 0$, lo cual es imposible.

Por tanto, bajo las hipótesis consideradas, el álgebra $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } e_n \in R(\mathcal{L})}$ $\mathcal{L}$ is isomorfa a $\widetilde{NG3}$ y por lo tanto $R(\mathcal{L})$ está generado por $\{e_2, e_3, \ldots, e_{n-2}, e_n\}$. Recordemos que la graduación natural de $NG3$ es

$$\langle e_1, e_{n-1}\rangle \oplus \langle e_2, e_n\rangle \oplus \langle e_3\rangle \oplus \cdots \oplus \langle e_{n-2}\rangle.$$

Así $\mathcal{L}$ está definida por los productos:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n + \alpha e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_1, e_{n-1}] = \beta e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_{n-1}, e_{n-1}] = \gamma e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_i, e_{n-1}] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_n, e_{n-1}] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}. & \end{cases}$$

Tomando de nuevo los siguientes generadores:

$$\widetilde{x}_s = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i \quad \text{y} \quad \widetilde{x}_t = \sum_{k=1}^{n-2} b_k e_k + e_{n-1} + b_n e_n,$$

se obtienen los productos:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] &= (1 + a_{n-1}\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] &= (b_1^2 + b_1\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (b_1 + b_1\beta + \gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] &= (b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= b_1(1 + a_{n-1}\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[[[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s], \underbrace{\widetilde{x}_s], \ldots, \widetilde{x}_s]]}_{(i-2)-veces} &= (1 + a_{n-1}\alpha)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2},\ 3 \leq i \leq n-2\\
[[[[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_t], \ldots, \widetilde{x}_t]]}_{(i-2)-veces} &= b_1^{i-1}(b_1 + \alpha)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2},\ 3 \leq i \leq n-2.
\end{aligned}
$$

Como $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes, se tiene que $a_{n-1}b_1 \neq 1$.

Considérense los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } 1 + a_{n-1}\alpha = 0}$ los productos corchete entre los generadores se pueden reescribir como:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] &= (b_1^2 + b_1\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (b_1 + b_1\beta + \gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] &= (b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= b_1(b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma)e_n.
\end{aligned}
$$

Para poder hacer el cambio de base tenemos que considerar las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.1: Si } b_1(b_1 + \alpha) \neq 0}$ se pueden distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.1.1: Si } a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \neq 0}$ tomamos la nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ definida por:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x}_s, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x}_t, \\
y_2 &= [y_{n-1}, y_{n-1}], \\
y_i &= [y_{i-1}, y_{n-1}], \quad 3 \leq i \leq n-2, \\
y_n &= [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s],
\end{aligned}
$$

con la matriz del cambio de base:

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
0 & b_1(b_1+\alpha) & (*) & \dots & (*) & 0 & b_1 + b_1\beta + \gamma \\
0 & 0 & b_1^2(b_1+\alpha) & \dots & (*) & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & b_1^{n-3}(b_1+\alpha) & 0 & 0 \\
0 & 0 & (*) & \dots & (*) & 0 & a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \\
b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-2} & 1 & b_n
\end{pmatrix}
$$

Es fácil ver, por las restricciones consideradas, que dicha matriz es regular.

Supongamos que $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_{n-1} \in V_{k_t}$, así la graduación asociada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_t} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_t} \oplus V_{2k_s},$$

que tiene longitud máxima.

Por la ley del álgebra tenemos:

$$[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1+\alpha)e_2 + (*)e_3 + ... + (*)e_n, \text{ es decir } [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = Ay_2 \text{ con } A \neq 0.$$

Por otro lado, por la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ se tienen las siguientes afirmaciones:

$$
\begin{cases}
[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] \in V_{k_t+k_s}, \\
y_2 \in V_{2k_t}, \\
V_{k_t+k_s} = V_{2k_t}.
\end{cases}
$$

Gracias a las propiedades (2.5) se tiene $2k_t = k_t + k_s$, es decir, $k_t = k_s$, lo cual es imposible por nilpotencia.

Caso 2.1.1.2: Si $a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma = 0$ podemos distinguir:

Caso 2.1.1.2.1: Si $a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma \neq 0,$ así:

$$\begin{cases} [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = A[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \qquad \text{con } A \neq 0, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (*)e_n, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (*)e_n, \end{cases}$$

es decir, $b_1 + \alpha = 0$, llegando a contradicción.

Caso 2.1.1.2.2: Si $a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma = 0,$ en este caso tenemos las restricciones siguientes:

$$\begin{cases} a_{n-1}\alpha + 1 = 0, \\ a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma = 0, \\ a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma = 0, \end{cases}$$

lo que implica $a_{n-1}b_1 - 1 = 0$. Esto es imposible pues $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes.

Caso 2.1.2: Si $b_1(b_1 + \alpha) = 0,$ en este caso $b_1 = 0$, pues si $b_1 + \alpha = 0$ se tendría que $1 + a_{n-1}\alpha = 0$ y por tanto $a_{n-1}b_1 = 0$, que es imposible.

Los productos corchete de los generadores se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_s] &= (*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+(a_{n-1}\beta+a_{n-1}+a_{n-1}^2\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_t,\widetilde{x}_t] &= (*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+\gamma e_n,\\
[\widetilde{x}_t,\widetilde{x}_s] &= \alpha e_2+(*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+(1+a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t] &= (*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+(\beta+a_{n-1}\gamma)e_n.
\end{aligned}$$

Como $[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t]=A[\widetilde{x}_t,\widetilde{x}_s]$, entonces $\beta+a_{n-1}\gamma=0$, pudiendo reescribirlos como:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_s] &= (*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+a_{n-1}e_n,\\
[\widetilde{x}_t,\widetilde{x}_t] &= (*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+\gamma e_n,\\
[\widetilde{x}_t,\widetilde{x}_s] &= \alpha e_2+(*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+(1+a_{n-1}\gamma)e_n,\\
[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t] &= (*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}.
\end{aligned}$$

Considérese la nueva base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x}_s,\\
y_{n-1} &= \widetilde{x}_t,\\
y_2 &= [y_{n-1},y_1],\\
y_i &= [y_{i-1},y_1], \quad 3\leq i\leq n-2,\\
y_n &= [y_1,y_1]
\end{aligned}$$

y la graduación asociada: $V_{k_s}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus V_{k_t+2k_s}\cdots\oplus V_{k_t+(n-3)k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{2k_s}$, con $y_1\in V_{k_s}$ e $y_{n-1}\in V_{k_t}$.

Tenemos, por la estructura de $\mathcal{L}$, que $[y_{n-1},y_{n-1}]=[\widetilde{x}_t,\widetilde{x}_t]=(*)e_3+\cdots+(*)e_{n-2}+\gamma e_n$, es decir

$$[y_{n-1},y_{n-1}]=Ay_m \text{ con } A\in\mathbb{C}.$$

Se puede asegurar que $m \neq 2$ por la ley del álgebra y $m \notin \{1, n-1\}$ por las propiedades de la sucesión central descendente.

Por la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ y por la graduación considerada tenemos que $[y_{n-1}, y_{n-1}] \in V_{2k_t}$.

Además, hemos obtenido que $[y_{n-1}, y_{n-1}] = Ay_m$ con $3 \leq m \leq n-2$ ó $m = n$.

Si $m = n$ entonces:

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_{n-1}] = Ay_n, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] \in V_{2k_t}, \\ y_n \in V_{2k_s}, \end{cases}$$

así, $k_t = k_s$, lo cual es imposible por nilpotencia. Se tiene por tanto que $A = 0$.

Si $3 \leq m \leq n-2$ entonces:

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_{n-1}] = Ay_m, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] \in V_{2k_t}, \\ y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s}, \end{cases}$$

es decir, $k_t = (m-1)k_s$. Veamos los valores admisibles de m.

- Si $m = 3$ entonces se tiene $k_t = 2k_s$, contradiciendo las propiedades (2.5).

- Si $5 \leq m \leq n-3$ entonces se tiene $k_t = (m-1)k_s$ y la graduación se puede reescribir como

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{(m-1)k_s} \oplus V_{mk_s} \oplus V_{(m+1)k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(m+n-4)k_s}.$$

  Así el subespacio graduante $V_{3k_s} = \langle 0 \rangle$, lo cual es imposible.

- Si $m = 4$ podemos escribir $[y_{n-1}, y_{n-1}] = \delta y_4$ con $\delta \in \mathbb{C}$.

  Usando la identidad de Leibniz se tiene que:

$$\begin{aligned} &[y_i, y_{n-1}] = \delta y_{i+1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-5, \\ &[y_n, y_{n-1}] = 0. \end{aligned}$$

Finalmente basta calcular el producto corchete $[y_n, y_1]$ para conocer la ley de $\mathcal{L}$ respecto de la nueva base, ya que $\{y_2, y_3, \ldots, y_{n-2}, y_n\} \subseteq R(\mathcal{L})$ e $y_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$.

Por construcción tenemos

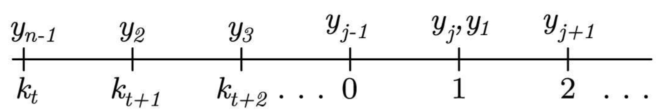
$$[y_n, y_1] = [(*)e_3+(*)e_4+\cdots+(*)e_{n-2}+a_{n-1}e_n, e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n] = (*)e_4+\cdots+(*)e_{n-2}.$$

Esto implica que $[y_n, y_1] = By_f$ con $4 \leq f \leq n-2$ y $B \in \mathbb{C}$. Como

$$\begin{cases} y_n \in V_{2k_s}, \\ y_1 \in V_{k_s}, \\ [y_n, y_1] \in V_{3k_s}, \\ y_m \in V_{k_t+(f-1)k_s} \text{ con } 4 \leq f \leq n-2, \end{cases}$$

tenemos, en términos de la graduación, que $k_t = (4-f)k_s$. Veamos los valores admisibles de f.

- Si $f = 4$ se obtiene $k_t = 0$, llegando así a contradicción.
- Si $5 \leq f \leq n-2$ entonces $-k_s \leq k_t \leq (6-n)k_s$. Así, siempre existe un $j \neq 1$ tal que $k_t + k_s \leq j \leq k_t + (n-3)k_s$, es decir, $y_j \in V_{k_s}$. Por tanto $V_{k_s} = \langle y_1, y_j \rangle$, como muestra la siguiente gráfica, contradiciendo así la longitud máxima de la graduación.



Concluimos que $[y_n, y_1] = 0$.

Nótese que si $\delta \neq 0$, se puede tomar $\delta = 1$ sin pérdida de generalidad, haciendo un simple cambio de base. Así, el álgebra $\mathcal{L}$ es isomorfa a un álgebra de la familia $M^{1,\gamma}$ con $\delta = 0$ ó $\delta = 1$.

$M^{1,0}$ y $M^{1,1}$ son álgebras no isomorfas entre sí, pues

$$R(M^{1,0}) = \{y_2, \ldots, y_{n-1}\} \;\text{ y }\; R(M^{1,1}) = \{y_2, \ldots, y_{n-2}\},$$

es decir,

$$dim(R(M^{1,0})) \neq dim(R(M^{1,1})).$$

Por último basta tomar la graduación

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n, \text{ con } V_1 = \langle y_1 \rangle, V_2 = \langle y_n \rangle, V_3 = \langle y_{n-1} \rangle \text{ y } V_i = \langle y_{i-2} \rangle \text{ si } 4 \leq i \leq n,$$

para comprobar que efectivamente el álgebra $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima.

- Si $m = n-2$ y $n > 6$, análogamente llegaríamos a contradicción. Si $n = 6$ estamos de nuevo en el caso $m = 4$.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } 1 + a_{n-1}\alpha \neq 0}$ se pueden considerar los siguientes vectores:

$$\underbrace{[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s], \ldots, \widetilde{x}_s]]}_{i-veces} = (1 + a_{n-1}\alpha)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_n, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2,$$

y hacer las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 2.2.1: Si } b_1 + b_1\beta + \gamma \neq 0 \textbf{ y } det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}(\beta + 1 + a_{n-1}\gamma) \\ b_1(b_1 + \alpha) & b_1 + b_1\beta + \gamma \end{pmatrix} \neq 0}$ considérese la nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$, definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x}_t, \\ y_n &= [y_{n-1}, y_{n-1}]. \end{aligned}$$

Supongamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_{n-1} \in V_{k_t}$, así se obtiene la graduación de longitud máxima:

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_t}.$$

Como $det \begin{pmatrix} 1+a_{n-1}\alpha & a_{n-1}(\beta+1+a_{n-1}\gamma) \\ b_1(b_1+\alpha) & b_1+b_1\beta+\gamma \end{pmatrix} \neq 0$, se afirma que

$$a_{n-1}\gamma(\alpha+b_1) \neq 0 \quad (3).$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{cases} [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1+\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1+a_{n-1}b_1\beta+a_{n-1}\gamma)e_n, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] \in V_{k_t+k_s}, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] = b_1(b_1+\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (b_1+b_1\beta+\gamma)e_n, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] \in V_{2k_t}. \end{cases}$$

Por construcción de la base sólo es posible que $[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = Ay_2$ con $A \neq 0$ (por (3)) ó $[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = By_n$ con $B \neq 0$ (por (3)), pero en cualquiera de los dos casos se llegaría, en términos de la graduación, a que $k_t = k_s$, contradiciendo así la hipótesis de longitud máxima.

Caso 2.2.2: Si $det \begin{pmatrix} 1+a_{n-1}\alpha & a_{n-1}(\beta+1+a_{n-1}\gamma) \\ b_1(b_1+\alpha) & b_1+b_1\beta+\gamma \end{pmatrix} = 0$ es necesario tomar las siguientes restricciones para construir la nueva base. Nótese además que englobaremos los casos $b_1+b_1\beta+\gamma = 0$ y $b_1+b_1\beta+\gamma \neq 0$.

Caso 2.2.2.1: Si $1+a_{n-1}b_1\beta+a_{n-1}\gamma \neq 0$ **y** $det \begin{pmatrix} 1+a_{n-1}\alpha & a_{n-1}(\beta+1+a_{n-1}\gamma) \\ b_1+\alpha & 1+a_{n-1}b_1\beta+a_{n-1}\gamma \end{pmatrix} \neq 0$ tómese $\{y_1, \ldots, y_n\}$ definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x}_t, \\ y_n &= [y_{n-1}, y_1], \end{aligned}$$

cuya graduación asociada de longitud máxima es: $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s}$, suponiendo $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_{n-1} \in V_{k_t}$.

Como $\{e_2, \ldots, e_{n-2}, e_n\} \in R(NG3)$ y $e_{n-2} \in Cent(NG3)$, se tiene trivialmente que $\{y_2, \ldots, y_{n-2}, y_n\} \in R(\mathcal{L})$ e $y_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$, por lo que solo resta calcular los operadores R_{y_1} y $R_{y_{n-1}}$ para conocer la ley del álgebra respecto de la nueva base.

Siguiendo el mismo razonamiento que en casos anteriores se obtiene

$$[y_n, y_1] = 0,\ [y_i, y_{n-1}] = 0 \text{ para } 2 \leq i \leq n-3 \text{ e } [y_n, y_{n-1}] = 0.$$

Veamos ahora que $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$.

$$[y_{n-1}, y_{n-1}] = b_1(b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (b_1 + b_1\beta + \gamma)e_n,$$

por lo tanto ocurre una de las siguientes afirmaciones

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_{n-1}] = Ay_n, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = By_2, \\ [y_{n-1}, y_{n-1}] = Cy_m \text{ con } 3 \leq m \leq n-2. \end{cases}$$

De la primera y la segunda afirmación se deduciría, usando las propiedades (2.5) y $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, que $k_t = k_s$, lo cual es imposible. Luego $A = B = 0$, además $b_1(b_1 + \alpha) = b_1 + b_1\beta + \gamma = 0$.

De la tercera afirmación se tiene que $C = 0$, en otro caso, si $C \neq 0$ entonces $2k_t = mk_s$, es decir, k_t pertenecería al intervalo $(k_s, (n-2)k_s)$, llegando así a contradicción. Luego, efectivamente, $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$.

Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{cases} [y_1, y_{n-1}] = A[y_{n-1}, y_1], \\ [y_1, y_{n-1}] = b_1(1 + a_{n-1}\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma)e_n, \\ [y_{n-1}, y_1] = (b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma)e_n, \end{cases}$$

entonces, $b_1 = 0, \gamma = 0, \alpha = 0$ y podemos reescribir los anteriores productos como:

$$[y_1, y_{n-1}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \beta e_n,$$
$$[y_{n-1}, y_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + e_n.$$

Así se deduce que

$$A = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \text{si } \beta \neq 0, \\ 0 & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

Finalmente obtenemos la familia de ley:

$$\begin{aligned} [y_i, y_1] &= y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] &= y_n, \\ [y_1, y_{n-1}] &= \lambda y_n, \quad \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

y el resto de productos nulos. Es decir, obtenemos la familia $M^{2,\lambda}$, que tiene longitud máxima, sin más que considerar la graduación

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \text{ con } V_i = \langle y_i \rangle \text{ si } 1 \leq i \leq n.$$

$\boxed{\textbf{Caso 2.2.2.2: Si } det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}(\beta + 1 + a_{n-1}\gamma) \\ b_1 + \alpha & 1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma \end{pmatrix} = 0}$ entonces podemos suponer $a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \neq 0$ y

$$det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}(\beta + 1 + a_{n-1}\gamma) \\ b_1(1 + a_{n-1}\alpha) & a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma \end{pmatrix} \neq 0.$$

En caso contrario sería imposible generar la nueva base.

Tómese la base $\{y_1, \ldots, y_n\}$, definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 2 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x}_t, \\ y_n &= [y_1, y_{n-1}]. \end{aligned}$$

Si $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_{n-1} \in V_{k_t}$, por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, se obtiene la graduación de longitud máxima: $V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s}$.

Como $det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1}\alpha & a_{n-1}\beta + a_{n-1} + a_{n-1}^2\gamma \\ b_1(1 + a_{n-1}\alpha) & a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma \end{pmatrix} \neq 0$, entonces $\beta + a_{n-1}\gamma \neq 0$.

Es trivial ver que $\{y_2, \ldots, y_{n-2}, y_n\} \in R(\mathcal{L})$ e $y_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$ ya que $\{e_2, \ldots, e_{n-2}, e_n\} \in R(NG3)$ y $e_{n-2} \in Cent(NG3)$. Resta conocer por tanto R_{y_1} y $R_{y_{n-1}}$.

Por la ley del álgebra podemos escribir:

$$\begin{aligned}[y_n, y_1] =& [(b_1 + a_{n-1}b_1\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (b_1a_{n-1} + \beta + a_{n-1}\gamma)e_n, e_1 + a_2e_2 + \\ & + \cdots + a_ne_n] = (b_1 + a_{n-1}b_1\alpha)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2},\end{aligned}$$

deduciéndose que $[y_n, y_1] = Ay_m$ con $A \in \mathbb{C}$ y $3 \leq m \leq n-2$. Como

$$\begin{cases} y_n \in V_{k_t+k_s}, \\ y_1 \in V_{k_s}, \\ y_m \in V_{mk_s} \text{ con } 3 \leq m \leq n-2, \end{cases}$$

se obtiene $2k_s + k_t = mk_s$, es decir $k_t = (m-2)k_s$, contradiciendo así las propiedades (2.5). Concluimos que $[y_n, y_1] = 0$ y por tanto $b_1 + a_{n-1}b_1\alpha = 0$.

Supóngase que $[y_i, y_{n-1}] \neq 0$ con $2 \leq i \leq n-3$. Como el producto $[y_i, y_{n-1}]$ pertenece al subespacio graduante $V_{ik_s+k_t}$ y se verifica que $ik_s + k_t \notin \{k_t, k_t + k_s, 2k_t\}$ por las propiedades (2.5), la única opción posible es $ik_s + k_t = mk_s$ con $2 \leq m \leq n-2$. Pero si $ik_s + k_t \neq mk_s$ con $2 \leq m \leq n-2$, entonces $k_t = rk_s$ donde $r \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ ó $r \in \{4-n, \ldots, -1\}$, lo que lleva a contradicción pues la graduación tendría un subespacio de dimensión dos. Concluimos que $[y_i, y_{n-1}] = 0$ para $2 \leq i \leq n-3$.

Análogamente se tiene $[y_n, y_{n-1}] = [y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$, y por tanto $b_1(b_1 + \alpha) = b_1 + b_1\beta + \gamma = 0$.

Las siguientes igualdades son ciertas:

$$\begin{cases} [y_1, y_{n-1}] = B[y_{n-1}, y_1], \\ [y_1, y_{n-1}] = b_1(1 + a_{n-1}\alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (a_{n-1}b_1 + \beta + a_{n-1}\gamma)e_n, \\ [y_{n-1}, y_1] = (b_1 + \alpha)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + (1 + a_{n-1}b_1\beta + a_{n-1}\gamma)e_n, \end{cases}$$

entonces $b_1 = 0, \gamma = 0$ y $B = \beta \neq 0$, luego necesariamente $\alpha = 0$.

Finalmente se obtiene la familia:

$$\begin{aligned} [y_i, y_1] &= y_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-3, \\ [y_{n-1}, y_1] &= \beta y_n, \quad \beta \in \mathbb{C} - \{0\}, \\ [y_1, y_{n-1}] &= y_n, \end{aligned}$$

que es isomorfa a $M^{2,\lambda}$ sin más que hacer el cambio de base $y_1' = y_1$ e $y_{n-1}' = \lambda y_{n-1}$, siendo $\lambda = \frac{1}{\beta}$.

□

El siguiente teorema cierra el estudio de longitud máxima de las álgebras de Leibniz casifiliformes n-dimensionales, con $n \geq 4$. En este resultado se prueba que al extender las álgebras n-dimensionales de Leibniz no de Lie casifiliformes de tipo II, con $n \geq 5$, existe una única familia de álgebras casifiliformes de longitud máxima.

Teorema 2.6. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie casifiliforme n-dimensional, con $n \geq 5$, de longitud máxima cuya álgebra graduada naturalmente asociada es de tipo II. Entonces el álgebra $\mathcal{L}$ es isomorfa a un álgebra de la siguiente familia:*

$$M^{3,\alpha} : \begin{cases} [y_1, y_1] = y_2, \\ [y_i, y_1] = y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_1, y_i] = -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq n-1, \\ [y_3, y_3] = \alpha y_6, \quad \alpha = 0 \text{ si } n \neq 6, \ \alpha \in \{0,1\} \text{ si } n = 6. \end{cases}$$

Demostración: Sea la base adaptada $\{e_1, \ldots, e_n\}$ respecto de la cual están expresadas las álgebras casifiliformes de la Proposición 2.1. En este caso se tiene que $e_4 \notin R(\mathcal{L})$ (ver demostración del Teorema 10 de [12]). Se pueden considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } n \textbf{ es par,}}$ $\mathcal{L}$ es isomorfa a $\widetilde{NG1}$ y por tanto se sabe que $e_2 \in R(\mathcal{L})$, $e_n \in Cent(\mathcal{L})$ y $\{e_1, e_3, \ldots, e_{n-1}\} \notin R(\mathcal{L})$.

Haciendo un cambio de base genérico a partir de sus dos generadores:

$$\widetilde{x_s} = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i \quad \text{y} \quad \widetilde{x_t} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + e_3 + \sum_{k=4}^{n} b_k e_k,$$

se tienen los productos

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (1 + a_3\lambda + a_3^2\mu)e_2 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = (b_1^2 + b_1\lambda + \mu)e_2 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] = (b_1 + a_3 b_1\lambda + a_3\mu)e_2 + (1 - a_3 b_1)e_4 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (b_1 + \lambda + a_3\mu)e_2 + (a_3 b_1 - 1)e_4 + (*)e_5 + ... + (*)e_n.$$

Por ser $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ linealmente independientes se verifica $1 - a_3 b_1 \neq 0$.

Como hemos comentado anteriormente sólo los vectores $\{e_2, e_n\} \in R(\mathcal{L})$ y por las propiedades del ideal $R(\mathcal{L})$ sabemos que $[x, x] \in R(\mathcal{L})$ para todo $x \in \mathcal{L}$. Entonces de la expresión de $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$ y $[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}]$ se deduciría que $(*)e_4 + \ldots (*)e_n \in R(\mathcal{L})$, lo cual sólo es cierto si todos los coeficientes son cero, es decir,

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (1 + a_3\lambda + a_3^2\mu)e_2 + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = (b_1^2 + b_1\lambda + \mu)e_2 + (*)e_n.$$

Es conveniente distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1 : Si } 1 + a_3\lambda + a_3^2\mu \neq 0}$ considérese la nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ definida por:

$$y_1 = \widetilde{x_s},$$
$$y_2 = [y_1, y_1],$$
$$y_3 = \widetilde{x_t},$$
$$y_i = [y_{i-1}, y_1], \quad 4 \leq i \leq n,$$

donde $y_i = (1 - b_1 e_3)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_n$ para $4 \leq i \leq n$. La matriz asociada a este cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_n \\
0 & 1+a_3\lambda+a_3^2\mu & 0 & 0 & 0 & \dots & (*) \\
b_1 & b_2 & 1 & b_4 & b_5 & \dots & b_n \\
0 & b_1+a_3b_1\lambda+a_3\mu & 0 & 1-a_3b_1 & (*) & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-a_3b_1 & \dots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-a_3b_1
\end{pmatrix}$$

Es fácil ver que es regular ya que hemos supuesto $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ linealmente independientes y $1+a_3\lambda+a_3^2\mu \neq 0$.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$ entonces $y_2 \in V_{2k_s}$ e $y_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ si $4 \leq i \leq n-2$. Así, $\mathcal{L}$ admite la graduación

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s},$$

que la suponemos de longitud máxima por las hipótesis del teorema.

Bajo estas condiciones si $b_1 \neq 0$, se puede afirmar que:

$$\begin{cases}
[y_4, y_3] = (1-a_3b_1)b_1e_5 + (*)e_6 + \cdots + (*)e_n = b_1y_5, \\
[y_4, y_3] \in V_{2k_t+k_s}, \\
y_5 \in V_{2k_s+k_t}.
\end{cases}$$

De lo que se deduce que $k_t = k_s$, por lo que la graduación no tendría máxima longitud. Entonces $b_1 = 0$.

Supóngase que $[y_3, y_3] \neq 0$. Entonces se tiene:

$$\begin{cases}
[y_3, y_3] = [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] = \mu e_2 + (*)e_n, \\
[y_3, y_3] \in V_{2k_t}.
\end{cases}$$

En este caso caben dos posibilidades, o bien $[y_3, y_3] = Ay_2$ o bien $[y_3, y_3] = Ay_n$.

Si $[y_3, y_3] = Ay_2$, se llega a que $k_t = k_s$, que es imposible pues la graduación tiene longitud máxima. Así $\mu = 0$.

Si $[y_3, y_3] = Ay_n$ se tiene que $k_t = (n-3)k_s$, entonces la graduación es conexa si $n = 6$. Se concluye por tanto que $[y_3, y_3] = 0$ si $n \neq 6$. El caso $n = 6$ se verá más adelante.

Bajo las hipótesis precedentes se tiene:

$$\begin{cases} [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] \text{ y } [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] \text{ son distintos de cero}, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = -[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s], \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = a_3\mu e_2 + e_4 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (\lambda + a_3\mu)e_2 - e_4 + (*)e_5 + \ldots + (*)e_n, \\ b_1 = \mu = 0, \end{cases}$$

de lo que se deduce que $\lambda = 0$. De esta forma, los productos de los generadores de la nueva base se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned} [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] &= e_2 + (*)e_n, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] &= (*)e_n, \\ [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] &= e_4 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n, \\ [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= -e_4 + (*)e_5 + \ldots + (*)e_n. \end{aligned}$$

Por construcción $y_i = e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_n$ para $4 \leq i \leq n$, por tanto,

$$[y_1, y_i] = -e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_n, \text{ es decir, } [y_1, y_i] = -y_{i+1} \text{ con } 4 \leq i \leq n-1.$$

Esta afirmación es también cierta para $i = 3$ ya que

$$[y_1, y_3] = [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = -[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = -[y_3, y_1].$$

Supóngase que $[y_2, y_1] \neq 0$, entonces se puede asegurar que:

$$\begin{cases} [y_2, y_1] \in V_{3k_s}, \\ 3k_s \notin \{k_s, k_t, 2k_s, k_s + k_t, k_t + 2k_s\} \text{ pues } k_s \neq k_t,\ k_t \neq 0 \text{ y } k_s \neq 0, \\ 3k_s = k_t + mk_s, \quad 3 \leq m \leq n-3, \text{ entonces } k_t = rk_s \text{ con } 6 - n \leq r \leq 0. \end{cases}$$

Así, $V_{k_t} = \langle y_3, y_r\rangle$, con $r \neq 3$, que es imposible porque la graduación tiene longitud máxima. Por tanto $[y_2, y_1] = 0$.

Análogamente se prueba que $[y_1, y_2] = 0$.

Usando la identidad de Leibniz se obtienen las siguientes igualdades:

$$[y_2, y_3] = [[y_1, y_1], y_3] + [[y_1, y_3], y_1] = y_5 - y_5 = 0,$$
$$[y_2, y_{i+1}] = [[y_2, y_{i-1}], y_1] + [[y_2, y_1], y_{i-1}] = 0 \text{ por recursión.}$$

Veamos ahora los poductos $[y_i, y_j]$ cuando $4 \leq i \leq n$ y $3 \leq j \leq n$. En ese caso, se tiene que

$$\begin{cases} y_i \in V_{k_t+(i-3)k_s}, \\ y_j \in V_{k_t+(j-3)k_s}, \\ [y_i, y_j] \in V_{2k_t+(i+j-6)k_s}, \\ 2k_t + (i+j-6)k_s \notin \{k_s, 2k_s, k_t, k_s + k_t, k_t + 2k_s\}, \\ 2k_t + (i+j-6)k_s = k_t + n_1 k_s \text{ donde } i + j - 6 < n_1 \leq n-3, \end{cases}$$

es decir, $k_t = rk_s$ con $1 \leq r \leq n-4$, entonces $k_t = rk_s$ con $1 \leq r \leq n-4$. Lo cual es posible sólo para $r = 3$. Esto quiere decir que $n_1 = i + j - 6 + 3 = i + j - 3$, por lo tanto se concluye que $[y_i, y_j] \in V_{k_t+(i+j-3)k_s} = \langle y_{i+j}\rangle$.

Por otro lado, usando la ley del álgebra se tiene:

$$[y_i, y_j] = [e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_n, e_j + (*)e_{j+1} + \cdots + (*)e_n] = (*)e_{i+j+1} + \cdots + (*)e_n,$$

lo que es contradictorio, por lo que $[y_i, y_j] = 0$ para $4 \leq i \leq n$ y $3 \leq j \leq n$.

De esta forma, se obtiene el álgebra $M^{3,0}$.

Para demostrar que dicha familia de álgebras es de longitud máxima es suficiente considerar la siguiente graduación:

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n \text{ donde } V_i =< y_i > \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

Veamos a continuación el caso $n = 6$, recordando que hemos tomado la restricción $1 + a_3\lambda + a_3^2\mu \neq 0$.

$\boxed{\textit{\textbf{Caso}}\ n = 6}$

Se considera la nueva base $\{y_1, \ldots, y_6\}$ definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_2 &= [y_1, y_1], \\ y_3 &= \widetilde{x}_t, \\ y_{i+1} &= [y_i, y_1], \text{ con } 3 \leq i \leq 5. \end{aligned}$$

Supongamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$, entonces la graduación asociada de longitud máxima es

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_t} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s}.$$

Se tiene que $[y_1, y_i] = -y_{i+1}$ con $4 \leq i \leq 5$, por la estructura del álgebra.

Siguiendo los mismos argumentos usados anteriormente, se tiene:

$$\begin{aligned} &[y_2, y_1] = 0, \\ &[y_2, y_3] = 0, \\ &[y_2, y_4] = [y_2, [y_3, y_1]] = [[y_2, y_3], y_1] - [[y_2, y_1], y_3] = 0, \text{ (por la identidad de Leibniz)} \\ &[y_3, y_3] = \alpha y_6, \text{ con } \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Se obtiene así la siguiente familia de álgebras:

$$\begin{aligned} [y_1, y_1] &= y_2, \\ [y_i, y_1] &= y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq 5, \\ [y_1, y_i] &= -y_{i+1}, \quad 3 \leq i \leq 5, \\ [y_3, y_3] &= \alpha y_6 \quad \text{con } \alpha = 0 \text{ ó } \alpha = 1, \end{aligned}$$

y el resto de productos nulos.

Nótese que para $\alpha = 0$ el álgebra está considerada en el caso anterior, por lo que se puede escribir el caso $\alpha = 1$ como un álgebra excepcional.

Para ver que $\mathcal{L}$ es de longitud máxima es suficiente considerar la siguiente graduación:

$$V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_6 \text{ donde } V_i =< y_i > \text{ con } 1 \leq i \leq 6.$$

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } 1 + a_3\lambda + a_3^2\mu = 0}$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $b_1^2 + b_1\lambda + \mu \neq 0$. En caso contrario los productos de los generadores de la nueva base se podrían escribir como

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)e_n, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)e_n, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (b_1 + a_3b_1\lambda + a_3\mu)e_2 + (1 - a_3b_1)e_4 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (b_1 + \lambda + a_3\mu)e_2 + (a_3b_1 - 1)e_4 + (*)e_5 + ... + (*)e_n.
\end{aligned}$$

Pero como $\langle \widetilde{x_s}, \widetilde{x_t} \rangle = \langle \widetilde{x_t}, \widetilde{x_s} \rangle = V_{k_t + k_s}$, sería imposible generar los $n-2$ vectores de la nueva base a partir de estos productos obteniendo una graduación conexa y de longitud n.

Considérese la nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ definida por:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s}, \\
y_3 &= \widetilde{x_t}, \\
y_2 &= [y_3, y_3], \\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 4 \leq i \leq n,
\end{aligned}$$

donde la matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_n \\
0 & b_1^2 + b_1\lambda + \mu & 0 & 0 & 0 & \ldots & (*) \\
b_1 & b_2 & 1 & b_4 & b_5 & \ldots & b_n \\
0 & b_1 + a_3b_1\lambda + a_3\mu & 0 & 1 - a_3b_1 & (*) & \ldots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 - a_3b_1 & \ldots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 - a_3b_1
\end{pmatrix}$$

El álgebra $\mathcal{L}$ escrita respecto de la nueva base admite la siguiente graduación de longitud máxima:

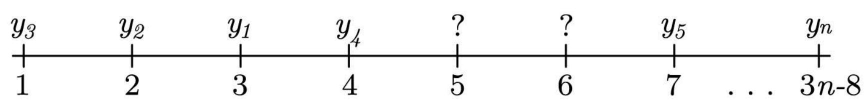
$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s},$$

considerando $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$.

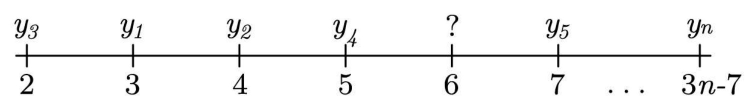
Se continua el estudio de la longitud del álgebra observando la distancia entre los subíndices de los espacios graduantes, distinguiendo para ello las siguientes posibilidades:

- $k_s > 0$, $k_t > 0$

  - Si $k_s > k_t$ y $2k_t < k_s$, por conectividad de la graduación se tiene que $dist(k_t, 2k_t) = dist(2k_t, k_s) = 1$, entonces $k_t = 1$ y $k_s = 3$, obteniendo contradicción si $n \geq 5$, (véase la siguiente gráfica para mayor aclaración).

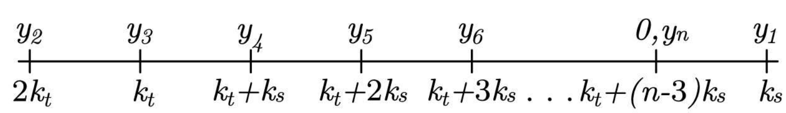


  - Si $k_s > k_t$ y $2k_t > k_s$ por conectividad de la graduación $dist(k_t, k_s) = dist(2k_t, k_s) = 1$, entonces $k_t = 2$ y $k_s = 3$, llegando a contradicción si $n \geq 5$.

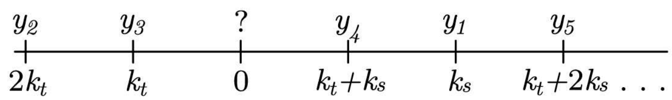


- $k_s > 0$, $k_t < 0$

  - Si $k_s + k_t < 0$ por conectividad de la graduación se tiene que $dist(k_t, k_t + k_s) = dist(2k_t, k_t) = 1$, entonces $k_t = -1$ y $k_s = 1$, obteniendo contraicción si $n \geq 5$.



- Si $k_s + k_t > 0$ por conectividad de la graduación tenemos $dist(k_t, k_t + k_s) = dist(2k_t, k_t) = 1$, entonces $k_t = -1$ y $k_s = 1$, llegando a contradicción si $n \geq 5$, como muestra la siguiente gráfica.



- Si $k_s < 0$ el estudio es análogo.

Queda probado que este álgebra no tine longitud máxima si $n \geq 5$.

Caso 2: Si n es impar entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a $\widetilde{NG2}$ y para estudiar su longitud, al igual que en casos anteriores, se tomarán los generadores de la base:

$$\widetilde{x}_s = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i \quad \text{y} \quad \widetilde{x}_t = b_1 e_1 + b_2 e_2 + e_3 + \sum_{k=4}^{n} b_k e_k.$$

Los productos de estos generadores se pueden escribir como

$$[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s] = (1 + a_3\lambda + a_3^2\mu)e_2 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t] = (b_1^2 + b_1\lambda + \mu)e_2 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_s] = (b_1 + a_3 b_1\lambda + a_3\mu)e_2 + (1 - a_3 b_1)e_4 + (*)e_5 + \cdots + (*)e_n,$$
$$[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (b_1 + \lambda + a_3\mu)e_2 + (a_3 b_1 - 1)e_4 + (*)e_5 + ... + (*)e_n.$$

Como $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes, se tiene $a_3 b_1 \neq 1$.

Se pueden considerar los siguientes casos:

Caso 2.1: Si $1 + a_3\lambda + a_3^2\mu \neq 0$ podemos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.1: Si } 1 + a_3 \neq 0}$ tomamos la nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_2 &= [y_1, y_1], \\ y_3 &= \widetilde{x}_t, \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 4 \leq i \leq n \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} y_i &= (1 - a_3 b_1)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_n, \text{ con } 4 \leq i \leq n-1, \\ y_n &= [y_{n-1}, y_1] = (1 - a_3 b_1)(1 + a_3)e_n \end{aligned}$$

y la matriz del cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 + a_3\lambda + a_3^2\mu & 0 & 0 & (*) & \ldots & (*) \\ b_1 & b_2 & 1 & b_4 & b_5 & \ldots & b_n \\ 0 & b_1 + a_3 b_1 \lambda + a_3\mu & 0 & 1 - a_3 b_1 & (*) & \ldots & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - a_3 b_1 & \ldots & (*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (1 - a_3 b_1)(1 + a_3) \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que se trata de una matriz regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$, se obtiene $y_2 \in V_{2k_s}$ e $y_i \in V_{k_t+(i-3)k_s}$ con $4 \leq i \leq n$, por lo que el álgebra $\mathcal{L}$ admite la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s}.$$

En este caso $b_1 = 0$, pues en caso contrario se tendría

$$\begin{cases} [y_4, y_3] = (a_3 b_1 - 1)b_1 e_5 + (*)e_6 * \cdots + (*)e_n = b_1 y_5, \\ [y_4, y_3] \in V_{2k_t+k_s}, \\ y_5 \in V_{2k_s+k_t}. \end{cases}$$

Esto implicaría que $k_t = k_s$ y por tanto la graduación no tendría máxima longitud.

Además se tiene que:

$$\begin{cases} [y_3, y_{n-1}] = (a_3b_1 - 1)(b_1 + 1)e_n = \frac{-(b_1+1)}{1+a_3} y_n, \\ [y_3, y_{n-1}] \in V_{2k_t+(n-4)k_s}, \\ y_n \in V_{k_t+(n-3)k_s}, \end{cases}$$

de donde se deduce que $k_t = k_s$, llegando así a contradicción.

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.2: Si } 1 + a_3 = 0,}$ como $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes podemos asegurar que $b_1 + 1 \neq 0$. Así definimos una nueva base $\{y_1, \ldots, y_n\}$ dada por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x}_s, \\ y_2 &= [y_1, y_1], \\ y_3 &= \widetilde{x}_t, \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 4 \leq i \leq n-1, \\ y_n &= [y_{n-1}, y_3], \end{aligned}$$

siendo $y_n = [y_{n-1}, y_3] = (1 - a_3b_1)(1 + b_1)e_n$ y la matriz del cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \ldots & a_n \\ 0 & 1 + a_3\lambda + a_3^2\mu & 0 & 0 & (*) & \ldots & (*) \\ b_1 & b_2 & 1 & b_4 & b_5 & \ldots & b_n \\ 0 & b_1 + a_3b_1\lambda + a_3\mu & 0 & 1 - a_3b_1 & (*) & \ldots & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - a_3b_1 & \ldots & (*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (1 - a_3b_1)(1 + b_1) \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que se trata de una matriz regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$, por la estructura de $\mathcal{L}$ y la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, se obtiene la graduación asociada de longitud máxima:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-4)k_s}.$$

Tenemos que $b_1 = 0$, en caso contrario

$$\begin{cases} [y_4, y_3] = (a_3 b_1 - 1) b_1 e_5 + (*) e_6 * \cdots + (*) e_n = -b_1 y_5, \\ [y_4, y_3] \in V_{2k_t + k_s}, \\ y_5 \in V_{2k_s + k_t}, \end{cases}$$

implicando que $k_t = k_s$, lo cual es imposible.

Como $a_3 = -1$ y $b_1 = 0$, por la ley del álgebra se tiene que:

$$[y_1, y_3] = (\lambda - \mu) e_2 - e_4 + (*) e_5 + \cdots + (*) e_n$$

y

$$y_4 = [y_3, y_1] = -\mu e_2 + e_4 + (*) e_5 + \cdots + (*) e_n,$$

es decir, $[y_1, y_3] = A y_4$ con $A \neq 0$.

Además, se tiene que:

$$\begin{cases} [y_1, y_3] \in V_{k_t + k_s}, \\ y_4 \in V_{k_t + k_s}, \end{cases}$$

de donde se deduce que $[y_1, y_3]$ ha de ser linealmente dependiente con y_4, es decir se tiene que verificar que:

$$det \begin{pmatrix} \lambda - \mu & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

es decir, $\lambda = 2\mu$. Pero según el Lema 1.2 de la sección de preliminares, se tiene que $(\lambda, \mu) = (1, 1)$ ó $(\lambda, \mu) = (2, 4)$. LLegamos así a una contradicción.

Caso 2.2: Si $1 + a_3 \lambda + a_3^2 \mu = 0,$ por la misma razón que en el Caso 1.2, podemos afirmar que $b_1^2 + b_1 \lambda + \mu \neq 0$ y tomar las siguientes restricciones:

Caso 2.2.1: Si $1 + a_3 \neq 0$ es análogo al Caso 2.1.1 tomando $y_2 = [\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_t]$.

Caso 2.2.2: Si $1 + a_3 = 0$ es claro que $1 + b_1 \neq 0$, así podemos trabajar con la base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x}_s, \\
y_3 &= \widetilde{x}_t, \\
y_2 &= [y_3, y_3], \\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \quad 4 \leq i \leq n-1, \\
y_n &= [y_{n-1}, y_3],
\end{aligned}
$$

siendo la matriz del cambio de base:

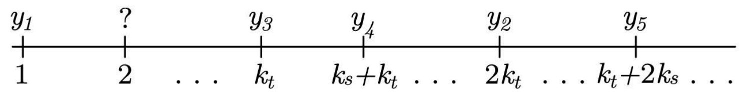
$$
\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_n \\
0 & b_1^2 + b_1\lambda + \mu & 0 & 0 & (*) & \dots & (*) \\
b_1 & b_2 & 1 & b_4 & b_5 & \dots & b_n \\
0 & b_1 + a_3b_1\lambda + a_3\mu & 0 & 1 - a_3b_1 & (*) & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 - a_3b_1 & \dots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1 - a_3b_1)(1 + b_1)
\end{pmatrix}
$$

Es fácil ver que se trata de una matriz regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$ e $y_3 \in V_{k_t}$, el álgebra $\mathcal{L}$ admite la graduación de longitud máxima $V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-4)k_s}$.

Está claro que la graduación es conexa y de longitud máxima si y solo si $k_s = \pm 1$, pudiendo tomar sin pérdida de generalidad $k_s = 1$. Nótese que por claridad en el análisis, aunque hemos fijado $k_s = 1$, se mantendrá la notación k_s. Analicemos los posibles valores de k_t.

- Si $k_t > 0$
  - Si $k_t = 2$ obtenemos que $V_{k_t+2k_s} = V_{2k_t}$, lo cual está en contradicción con haber supuesto que la graduación tiene longitud máxima.



- Si $k_t > 2$ es fácil ver (ayúdese de la gráfica) que $V_2 = \langle 0 \rangle$, llegando de nuevo a contradicción.

▪ Si $k_t < 0$, las únicas posibilidades para que la graduación sea conexa y de longitud máxima son:

- Si $k_t + (n-4)k_s = 0$, es decir, $k_t = 4 - n$ pero en este caso se obtendría $V_{2k_t+(n-4)k_s} = V_{k_t}$.
- Si $2k_t + (n-4)k_s = 0$, es decir, $k_t = \frac{4-n}{2}$, lo que es imposible porque hemos supuesto $k_t \in \mathbb{Z}$, pero n es impar, por lo tanto $\frac{4-n}{2} \notin \mathbb{Z}$.

□

Nótese que este capítulo cierra el estudio de las álgebras de Leibniz de longitud máxima con nilíndice $n - p$, con $0 \leq p \leq 2$.

Álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima

3

Para continuar con el estudio de longitud máxima de las álgebras de Leibniz p-filiformes, se presenta en este capítulo la clasificación de las álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima. Seguiremos la misma estructura que en el capítulo anterior, diferenciando los casos cuyas álgebras asociadas graduadas naturalmente sean de Lie y las que sean de Leibniz no de Lie.

3.1. Extensión de las álgebras de Lie

Nos centramos en esta sección en estudiar si existen álgebras de Leibniz, obtenidas al extender las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente, de longitud máxima.

Todos los resultados presentados este apartado están publicados en [9].

Esta sección está organizada de la siguiente manera: en la Sección 1.1.1 se estudia la longitud de laa álgebras obtenidas al extender las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente no escindidas, llegando a probar que no existe ningún álgebra en este caso; en la Sección 1.1.2 se estudia el caso escindido, centrándonos en la familia de álgebras no estándar, definida en la sección de preliminares y cuya clasificación se muestra en el Teorema 3.3.

3.1.1. CASO NO ESCINDIDO

Como se comentó en líneas anteriores de esta memoria, el hecho de trabajar a partir de las álgebras graduadas naturalmente facilita enormemente el estudio de las constantes de estructura y de la longitud máxima.

A continuación pasaremos a estudiar la longitud de las álgebras de Leibniz 3-filiformes obtenidas al extender las correspondientes álgebras de Lie no escindidas, es decir, las álgebras 3-filiformes que no son una trivial extensión algebraica de las álgebras de Lie 2-filiformes o filiformes de longitud máxima.

Denotaremos por $L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_{r_1} \oplus \cdots \oplus L_{r_2} \oplus \cdots \oplus L_{n-3}$ la graduación natural del álgebra $\mathcal{L}$.

Los Teoremas 1.5 y 1.6 de la sección de preliminares son los pilares en los que se apoya este estudio.

Recuérdese que para simplificar la notación, si $\mathfrak{g}$ es un álgebra graduada naturalmente entonces denotaremos por $\widetilde{\mathfrak{g}}$ al álgebra extendida. Se probará en las siguientes proposiciones que no existe ningún álgebra de Leibniz 3-filiforme de longitud máxima al extender las álgebras de los Teoremas 1.5 y 1.6.

Proposición 3.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz n-dimensional 3-filiforme cuya álgebra asociada graduada naturalmente es isomorfa a $L(n, r_1, r_2)$ o $Q(n, r_1, r_2)$, con $3 \leq r_1 < r_2 \leq n-6$, $n \geq 11$ y r_1 y r_2 impares. Entonces $\mathcal{L}$ no admite ninguna graduación de longitud máxima.*

Demostración: La graduación natural de las dos álgebras $L(n, r_1, r_2)$ y $Q(n, r_1, r_2)$ es:

$$L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus \cdots \oplus L_{n-3},$$

donde

$$L_1 = \langle x_0, x_1 \rangle,\ L_i = \langle x_i \rangle \text{ con } 2 \leq i \leq n-3, i \notin \{r_1, r_2\},\ L_{r_1} = \langle x_{r_1}, y_1 \rangle \text{ y } L_{r_2} = \langle x_{r_2}, y_2 \rangle.$$

La herramienta crucial en esta demostración es la construcción de una adecuada base homogénea, ya que ésta facilitará la obtención de las constantes de estructura y la estructura genérica de la graduación asociada a dicha base con la que podremos estudiar la longitud del álgebra de forma más sencilla.

Tomemos los siguientes vectores como los generadores de dicho álgebra:

$$\widetilde{x_s} = x_0 + \sum_{i=1}^{n-3} a_i x_i + \sum_{j=1}^{2} b_j y_j, \quad \widetilde{x_t} = A_0 x_0 + x_1 + \sum_{i=2}^{n-3} A_i x_i + \sum_{j=1}^{2} B_j y_j. \tag{3.1}$$

Así se verifica que $det \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ A_0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, es decir, $1 - a_1 A_0 \neq 0$ por la independencia lineal de los generadores.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es un álgebra de longitud máxima.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{L}(n, r_1, r_2)$.

La ley de $\widetilde{L}(n, r_1, r_2)$ está definida por los siguientes productos corchetes, donde $(*)$ denota la correspondiente constante de estructura, que no se detalla explícitamente por ser irrelevante en nuestro estudio:

$$\begin{cases}
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - 1 \leq i \leq n - 4, \\
[x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_i, x_{r_2-i}] = (-1)^{i-1} y_2 + (*)x_{r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \leq i \leq \frac{r_2-1}{2}, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - 1 \leq i \leq n - 4, \\
[x_{r_1-i}, x_i] = (-1)^{i} y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \leq i \leq \frac{r_1-1}{2},
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
[x_{r_2-i}, x_i] = (-1)^i y_2 + (*)x_{r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2}, \\
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & i, j \ne 0, 2 \le i+j \le r_1 - 1, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 + 1 \le i+j \le r_2 - 1, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 + 1 \le i+j \le n-4, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le r_2 - r_1 - 1, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le r_2 - r_1 - 1, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - r_1 \le i \le n-4-r_1, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - r_1 \le i \le n-4-r_1, \\
[x_i, y_2] = (*)x_{i+r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le n-4-r_2, \\
[y_2, x_i] = (*)x_{i+r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le n-4-r_2, \\
[y_1, y_1] = (*)x_{2r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 6 \le 2r_1 \le r_2 - 1, \\
[y_1, y_1] = (*)x_{2r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 < 2r_1 \le n-4, \\
[y_2, y_1] = (*)x_{r_1+r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_1 + r_2 \le n-4, \\
[y_1, y_2] = (*)x_{r_1+r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_1 + r_2 \le n-4, \\
[y_2, y_2] = (*)x_{2r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 10 \le 2r_2 \le n-4.
\end{cases}$$

Los siguientes vectores son consecuencia directa de la ley del álgebra y de la definición de los generadores:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] &= (1 - a_1 A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, \\
[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \widetilde{x}_s] &= -(1 - a_1 A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{i-veces} = (-1)^{i+2}(1-a_1A_0)x_{i+2} + (*)x_{i+3} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2,$$

con $1 \leq i \leq r_1 - 4$,

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{(r_1-3)-veces} = (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)y_1 + (*)y_2 + (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + + \cdots + (*)x_{n-3},$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{(r_1-2)-veces} = (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + \cdots + + (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)a_1y_1 + (*)y_2,$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{i-veces} = (-1)^{i+2}(1-a_1A_0)x_{i+2} + (*)x_{i+3} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2,$$

con $r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 4$,

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{(r_2-3)-veces} = (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)y_2 + (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_2} + (*)x_{r_2+1} + \cdots + + (*)x_{n-3}.$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{(r_2-2)-veces} = (-1)^{r_2}(1-a_1A_0)x_{r_2} + (*)x_{r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + \cdots + + (-1)^{r_2}(1-a_1A_0)a_1y_2,$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s]}_{i-veces} = (-1)^{i+2}(1-a_1A_0)x_{i+2} + (*)x_{i+3} + \cdots + (*)x_{n-3},\ \text{con } r_2 - 1 \leq i \leq n-5,$$

Tomemos la nueva base $\mathcal{B} = \{z_0, \ldots, z_{n-3}, p_1, p_2\}$ definida por:

$$z_0 = \widetilde{x}_s,$$
$$z_1 = \widetilde{x}_t,$$
$$z_2 = [z_0, z_1],$$
$$z_i = [z_{i-1}, z_0] \text{ con } 3 \leq i \leq n-3,$$
$$p_1 = [z_1, z_{r_1-1}],$$
$$p_2 = [z_1, z_{r_2-1}],$$

donde

$$p_1 = [x_1 + \sum_{i=0, i\neq 1}^{n-3} A_i x_i + \sum_{j=1}^{2} B_j y_j, (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)x_{r_1-1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2] =$$

$$= (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)y_1 + (*)y_2 + (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3},$$

$$p_2 = [x_1 + \sum_{i=0, i\neq 2}^{n-3} A_i x_i + \sum_{j=1}^{2} B_j y_j, (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)x_{r_2-1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2] =$$

$$= (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)y_2 + (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_2} + (*)x_{r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}.$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \dots & a_{r_1} & \dots & a_{r_2} & \dots & a_{n-3} & b_1 & b_2 \\
A_0 & 1 & \dots & A_{r_1} & \dots & A_{r_2} & \dots & A_{n-3} & B_1 & B_2 \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & (-1)^{r_1}C & \dots & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r_1}Ca_1 & (*) \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{r_2}C & \dots & (*) & 0 & (-1)^{r_2}Ca_1 \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{n-3}C & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & (-1)^{r_1-1}CA_0 & \dots & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r_1-1}C & (*) \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{r_2-1}CA_0 & \dots & (*) & 0 & (-1)^{r_2-1}C
\end{pmatrix}$$

donde $C = (1 - a_1A_0)$. Esta matriz tiene rango n ya que $1 - A_0a_1 \neq 0$.

Denotemos por V_i los espacios de la graduación asociada a la nueva base. Por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \in V_{i+j}$ para todo i, j y tomando $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$ se tiene $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \leq i \leq n-3$, $p_1 \in V_{2k_t+(r_1-2)k_s}$ y $p_2 \in V_{2k_t+(r_1-2)k_s}$. Así la graduación de longitud máxima asociada a la base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_2-2)k_s}.$$

Esta graduación es conexa si y solo si $k_s = \pm 1$, ya que $n \geq 11$. Como los casos $k_s = 1$ y $k_s = -1$ son equivalentes, i.e., existe una graduación de longitud máxima para $k_s = 1$ si y solo si existe para $k_s = -1$, se puede asumir $k_s = 1$ sin pérdida de generalidad. Mantendremos en ocasiones la notación k_s para clarificar el estudio. Además, la graduación, por ser de longitud máxima, verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} k_t \neq 0 \text{ por nilpotencia,} \\ \text{ningún subespacio de la graduación es nulo,} \\ \text{todos los subíndices de los subespacios son distintos entre sí.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Analicemos los posibles valores de k_t, teniendo en cuenta que $k_s = 1$.

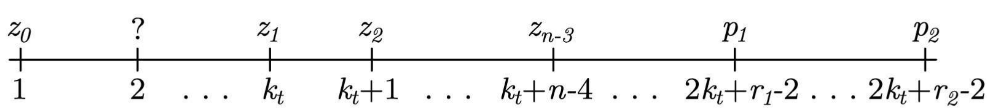
$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } k_t > 0}$

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } k_t = 2}$ el espacio graduante $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} =< p_1 >$ coincide con el espacio V_{r_1+2}, donde $3 \leq r_1 < n-6$. Por tanto $5 \leq r_1 + 2 < n-4$, y entonces $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = V_{r_1+2} =< p_1, z_{r_1+1} >$, lo cual contradice las propiedades (3.2).

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } k_t > 2,}$ como $n \geq 11$ se tienen las siguientes desigualdades:

$$2k_t + (r_1-2)k_s > 2k_t > 4 \quad \text{y} \quad 2k_t + (r_2-2)k_s > 2k_t > 4.$$

Concluyendo así que $V_2 =< 0 >$, lo cual contradice la conectividad de la graduación (ver la gráfica para mayor claridad).

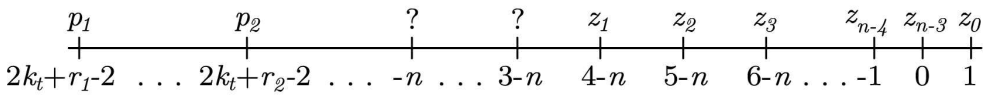


$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } k_t < 0}$

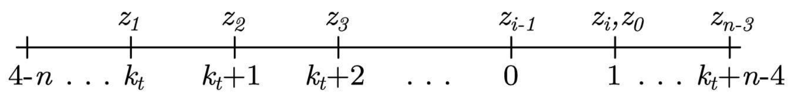
$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } k_t = 4-n}$ se tienen las desigualdades:

$$2k_t + (r_1-2)k_s < -n \quad \text{y} \quad 2k_t + (r_2-2)k_s < -n,$$

lo cual implica que el espacio de la graduación $V_{3-n} =< 0 >$, como muestra la gráfica siguiente, llegando así a contradicción con la conectividad de la graduación.



$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } k_t > 4-n}$ entonces existe algún vector z_i, con $2 \leq i \leq n-3$, tal que $z_i \in V_1 =< z_0 >$, contradiciendo las propiedades de la graduación (3.2), como se muestra en la siguiente gráfica



$\boxed{\textbf{Caso 2.3: Si } k_t < 4-n}$ entonces los únicos vectores que pueden estar en el espacio de la graduación V_0 son p_1 ó p_2, es decir, $2k_t + (r_1-2)k_s = 0$ ó $2k_t + (r_2-2)k_s = 0$, pues la graduación considerada es conexa.

- Si $2k_t+(r_1-2)k_s = 0$ se obtendría $r_1 = 2-2k_t = 2n-4 > n-6$, lo cual es imposible pues $3 \leq r_1 < n-6$.

- Si $2k_t + (r_2-2)k_s = 0$, análogamente $r_2 = 2-2k_t = 2n-4 > n-6$, pero sabemos que $3 < r_2 \leq n-6$.

Se concluye que no existe ningún álgebra de longitud máxima en este caso.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\mathcal{Q}}(n, r_1, r_2)$.

Nótese que este estudio es muy similar al anterior, la única diferencia es la elección del vector z_{n-3} para construir la nueva base adaptada en la que intervienen los productos $[x_i, x_{n-3-i}]$ y $[x_{n-3-i}, x_i]$.

La ley de $\widetilde{\mathcal{Q}}(n, r_1, r_2)$ está definida como sigue

$$
\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \le i \le r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \le i \le r_2 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - 1 \le i \le n - 4, \\
[x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1}y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_i, x_{r_2-i}] = (-1)^{i-1}y_2 + (*)x_{r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2}, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \le i \le r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \le i \le r_2 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - 1 \le i \le n - 4, \\
[x_{r_1-i}, x_i] = (-1)^{i}y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_{r_2-i}, x_i] = (-1)^{i}y_2 + (*)x_{r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{r_2-1}{2}, \\
[x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\
[x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 2 \le i + j \le r_1 - 1, i, j \ne 0 \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 + 1 \le i + j \le r_2 - 1, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 + 1 \le i + j \le n - 4, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le r_2 - r_1 - 1, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le r_2 - r_1 - 1, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - r_1 \le i \le n - 4 - r_1, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 - r_1 \le i \le n - 4 - r_1, \\
[x_i, y_2] = (*)x_{i+r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le n - 4 - r_2, \\
[y_2, x_i] = (*)x_{i+r_2+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le n - 4 - r_2, \\
[y_1, y_1] = (*)x_{2r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 6 \le 2r_1 \le r_2 - 1, \\
[y_1, y_1] = (*)x_{2r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & r_2 < 2r_1 \le n - 4,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} [y_2,y_1]=(*)x_{r_1+r_2+1}+\cdots+(*)x_{n-3}, & r_1+r_2\leq n-4,\\ [y_1,y_2]=(*)x_{r_1+r_2+1}+\cdots+(*)x_{n-3}, & r_1+r_2\leq n-4,\\ [y_2,y_2]=(*)x_{2r_2+1}+\cdots+(*)x_{n-3}, & 2r_2\leq n-4.\end{cases}$$

Considérense los siguientes productos:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t] &= (1-a_1A_0)x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-3}+(*)y_1+(*)y_2,\\
[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s}_{1-vez}] &= -(1-a_1A_0)x_3+(*)x_4+\cdots+(*)x_{n-3}+(*)y_1+(*)y_2,\\
&\vdots\\
[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\dots,\widetilde{x}_s}_{i-veces}] &= (-1)^{i+2}(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-3}+(*)y_1+(*)y_2,\\
&\text{con } 1\leq i\leq r_1-3,\\
[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\dots,\widetilde{x}_s}_{(r_1-2)-veces}] &= (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)x_{r_1}+(*)x_{r_1+1}+\cdots+(*)x_{n-3}+\\
&+(-1)^{r_1}(1-a_1A_0)a_1y_1+(*)y_2,\\
[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\dots,\widetilde{x}_s}_{i-veces}] &= (-1)^{i+2}(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-3}+(*)y_2,\\
&\text{con } r_1-1\leq i\leq r_2-3,\\
[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\dots,\widetilde{x}_s}_{(r_2-2)-veces}] &= (-1)^{r_2}(1-a_1A_0)x_{r_2}+(*)x_{r_2+1}+\cdots+(*)x_{n-3}+\\
&+(-1)^{r_2}(1-a_1A_0)a_1y_2,\\
[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\dots,\widetilde{x}_s}_{i-veces}] &= (-1)^{i+2}(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-3},\\
&\text{con } r_2-1\leq i\leq n-6,
\end{aligned}$$

$$[[[\widetilde{x}_t,[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t]],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s}_{(r_1-3)-veces}] = (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)y_1 + (*)y_2 + (-1)^{r_1-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_1} + \\ + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3},$$

$$[[[\widetilde{x}_t,[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t]],\underbrace{\widetilde{x}_s],...,\widetilde{x}_s}_{(r_2-3)-veces}] = (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)y_2 + (-1)^{r_2-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_2} + (*)x_{r_2+1} + \\ + \cdots + (*)x_{n-3},$$

Podemos distinguir dos casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1+1\neq 0,}$ tomamos la base $\mathcal{B}$ definida en el estudio de $\widetilde{L}(n,r_1,r_2)$. Nótese que al haber usado sólo las propiedades de la graduación en el estudio de $\widetilde{L}(n,r_1,r_2)$, el estudio en este caso es completamente análogo.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1+1=0}$ construimos la nueva base adaptada a partir de los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x}_s, \\ z_1 &= \widetilde{x}_t, \\ z_2 &= [z_0,z_1], \\ z_i &= [z_{i-1},z_0] \quad 3\leq i\leq n-4, \\ z_{n-3} &= [z_{n-4},z_1], \\ p_1 &= [z_1,z_{r_1-1}], \\ p_2 &= [z_1,z_{r_2-1}], \end{aligned}$$

donde $z_{n-3}=[z_{n-4},z_1]=(-1)^{n-3}(1-a_1A_0)(1+A_0)x_{n-3}$.

La matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \dots & a_{r_1} & \dots & a_{r_2} & \dots & a_{n-3} & b_1 & b_2 \\
A_0 & 1 & \dots & A_{r_1} & \dots & A_{r_2} & \dots & A_{n-3} & B_1 & B_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & (-1)^{r_1}C & \dots & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r_1}Ca_1 & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{r_2}C & \dots & (*) & 0 & (-1)^{r_2}Ca_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{n-3}C(1+A_0) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & (-1)^{r_1-1}CA_0 & \dots & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r_1-1}C & (*) \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{r_2-1}CA_0 & \dots & (*) & 0 & (-1)^{r_2-1}C
\end{pmatrix}$$

con $C = (1 - a_1A_0)$. Dicha matriz tiene rango máximo por la independencia lineal de los generadores $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ y porque $A_0 \neq -1$.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, la graduación asociada a la base adaptada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_2-2)k_s}.$$

Estudiemos los posibles valores que puede tomar el subíndice k_t, recordando que $k_s = 1$.

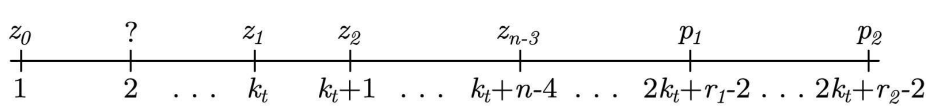
- Si $k_t > 0$ podemos distinguir:

  - Si $k_t = 2$ entonces $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = \langle p_1 \rangle = V_{r_1+2} = \langle z_{r_1+1} \rangle$ con $3 \leq r_1 < n-6$. Entonces $5 \leq r_1+2 < n-4$ y $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} =< p_1, z_{r_1+1} >$, lo que demuestra que es imposible obtener un álgebra de longitud máxima al extender $\mathcal{Q}(n, r_1, r_2)$.

  - Si $k_t > 2$, como $n \geq 11$ se tienen las siguientes desigualdades:

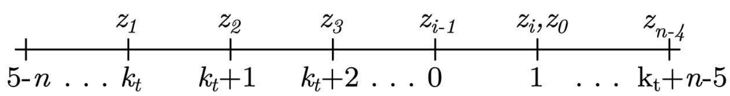
    $$2k_t+(r_1-2)k_s > 2k_t > 4,\ 2k_t+(r_2-2)k_s > 2k_t > 4 \ \text{ y } \ 2k_t+(n-5)k_s > 2k_t+6 > 4.$$

    Por tanto se obtiene que el espacio de la graduación V_2 es nulo, lo cual contradice las hipótesis (3.2)(véase la gráfica).



- Si $k_t < 0$ es interesante distinguir los siguientes casos:

  - Si $k_t = 5 - n$ se tiene $2k_t + (n-5)k_s = 5 - n$, lo cual implica que $V_{5-n} =< z_1, z_{n-3} >$, llegando de nuevo a contradicción.
  - Si $k_t > 5 - n$, entonces hay algún vector z_i con $2 \leq i \leq n-4$, tal que $z_i \in V_1 =< z_0 >$, lo cual es imposible (ver la gráfica).



  - Si $k_t < 5 - n$, entonces los únicos vectores que pueden estar en el subespacio de la graduación V_0 son p_1, p_2 ó z_{n-3}, es decir, $2k_t + (r_1 - 2)k_s = 0$, $2k_t + (r_2 - 2)k_s = 0$ ó $2k_t + (n-5)k_s = 0$ respectivamente.
    - Si $2k_t + (r_1 - 2)k_s = 0$ se llegaría a que $r_1 = 2 - 2k_t > 2n - 8 > n - 6$ ya que $n \geq 11$, lo cual es imposible porque $3 \leq r_1 < n - 6$.
    - Si $2k_t + (r_2 - 2)k_s = 0$, tendríamos de nuevo $r_2 = 2 - 2k_t > 2n - 8 > n - 6$, pero $3 < r_2 \leq n - 6$ es imposible.
    - Si $2k_t + (n-5)k_s = 0$, llegaríamos a contradicción pues $k_t = \frac{5-n}{2} > 5 - n$ por ser $5 - n < 0$.

$\square$

En lo que queda de sección se consideran los vectores $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ definidos en (3.1).

Proposición 3.2. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme n-dimensional cuya álgebra graduada naturalmente asociada es isomorfa a $L(n, r_1, n-5)$, $\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$ o $\tau(n, r_1, n-5)$, donde $3 \leq r_1 \leq n-6$, $n \geq 11$ y r_1 impar. Entonces $\mathcal{L}$ no admite ninguna graduación de longitud máxima.*

Demostración: Al igual que ocurre en teoremas anteriores, el estudio de las álgebras $\widetilde{L}(n, r_1, n-5)$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}(n, r_1, n-5)$ es similar, por lo tanto se estudiarán paralelamente.

Estudio de las álgebras extendidas $\widetilde{L}(n, r_1, n-5)$ y $\widetilde{\mathcal{Q}}(n, r_1, n-5)$.

El estudio de $\widetilde{L}(n, r_1, n-5)$ es análogo al realizado para $\widetilde{L}(n, r_1, r_2)$. Así podemos tomar la base definida por:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s, \\
z_1 &= \widetilde{x}_t, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0] \text{ con } 3 \le i \le n-3, \\
p_1 &= [z_1, z_{r_1-1}], \\
p_2 &= [z_1, z_{n-6}].
\end{aligned}$$

Denotemos por V_i los espacios de la graduación asociada a la nueva base. Por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ para todo i, j y tomando $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$ se tiene $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \le i \le n-3$, $p_1 \in V_{2k_t+(r_1-2)k_s}$ y $p_2 \in V_{2k_t+(n-7)k_s}$. Así la graduación de longitud máxima asociada a la base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-7)k_s}.$$

Análogamente a los casos anteriores, podemos tomar sin pérdida de generalidad $k_s = 1$, sin embargo, mantendremos en ocasiones la notación k_s por claridad en el estudio. Analicemos los valores admisibles de k_t, tomando $k_s = 1$:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } k_t > 0}$ distinguimos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } k_t = 2}$ se tiene que $V_{2k_t+(n-7)k_s} = V_{n-3}$. Como

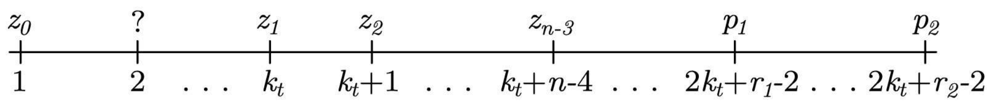
$$\begin{cases} V_{2k_t+(n-7)k_s} = \langle p_2 \rangle, \\ V_{n-3} = \langle z_{n-2} \rangle, \end{cases}$$

entonces $V_{n-3} = \langle p_2, z_{n-3} \rangle$, que es imposible pues la graduación es de longitud máxima.

Caso 1.2: Si $k_t > 2$ como $n \geq 11$, tenemos las siguientes restricciones:

$$2k_t + (r_1 - 2)k_s > 2k_t > 4 \quad \text{y} \quad 2k_t + (n-7) > 2k_t > 4.$$

Por lo tanto $V_2 =< 0 >$, como se muestra en la gráfica, lo que contradice la conectividad de la graduación.

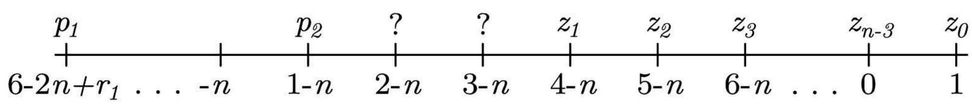


Caso 2: Si $k_t < 0$ distinguimos:

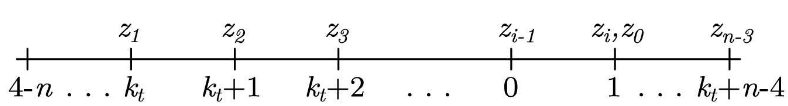
Caso 2.1: Si $k_t = 4 - n,$ como $r_1 \leq n - 6$ y $r_2 = n - 5$ tenemos que

$$2k_t + (r_1 - 2)k_s = 8 - 2n + r_1 - 2 < -n \quad \text{y} \quad 2k_t + (n-7)k_s = 8 - 2n + n - 7 = 1 - n,$$

deduciendo que $V_{3-n} =< 0 >$, llegando de nuevo a contradicción (véase la gráfica para mayor claridad).



Caso 2.2: Si $k_t > 4 - n,$ existe algún z_i con $2 \leq i \leq n - 3$, tal que $z_i \in V_1 = \langle z_0 \rangle$, como se muestra en la gráfica, que es imposible.



Caso 2.3: Si $k_t < 4 - n$ entonces los únicos vectores de la base que pueden generar el subespacio de la graduación V_0 son p_1 ó p_2, es decir, $2k_t+(r_1-2)k_s = 0$ ó $2k_t+(n-7)k_s = 0$. En el primer caso, se obtendría la desigualdad $r_1 = 2 - 2k_t = 2n - 4 > n$, pero ésta no es posible ya que $3 \leq r_1 \leq n - 6$. En el otro caso, se tendría $n - 7 > 2n - 8$, lo que es imposible porque $n \geq 11$.

Al estudiar la longitud máxima de la familia $\widetilde{\mathcal{Q}}(n, r_1, n-5)$, la única diferencia con respecto al caso $\widetilde{\mathcal{Q}}(n, r_1, r_2)$ es la discusión de los valores admisibles de k_t. Por lo tanto podemos considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1 + 1 \neq 0,}$ tomamos la misma base que en el caso anterior, es decir, la base $\mathcal{B}$. Nótese que al haber usado sólo las propiedades de la graduación en el estudio de $\widetilde{L}(n, r_1, n-5)$, el estudio en este caso es completamente análogo.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 + 1 = 0,}$ construimos la nueva base adaptada a partir de los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s, \\
z_1 &= \widetilde{x}_t, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0] \text{ con } 3 \leq i \leq n-4, \\
z_{n-3} &= [z_{n-4}, z_1], \\
p_1 &= [z_1, z_{r_1-1}], \\
p_2 &= [z_1, z_{r_2-1}],
\end{aligned}$$

donde $z_{n-3} = [z_{n-4}, z_1] = (-1)^{n-3}(1 - a_1 A_0)(1 + A_0)x_{n-3}$.

La matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \dots & a_{r_1} & \dots & a_{r_2} & \dots & a_{n-3} & b_1 & b_2 \\
A_0 & 1 & \dots & A_{r_1} & \dots & A_{r_2} & \dots & A_{n-3} & B_1 & B_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & (-1)^{r_1}C & \dots & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r_1}Ca_1 & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{r_2}C & \dots & (*) & 0 & (-1)^{r_2}Ca_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{n-3}C(1+A_0) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & (-1)^{r_1-1}CA_0 & \dots & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r_1-1}C & (*) \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (-1)^{r_2-1}CA_0 & \dots & (*) & 0 & (-1)^{r_2-1}C
\end{pmatrix}$$

con $C = (1 - a_1A_0)$. Dicha matriz tiene rango máximo por la independencia lineal de los vectores $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ y porque $A_0 \neq -1$.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, la graduación asociada a la base adaptada es:

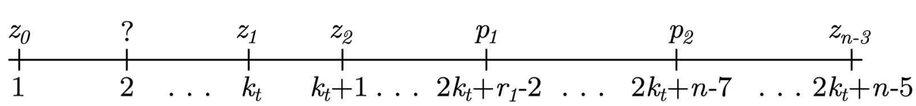
$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-7)k_s}.$$

Estudiemos los posibles valores que puede tomar el subíndice k_t, recordando que $k_s = 1$.

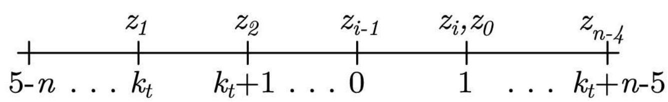
- Si $k_t > 0$ es interesante distinguir:
  - Si $k_t = 2$ el espacio de la graduación $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = \langle p_1 \rangle$ y el espacio $V_{r_1+2} = \langle z_{r_1+1} \rangle$ coinciden, es decir $V_{r_1+2} = \langle p_1, z_{r_1+1} \rangle$, lo cual es imposible pues la graduación es de longitud máxima.
  - Si $k_t > 2$, como $n \geq 11$ se tienen las siguientes desigualdades:

    $$2k_t+(r_1-2)k_s > 2k_t > 4,\ 2k_t+(n-7)k_s > 2k_t > 4 \ \text{ y } 2k_t+(n-5)k_s > 2k_t+6 > 4.$$

    Concluimos entonces que $V_2 =< 0 >$, como se muestra en la siguiente gráfica, lo cual contradice la conectividad de la graduación.



- Si $k_t < 0$ hay tres posibilidades:
  - Si $k_t = 5 - n$, entonces obtenemos que $2k_t + (n-5)k_s = 5 - n$, es decir $V_{5-n} =< z_1, z_{n-3} >$, lo cual está en contradicción con haber supuesto longitud máxima.
  - Si $k_t > 5 - n$, entonces como $dist(V_{k_t}, V_{k_s}) = dist(z_1, z_0) > 5 - n$, deducimos que existe al menos un vector z_i con $2 \leq i \leq n-4$, tal que $z_i \in V_1 =< z_0 >$, como se muestra a continuación. Pero esto es imposible, pues la graduación



    es de longitud máxima.
  - Si $k_t < 5 - n$, entonces los únicos vectores que pertenecen al subespacio de la graduación V_0 son p_1, p_2 y z_{n-3}, es decir, $2k_t+(r_1-2)k_s = 0$, $2k_t+(r_2-2)k_s = 0$ ó $2k_t + (n-5)k_s = 0$.
    - Si $2k_t+(r_1-2)k_s = 0$, como $k_s = 1$ obtendríamos $r_1 = 2-2k_t > 2n-8 > n$, lo cual es imposible ya que $3 \leq r_1 \leq n-6$.
    - Si $2k_t + (r_2 - 2)k_s = 0$, se obtendría $r_2 = 2 - 2k_t > 2n - 8 > n$, pero sabemos que $r_2 = n - 5$.
    - Si $2k_t + (n-5)k_s = 0$, llegaríamos de nuevo a contradicción ya que $k_t = \frac{5-n}{2} > 5 - n$.

Concluimos que no existe ningún álgebra de longitud máxima en este caso.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\tau}(n, r_1, n-5)$.

La graduación natural de $\tau(n, r_1, n-5)$ está formada por los espacios

$L_1 = \langle x_0, x_1\rangle, L_i = \langle x_i\rangle$ con $2 \leq i \leq n-3, i \notin \{r_1, n-5\}, L_{r_1} = \langle x_{r_1}, y_1\rangle$ y $L_{n-5} = \langle x_{n-5}, y_2\rangle$.

La ley del álgebra $\widetilde{\tau}(n, r_1, n-5)$ viene definida por los siguientes productos:

$$
\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \le i \le r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \le i \le n-7, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-6 \le i \le n-4, \\
[x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1}y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_i, x_{n-5-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-5} + y_2) + (*)x_{n-4} + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-6}{2}, \\
[x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-2i-4}{2}x_{n-4} + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-6}{2}, \\
[x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i}(i-1)\frac{n-i-4}{2}x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \le i \le r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \le i \le n-7, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-6 \le i \le n-4, \\
[x_{r_1-i}, x_i] = (-1)^{i}y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_{n-5-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_{n-5} + y_2) + (*)x_{n-4} + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-6}{2,} \\
[x_{n-4-i}, x_i] = (-1)^{i}\frac{n-2i-4}{2}x_{n-4} + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-6}{2}, \\
[x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^{i+1}(i-1)\frac{n-i-4}{2}x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-4}{2}, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 2 \le i+j \le r_1 - 1, i+j \ne n-5, i,j \ne 0, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 \le i+j \le n-6, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-5 \le i+j \le n-4, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le n-6-r_1, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le n-6-r_1, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-6-r_1 \le i \le n-4-r_1, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-6-r_1 \le i \le n-4-r_1, \\
[x_1, y_2] = \frac{6-n}{3}x_{n-4} + (*)x_{n-3}, & \\
[y_2, x_1] = -\frac{6-n}{3}x_{n-4} + (*)x_{n-3}, & \\
[x_2, y_2] = \frac{6-n}{2}x_{n-3}, & \\
[y_2, x_2] = -\frac{6-n}{2}x_{n-3}, & \\
[y_1, y_1] = (*)x_{2r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2. &
\end{cases}
$$

El siguiente paso es probar por reducción al absurdo que $\widetilde{\tau}(n, r_1, n-5)$ no tiene longitud máxima. Para ello construiremos una nueva base homogénea, donde los siguientes vectores serán de gran utilidad:

$$[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2,$$

$$[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \widetilde{x}_s] = -(1 - a_1A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2,$$

$$\vdots$$

$$[[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], ..., \widetilde{x}_s}_{i-veces}] = (-1)^{i+2}(1 - a_1A_0)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, \;\; 2 \leq i \leq r_1 - 3,$$

$$[[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], ..., \widetilde{x}_s}_{(r_1-2)-veces}] = (-1)^{r_1}(1 - a_1A_0)x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (-1)^{r_1}(1 - a_1A_0)a_1y_1+$$

$$+ (*)y_2,$$

$$[[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], ..., \widetilde{x}_s}_{i-veces}] = (-1)^{i+2}(1 - a_1A_0)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, \;\; r_1 - 1 \leq i \leq n - 8,$$

$$[[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], ..., \widetilde{x}_s}_{(n-7)-veces}] = (-1)^{n-5}(1 - a_1A_0)(1 + a_1)x_{n-5} + (*)x_{n-4} + (*)x_{n-3}+$$

$$+ (-1)^{n-5}(1 - a_1A_0)a_1y_2.$$

$$[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], [[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], \ldots, \widetilde{x}_s]]]}_{(n-8)-veces} = (-1)^{n-5}(1 - a_1A_0)^2\frac{n-8}{2}x_{n-4} + (*)x_{n-3},$$

$$[[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \widetilde{x}_s], [[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], \ldots, \widetilde{x}_s]]]}_{(n-5)-veces} = (-1)^{n-4}(1 - a_1A_0)^2(n - 7)x_{n-3}.$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1 \neq -1,}$ construimos la nueva base con los siguientes vectores:

$$z_0 = \widetilde{x}_s,$$

$$z_1 = \widetilde{x}_t,$$

$$z_2 = [z_0, z_1],$$

$$
\begin{aligned}
z_i &= [z_{i-1}, z_0] \text{ con } 3 \leq i \leq n-5,\\
z_{n-4} &= [z_2, z_{n-6}],\\
z_{n-3} &= [z_3, z_{n-6}],\\
p_1 &= [z_{r_1-1}, z_1],\\
p_2 &= [z_{n-6}, z_1],
\end{aligned}
$$

donde

$$p_1 = (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)y_1 + (*)y_2,$$

$$p_2 = (-1)^{n-5}(1-a_1A_0)(1+A_0)x_{n-5} + (*)x_{n-4} + (*)x_{n-3} + (-1)^{n-5}(1-a_1A_0)y_2.$$

La matriz del cambio de base es:

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r_1} & \dots & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & A_2 & \dots & A_{r_1} & \dots & A_{n-5} & A_{n-4} & A_{n-3} & B_1 & B_2\\
0 & 0 & 1-a_1A_0 & \dots & (*) & \dots & (*) & (*) & (*) & (*) & (*)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & C_1 & \dots & (*) & (*) & (*) & C_1a_1 & (*)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_2(1+a_1) & (*) & 0 & C_2a_1 & (*)\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & C_2(1-a_1A_0)\frac{n-8}{2} & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & C_1A_0 & \dots & (*) & (*) & (*) & C_1 & (*)\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & C_2(1+A_0) & (*) & (*) & 0 & C_2
\end{pmatrix}
$$

donde hemos denotado $C_1 = (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)$, $C_2 = (-1)^{n-5}(1-a_1A_0)$ y $C_4 = (-1)^{n-4}(1-a_1A_0)^2(n-7)$. Dicha matriz tiene rango máximo porque

$$det \begin{pmatrix} C_2(1+a_1) & C_2a_1 \\ C_2(1+A_0) & C_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad det \begin{pmatrix} C_1 & C_1a_1 \\ C_1A_0 & C_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

ya que $1 - A_0 a_1 \neq 0$.

Supongamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, así la graduación asociada a la base tomada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-6)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-6)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s} \oplus$$

$$\oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-7)k_s},$$

donde sin pérdida de generalidad podemos tomar $k_s = 1$ por el mismo razonamiento que en casos anteriores. Por claridad en el estudio se mantendrá en ocasiones la notación k_s aunque hayamos fijado su valor. Estudiemos a continuación los valores admisibles de k_t para que la graduación considerada tenga longitud máxima, es decir que la graduación sea conexa y tenga longitud n.

- Si $k_t > 0$ podemos distinguir dos casos:

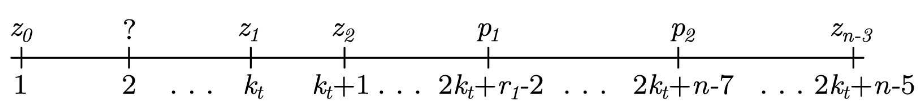
  - Si $k_t = 2$, entonces como $k_s = 1$ $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = V_{r_1+2}$ con $5 \leq r_1 + 2 \leq n - 4$. Por lo tanto se tiene que $V_{r_1+2} =< p_1, z_{r_1+1} >$, lo cual contradice la longitud máxima del álgebra.

  - Si $k_t > 2$, como $n \geq 11$ y $k_s = 1$ se tienen las siguientes restricciones:

    $$2k_t+(r_1-2)k_s > 2k_t > 4, \quad 2k_t+(n-7)k_s > 2k_t > 4, \quad 2k_t+(n-6)k_s > 2k_t > 4$$

    $$\text{y} \quad 2k_t + (n-5)k_s > 2k_t > 4.$$

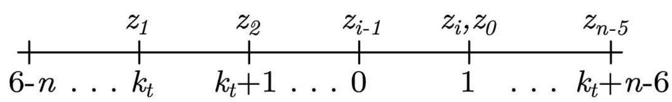
    Por lo tanto concluimos que $V_2 =< 0 >$, como se puede observar en la siguiente gráfica. Se llega así a contradecir la conectividad de la graduación.



- Si $k_t < 0$ tenemos los siguientes casos:

  - Si $k_t = 6-n$, como $k_s = 1$ se tiene $2k_t+(n-6)k_s = 2(6-n)+n-6 = 6-n = k_t$. Se concluye entonces que $V_{k_t} = \langle z_1, z_{n-4}\rangle$, llegando a contradicción.

- Si $k_t > 6-n$ como $dist(z_1, z_0) \geq n-6$, podemos asegurar que existe al menos un vector y_i con $2 \leq i \leq n-5$, tal que $y_i \in V_1 =< z_0 >$, pero esto contradice la longitud máxima de la graduación (ver la gráfica).



- Si $k_t < 6-n$ necesariamente se tiene una de las siguientes igualdades

$2k_t+(r_1-2)k_s = 0, 2k_t+(n-7)k_s = 0, 2k_t+(n-6)k_s = 0$ ó $2k_t+(n-5)k_s = 0$

para que la graduación sea conexa.

  - Si $2k_t + (r_1-2)k_s = 0$ entonces $k_t = \frac{2-r_1}{2}$. Además tenemos $k_t < 6-n$ y $n \geq 11$, luego obtenemos la desigualdad $r_1 > 2n-10 > n-6$, pero esto es imposible ya que $3 \leq r_1 \leq n-6$.
  - La segunda igualdad nos lleva a que $\frac{7-n}{2} < n-6$, lo cual contradice que la graduación sea máxima, ya que hay al menos $n-6$ vectores entre V_{k_s} y V_{k_t}, pero $dist(k_s, k_t) = \frac{7-n}{2}$.
  - Si $2k_t + (n-6)k_s = 0$ se obtiene $\frac{6-n}{2} < 6-n$, lo cual no es cierto ya que $6-n < 0$.
  - Si $2k_t + (n-5)k_s = 0$ tendríamos $n < 7$ y estamos suponiendo $n \geq 11$. Concluimos por tanto que $V_0 =< 0 >$, lo cual es imposible por la conectividad de la graduación.

De esta forma se afirma que la longitud del álgebra extendida es menor o igual que $n-1$ en este caso.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 = -1,}$ los vectores de la nueva base adaptada $\{z_0, \ldots, z_{n-3}, p_1, p_2\}$ son de la forma:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s, \\
z_1 &= \widetilde{x}_t, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \le i \le n-6, \\
z_{n-5} &= [z_{n-6}, z_1], \\
z_{n-4} &= [z_2, z_{n-6}], \\
z_{n-3} &= [z_3, z_{n-6}], \\
p_1 &= [z_{r_1-1}, z_1], \\
p_2 &= [z_{n-6}, z_0].
\end{aligned}
$$

Nótese que debido a la independencia de $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ y a la restricción $a_1 = -1$, la base considerada tiene sentido ya que $1 + A_0 \neq 0$.

Este estudio es análogo al realizado en el Caso 1, ya que sólo hemos intercambiado los papeles de z_5 y p_2.

Por lo tanto, no se obtiene ningún álgebra de longitud máxima al extender $L(n, r_1, n-5)$, $\mathcal{Q}(n, r_1, n-5)$ y $\tau(n, r_1, n-5)$.

$\square$

Proposición 3.3. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme n-dimensional cuya álgebra asociada graduada naturalmente es isomorfa a $L(n, r_1, n-4)$, $L(n, r_1, n-3)$ o $\tau(n, r_1, n-4)$, con $3 \le r_1 \le n-6$, $n \ge 11$, y r_1 impar. Entonces $\mathcal{L}$ no admite ninguna graduación de longitud máxima.*

Demostración: El estudio de la longitud máxima de $\widetilde{L}(n, r_1, n-4)$ y $\widetilde{L}(n, r_1, n-3)$ es análogo al caso general, es decir, al estudio de $\widetilde{L}(n, r_1, r_2)$, sustituyendo r_2 por $n-4$ ó $n-3$ según el caso.

Veamos el estudio de la longitud máxima de la familia $\widetilde{\tau}(n, r_1, n-4)$. Es muy similar al realizado para $\widetilde{\tau}(n, r_1, n-5)$, con la diferencia de que se simplifica bastante la prueba por no tener que distinguir casos para generar el vector z_{n-5} en las nuevas bases adaptadas consideradas.

Extendemos la familia $\tau(n, r_1, n-4)$ usando la graduación natural formada por:

$L_1 = \langle x_0, x_1 \rangle, L_i = \langle x_i \rangle$ con $2 \le i \le n-3, i \ne r_1, n-4, L_r = \langle x_{r_1}, y_1 \rangle$ y $L_{n-4} = \langle x_{n-4}, y_2 \rangle$.

Así, la ley de $\widetilde{\tau}(n, r_1, n-4)$ puede ser escrita como sigue:

$$
\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \le i \le r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \le i \le n-6, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-5 \le i \le n-4, \\
[x_i, x_{r_1-i}] = (-1)^{i-1} y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_i, x_{n-4-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-4} + y_2) + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\
[x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1} \frac{n-2i-3}{2} x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & 1 \le i \le r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 - 1 \le i \le n-6, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-5 \le i \le n-4, \\
[x_{r_1-i}, x_i] = (-1)^i y_1 + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le \frac{r_1-1}{2}, \\
[x_{n-4-i}, x_i] = (-1)^i (x_{n-4} + y_2) + (*)x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\
[x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^i \frac{n-2i-3}{2} x_{n-3}, & 1 \le i \le \frac{n-5}{2}, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, & i, j \ne 0,\ 2 \le i+j \le r_1 - 1, \\
 & i + j \ne n-6, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & r_1 \le i+j \le n-6, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-5 \le i+j \le n-4, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \le i \le n-6-r_1,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} [y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2, & 1 \leq i \leq n-6-r_1, \\ [x_i, y_1] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-6-r_1 \leq i \leq n-4-r_1, \\ [x_1, y_2] = \frac{5-n}{2}x_{n-3}, \\ [y_2, x_1] = -\frac{5-n}{2}x_{n-3}, \\ [y_1, x_i] = (*)x_{i+r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3}, & n-6-r_1 \leq i \leq n-4-r_1, \\ [y_1, y_1] = (*)x_{2r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_2. \end{cases}$$

Veamos ahora, por reducción al absurdo, que $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima. Para trabajar con la base homogénea adecuada debemos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1 \neq -1,}$ tomamos la base homogénea $\{z_0, \ldots, z_{n-3}, p_1, p_2\}$ formada por:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x}_s, \\ z_1 &= \widetilde{x}_t, \\ z_2 &= [z_0, z_1], \\ z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-4, \\ z_{n-3} &= [z_{n-6}, z_3], \\ p_1 &= [z_{r_1-1}, z_1], \\ p_2 &= [z_{n-5}, z_1], \end{aligned}$$

donde

$$z_2 = [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2,$$

$$z_3 = [[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \widetilde{x}_s] = -(1 - a_1A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2,$$

$$\vdots$$

$$z_i = [[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t], \underbrace{\widetilde{x}_s], ..., \widetilde{x}_s}_{(i-2)-veces}] = (-1)^i(1 - a_1A_0)x_i + \cdots + (*)x_{n-3} + (*)y_1 + (*)y_2, \;\; 4 \leq i \leq r_1 - 1,$$

$z_{r_1} = [z_{r_1-1}, z_0] = (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)a_1y_1$
$+ (*)y_2,$

$z_{n-4} = [z_{n-5}, z_0] = (-1)^{n-4}(1-a_1A_0)(1+a_1)x_{n-4} + (*)x_{n-3} + (-1)^{n-4}(1-a_1A_0)a_1y_2,$

$z_{n-3} = [z_{n-6}, z_3] = (-1)^{n-3}(1-a_1A_0)^2\dfrac{n-9}{2}x_{n-3},$

$p_1 = [z_{r_1-1}, z_1] = (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_1} + (*)x_{r_1+1} + \cdots + (*)x_{n-3} + (-1)^{r_1}(1-a_1A_0)y_1$
$+ (*)y_2,$

$p_2 = [z_{n-5}, z_1] = (-1)^{n-4}(1-a_1A_0)(1+A_0)x_{n-4} + (*)x_{n-3} + (-1)^{n-4}(1-a_1A_0)y_2.$

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, la graduación asociada a la base tomada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-6)k_s}.$$

Al ser $\mathcal{L}$ un álgebra de longitud máxima, la graduación considerada tiene que ser conexa y por lo tanto, $k_s = 1$. Al igual que en casos anteriores, se mantendrá la notación k_s.

Estudiemos los valores admisibles de k_t, sabiendo que $k_s = 1$.

- Si $k_t > 0$ tenemos las siguientes posibilidades:

  - Si $k_t = 2$, la graduación es conexa si y solo si $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = V_n$ ó $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = V_0$, como se puede observar en la siguiente gráfica:

    Si $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = V_n$ se obtiene $r_1 = n-2$, llegando así a una contradicción ya que $3 \leq r_1 \leq n-6$.

    Si $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = V_0$, entonces se verifica $r_1 = -2$, siendo esto imposible ya que $r_1 \geq 3$.

  - Si $k_t > 2$, como $n \geq 11$ y $r_1 \geq 3$ se tienen las siguientes desigualdades:

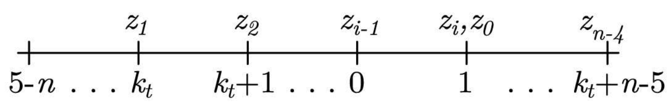
    $2k_t+(r_1-2)k_s > 2k_t > 4, \quad 2k_t+(n-5)k_s > 2k_t > 4 \quad$ y $\quad 2k_t+(n-6)k_s > 2k_t > 4.$

Por tanto obtenemos que $V_2 =< 0 >$, contradiciendo así la conectividad de la graduación.

- Si $k_t < 0$ distinguimos los siguientes casos:

  - Si $k_t = 5 - n$, entonces se tiene $2k_t + (n-5)k_s = 2(5-n) + n - 5 = 5 - n = k_t$, implicando que $V_{k_t} = \langle z_1, z_{n-4} \rangle$, lo cual está en contradicción con que la graduación tenga longitud máxima.

  - Si $k_t > 5 - n$, como $dist(z_1, z_0) \geq 5 - n$, entonces existe un vector z_i con $2 \leq i \leq n-4$, tal que $z_i \in V_1 = \langle z_0 \rangle$, llegando de nuevo a contradicción (véase la gráfica para mayor claridad).



  - Si $k_t < 5 - n$, los únicos vectores del álgebra que pueden pertenecer al subespacio de la graduación V_0 son z_{n-3}, p_1 ó p_2, es decir, se verifican una de las siguientes igualdades:

$$2k_t + (r_1 - 2)k_s = 0, 2k_t + (n-6)k_s = 0 \text{ ó } 2k_t + (n-5)k_s = 0.$$

    - Si $2k_t + (r_1 - 2)k_s = 0$ tendríamos $k_t = \frac{-r_1+2}{2}$. Además como $k_t < 5 - n$ se tiene $r_1 > 2n - 8$, pero esto es imposible pues $3 \leq r_1 \leq n - 6$ y $n \geq 11$.
    - Si $2k_t + (n-6)k_s = 0$ entonces $\frac{6-n}{2} < 5 - n$, lo cual sería cierto si y solo si $n < 4$, llegando así a una contradicción.
    - Si $2k_t + (n-5)k_s = 0$ se obtendría $\frac{5-n}{2} < 5 - n$, lo cual no es cierto ya que $5 - n < 0$.

  Concluimos por tanto que $V_0 = \langle 0 \rangle$, lo cual es imposible pues la graduación es conexa.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 = -1,}$ tomamos la nueva base formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s, \\
z_1 &= \widetilde{x}_t, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-5, \\
z_{n-4} &= [z_{n-5}, z_1], \\
z_{n-3} &= [z_{n-6}, z_3], \\
p_1 &= [z_{r_1-1}, z_1], \\
p_2 &= [z_{n-5}, z_0].
\end{aligned}
$$

Como la graduación asociada es exactamente la misma que en el Caso 1 (nótese que únicamente hemos intercambiado los papeles de z_{n-4} y p_2) se obtiene la misma conclusión, no existe ningún álgebra de longitud máxima en este caso, probando así la proposición.

□

La siguiente proposición muestra los resultados del estudio de longitud máxima para álgebras de Leibniz 3-filiformes de dimensión menor o igual a 10.

Proposición 3.4. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme de dimensión 10 cuya álgebra asociada graduada naturalmente es isomorfa a $L(10, r_1, r_2)$, $\mathcal{Q}(10, 3, 5)$, $\varepsilon^{1,\gamma}(10, 3, 5)$ ó $\varepsilon^{2,\gamma}(10, 3, 5)$ con $3 \leq r_1 < r_2 \leq 7$, $\gamma \in \mathcal{C}$ y r_1, r_2 impares. Entonces $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima.*

Demostración: Cuando $\mathcal{L}$ es isomorfa a $\widetilde{\mathcal{Q}}(10, 3, 5)$ o a $\widetilde{L}(10, r_1, r_2)$, la prueba es completamente análoga a la de la Proposición 3.1.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\epsilon}^{1,\gamma}(10, 3, 5)$.

Gracias a la graduación natural formada por:

$$L_1 = \langle x_0, x_1 \rangle, L_2 = \langle x_2 \rangle, L_3 = \langle x_3, y_1 \rangle, L_4 = \langle x_4 \rangle, L_5 = \langle x_5, y_2 \rangle, L_6 = \langle x_6 \rangle \text{ y } L_7 = \langle x_7 \rangle,$$

la ley de $\widetilde{\epsilon}^{1,\gamma}(10,3,5)$ está definida por los siguientes productos:

$$
\begin{cases}
[x_0,x_1]=x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & \\
[x_0,x_i]=x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & 2\leq i\leq 3,\\
[x_0,x_i]=x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7, & 4\leq i\leq 6,\\
[x_1,x_0]=-x_2+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & \\
[x_i,x_0]=-x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & 2\leq i\leq 3,\\
[x_i,x_0]=-x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7, & 4\leq i\leq 6,\\
[x_0,x_0]=(*)x_3+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & \\
[x_1,x_2]=y_1+(*)x_4+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & \\
[x_2,x_1]=-y_1+(*)x_4+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & \\
[x_i,x_{5-i}]=(-1)^{i-1}y_2+(*)x_6+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_{5-i},x_i]=(-1)^{i}y_2+(*)x_6+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_i,x_{7-i}]=(-1)^{i-1}\gamma x_7, & 1\leq i\leq 3,\ \gamma\in\mathbb{C},\\
[x_{7-i},x_i]=(-1)^{i}\gamma x_7, & 1\leq i\leq 3,\ \gamma\in\mathbb{C},\\
[x_i,x_j]=(*)x_{i+j+1}+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & 1\leq i\leq j\leq 5,\\
[x_1,y_1]=x_4+(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2, & \\
[y_1,x_1]=-x_4+(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2, & \\
[y_1,x_i]=-x_{i+3}+\cdots+(*)x_7, & 2\leq i\leq 4,\\
[x_i,y_1]=x_{i+3}+\cdots+(*)x_7, & 2\leq i\leq 4,\\
[y_2,x_i]=-x_{i+5}+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_i,y_2]=x_{i+5}+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2.
\end{cases}
$$

Al igual que en casos anteriores, supongamos que $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima y distingamos los siguientes casos:

Caso 1: Si $1 + a_1^2 \neq 0,$ tomemos la base formada por los vectores $\{z_0, \ldots, z_7, p_1, p_2\}$ definidos como sigue:

$$\begin{aligned}
z_0 =& \widetilde{x}_s, \\
z_1 =& \widetilde{x}_t, \\
z_2 =& [\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (1 - a_1 A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2, \\
z_3 =& [z_0, z_2] = (1 - a_1 A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)a_1 y_1 + (*)y_2, \\
z_4 =& [z_0, z_3] = (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)x_4 + (*)x_5 \cdots + (*)x_7 + (*)y_2, \\
z_5 =& [z_0, z_4] = (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)a_1 y_2, \\
z_6 =& [z_0, z_5] = (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)^2 x_6 + (*)x_7, \\
p_1 =& [z_1, z_2] = (1 - a_1 A_0)A_0 x_3 + (*)x_4 \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)y_1 + (*)y_2, \\
p_2 =& [z_2, z_3] = (1 - a_1 A_0)^2 a_1 x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1 - a_1 A_0)^2 y_2, \\
z_7 =& ?
\end{aligned}$$

Para construir z_7 es necesario considerar las siguientes restricciones:

Caso 1.1: Si $1 + a_1\gamma \neq 0,$ podemos tomar

$$z_7 = [z_2, p_2] = -(1 - a_1 A_0)^3 (1 + a_1\gamma)x_7.$$

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, se obtiene la graduación

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+5k_s} \oplus V_{3k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s}.$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & b_1 & b_2 \\ A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & (*) & Ca_1 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C(1+a_1^2) & (*) & (*) & (*) & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C(1+a_1^2) & (*) & (*) & 0 & C(1+a_1^2)a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C(1+a_1^2)^2 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^3(1+a_1\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CA_0 & (*) & (*) & (*) & (*) & C & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^2a_1 & (*) & (*) & 0 & -C^2 \end{pmatrix}$$

siendo $C = (1 - a_1A_0)$. El rango de la matriz es igual a diez ya que

$$rank \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & C(1+a_1^2) & (*) & (*) & 0 & C(1+a_1^2)a_1 \\ 0 & \dots & 0 & C^2a_1 & (*) & (*) & 0 & -C^2 \end{pmatrix} = 2$$

pues

$$det \begin{pmatrix} C(1+a_1^2) & C(1+a_1^2)a_1 \\ C^2a_1 & -(1-a_1A_0)^2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

y

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (1-a_1A_0) & (*) & \dots & (*) & (1-a_1A_0)a_1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-a_1A_0)A_0 & (*) & \dots & (*) & (1-a_1A_0) \end{pmatrix} = 2$$

pues

$$det \begin{pmatrix} C & Ca_1 \\ CA_0 & C \end{pmatrix} \neq 0.$$

Análogamente a los casos anteriores, podemos tomar $k_s = 1$ sin pérdida de generalidad, aunque mantendremos la notación k_s para mayor claridad en el estudio de longitud máxima. Estudiemos los valores admisibles de k_t.

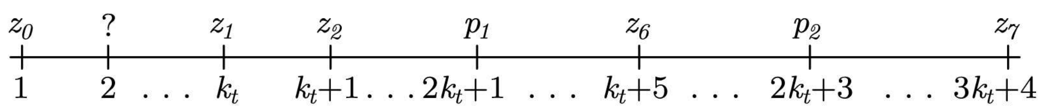
- Si $k_t > 0$ puede ocurrir:

- Si $k_t = 2$, se tiene que $V_5 = \langle p_1, z_4 \rangle$ ya que

$$\begin{cases} p_1 \in V_{2k_t+k_s}, \\ z_4 \in V_{k_t+3k_s}, \\ 2k_t + k_s = k_t + 3k_s. \end{cases}$$

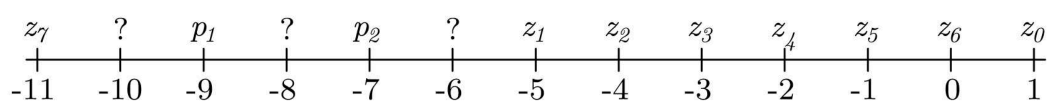
  Pero esto es imposible ya que la graduación es de máxima longitud.

- Si $k_t > 2$, entonces todos los subíndices de los espacios que forman la graduación son mayores que dos, como muestra la gráfica, por lo que $V_2 = \langle 0 \rangle$, contradiciendo la conectividad de la graduación.

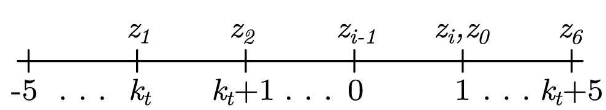


■ Si $k_t < 0$, podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $k_t = -5$, no hay más que sustituir los valores de k_t y k_s en nuestra graduación para ver que $V_{-6} = \langle 0 \rangle$, $V_{-8} = \langle 0 \rangle$ y $V_{-10} = \langle 0 \rangle$, lo cual no es posible en nuestro estudio (ver gráfica).



- Si $k_t > -5$, como $dist(z_1, z_0) \geq 5$, existe algún vector z_i con $2 \leq i \leq 5$, tal que $z_i \in V_1 = \langle z_1 \rangle$, llegando de nuevo a contradicción (véase la siguiente gráfica).



- Si $k_t < -5$, todos los subíndices de la graduación menos k_s son menores que cero, es decir $V_0 = \langle 0 \rangle$, como se observa en la siguiente gráfica, lo cual contradice la conectividad de la graduación.

z_7	p_1	p_2		z_1	z_2		z_6		?	z_0
$3k_t+4$	$2k_t+1$	$2k_t+3$	...	k_t	k_t+1	...	k_t+5	...	0	1

Queda probado que no existe ningún álgebra de longitud máxima en el Caso 1.1.

Caso 1.2: Si $1+a_1\gamma=0$ **y** $A_0\gamma+1\neq 0,$ podemos elegir

$$z_7=[z_4,p_1]=(1-a_1A_0)^2(1+a_1^2)(A_0\gamma+1)x_7.$$

Así, si tomamos $z_0\in V_{k_s}$ y $z_1\in V_{k_t}$ se obtiene la misma graduación que antes:

$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+5k_s}\oplus V_{3k_t+4k_s}\oplus V_{2k_t+k_s}\oplus V_{2k_t+3k_s}.$$

Obsérvese que el estudio anterior es igualmente válido en este caso, pues sólo se la graduación del álgebra.

Caso 1.3: Si $1+a_1\gamma=0$ **y** $A_0\gamma+1=0$**,** se puede afirmar que $A_0+\gamma\neq 0$. En caso contrario se obtendría $a_1A_0-1=0$, que contradice la hipótesis inicial de que $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$ son linealmente independientes. Gracias a esa afirmación podemos tomar

$$z_7=[z_1,z_6]=(1-A_0a_1)(1+a_1^2)^2(A_0+\gamma)x_7$$

que genera el espacio graduante $V_{2k_t+5k_s}$. Aunque en este caso la graduación no es exactamente la misma, no se modifica en nada el estudio hecho en el Caso 1.1, se siguen obteniendo las mismas contradicciones.

Caso 2: Si $1+a_1^2=0,$ por independencia de los generadores $\widetilde{x}_s$ y $\widetilde{x}_t$, podemos asegurar que $1 + A_0^2 \neq 0$. Esto nos permite hacer el siguiente cambio de base:

$$
\begin{aligned}
z_0 =&\widetilde{x}_s,\\
z_1 =&\widetilde{x}_t,\\
z_2 =&[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_t] = (1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2,\\
z_3 =&[z_0, z_2] = (1 - a_1A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1A_0)a_1y_1 + (*)y_2,\\
p_1 =&[z_1, z_2] = (1 - a_1A_0)A_0x_3 + (*)x_4 \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1A_0)y_1 + (*)y_2,\\
p_2 =&[z_2, z_3] = (1 - a_1A_0)^2x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1 - a_1A_0)^2y_2,\\
z_4 =&[z_1, p_1] = (1 - a_1A_0)(1 + A_0^2)x_4 + (*)x_5 \cdots + (*)x_7 + (*)y_2,\\
z_5 =&[z_2, p_1] = (1 - a_1A_0)^2(1 + a_1^2)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1 - a_1A_0)^2A_0y_2,\\
z_6 =&[z_3, p_1] = (1 - a_1A_0)^3x_6 + (*)x_7,\\
z_7 =&?
\end{aligned}
$$

Para construir z_7 es necesario considerar las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } 1 + a_1\gamma \neq 0,}$ podemos tomar

$$z_7 = [z_2, p_2] = -(1 - a_1A_0)^3(a_1\gamma + 1)x_7,$$

obteniendo así la graduación

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{3k_t+k_s} \oplus V_{3k_t+2k_s} \oplus V_{3k_t+3k_s} \oplus V_{3k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s}.$$

Para demostrar que es imposible obtener un álgebra de longitud máxima es suficiente estudiar los valores admisibles de k_t.

- Si $k_t > 0$, podemos distinguir los siguientes casos:
  - Si $k_t = 2$, se tiene $V_7 = \langle p_2, z_4 \rangle$, ya que:

$$
\begin{cases}
z_4 \in V_{3k_t+k_s},\\
p_2 \in V_{2k_t+3k_s},\\
7 = 3k_t + k_s = 2k_t + 3k_s,
\end{cases}
$$

lo cual está en contradicción con la longitud máxima de la graduación.

- Si $k_t > 2$, todos los subíndices de los espacios que forman la graduación son mayores que 2, por lo que $V_2 = \langle 0 \rangle$, contradiciendo la conectividad de la graduación.

- Si $k_t < 0$, se pueden distinguir los siguientes casos:

  - Si $k_t = -2$, no hay más que sustituir los valores de k_t y k_s en nuestra graduación para ver que $V_{-3} = \langle z_6, p_1 \rangle$, lo cual no es posible en este estudio.

  - Si $k_t > -2$, se tiene, razonando de manera análoga a los casos anteriores, que $V_1 = \langle z_0, z_2 \rangle$, o bien $V_1 = \langle z_0, z_3 \rangle$, lo cual contradice la longitud máxima de la graduación.

  - Si $k_t < -2$, entonces todos los subíndices de la graduación menos k_s son menores que cero, es decir $V_0 = \langle 0 \rangle$, lo cual es imposible.

Caso 2.2: Si $1 + a_1\gamma = 0$**,** como hemos supuesto que $1 + a_1^2 = 0$, se tiene $\gamma \neq -1$, lo que permite tomar

$$z_7 = [p_2, z_2] = (1 - a_1 A_0)^3 (1 + \gamma) x_7.$$

El estudio es el mismo que en el Caso 2.1 pues la graduación obtenida en este caso es la misma.

Queda así probado que $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\epsilon}^{2,\gamma}(10, 3, 5)$.

La ley de $\widetilde{\epsilon}^{2,\gamma}(10,3,5)$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0,x_1]=x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & \\
[x_0,x_i]=x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & 2\leq i\leq 3,\\
[x_0,x_i]=x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7, & 4\leq i\leq 6,\\
[x_1,x_0]=-x_2+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & \\
[x_i,x_0]=-x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & 2\leq i\leq 3,\\
[x_i,x_0]=-x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_7, & 4\leq i\leq 6,\\
[x_0,x_0]=(*)x_3+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & \\
[x_1,x_2]=y_1+(*)x_4+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & \\
[x_2,x_1]=-y_1+(*)x_4+\cdots+(*)x_7+(*)y_2, & \\
[x_i,x_{5-i}]=(-1)^{i-1}(x_5+y_2)+(*)x_6+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_{5-i},x_i]=(-1)^{i}(x_5+y_2)+(*)x_6+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_1,x_5]=2x_6+(*)x_7, & \\
[x_5,x_1]=-2x_6+(*)x_7, & \\
[x_1,x_6]=(3+\gamma)x_7, & \text{con } \gamma\in\mathbb{C},\\
[x_6,x_1]=-(3+\gamma)x_7, & \\
[x_2,x_4]=-x_6+(*)x_7, & \\
[x_4,x_2]=x_6+(*)x_7, & \\
[x_2,x_5]=(-1+\gamma)x_7, & \\
[x_5,x_2]=(1-\gamma)x_7, & \\
[x_3,x_4]=\gamma x_7, & \\
[x_4,x_3]=-\gamma x_7, & \\
[x_i,x_j]=(*)x_{i+j+1}+\cdots+(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2, & 1\leq i\leq j\leq 5,\\
[y_1,x_i]=(*)x_{i+4}+(*)x_7+(*)y_2, & 1\leq i\leq 3,\\
[x_i,y_1]=(*)x_{i+4}+(*)x_7+(*)y_2, & 1\leq i\leq 3,\\
[x_i,y_2]=-2x_{i+5}+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[y_2,x_i]=2x_{i+5}+(*)x_7, & 1\leq i\leq 2,
\end{cases}$$

ya que la graduación natural de $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$ está formada por los siguiente espacios:

$$L_1 = \langle x_0, x_1\rangle, L_2 = \langle x_2\rangle, L_3 = \langle x_3, y_1\rangle, L_4 = \langle x_4\rangle, L_5 = \langle x_5, y_2\rangle, L_6 = \langle x_6\rangle \text{ y } L_7 = \langle x_7\rangle.$$

Supongamos que $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima. Entonces considerando los siguientes casos probamos, por reducción al absurdo, que la longitud del álgebra considerada no es máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1 + a_1 \neq 0,}$ es necesario distinguir:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } \gamma \neq 0,}$ tomamos la base $\{z_0, \ldots, z_7, p_1, p_2\}$ donde:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_2 &= [z_0, z_1] = (1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2,\\
z_3 &= [z_2, z_0] = -(1 - a_1A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 - (1 - a_1A_0)a_1y_1 + (*)y_2,\\
z_4 &= [z_3, z_0] = (1 - a_1A_0)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (*)y_2,\\
z_5 &= [z_4, z_0] = -(1 - a_1A_0)(1 + a_1)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1 - A_0a_1)a_1y_2,\\
z_6 &= [z_2, z_4] = -(1 - a_1A_0)^2x_6 + (*)x_7,\\
z_7 &= [z_4, z_3] = (1 - a_1A_0)^2\gamma x_7,\\
p_1 &= [z_1, z_2] = (1 - a_1A_0)A_0x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1A_0)y_1 + (*)y_2,\\
p_2 &= [z_1, z_4] = (1 - a_1A_0)(A_0 + 1)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (1 - a_1A_0)y_2.
\end{aligned}$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & B_1 & B_2\\
0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*)\\
0 & 0 & 0 & -C & (*) & (*) & (*) & (*) & -Ca_1 & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & 0 & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C(1+a_1) & (*) & (*) & 0 & -Ca_1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^2 & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C^2\gamma & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & CA_0 & (*) & (*) & (*) & (*) & C & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C(A_0+1) & (*) & (*) & 0 & C
\end{pmatrix}$$

siendo $C = (1 - a_1A_0)$. Gracias a que $(1 - a_1A_0) \neq 0$ y

$$det\begin{pmatrix} -C & -Ca_1\\ CA_0 & C\end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{y } det\begin{pmatrix} -C(1+a_1) & -Ca_1\\ C(A_0+1) & C\end{pmatrix} \neq 0,$$

se afirma que la matriz es regular.

Tómese $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, así la graduación asociada de longitud máxima es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s} \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+5k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s}.$$

Como $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima, la graduación considerada tiene que ser conexa y de longitud igual a 10 y por lo tanto, $k_s = \pm 1$. El estudio para $k_s = 1$ y $k_s = -1$ es análogo, por lo que podemos tomar $k_s = 1$ sin pérdida de generalidad. Mantendremos en ocasiones la notación k_s por claridad en el estudio. Estudiemos los valores admisibles de k_t.

- Si $k_t > 0$, tenemos las siguientes posibilidades:

  - Si $k_t = 2$, se tiene que $V_{k_t+3k_s} = V_{2k_t+k_s}$, es decir $V_5 = \langle z_4, p_1\rangle$, pues

$$\begin{cases} z_4 \in V_{k_t+3k_s},\\ p_1 \in V_{2k_t+k_s},\\ k_t + 3k_s = 5 = 2k_t + k_s.\end{cases}$$

Pero esa igualdad contradice la longitud máxima de la graduación.

- Si $k_t > 2$, todos los subíndices de los espacios graduantes, salvo k_s, son mayores que 2, es decir, $V_2 = \langle 0 \rangle$. Se tiene así que la graduación no es conexa.

- Si $k_t < 0$, tenemos los siguientes casos:

  - Si $k_t = -4$, obtenemos $V_{k_t} = V_{4k_s+2k_t}$, lo cual implica que $V_{k_t} =< z_1, z_6 >$, pues

$$\begin{cases} z_1 \in V_{k_t}, \\ z_6 \in V_{4k_s+2k_t}, \\ k_t = -4 = 4k_s + 2k_t, \end{cases}$$

    llegando así a contradicción.

  - Si $k_t > -4$, como $dist(z_1, z_0) \geq 4$, podemos asegurar que existe algún z_i, con $2 \leq i \leq 5$, tal que $z_i \in V_1 = \langle z_0 \rangle$, llegando de nuevo a contradecir la longitud máxima de la graduación.

  - Si $k_t < -4$, todos los espacios graduantes salvo V_{k_s} están a la izquierda de V_0, y como $V_{k_s} = V_1$, eso implica que $V_0 = \langle 0 \rangle$, lo que es imposible por la conectividad de la graduación.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } \gamma = 0,}$ consideramos los siguientes subcasos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.1: Si } 1 + 3a_1 \neq 0,}$ tomamos la nueva base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 =& \widetilde{x}_s, \\
z_1 =& \widetilde{x}_t, \\
z_2 =& [z_0, z_1] = (1 - a_1 A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2, \\
z_3 =& [z_2, z_0] = -(1 - a_1 A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + -(1 - a_1 A_0)a_1 y_1 + (*)y_2, \\
z_4 =& [z_3, z_0] = (1 - a_1 A_0)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (*)y_2, \\
z_5 =& [z_4, z_0] = -(1 - a_1 A_0)(1 + a_1)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1 - A_0 a_1)a_1 y_2, \\
z_6 =& [z_2, z_4] = -(1 - a_1 A_0)^2 x_6 + (*)x_7, \\
z_7 =& [z_5, z_2] = -(1 - a_1 A_0)^2 (1 + 3a_1)x_7, \\
p_1 =& [z_1, z_2] = (1 - a_1 A_0)A_0 x_3 + (*)x_4 \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)y_1 + (*)y_2, \\
p_2 =& [z_1, z_4] = (A_0 + 1)(1 - a_1 A_0)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)y_2.
\end{aligned}
$$

Por la ley del álgebra y las propiedades de la graduación tenemos:

$$
\begin{cases}
[z_1, z_6] = -(1 - a_1 A_0)^2 (A_0 + 3)x_7, \\
[z_1, z_6] \in V_{3k_t + 4k_s},
\end{cases}
$$

es decir, $k_t = 0$ si $A_0 + 3 \neq 0$, lo cual es imposible por nilpotencia. Por lo tanto afirmamos $A_0 = -3$.

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & b_1 & b_2 \\ A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0 & 0 & 0 & -C & (*) & (*) & (*) & (*) & -Ca_1 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & 0 & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C(1+a_1) & (*) & (*) & 0 & -Ca_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^2 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C(1+3a_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & CA_0 & (*) & (*) & (*) & (*) & C & (*) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C(A_0+1) & (*) & (*) & 0 & C \end{pmatrix}$$

siendo $C = (1 - a_1 A_0)$. Es fácil ver que dicha matriz es regular pues $C \neq 0$.

Obsérvese que

$$[z_2, z_3] = \underbrace{(1 - a_1 A_0)^2}_{\neq 0} x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + \underbrace{(1 - a_1 A_0)^2}_{\neq 0} y_2.$$

Por lo tanto hay dos posibilidades: $[z_2, z_3] = Ap_2$ ó $[z_2, z_3] = Bz_5$ con $A \neq 0$ ó $B \neq 0$, pero ninguna de las dos afirmaciones se pueden verificar ya que:

$$rank \begin{pmatrix} [z_2, z_3] \\ p_2 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} C^2 & (*) & (*) & 0 & C^2 \\ C(A_0+1) & (*) & (*) & 0 & C \end{pmatrix} = 2$$

pues

$$det \begin{pmatrix} C & C \\ A_0 + 1 & 1 \end{pmatrix} = -A_0 = 3 \neq 0$$

y

$$rank \begin{pmatrix} [z_2, z_3] \\ z_5 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} C^2 & (*) & (*) & 0 & C^2 \\ -C(1+a_1) & (*) & (*) & 0 & -Ca_1 \end{pmatrix} = 2$$

pues

$$det \begin{pmatrix} -(1+a_1) & -a_1 \\ C & C \end{pmatrix} = 1 - a_1 A_0 \neq 0.$$

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.2: Si } 1+3a_1=0,}$ como $1-a_1A_0\neq 0$ afirmamos que $A_0\neq -3$ y podemos tomar la nueva base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 =&\widetilde{x_s},\\
z_1 =&\widetilde{x_t},\\
z_2 =&[z_0,z_1]\\
z_i =&[z_{i-1},z_0],\;\;\text{con } 3\leq i\leq 5,\\
z_6 =&[z_2,z_4]\\
z_7 =&[z_1,z_6]=-(1-a_1A_0)^2(3+A_0)x_7,\\
p_1 =&[z_1,z_2],\\
p_2 =&[z_1,z_4].
\end{aligned}
$$

La matriz del cambio de base es:

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & B_1 & B_2\\
0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*)\\
0 & 0 & 0 & -C & (*) & (*) & (*) & (*) & -Ca_1 & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & C & (*) & (*) & (*) & 0 & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C(1+a_1) & (*) & (*) & 0 & -Ca_1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^2 & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^2(3+A_0) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & CA_0 & (*) & (*) & (*) & (*) & C & (*)\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C(A_0+1) & (*) & (*) & 0 & C
\end{pmatrix}
$$

siendo $C=(1-a_1A_0)$. Es fácil ver que dicha matriz es regular pues $C\neq 0$.

Tómese $z_0\in V_{k_s}$ y $z_1\in V_{k_t}$, así la graduación asociada de longitud máxima es:

$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+4k_s}\oplus V_{2k_t+4k_s}\oplus V_{3k_t+4k_s}\oplus V_{2k_t+k_s}\oplus V_{2k_t+3k_s}$$

Como el álgebra extendida tienen longitud máxima, la graduación obtenida es conexa y de longitud máxima y por tanto $k_s = \pm 1$. Como en casos anteriores podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $k_s = 1$, aunque en ocasiones mantendremos la notación k_s, para clarificar el estudio. Estudiemos los valores admisibles de k_t.

- Si $k_t > 0$, entonces por la conectividad de la graduación afirmamos que $k_t = 2$. Pero en este caso se tiene $2k_t + k_s = k_t + 3k_s$, es decir, $V_5 = \langle z_5, p_1 \rangle$, lo cual contradice la longitud máxima de la graduación.

- Si $k_t < 0$, podemos distinguir los siguientes casos:

  - Si $k_t = -4$, entonces $2k_t + 4k_s = k_t$, llegando así a contradicción con la longitud máxima.

  - Si $k_t > -4$, como $dist(z_1, z_0) \geq 4$, existe z_i con $2 \leq i \leq 5$ tal que $V_0 = \langle z_0, z_i \rangle$, lo cual es imposible.

  - Si $k_t < -4$, entonces todos los subespacios de la graduación, salvo $V_1 = \langle z_0 \rangle$, tienen los subíndices negativos. Por tanto $V_0 = \langle 0 \rangle$, lo cual es imposible.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_1 = 0,}$ se deduce directamente que $A_0 \neq -1$. Distingamos entre $\gamma \neq 0$ y $\gamma = 0$.

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } \gamma \neq 0}$ construimos la base homogénea $B^* = \{z_0, \ldots, z_{n-3}, p_1, p_2\}$ con

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s,\\
z_1 &= \widetilde{x}_t,\\
z_2 &= [z_0, z_1],\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq 4,\\
z_5 &= [z_4, z_1],\\
z_6 &= [z_2, z_4],\\
z_7 &= [z_4, z_3],\\
p_1 &= [z_1, z_2],\\
p_2 &= [z_4, z_0],
\end{aligned}
$$

obteniendo la misma graduación que en le Caso 1.1, sólo se han intercambiado los papeles de z_5 y p_2. Razonando análogamente se prueba que la longitud de $\mathcal{L}$ no es máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } \gamma = 0,}$ tomando la base formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s,\\
z_1 &= \widetilde{x}_t,\\
z_2 &= [z_0, z_1],\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq 4,\\
z_5 &= [z_4, z_1],\\
z_6 &= [z_2, z_4],\\
z_7 &= [z_2, p_2] = -2(1 + A_0)^2 x_7,\\
p_1 &= [z_1, z_2],\\
p_2 &= [z_4, z_0],
\end{aligned}
$$

se llega a la misma contradicción que en el Caso 1.1, ya que el vector z_7 genera el mismo espacio graduante, $V_{2k_t+5k_s}$, y por lo tanto se llega a la misma conclusión.

Queda así probado que no existe ningún álgebra de longitud máxima al extender $\epsilon^{2,\gamma}(10,3,5)$.

□

El siguiente teorema, el principal de esta sección, es una recopilación de los resultados obtenidos en las Proposiciones 3.1-3.4.

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme n-dimensional, con $n \geq 3$, cuya álgebra asociada graduada naturalmente es un álgebra de Lie 3-filiforme no escindida. Entonces $\mathcal{L}$ no admite ninguna graduación de longitud máxima.*

3.1.2. CASO ESCINDIDO

Esta sección está dedicada al estudio de las álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima, cuyas álgebras de Lie graduadas naturalmente asociadas son escindidas. Centraremos nuestra atención en la familia de las álgebras no estándar.

Las definiciones de álgebras estándar y no estándar se dan a continuación.

Definición 3.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra escindida de longitud máxima y sea k un número entero tal que $\mathcal{L} = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$. El álgebra $\mathcal{L}$ se dice estándar si N_1, N_2, ..., N_k son álgebras de longitud máxima. En caso contrario se dirá que $\mathcal{L}$ es no estándar.*

Veamos a continuación algunos ejemplos, para clarificar estos conceptos.

Ejemplo 3.1. *(Ver [24] para más detalles) Consideremos el álgebra de Lie 2-filiforme escindida $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathbb{C}$, cuya ley respecto de la base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, y\}$ es:*

$$\mathcal{L}: \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_1, x_i] = x_{i+3}, & 2 \leq i \leq n-5. \end{cases}$$

$\mathcal{L}$ admite la graduación $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$, donde $x_0 \in \mathcal{L}_1$, $y \in \mathcal{L}_2$ y $x_i \in \mathcal{L}_{i+2}$ para $1 \leq i \leq n-2$. Por lo tanto $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima. Sin embargo, el álgebra $\mathcal{L}'$, cuya ley respecto a la

base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\}$ *es:*

$$\mathcal{L}' : \begin{cases} [x_0, x_i] = x_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_1, x_i] = x_{i+3}, & 2 \leq i \leq n-5, \end{cases}$$

tiene longitud uno. Por tanto el álgebra $\mathcal{L}$ ***es un álgebra de Lie 2-filiforme no estándar****.*

Ejemplo 3.2. *Las álgebras de Leibniz 3-filiform de longitud máxima escindidas son: álgebras de Leibniz nulfiliformes de longitud máxima $\oplus\mathbb{C}^3$, álgebras de Leibniz filiformes de longitud máxima $\oplus\mathbb{C}^2$ y álgebras de Leibniz 2-filiformes de longitud máxima $\oplus\mathbb{C}$. Todas ellas son* ***álgebras de Leibniz 3-filiformes estándar*** *y ya han sido estudiadas en [24] y [25].*

Gracias al Ejemplo 3.2, podemos reducir el estudio en esta sección a las álgebras de Leibniz 3-filiformes no estándar, i.e., aquellas cuyas álgebras graduadas naturalmente asociadas sean isomorfas o a álgebras de Lie filiformes $\oplus\mathbb{C}^2$ o a álgebras de Lie 2-filiformes $\oplus\mathbb{C}$.

CASO FILIFORME

Vergne en [39] obtuvo la clasificación de las álgebras de Lie filiformes en dimensión arbitraria. Ella probó que, salvo isomorfismos, existe una única álgebra de Lie graduada naturalmente para cada dimensión impar (denotada por L_n) y dos para cada dimensión par (denotadas por L_n y Q_n). La ley de estas álgebras pueden ser consultadas en el Teorema 1.1 de los preliminares de esta memoria.

El resultado principal de esta sección está recogido en el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme $(n+2)$-dimensional, cuya álgebra graduada naturalmente asociada es isomorfa a un álgebra de Lie graduada naturalmente $\oplus\mathbb{C}^2$. Entonces $\mathcal{L}$ no es un álgebra no estándar.*

Demostración: Sea $\{\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}, \widetilde{x_v}\}$ el conjunto de generadores que usaremos a lo largo de la demostración para construir la nueva base adaptada. Estos generadores están definidos como sigue:

$$\widetilde{x_s} = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + \sum_{j=1}^{2} b_j y_j, \quad \widetilde{x_t} = A_0 x_0 + x_1 + \sum_{i=2}^{n-1} A_i x_i + \sum_{j=1}^{2} B_j y_j,$$
$$\widetilde{x_u} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_i + y_1 + \beta y_2 \quad \text{y} \quad \widetilde{x_v} = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i x_i + \sigma y_1 + y_2.$$

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra que verifique todas las hipótesis del teorema y supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathcal{L}$ es no estándar.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{L_n} \oplus \mathbb{C}^2$.

Sea $\mathcal{L}$ isomorfa a $\widetilde{L_n} \oplus \mathbb{C}^2$. Como la graduación natural de $L_n \oplus \mathbb{C}^2$ es

$$L_1 = \langle x_0, x_1, y_1, y_2 \rangle \oplus L_2 = \langle x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus L_{n-1} = \langle x_{n-1} \rangle,$$

la ley de $\mathcal{L}$ viene dada por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\
[x_1, x_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}. [y_i, x_j] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n-3, \\
[x_j, y_i] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n-3, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i < j \leq n-3, \\
[x_j, x_i] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i < j \leq n-3, \\
[y_i, y_j] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i, j \leq 2.
\end{cases}$$

La expresión de los productos de los generadores de la base es:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= -(a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_v}] &= (\gamma_1 - a_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_s}] &= -(\gamma_1 - a_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_v}] &= (A_0\gamma_1 - \gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\gamma_1 - \gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_v}] &= (\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_u}] &= -(\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Podemos considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0}$ tomemos la base $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, p_1, p_2\}$ con

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \quad \text{con } 2 \leq i \leq n-1,\\
p_1 &= \widetilde{x_u},\\
p_2 &= \widetilde{x_v},
\end{aligned}
$$

donde

$$[[\widetilde{x}_t,\underbrace{\widetilde{x}_s],\widetilde{x}_s],\dots,\widetilde{x}_s}_{i-veces}]] = (-1)^{i+1}(a_1A_0-1)x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_{n-1},\ \text{con } 2\le i\le n-2.$$

La matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1 & B_2\\
0 & 0 & (a_1A_0-1) & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -(a_1A_0-1) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & (a_1A_0-1) & \dots & (*) & (*) & 0 & 0\\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-2}(a_1A_0-1) & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-1}(a_1A_0-1) & 0 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \beta\\
\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \sigma & 1
\end{pmatrix}$$

Como $(a_1A_0-1)\neq 0$ y además se verifica que

$$det\begin{pmatrix}
1 & a_1 & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & B_1 & B_2\\
\alpha_0 & \alpha_1 & 1 & \beta\\
\gamma_0 & \gamma_1 & \sigma & 1
\end{pmatrix}\neq 0,$$

la matriz es regular.

Tomando $z_0\in V_{k_s}, z_1\in V_{k_t}, p_1\in V_{k_u}, p_2\in V_{k_v}$, usando la tabla de multiplicación de la familia $\mathcal{L}$ y la propiedad $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$, se obtiene que $z_i\in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2\le i\le n-1$. Por tanto, la graduación de longitud máxima obtenida es

$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+(n-2)k_s}\oplus V_{k_u}\oplus V_{k_v}.$$

Razonando análogamente al caso no escindido podemos tomar $k_s=1$, aunque a veces mantendremos la notación k_s. Estudiemos los valores admisibles de los parámetros k_t, k_u y k_v.

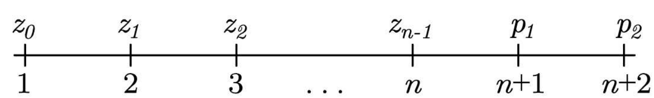
Nótese que como la graduación considerada es de longitud máxima, ha de verificar las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \in V_{i+j}, \\ \text{todos los subespacios de la graduación son de dimensión } 1, \\ k_s, k_t, k_u \text{ y } k_v \text{ son distintos de cero,} \\ \text{ningún subespacio de la graduación es nulo.} \end{cases} \tag{3.3}$$

Para buscar esos valores admisibles consideremos los siguientes casos:

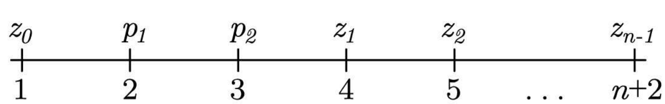
- Si $k_t > 0$, podemos distinguir los siguientes casos:

  - Si $k_t = 2$, como $k_s = 1$, $z_i \in V_{i+1}$ con $2 \leq i \leq n-1$, así p_1 y p_2 pertenecen a los espacios V_{n+1} y V_{n+2} por conectividad. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p_1 \in V_{n+1}$ y $p_2 \in V_{n+2}$, esto implica que los productos corchetes $[z_i, p_2]$, $[p_2, z_i]$, $[p_j, p_2]$ y $[p_2, p_j]$ con $0 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j \leq 2$ son nulos porque todos esos productos pertenecerían a algún espacio V_k con $k > n+2$ (ver gráfica). Luego se deduce que $p_2 \in Cent(\mathcal{L})$, dando lugar a un álgebra estándar.



  - Si $k_t = 3$, este caso es completamente análogo al caso $k_t = 2$.

  - Si $k_t = 4$, entonces podemos tomar $k_u = 2$ y $k_v = 3$ (los papeles de k_u y k_v son simétricos), como se puede observar en la siguiente gráfica.



    Por las propiedades de la graduación (3.3) es trivial que los productos $[z_0, p_1]$, $[p_1, z_0]$ y $[p_1, p_1]$ son igual a cero. Usando de nuevo las propiedades (3.3), como

$p_1 \in V_{k_u}$ y $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$, entonces

$$[p_1, z_i] = Az_{i+2} \text{ con } A \in \mathbb{C} \text{ y } 1 \leq i \leq n-1.$$

Usando ahora la ley del álgebra podemos escribir

$$[p_1, z_i] = (-1)^i (a_1 A_0 - 1)\alpha_0 x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \ldots\ldots + (*)x_{n-1},$$

por tanto se deduce que $\alpha_0 = 0$.

Usando de nuevo la ley de $\mathcal{L}$ podemos escribir

$$0 = [z_0, p_1] = (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$

por lo que $\alpha_1 - a_1\alpha_0 = 0$. Se obtiene necesariamente que $\alpha_1 = 0$. Es decir, se tiene que

$$[p_1, z_i] = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1.$$

Razonando análogamente concluimos que

$$[z_i, p_1] = 0 \text{ con } 1 \leq i \leq n-1.$$

Veamos ahora que $[p_1, p_2] = [p_2, p_1] = 0$.

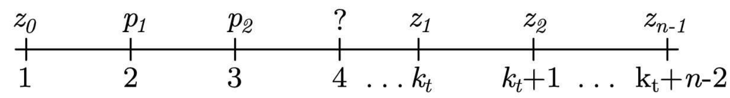
Se tiene

$$[p_1, p_2] = (\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$

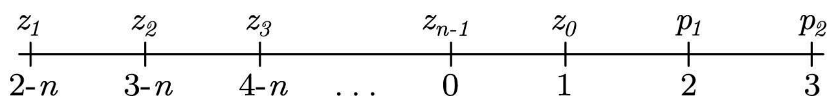
como $\alpha_1 = \alpha_0 = 0$, concluimos que $[p_1, p_2] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}$, es decir, $[p_1, p_2] = Az_j$ para algún $j \geq 3$. Pero esto es imposible ya que por las propiedades (3.3), aseguramos que $[p_1, p_2] \in V_5 =< z_2 >$. De esta forma, se ha probado que $[p_1, p_2] = 0$. Análogamente se ve que $[p_2, p_1] = 0$.

Por lo tanto, $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, i.e., el álgebra es estándar y se encuentra fuera del interés de nuestro estudio.

- Si $k_t > 4$, existiría siempre algún espacio nulo V_k con $2 \leq k \leq 4$, como se puede observar en la gráfica, lo cual contradice la conectividad de la graduación.



- Si $k_t < 0$, el único valor admisible sería $2 - n$, en otro caso obtendríamos $k_u = 0$ ó $k_v = 0$. Así los valores de k_u y k_v son 2 y 3, respectivamente ($k_u = 3$ y $k_v = 2$ es análogo), como muestra la siguiente gráfica.



Gracias a la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, deducimos que $[p_2, z_0]$ y $[z_0, p_2]$ están en el espacio $V_4 = \langle 0 \rangle$, es decir, $[p_2, z_0] = [z_0, p_2] = 0$. De la misma forma, los productos $[p_2, z_i]$ y $[z_i, p_2]$ están en el espacio de la graduación $V_{k_t+(i+2)k_s} =< z_{i+3} >$, con $1 \leq i \leq n-4$.

Por otra parte, usando la identidad de Leibniz, se llega a las siguientes expresiones:

$$[p_2, z_i] = Az_{i+4} \quad \text{y} \quad [z_i, p_2] = Bz_{i+4} \quad \text{con} \quad A, B \in \mathbb{C}.$$

Por las dos últimas afirmaciones concluimos que $[p_2, z_{i+1}] = [z_{i+1}, p_2] = 0$, para $1 \leq i \leq n-4$.

Como $\{z_0, p_1, p_2\} \subset L/L^2$, $[z_j, p_2]$, $[p_2, z_j]$ están en L^r con $r \geq 2$ y $n-3 \leq j \leq n-1$, esos productos han de ser nulos.

Por último, por las propiedades (3.3), $[p_1, p_2]$ y $[p_2, p_1]$ pertenecen al espacio $V_5 = \langle 0 \rangle$, entonces se tiene que $p_2 \in Cent(\mathcal{L})$ y por lo tanto el álgebra es estándar.

Caso 2: Si $a_1A_0 - 1 = 0,$ se pueden distinguir los siguientes casos:

Caso 2.1: Si $a_1\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$ tomemos la base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
p_1 &= \widetilde{x_u},\\
p_2 &= \widetilde{x_v},\\
z_2 &= [p_1, z_0],\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-1,
\end{aligned}
$$

donde

$$[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \dots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-2.$$

La matriz del cambio de base es

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_{n-1} & B_1 & B_2\\
0 & 0 & a_1\alpha_0 - \alpha_1 & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_1\alpha_0 - \alpha_1 & \dots & (*) & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & 0 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 & \beta\\
\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \dots & \gamma_{n-1} & \sigma & 1
\end{pmatrix}
$$

de rango máximo ya que $a_1\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$ y, por la independencia lineal de los generadores de la base, se verifica que

$$
det \begin{pmatrix}
1 & a_1 & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & B_1 & B_2\\
\alpha_0 & \alpha_1 & 1 & \beta\\
\gamma_0 & \gamma_1 & \sigma & 1
\end{pmatrix} \neq 0.
$$

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$, $p_1 \in V_{k_u}$ y $p_2 \in V_{k_v}$, entonces $z_i \in Vk_u + (i-1)k_s$ con $2 \leq i \leq n-1$, así la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base homogénea está formada por

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_v} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-2)k_s}.$$

Por hipótesis tenemos $a_1A_0 - 1 = 0$, por tanto $A_0 \neq 0$, y por las propiedades (3.3) podemos asegurar que $[z_2, z_1] \in \langle z_3 \rangle$. En resumen

$$\begin{cases} z_3 \in V_{k_u+2k_s}, \\ [z_2, z_1] \in V_{k_u+k_s+k_t}, \\ [z_2, z_1] = -A_0(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_{n-1}, \end{cases}$$

es decir, $[z_2, z_1] = \delta z_3$ con $\delta \neq 0$. En términos de la graduación significa que $k_s = k_t$, llegando a contradicción.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } a_1\alpha_0 - \alpha_1 = 0,}$ si $a_1\gamma_0 - \gamma_1 \neq 0$, podemos tomar la nueva base formada por:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x_s}, \\ z_1 &= \widetilde{x_t}, \\ p_1 &= \widetilde{x_u}, \\ p_2 &= \widetilde{x_v}, \\ z_2 &= [p_2, z_0], \\ z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

donde

$$[[\widetilde{x_v}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(a_1\gamma_0 - \gamma_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-2.$$

Entonces, calculando de nuevo el producto $[z_2, z_1]$ se prueba fácilmente que no es posible obtener un álgebra de longitud máxima bajo estas hipótesis.

Por otro lado, si $a_1\gamma_0 - \gamma_1 = 0$, los productos de los generadores de la nueva base se escriben como:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_v}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_v}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_v}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

demostrando así que es imposible construir una base en este caso ya que no se puede generar el vector z_2.

Por tanto, el álgebra no puede ser no estándar.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{Q_n} \oplus \mathbb{C}^2$.

El estudio de la longitud máxima en este caso es muy similar al caso anterior.

La graduación natural es

$$L_1 =< x_0, x_1, y_1, y_2 > \oplus L_2 =< x_2 > \oplus \cdots \oplus L_{n-1} =< x_{n-1} > .$$

Así la ley del álgebra extendida está definida por

$$\begin{cases}
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-2, \\
[x_i, x_{n-1-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1, \\
[x_{n-1-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-1}, & 1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1, \\
[y_i, x_j] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n-3, \\
[x_j, y_i] = (*)x_{j+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq 2,\ 1 \leq j \leq n-3, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i < j \leq n-3,\ i+j \neq n-1, \\
[x_j, x_i] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i < j \leq n-3, \\
[y_i, y_j] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i, j \leq 2, \\
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_1, x_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}. &
\end{cases}$$

Los productos de los generadores son de la forma:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= -(a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_v}] &= (\gamma_1 - a_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_s}] &= -(\gamma_1 - a_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_v}] &= (A_0\gamma_1 - \gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\gamma_1 - \gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_v}] &= (\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_v}, \widetilde{x_u}] &= -(\alpha_0\gamma_1 - \alpha_1\gamma_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

La principal diferencia con el estudio de $\widetilde{L_n} \oplus \mathbb{C}^2$ es el papel que juega, en este caso, el vector z_{n-1} en la nueva base tomada. Por esa razón, se distinguen los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0,}$ trabajamos con la base formada por:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0] = (-1)^i(a_1A_0 - 1)x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-2,\\
z_{n-1} &= [z_{n-3}, z_2] = (-1)^{n-3}(a_1A_0 - 1)^2 x_{n-1},\\
p_1 &= \widetilde{x_u},\\
p_2 &= \widetilde{x_v}.
\end{aligned}
$$

La matriz del cambio de base es

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1 & b_2\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1 & B_2\\
0 & 0 & a_1A_0 - 1 & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -(a_1A_0 - 1) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_1A_0 - 1 & \dots & (*) & (*) & 0 & 0\\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-2}(a_1A_0 - 1) & (*) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-3}(a_1A_0 - 1)^2 & 0 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \beta\\
\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \dots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \sigma & 1
\end{pmatrix}
$$

Esta matriz corresponde efectivamente a un cambio de base pues se verifica que $(1 - a_1 A_0) \neq 0$ y

$$det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & b_2 \\ A_0 & 1 & B_1 & B_2 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & \beta \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \sigma & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

por la independencia lineal de los generadores de la nueva base.

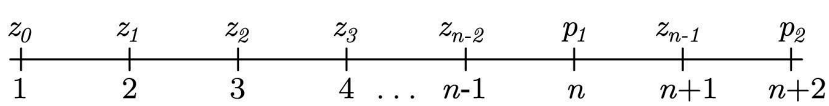
Considerando $z_0 \in V_{k_s}, z_1 \in V_{k_t}, p_1 \in V_{k_u}, p_2 \in V_{k_v}$, usando la ley de $\mathcal{L}$ y la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ es fácil ver que $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$, con $2 \leq i \leq n-2$ y $z_{n-1} \in V_{2k_t+(n-3)k_s}$. Entonces la graduación de longitud máxima obtenida es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_v}.$$

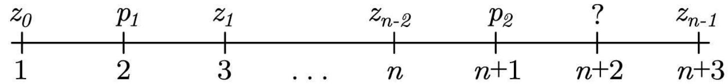
Estudiemos los valores admisibles de k_t, k_u y k_v.

- Si $k_t > 0$, podemos distinguir:

  - Si $k_t = 2$, entonces $p_1 \in V_{n+2}$ ó $p_2 \in V_{n+2}$, por conectividad. Si $p_2 \in V_{n+2}$ (análogo para p_1, ya que juegan papeles simétricos) se tiene el sigguiente gráfico y por tanto $[z_i, p_2] = 0$, $[p_2, z_i] = 0$, $[p_j, p_2] = 0$ y $[p_2, p_j] = 0$ con $0 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq j \leq 2$, ya que todos esos producto pertenecerían a algún espacio $V_k = \langle 0 \rangle$ con $k > n+2$. Entonces el álgebra sería estándar.



  - Si $k_t \geq 3$, entonces al menos $z_{n-1} \in V_{n+3}$, por lo que concluiríamos que alguno de los siguientes espacios: V_2, V_{n+1} ó V_{n+2} serían nulos, lo cual contradice la conectividad de la graduación (ver la gráfica para mayor claridad).



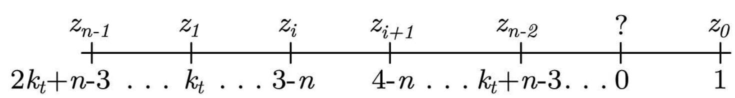
- Si $k_t < 0$, podemos distinguir tres casos:

  - Si $k_t = 3 - n$, entonces como $k_s = 1$ tenemos

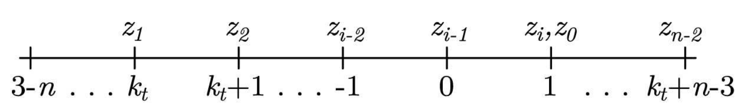
$$\begin{cases} z_1 \in V_{k_t}, \\ z_{n-1} \in V_{2k_t+(n-3)k_s}, \\ k_t = 3 - n = 2k_t + (n-3)k_s, \end{cases}$$

    es decir, $V_{k_t} = \langle z_1, z_{n-1} \rangle$, contradiciendo la longitud máxima de la graduación.

  - Si $k_t < 3 - n$, como $k_s = 1$ $z_i \in V_m$, con $m < 0$ y $1 \leq i \leq n-1$, $k_u \neq 0$ y $k_v \neq 0$ porque $\mathcal{L}$ es no estándar, entonces $V_0 = \langle 0 \rangle$. Pero eso no es posible ya que la graduación es conexa, como se puede observar en la siguiente gráfica.



  - Si $k_t > 3 - n$, entonces, igual que en casos anteriores, existe algún z_i con $1 \leq i \leq n-2$ tal que $z_i \in V_1 = \langle z_0 \rangle$, como se observa en la siguiente gráfica, llegando así a contradecir la hipótesis de longitud máxima.



Caso 2: Si $a_1 A_0 - 1 = 0,$ es útil considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } a_1\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0,}$ construimos la nueva base con los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_t}, \\
p_1 &= \widetilde{x_u}, \\
p_2 &= \widetilde{x_v}, \\
z_2 &= [p_1, z_0], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-2, \\
z_{n-1} &= [z_{n-3}, z_2],
\end{aligned}$$

donde

$$[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]]}_{i-veces} = (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-2,$$

$$z_{n-1} = [z_{n-3}, z_2] = (-1)^{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 x_{n-1}.$$

La matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1 & b_2 \\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1 & B_2 \\
0 & 0 & a_1\alpha_0 - \alpha_1 & (*) & (*) & \ldots & (*) & (*) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & (*) & \ldots & (*) & (*) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_1\alpha_0 - \alpha_1 & \ldots & (*) & (*) & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (-1)^{n-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & (*) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & 0 & 0 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 & \beta \\
\gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \ldots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \sigma & 1
\end{pmatrix}$$

con $\alpha_0 a_1 - \alpha_1 \neq 0$ y

$$det \begin{pmatrix}
1 & a_1 & b_1 & b_2 \\
A_0 & 1 & B_1 & B_2 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & 1 & \beta \\
\gamma_0 & \gamma_1 & \sigma & 1
\end{pmatrix} \neq 0,$$

por tanto es regular.

Entonces la graduación asociada está formada por los espacios V_{k_s}, V_{k_t}, V_{k_u}, V_{k_v}, $V_{k_u+k_s} \dots$, $V_{k_u+(n-3)k_s}$ y $V_{2k_u+(n-3)k_s}$, donde $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$, $p_1 \in V_{k_u}$ y $p_2 \in V_{k_v}$. Como es conexa sabemos que $k_s \neq k_t$.

Por hipótesis tenemos que $a_1 A_0 - 1 = 0$, entonces $A_0 \neq 0$, y por las propiedades (3.3) sabemos que $[z_2, z_1] \in \langle z_3 \rangle$. Así, de

$$\begin{cases} z_3 \in V_{k_u+2k_s}, \\ [z_2, z_1] \in V_{k_u+k_s+k_t}, \\ [z_2, z_1] = -A_0(\alpha_0 a_1 - \alpha_1)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_{n-1}, \end{cases}$$

se deduce que $k_s = k_t$.

Caso 2.2: Si $a_1\alpha_0 - \alpha_1 = 0,$ si $a_1\gamma_0 - \gamma_1 \neq 0$ podemos aplicar de nuevo el mismo razonamiento que en el Caso 2.1 sin más que considerar la base homogénea $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, p_1, p_2\}$ definida por:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x_s}, \\ z_1 &= \widetilde{x_t}, \\ p_1 &= \widetilde{x_u}, \\ p_2 &= \widetilde{x_v}, \\ z_2 &= [p_2, z_0], \\ z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-2, \\ z_{n-1} &= [z_{n-3}, z_2], \end{aligned}$$

donde

$$[[\widetilde{x_v}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \dots, \widetilde{x_s}}_{i-veces}]] = (-1)^{i+1}(\gamma_0 a_1 - \gamma_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-3,$$

$$z_{n-1} = [z_{n-3}, z_2] = (-1)^{n-3}(\gamma_0 a_1 - \gamma_1)^2 x_{n-1}.$$

Por otro lado, si $a_1\gamma_0 - \gamma_1 = 0$, usando el razonamiento seguido en el estudio de $\widetilde{L_n} \oplus \mathbb{C}$, se demuestra que no es posible obtener una base para que el álgebra tenga longitud máxima, quedando así probado el teorema.

□

CASO 2-FILIFORME

Gómez y Jiménez-Merchán estudian la clasificación de las álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente en dimensión arbitraria n en [23] y demuestran que, a partir de dimensión 10, si n es par existe una familia localmente finita de álgebras de Lie casifiliformes graduadas naturalmente no escindidas y un álgebra, mientras que si n es impar existen dos familias localmente finitas y un álgebra. Las leyes de estas álgebras o familias de álgebras vienen mostradas en los preliminares, en el Teorema 1.3.

Nótese que las extensiones de $(L_{n-1} \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ y $(Q_{n-1} \oplus \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ fueron ya estudiadas en la anterior sección.

Proposición 3.5. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme no estándar $(n+1)$-dimensional, cuya álgebra graduada naturalmente asociada es isomorfa a $L(n,r) \oplus \mathbb{C}$, con $n \geq 9$ y r impar. Entonces n es impar y el álgebra $\mathcal{L}$ es isomorfa al álgebra de Lie de longitud máxima:*

$$N : \begin{cases} [z_{i-1}, z_0] = z_i, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [z_{n-3}, z_1] = -z_{n-1}, & \\ [z_{n-4}, z_2] = z_{n-1}, & \\ [z_i, z_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} z_{n-1}, & 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor, \\ [p_1, z_0] = z_{n-1}. & \end{cases}$$

Demostración: La ley del álgebra $L(n,r)$ puede consultarse en el Teorema 1.3 de la sección de preliminares. Consideremos la base $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1\}$ y r impar. Así la graduación natural de $\mathcal{L}$ es $L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_{n-2}$ donde

$$L_1 = \langle x_0, x_1, y_1 \rangle, L_i = \langle x_i \rangle \text{ para } 2 \leq i \leq n-2 \text{ e } i \neq r \text{ y } L_r = \langle x_r, x_{n-1} \rangle.$$

Tómense los siguientes generadores para construir las bases adaptadas respecto a las cuales estudiaremos la ley del álgebra $\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{x_s} &= x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i + b_1 y_1, \\
\widetilde{x_t} &= A_0 x_0 + x_1 + \sum_{i=2}^{n-1} A_i x_i + B_1 y_1, \\
\widetilde{x_u} &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x_i + y_1,
\end{aligned}
$$

que verifican, por ser vectores linealmente independientes que

$$
det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ A_0 & 1 & B_1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.
$$

La ley de $\mathcal{L}$ está definida por los siguientes productos corchetes, donde, como en el resto de la memoria, los (*) representan las correspondientes constantes de estructura:

$$
\begin{cases}
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \\
[x_{r-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \\
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\
[y_1, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, &
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} [x_0, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [y_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, y_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 2 \leq i < j \leq n-4, \\ [x_j, x_i] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 2 \leq i < j \leq n-4. \end{cases}$$

Consideremos los productos de los generadores, de gran utilidad para el cambio de base:

$$\begin{aligned} [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (1 - a_1 A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (a_1 A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1} \end{aligned}$$

y distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0}$ construimos la base $\{z_0, \ldots, z_{n-1}, p_1\}$ tomando:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x_s}, \\ z_1 &= \widetilde{x_t}, \\ z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 2 \leq i \leq n-2, \\ z_{n-1} &= [z_{r-2}, z_2], \\ p_1 &= \widetilde{x_u}, \end{aligned}$$

donde

$$[[\widetilde{x}_t, \underbrace{\widetilde{x}_s], \widetilde{x}_s], \dots, \widetilde{x}_s]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(a_1A_0 - 1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, \text{ con } 2 \leq i \leq r-2,$$

$$[[\widetilde{x}_t, \underbrace{\widetilde{x}_s], \widetilde{x}_s], \dots, \widetilde{x}_s]}_{(r-1)-veces}] = (-1)^{r}(a_1A_0 - 1)x_{r} + (*)x_{r+1} + \cdots + (-1)^r(A_0a_1 - 1)a_1x_{n-1},$$

$$[[\widetilde{x}_t, \underbrace{\widetilde{x}_s], \widetilde{x}_s], \dots, \widetilde{x}_s]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(a_1A_0 - 1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, \text{ con } r \leq i \leq n-3,$$

$$[z_{r-2}, z_2] = (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2} + (-1)^{r-2}(a_1A_0 - 1)^2x_{n-1}.$$

La matriz del cambio de base correspondiente es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1 \\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \dots & A_r & A_{r+1} & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1 \\
0 & 0 & C_2 & (*) & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_3 & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0 \\
\vdots 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_r & (*) & \dots & (*) & C_ra_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{r+1} & \dots & (*) & (*) & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & C_{n-2} & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (*) & \dots & (*) & C_{r-2}(a_1A_0 - 1) & 0 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_r & \alpha_{r+1} & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1
\end{pmatrix}$$

siendo $C_i = (-1)^i(a_1A_0 - 1)$.

Tomemos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, así $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \leq i \leq n-2$ y $z_{n-1} \in V_{2k_t+(r-2)k_s}$ y la graduación de longitud máxima asociada obtenida es

$$\mathcal{L} = V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{2k_t+(r-2)k_s} \oplus V_{k_u}.$$

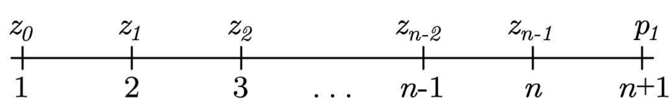
Análogamente a los estudios anteriores, podemos tomar $k_s = 1$ sin pérdida de generalidad, aunque mantendremos la notación k_s para que el estudio sea más claro. La graduación, por ser de longitud máxima, verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ \text{todos los subespacios de la graduación son de dimensión } 1, \\ k_s, k_t \text{ y } k_u \text{ son distintos de cero,} \\ \text{ningún subespacio de la graduación es nulo.} \end{cases} \tag{3.4}$$

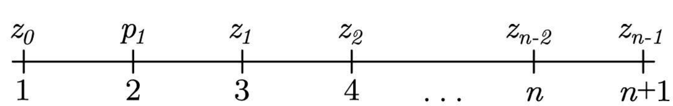
A continuación estudiemos los valores admisibles de k_t y k_u.

- Si $k_t > 0$, podemos diferenciar tres casos:
  - Si $k_t = 2$, tenemos $2k_t + (r-2)k_s = r + 2$ con $3 \leq r \leq 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1 \leq n-2$. Entonces, como la graduación es conexa y tiene longitud máxima, se afirma que $r = n-2$. En caso contrario, habría más vectores de la base que subespacios de la graduación, por tanto existiría algún $i \in [1, n-2]$ tal que z_i y z_{n-1} pertenecerían al mismo espacio graduante, contradiciendo las propiedades (3.4).

    Como $k_t = 2$ y $r = n-2$ la graduación se distribuye como muestra la gráfica y entonces necesariamente obtenemos que el generador p_1 pertenece al espacio V_{n+1} y por tanto $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$.

    Esto implica que $\mathcal{L}$ es un álgebra estándar, llegando así a contradicción.
  - Si $k_t = 3$, se tiene $2k_t + (r-2)k_s = r + 4$. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, se puede asegurar que $r = n-3$. Entonces necesariamente $k_u = 2$, pues la graduación es conexa (ver la gráfica).

De las propiedades (3.4) obtenemos:

$$(P1) \quad [z_0, p_1] = 0, \text{ por tanto } a_1\alpha_0 - \alpha_1 = 0,$$
$$(P2) \quad [z_1, p_1] = Az_3, \text{ entonces } \alpha_0 - A_0\alpha_1 = 0,$$

de donde se deduce que $\alpha_1 = 0$ ó $a_1 A_0 = 1$. Como estamos bajo la restricción $a_1 A_0 \neq 1$, es evidente que $\alpha_1 = 0$. Además gracias a $(P2)$ se tiene que $\alpha_0 = 0$.

Por las propiedades (3.4) se afirma que

$$[z_i, p_1] = Az_{i+2} \text{ con } 1 \leq i \leq n-3.$$

Por otro lado, por la ley de $\mathcal{L}$ podemos escribir:

$$[z_i, p_1] = (*)x_{i+3} + \cdots + (*)x_{n-1} \text{ con } 2 \leq i \leq n-4,$$

es decir, $[z_i, p_1] = Bz_j$ con $j \geq i+3$ y $B \in \mathbb{C}$. De ambas expresiones se deduce que $[z_i, p_1] = 0$ para $1 \leq i \leq n-3$.

Por último, como $k_s = 1$ y $k_t = 3$

$$\begin{cases} p_1 \in V_2, \\ z_2 \in V_4, \\ [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \end{cases}$$

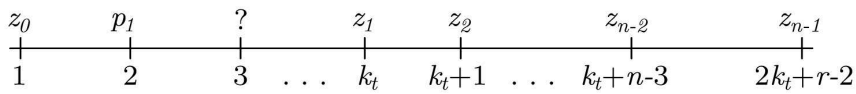
afirmamos que $[p_1, p_1] = Bz_2$ con $B \in \mathbb{C}$.

Por la ley del álgebra podemos escribir:

$$[p_1, p_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.$$

Así concluimos que $[p_1, p_1] = 0$.

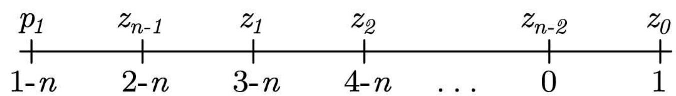
Es fácil ver que $[z_{n-2}, p_1] = [z_{n-1}, p_1] = 0$ sin más que usar la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$. De esto modo, se ha probado que $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, es decir, que $\mathcal{L}$ es estándar, lo cual es imposible.



- Si $k_t > 3$, entonces $V_2 = \langle 0\rangle$ ó $V_3 = \langle 0\rangle$, contradiciendo así la conectividad de la graduación (ver la gráfica para mayor claridad).

- Si $k_t < 0$, las posibilidades son:

  - Si $k_t = 3 - n$ y $k_u = 1 - n$, como $k_s = 1$ y la graduación es conexa, tenemos $2k_t + (r-2)k_s = 2 - n$, es decir, $r = n - 2$, obteniendo el siguiente gráfico.



Razonando análogamente al caso anterior, es fácil comprobar que

$[p_1, z_i] = 0 = [z_i, p_1]$ para $1 \le i \le n{-}1$, $[p_1, p_1] = 0$, $[z_{n-2}, z_0] = 0$ y $[z_{n-1}, z_0] = 0$.

Entonces, considerando los productos $[p_1, z_0]$ y $[p_1, z_1]$ se afirma que $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Como $[p_1, z_0] = \alpha z_{n-1}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$, es trivial ver que $p_1 = \alpha_{n-2}x_{n-2} + \alpha_{n-1}x_{n-1} + y_1$.

A continuación se estudian los productos $[z_i, z_1]$ para $2 \le i \le n-1$ y $[z_i, z_j]$ para $3 \le i < j \le n-1$, para conocer la ley de $\mathcal{L}$ respecto a la nueva base.

Veamos primero $[z_i, z_1]$ con $1 \le i \le n-1$. Por las propiedades de la graduación (3.4) y los valores que estamos considerando para k_s, k_t, k_u y r, los únicos productos que pueden no ser cero son $[z_{n-4}, z_1]$, $[z_{n-3}, z_1]$ y $[z_{n-2}, z_1]$.

Como

$$\begin{cases} [z_{n-4}, z_1] \in V_{1-n}, \\ V_{1-n} = \langle p_1\rangle, \\ [z_{n-4}, z_1] \in \mathcal{L}^p \text{ con } p \ge 2, \\ p_1 \in \mathcal{L}/\mathcal{L}^2, \end{cases}$$

se deduce que $[z_{n-4}, z_1] = 0$.

Por las propiedades de la graduación (3.4) también se tiene

$$[z_{n-3}, z_1] = \gamma z_{n-1} \text{ con } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Pasemos ahora a calcular $[z_i, z_j]$ con $2 \leq i < j \leq n-3$.

Como

$$\begin{cases} z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}, \\ z_j \in V_{k_t+(j-1)k_s}, \\ [V_i, V_j] \in V_{i+j}, \end{cases}$$

se tiene $[z_i, z_j] \in V_{2k_t+(i+j-2)k_s}$. Entonces como $k_t = 3-n$, $k_s = 1$ y $z_i \in V_p$ con $1-n \leq p \leq 0$, los único productos no nulos son $[z_i, z_{n-2-i}] = \beta_i z_{n-1}$, con $\beta_i \in \mathbb{C}$.

Basta probar que $[z_0, z_i] = -[z_i, z_0]$ con $0 \leq i \leq n-1$, $[z_0, p_1] = -\alpha z_{n-1}$ y $[z_1, p_1] = 0$, para poder aplicar el Teorema 2.1 y así afirmar que $\mathcal{L}$ es un álgebra de Lie.

Usando el mismo razonamiento se obtiene que $[z_0, p_1] = -\alpha z_{n-1}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Usando la ley de $\mathcal{L}$ sabemos que

$$[z_0, z_i] = (1 - a_1 A_0)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} = -z_{i+1} \text{ con } 1 \leq i \leq n-2.$$

Por otro lado $[z_0, z_0] \in V_2 =< 0 >$ y $[z_0, z_{n-1}] \in V_{3-n} =< z_1 >$. Como además $[z_0, z_{n-1}] \in \mathcal{L}^p$ con $p > 2$ y $z_1 \in \mathcal{L}/\mathcal{L}^2$, evidentemente afirmamos que $[z_0, z_{n-1}] = 0$.

Como $[z_1, p_1] \in V_{4-2n} =< 0 >$, entonces $[z_1, p_1] = 0$.

Gracias a los cálculos anteriores, hemos obtenido el álgebra de Lie de longitud máxima:

$$\mathcal{L}:\begin{cases}[z_{i-1},z_0]=z_i, \quad 2\leq i\leq n-2,\\ [z_{n-3},z_1]=\gamma z_{n-1},\\ [z_{n-4},z_2]=z_{n-1},\\ [z_i,z_{n-2-i}]=\beta_i z_{n-1}, \quad 3\leq i\leq \lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor,\\ [p_1,z_0]=\alpha z_{n-1},\end{cases}$$

cuya graduación es

$$V_{1-n}=<p_1>\oplus V_{2-n}=<z_{n-1}>\oplus V_{3-n}=<z_1>\oplus\cdots\oplus V_0=<z_{n-2}>\oplus V_1=<z_0>.$$

Observar que si $\alpha=0$ entonces $p_1\in Cent(\mathcal{L})$ y el álgebra sería estándar. Entonces, sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\alpha=1$. Es suficiente hacer el cambio de base:

$$z_i^{'}=z_i, \text{ con } 1\leq i\leq n-1,$$
$$p_1^{'}=\frac{1}{\alpha}p_1.$$

Además, por inducción sobre i, $\beta_i=(-1)^{i-1}$ para $3\leq i\leq\lfloor\frac{n-3}{2}\rfloor$.

Para $i=3$, aplicando la identida de Leibniz, se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\beta_3 z_{n-1}=[z_3,z_{n-5}]=[[z_2,z_0],z_{n-5}]=[z_2,[z_0,z_{n-5}]]+[[z_2,z_{n-5}],z_0]=$$

$$=-[z_2,z_{n-4}]+0=z_{n-1},$$

entonces $\beta_3=1$.

Supongamos la igualdad cierta para $i-1$ y probémosla para i, utilizando de nuevo la identidad de Leibniz:

$$\beta_i z_{n-1}=[z_i,z_{n-2-i}]=[[z_{i-1},z_0],z_{n-2-i}]=[z_{i-1},[z_0,z_{n-2-i}]]+[[z_{i-1},z_{n-2-i}],z_0]$$
$$=-[z_{i-1},z_{n-1-i}]=-(-1)^{i-2}z_{n-1}=(-1)^{i-1}z_{n-1}.$$

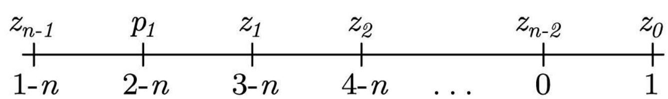
Por otro lado, aplicando la identidad de Leibniz al producto $[z_0,[z_1,z_{n-4}]]$ obtenemos que $\gamma=-1$.

Por último, si n es par se llega a una contradicción aplicando de nuevo la identidad de Leibniz al producto $[z_0,[z_{\frac{n-4}{2}},z_{\frac{n-2}{2}}]]$, pues

$$0=[z_0,[z_{\frac{n-4}{2}},z_{\frac{n-2}{2}}]]=(-1)^{\frac{n-4}{2}}z_{n-1}.$$

Sin embargo, cuando n es impar, ese producto no existe y obtenemos el álgebra N.

- Si $k_t=3-n$ y $k_u=2-n$, razonando análogamente a los casos anteriores, se tiene que $r=n-3$. Los vectores de la base se distribuyen en los subespacios de la graduación según se muestra en la siguiente gráfica:



Por la propiedad $[V_i,V_j]\subseteq V_{i+j}$, tenemos que $[p_1,z_0]=Az_1$ con $A\in\mathbb{C}$. Esto es imposible pues z_1 es un generador del álgebra, es decir, $z_1\in L/L^2$. Así, $[p_1,z_0]=0$ y por tanto $a_1\alpha_0-\alpha_1=0$.

Veamos que $[p_1,z_i]=0$ para $1\le i\le n-4$. Como $k_s=1$, se tiene

$$\begin{cases} p_1\in V_{2-n}, \\ z_i\in V_{2-n+i} \text{ con } 1\le i\le n-4, \\ V_j=\langle 0\rangle \text{ con } j\le 1-n, \\ [V_i,V_j]\in V_{i+j}, \end{cases}$$

así, $[p_1,z_i]=0$ para $1\le i\le n-4$. En particular, tenemos

$$[p_1,z_1]=(\alpha_0-A_0\alpha_1)x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-1}=0,$$

es decir, $\alpha_0-A_0\alpha_1=0$. De esta igualdad y de la restricción tomada $a_1A_0-1\neq 0$ se deduce que $\alpha_0=0$ y $\alpha_1=0$.

Por otro lado, como

$$\begin{cases} p_1 \in V_{2-n}, \\ z_{n-3} \in V_{-1}, \\ z_{n-1} \in V_{1-n}, \\ [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \end{cases}$$

se tiene que $[p_1, z_{n-3}] = Az_{n-1}$ con $A \in \mathbb{C}$, pero

$$[p_1, z_{n-3}] = [\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1}x_{n-1} + y_1, (-1)^{n-3}(A_0 a_1 - 1)x_{n-3} + (*)x_{n-2}] = 0,$$

concluyendo así que $[p_1, z_{n-3}] = 0$.

Además, $[p_1, z_{n-2}] = 0$ y $[z_{n-2}, p_1] = 0$ porque $z_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$.

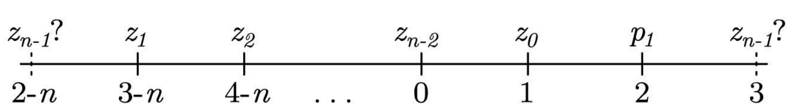
También tenemos que $[p_1, z_{n-1}] = 0$ pues

$$\begin{cases} p_1 \in V_{2-n}, \\ z_{n-1} \in V_{1-n}, \\ V_j = \langle 0 \rangle \text{ con } j \leq 1-n, \\ [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}. \end{cases}$$

Finalmente, $[p_1, p_1] = 0$, ya que $[p_1, p_1] \in V_{4-2n} = \langle 0 \rangle$.

Concluimos así que $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, y por tanto $\mathcal{L}$ es un álgebra estándar, llegando a contradicción.

- Si $k_t = 3-n$ y $k_u = 2$, bajo estas restricciones, tenemos dos opciones para que la graduación sea conexa: o bien $z_{n-1} \in V_3$ o bien $z_{n-1} \in V_{2-n}$, como se muestra a continuación:



Si suponemos $z_{n-1} \in V_3$, como $k_s = 1$ se tiene $2k_t + (r-2)k_s = 2(3-n) + r - 2 = 3$, es decir, $r = 2n-1$, imposible pues $3 \leq r \leq 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$ y $n \geq 5$. Por lo tanto, necesariamente $z_{n-1} \in V_{2-n}$. Entonces $r = n-2$ y podemos asegurar que $z_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$.

Es fácil comprobar que todos estos productos $[z_0, z_0]$, $[z_1, z_1]$, $[p_1, p_1]$, $[p_1, z_0]$, $[p_1, z_{n-3}]$, $[p_1, z_{n-2}]$ $[z_0, p_1]$, $[z_{n-3}, p_1]$ y $[z_{n-2}, p_1]$ son nulos, usando las propiedades (3.4)y de la sucesión central descendente.

Calculemos el resto de productos para conocer la ley del álgebra respecto a la nueva base.

Como

$$\begin{cases} p_1 \in V_2, \\ z_{n-1} \in V_{2-n}, \\ z_2 \in V_{4-n}, \\ [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \end{cases}$$

se tiene que $[p_1, z_{n-1}] = Az_2$ con $A \in \mathbb{C}$. Pero por la ley del álgebra podemos escribir:

$$[p_1, z_{n-1}] = (*)x_{r+2} + \cdots + (*)x_{n-2},$$

es decir,

$$[p_1, z_{n-1}] = Bz_i \text{ con } r+2 \leq i \leq n-2,\ B \in \mathbb{C},$$

por tanto $[p_1, z_{n-1}] = 0$. Análogamente, se prueba que $[z_{n-1}, p_1] = 0$.

Es fácil ver, por las propiedades (3.4), que los únicos posibles productos de la forma $[z_i, z_1]$ con $2 \leq i \leq n-1$ no nulos son $[z_{n-3}, z_1]$ y $[z_{n-2}, z_1]$. La misma conclusión se extrae para $[z_1, z_i]$, con $2 \leq i \leq n-1$. Como $z_{n-2} \in Cent(\mathcal{L})$ se tiene $[z_{n-2}, z_1] = 0$ y $[z_1, z_{n-2}] = 0$.

Por la ley de $\mathcal{L}$ tenemos:

$$[z_{n-3}, z_1] = (-1)^{n-2}(a_1A_0 - 1)A_0x_{n-2} + (*)x_{n-1}$$

$$[z_1, z_{n-3}] = (-1)^{n-3}(a_1A_0 - 1)A_0x_{n-2} + (*)x_{n-1}$$

y por las propiedades (3.4) aseguramos que

$$[z_{n-3}, z_1], [z_1, z_{n-3}] \in V_{2-n} =< z_{n-1} > .$$

Entonces $A_0 = 0$ y por tanto $[z_{n-3}, z_1] = \beta z_{n-1}$ y $[z_1, z_{n-3}] = \gamma z_{n-1}$.

Usando las propiedades (3.4), tenemos $[p_1, z_i] \in V_{k_t+(i+1)k_s}$, es decir:

$$[p_1, z_i] = C_i z_{i+2} \quad \text{y} \quad [z_i, p_1] = D_i z_{i+2} \text{ con } 1 \leq i \leq n-4.$$

Además como

$$\begin{cases} [p_1, z_i] + [z_i, p_1] \in R(\mathcal{L}), \\ [p_1, z_i] = C_i z_{i+2}, \\ [z_i, p_1] = D_i z_{i+2} \text{ para } 1 \leq i \leq n-4, \\ z_i \notin R(\mathcal{L}) \text{ para } 3 \leq i \leq n-3, \end{cases}$$

deducimos que $C_i = -D_i$, con $1 \leq i \leq n-5$. Para $i = n-4$ se tiene $[z_{n-4}, p_1] = -[p_1, z_{n-4}]$, sin más que considerar la ley el álgebra.

Probemos, por inducción, que $C_i = C_1$ para $2 \leq i \leq n-4$. Para $i = 2$ tenemos

$$C_2 z_4 = [p_1, z_2] = [p_1, [z_1, z_0]] = [[p_1, z_1], z_0] - [[p_1, z_0], z_1] = [C_1 z_3, z_0] = C_1 z_4.$$

Supongámoslo cierto para k y probémoslo para $k+1$:

$$C_{k+1} z_{k+3} = [p_1, z_{k+1}] = [p_1, [z_k, z_0]] = [[p_1, z_k], z_0] - [[p_1, z_0], z_k] = [C_k z_{k+2}, z_0] = C_k z_{k+3},$$

por lo que queda probado que la igualdad $C_i = C_1$ es cierta para todo $2 \leq i \leq n-4$.

Como se tiene

$$\begin{cases} [z_i, z_j] \in V_{2k_t+(i+j-2)k_s}, \\ [z_i, z_j] \in V_m \text{ con } 2-n \leq m \leq 0, \\ k_t = 3-n, \\ k_s = 1, \end{cases}$$

los únicos valores posibles de $i+j$ son $n-2$ y $n-1$.

Por la ley de $\mathcal{L}$ tenemos, para $2 \leq i \leq n-5$, que si $i+j=n-1$:

$$[z_i, z_{n-1-i}] = [x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, x_{n-1-i} + (*)x_{n-i} + \cdots + (*)x_{n-1}] = 0,$$

y si $i+j=n-2$:

$$[z_i, z_{n-2-i}] = [x_i + (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, x_{n-2-i} + (*)x_{n-1-i} + \cdots + (*)x_{n-1}] =$$
$$= (-1)^{i-1}x_{n-1} = \delta_i z_{n-1}.$$

Concluimos entonces que los únicos productos no nulos de la forma $[z_i, z_j]$ son

$$[z_i, z_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}z_{n-1}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-5,$$
$$[z_{n-3}, z_1] = \beta z_{n-1},$$
$$[z_1, z_{n-3}] = \gamma z_{n-1}.$$

La igualdad $[z_0, z_i] = -z_{i+1}$ para $1 \leq i \leq n-3$, se obtiene directamente de la ley de $\mathcal{L}$ y de las propiedades (3.4).

Es fácil ver que $\beta = -1$ pues

$$0 = [z_0, [z_1, z_{n-4}]] = [[z_0, z_1], z_{n-4}] - [[z_0, z_{n-4}], z_1] = z_{n-1} + [z_{n-3}, z_1] = (1+\beta)z_{n-1}.$$

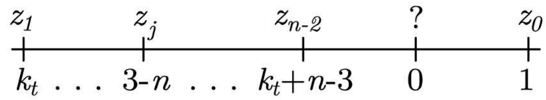
Aplicando la identidad de Leibniz a $[z_1, [z_{n-5}, p_1]]$, se prueba que $\alpha_1 = 0$, ya que

$$[z_1, [z_{n-5}, p_1]] = [[z_1, z_{n-5}], p_1] - [[z_1, p_1], z_{n-5}] = C_1[z_3, z_{n-5}] = (-1)^2 C_1 z_{n-1} =$$
$$= C_1 z_{n-1}.$$

Por otro lado tenemos

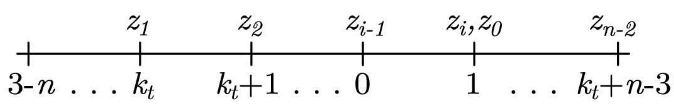
$$[z_1, -C_1 z_{n-3}] = -C_1[z_1, z_{n-3}] = C_1\beta z_{n-1} = -C_1 z_{n-1}.$$

De ambas afirmaciones se deduce que $C_1 = 0$ y $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, es decir, que $\mathcal{L}$ es un álgebra estándar, lo cual es imposible.



- Si $k_t \neq 3-n$, entonces no es posible que nuestra graduación sea conexa ya que siempre obtendremos $V_0 =< 0 >$

  o bien la graduación no es de longitud máxima, como muestra la gráfica



  Esto es consecuencia de que $z_i \in V_m$ con $m < 0$ mientras $1 \leq i \leq n-2$, $z_0 \in V_1$, $p_1 \in V_{k_u}$ pero $k_u \neq 0$ y $z_{n-1} \notin V_0$ ya que $3 \leq r \leq 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1$.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 A_0 - 1 = 0,}$ podemos reescribir los productos de los generadores como:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= (-\alpha_1 + a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= (-A_0\alpha_1 + \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Considerando los siguientes productos corchetes

$$\begin{aligned}
[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \dots, \widetilde{x_s}]]}_{i-veces} &= (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \\
&\text{con } 2 \le i \le r-2, \\
[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \dots, \widetilde{x_s}]]}_{(r-1)-veces} &= (-1)^{r}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{r} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2} + \\
&+ a_1(-1)^r(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{n-1}, \\
[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \dots, \widetilde{x_s}]]}_{i-veces} &= (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2} \\
&\text{con } r \le i \le n-3,
\end{aligned}$$

se pueden distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Case 2.1: Si } a_1\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0,}$ construimos la base homogenea $\{z_0, \dots, z_{n-1}, p_1\}$ con los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_t}, \\
p_1 &= \widetilde{x_u}, \\
z_2 &= [p_1, z_0], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0] \text{ con } 3 \le i \le n-2, \\
z_{n-1} &= [z_{r-2}, z_2] = (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2} + (-1)^{r-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, entonces $z_i \in V_{k_u+(i-1)k_s}$, con $2 \le i \le n-2$ y $z_{n-1} \in V_{2k_u+(r-2)k_s}$. Así la graduación de longitud máxima asociada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_u+(r-2)k_s}.$$

Para llegar a contradicción con haber supuesto longitud máxima, basta calcular los productos $[z_i, z_1]$ con $2 \le i \le n-3$.

Por la ley del álgebra tenemos que

$$[z_i, z_1] = [(-1)^i(\alpha_0 a_1 - \alpha_1)x_i + \cdots + (*)x_{n-1}, A_0x_0 + x_1 + \cdots + (*)x_{n-1}] = A_0 z_{i+1},$$

con $3 \leq i \leq r-2$, pero por otro lado, debido a las propiedades (3.4) se sabe que

$$[z_i, z_1] \in V_{k_u+(i-1)k_s+k_t} \text{ y } z_{i+1} \in V_{k_u+ik_s}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-2.$$

Esto implica que o bien $k_t = k_s$, lo cual contradice la longitud máxima de la graduación, o bien $A_0 = 0$, lo cual es imposible pues $a_1A_0 - 1 = 0$.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } \alpha_1 - a_1\alpha_0 = 0,}$ no es posible construir una base homogénea a partir de los generadores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$, ya que como

$$A_0a_1 = 1 \quad \text{y} \quad \alpha_1 - a_1\alpha_0 = 0,$$

los productos de los generadores tiene las siguientes expresiones:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$

siendo imposible generar el vector z_2, en la nueva base.

□

Proposición 3.6. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme $(n+1)$-dimensional, cuya álgebra graduada naturalmente asociada es isomorfa a $Q(n,r) \oplus \mathbb{C}$, con n y r impares, $n \geq 7$ y $3 \leq r \leq n-4$. Entonces $\mathcal{L}$ no es un álgebra no estándar.*

Demostración: Tomemos $\mathcal{L}$ bajo las hipótesis de la proposición y supongamos, por reducción al absurdo, que es un álgebra no estándar.

La extensión de $Q(n,r) \oplus \mathbb{C}$, vía la graduación natural:

$$L_1 =< x_0, x_1, y_1 > \oplus L_2 =< x_2 > \oplus \cdots \oplus L_{r-1} =< x_{r-1} > \oplus L_r =< x_r, x_{n-1} > \oplus$$

$$\oplus L_{r+1} =< x_{r+1} > \oplus \cdots \oplus L_{n-2} =< x_{n-2} >,$$

está definida por:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq r-2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq r-2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & r-1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}, & r-1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_{r-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \\
[x_{r-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{r-1}{2}, \\
[x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\
[x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\
[x_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 2 \leq i \leq n-3, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3,
\end{cases}$$

$$\begin{cases} [y_1, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n-4, \ i+j \neq r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i+j \neq n-2. \end{cases}$$

Usaremos los generadores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$, $\widetilde{x_u}$ definidos en la anterior proposición y sus productos:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= -(a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0}$ consideremos los vectores:

$$[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(A_0a_1 - 1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}$$

con $2 \leq i \leq r-2$,

$$[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{(r-1)-veces}] = (-1)^{r}(A_0a_1 - 1)x_{r} + (*)x_{r+1} + \cdots + (-1)^{r}(A_0a_1 - 1)a_1x_{n-1},$$

$$[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(A_0a_1 - 1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2}$$

con $r \leq i \leq n-4$,

$$[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{(n-3)-veces}] = (-1)^{n-2}(A_0a_1 - 1)(1 + a_1)x_{n-2},$$

para la construcción de la nueva base y tomemos las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } a_1+1\neq 0,}$ la base estará formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 2\le i\le n-2,\\
z_{n-1} &= [z_{r-2}, z_2] = (-1)^{r-2}(A_0a_1-1)^2x_{n-1}+(*)x_{r+1}+\dots(*)x_{n-2},\\
p_1 &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}
$$

La matriz del cambio de base es

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r & a_{r+1} & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \dots & A_r & A_{r+1} & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1\\
0 & 0 & C_2 & (*) & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0\\
0 & 0 & 0 & C_3 & \dots & (*) & (*) & \dots & (*) & (*) & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_r & (*) & \dots & (*) & C_ra_1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{r+1} & \dots & (*) & (*) & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & C_{n-2}(1+a_1) & (*) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (*) & \dots & (*) & (-1)^{r-2}(a_1A_0-1)^2 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_r & \alpha_{r+1} & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1
\end{pmatrix}
$$

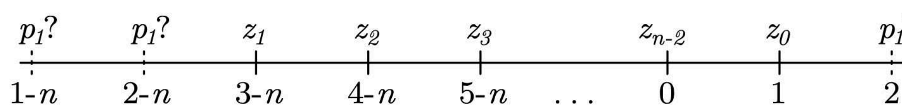
siendo $C_i=(-1)^i(a_1A_0-1)$ con $2\le i\le n-2$. Como $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ son vectores linealmente independientes y tenemos $1+a_1\neq 0$ y $a_1A_0-1\neq 0$, la matriz es regular.

Si tomamos $z_0\in V_{k_s}$, $z_1\in V_{k_t}$ y $p_1\in V_{k_u}$, entonces $z_i\in V_{k_t+(i-1)k_s}$, con $2\le i\le n-2$ y $z_{n-1}\in V_{2k_t+(r-2)k_s}$. Así la graduación de longitud máxima asociada a esta nueva base homogénea es:

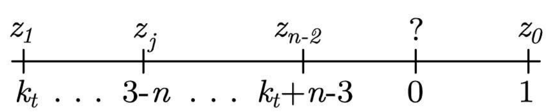
$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+(n-3)k_s}\oplus V_{2k_t+(r-2)k_s}\oplus V_{k_u}.$$

Aplicando de nuevo los argumentos y herramientas usados en el estudio de $\widetilde{L}(n,r)\oplus\mathbb{C}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k_s = 1$ y nos encontramos con las siguientes posibilidades:

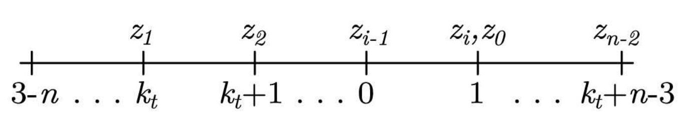
- Si $k_t > 0$, podemos distinguir:
    - Si $k_t = 2$, se obtiene $r = n-2$, que es imposible ya que $3 \leq r \leq n-4$.
    - Si $k_t = 3$, obtenemos $k_u = 2$ y $r = n-3$, pero estamos suponiendo que $r \leq n-4$.
    - Si $k_t > 3$, se obtendría $V_2 = \langle 0\rangle$ ó $V_3 = \langle 0\rangle$, que es imposible por conectividad.
- Si $k_t < 0$, distinguinos:
    - Si $k_t = 3-n$, por las propiedades de la graduación se deduce que los valores admisibles de k_u son $1-n, 2-n$ ó 2, como se muestra en la siguiente gráfica



        - Si $k_u = 1-n$, se deduce que $r = n-2$, lo cual es imposible.
        - Si $k_u = 2-n$, conduce a $r = n-3$, siendo esto imposible.
        - Si $k_u = 2$, obtenemos de nuevo $r = n-3$, que es imposible.
    - Si $k_t \neq 3-n$, se obtendría $V_0 =< 0 >$, que no es posible pues la graduación es conexa



o bien la graduación no es de longitud máxima, como muestra la gráfica



$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } a_1 + 1 = 0,}$ está claro que $A_0 \neq -1$. En caso contrario tendríamos $a_1 A_0 = 1$, lo cual es imposible.

Tomemos las nueva base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_t}, \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 2 \leq i \leq n-3, \\
z_{n-2} &= [z_{n-3}, z_1] = (-1)^{n-2}(a_1 A_0 - 1)(A_0 + 1)x_{n-2}, \\
z_{n-1} &= [z_{r-2}, z_2], \\
p_1 &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}$$

Supongamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, entonces $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$, con $2 \leq i \leq n-3$, $z_{n-2} \in V_{2k_t+(n-4)k_s}$ y $z_{n-1} \in V_{2k_t+(r-2)k_s}$. Así, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(r-2)k_s} \oplus V_{k_u}.$$

Nótese que bajo las hipótesis tomadas, es evidente que la matriz del cambio de base es regular y su expresión es

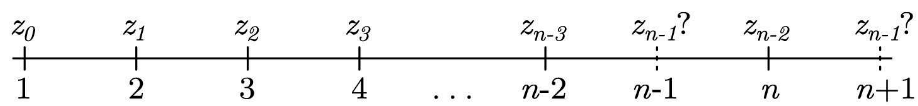
$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_r & a_{r+1} & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1 \\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_r & A_{r+1} & \ldots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1 \\
0 & 0 & C_2 & (*) & \ldots & (*) & (*) & \ldots & (*) & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_3 & \ldots & (*) & (*) & \ldots & (*) & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_r & (*) & \ldots & (*) & C_r a_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_{r+1} & \ldots & (*) & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & C_{n-2}(A_0+1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (*) & \ldots & (*) & (-1)^{r-2}(a_1 A_0 - 1)^2 & 0 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_r & \alpha_{r+1} & \ldots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1
\end{pmatrix}$$

denotando por $C_i = (-1)^i(a_1A_0 - 1)$, con $2 \leq i \leq n-2$.

Análogamente a casos anteriores, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $k_s = 1$, aunque mantendremos a veces la notación k_s por claridad en el estudio. Según los valores de k_t podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $k_t > 0$, consideramos:

  - Si $k_t = 2$, como $k_s = 1$ y la graduación es conexa tenemos que, o bien $V_{2k_t+(r-2)} = V_{n-1}$ o bien $V_{2k_t+(r-2)} = V_{n+1}$, como muestra la gráfica. Es decir, que $r = n-3$ ó $r = n-1$, pero esos son valores no admisibles para r pues $3 \leq r \leq n-4$.

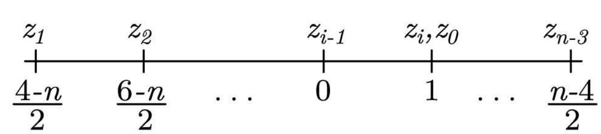


  - Si $k_t \neq 2$, la graduación obtenida no puede ser conexa ya que siempre quedaría un espacio de la graduación generado únicamente por el vector nulo, y esto está en contradicción con la definición de longitud máxima.

- Si $k_t < 0$ podemos distinguir:

  - Si $k_t = 4-n$, obtendríamos $V_{k_t} = V_{2k_t+(n-4)k_s}$, lo que es imposible pues $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima.

  - Si $k_t = \frac{4-n}{2}$, entonces la graduación no tendría longitud máxima porque habría $n-4$ vectores entre V_{k_t} y V_0, pero entre ambos espacios sólo hay $\frac{n-4}{2}$ espacios graduantes, como muestra la siguiente gráfica.



  Es decir, existe un elemento de la base z_i con $2 \leq i \leq n-4$ tal que $V_1 = \langle z_0, z_i \rangle$, llegando a contradicción.

- Si $k_t \neq 4-n$ y $k_t \neq \frac{4-n}{2}$, la longitud de $\mathcal{L}$ es menor que la dimension de $\mathcal{L}$ ya que $3 \leq r \leq n-4$ y $n \geq 7$. Esto implica que existe al menos un vector z_i, con $1 \leq i \leq n-4$ que pertenece al subespacio $V_1 = \langle z_0 \rangle$ o que el subespacio $V_0 =< 0 >$.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1A_0 - 1 = 0,}$ podemos reescribir el producto de los generadores como:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= -(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= (a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},
\end{aligned}
$$

y considerar los siguientes vectores, que serán de gran utilidad para construir la nueva base homogénea:

$$
\begin{aligned}
[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] &= (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \quad \text{con } 2 \leq i \leq r-2,\\
[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{(r-1)-veces}] &= (-1)^{r}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{r} + (*)x_{r+1} + \ldots (*)x_{n-2} + (-1)^r(a_1\alpha_0 - \alpha_1)a_1x_{n-1},\\
[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] &= (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-2} \quad \text{con } r \leq i \leq n-4,\\
[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{(n-3)-veces}] &= (-1)^{n-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)(1 + a_1)x_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Consideremos las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } (a_1\alpha_0 - \alpha_1) \neq 0,}$ construimos la base formada por los vectores:

$$z_0 = \widetilde{x_s},$$
$$z_1 = \widetilde{x_u},$$
$$z_i = [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 2 \leq i \leq n-3,$$
$$z_{n-2} = [z_{n-4}, z_2] = (-1)^{n-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 x_{n-2},$$
$$z_{n-1} = [z_{r-2}, z_2] = (-1)^{r-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2},$$
$$p_1 = \widetilde{x_t}.$$

Bajo las hipótesis consideradas, es trivial ver que la matriz del cambio de base es regular, cuya expresión es

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_r & a_{r+1} & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_r & \alpha_{r+1} & \ldots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1 \\
0 & 0 & C_2 & (*) & \ldots & (*) & (*) & \ldots & (*) & (*) & 0 \\
0 & 0 & 0 & C_3 & \ldots & (*) & (*) & \ldots & (*) & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_r & (*) & \ldots & (*) & C_r a_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & C_{r+1} & \ldots & (*) & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & C_{n-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & (*) & \ldots & (*) & (-1)^{r-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 & 0 \\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_r & A_{r+1} & \ldots & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1
\end{pmatrix}$$

siendo $C_i = (-1)^i(a_1\alpha_0 - \alpha_1)$, con $2 \leq i \leq n-2$.

Supongamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_u}$ y $p_1 \in V_{k_t}$, entonces $z_i \in V_{k_u+(i-1)k_s}$, con $2 \leq i \leq n-3$, $z_{n-2} \in V_{2k_u+(n-4)k_s}$ y $z_{n-1} \in V_{2k_u+(r-2)k_s}$. Así, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_u+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_u+(r-2)k_s} \oplus V_{k_t}.$$

Como en casos anteriores podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $k_s = 1$.

Es suficiente calcular el producto $[z_2, p_1]$ para probar que es imposible que $\mathcal{L}$ tenga longitud máxima en este caso. Por la ley del álgebra tenemos:

$$[z_2, p_1] = [(-1)^2(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, A_0x_0 + x_1 + \cdots + A_{n-1}x_{n-1}] = A_0z_3.$$

Por las propiedades de la graduación tenemos

$$\begin{cases} z_2 \in V_{k_u+k_s}, \\ p_1 \in V_{k_t}, \\ z_3 \in V_{k_u+2k_s}, \end{cases}$$

por lo tanto $[z_2, p_1] \in V_{k_u+k_s+k_t}$, lo cual implica que $k_t = k_s$ ó $A_0 = 0$. Pero esto último es imposible, ya que $A_0 \neq 0$ por las restricciones tomadas y $k_t = k_s$ tampoco es posible porque $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } \alpha_1 - a_1\alpha_0 = 0,}$ no es posible construir una base a partir de los generadores ya que:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},
\end{aligned}$$

no pudiendo generar nunca el vector z_2.

Este caso completa la prueba de la proposición.

□

Proposición 3.7. *No existe ningún álgebra de Leibniz 3-filiforme no estándar $(n+1)$-dimensional, cuya álgebra asociada graduada naturalmente sea isomorfa a $\tau(n, n-3) \oplus \mathbb{C}$, con n par, o a $\tau(n, n-4) \oplus \mathbb{C}$, con n impar y $n \geq 7$.*

Demostración:

Sea $\mathcal{L}$ un álgebra que verifica las hipótesis de la proposición y supongamos, por reducción al absurdo, que $\mathcal{L}$ es un álgebra no estándar.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\tau}(n, n-3) \oplus \mathbb{C}$.

Como la graduación natural de $\tau(n, n-3) \oplus \mathbb{C}$ es

$$L_1 = \langle x_0, x_1, y_1 \rangle \oplus L_2 = \langle x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus L_{n-3} = \langle x_{n-3}, x_{n-1} \rangle \oplus L_{n-2} = \langle x_{n-2} \rangle,$$

y n es par, la ley de $\mathcal{L}$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[x_{n-1}, x_1] = \frac{n-4}{2} x_{n-2}, & \\
[x_1, x_{n-1}] = \frac{4-n}{2} x_{n-2}, & \\
[x_i, x_{n-3-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_{n-3-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_i, x_{n-2-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-2-2i}{2} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[x_{n-2-i}, x_i] = (-1)^{i}\frac{n-2-2i}{2} x_{n-2}, & 1 \leq i \leq \frac{n-4}{2}, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-4,
\end{cases}$$

$$\begin{cases} [x_i, y_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [y_1, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, & \\ [x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \cdots + (*)x_{n-1}, & 1 \leq i, j \leq n-4, i+j \neq n-3, \\ & i+j \neq n-2. \end{cases}$$

Considerando los generadores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ definidos en la demostración de la Proposición3.5, y sus productos:

$$\begin{aligned} [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= -(1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Es conveniente distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0,}$ podemos trabajar con los vectores

$$[[\widetilde{x_t}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}}_{i-veces}]] = (-1)^{i+1}(a_1A_0 - 1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1}, \quad \text{con } 2 \leq i \leq n-5,$$

y considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } a_1 \neq 0,}$ tomamos la base formada por:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 2 \leq i \leq n-4,\\
z_{n-3} &= [z_{n-5}, z_2] = (-1)^{n-3}(A_0a_1-1)^2(x_{n-3}+x_{n-1}) + (*)x_{n-2},\\
z_{n-2} &= [z_{n-4}, z_2] = (-1)^{n-4}(A_0a_1-1)^2\frac{n-6}{2}x_{n-2},\\
z_{n-1} &= [z_{n-4}, z_0] = (-1)^{n-3}(A_0a_1-1)(1+a_1)x_{n-3} + (*)x_{n-2} + (-1)^{n-3}(A_0a_1-1)a_1x_{n-1},\\
p_1 &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}
$$

Como $\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}$ son linealmente independientes, $a_1A_0 - 1 \neq 0$ y $a_1 \neq 0$, es obvio que la matriz del cambio de base es regular:

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1\\
0 & 0 & C_2 & (*) & \dots & (*) & (*) & (*) & 0\\
0 & 0 & 0 & C_3 & \dots & (*) & (*) & (*) & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}(a_1A_0-1) & (*) & C_{n-3}(a_1A_0-1) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n-4}(a_1A_0-1)^2\frac{n-6}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}(1+a_1) & (*) & C_{n-3}a_1 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1
\end{pmatrix}
$$

siendo $C_i = (-1)^i(A_0a_1 - 1)$ con $2 \leq i \leq n-3$.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$, $p_1 \in V_{k_u}$ entonces $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \leq i \leq n-4$, $z_{n-3} \in V_{2k_t+(n-5)k_s}$, $z_{n-2} \in V_{2k_t+(n-4)k_s}$ y $z_{n-1} \in V_{k_t+(n-4)k_s}$, por lo que la graduación de longitud máxima asociada a la base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{k_u}.$$

Siguiendo un razonamiento análogo al seguido en casos anteriores, podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $k_s = 1$ y distinguir los siguientes casos:

- Si $k_t > 0$, tenemos:
  - Si $k_t = 2$, como $k_s = 1$ y la graduación es conexa, $k_u = n-1$, pero esto implica que $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, lo cual es imposible ya $\mathcal{L}$ es un álgebra no estándar.
  - Si $k_t = 3$, obtenemos $z_{n-3} \in V_{n+1}$ y $z_{n+2} \in V_{n+2}$, por lo que siempre tendremos en la graduación $V_2 = \langle 0 \rangle$ ó $V_n = \langle 0 \rangle$, contradiciendo así la conectividad de la graduación.
  - Si $k_t > 3$, razonando análogamente al caso $k_t = 3$ llegamos a contradicción con la conectividad del álgebra.
- Si $k_t < 0$, distinguimos:
  - Si $k_t = 4-n$, se tiene $V_{2k_t+(n-4)k_s} = V_{k_t}$, es decir, $V_{k_t} = \langle z_1, z_{n-2} \rangle$, lo cual está en contradicción con la longitud máxima de la graduación.
  - Si $k_t < 4-n$, como $n \geq 7$, está claro que

    $$2k_t + (n-5)k_s < 2(5-n) + n - 5 = 5 - n < 0$$

    y

    $$2k_t + (n-4)k_s < 2(4-n) + n - 4 = 4 - n < 0.$$

    Así $V_0 = \langle 0 \rangle$ y llegamos de nuevo a contradicción.
  - Si $k_t > 4-n$, existen al menos $n-4$ vectores entre $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_0 \in V_{k_s}$, lo cual implica que existe al menos un vector z_i con $2 \leq i \leq n-4$ ó $i = n-1$ tal que $V_1 = \langle z_0, z_i \rangle$. Pero eso es imposible ya que $\mathcal{L}$ tiene longitud máxima.

Caso 1.2: Si $a_1 = 0,$ el estudio es análogo al Caso 1.1,intercambiando los papeles de z_{n-1} y z_{n-3}. Así, podemos considerar la misma base y por tanto, la misma graduación, obteniendo finalmente una contradicción al suponer que el álgebra es no estándar.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1A_0 - 1 = 0,}$ los productos de los generadores se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= -(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= (a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Considerando los siguientes vectores

$$[[\widetilde{x_u}, \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces}] = (-1)^{i+1}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-1} \quad \text{con } 2 \leq i \leq n-5,$$

distinguimos dos casos:

Caso 2.1: Si $a_1\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$ es claro que $a_1 \neq 0$. Por tanto, construimos la nueva base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_u},\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 2 \leq i \leq n-4,\\
z_{n-3} &= [z_{n-5}, z_2] = (-1)^{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2(x_{n-3} + x_{n-1}) + (*)x_{n-2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{n-2} &= [z_{n-4}, z_2] = (-1)^{n-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 \frac{n-6}{2} x_{n-2},\\
z_{n-1} &= [z_{n-4}, z_0] = (-1)^{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)(1+a_1)x_{n-3} + (-1)^{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)a_1 x_{n-1},\\
p_1 &= \widetilde{x}_t,
\end{aligned}
$$

donde

$$[z_{r-2}, z_2] = (-1)^{r-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)^2 x_{n-1} + (*)x_{r+1} + \cdots + (*)x_{n-2}.$$

La matriz del cambio de base es

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & b_1\\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-3} & A_{n-2} & A_{n-1} & B_1\\
0 & 0 & C_2 & (*) & \dots & (*) & (*) & (*) & 0\\
0 & 0 & 0 & C_3 & \dots & (*) & (*) & (*) & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & (*) & C_{n-3}(a_1\alpha_0 - \alpha_1) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_{n-2}(a_1\alpha_0 - \alpha_1)\frac{n-6}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}(1+a_1) & (*) & C_{n-3}a_1 & 0\\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1
\end{pmatrix}
$$

siendo $C_i = (-1)^i(a_1\alpha_0 - \alpha_1)$ con $2 \leq i \leq n-3$.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_u}$ y $p_1 \in V_{k_t}$, entonces $z_i \in V_{k_u+(i-1)k_s}$, con $2 \leq i \leq n-4$, $z_{n-1} \in V_{k_u+(n-4)k_s}$, $z_{n-3} \in V_{2k_u+(n-5)k_s}$ y $z_{n-2} \in V_{2k_u+(n-4)k_s}$, obteniéndose así la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-4)k_s} \oplus V_{2k_u+(n-5)k_s} \oplus V_{2k_u+(n-4)k_s} \oplus V_{k_t}.$$

La demostración es similar a la mostrada en el Caso 1.1, sólo se han intercambiado los papeles de p_1 y z_1 en este caso, obteniendo de nuevo una contradicción.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } a_1\alpha_0 - \alpha_1 = 0}$ es imposible construir una base homogénea, ya que:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.$$

Estudio del álgebra extendida $\tau(\widetilde{n, n-4)} \oplus \mathbb{C}$.

El estudio de longitud máxima al extender el álgebra $\tau(n, n-4) \oplus \mathbb{C}$, con n impar, sigue el mismo patrón que al estudiar la extensión de $\tau(n, n-3) \oplus \mathbb{C}$ con n par.

$\square$

Proposición 3.8. *No existe ningún álgebra de Leibniz* 3*-filiforme no estándar cuya álgebra graduada naturalmente asociada sea isomorfa a una de las siguientes álgebras* $\widetilde{\varepsilon}(7,3) \oplus \mathbb{C}$*,* $\widetilde{\varepsilon^1}(9,5) \oplus \mathbb{C}$ *ó* $\widetilde{\varepsilon^2}(9,5) \oplus \mathbb{C}$*.*

Demostración: Probémoslo por reducción al absurdo llamando $\mathcal{L}$ a un álgebra de Leibniz 3-filiforme no estándar $(n+1)$-dimensional cuya álgebra graduada naturalmente asociada sea isomorfa a una de las tres álgebras de la proposición. Analicemos los tres casos.

Estudio del álgebra extendida $\varepsilon^1\widetilde{(9,5)} \oplus \mathbb{C}$.

Como la graduación natural de $\varepsilon^1(9,5) \oplus \mathbb{C}$ es

$$L_1 = \langle x_0, x_1, y_1 \rangle \oplus L_2 = \langle x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus L_5 = \langle x_5, x_8 \rangle \oplus L_6 = \langle x_6 \rangle \oplus L_7 = \langle x_7 \rangle,$$

la ley de $\mathcal{L}$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5, \\
[x_0, x_8] = (*)x_7, & \\
[x_8, x_0] = (*)x_7, & \\
[x_8, x_i] = 2x_{5+i} + (*)x_7, & 1 \leq i \leq 2, \\
[x_i, x_8] = -2x_{5+i} + (*)x_7, & 1 \leq i \leq 2, \\
[x_1, x_4] = x_5 + x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_4, x_1] = -x_5 - x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_1, x_i] = (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5,\ i \neq 4, \\
[x_i, x_1] = (*)x_{i+1} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5,\ i \neq 4, \\
[x_2, x_3] = -x_5 - x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_3, x_2] = x_5 + x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_2, x_4] = -x_6 + (*)x_7 & \\
[x_4, x_2] = x_6 + (*)x_7 & \\
[x_2, x_5] = -x_7, & \\
[x_5, x_2] = x_7, & \\
[y_1, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_0, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, & \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5,
\end{cases}$$

$$\begin{cases} [x_i, y_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, \quad 1 \leq i \leq 5, \\ [y_1, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8. \end{cases}$$

Consideramos los generadores $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ definidos en 3.5 y sus productos:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= -(a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1},
\end{aligned}$$

es interesante distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0,}$ es necesario considerar las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } a_1 = 1,}$ tomemos la base formada por:

$$\begin{aligned}
&z_0 = \widetilde{x_s}, \\
&z_1 = \widetilde{x_t}, \\
&z_i = [z_{i-1}, z_0] = (-1)^i(a_1A_0 - 1)x_i + (*)x_4 + \cdots + (*)x_8 \text{ con } 2 \leq i \leq 4, \\
&z_5 = [z_4, z_0] = (-1)^5(a_1A_0 - 1)(1 + a_1)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (-1)^5(a_1A_0 - 1)a_1x_8, \\
&z_6 = [z_4, z_2] = (-1)^6(a_1A_0 - 1)^2x_6 + (*)x_7,
\end{aligned}$$

$$z_7 = [z_5, z_2] = (-1)^7(a_1A_0 - 1)^2(3a_1 + 1)x_7,$$

$$z_8 = [z_4, z_1] = (-1)^5(a_1A_0 - 1)(1 + A_0)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (-1)^5(a_1A_0 - 1)x_8,$$

$$p_1 = \widetilde{x_u},$$

cuya matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & \dots & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & b_1 \\
A_0 & 1 & A_2 & \dots & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & B_1 \\
0 & 0 & C_2 & \dots & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & C_5(1+a_1) & (*) & (*) & C_5a_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C_6(A_0a_1-1) & (*) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & C_7(A_0a_1-1)(3a_1+1) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & C_5(1+A_0) & (*) & (*) & C_5 & 0 \\
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & 1
\end{pmatrix}$$

siendo $C_i = (-1)^i(a_1A_0 - 1)$, con $2 \leq i \leq 7$. Esta matriz tiene rango igual a 10 pues

$$rank \begin{pmatrix} 0 & \dots & C_5(1+a_1) & (*) & (*) & C_5a_1 & 0 \\ 0 & \dots & C_5(1+A_0) & (*) & (*) & C_5 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

ya que

$$det \begin{pmatrix} C_5(1+a_1) & C_5a_1 \\ C_5(1+A_0) & C_5 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1A_0 - 1)^2(1 + a_1) - (a_1A_0 - 1)^2(1 + A_0)a_1 \neq 0.$$

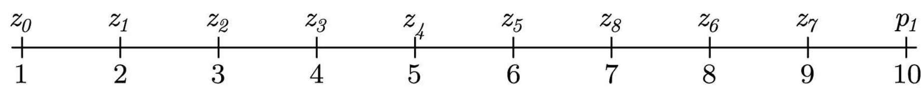
Tomando $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s} \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+5k_s} \oplus V_{k_u}.$$

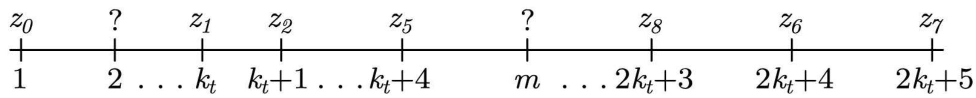
Siguiendo un argumento similar a los casos anteriores, donde k_s puede ser considerado igual a 1, sin pérdida de generalidad, obtenemos las siguientes posibilidades:

- Si $k_t > 0$, podemos distinguir:

  - Si $k_t = 2$, como la graduación es conexa tenemos $k_u = 10$, es decir, $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, pero esto es imposible porque $\mathcal{L}$ es no estándar.



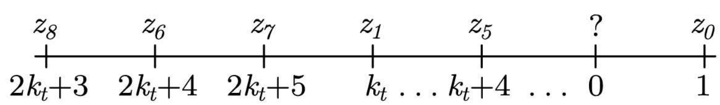
  - Si $k_t \geq 3$, siempre obtendríamos $V_2 = \langle 0 \rangle$ ó $V_m\langle 0 \rangle$, para algún m $k_t + 4k_s < m < 2k_t + 3k_s$, pero esto es imposible pues la graduación es conexa (véase gráfica).



- Si $k_t < 0$, podemos distinguir:

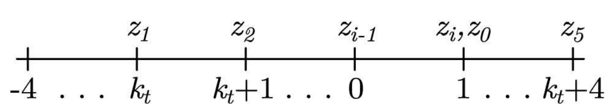
  - Si $k_t = -4$, se tendría $V_{2k_t+4k_s} = V_{k_t}$, es decir, $V_{k_t} = \langle z_1, z_6 \rangle$, llegando así a contradecir la longitud máxima de $\mathcal{L}$.

  - Si $k_t < -4$, es obvio que $2k_t+3k_s < k_t < 0$, $2k_t+4k_s < k_t < 0$, $2k_t+5k_s \leq k_t < 0$ y por tanto se obtiene el siguiente gráfico



  es decir $V_0 = \langle 0 \rangle$, llegando así a contradicción.

  - Si $k_t > -4$, habría al menos 4 vectores entre $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_0 \in V_{k_s}$, pero $dist(k_t, k_s) < 4$. Esto implica que existe algún z_i con $2 \leq i \leq 5$ tal que $V_1 = \langle z_0, z_i \rangle$ (véase la gráfica), llegando de nuevo a contradicción.



$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } a_1 \neq 1,}$ consideramos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.1: Si } a_1 = 0,}$ tomamos la misma base que en el Caso 1.1. Así la graduación asociada es la misma y el estudio es análogo.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.2: Si } a_1 \neq 0,}$ tomamos la misma base que en el Caso 1.1 salvo el vector z_7, que lo definimos de la siguiente manera:

$$z_7 = \begin{cases} [z_2, z_5] \text{ si } a_1 \neq -\frac{1}{3}, \\ [z_8, z_2] \text{ si } a_1 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Si $a_1 \neq -\frac{1}{3}$ obtenemos la misma graduación que en el Caso 1.1, por lo que el álgebra obtenida sería estándar.

Si $a_1 = -\frac{1}{3}$ llegamos a contradicción con haber supuesto longitud máxima, estudiando los valores admisibles de k_t y k_u, de forma análoga a los casos anteriores.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 A_0 - 1 = 0,}$ nos quedaría:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-1}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que los generadores $\widetilde{x_u}$ y $\widetilde{x}_t$ juegan papeles totalmente simétricos en este álgebra. Por lo tanto, el estudio es completamente análogo al hecho en el Caso 1. Así, se vuelve a probar que no existe ningún álgebra de longitud máxima.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}^2(9,5)\oplus\mathbb{C}$.

Al ser $L_1 =< x_0, x_1, y_1 > \oplus L_2 =< x_2 > \oplus\cdots\oplus L_5 =< x_5, x_8 > \oplus L_6 =< x_6 > \oplus L_7 =< x_7 >$ la graduación natural de $\varepsilon^2(9,5)\oplus\mathbb{C}$, la ley de $\mathcal{L}$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{cases}
[x_0,x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_0,x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1\leq i\leq 5,\\
[x_i,x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1\leq i\leq 5,\\
[x_8,x_i] = 2x_{5+i} + (*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_i,x_8] = -2x_{5+i} + (*)x_7, & 1\leq i\leq 2,\\
[x_1,x_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_1,x_2] = (*)x_4 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_2,x_1] = (*)x_4 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_1,x_3] = (*)x_5 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_3,x_1] = (*)x_5 + \cdots + (*)x_8, & \\
[x_1,x_4] = x_5 + x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_4,x_1] = -x_5 - x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, & \\
[x_1,x_5] = 2x_6 + (*)x_7, & \\
[x_5,x_1] = -2x_6 + (*)x_7, & \\
[x_1,x_6] = x_7, & \\
[x_6,x_1] = -x_7, &
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
[x_2, x_3] = -x_5 - x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, \\
[x_3, x_2] = x_5 + x_8 + (*)x_6 + (*)x_7, \\
[x_2, x_4] = -x_6 + (*)x_7, \\
[x_4, x_2] = x_6 + (*)x_7, \\
[x_2, x_5] = x_7, \\
[x_5, x_2] = -x_7, \\
[x_3, x_3] = (*)x_7, \\
[x_3, x_4] = -2x_7, \\
[x_4, x_3] = 2x_7, \\
[y_1, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, \\
[x_0, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8, \\
[y_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5, \\
[x_i, y_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \leq i \leq 5, \\
[y_1, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_8.
\end{cases}
$$

Nótese que este estudio es análogo al mostrado en el Caso $\widetilde{\varepsilon}^1(9,5)\oplus\mathbb{C}$, la única diferencia está en la elección del vector z_7, ya que influyen los productos de la ley del álgebra

$$[x_3, x_4] = -2x_7 \quad \text{y} \quad [x_4, x_3] = 2x_7.$$

Sin embargo, se puede tomar la misma base, sin más que considerar los generadores:

$$
\begin{cases}
z_0 = \widetilde{x_s}, \\
z_1 = \widetilde{x_t}, \\
p_1 = \widetilde{x_u},
\end{cases}
$$

y los siguientes vectores, para completar la base:

$$\begin{cases} [z_i, z_0] \text{ con } 1 \le i \le 4, \\ [z_4, z_2], \\ [z_4, z_1], [z_5, z_2] = (-1)^8 (A_0 a_1 - 1)^2 x_7. \end{cases}$$

Como la graduación obtenida es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s} \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+5k_s} \oplus V_{k_u},$$

coincide con la del anterior estudio, y por lo tanto, se tiene que $\mathcal{L}$ no es un álgebra no estándar.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}(7,3) \oplus \mathbb{C}$.

La graduación natural asociada es

$$L_1 = \langle x_0, x_1, y_1 \rangle \oplus L_2 = \langle x_2 \rangle \oplus L_3 = \langle x_3, x_6 \rangle \oplus L_4 = \langle x_4 \rangle \oplus L_5 = \langle x_5 \rangle,$$

por lo que la ley de $\mathcal{L}$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases} [x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, & \\ [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_6, & 1 \le i \le 4, \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_8, & 1 \le i \le 4, \\ [x_0, x_6] = (*)x_5, & \\ [x_6, x_0] = (*)x_5, & \\ [x_6, x_i] = x_{3+i} + (*)x_5, & 1 \le i \le 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x_i, x_6] = -x_{3+i} + (*)x_5, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_1, x_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, & \\ [x_1, x_2] = x_3 + x_6 + (*)x_4 + (*)x_5, & \\ [x_2, x_1] = -x_3 - x_6 + (*)x_4 + (*)x_5, & \\ [x_1, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_5, & 3 \leq i \leq 4, \\ [x_i, x_1] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_5, & 3 \leq i \leq 4, \\ [y_1, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, & \\ [x_0, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6, & \\ [y_1, x_i] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_6, & 1 \leq i \leq 3, \\ [x_i, y_1] = (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_6, & 1 \leq i \leq 3, \\ [y_1, y_1] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6. & \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } a_1A_0 - 1 \neq 0,}$ necesitamos considerar las siguientes restricciones:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } a_1 = -1,}$ construimos la nueva base con los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x_s}, \\ z_1 &= \widetilde{x_t}, \\ z_2 &= [z_1, z_0] = (-1)^2(a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6, \\ z_3 &= [z_2, z_1] = (-1)^3(a_1A_0 - 1)(1 + A_0)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^3(a_1A_0 - 1)x_6, \\ z_6 &= [z_2, z_0] = (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^3(a_1A_0 - 1)a_1x_6, \\ z_4 &= [z_6, z_0] = (-1)^3(a_1A_0 - 1)a_1^2x_4 + (*)x_5, \\ z_5 &= [z_6, z_2] = (-1)^5(a_1A_0 - 1)^2a_1x_5, \\ p_1 &= \widetilde{x_u}. \end{aligned}$$

La matriz del cambio de base realizado es

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & b_1 \\ A_0 & 1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & B_1 \\ 0 & 0 & a_1A_0-1 & (*) & (*) & (*) & (*) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a_1A_0-1)(1+A_0) & (*) & (*) & -(a_1A_0-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(a_1A_0-1)a_1^2 & (*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(a_1A_0-1)^2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & -(a_1A_0-1)a_1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango máximo gracias a las restricciones consideradas.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{k_u}.$$

De nuevo, podemos tomar, sin pérdida de generalidad $k_s = 1$, aunque a veces mantendremos la notación k_s, para clarificar el estudio. Así, analizando los valores admisibles de k_t y k_u obtenemos las siguientes posibilidades:

- Si $k_t > 0$, podemos distinguir:
  - Si $k_t = 2$, se tendría $V_5 = \langle z_3, z_4\rangle$, lo cual contradice la hipótesis de longitud máxima.
  - Si $k_t = 3$, obtendríamos, por propiedades de la graduación, que o bien $V_2 = \langle 0\rangle$ o bien $V_8 = \langle 0\rangle$, lo cual es imposible pues la graduación es conexa.
  - Si $k_t > 3$, volveríamos a llegar a contradicción ya que V_2 ó V_3 estarían generados únicamente por el vector nulo.
- Si $k_t < 0$, podemos distinguir:
  - Si $k_t = -3$, obtendríamos $V_{k_t+3k_s} = V_{-3} = V_{k_t}$, dando lugar a una contradicción.
  - Si $k_t < -3$, está claro que $2k_t + k_s < k_t < 0$ y $2k_t + 3k_s < k_t < 0$ y por tanto $V_0 = \langle 0\rangle$, llegando de nuevo a contradicción.

- Si $k_t > -3$, igual que en casos anteriores, existen al menos 3 vectores entre $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_0 \in V_{k_s}$. Esto implica que existe algún z_i con $i \in \{2,4,6\}$ tal que $V_1 = \langle z_0, z_i \rangle$, lo que es imposible.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } a_1 \neq -1,}$ necesitamos distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.1: Si } 1+2a_1 \neq 0,}$ tomamos los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
&z_0 = \widetilde{x_s},\\
&z_1 = \widetilde{x_t},\\
&z_2 = [z_1, z_0] = (-1)^2(a_1A_0 - 1)x_2 + (*)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6,\\
&z_3 = [z_2, z_0] = (-1)^3(a_1A_0 - 1)(1 + a_1)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^3(a_1A_0 - 1)a_1x_6,\\
&z_4 = [z_3, z_0] = (-1)^4(a_1A_0 - 1)(1 + 2a_1)x_4 + (*)x_5,\\
&z_5 = [z_4, z_0] = (-1)^5(a_1A_0 - 1)(1 + 2a_1)(1 + a_1)x_5,\\
&z_6 = [z_2, z_1] = (-1)^3(a_1A_0 - 1)(1 + A_0)x_3 + (*)x_4 + (*)x_5 + (-1)^3(A_0a_1 - 1)x_6,\\
&p_1 = \widetilde{x_u}
\end{aligned}
$$

que forman la nueva base adaptada.

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{k_t+3k_s} \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{k_u}.$$

Análogamente a los casos anteriores, podemos tomar $k_s = 1$. Así, los valores admisibles de k_t y k_u son estudiados a continuación, usando las mismas herramientas que en casos anteriores:

- Si $k_t > 0$, podemos distinguir:

- Si $k_t = 2$, obtenemos $V_5 = \langle z_4, z_6 \rangle$.
- Si $k_t = 3$, entonces $V_7 = \langle z_5, z_6 \rangle$, que es imposible.
- Si $k_t > 3$, obtendremos $V_2 = \langle 0 \rangle$ ó $V_3 = \langle 0 \rangle$, pero esto contradice la conectividad de la graduación.

- Si $k_t < 0$, podemos distinguir:
  - Si $k_t = -4$, se tiene $V_{-6} = \langle 0 \rangle$ ó $V_{-7} = \langle 0 \rangle$, llegando así a contradicción.
  - Si $k_t < -4$, está claro que $2k_t + k_s < k_t < 0$ y por tanto $V_0 = \langle 0 \rangle$.
  - Si $k_t > -4$, existirían al menos 4 vectores entre $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_0 \in V_{k_s}$ pero $dist(k_t, k_s) < 4$, lo que implica que existe algún z_i con $2 \leq i \leq 5$ tal que $V_1 = \langle z_0, z_i \rangle$, llegando de nuevo a contradicción.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.2: Si } 1 + 2a_1 = 0,}$ entonces $A_0 \neq -2$ ya que $a_1 A_0 - 1 \neq 0$. La nueva base adaptada está formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_t}, \\
z_2 &= [z_1, z_0] = (-1)^2 (a_1 A_0 - 1) x_2 + (*) x_3 + (*) x_4 + (*) x_5 + (*) x_6, \\
z_3 &= [z_2, z_0] = (-1)^3 (a_1 A_0 - 1)(1 + a_1) x_3 + (*) x_4 + (*) x_5 + (-1)^3 (a_1 A_0 - 1) a_1 x_6, \\
z_6 &= [z_2, z_1] = (-1)^3 (a_1 A_0 - 1)(1 + A_0) x_3 + (*) x_4 + (*) x_5 + (-1)^3 (a_1 A_0 - 1) x_6, \\
z_4 &= [z_6, z_0] = (-1)^4 (a_1 A_0 - 1)[A_0(1 + a_1) + 1] x_4 + (*) x_5, \\
z_5 &= [z_4, z_0] = (-1)^5 (a_1 A_0 - 1)[A_0(1 + a_1) + 1](1 + a_1) x_5, \\
p_1 &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}
$$

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $p_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+2k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{k_u}.$$

Tomando sin pérdida de generalidad $k_s = 1$, como en casos anteriores, podemos considerar las siguientes posibilidades:

- Si $k_t > 0$, podemos distinguir:
  - Si $k_t = 2$, para mantener la conexión del álgebra, tenemos $k_u = 8$, lo que implica $p_1 \in Cent(\mathcal{L})$, obteniendo así un álgebra estándar.
  - Si $k_t = 3$, podemos asegurar, por propiedades de la graduación, que $V_2 = \langle 0 \rangle$ ó $V_6 = \langle 0 \rangle$, que es imposible.
  - Si $k_t > 3$, tendríamos $V_2 = \langle 0 \rangle$ ó $V_3 = \langle 0 \rangle$, llegando de nuevo a contradicción.
- Si $k_t < 0$, podemos distinguir:
  - Si $k_t = -2$, se tiene que $V_{k_t} = V_{2k_t + 2k_s}$, lo cual contradice la longitud máxima del álgebra.
  - Si $k_t < -2$, se tendría $V_0 = \langle 0 \rangle$, imposible por la conexión del álgebra.
  - Si $k_t > -2$, se podría asegurar que existen al menos 2 vectores entre $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_0 \in V_{k_s}$, pero $dist(k_t, k_s) < 1$. Esto implica que exista al menos un vector de la forma z_i con $2 \leq i \leq 3$ tal que $V_1 = \langle z_0, z_i \rangle$, lo cual es imposible.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } a_1 A_0 - 1 = 0,}$ el producto de los generadores se puede escribir como:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$
$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$
$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$

$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$

$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = -(\alpha_1 - a_1\alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$

$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = (A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6,$$

$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = -(A_0\alpha_1 - \alpha_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_6.$$

Es fácil ver que los generadores $\widetilde{x_u}$ y $\widetilde{x_t}$ juegan papeles totalmente simétricos en este álgebra, por lo tanto haciendo un razonamiento análogo al del Caso 1, reemplazando $\widetilde{x_u}$ por $\widetilde{x_t}$, se vuelve a probar que no existe ningún álgebra de longitud máxima en este caso, quedando probada así la proposición.

$\square$

El principal teorema de esta sección, el Teorema 3.3, es consecuencia de las proposiciones anteriores y muestra la clasificación de las álgebras de Leibniz 3-filiformes no estándar de esta sección.

Teorema 3.3. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme no estándar $(n+1)$-dimensional, cuya álgebra asociada graduada naturalmente es isomorfa a una de las álgebras del Teorema 1.3. Entonces n es impar y $\mathcal{L}$ es isomorfa a la siguiente álgebra de Lie:*

$$N : \begin{cases} [z_{i-1}, z_0] = z_i, & 2 \leq i \leq n-2, \\ [z_{n-3}, z_1] = -z_{n-1}, & \\ [z_{n-4}, z_2] = z_{n-1}, & \\ [z_i, z_{n-2-i}] = (-1)^{i-1} z_{n-1}, & 3 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor, \\ [p_1, z_0] = z_{n-1}. & \end{cases}$$

3.2. EXTENSION DE LAS ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ NO DE LIE

Debido a la complejidad de los cálculos que aparecen en este estudio, será de gran utilidad recurrir a dos programas que se han implementado en el software Mathematica. Dichos programas nos ayudan tanto a calcular la identidad de Leibniz como a demostrar si dos álgebras son o no isomorfas entre sí. Los programas se aplican en dimensiones "pequeñas" y los resultados que se concluyen se prueban para dimensiones arbitrarias por inducción.

El programa que calcula la identidad de Leibniz de un álgebra está explicado en el trabajo de investigación [12], mientras que el relativo al estudio de isomorfismos se detallará más adelante en esta memoria. Además, en la página Web http://personal.us.es/jrgomez se muestran dichos programas aplicados a varias familias de álgebras de Leibniz, para mayor claridad.

Todos los resultados mostrados en esta sección están recogidos en el trabajo de investigación [10].

Siguiendo la misma estructura que en el resto de la memoria, vamos a dividir en dos grandes secciones este apartado: el estudio de longitud máxima de las álgebras no escindidas y el estudio de las escindidas.

3.2.1. CASO NO ESCINDIDO

El objetivo de esta sección es obtener la clasificación de las álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima que son la extensión de las álgebras de Leibniz no de Lie graduadas naturalmente no escindidas. El punto de partida para este estudio es el Teorema de clasificación 1.7 que aparece en los preliminares. Dicho teorema muestra que sólo existe un álgebra de Leibniz no de Lie 3-filiforme graduada naturalmente no escindida n-dimensional, con $n \geq 7$, que se denota por L^1. Al extender dicha álgebra y hacerle el estudio de longitud máxima se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3.4. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 3-filiforme n-dimensional, con $n \geq 7$, cuya álgebra graduada naturalmente asociada es isomorfa a L^1. Entonces $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima.*

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ isomorfa a $\widetilde{L^1}$ y supongamos, por reducción al absurdo, que es un álgebra de longitud máxima.

Recuérdese la ley de L^1 :

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [e_1, f_1] = f_3, & \\ [e_i, f_2] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4. \end{cases}$$

La graduación natural de L^1 está formada por los siguientes espacios:

$$L_1 = \langle e_1, f_1, f_2 \rangle,\ L_2 = \langle e_2, f_3 \rangle \text{ y } L_i = \langle e_i \rangle \text{ con } 3 \leq i \leq n-3.$$

Nótese que $\{e_2, e_3, \ldots, e_{n-3}, f_3\}$ pertenecen al ideal $R(L^1)$ y e_{n-3} pertenece a $Cent(L^1)$. Además, como $[e_1, f_1] + [f_1, e_1] \in R(L^1)$ se deduce que $f_3 \in R(L^1)$. Por último, si hacemos el cambio de base

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1, \\ e_{i+1}' &= [e_i', e_1'] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-3}, \text{ con } i \leq i \leq n-4, \\ f_1' &= f_1, \\ f_2' &= f_2, \end{aligned}$$

es claro que la ley de $\mathcal{L}$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-4, \\ [e_1, f_1] = f_3 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3}, & \\ [e_i, f_2] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \leq i \leq n-4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} [f_i, e_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i \le 2, \\ [f_3, e_1] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-3}, & \\ [f_i, f_j] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i, j \le 2, \\ [f_3, f_i] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i \le 2 \\ [e_i, f_1] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-3}, & 2 \le i \le n-5, \\ [e_i, e_j] = (*)e_{i+j+1} + \cdots + (*)e_{n-3}, & 1 \le i, j \le n-3, \ j \ne 1 \end{cases}$$

y el resto de productos nulos. Recuérdese que $(*)$ denota las correspondientes constantes de estructura, que no se determinan por no ser relevantes en el estudio.

Considérense los siguientes generadores del álgebra, que nos ayudarán a encontrar las bases adaptadas respecto a las cuales el estudio de longitud máxima resultará más sencillo:

$$\begin{aligned} \widetilde{x_s} &= e_1 + \sum_{i=2}^{n-3} a_i e_i + \sum_{j=1}^{3} a_{n-3+j} f_j, \\ \widetilde{x_t} &= \sum_{i=1}^{n-3} b_i e_i + f_1 + \sum_{j=2}^{3} b_{n-3+j} f_j, \\ \widetilde{x_u} &= \sum_{i=1}^{n-3} c_i e_i + c_{n-2} f_1 + f_2 + c_n f_3. \end{aligned}$$

Los productos de estos generadores dan lugar a los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2} f_3, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= b_1(b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 f_3, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= c_1(1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 c_{n-2} f_3, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + f_3, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= b_1(1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 a_{n-2} f_3, \\ [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_{n-2} f_3, \end{aligned}$$

$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = c_1(1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 a_{n-2} f_3,$$

$$[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = b_1(1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 c_{n-2} f_3,$$

$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = c_1(b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 f_3.$$

Como $\{\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}\}$ son linealmente independientes, está claro que

$$det \begin{pmatrix} 1 & a_{n-2} & a_{n-1} \\ b_1 & 1 & b_{n-1} \\ c_1 & c_{n-2} & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Consideremos las siguientes restricciones para poder construir la base adaptada correspondiente:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1 + a_{n-1} \neq 0,}$ tenemos que distinguir los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ son linealmente independientes,}}$ tomemos la nueva base formada por los vectores:

$$y_1 = \widetilde{x_s},$$

$$y_i = [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 2 \leq i \leq n-3,$$

$$z_1 = \widetilde{x_t},$$

$$z_2 = \widetilde{x_u},$$

$$z_3 = [y_1, z_1],$$

donde

$$\underbrace{[[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], ..., \widetilde{x_s}]}_{i-veces} = (1 + a_{n-1})^{i-1} e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-3} \text{ con } 3 \leq i \leq n-3.$$

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_2 \in V_{k_u}$ tenemos, por la propiedad de la graduación $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$, que $y_i \in V_{ik_s}$ con $2 \leq i \leq n-3$ y $z_3 \in V_{k_s+k_t}$. Así, obtenemos la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_s+k_t}.$$

Nótese que por ser la graduación de longitud máxima verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ \text{todos los espacios de la graduación son de dimensión } 1, \\ \text{no existen espacios nulos en la graduación,} \\ \text{todos los subíndices de los espacios son distintos entre sí.} \end{cases} \tag{3.5}$$

La matriz del cambio de base tiene la expresión:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ 0 & 1+a_{n-1} & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & (1+a_{n-1})^2 & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1+a_{n-1})^{n-4} & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-3} & 1 & b_{n-1} & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & 1 & c_n \\ 0 & b_1+b_{n-1} & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y es regular ya que $1 + a_{n-1} \neq 0$ e y_2 y z_3 son linealmente independientes.

Basta calcular los productos $[z_2, y_1]$ e $[y_1, z_2]$ para obtener una contradicción. Veámoslo.

Por la ley del álgebra tenemos:

$$[z_2, y_1] = [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = c_1 y_2.$$

Por las propiedades (3.5) también es cierto que

$$\begin{cases} [z_2, y_1] \in V_{k_s+k_u}, \\ y_2 \in V_{2k_s}, \\ k_s \neq k_u. \end{cases}$$

Por lo tanto, se deduce que $c_1 = 0$.

Por otro lado, tenemos

$$[y_1, z_2] = (1+c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_{n-2}f_3 = e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + \beta_1 f_3 = Ay_2$$

con $A \in \mathbb{C} - \{0\}$. Pero por las propiedades (3.5) se tiene

$$\begin{cases} [y_1, z_2] \in V_{k_s+k_u}, \\ y_2 \in V_{2k_s}, \end{cases}$$

es decir, $k_u = k_s$, lo cual es imposible.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ son linealmente dependientes,}}$ entonces se verifica:

$$(b_1 + b_{n-1})a_{n-2} = 1 + a_{n-1}.$$

Como $1+a_{n-1} \neq 0$, podemos asegurar $a_{n-2} \neq 0$ y $b_1+b_{n-1} \neq 0$ y considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.1: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] \textbf{ son linealmente independientes,}}$ es necesario diferenciar:

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.1.1: Si } c_{n-2} \neq 0,}$ tomamos la base formada por:

$$\begin{aligned}
&y_1 = \widetilde{x_s}, \\
&y_i = [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 2 \leq i \leq n-3, \\
&z_1 = \widetilde{x_t}, \\
&z_2 = \widetilde{x_u}, \\
&z_3 = [y_1, z_2],
\end{aligned}$$

siendo la matriz del cambio de base

$$\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
0 & 1+a_{n-1} & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & a_{n-2} \\
0 & 0 & (1+a_{n-1})^2 & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (1+a_{n-1})^3 & \dots & (*) & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1+a_{n-1})^{n-4} & 0 & 0 & 0 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-3} & 1 & b_{n-1} & b_n \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & 1 & c_n \\
0 & 1+c_1 & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & c_{n-2}
\end{pmatrix}$$

que es regular gracias a las hipótesis consideradas.

Tomando $y_1 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_2 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_s+k_u},$$

con $y_i \in V_{ik_s}$, $2 \leq i \leq n-3$.

Calculando $[y_1, z_1]$ se llega directamente a contradicción, ya que

$$\begin{aligned}
[y_1, z_1] &= [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + f_3 \in V_{k_s+k_t}, \\
y_2 &= [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2}f_3 \in V_{2k_s}, \\
z_3 &= [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_{n-2}f_3 \in V_{k_s+k_u}.
\end{aligned}$$

Entonces o bien se tiene que $[y_1, z_1] = Ay_2$ con $A \neq 0$ o bien que $[y_1, z_1] = Bz_3$ con $B \neq 0$. En el primer caso, por las propiedades (3.5) se llega a $k_s = k_t$ y en el otro caso, se obtiene $k_u = k_t$. Pero ya es sabido que ambas igualdades contradicen la hipótesis de longitud máxima. En este caso $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2.1.2: Si } c_{n-2} = 0,}$ podemos suponer que $1 + c_1 \neq 0$. En caso contrario se tendría:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2}f_3,\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + f_3 = \alpha[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3},
\end{aligned}$$

y los otros productos serían combinación lineal de esos. Por lo tanto, sería imposible generar uno de los dos vectores y_2 ó z_3 para la nueva base. Por tanto $1 + c_1 \neq 0$.

Tómese la base formada por:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s},\\
y_2 &= [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}],\\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 3 \leq i \leq n-3,\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_2 &= \widetilde{x_u},\\
z_3 &= [y_1, z_1],
\end{aligned}$$

donde

$$[[[[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}], \underbrace{\widetilde{x_s},]\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces} = (1+c_1)(1+a_{n-1})^i e_{i+2} + (*)e_{i+3} + \cdots + (*)e_{n-3} \text{ con } 1 \leq i \leq n-5.$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n\\
0 & 1+c_1 & (*) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (1+c_1)(1+a_{n-1}) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & (1+c_1)(1+a_{n-1})^2 & \ldots & (*) & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (1+c_1)(1+a_{n-1})^{n-5} & 0 & 0 & 0\\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & b_{n-3} & 1 & b_{n-1} & b_n\\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_{n-3} & c_{n-2} & 1 & c_n\\
0 & b_1+b_{n-1} & (*) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

que es regular gracias a las hipótesis consideradas.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_2 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-4)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_t},$$

con $y_i \in V_{k_u+(i-1)k_s}$, $2 \leq i \leq n-3$.

Consideremos el producto $[y_1, y_1]$.

Por la ley de $\mathcal{L}$ tenemos:

$$[y_1, y_1] = (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2}f_3,$$

así, existen dos posibilidades: o bien $[y_1, y_1] = Ay_2$ con $A \neq 0$, o bien $[y_1, y_1] = Bz_3$ con $B \neq 0$.

- Si $[y_1, y_1] = Ay_2 \neq 0$, usando las propiedades (3.5) se tiene

  $$\begin{cases} y_2 \in V_{k_s+k_u}, \\ [y_1, y_1] \in V_{2k_s}, \end{cases}$$

  es decir, $k_s = k_u$, lo que es imposible.

- Si $[y_1, y_1] = Bz_3 \neq 0$, por las propiedades (3.5) se tiene

  $$\begin{cases} y_3 \in V_{2k_s+k_u}, \\ [y_1, y_1] \in V_{2k_s}, \end{cases}$$

  deduciendo que $k_u = 0$, lo cual es imposible.

Por tanto, $\mathcal{L}$ no tiene longitud máxima.

Caso 1.2.2: Si $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ son linealmente dependientes, en este caso, es imposible construir una base ya que los productos de los generadores se escriben ahora como:

$$
\begin{aligned}
&[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = b_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = b_1\alpha[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = c_1\beta[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = \alpha[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] = b_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = \beta[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = b_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = b_1\beta[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
&[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = c_1\alpha[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],
\end{aligned}
$$

es decir, todos son combinación lineal del vector $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_{n-1} = 0,}$ podemos considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } 1 + c_1 \neq 0,}$ distinguimos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.1: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] \textbf{ son linealmente independientes,}}$ tomamos la base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
&y_1 = \widetilde{x_s},\\
&z_1 = \widetilde{x_t},\\
&z_2 = \widetilde{x_u},\\
&y_2 = [y_1, z_2],\\
&y_i = [y_{i-1}, z_2], \text{ con } 3 \leq i \leq n-3,\\
&z_3 = [y_1, z_1],
\end{aligned}
$$

donde

$$
y_{i+1} = [[\widetilde{x_s}, \underbrace{\widetilde{x_u}], ..., \widetilde{x_u}]}_{i-veces} = (1 + c_1)^i e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-3} \text{ con } 2 \leq i \leq n-4.
$$

Supongamos $y_1 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_2 \in V_{k_u}$, entonces la graduación de longitud máxima asociada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_s+k_u} \oplus V_{k_s+2k_u} \oplus \cdots \oplus V_{k_s+(n-4)k_u} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_t+k_s},$$

con $y_i \in V_{k_s+(i-1)k_u}$, $2 \leq i \leq n-3$.

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
0 & 1+c_1 & (*) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & c_{n-2} \\
0 & 0 & (1+c_1)^2 & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (1+c_1)^3 & \ldots & (*) & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (1+c_1)^{n-4} & 0 & 0 & 0 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & b_{n-3} & 1 & b_{n-1} & b_n \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots & c_{n-3} & c_{n-2} & 1 & c_n \\
0 & b_1+b_{n-1} & (*) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

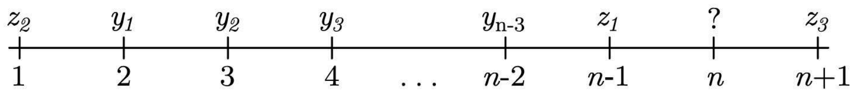
y es regular ya que $1+c_1 \neq 0$ y

$$rank\begin{pmatrix}
0 & 1+c_1 & (*) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & c_{n-2} \\
0 & b_1+b_{n-1} & (*) & (*) & \ldots & (*) & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} = 2.$$

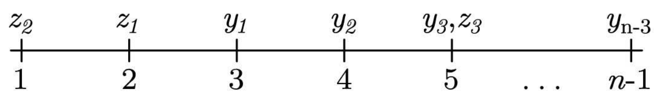
La prueba sigue analizando los valores admisibles de k_t, k_s y k_u. Como la graduación considerada ha de ser conexa y de longitud máxima, necesariamente $k_u = \pm 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $k_u = 1$, ya que el caso $k_u = -1$ es completamente análogo. Pasemos a estudiar los valores de k_t y k_s.

- Si $k_s > 0$, distinguimos:

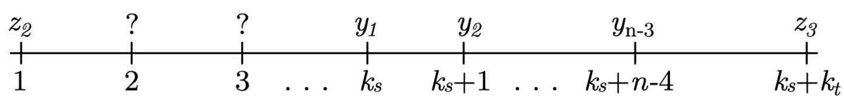
    - Si $k_s = 2$, para que la graduación sea conexa, se tiene $k_t = n-1$, que en términos de graduación significa $V_{k_t+k_s} = V_{n+1}$. Esto implica que $V_n = \langle 0 \rangle$, imposible por la conectividad de la graduación. Ver la siguiente gráfica para mayor claridad.



- Si $k_s = 3$, se obtiene $k_t = 2$ por la misma razón que antes, es decir, $V_{k_t+k_s} = V_5 = \langle z_3, y_3 \rangle$, que contradice la longitud máxima de la graduación, como muestra la siguiente gráfica.

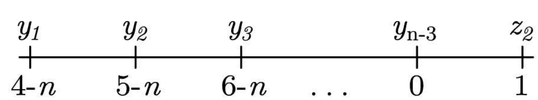


- Si $k_s > 3$, existe al menos un espacio de la graduación V_m con $2 \leq m \leq k_s$ tal que $V_m = \langle 0 \rangle$, como se puede observar en la siguiente gráfica, contradiciendo así la conectividad de la graduación.



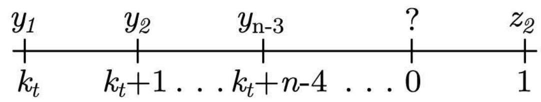
- Si $k_s < 0$, puede ocurrir:

  - Si $k_s = 4 - n$, el parámetro k_t puede tomar dos valores: $3 - n$ ó 2 por conectividad, como se puede observar en la siguiente gráfica.



    - Si $k_t = 3 - n$, entonces $V_{k_t+k_s} = V_{7-2n}$, pero como $n \geq 7$, este espacio sólo está generado por el vector nulo, por lo que la graduación no es conexa.
    - Si $k_t = 2$, tenemos $V_{k_t+k_s} = V_{6-n} = \langle y_3, z_2 \rangle$, llegando de nuevo a contradicción.

  - Si $k_s \neq 4 - n$, siempre tenemos el espacio graduante V_0 vacío, contradiciendo así la conectividad de la graduación (véase la gráfica).



Caso 2.1.2: Si $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ son linealmente dependientes, tenemos:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2}f_3,$$

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (b_1 + b_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + f_3 = \alpha[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}],$$

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (1 + c_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_{n-2}f_3,$$

y los otros productos de los generadores combinación lineal de estos.

Nótese que podemos suponer $a_{n-2} \neq 0$, en caso contrario, sería imposible construir la base ya que

$$det \begin{pmatrix} b_1 + b_{n-1} & 1 \\ 1 + c_1 & c_{n-2} \end{pmatrix} = 0,$$

pues $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ son linealmente dependientes, por tanto

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ b_1 & 1 & b_{n-1} \\ c_1 & c_{n-2} & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

lo cual implicaría que $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ serían linealmente dependientes.

Construyamos la base:

$$y_1 = \widetilde{x_s},$$

$$z_1 = \widetilde{x_t},$$

$$z_2 = \widetilde{x_u},$$

$$y_2 = [y_1, z_2],$$

$$y_i = [y_{i-1}, z_2], \text{ con } 3 \leq i \leq n-3,$$

$$z_3 = [y_1, y_1],$$

donde

$$y_i = [[\widetilde{x_s}, \underbrace{\widetilde{x_u}], ..., \widetilde{x_u}]}_{(i-1)-veces} = (1+c_1)^{i-1}e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-3} \text{ con } 3 \leq i \leq n-3.$$

La matriz del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix}
1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
0 & 1+c_1 & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & c_{n-2} \\
0 & 0 & (1+c_1)^2 & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (1+c_1)^3 & \dots & (*) & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (1+c_1)^{n-4} & 0 & 0 & 0 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{n-3} & 1 & b_{n-1} & b_n \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-3} & c_{n-2} & 1 & c_n \\
0 & 0 & (*) & (*) & \dots & (*) & 0 & 0 & a_{n-2}
\end{pmatrix}$$

y es fácil ver que es regular.

Tomando $y_1 \in V_{k_s}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_2 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_s+k_u} \oplus V_{k_s+2k_u} \oplus \cdots \oplus V_{k_s+(n-4)k_u} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{2k_s},$$

con $y_i \in V_{k_s+(i-1)k_u}$, $2 \leq i \leq n-3$.

Al ser $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ linealmente dependiente de $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ y teniendo en cuenta las propiedades (3.5), se tiene

$$\begin{cases}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \in V_{k_s+k_t}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] \in V_{k_s+k_u}, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \neq 0, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] \neq 0,
\end{cases}$$

de donde se deduce que $k_t = k_u$, lo cual contradice la suposición de longitud máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } 1+c_1=0,}$ en este caso es imposible construir la base adaptada porque los productos de los generadores se pueden reescribir como sigue:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + a_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= b_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 a_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 c_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + f_3, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= b_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 a_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 a_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= b_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + b_1 c_{n-2}f_3, \\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= c_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-3} + c_1 f_3,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto el vector y_2 no podrá ser generado en este caso.

□

3.2.2. CASO ESCINDIDO

Se cerrará con esta sección la clasificación de las álgebras de Leibniz 3-filiformes cuya longitud es máxima. Al igual que hicimos al extender las álgebras de Lie 3-filiformes graduadas naturalmente, centraremos nuestra atención en la familia de las álgebras no estándar. Así, se reduce el estudio a las extensiones de las álgebras de Leibniz no de Lie 3-filiformes escindidas, es decir, al estudio de las extensiones de las álgebras de Leibniz no de Lie filiformes graduadas naturalmente $\oplus\mathbb{C}^2$ y de las 2-filiformes $\oplus\mathbb{C}$. Nótese que no se estudiarán las extensiones de las Nulfiliformes $\oplus\mathbb{C}^3$ porque sus extensiones siempre dan un álgebra estándar.

CASO FILIFORME

La clasificación de las álgebras de Leibniz no de Lie filiformes graduadas naturalmente de dimensión arbitraria fue obtenida por Ayupov et al. en [3]. Probaron que, salvo isomorfisoms, existen 3 álgebras filiformes para cada dimensión n. En esta sección, nos vamos a centrar únicamente en el álgebra:

$$NGF_1 : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

ya que las otras dos son álgebras de Lie escindidas.

Extendiendo el álgebra $NGF_1 \oplus \mathbb{C}^2$, usando la graduación natural, y haciendo el estudio de longitud máxima se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3.5. *No existe ningún álgebra Leibniz no de Lie* 3*-filiforme* n*-dimensional no estándar, cuya álgebra graduada naturalmente asociada sea* $NGF_1 \oplus \mathbb{C}^2$, *con* $n \geq 8$.

Demostración: La graduación natural de $NGF_1 \oplus \mathbb{C}^2$ es

$$L_1 = \langle e_1, e_2, f_1, f_2 \rangle \oplus L_2 = \langle e_3 \rangle \oplus \cdots \oplus L_i = \langle e_{i+1} \rangle \oplus \cdots \oplus L_{n-3} = \langle e_{n-2} \rangle,$$

así, le ley de $\widetilde{NGF_1} \oplus \mathbb{C}^2$, respecto de la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, f_1, f_2\}$ viene dada por los siguientes productos:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-3, \\ [e_1, e_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-4, \\ [e_2, e_2] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\ [e_i, e_j] = (*)e_{i+j+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i, j \leq n-5, \ (i,j) \neq (2,2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} [e_i, f_1] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [f_1, e_i] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq 2, \\ [e_i, f_1] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 3 \leq i \leq n-4, \\ [f_1, e_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 3 \leq i \leq n-4, \\ [f_i, f_j] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \end{cases}$$

y el resto de productos nulos.

Sea $\mathcal{L}$ isomorfa a $\widetilde{NGF_1} \oplus \mathbb{C}^2$ y supongamos, por reducción al absurdo, que es un álgebra no estándar.

Consideremos los siguientes generadores para la construcción de una nueva base adaptada:

$$\begin{aligned} \widetilde{x_s} &= e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i + b_1 f_1 + b_2 f_2, \\ \widetilde{x_t} &= A_1 e_1 + e_2 + \sum_{i=3}^{n} A_i e_i + B_1 f_1 + B_2 f_2, \\ \widetilde{x_u} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + f_1 + \beta_2 f_2, \\ \widetilde{x_v} &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i + \mu_1 f_1 + f_2. \end{aligned}$$

Los productos de los generadores en los que centraremos nuestra atención son:

$$\begin{cases} [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] & = (1 + a_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] & = (1 + A_1)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] & = (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [\widetilde{x_v}, \widetilde{x_s}] & = (\gamma_1 + \gamma_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \end{cases} \tag{3.6}$$

ya que los demás son combinaciones lineales de estos.

Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1 + a_2 \neq 0,}$ formamos la nueva base con los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x}_s, \\
y_2 &= \widetilde{x}_t, \\
y_3 &= [y_1, y_1], \\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 4 \leq i \leq n-2, \\
z_1 &= \widetilde{x_u}, \\
z_2 &= \widetilde{x}_v.
\end{aligned}$$

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_2 \in V_{k_t}$, $z_1 \in V_{k_u}$ y $z_2 \in V_{k_v}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_v},$$

con $y_i \in V_{(i-1)k_s}$, $3 \leq i \leq n-2$. Esta graduación, por ser de longitud máxima verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases}
[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\
k_s = 1 \text{ por la conectividad de la graduación,} \\
k_t, k_u, k_v \text{ distintos de cero, por nilpotencia,} \\
\text{todos los subíndices de los espacios graduantes son distintos entre sí,} \\
\text{todos los espacios graduantes son de dimensión } 1.
\end{cases} \tag{3.7}$$

Nótese que

$$\underbrace{[[\widetilde{x}_s, \widetilde{x}_s], \widetilde{x}_s], \ldots, \widetilde{x}_s]}_{i-veces} = (1 + a_2)e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, \ 2 \leq i \leq n-3. \tag{3.8}$$

De (3.6) y (3.8) se deduce que $[y_2, y_1]$ es linealmente dependiente con y_3, es decir, $[y_2, y_1] = \lambda y_3$. Además, por las propiedades (3.7) se tiene:

$$\begin{cases}
[y_2, y_1] \in V_{k_t + k_s}, \\
y_3 \in V_{2k_s}, \\
k_s \neq k_t,
\end{cases}$$

así, obtenemos $[y_2, y_1] = 0$, lo que implica $A_1 = -1$ (ver (3.6)).

Por la ley de $\mathcal{L}$ tenemos:

$$[y_1, y_2] = A_1(1 + a_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = -y_3,$$

que en términos de la graduación significa $V_{k_s+k_t} = V_{2k_s}$, ya que

$$\begin{cases} [y_1, y_2] \in V_{k_s+k_t}, \\ y_3 \in V_{2k_s}, \end{cases}$$

es decir, $k_s = k_t$, lo cual es imposible.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_2 = 0,}$ podemos considerar los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } A_1 = 0,}$ consideramos la nueva base formada por:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s}, \\
y_2 &= \widetilde{x_t}, \\
y_i &= [y_{i-1}, y_1] = e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2, \\
z_1 &= \widetilde{x_u}, \\
z_2 &= \widetilde{x_v}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_2 \in V_{k_t}$, $z_1 \in V_{k_u}$ y $z_2 \in V_{k_v}$, entonces $y_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $3 \leq i \leq n-2$. Así, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-4)k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_v}.$$

Esta graduación, por ser de longitud máxima verifica las propiedades (3.7).

Veamos, a continuación, que $\mathcal{L}$ es un álgebra estándar ya que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$, llegando así a contradicción. Para ello se analizan los valores admisibles de k_t, k_v y k_v.

- Si $k_t > 0$ tenemos las siguientes posibilidades:
  - Si $k_t = 2$, los únicos valores posibles de k_u y k_v para que la graduación sea conexa son:

$$k_u = n-1 \text{ y } k_v = 0 \text{ ó viceversa},$$

$$k_u = n-1 \text{ y } k_v = n \text{ ó viceversa},$$

$$k_u = 0 \text{ y } k_v = -1 \text{ ó viceversa}.$$

    En cualquier caso el álgebra sería estándar, ya que ó z_1 ó z_2 pertenecería al centro del álgebras.

  - Si $k_t = 3$, ó z_1 ó z_2 pertenecería al centro del álgebra, lo cual es imposible.
  - Si $k_t > 3$, veamos que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$.
    - $[y_i, z_1] = 0$ con $1 \leq i \leq n-4$.

      Por las propiedades (3.7) se tiene $[z_1, y_1] \in V_3 = \langle z_2 \rangle$, que es imposible pues $[z_1, y_1] \in L^2$ y $z_1 \in L \setminus L^2$. Así, $[z_1, y_1] = 0$. Análogamente se prueba $[y_1, z_1] = 0$.

      Por las propiedades (3.7) se tiene $[z_1, y_2] \in \langle y_4 \rangle$, es decir, $[z_1, y_2] = \gamma y_4$ con $\gamma \in \mathbb{C}$. En general, es fácil ver por inducción que $[z_1, y_i] = \gamma y_{i+2}$. Por otro lado, como $1 + a_2 = 0$ y por la ley de $\mathcal{L}$ tenemos:

$$[y_1, y_2] = A_1(1+a_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ es decir,}$$

$$[y_1, y_2] = \gamma y_m \text{ para algún } m \text{ con } 4 \leq m \leq n-2 \text{ y } \gamma \in \mathbb{C}.$$

      Por las propiedades de la graduación (3.7) es claro que $[y_1, y_2] \in \langle y_3 \rangle$, así deducimos que $[y_1, y_2] = 0$. Entonces, usando la identidad de Leibniz se tiene:

$$0 = [z_1, [y_1, y_2]] = [[z_1, y_1], y_2] - [[z_1, y_2], y_1] = -[\gamma y_4, y_1] = -\gamma y_5 \Longrightarrow \gamma = 0.$$

      Basta usar el método de inducción sobre i para obtener $[y_i, z_1] = 0$ con $3 \leq i \leq n-4$, ya que :

$$0 = [z_1, y_{i+1}] = [z_1, [y_i, y_1]] = [[z_1, y_i], y_1] - [[z_1, y_1], y_i] = 0 \Longrightarrow \gamma_i = 0.$$

- $[z_1, z_1] = 0$ y $[z_i, z_j] = 0$ con $1 \leq i, j \leq 2, i \neq j$. Como

$$\begin{cases} z_1 \in V_2, \\ k_t > 3, \end{cases}$$

tenemos $[z_1, z_1] \in \langle 0 \rangle$ ó $[z_1, z_1] \in V_{k_t} = \langle y_2 \rangle$, si $k_t = 4$. Pero $[z_1, z_1] \in V_{k_t}$ no es posible ya que $[z_1, z_1] \in L^2$ and $y_2 \in L \setminus L^2$.

Por la ley del álgebra tenemos:

$$[z_1, y_1] = (\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ es decir, } [z_1, y_1] = \gamma y_m$$

para algún m con $3 \leq m \leq n-2$ y $\gamma \in \mathbb{C}$. Podemos afirmar que $\alpha_1+\alpha_2 = 0$. En caso contrario llegaríamos, por las propiedades (3.7), a que $k_t = k_u$ pues

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ [z_1, y_1] \in V_{k_u+k_s}, \\ y_3 \in V_{k_t+k_s}. \end{cases}$$

De nuevo, por la ley del álgebra tenemos:

$$[z_1, z_2] = \gamma_1(\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2},$$

es decir, $[z_1, z_2] = \gamma y_m$, para algún m con $4 \leq m \leq n-2$. Por otro lado, por las propiedades (3.7) tenemos

$$\begin{cases} [z_1, z_2] \in V_5, \\ y_m \in V_{k_t+(m-1)k_s}, \text{ con } 4 \leq m \leq n-2. \end{cases}$$

Como $k_s = 1$ y $k_t > 3$ se tiene $k_t+(m-1)k_s > 6$, lo cual implica $[z_1, z_2] = 0$. Análogamente se prueba $[z_2, z_1] = 0$, llegando así a demostrar que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$.

- Si $k_t < 0$, tenemos las siguientes posibilidades:

- Si $k_t < 4-n$, como en estudios anteriores, se tendría claramente que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$ ó $z_2 \in Cent(\mathcal{L})$.
- Si $k_t > 4-n$, como en estudios anteriores, podemos asegurar que existe algún y_i con $3 \leq i \leq n-2$ tal que $y_i \in V_1 = \langle y_1 \rangle$, lo cual contradice la longitud máxima de la graduación.
- Si $k_t = 4-n$, usando las propiedades (3.7) y las propiedades de la sucesión central descendente se prueba fácilmente que

$$[z_1, y_i] = 0, \text{ con } 1 \leq i \leq n-2,$$
$$[y_i, z_1] = 0, \text{ con } 1 \leq i \leq n-2,$$
$$[z_1, z_1] = [z_1, z_2] = [z_2, z_1] = 0,$$

es decir, $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$.

Caso 2.2: Si $A_1 \neq 0$ **y** $A_1 \neq -1,$ tomamos la misma base que en Caso 2.1 y obtenemos la misma graduación.

Basta considerar el producto $[y_2, y_2]$ para llegar a contradicción. Veámoslo.

Por la ley de $\mathcal{L}$ tenemos

$$[y_2, y_2] = A_1(A_1+1)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = A_1 y_3 \neq 0,$$

ya que $A_1 \neq 0$.

Por las propiedades (3.7) tenemos:

$$\begin{cases} [y_2, y_2] \in V_{2k_t}, \\ y_3 \in V_{k_t+2k_s}, \end{cases}$$

es decir, $k_s = k_t$, contradiciendo así la longitud máxima de la graduación.

Caso 2.3: Si $A_1 \neq 0$ **y** $A_1 = -1,$ podemos afirmar $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. En caso contrario, sería imposible construir una nueva base a partir de los generadores considerados. Así, tomamos la base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s},\\
y_2 &= \widetilde{x_u},\\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 3 \leq i \leq n-2,\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_2 &= \widetilde{x_v}.
\end{aligned}
$$

Tomando $y_1 \in V_{k_s}$, $y_2 \in V_{k_u}$, $z_1 \in V_{k_t}$ y $z_2 \in V_{k_v}$ se obtiene la graduación de longitud máxima:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-4)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_v},$$

con $y_i \in V_{k_u+(i-2)k_s}$.

Podemos afirmar que $\alpha_1 = 0$. En caso contrario, se tendría, por la ley del álgebra:

$$[y_2, y_2] = [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = \tau y_3 \neq 0,$$

y por la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$:

$$\begin{cases} [y_2, y_2] \in V_{2k_u}, \\ y_3 \in V_{k_t+k_s}, \end{cases}$$

es decir, $k_t = k_s$, lo que contradice la longitud máxima de la graduación. Así, $\alpha_1 = 0$, entonces $\alpha_2 \neq 0$ y se tiene:

$$[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = -\alpha_2 e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2} = Ay_3 \text{ con } A \neq 0.$$

Por otro lado, por las propiedades de la graduación se tiene:

$$\begin{cases} [\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] \in V_{k_u+k_t}, \\ y_3 \in V_{k_u+k_s}, \end{cases}$$

así, $k_t = k_s$, lo cual es imposible.

$\square$

CASO 2-FILIFORME

Camacho, Gómez, González y Omirov obtuvieron la clasificación de las álgebras de Leibniz no de Lie 2-filiformes graduadas naturalmente (ver para más detalle [12]). Dicha clasificación se puede consultar en los preliminares, en el Teorema 1.4, en el que se demuestra que, salvo isomorfismos, existen sólo dos álgebras no escindidas que verifican las hipótesis comentadas, que se denotan por KF_4 y KF_5.

Gracias a los siguientes resultados, la Proposición 3.9 y la Proposición 3.10, se obtiene la clasificación de las álgebras consideradas en esta sección.

En la siguiente proposición se recurrirá al tratamiento computacional, más concretamente se usará un programa que hemos implementado en el software *Mathematica*, que determina si dos álgebras son isomorfas entre sí. El método algorítmico de este programa consta de los siguientes pasos:

- Paso 1: partiendo de álgebras de Leibniz, se definen en esta primera etapa del programa la propiedad de bilinealidad de las álgebras, las leyes de éstas y la base homogénea respecto de la cual se expresan todos los productos. Nótese que las leyes de las álgebras a considerar por el programa están definidas por las constantes de estructura (ver la sección de preliminares).

```
firstalgebra = Table[a[i, j, k], {i, 1, dim}, {j, 1, dim}, {k, 1, dim}];
secondalgebra = Table[b[i, j, k], {i, 1, dim}, {j, 1, dim}, {k, 1, dim}];
```

  Sea $B' = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base de $\mathcal{L}$. Cada vector $y_i \in B'$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de la base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$, es decir $y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} e_j$.

```
changebasis = Table[c[i, j], {i, 1, dim}, {j, 1, dim}];
```

- Paso 2: a través de un cambio de base, la primera álgebra es convertida en la segunda, obteniendo así un sistema de ecuaciones no lineales a resolver.

```
Module[{i, j, k}, For[i = 1, i <= dim, i++, For[j = 1, j <= dim, j++,
   For[k = 1, k <= dim, k++, expression[i_, j_, k_] :=
```

$$\sum_{s=1}^{dim}\sum_{m=1}^{dim} \texttt{(c[i, m]*c[j, s]*a[m, s, k])-}\sum_{p=1}^{dim}\texttt{c[p, k]*b[i, j, p]]]]]}$$

- Paso 3: pasamos a resolver el sistema de ecuaciones no lineales. A continuación hay que comprobar que las soluciones obtenidas verifican el cambio de base, es decir, que la matriz del cambio de base tiene determinante no nulo.

```
system = Union[Select[Flatten[Table[
      expression[i, j, k], {i, 1, dim}, {j, 1, dim}, {k, 1, dim}]], !
      NumberQ[#] &]];
equations = Map[(# == 0) &, system];
Off[Solve::"svars"]; Off[Solve::"verif"];
listsol = Union[Solve[Reduce[Union[equations, {c[1, 1] != 0}],
          Flatten[changebasis]], Flatten[changebasis]]];

Module[{u}, For[u = 1, u <= Length[listsol], u++,
   matriz[u_Integer] :=Simplify[Table[c[i, j], {i, 1, dim}, {j, 1, dim}] /.
   listsol[[u]]]]];
determinant[u_Integer] := Det[matriz[u]]]];
If[! NumberQ[determinant[u]] ||determinant[u] != 0,
Print["Isomorphic Algebras"], Print["NonIsomorphic Algebras"]]]]
```

Por último, se añade una subrutina para determinar si dos álgebras son isomorfas o no, cuando una de ellas pertene a una familia uniparamétrica de álgebras. Además, el programa devuelve el valor del parámetro para el que dichas álgebras serían isomorfas.

```
Module[{u}, For[u = 1, u <= Length[listsol], u++,
 compr[u_Integer]:=Select[Factor[system /. listsol[[u]]],! NumberQ[#]&]]
 eq[u_Integer]:=Map[(# == 0) &,Select[compr[u],
                  ! NumberQ[#]& && ! NumberQ[determinant[u]]]]]];
```

```
SolutionPossible := Module[{u}, For[u = 1, u <= Length[listsol], u++,
 Which[eq[u]=={}, ,! NumberQ[eq[u]],Print["sol[", u, "]->",eq[u]]]]];
Module[{u}, For[u = 1, u <= Length[listsol], u++,
 sol[u_Integer]:=If[! NumberQ[determinant[u]],Solve[eq[u],par], {}]];
IsomorphicValues=Union[Flatten[Table[sol[u],{u, 1,Length[listsol]}]]];];
For[u = 1, u <= Length[listsol], u++,
 Which[! NumberQ[sol[u]]&& ! NumberQ[determinant[u]] &&sol[u] !={{}},
 Print["Isomorphic Values-> solution[", u, "]->", sol[u]],
  ! NumberQ[sol[u]] && ! NumberQ[determinant[u]] && sol[u] == {{}},
  Print["They are isomorphic for any value of the parameter ->"]]]
```

Proposición 3.9. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie 3-filiforme $(n+1)$-dimensional y no estándar cuyo álgebra graduada naturalmente asociada es $KF_4 \oplus \mathbb{C}$. Entonces, $\mathcal{L}$ es isomorfa a M o a una de las álgebras de la familia $M^{1,\alpha}$, donde:*

$$M: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, & \\ [z_1, y_{n-1}] = y_{n-2}, & \end{cases} \qquad M^{1,\alpha}: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \le i \le n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, & \\ [y_{n-1}, z_1] = y_{n-2}, & \\ [z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}, & \alpha \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Demostración: Tomemos la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1\}$, entonces la graduación natural de $KF_4 \oplus \mathbb{C}$ está formada por los espacios:

$$L_1 = \langle e_1, e_{n-1}, f_1 \rangle,$$
$$L_2 = \langle e_2, e_n \rangle,$$
$$L_i = \langle e_i \rangle, \text{ con } 3 \le i \le n-2.$$

Así, la ley de la extensión de $KF_4 \oplus \mathbb{C}$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[e_1, e_{n-1}] = e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = (*)e_3 \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_i, e_{n-1}] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-4, \\
[e_n, e_{n-1}] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_i, f_1] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-1}, f_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_n, f_1] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[f_1, e_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[f_1, e_{n-1}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[f_1, e_n] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[f_1, f_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-5, \\
[e_i, e_j] = (*)e_{i+j+1} + \cdots + (*)e_{n-2} & 2 \leq i, j \leq n-2,\ i \neq 1.
\end{cases}$$

Sea $\mathcal{L}$ isomorfa a $\widetilde{KF_4} \oplus \mathbb{C}$ y no estándar.

Considérense los siguientes generadores:

$$\widetilde{x_s} = e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i + b_1 f_1,$$
$$\widetilde{x_t} = \sum_{i=1}^{n-2} A_i e_i + e_{n-1} + A_n e_n + B_1 f_1,$$
$$\widetilde{x_u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + f_1,$$

y los productos de dichos generadores:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n, \\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= A_1e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + e_n, \\
[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}}_{i-veces}] &= e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2,
\end{aligned}
$$

para la construcción de una nueva base adaptada.

Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ son linealmente independientes,}}$ construimos la nueva base adaptada formada por los vectores:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s}, \\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 2 \leq i \leq n-2, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_t}, \\
y_n &= [y_1, y_{n-1}], \\
z_1 &= \widetilde{x_u},
\end{aligned}
$$

cuya matriz del cambio de base es regular porque los vectores y_2 e y_n son linealmente independientes.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es

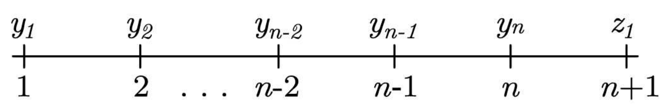
$$
V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_u},
$$

con $y_i \in V_{ik_s}$, $2 \leq i \leq n-2$. Nótese que esta graduación es conexa si y solo si $k_s = \pm 1$. Como en estudios anteriores, tomemos, sin pérdida de generalidad, $k_s = 1$, aunque mantendremos a veces la notación k_s para mayor claridad en el estudio. Así, la graduación verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ \text{ningún espacio de la graduación es nulo,} \\ \text{todos los subíndices de los espacios son distintos entre sí,} \\ k_t, k_u \neq 0 \text{ por nilpotencia.} \end{cases} \tag{3.9}$$

La prueba sigue analizando los valores admisibles de los subíndices k_t y k_u.

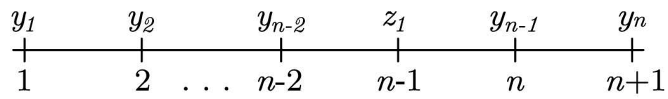
- Si $k_t > 0$, existen tres posibilidades:
    - Si $k_t = n-1$, por la conectividad de la graduación tenemos $k_u = 0$ ó $k_u = n+1$. Por el carácter nilpotente del álgebra $k_u = 0$ no es posible. Entonces $k_u = n+1$ y la gráfica correspondiente a la graduación es



Por la ley de $\mathcal{L}$ y las propiedades (3.9) se tiene:

$$\begin{cases} [y_i, z_1] \in V_{n+1+i} = \langle 0 \rangle, \text{ con } 1 \leq i \leq n-2, \\ [z_1, y_i] \in V_{n+1+i} = \langle 0 \rangle, \text{ con } 1 \leq i \leq n-2, \\ [z_1, y_{n-1}] \in V_{2n} = \langle 0 \rangle, \\ [y_{n-1}, z_1] \in V_{2n} = \langle 0 \rangle, \\ [z_1, y_n] \in V_{2n+1} = \langle 0 \rangle, \\ [y_n, z_1] \in V_{2n+1} = \langle 0 \rangle, \\ [z_1, z_1] \in V_{2n+2} = \langle 0 \rangle. \end{cases}$$

De todas estas afirmaciones se deduce que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$, luego $\mathcal{L}$ sería un álgebra estándar, obteniendo así contradicción.

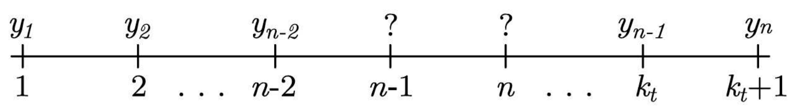


- Si $k_t = n$, la gráfica correspondiente es

  Razonando análogamente al caso anterior, se tiene que $[y_i, z_1] = [z_1, y_i] = 0$ para $3 \leq i \leq n$, ya que esos productos pertenecen al espacio $V_{n-1+i} = \langle 0 \rangle$. Además, $[z_1, y_1], [y_1, z_1] \in V_n = \langle y_{n-1} \rangle$, pero esto no es posible porque $y_{n-1} \in L \setminus L^2$, por ser un generador, mientras que $[z_1, y_1], [y_1, z_1] \in L^2$.

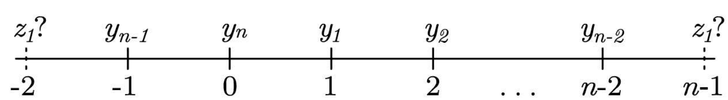
  Por otro lado, como $y_2 \in R(\mathcal{L})$ y usando la identidad de Leibniz se deduce que $[z_1, y_2] = [y_2, z_1] = 0$. Además, $[z_1, z_1] \in V_{2n-2} = \langle 0 \rangle$, concluyendo así que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$, por lo tanto $\mathcal{L}$ es un álgebra estándar, lo que es imposible.

- Si $k_t > n$, la graduación no puede ser conexa pues o bien $V_{n-1} = \langle 0 \rangle$ o bien $V_n = \langle 0 \rangle$, como muestra la siguiente gráfica.



- Si $k_t < 0$, distinguimos:

  - Si $k_t = -1$, por la conectividad de la graduación tenemos $k_u = -2$ ó $k_u = n-1$, como se observa en la siguiente gráfica.



  Si $k_u = -2$, vemos que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$, es decir, que $\mathcal{L}$ es estándar, lo cual es imposible.

  De las propiedades (3.9) obtenemos:

$$\begin{cases} [y_i, z_1] \in V_{i-2} = \langle y_{i-2} \rangle \text{ para } 2 \leq i \leq n-2, \\ [z_1, y_i] \in V_{i-2} = \langle y_{i-2} \rangle \text{ para } 2 \leq i \leq n-2, \end{cases}$$

pero por la ley del álgebra también sabemos que

$$[y_i, z_1] = \alpha_1 e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2} \quad \text{y} \quad [z_1, y_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}.$$

Por lo tanto, se llega a que $[y_i, z_1] = 0$ y $[z_1, y_i] = 0$ para $2 \leq i \leq n-2$. Por otro lado tenemos

$$\begin{cases} [y_1, z_1] \in V_{-1} = \langle y_{n-1} \rangle, \\ [z_1, y_1] \in V_{-1} = \langle y_{n-1} \rangle, \end{cases}$$

lo cual no es posible ya que y_{n-1} es un generador de $\mathcal{L}$. Por último, como

$$\begin{cases} [z_1, y_{n-1}] \in V_{-3} = \langle 0 \rangle, \\ [y_{n-1}, z_1] \in V_{-3} = \langle 0 \rangle, \\ y_n \in Cent(\mathcal{L}), \end{cases}$$

queda probado que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$.

Si $k_u = n-1$, podemos asegurar que $[z_1, y_i] = [y_i, z_1] = 0$ para $1 \leq i \leq n-2$ ya que ambos productos pertenecen al espacio $V_{n-1+i} = \langle 0 \rangle$. También $[z_1, z_1] = 0$ porque $[z_1, z_1] \in V_{2n-2} = \langle 0 \rangle$. Además, como $y_n \in Cent(\mathcal{L})$ está claro que $[z_1, y_n] = [y_n, z_1] = 0$.

Por otro lado, por las propiedades (3.9) podemos escribir $[z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}$ e $[y_{n-1}, z_1] = \beta y_{n-2}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Gracias a que $\{y_2, y_3, \ldots, y_{n-2}\} \in R(\mathcal{L})$, $y_n \in Cent(\mathcal{L})$ y a los anteriores cálculos, es suficiente calcular los productos: $[y_{n-2}, y_1]$, $[y_1, y_{n-2}]$, $[y_{n-1}, y_1]$ e $[y_i, y_{n-1}]$, con $2 \leq i \leq n-1$, para conocer la ley de $\mathcal{L}$ respecto de la nueva base.

Veamos los producto $[y_{n-2}, y_1]$ e $[y_1, y_{n-2}]$. Por las propiedades (3.9) podemos deducir que $[y_{n-2}, y_1] \in V_{n-1} = \langle z_1 \rangle$. Pero si usamos la sucesión central descendente, tenemos que $[y_{n-2}, y_1] \in L^2$ y $z_1 \in L \setminus L^2$. Se deduce por tanto que $[y_{n-2}, y_1] = 0$. Análogamente se prueba que $[y_1, y_{n-2}] = 0$.

Está claro que $[y_{n-1}, y_{n-1}] = 0$ pues $[y_{n-1}, y_{n-1}] \in V_{-2} = \langle 0 \rangle$.

También $[y_3, y_{n-1}] \in V_2 = \langle y_2 \rangle$, pero por la ley del álgebra tenemos:

$$[y_3, y_{n-1}] = A_1 e_4 + (*)e_5 + \cdots + e_{n-2} = A_1 y_4,$$

por tanto $A_1 = 0$ e $[y_3, y_{n-1}] = 0$. En caso contrario, si $A_1 \neq 0$, se tendría $V_2 \ni [y_3, y_{n-1}] = A_1 y_4 \in V_4$, lo que contradice la hipótesis de longitud máxima. Análogamente, se prueba que $[y_{n-1}, y_3] = 0$.

Como

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_1] = A_1 e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + A_1 a_{n-1} e_n = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\ [y_{n-1}, y_1] \in V_0 =< y_n >, \end{cases}$$

se tiene que $[y_{n-1}, y_1] = 0$.

Finalmente, por las propiedades (3.9) tenemos que $[y_i, y_{n-1}] = \gamma_i y_{i-1}$, con $4 \leq i \leq n-2$ y $\gamma_i \in \mathbb{C}$.

En resumen, la ley del álgebra respecto de la nueva base adaptada es:

$$\mathcal{L} : \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, & \\ [y_i, y_{n-1}] = \gamma_i y_{i-1}, & 4 \leq i \leq n-2, \ \gamma \in \mathbb{C}, \\ [z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}, & \alpha \in \mathbb{C}, \\ [y_{n-1}, z_1] = \beta y_{n-2}, & \beta \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Para finalizar la prueba, en este caso, es de gran utilidad recurrir al algoritmo implementado en *Mathematica* que calcula todas las identidades de Leibniz de un álgebra dada y al algoritmo, implementado en el mismo Software, que permite saber si dos álgebras dadas son o no isomorfas.

En primer lugar, calculamos la identidad de Leibniz en la familia de álgebras y se demuestra que

$$\gamma_i = 0 \quad \text{con} \quad 4 \leq i \leq n-2.$$

Estudiando la dimensión del ideal $R(\mathcal{L})$, que es un invariante del álgebra, se puede asegurar que $\beta = 0$ ó $\beta \neq 0$ da álgebras no isomorfas, ya que

$$dim(R(\mathcal{L})) = \begin{cases} n-3+2 & \text{si } \beta = 0, \\ n-3+1 & \text{si } \beta \neq 0. \end{cases}$$

Por otro lado, si $\beta = 0$ necesariamente $\alpha \neq 0$. En caso contrario, $\mathcal{L}$ sería estándar, pues $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$.

Haciendo el cambio de base

$$\begin{aligned} y_i' &= y_i, \text{ con } 1 \leq i \leq n, \\ z_1' &= \frac{1}{\alpha} z_1, \end{aligned}$$

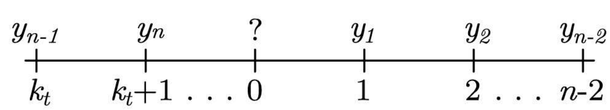
se tiene que $\alpha = 1$, obteniendo así el álgebra M.

Si $\beta \neq 0$, basta hacer el cambio de base:

$$\begin{aligned} y_i' &= y_i \text{ con } 1 \leq i \leq n, \\ z_1' &= \frac{1}{\beta} z_1, \end{aligned}$$

para poder tomar $\beta = 1$, obteniendo así la familia de álgebras $M^{1,\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. Finalmente recurrimos al programa de isomorfismos para comprobar que M es no isomorfa a cualquier álgebra de la familia $M^{1,\alpha}$.

- Si $k_t \neq -1$, usando los mismo argumentos detallados en los casos anteriores, se obtiene una graduación no conexa, como se puede observar en el siguiente gráfico.



Caso 2: Si $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ son linealmente dependientes, se verifica $A_1 a_{n-1} = 1$. Entonces, podemos distinguir los siguientes casos:

Caso 2.1: Si $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$ son linealmente independientes,

Caso 2.1.1: Si $\alpha_{n-1} \neq 0$, podemos tomar la base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s}, \\
y_i &= [y_{i-1}, y_i], \text{ con } 2 \leq i \leq n-2, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_t}, \\
y_n &= [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = \alpha_1 e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \alpha_{n-1} e_n, \\
z_1 &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}$$

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, entonces $y_i \in V_{ik_s}$ con $2 \leq i \leq n-2$. Así, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_u} \oplus V_{k_u}.$$

Esta graduación verificar las propiedades (3.9).

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Consideremos el producto $[y_1, y_{n-1}]$.

Por la ley del álgebra $\mathcal{L}$ tenemos que:

$$[y_1, y_{n-1}] = A_1 e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + e_n,$$

por lo que podemos deducir, usando la graduación que:

$$[y_1, y_{n-1}] = \beta y_2, \text{ con } \beta \neq 0, \quad \text{ó} \quad [y_1, y_{n-1}] = \gamma y_n, \text{ con } \gamma \neq 0.$$

Si $[y_1, y_{n-1}] = \beta y_2$ con $\beta \neq 0$, como

$$\begin{cases} [y_1, y_{n-1}] \in V_{k_s+k_t}, \\ y_2 \in V_{2k_s} \end{cases}$$

se llegaría a que $k_t = k_s$, lo cual es imposible.

Si $[y_1, y_{n-1}] = \gamma y_n$ con $\gamma \neq 0$, como

$$\begin{cases} [y_1, y_{n-1}] \in V_{k_s+k_t}, \\ y_n \in V_{k_s+k_u} \end{cases}$$

se llegaría a que $k_t = k_u$, volviendo a obtener una contradicción.

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.2: Si } \alpha_{n-1} = 0,}$ los productos de los generadores se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n, \\
&[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = \delta_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_1 \in \mathbb{C} \text{ por hipótesis,} \\
&[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] = A_1e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + e_n = \delta_2[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_2 \in \mathbb{C}, \\
&[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] = A_1^2e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + A_1e_n = \delta_3[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = \widetilde{\delta_3}[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \widetilde{\delta_3} \in \mathbb{C}, \\
&[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = \alpha_1e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\
&[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] = \alpha_1e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \alpha_1a_{n-1} = \alpha_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \\
&[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] = A_1\alpha_1e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, \\
&[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] = \alpha_1A_1e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \alpha_1e_n = \delta_4[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_4 \in \mathbb{C}, \\
&[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] = \alpha_1^2e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2},
\end{aligned}$$

ya que

$$rank\begin{pmatrix} 1 & (*) & \dots & (*) & a_{n-1} \\ A_1 & (*) & \dots & (*) & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{pues} \quad det\begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} \\ A_1 & 1 \end{pmatrix} = 1 - a_{n-1}A_1 \neq 0,$$

$$rank\begin{pmatrix} A_1^2 & (*) & \dots & (*) & A_1 \\ A_1 & (*) & \dots & (*) & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{pues} \quad det\begin{pmatrix} A_1^2 & A_1 \\ A_1 & 1 \end{pmatrix} = A_1^2 - A_1^2 \neq 0,$$

y

$$rank\begin{pmatrix} A_1\alpha_1 & (*) & \dots & (*) & \alpha_1 \\ 1 & (*) & \dots & (*) & a_{n-1} \end{pmatrix} = 2 \quad \text{pues} \quad det\begin{pmatrix} A_1\alpha_1 & \alpha_1 \\ 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha_1 - \alpha_1A_1a_{n-1} \neq 0.$$

Como $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$ son linealmente independientes y $\alpha_{n-1} = 0$, se puede afirmar que $\alpha_1 \neq 0$ y por tanto, se puede construir la nueva base adaptada con los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x_s}, \\ y_2 &= [y_1, \widetilde{x_u}], \\ y_i &= [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 3 \leq i \leq n-2, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x_t}, \\ y_n &= [y_1, y_1], \\ z_1 &= \widetilde{x_u}, \end{aligned}$$

donde

$$[[[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}], \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots, \widetilde{x_s}]}_{i-veces} = \alpha_1 e_{i+2} + (*)e_{i+3} + \cdots + (*)e_{n-2} \text{ con } 1 \leq i \leq n-4.$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Tomando $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus V_{k_u+2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_u+(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_u},$$

con $y_i \in V_{k_u+(i-1}k_s$, $3 \leq i \leq n-2$.

Considerando de nuevo el producto corchete $[y_1, y_{n-1}]$ llegamos a contradicción ya que o bien $[y_1, y_{n-1}] = \beta y_2$, con $\beta \neq 0$, o bien $[y_1, y_{n-1}] = \gamma y_n$ con $\gamma \neq 0$. Es decir, se obtendría, razonando análogamente al caso anterior y usando las propiedades (3.9), que o bien $k_t = k_u$ o bien $k_s = k_t$, siendo ambas igualdades imposibles.

Caso 2.2: Si $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$ son linealmente dependientes, como

$$rank \begin{pmatrix} \alpha_1 & (*) & \ldots & (*) & 0 \\ 1 & (*) & \ldots & (*) & a_{n-1} \end{pmatrix} = 1 \text{ se tiene } det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}a_{n-1} = 0.$$

Así, es imposible generar una nueva base con $\widetilde{x_s}$, $\widetilde{x_t}$ y $\widetilde{x_u}$ ya que:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] &= e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n,\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] &= \delta_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \text{ con } \delta_1 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= \delta_2[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \text{ con } \delta_2 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= \delta_3[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_3 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] &= \delta_4[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_4 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= \delta_5[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_5 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= \delta_6[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_6 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= \delta_7[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_7 \in \mathbb{C},\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= \delta_8[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \text{ con } \delta_8 \in \mathbb{C},
\end{aligned}
$$

debido a las restricciones consideradas.

□

Proposición 3.10. *No existe ningún álgebra de Leibniz no de Lie 3-filiforme $(n+1)$-dimensional no estándar, cuyo álgebra asociada graduada naturalmente sea $KF_5 \oplus \mathbb{C}$.*

Demostración: Consideremos la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1\}$ y la graduación natural de $KF_5 \oplus \mathbb{C}$, que está formada por los siguientes espacios:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \langle e_i, e_{n-1}, f_1 \rangle,\\
L_2 &= \langle e_2, e_n, \rangle,\\
L_i &= \langle e_i \rangle, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2.
\end{aligned}
$$

La ley de la extensión de $KF_5 \oplus \mathbb{C}$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\
[e_1, e_{n-1}] = e_2 + e_n + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_i, e_{n-1}] = e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-3, \\
[e_{n-1}, e_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-3, \\
[e_{n-1}, e_{n-1}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_n, e_{n-1}] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_i, f_1] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[e_{n-1}, f_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[e_n, f_1] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[f_1, e_i] = (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, & 1 \leq i \leq n-4 \\
[f_1, e_{n-1}] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[f_1, e_n] = (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2}, & \\
[f_1, f_1] = (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2}, & 2 \leq i \leq n-5, \\
[e_i, e_j] = (*)e_{i+j+1} + \cdots + (*)e_{n-2} & 2 \leq i, j \leq n-2.
\end{cases}$$

Sea $\mathcal{L}$ isomorfa a $\widetilde{KF_5} \oplus \mathbb{C}$, no estándar y consideremos los generadores definidos en la demostración de la Proposición 3.9.

Será de gran utilidad considerar los siguientes productos de los generadores:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] = (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n,$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (1 + A_1)e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + e_n,$$
$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] = (\alpha_1 + \alpha_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + \alpha_{n-1}e_n,$$

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_t}] &= A_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}],\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_u}] &= \alpha_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}],\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_s}] &= A_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_s}] &= \alpha_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}],\\
[\widetilde{x_t}, \widetilde{x_u}] &= A_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}],\\
[\widetilde{x_u}, \widetilde{x_t}] &= \alpha_1[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}],\\
[[\underbrace{[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}], \widetilde{x_s}] \ldots, \widetilde{x_s}}_{i-veces}]] &= (1+a_{n-1})^{i-1}e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2,\\
[[[\widetilde{x_s}, \underbrace{\widetilde{x_t}], \widetilde{x_t}], \ldots, \widetilde{x_t}}_{i-veces}]] &= (1+A_i)^{i}e_{i+1} + (*)e_{i+2} + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-3,
\end{aligned}
$$

para la construcción de una nueva base adaptada respecto a la cual el estudio de longitud máxima será más sencillo.

Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ son linealmente independientes,}}$ se verifica que

$$
det \begin{pmatrix} 1+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1+A_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ es decir, } A_1 a_{n-1} \neq 1.
$$

Así, podemos distinguir:

$\boxed{\textbf{Caso 1.1: Si } a_{n-1} \neq -1,}$ construimos la nueva base con los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s},\\
y_i &= [y_{i-1}, y_1], \text{ con } 2 \leq i \leq n-2,\\
y_{n-1} &= \widetilde{x_t},\\
y_n &= [y_1, y_{n-1}],\\
z_1 &= \widetilde{x_u}.
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base está formada por:

$$V_{k_s} \oplus V_{2k_s} \oplus \cdots \oplus V_{(n-2)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_u},$$

con $y_i \in V_{ik_s}$, $2 \leq i \leq n-2$. Análogamente a los casos anteriores la graduación verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ k_s = 1 \text{ por conectividad}, \\ k_t \text{ y } k_u \text{ distintos entre sí}, \\ \text{ningún subespacio de la graduación es nulo}, \\ \text{todos lo subíndices de los subespacios son distintos entre sí}, \\ k_t \neq 0, k_u \neq 0 \text{ por nilpotencia.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Veamos que es suficiente considerar los productos $[y_2, y_{n-1}]$ e $[y_{n-1}, y_1]$ para llegar a contradicción.

Por la ley del álgebra tenemos:

$$[y_{n-1}, y_1] = [\sum_{i=1}^{n-2} A_i e_i + e_{n-1} + A_n e_n + B_1 f_1, e_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e_i + b_1 f_1] =$$

$$= A_1 e_2 + \cdots + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1} A_1 e_n,$$

es decir, $[y_{n-1}, y_1] = A_1 y_2$. Por las propiedades (3.10) tenemos

$$\begin{cases} [y_{n-1}, y_1] \in V_{k_t+k_s}, \\ y_2 \in V_{2k_s}, k_t \neq k_s \end{cases}$$

es decir, $A_1 = 0$.

De nuevo por la ley del álgebra $\mathcal{L}$:

$$[y_2, y_{n-1}] = [(1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \cdots + (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n, \sum_{i=1}^{n-2} A_i e_i + e_{n-1} + A_n e_n + B_1 f_1] =$$

$$= (1 + a_{n-1})(1 + A_1)e_3 + (*)e_4 + \cdots + (*)e_{n-2},$$

es decir, $[y_2, y_{n-1}] = \gamma y_3$ con $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$. Usando de nuevo las propiedades (3.10) se tiene

$$\begin{cases} y_2 \in V_{2k_s}, \\ y_{n-1} \in V_{k_t}, \\ [y_2, y_{n-1}] \in V_{k_t+2k_s}, \\ y_3 \in V_{3k_s}, \end{cases}$$

lo que implica $k_t + 2k_s = 3k_s$, es decir, $k_t = k_s$, pero esto es imposible.

$\boxed{\textbf{Caso 1.2: Si } a_{n-1} = -1,}$ entonces $A_1 \neq -1$. En caso contrario, tendríamos que $a_{n-1}A_1 = -1$, lo que es imposible. Así, podemos construir la nueva base adaptada con los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} y_1 &= \widetilde{x_s}, \\ y_{n-1} &= \widetilde{x_t}, \\ y_2 &= [y_1, y_{n-1}], \\ y_i &= [y_{i-1}, y_{n-1}], \text{ con } 3 \leq i \leq n-2, \\ y_n &= [y_1, y_1], \\ z_1 &= \widetilde{x_u}. \end{aligned}$$

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, la graduación de longitud máxima asociada a la nueva base es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_s+k_t} \oplus V_{k_s+2k_t} \oplus \cdots \oplus V_{k_s+(n-3)k_t} \oplus V_{k_t} \oplus V_{2k_s} \oplus V_{k_u},$$

con $y_i \in V_{k_s+(i-1)k_t}$, $2 \leq i \leq n-2$. Esta graduación es conexa si y solo si $k_t = \pm 1$. Análogamente a los estudios realizados a lo largo de esta memoria podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $k_t = 1$. La graduación, por ser de longitud máxima, verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ k_s, k_t \text{ y } k_u \text{ distintos entre sí,} \\ \text{ningún subespacio de la graduación es nulo,} \\ \text{todos los subíndices de los subespacios son distintos entre sí,} \\ k_s \neq 0, k_u \neq 0 \text{ por nilpotencia.} \end{cases} \tag{3.11}$$

La prueba continua estudiando los valores admisibles de k_s y k_u, distinguiendo los siguientes casos:

- Si $k_s > 0$, consideramos:
  - Si $k_s = 2$, entonces $k_s + 2k_t = 4 = 2k_s$, que es imposible pues la graduación es conexa.
  - Si $k_s = 3$, se tiene $2k_s = 6 = k_s + 3k_t$, llegando a la misma contradicción que antes.
  - Si $k_s > 3$, o bien $V_2 = \langle 0 \rangle$ o bien $V_3 = \langle 0 \rangle$, lo cual es imposible por conectividad.
- Si $k_s < 0$, tenemos:
  - Si $k_s = 3 - n$, distinguimos si $n = 5$ ó $n \geq 6$.

    Si $n = 5$, veamos que $z_1 \in Cent(\mathcal{L})$, es decir, $\mathcal{L}$ es un álgebra estándar, lo que es imposible.

    Como $y_3 \in V_0$ entonces $y_3 \in Cent(\mathcal{L})$ y por lo tanto $[z_1, y_3] = 0 = [y_3, z_1]$.

    Por las propiedades (3.11) tenemos que $[z_1, y_4], [y_4, z_1] \in V_{-2} = \langle y_1 \rangle$. Esto es imposible pues $[z_1, y_4], [y_4, z_1] \in L/L^2$ pero $y_1 \in L^2$. El resto de los productos con z_1 son trivialmente nulos, usando las propiedades (3.11).

    Si $n \geq 6$, entonces $dist(k_s, 2k_s) > 2$, es decir, siempre existe algún espacio de la graduación nulo entre V_{k_s} y V_{2k_s}, dando lugar a contradicción.

- Si $k_s \neq 3-n$, obtenemos siempre álgebras estándar o graduaciones no conexas usando las mismas herramientas que en casos anteriores.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ son linealmente dependientes,}}$ se verifica

$$rank \begin{pmatrix} 0 & 1+a_{n-1} & (*) & \dots & (*) & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 1+A_1 & (*) & \dots & (*) & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1, \text{ es decir, } det \begin{pmatrix} 1+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1+A_1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Así se obtiene $a_{n-1}A_1 = 1$ y distinguimos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \textbf{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}] \textbf{ son linealmente independientes,}}$ necesitamos exigir las siguientes restricciones para hacer el cambio de base:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.1: Si } \alpha_1 + \alpha_{n-1} \neq 0,}$ por último distinguimos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1.1.1: Si } 1 + a_{n-1} \neq 0,}$ tomamos la nueva base formada por:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_u}, \\
y_2 &= [y_1, z_1], \\
y_i &= [y_{i-1}, y_1] = (1+a_{n-1})^{i-2}(\alpha_1 + \alpha_{n-1})e_i + (*)e_{i+1} + \dots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2, \\
y_{n-1} &= \widetilde{x_t}, \\
y_n &= [y_1, y_{n-1}].
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$ se obtiene la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{k_u+k_s} \oplus \dots \oplus V_{k_u+(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_u},$$

con $y_i \in V_{k_u+(i-1)k_3}$, $2 \leq i \leq n-2$. Esta graduación por ser de longitud máxima verifica las propiedades que etiquetamos anteriormente como (3.10).

Basta considerar el producto $[y_1, y_1]$ para llegar a contradicción. Veámoslo.

Por la ley del álgebra tenemos:

$$[y_1, y_1] = (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \dots (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n,$$

es decir, $[y_1, y_1] = \beta y_2$, con $\beta \neq 0$, ó $[y_1, y_1] = \gamma y_n$, con $\gamma \neq 0$.

Si $[y_1, y_1] = \beta y_2$ con $\beta \neq 0$, por las propiedades (3.10) tenemos:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] \in V_{2k_s}, \\ y_2 \in V_{k_u+k_s}, \\ 2k_s = k_u + k_s \end{cases}$$

así $k_s = k_u$, lo cual es imposible.

Si $[y_1, y_1] = \gamma y_n$ con $\gamma \neq 0$, de nuevo por las propiedades (3.10) se tiene:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] \in V_{2k_s}, \\ y_n \in V_{k_t+k_s}, \\ 2k_s = k_t + k_s, \end{cases}$$

es decir, $k_s = k_t$, lo cual contradice la longitud máxima de la graduación.

Caso 2.1.1.2: Si $1 + a_{n-1} = 0,$ como $a_{n-1}A_1 = 1$ tenemos $A_1 = -1$. Tomemos la nueva base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_u},\\
y_2 &= [y_1, z_1],\\
y_i &= [y_{i-1}, z_1] = (\alpha_1+\alpha_{n-1})^{i-1}e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2,\\
y_{n-1} &= \widetilde{x_t},\\
y_n &= [y_1, y_{n-1}].
\end{aligned}
$$

La matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, entonces $y_i \in V_{k_s+(i-1)k_u}$ con $2 \leq i \leq n-2$. Así, se obtiene la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{k_s+k_u} \oplus \cdots \oplus V_{k_s+(n-3)k_u} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_u}.$$

Basta considerar el producto $[y_1, y_1]$ para llegar a contradicción. Por la ley del álgebra tenemos:

$$[y_1, y_1] = (*)e_3 + \ldots (*)e_{n-2} - e_n,$$

es decir, $[y_1, y_1] = \beta y_n$ con $\beta \neq 0$. Por la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ tenemos:

$$
\begin{cases}
[y_1, y_1] \in V_{2k_s},\\
y_n \in V_{k_t+k_s},\\
2k_s = k_t + k_s,
\end{cases}
$$

así, $k_s = k_t$, lo cual es imposible pues la graduación tiene longitud máxima.

Caso 2.1.2: Si $\alpha_1 + \alpha_{n-1} = 0,$ tenemos $(1 + A_1)\alpha_{n-1} \neq 0$ ya que los vectores $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ son linealmente independientes, es decir

$$rank \begin{pmatrix} 1+A_1 & (*) & \ldots & (*) & 0 & 1 \\ \alpha_1+\alpha_{n-1} & (*) & \ldots & (*) & 0 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = 2 \Longrightarrow det \begin{pmatrix} 1+A_1 & 1 \\ \alpha_1+\alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Además, como $a_1 A_{n-1} = 1$, se puede asegurar que $a_{n-1} \neq -1$.

Tomemos la nueva base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \widetilde{x_s},\\
y_{n-1} &= \widetilde{x_t},\\
y_2 &= [y_1, y_{n-1}],\\
y_i &= [y_{i-1}, y_1] = (1 + a_{n-1})^{i-2}(1 + A_1)e_i + (*)e_{i+1} + \cdots + (*)e_{n-2}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2,\\
z_1 &= \widetilde{x_u},\\
y_n &= [y_1, z_1].
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $y_1 \in V_{k_s}$, $y_{n-1} \in V_{k_t}$ y $z_1 \in V_{k_u}$, entonces $y_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$, con $2 \leq i \leq n-2$. Así se obtiene la graduación de longitud máxima

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+(n-3)k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_s+k_u} \oplus V_{k_u}.$$

Basta considerar el producto $[y_1, y_1]$ para llegar a contradicción. Por la ley del álgebra tenemos:

$$[y_1, y_1] = (1 + a_{n-1})e_2 + (*)e_3 + \ldots (*)e_{n-2} + a_{n-1}e_n,$$

es decir, $[y_1, y_1] = \beta y_2$ con $\beta \neq 0$ pues $a_{n-1} \neq -1$, ó $[y_1, y_1] = \gamma y_n$ con $\gamma \neq 0$, pues $a_{n-1} \neq 0$.

Si $[y_1, y_1] = \beta y_2$ con $\beta \neq 0$, por la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ tenemos:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] \in V_{2k_s},\\ y_2 \in V_{k_t+k_s},\\ 2k_s = k_t + k_s, \end{cases}$$

así, $k_s = k_t$, lo cual es imposible pues la graduación tiene longitud máxima.

Si $[y_1, y_1] = \gamma y_n$ con $\gamma \neq 0$, por la propiedad $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ tenemos:

$$\begin{cases} [y_1, y_1] \in V_{2k_s}, \\ y_n \in V_{k_u+k_s}, \\ 2k_s = k_u + k_s, \end{cases}$$

así, $k_s = k_u$, lo cual es imposible pues la graduación tiene longitud máxima.

Caso 2.2: Si $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ son linealmente dependientes, se tienen las siguientes restricciones:

$$A_1\alpha_{n-1} = \alpha_1 \text{ de la dependencia lineal de } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] \text{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}],$$

$$a_{n-1}A_1 = 1 \text{ de la dependencia lineal de } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}] \text{ y } [\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}],$$

de donde se deduce que los vectores $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_s}]$ y $[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_u}]$ han de ser linealmente dependientes. En caso contrario, se tendría

$$det \begin{pmatrix} 1 + a_{n-1} & a_{n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

es decir $\alpha_{n-1} \neq a_{n-1}\alpha_1$, lo cual está en contradicción con las dos restricciones mostradas anteriormente.

□

Resumimos en el siguiente teorema los resultados obtenidos en esta sección.

Teorema 3.6. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie 3-filiforme $(n+1)$-dimensional y no estándar, cuyo álgebra asociada graduada naturalmente es 2-filiforme $\oplus\mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{L}$ es isomorfa a M o a una de las álgebras de la familia $M^{1,\alpha}$, donde:*

$$M: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, \\ [z_1, y_{n-1}] = y_{n-2}, \end{cases} \qquad M^{1,\alpha}: \begin{cases} [y_i, y_1] = y_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [y_1, y_{n-1}] = y_n, \\ [y_{n-1}, z_1] = y_{n-2}, \\ [z_1, y_{n-1}] = \alpha y_{n-2}, & \alpha \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

En resumen, en este capítulo se ha probado que no se obtiene ningún álgebra de longitud máxima cuando extendemos las álgebras de Leibniz no escindidas 3-filiformes graduadas naturalmente. En el caso de las escindidas, hemos argumentado que sólo estamos interesados en las álgebras no estándar. Tras realizar el estudio de longitud máxima, se prueba que sólo aparecen éstas cuando entendemos las 2-filiformes$\oplus\mathbb{C}$ graduadas naturalmente, obteniendo así el álgebra de Lie de longitud máxima N, al extender las de Lie, y M y $M^{1,\alpha}$, al extender las de Leibniz. Estos resultados son de gran importancia para poder abordar el caso más general, el estudio de las álgebras de Leibniz p-filiformes de longitud máxima, con $p \geq 4$ y dimensión arbitraria.

Álgebras de Leibniz p-filiformes de longitud máxima 4

El objetivo más ambicioso del presente trabajo es obtener un algoritmo para clasificar las álgebras de Leibniz n-dimensionales p-filiformes de longitud máxima, siendo n y p genéricos. El capítulo 3 nos sirve de guía en este sentido para analizar dicho estudio y conjeturar que no existen álgebras de Leibniz n-dimensionales p-filiformes no escindidas de longitud máxima, con n suficientemente grande.

En este capítulo, se prueba dicha conjetura para las álgebras obtenidas al extender las de Lie p-filiformes no escindidas graduadas naturalmente.

Las técnicas que se usan para el desarrollo de este capítulo han sido completamente detalladas en los capítulos 2 y 3, por lo que nos limitaremos a mostrar los pasos fundamentales. Partimos de la clasificación de las álgebras de Lie p-filiformes graduadas naturalmente no escindidas, mostrada en los Teoremas 1.8 y 1.9 en la sección de preliminares.

Teorema 4.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz n-dimensional p-filiforme, cuyo álgebra graduada naturalmente asociada es un álgebra de Lie p-filiforme no escindida que verifica $n \geq \text{máx}\{3p-1, p+8\}$. Entonces $\mathcal{L}$ no admite ninguna graduación de longitud máxima.*

Demostración: Nótese que, según el Teorema 1.8, $p \geq 4$, $n \geq 11$ y $3 \leq r_1 < r_2 \ldots < r_{p-1} \leq n-p$, siendo todos los r_i impares.

A lo largo de toda la prueba supondremos, por reducción al absurdo, que el álgebra extendida obtenida en cada caso tiene longitud máxima. Aplicando las mismas técnicas que en los capítulos anteriores, llegaremos a contradicción.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$.

La graduación natural asociada es

$$L_1 = \langle x_0, x_1 \rangle \oplus L_2 = \langle x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus L_{r_1-1} = \langle x_{r_1-1} \rangle \oplus L_{r_1} = \langle x_{r_1}, y_1 \rangle \oplus L_{r_1+1} = \langle x_{r_1+1} \rangle \oplus \cdots \oplus$$

$$\oplus L_{r_2-1} = \langle x_{r_2-1} \rangle \oplus L_{r_2} = \langle x_{r_2}, y_2 \rangle \oplus L_{r_2+1} = \langle x_{r_2+1} \rangle \oplus \cdots \oplus L_{r_{p-1}-1} = \langle x_{r_{p-1}-1} \rangle \oplus$$

$$\oplus L_{r_{p-1}} = \langle x_{r_{p-1}}, y_{p-1} \rangle \oplus L_{r_{p-1}+1} = \langle x_{r_{p-1}+1} \rangle \oplus \cdots \oplus L_{n-p} = \langle x_{n-p} \rangle,$$

por lo que la ley de $\widetilde{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$ estará definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
\qquad \vdots & \qquad \vdots \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p}, & r_{p-1} - 1 \leq i \leq n - p - 1, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
\qquad \vdots & \qquad \vdots \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
[x_i,x_0]=-x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_{n-p}, & r_{p-1}-1\leq i\leq n-p-1,\\
[x_i,x_{r_j-i}]=(*)x_{r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{i-1}y_j+(*)y_{j+1}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\leq i\leq \frac{r_j-1}{2},\\
 & 1\leq j\leq p-1,\ r_j+1\geq 4,\\
[x_{r_j-i},x_i]=(*)x_{r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{i}y_j+(*)y_{j+1}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\leq i\leq \frac{r_j-1}{2},\\
 & 1\leq j\leq p-1,\ r_j+1\geq 4,\\
[x_i,x_j]=(*)x_{i+j+1}+\ldots(*)x_{n-p}+(*)y_{r_k}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\leq i+j\leq r_k,\\
 & 1\leq k\leq p-1,\\
[x_i,y_j]=(*)x_{i+r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_{r_k}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 0\leq i\leq n-p-1,\\
 & 1\leq j\leq p-1\\
[y_i,y_j]=(*)x_{r_i+r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_{r_k}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\leq i,j\leq p-4,\\
 & 7\leq r_k\leq p-1,\\
 & r_i+r_j+1\leq r_k\leq p-1.
\end{cases}$$

Consideremos los siguientes generadores:

$$\widetilde{x_s}=x_0+\sum_{i=1}^{n-p}a_ix_i+\sum_{j=1}^{p-1}b_jy_j \quad \text{y} \quad \widetilde{x_t}=A_0x_0+x_1+\sum_{i=2}^{n-p}A_ix_i+\sum_{j=1}^{p-1}B_jy_j$$

y los siguientes productos entre ambos:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s},\widetilde{x_s}]&=(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[\widetilde{x_t},\widetilde{x_t}]&=(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}]&=(1-a_1A_0)x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}]}_{i-veces}&=(-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1}\\
&\text{con } 1\leq i\leq r_1-3,\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}]}_{i-veces}&=(-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_2+\cdots+(*)y_{p-1}\\
&\text{con } r_1-1\leq i\leq r_2-3,
\end{aligned}$$

$$[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\dots\widetilde{x_s}}_{i-veces}]=(-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_j+\cdots+(*)y_{p-1}$$

$$\text{con } r_{j-1}-1\leq i\leq r_j-3,\ 2\leq j\leq p-1,$$

$$[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\dots\widetilde{x_s}}_{i-veces}]=(-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}$$

$$\text{con } r_{p-1}-1\leq i\leq n-p-2.$$

$$[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\ \underbrace{\widetilde{x_s}],\dots\widetilde{x_s}}_{(r_k-2)-veces}]=(-1)^{r_k-2}(1-a_1A_0)x_{r_k}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{r_k-2}(1-a_1A_0)a_1y_k+$$

$$+(*)y_{k+1}+\cdots+(*)y_{p-1} \text{ con } 1\leq k\leq p-1,$$

que serán de gran utilidad para la construcción de una nueva base adaptada.

Así, podemos construir la nueva base con los siguientes vectores:

$$z_0=\widetilde{x_s},$$
$$z_1=\widetilde{x_t},$$
$$z_2=[z_0,z_1],$$
$$z_i=[z_{i-1},z_0],\ \text{con } 3\leq i\leq n-p,$$
$$p_j=[z_1,z_{r_j-1}],\ \text{con } 1\leq j\leq p-1,$$

donde

$$p_j=[z_1,z_{r_j-1}]=(-1)^{r_j-3}(1-a_1A_0)A_0x_{r_j}+(*)x_{r_j+1}+\dots(*)x_{n-p}+(-1)^{r_1-3}(1-a_1A_0)y_j$$
$$+(*)y_{j+1}+(*)y_{p-1}.$$

Si tomamos $z_0\in V_{k_s}$ y $z_1\in V_{k_t}$, entonces $z_i\in V_{k_t+(i-1}k_s$ con $3\leq i\leq n-p$ y $p_j\in V_{2k_t+(r_j-2)k_s}$ con $1\leq j\leq p-1$. Así, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+(n-p-1)k_s}\oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s}\oplus\cdots\oplus V_{2k_t+(r_{p-1}-2)k_s}.$$

La matriz del cambio de base realizado es

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{r_1} & \cdots & a_{r_2} & \cdots & a_{r_{p-1}} & \cdots & a_{n-p} & b_1 & b_2 & \cdots & b_{p-1} \\
A_0 & 1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_{r_1} & \cdots & A_{r_2} & \cdots & A_{r_{p-1}} & \cdots & A_{n-p} & B_1 & B_2 & \cdots & B_{p-1} \\
0 & 0 & C_2 & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & (*) & (*) & \cdots & (*) \\
0 & 0 & 0 & C_3 & \cdots & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & (*) & (*) & \cdots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{r_1} & \cdots & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & C_{r_1}a_1 & (*) & \cdots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & C_{r_2} & \cdots & (*) & \cdots & (*) & 0 & C_{r_2}a_1 & \cdots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & C_{r_{p-1}} & \cdots & (*) & 0 & 0 & \cdots & C_{r_{p-1}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & C_{n-p} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -C_{r_1}A_0 & \cdots & (*) & \cdots & (*) & \cdots & (*) & -C_{r_1} & (*) & \cdots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -C_{r_2}A_0 & \cdots & (*) & \cdots & (*) & 0 & -C_{r_2} & \cdots & (*) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -C_{r_{p-1}}A_0 & \cdots & (*) & 0 & 0 & \cdots & -C_{r_{p-1}}
\end{pmatrix}
$$

siendo $C_i = (-1)^i(1-a_1A_0)$, con $2 \leq i \leq r_p-1$. Esta matriz tiene determinante distinto de cero ya que los generadores $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ son linealmente independientes, esto es $1-a_1A_0 \neq 0$.

Por la misma razón que en capítulos anteriores, podemos tomar, sin pérdida de generalidad $k_s = 1$. Para mayor claridad en el estudio, aunque hemos fijado $k_s = 1$, mantendremos la notación k_s. Además, por ser la graduación de longitud máxima, se verifican las siguientes propiedades:

$$
\begin{cases}
[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\
k_t \neq 0, \text{ por nilpotencia,} \\
\text{los subespacios de la graduación son no vacíos,} \\
\text{los subespacios de la graduación son de dimensión } 1, \\
\text{todos los subíndices son distintos entre sí.}
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

La demostración sigue analizando los valores admisibles de k_t. Distinguiremos los siguientes casos:

- Si $k_t > 0$, por las propiedades (4.1) el único valor posible para k_t es 2, pero en este caso se tiene:

$$k_t + k_s < 2k_t + (r_1 - 2)k_s < k_t + (n-p-1)k_s,$$

es decir,

$$V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = \langle p_1, z_m \rangle \text{ con } 2 \leq m \leq n-p,$$

contradiciendo las propiedades (4.1).

- Si $k_t < 0$, podemos distinguir tres casos:
  - Si $k_t = -n+p+1$, entonces $2k_t+(r_i-2)k_s \leq 2(-n+p+1)+n-p-2 = -n+p \leq 0$ con $1 \leq i \leq p-1$, así podemos afirmar que todos los espacios de la forma $V_{2k_t+(r_i-2)k_s}$ tienen subíndices negativos. Por lo tanto, como la graduación es conexa tiene que ocurrir que

    $$dist(p_i, p_{i+1}) = dist(2k_t + r_i - 2, 2k_t + r_{i+1} - 2) = 1, \text{ es decir, } dist(r_i, r_{i+1}) = 1,$$

    lo cual es imposible pues todos los r_i, con $1 \leq i \leq p-1$, son impares.
  - Si $k_t > -n+p+1$, podemos asegurar que existe z_t con $1 \leq t \leq n-p$ tal que $z_t \in V_1 = \langle z_0 \rangle$, llegando a contradicción.
  - Si $k_t < -n+p+1$, se tiene, sin más que sustituir los valores de k_t y k_s, que $V_0 = \langle 0 \rangle$, contradiciendo la conectividad de la graduación.

Queda así probado que no se obtiene ningún álgebra de longitud máxima al extender $L(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$.

Además, este estudio es válido para cualquier valor admisible de $r_p - 1$, es decir, este estudio engloba los casos de $\widetilde{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p)$, $\widetilde{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-1)$ y $\widetilde{L}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-2}, n-p-2)$.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$.

La graduación natural de $Q(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$ es:

$$L_1 = \langle x_0, x_1 \rangle \oplus L_2 = \langle x_2 \rangle \oplus \cdots \oplus L_{r_1-1} = \langle x_{r_1-1} \rangle \oplus L_{r_1} = \langle x_{r_1}, y_1 \rangle \oplus L_{r_1+1} = \langle x_{r_1+1} \rangle \oplus \cdots \oplus$$

$$\oplus L_{r_2-1} = \langle x_{r_2-1} \rangle \oplus L_{r_2} = \langle x_{r_2}, y_2 \rangle \oplus L_{r_2+1} = \langle x_{r_2+1} \rangle \oplus \cdots \oplus L_{r_{p-1}-1} = \langle x_{r_{p-1}-1} \rangle \oplus$$

$$\oplus L_{r_{p-1}} = \langle x_{r_{p-1}}, y_{p-1} \rangle \oplus L_{r_{p-1}+1} = \langle x_{r_{p-1}+1} \rangle \oplus \cdots \oplus L_{n-p} = \langle x_{n-p} \rangle,$$

por lo que la ley de $\widetilde{Q}(n, r_1, r_2, \ldots, r_{p-1})$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
\qquad\qquad\vdots & \qquad\vdots \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p}, & r_{p-1} - 1 \leq i \leq n - p - 1, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
\qquad\qquad\vdots & \qquad\vdots \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p}, & r_{p-1} - 1 \leq i \leq n - p - 1, \\
[x_i, x_{r_j-i}] = (*)x_{r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (-1)^{i-1}y_j + (*)y_{j+1} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2},\ 1 \leq j \leq p-1, \\
 & r_j + 1 \geq 4, \\
[x_{r_j-i}, x_i] = (*)x_{r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (-1)^{i}y_j + (*)y_{j+1} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq \frac{r_j-1}{2},\ 1 \leq j \leq p-1, \\
 & r_j + 1 \geq 4, \\
[x_i, x_{n-p-i}] = (-1)^{i-1}x_{n-p}, & 1 \leq i \leq \frac{n-p-1}{2}, \\
[x_{n-p-i}, x_i] = (-1)^{i}x_{n-p}, & 1 \leq i \leq \frac{n-p-1}{2}, \\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \ldots (*)x_{n-p} + (*)y_{r_k} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 2 \leq i + j \leq r_k,\ 1 \leq k \leq p-1, \\
[x_i, y_j] = (*)x_{i+r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{r_k} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 0 \leq i \leq n - p - 1 - r_j,\ 1 \leq j \leq p-1 \\
[y_i, y_j] = (*)x_{r_i+r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{r_k} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i, j \leq p-4,\ 7 \leq r_k \leq p-1, \\
 & r_i + r_j + 1 \leq r_k \leq p-1.
\end{cases}$$

Tomemos como generadores a los vectores:

$$\widetilde{x}_s = x_0 + \sum_{i=1}^{n-p} a_i x_i + \sum_{j=1}^{p-1} b_j y_j \quad \text{y} \quad \widetilde{x}_t = A_0 x_0 + x_1 + \sum_{i=2}^{n-p} A_i x_i + \sum_{j=1}^{p-1} B_j y_j.$$

Obsérvese que $1-a_1A_0\neq 0$. Consideremos los siguientes productos entre ambos:

$$
\begin{aligned}
[\widetilde{x_s},\widetilde{x_s}] &= (*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[\widetilde{x_t},\widetilde{x_t}] &= (*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}] &= (1-a_1A_0)x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}]}_{i-veces} &= (-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1}\\
&\quad \text{con } 1\leq i\leq r_1-3,\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}]}_{i-veces} &= (-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_2+\cdots+(*)y_{p-1}\\
&\quad \text{con } r_1-1\leq i\leq r_2-3,\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}]}_{i-veces} &= (-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_j+\cdots+(*)y_{p-1}\\
&\quad \text{con } r_{j-1}-1\leq i\leq r_j-3 \text{ y } 3\leq j\leq p-1,\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}]}_{i-veces} &= (-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}\\
&\quad \text{con } r_{p-1}-1\leq i\leq n-p-2.\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\ \underbrace{\widetilde{x_s}],\ldots\widetilde{x_s}}_{(r_k-2)-veces}\ ] &= (-1)^{r_k-2}(1-a_1A_0)x_{r_k}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{r_k-2}(1-a_1A_0)a_1y_k+\\
&\quad +(*)y_{k+1}+\cdots+(*)y_{p-1} \text{ con } 1\leq k\leq p-1.
\end{aligned}
$$

Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1+a_1\neq 0,}$ tomamos la base formada por los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s},\\
z_1 &= \widetilde{x_t},\\
z_2 &= [z_0,z_1],\\
z_i &= [z_{i-1},z_0],\ \text{con } 3\leq i\leq n-p,\\
p_j &= [z_1,z_{r_j-1}],\ \text{con } 1\leq j\leq p-1,
\end{aligned}
$$

donde

$$p_j = A_0(-1)^{r_j-3}(1-a_1A_0)x_{r_j} + (*)x_{r_j+1} + \dots (*)x_{n-p} + (-1)^{r_1-3}(1-a_1A_0)y_j + (*)y_{j+1} + \\ + \dots + (*)y_{p-1}.$$

Nótese que este estudio es idéntico al mostrado en el caso anterior, ya que la nueva base y la graduación asociada son las mismas.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1+a_1=0}$ entonces $A_0 \neq -1$, pues $1-a_1A_0 \neq 0$. Basta tomar como nueva base adaptada la formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s,\\
z_1 &= \widetilde{x}_t,\\
z_2 &= [z_0, z_1],\\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-p-1,\\
z_{n-p} &= [z_{n-p-1}, z_1] = (-1)^{n-p-2}(1-a_1A_0)(1+A_0)x_{n-p},\\
p_j &= [z_1, z_{r_j-1}], \text{ con } 1 \leq j \leq p-1.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, entonces $z_i \in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2 \leq i \leq n-p-1$, $z_{n-p} \in V_{2k_t+(n-p-2)k_s}$ y $p_j \in V_{2k_t+(r_j-2)k_s}$. Así, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \dots \oplus V_{k_t+(n-p-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-p-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s} \oplus \dots \oplus V_{2k_t+(r_{p-1}-2)k_s}.$$

De nuevo, podemos suponer $k_s = 1$, pues en caso contrario la graduación considerada no sería conexa. Para mayor claridad en el estudio de longitud, aunque hemos fijado $k_s = 1$, mantendremos la notación k_s. Además, por ser la graduación de longitud máxima se verifican de nuevo las propiedades (4.1). Analicemos ahora los valores admisibles de k_t, distinguiendo los siguientes casos:

- Si $k_t > 0$, haciendo un razonamiento análogo al seguido en $\widetilde{L}(n, r_1, \ldots, r_{p-1})$, k_t tiene que ser igual a 2 por la conectividad de la graduación. En ese caso se tiene
$$\begin{cases} k_s = 1, \\ k_t = 2, \\ 3 \leq r_1 < n-p-2, \end{cases}$$
es decir, $5 \leq 2k_t + (r_1-2)k_s < n-p$. Esto implica que existe un z_t con $4 \leq t \leq n-p-1$ tal que $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = \langle p_1, z_t \rangle$, lo que es imposible.

- Si $k_t < 0$, como en la familia anterior, $k_t = -n+p+2$ pues la graduación es de longitud máxima. Pero al ser r_1 y r_2 impares, tenemos
$$dist(p_1, p_2) = dist(2k_t + (r_1-2)k_s, 2k_t + (r_2-2)k_s) = r_2 - r_1 > 1,$$
contradiciendo así la longitud máxima de la graduación considerada.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\tau}(n, r_1, r_2, \ldots, n-p-1)$.

La graduación natural de esta familia coincide con la de las anteriores, siendo $r_{p-1} = n-p-1$, por lo que la ley del álgebra extendida es:

$$\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
\qquad \vdots & \quad \vdots \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2, \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p}, & r_{p-1} - 1 \leq i \leq n-p-1, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2, \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2, \\
\qquad \vdots & \quad \vdots \\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
[x_i,x_0]=-x_{i+1}+(*)x_{i+2}+\cdots+(*)x_{n-p}, & r_{p-1}-1\le i\le n-p-1,\\
[x_i,x_{r_j-i}]=(*)x_{r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{i-1}y_j+(*)y_{j+1}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\le i\le \frac{r_j-1}{2},\\
 & 1\le j\le p-2,\\
[x_{r_j-i},x_i]=(*)x_{r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{i}y_j+(*)y_{j+1}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\le i\le \frac{r_j-1}{2},\\
 & 1\le j\le p-2,\\
[x_i,x_{n-p-1-i}]=(-1)^{i-1}(x_{n-p-1}+y_{p-1})+(*)x_{n-p}, & 1\le i\le \frac{n-p-2}{2},\\
[x_{n-p-1-i},x_i]=(-1)^{i}(x_{n-p-1}+y_{p-1})+(*)x_{n-p}, & 1\le i\le \frac{n-p-2}{2},\\
[x_i,x_{n-p-i}]=(-1)^{i-1}\frac{n-p-2i}{2}x_{n-p}, & 1\le i\le \frac{n-p-2}{2},\\
[x_{n-p-i},x_i]=(-1)^{i}\frac{n-p-2i}{2}x_{n-p}, & 1\le i\le \frac{n-p-2}{2},\\
[x_1,y_{p-1}]=\frac{p+2-n}{2}x_{n-p}, & \\
[y_{p-1},x_1]=-\frac{p+2-n}{2}x_{n-p}, & \\
[x_i,x_j]=(*)x_{i+j+1}+\dots(*)x_{n-p}+(*)y_{r_k}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 3\le i+j+1\le r_k,\\
 & 1\le k\le p-1,\\
[x_i,y_j]=(*)x_{i+r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_{r_k}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 0\le i\le n-p-1-r_j,\\
 & 1\le j\le p-1,\\
[y_i,y_j]=(*)x_{r_i+r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_{r_k}+\cdots+(*)y_{p-1}, & 1\le i,j\le p-4,\\
 & r_i+r_j+1\le r_k\le p-1.
\end{cases}$$

Tomemos como generadores los vectores:

$$\widetilde{x_s}=x_0+\sum_{i=1}^{n-p}a_ix_i+\sum_{j=1}^{p-1}b_jy_j \quad \text{y} \quad \widetilde{x_t}=A_0x_0+x_1+\sum_{i=2}^{n-p}A_ix_i+\sum_{j=1}^{p-1}B_jy_j,$$

recordando que $1-a_1A_0\neq 0$. Consideremos los siguientes productos entre ambos:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{x_s},\widetilde{x_s}]&=(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[\widetilde{x_t},\widetilde{x_t}]&=(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}]&=(1-a_1A_0)x_2+(*)x_3+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1},\\
[[[\widetilde{x_s},\widetilde{x_t}],\underbrace{\widetilde{x_s}],\dots\widetilde{x_s}]}_{i-veces}&=(-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_1+\cdots+(*)y_{p-1}\\
&\text{con } 1\le i\le r_1-3,
\end{aligned}$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\dots\widetilde{x}_s}_{i-veces}]=(-1)^i(1-a_1A_0)x_{i+2}+(*)x_{i+3}+\cdots+(*)x_{n-p}+(*)y_j+\cdots+(*)y_{p-1}$$

$$\text{con } r_{j-1}-1\leq i\leq n-p-3,\ 2\leq j\leq p-1,$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\ \underbrace{\widetilde{x}_s],\dots\widetilde{x}_s}_{(r_j-2)-veces}\ ]=(-1)^{r_j-2}(1-a_1A_0)x_{r_j}+(*)x_{r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{r_j-2}(1-a_1A_0)a_1y_j+$$

$$+(*)y_{j+1}+\cdots+(*)y_{p-1} \text{ con } 1\leq j\leq p-1.$$

Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1+a_1\neq 0,}$ tomamos la base formada por los siguientes vectores:

$$z_0=\widetilde{x}_s,$$

$$z_1=\widetilde{x}_t,$$

$$z_2=[z_0,z_1],$$

$$z_i=[z_{i-1},z_0],\ \text{con } 3\leq i\leq n-p-1,$$

$$z_{n-p}=[z_3,z_{n-p-3}],$$

$$p_j=[z_1,z_{r_j-1}],\ \text{con } 1\leq j\leq p-1,$$

donde

$$z_{n-p}=(-1)^{n-p-2}(1-a_1A_0)^2\frac{n-p-6}{2}x_{n-p},\ \text{con } n-p-6\neq 0 \text{ pues } n\geq p+8,$$

$$p_j=(-1)^{r_j-3}(1-a_1A_0)A_0x_{r_j}+(*)x_{r_j+1}+\dots(*)x_{n-p}+(-1)^{r_j-3}(1-a_1A_0)y_j+$$

$$+(*)y_{j+1}+(*)y_{p-1}\ \text{ con }\ 1\leq j\leq p-1.$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Tómese $z_0\in V_{k_s}$ y $z_1\in V_{k_t}$, entonces tenemos $z_i\in V_{k_t+(i-1)k_s}$ con $2\leq i\leq n-p-1$, $z_{n-p}\in V_{2k_t+(n-p-2)k_s}$ y $p_j\in V_{2k_t+(r_j-2)k_s}$. Así la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+(n-p-2)k_s}\oplus V_{2k_t+(n-p-2)k_s}\oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s}\oplus\cdots\oplus V_{2k_t+(n-p-3)k_s}.$$

Como en casos anteriores podemos suponer $k_s = 1$, aunque para mayor comprensión de los cálculos mantendremos la notación k_s. Además, por ser la graduación de longitud máxima se verifican de nuevo las propiedades (4.1). Analicemos los valores admisibles de k_t.

- Si $k_t > 0$, haciendo un razonamiento análogo a los casos anteriores, $k_t = 2$. En ese caso se tiene
$$\begin{cases} k_s = 1, \\ k_t = 2, \\ 3 \leq r_1 < n-p-3, \end{cases}$$
es decir, $5 \leq 2k_t + (r_1 - 2)k_s \leq n-p-1$. Esto implica que existe un z_t con $4 \leq t \leq n-p-1$ tal que $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = \langle p_1, z_t \rangle$, lo que es imposible.

- Si $k_t < 0$, haciendo un razonamiento análogo a los casos anteriores $k_t = -n+p+2$. Pero en ese caso tenemos
$$2k_t+(n-p-2)k_s = -2n+2p+4+n-p-2 = -n+p-2 = k_t, \text{ es decir, } V_{k_t} = \langle z_1, z_{n-p} \rangle,$$
contradiciendo así la longitud máxima de la graduación considerada.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_1 = 0,}$ entonces $A_0 \neq -1$ pues $1 - a_1 A_0 \neq 0$. Tomemos como nueva base adaptada la formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x}_s, \\ z_1 &= \widetilde{x}_t, \\ z_2 &= [z_0, z_1], \\ z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-p-2, \\ z_{n-p-1} &= [z_1, z_{n-p-2}], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{n-p} &= [z_3, z_{n-p-3}],\\
p_j &= [z_1, z_{r_j-1}], \text{ con } 1 \leq j \leq p-2,\\
p_{p-1} &= [z_{n-p-2}, z_0].
\end{aligned}
$$

Nótese que la nueva base es similar a la tomada en el Caso 1, sólo se han intercambiado los papeles de z_{n-p-1} y p_{p-1}. Así, la graduación obtenida es la misma que en Caso 1, por lo tanto se obtiene la misma conclusión.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\tau}(n, r_1, r_2, \ldots, n-p-2)$.

Recordemos que $3 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_{p-2} \leq n-p-4$, siendo todos los r_j impares. Además $p \geq 4$, $n \geq \text{máx}\{3p-1, p+8\}$ y $n-p$ es impar.

La graduación natural de $\tau(n, r_1, r_2, \ldots, n-p-2)$ es:

$$
L_1 = \langle x_0, x_1\rangle \oplus L_2 = \langle x_2\rangle \oplus \cdots \oplus L_{r_1-1} = \langle x_{r_1-1}\rangle \oplus L_{r_1} = \langle x_{r_1}, y_1\rangle \oplus L_{r_1+1} = \langle x_{r_1+1}\rangle \oplus \cdots \oplus
$$

$$
\oplus L_{r_2-1} = \langle x_{r_2-1}\rangle \oplus L_{r_2} = \langle x_{r_2}, y_2\rangle \oplus L_{r_2+1} = \langle x_{r_2+1}\rangle \oplus \ldots
$$

$$
\oplus L_{n-p-2} = \langle x_{n-p-1}, y_{p-1}\rangle \oplus L_{n-p-1} = \langle x_{n-p-1}\rangle \oplus L_{n-p} = \langle x_{n-p}\rangle.
$$

La ley del álgebra extendida es:

$$
\begin{cases}
[x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & \\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2,\\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2,\\
\qquad\qquad\vdots & \qquad\vdots\\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2,\\
[x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p}, & r_{p-1} - 1 \leq i \leq n-p-2,\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \leq i \leq r_1 - 2,\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_2 + \cdots + (*)y_{p-1}, & r_1 - 1 \leq i \leq r_2 - 2,\\
\qquad\qquad\vdots & \qquad\vdots\\
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{p-1}, & r_{p-2} - 1 \leq i \leq r_{p-1} - 2,
\end{cases}
$$

$$\begin{cases}
[x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_{n-p}, & r_{p-1} - 1 \le i \le n-p-2,\\
[x_i, x_{r_j-i}] = (*)x_{r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (-1)^{i-1}y_j + (*)y_{j+1} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \le i \le \frac{r_j-1}{2},\\
 & 1 \le j \le p-2,\\
[x_{r_j-i}, x_i] = (*)x_{r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (-1)^{i}y_j + (*)y_{j+1} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \le i \le \frac{r_j-1}{2},\\
 & 1 \le j \le p-2,\\
[x_i, x_{n-p-2-i}] = (-1)^{i-1}(x_{n-p-2} + y_{p-1}), & 1 \le i \le \frac{n-p-3}{2},\\
[x_{n-p-2-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_{n-p-2} + y_{p-1}), & 1 \le i \le \frac{n-p-3}{2},\\
[x_i, x_{n-p-1-i}] = (-1)^{i-1}\frac{n-p-1-2i}{2}x_{n-p-1}, & 1 \le i \le \frac{n-p-3}{2},\\
[x_{n-p-1-i}, x_i] = (-1)^{i}\frac{n-p-1-2i}{2}x_{n-p-1}, & 1 \le i \le \frac{n-p-3}{2},\\
[x_i, x_{n-p-i}] = (-1)^{i}(i-1)\frac{n-p-1-i}{2}x_{n-p}, & 2 \le i \le \frac{n-p-1}{2},\\
[x_{n-p-i}, x_i] = (-1)^{i+1}(i-1)\frac{n-p-1-i}{2}x_{n-p}, & 2 \le i \le \frac{n-p-1}{2},\\
[x_i, y_{p-1}] = -\frac{n-p-3}{2}x_{n-p-2+i}, & 1 \le i \le 2,\\
[y_{p-1}, x_1] = \frac{n-p-3}{2}x_{n-p-2+i}, & 1 \le i \le 2,\\
[x_i, x_j] = (*)x_{i+j+1} + \ldots (*)x_{n-p} + (*)y_{r_k} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 3 \le i+j+1 \le r_k,\\
 & 1 \le k \le p-1,\\
[x_i, y_j] = (*)x_{i+r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{r_k} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 0 \le i \le n-p-1-r_j,\\
 & 1 \le j \le p-1,\\
[y_i, y_j] = (*)x_{r_i+r_j+1} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_{r_k} + \cdots + (*)y_{p-1}, & 1 \le i, j \le p-4,\\
 & r_i + r_j + 1 \le r_k \le p-1.
\end{cases}$$

Tomemos de nuevo como generadores a los vectores $\widetilde{x_s}$ y $\widetilde{x_t}$ y consideremos los siguientes productos:

$$[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}] = (1 - a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1},$$

$$[[[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}], \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots \widetilde{x_s}]}_{i-veces} = (-1)^i(1 - a_1A_0)x_{i+2} + (*)x_{i+3} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}$$

$$\text{con } 1 \le i \le r_1 - 3,$$

$$[[[\widetilde{x_s}, \widetilde{x_t}], \underbrace{\widetilde{x_s}], \ldots \widetilde{x_s}]}_{i-veces} = (-1)^i(1 - a_1A_0)x_{i+2} + (*)x_{i+3} + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_j + \cdots + (*)y_{p-1}$$

$$\text{con } \ r_{j-1} - 1 \le i \le n-p-3,\ 2 \le j \le p-3,\ i-2 \ne r_j,$$

$$[[[\widetilde{x}_s,\widetilde{x}_t],\underbrace{\widetilde{x}_s],\ldots\widetilde{x}_s}_{(r_j-2)-veces}]=(-1)^{r_j-2}(1-a_1A_0)x_{r_j}+(*)x_{r_j+1}+\cdots+(*)x_{n-p}+(-1)^{r_j-2}(1-a_1A_0)a_1y_j+\cdots+$$
$$+(*)y_{p-1}\ \text{ con }\ 1\leq j\leq p-3.$$

Obsérvese que $1-a_1A_0\neq 0$. Distingamos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1+a_1\neq 0,}$ tomamos la nueva base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0&=\widetilde{x}_s,\\
z_1&=\widetilde{x}_t,\\
z_2&=[z_0,z_1],\\
z_i&=[z_{i-1},z_0],\ \text{con } 3\leq i\leq n-p-2,\\
z_{n-p-1}&=[z_3,z_{n-p-4}],\\
z_{n-p}&=[z_3,z_{n-p-3}],\\
p_j&=[z_1,z_{r_j-1}],\ \text{con } 1\leq j\leq p-2,\\
p_{p-1}&=[z_1,z_{n-p-3}],
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
z_{n-p-1}&=(-1)^{n-p+1}(1-a_1A_0)^2\frac{n-p-7}{2}x_{n-p-1}+(*)x_{n-p},\ \text{con } n-p-7\neq 0 \text{ pues } n\geq p+8,\\
z_{n-p}&=(-1)^{n-p+3}(1-a_1A_0)^2(n-p-4)x_{n-p},\ \text{con } n-p-4\neq 0 \text{ pues } n\geq p+8,\\
p_j&=(-1)^{r_j-1}(1-a_1A_0)A_0x_{r_j}+(*)x_{r_j+1}+\ldots(*)x_{n-p}+(-1)^{r_j-1}(1-a_1A_0)y_j+(*)y_{j+1}+(*)y_{p-1}\\
&\quad \text{con } 1\leq j\leq p-1,\\
p_{p-1}&=(-1)^{n-p-3}(1-a_1A_0)(1+A_0)x_{n-p-2}+(*)x_{n-p-1}+(*)x_{n-p}+(-1)^{n-p-3}(1-a_1A_0)y_{p-1}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base es regular.

Tómese $z_0\in V_{k_s}$ y $z_1\in V_{k_t}$, así la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s}\oplus V_{k_t}\oplus V_{k_t+k_s}\oplus\cdots\oplus V_{k_t+(n-p-3)k_s}\oplus V_{2k_t+(n-p-3)k_s}\oplus V_{2k_t+(n-p-2)k_s}\oplus V_{2k_t+(r_1-2)k_s}\oplus$$

$$\oplus \cdots \oplus V_{2k_t+(r_{p-2}-2)k_s} \oplus V_{2k_t+(n-p-4)k_s}.$$

De nuevo podemos suponer $k_s = 1$, pero para mayor claridad mantendremos la notación k_s. Además, por ser la graduación de longitud máxima se verifican de nuevo las propiedades (4.1). Analicemos ahora los valores admisibles de k_t.

- Si $k_t > 0$, haciendo un razonamiento análogo a los casos anteriores, $k_t = 2$. En ese caso se tiene
$$\begin{cases} k_s = 1, \\ k_t = 2, \\ 3 \leq r_1 < n-p-4, \end{cases}$$
es decir, $5 \leq 2k_t + (r_1 - 2)k_s < n - p - 2$. Esto implica que existe un z_t con $2 \leq t \leq n-p-2$ tal que $V_{2k_t+(r_1-2)k_s} = \langle p_1, z_t \rangle$, lo que es imposible.

- Si $k_t < 0$, análogamente se prueba que $k_t = -n + p + 2$. Pero en ese caso tenemos
$$2k_t + (n-p-3)k_s = -2n + 2p + 6 + n - p - 3 = k_t, \text{ es decir, } V_{k_t} = \langle z_1, z_{n-p-1} \rangle,$$
contradiciendo así la longitud máxima de la graduación considerada.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_1 = 0}$ entonces $A_0 \neq -1$, pues $1 - a_1 A_0 \neq 0$. Así, basta tomar la nueva base adaptada formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} z_0 &= \widetilde{x}_s, \\ z_1 &= \widetilde{x}_t, \\ z_2 &= [z_0, z_1], \\ z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq n-p-3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_{n-p-2} &= [z_1, z_{n-p-3}],\\
z_{n-p-1} &= [z_3, z_{n-p-4}],\\
z_{n-p} &= [z_3, z_{n-p-3}],\\
p_j &= [z_1, z_{r_j-1}], \text{ con } 1 \leq j \leq p-2,\\
p_{p-1} &= [z_{n-p-2}, z_0].
\end{aligned}
$$

Nótese que la nueva base es similar a la tomada en el Caso 1, sólo se han intercambiado los papeles de z_{n-p-2} y p_{p-1}. Así, la graduación obtenida es la misma que en el Caso 1, luego se obtiene la misma conclusión.

Queda así probado el teorema.

$\square$

El estudio que se acaba de presentar muestra que no existe ningún álgebra de Leibniz p-filiforme n-dimensional al considerar las extensiones de las p-filiformes de Lie no escindidas graduadas naturalmente que verifican $n \geq \text{máx}\{3p-1, p+8\}$. Analicemos ahora los casos excepcionales al considerar $n < \text{máx}\{3p-1, p+8\}$. Como en los capítulos 2 y 3 de esta memoria se han clasificado las casifiliformes y las 3-filiformes, es suficiente estudiar las 4-filiformes. Además, como $n < 12$ sólo se extienden las álgebras de Lie 4-filiformes no escindidas graduadas naturalmente de dimensión 11 (ver Teorema1.9 del capítulo 1).

Teorema 4.2. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz 11-dimensional 4-filiforme, cuyo álgebra graduada naturalmente asociada es un álgebra de Lie 4-filiforme de dimensión 11 no escindida. Entonces, $\mathcal{L}$ no admite ningun graduación de longitud máxima.*

Para no ser reiterativos, en la siguiente demostración sólo indicaremos los detalles principales, omitiendo los cálculos.

Demostración: Según el Teorema 1.9, hay que estudiar la extensión de las álgebras $\varepsilon^1(11,3,5,7)$ y $\varepsilon^2(11,3,5,7)$.

A lo largo de toda la prueba supondremos, por reducción al absurdo, que el álgebra extendida obtenida en cada caso tiene longitud máxima. Aplicando las mismas técnicas que en el teorema anterior llegaremos a contradicción.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}^1(11,3,5,7)$.

La graduación natural asociada es

$$L_1 = \langle x_0, x_1\rangle \oplus L_2 = \langle x_2\rangle \oplus L_3 = \langle x_3, y_1\rangle \oplus L_4 = \langle x_4\rangle \oplus L_5 = \langle x_5, y_2\rangle \oplus L_6 = \langle x_6\rangle \oplus L_7 = \langle x_7, y_3\rangle,$$

por lo que la ley de $\widetilde{\varepsilon}^1(11,3,5,7)$ está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases}
[x_0,x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\
[x_0,x_1] = x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\
[x_0,x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & 2 \le i \le 3,\\
[x_0,x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_3, & 4 \le i \le 5,\\
[x_0,x_6] = x_7, & \\
[x_1,x_0] = -x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\
[x_i,x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & 2 \le i \le 3,\\
[x_i,x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_3, & 4 \le i \le 5,\\
[x_6,x_0] = -x_7, & \\
[x_1,x_2] = (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\
[x_1,x_3] = (*)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\
[x_1,x_4] = (*)x_6 + (*)x_7 + y_2 + (*)y_3, & \\
[x_1,x_5] = (*)x_7 + (*)y_3, & \\
[x_1,x_6] = y_3, &
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
[x_2,x_1]=(*)x_4+\cdots+(*)x_7-y_1+(*)y_2+(*)y_3,\\
[x_2,x_2]=(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2+(*)y_3,\\
[x_2,x_3]=(*)x_6+(*)x_7-y_2+(*)y_3,\\
[x_2,x_4]=(*)x_7+(*)y_3,\\
[x_2,x_5]=-y_3,\\
[x_3,x_1]=(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2+(*)y_3,\\
[x_3,x_2]=(*)x_6+(*)x_7+y_2+(*)y_3,\\
[x_3,x_3]=(*)x_7+(*)y_3,\\
[x_3,x_4]=y_3,\\
[x_4,x_1]=(*)x_6+(*)x_7-y_2+(*)y_3,\\
[x_4,x_2]=(*)x_7+(*)y_3,\\
[x_4,x_3]=-y_3,\\
[x_1,y_1]=x_4+(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2+(*)y_3,\\
[x_2,y_1]=x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[x_3,y_1]=x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[x_4,y_1]=x_7,\\
[x_1,y_2]=x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[x_2,y_2]=x_7,\\
[y_1,x_0]=x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[y_1,x_1]=-x_4+(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2+(*)y_3,\\
[y_1,x_2]=-x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[y_1,x_3]=-x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[y_1,x_4]=-x_7,\\
[y_1,y_1]=(*)x_7+(*)y_3,\\
[y_2,x_0]=(*)x_7+(*)y_3,\\
[y_2,x_1]=-x_6+(*)x_7+(*)y_3,\\
[y_2,x_2]=-x_7.
\end{cases}$$

Consideremos como generadores a los siguientes vectores:

$$\widetilde{x_s} = x_0 + \sum_{i=1}^{7} a_i x_i + \sum_{j=1}^{3} b_j y_j \quad \text{y} \quad \widetilde{x_t} = A_0 x_0 + x_1 + \sum_{i=2}^{7} A_i x_i + \sum_{j=1}^{3} B_j y_j,$$

con $1 - a_1 A_0 \neq 0$. Distinguiremos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1 + a_1^2 \neq 0,}$ podemos tomar la base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_t}, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_i &= [z_{i-1}, z_0], \text{ con } 3 \leq i \leq 7, \\
p_j &= [z_j, z_{j+1}], \text{ con } 1 \leq j \leq 3,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
z_2 &= (1 - a_1 A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, \\
z_3 &= -(1 - a_1 A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 - (1 - a_1 A_0)a_1 y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, \\
z_4 &= (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)x_4 + (*)x_5 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, \\
z_5 &= -(1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)a_1 y_2 + (*)y_3, \\
z_6 &= (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)^2 x_6 + (*)x_7 + (*)y_3, \\
z_7 &= (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)^2 x_7 - (1 - a_1 A_0)(1 + a_1^2)^2 a_1 y_3, \\
p_1 &= (1 - a_1 A_0)A_0 x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, \\
p_2 &= -(1 - a_1 A_0)^2 a_1 x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (1 - a_1 A_0)^2 y_2 + (*)y_3, \\
p_3 &= -(1 - a_1 A_0)^2 (1 + a_1^2)a_1 x_7 - (1 - a_1 A_0)^2 (1 + a_1^2)y_3.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base realizado es regular.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, entonces la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+6k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+5k_s}.$$

Como en casos anteriores, podemos tomar, sin pérdida de generalidad $k_s = 1$. Además, por ser la graduación de longitud máxima verifica las propiedades (4.1).

Como $k_s = 1$, los subíndices de $V_{k_t+k_s}, \ldots, V_{k_t+6k_s}$ son correlativos, por tanto

$$dist(p_1, p_2) = dist(2k_t + k_s, 2k_t + 3k_s) = 2 \text{ y } dist(p_2, p_3) = dist(2k_t + 3k_s, 2k_t + 5k_s) = 2,$$

contradiciendo la conectividad de la graduación.

$\boxed{\textbf{Caso 2: Si } 1 + a_1^2 = 0,}$ distinguimos dos subcasos:

$\boxed{\textbf{Caso 2.1: Si } 1 + A_0^2 \neq 0,}$ tomamos la base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x_s}, \\
z_1 &= \widetilde{x_t}, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_3 &= [z_2, z_0], \\
p_1 &= [z_1, z_2], \\
p_2 &= [z_2, z_3], \\
z_4 &= [z_1, p_1], \\
z_5 &= [z_2, p_1], \\
z_6 &= [z_3, p_1], \\
z_7 &= [z_2, p_2], \\
p_3 &= [z_2, z_5],
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
z_2 &= (1 - a_1 A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3, \\
z_3 &= -(1 - a_1 A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 - (1 - a_1 A_0)a_1 y_1 + (*)y_2 + (*)y_3,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_4 &= (1-a_1A_0)(1+A_0^2)x_4 + (*)x_5 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3,\\
z_5 &= (1-a_1A_0)^2x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1-a_1A_0)^2A_0y_2 + (*)y_3,\\
z_6 &= (1-a_1A_0)^3x_6 + (*)x_7 + (*)y_3,\\
z_7 &= (1-a_1A_0)^3x_7 + (1-a_1A_0)^3a_1y_3,\\
p_1 &= (1-a_1A_0)A_0x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + (1-a_1A_0)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3,\\
p_2 &= -(1-a_1A_0)^2a_1x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (1-a_1A_0)^2y_2 + (*)y_3,\\
p_3 &= -(1-a_1A_0)^3A_0x_7 - (1-a_1A_0)^3y_3.
\end{aligned}
$$

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{3k_t+k_s} \oplus V_{3k_t+2k_s} \oplus V_{3k_t+3k_s} \oplus V_{3k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{4k_t+3k_s}.$$

Si consideramos el producto $[z_0, p_1]$, por la ley del álgebra extendida tenemos

$$[z_0, p_1] = (1-a_1A_0)(a_1+A_0)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3,$$

es decir, $[z_0, p_1] = Az_4$ con $A \neq 0$ ya que $a_1 + A_0 \neq 0$. Por las propiedades (4.1) también se tiene

$$\begin{cases} [z_0, p_1] \in V_{2k_t+2k_s}, \\ z_4 \in V_{3k_t+k_s}, \end{cases}$$

así, $k_t = k_s$, llegando así a contradicción. Por tanto, en este caso, no existe álgebra de longitud máxima.

$\boxed{\textbf{Caso 2.2: Si } 1 + A_0^2 = 0,}$ entonces $a_1 + A_0 \neq 0$. En caso contrario, tendríamos que $1 - a_1A_0 = 1 + A_0^2 = 0$, lo que es imposible bajo estas restricciones. Por lo tanto, podemos construir la nueva base adaptada con los siguientes vectores:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \widetilde{x}_s, \\
z_1 &= \widetilde{x}_t, \\
z_2 &= [z_0, z_1], \\
z_3 &= [z_2, z_0], \\
p_1 &= [z_1, z_2], \\
p_2 &= [z_2, z_3], \\
z_4 &= [z_0, p_1], \\
z_5 &= [z_2, p_1], \\
z_6 &= [z_3, p_1], \\
z_7 &= [z_2, p_2], \\
p_3 &= [z_2, z_5].
\end{aligned}
$$

El único vector que ha cambiado con respecto a la base del Caso 2.1 es z_4, definido por:

$$z_4 = (1 - a_1A_0)(a_1 + A_0)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3.$$

Así, la graduación de longitud máxima asociada es:

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus V_{k_t+2k_s} \oplus V_{2k_t+2k_s} \oplus V_{3k_t+2k_s} \oplus V_{3k_t+3k_s} \oplus V_{3k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{4k_t+3k_s}.$$

Consideremos el producto $[z_4, p_1]$, por la ley del álgebra tenemos:

$$[z_4, p_1] = (1 - a_1A_0)^2(1 + A_0^2)x_7 - (1 - a_1A_0)^2(1 + A_0^2)A_0y_3,$$

es decir,

$$[z_4, p_1] = Bz_7 \ \text{ o bien } \ [z_4, p_1] = Cp_3 \ \text{ con } (B, C) \neq (0, 0).$$

Si $[z_4, p_1] = Cp_3$ con $C \neq 0$, por las propiedades de la graduación (4.1) tendríamos:

$$\begin{cases} [z_4, p_1] \in V_{5k_t+3k_s}, \\ p_3 \in V_{4k_t+3k_s}, \end{cases}$$

es decir, $k_t = 0$, llegando así a una contradicción. Por lo tanto $[z_4, p_1] = Bz_7$ con $B \neq 0$, es decir $[z_4, p_1]$ es linealmente dependiente con z_7, que en términos matriciales significa

$$det \begin{pmatrix} [z_4, p_1] \\ z_7 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -(1-a_1A_0)^2(1+A_0^2)A_0 & (1-a_1A_0)^2(1+A_0^2) \\ (1-a_1A_0)^3 & (1-a_1A_0)^3a_1 \end{pmatrix} = 1-a_1A_0 = 0,$$

llegando así a una contradicción. Queda probado que no existe ningún álgebra de longitud máxima en este caso.

Estudio del álgebra extendida $\widetilde{\varepsilon}^2(11, 3, 5, 7)$.

La graduación natural $\varepsilon^2(11, 3, 5, 7)$ coincide con la de $\varepsilon^1(11, 3, 5, 7)$, por lo que la ley del álgebra extendida está definida por los siguientes productos:

$$\begin{cases} [x_0, x_0] = (*)x_3 + \cdots + (*)x_{n-p} + (*)y_1 + \cdots + (*)y_{p-1}, & \\ [x_0, x_1] = x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\ [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & 2 \leq i \leq 3, \\ [x_0, x_i] = x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_3, & 4 \leq i \leq 5, \\ [x_0, x_6] = x_7, & \\ [x_1, x_0] = -x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3, & 2 \leq i \leq 3, \\ [x_i, x_0] = -x_{i+1} + (*)x_{i+2} + \cdots + (*)x_7 + (*)y_3, & 4 \leq i \leq 5, \\ [x_6, x_0] = -x_7, & \\ [x_i, x_{5-i}] = (-1)^{i-1}(x_5 + y_2) + (*)x_6 + (*)x_7 + y_3, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_{5-i}, x_i] = (-1)^{i}(x_5 + y_2) + (*)x_6 + (*)x_7 - y_3, & 1 \leq i \leq 2, \\ [x_i, x_{7-i}] = (-1)^{i\,\frac{(i-3)(i-4}{2}}(x_7 - y_3), & 1 \leq i \leq 3, \\ [x_{7-i}, x_i] = (-1)^{i+1\,\frac{(i-3)(i-4}{2}}(x_7 - y_3), & 1 \leq i \leq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} [x_i,x_j]=(*)x_{i+j+1}+\dots(*)x_7+(*)y_1+(*)y_2+(*)y_{p-1}, & i,j\neq 0, i+j\neq 5,7,\\ [x_1,y_1]=(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2+(*)y_3, \\ [x_1,y_2]=-2x_6+(*)x_7+(*)y_3, \\ [x_2,y_1]=(*)x_6+(*)x_7+(*)y_3, \\ [x_2,y_2]=-2x_7, \\ [y_1,x_1]=(*)x_5+(*)x_6+(*)x_7+(*)y_2+(*)y_3, \\ [y_1,x_2]=(*)x_6+(*)x_7+(*)y_3, \\ [y_2,x_1]=2x_6+(*)x_7+(*)y_3, \\ [y_2,x_2]=2x_7, \\ [y_1,y_1]=(*)x_7+(*)y_3. \end{cases}$$

Consideremos los siguientes generadores:

$$\widetilde{x_s}=x_0+\sum_{i=1}^{7}a_ix_i+\sum_{j=1}^{3}b_jy_j \quad \text{y} \quad \widetilde{x_t}=A_0x_0+x_1+\sum_{i=2}^{7}A_ix_i+\sum_{j=1}^{3}B_jy_j,$$

con $1-a_1A_0\neq 0$. Distinguiremos los siguientes casos:

$\boxed{\textbf{Caso 1: Si } 1+a_1\neq 0,}$ podemos tomar la base formada por los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} z_0&=\widetilde{x_s},\\ z_1&=\widetilde{x_t},\\ z_2&=[z_0,z_1],\\ z_i&=[z_{i-1},z_0], \text{ con } 3\leq i\leq 5,\\ z_6&=[z_2,z_4],\\ z_7&=[z_2,z_5],\\ p_j&=[z_j,z_{j+1}], \text{ con } 1\leq j\leq 3, \end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
z_2 &= (1-a_1A_0)x_2 + (*)x_3 + \cdots + (*)x_7 + (*)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3,\\
z_3 &= -(1-a_1A_0)x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 - (1-a_1A_0)a_1y_1 + (*)y_2 + (*)y_3,\\
z_4 &= (1-a_1A_0)x_4 + (*)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (*)y_2 + (*)y_3,\\
z_5 &= -(1-a_1A_0)(1+a_1)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1-a_1A_0)a_1y_2 + (*)y_3,\\
z_6 &= -(1-a_1A_0)^2x_6 + (*)x_7 + (*)y_3,\\
z_7 &= -(1-a_1A_0)^3x_7 - (1-a_1A_0)^3y_3,\\
p_1 &= (1-a_1A_0)A_0x_3 + (*)x_4 + \cdots + (*)x_7 + (1-a_1A_0)y_1 + (*)y_2 + (*)y_3,\\
p_2 &= (1-a_1A_0)^2x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 + (1-a_1A_0)^2y_2 + (*)y_3,\\
p_3 &= -(1-a_1A_0)^2y_3.
\end{aligned}
$$

Es fácil ver que la matriz del cambio de base realizado es regular.

Si tomamos $z_0 \in V_{k_s}$ y $z_1 \in V_{k_t}$, entonces la graduación de longitud máxima asociada es

$$V_{k_s} \oplus V_{k_t} \oplus V_{k_t+k_s} \oplus \cdots \oplus V_{k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+5k_s} \oplus V_{3k_t+4k_s} \oplus V_{2k_t+k_s} \oplus V_{2k_t+3k_s} \oplus V_{2k_t+6k_s}.$$

Como en casos anteriores, podemos tomar, sin pérdida de generalidad $k_s = 1$. Además, por ser la graduación de longitud máxima, se verifican las propiedades (4.1).

Por la ley del álgebra extendida y las propiedades (4.1) tenemos

$$[z_4, z_1] = -(1-a_1A_0)(1+A_0)x_5 + (*)x_6 + (*)x_7 - (1-a_1A_0)y_2 + (*)y_3,$$

es decir, $[z_4, z_1] = Dp_2$ o bien $[z_4, z_1] = Ez_5$ con $(D, E) \neq (0, 0)$.

Si $[z_4, z_1] = Ez_5$ con $E \neq 0$ se deduce, por las propiedades (4.1), que $2k_t + 3k_s = k_t + 4k_s$, es decir, $k_t = k_s$, lo cual es imposible. Por lo tanto concluimos que $E = 0$ y $[z_4, z_1] = Dp_2$, con $D \neq 0$. Entonces, los vectores $[z_4, z_1]$ y p_2 son linealmente dependientes, es decir,

$$det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+A_0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow A_0 = 0.$$

Así se tiene, por la ley del álgebra, la siguiente expresión:

$$[z_1, z_6] = -3(1 - a_1A_0)^2x_7 + (1 - a_1A_0)^2y_3, \text{ es decir, } [z_1, z_6] = Fz_7 \text{ con } F \neq 0.$$

Como

$$\begin{cases} [V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}, \\ [z_1, z_6] \in V_{3k_t+5k_s}, \\ z_7 \in V_{3k_t+4k_s}, \end{cases}$$

obtenemos $3k_t + 5k_s = 3k_t + 4k_s$, es decir, $k_s = 0$, contradiciendo el carácter nilpotente del álgebra.

Caso 2: Si $1 + a_1 = 0,$ entonces $1 + A_0 \neq 0$, pues $1 - a_1A_0 \neq 0$. Por tanto, podemos tomar la misma base que en el Caso 1, sin más que intercambiar los papeles de z_5 y p_2.

Siguiendo un razonamiento análogo al caso anterior y considerando el producto $[z_1, z_6]$, se llega de nuevo a contradicción. Queda probado que no existe ningún álgebra de longitud máxima.

$\square$

Álgebras de derivaciones y aplicaciones

5

Algunas propiedades geométricas de las álgebras de Leibniz, como la determinación del primer espacio de cohomología pueden ser estudiadas conociendo el espacio de derivaciones del álgebra, $Der(\mathcal{L})$. En este sentido, las álgebras de Leibniz cuya graduación se puede descomponer en subespacios de dimensión 1, es decir, las álgebras de longitud máxima, juegan un papel fundamental ya que gracias a la estructura que presentan, es relativamente sencillo su estudio cohomológico pues inducen la graduación correspondiente del grupo de cohomologías. Las propiedades cohomológicas de las álgebras de Leibniz han sido ampliamente estudiadas en [3], [20], [22], [24], [33] y [39].

Se aborda en este capítulo el estudio de algunas propiedades geométricas de las álgebras clasificadas en capítulos anteriores. Dicho capítulo se estructura en dos secciones: en la primera se va a proceder a encontrar una base del espacio de derivaciones y la dimensión del primer espacio de cohomología de las álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes de longitud máxima, cuyas clasificaciones se muestran en los Teoremas 2.5 y 2.6 de esta memoria. En la sección segunda se hará un estudio similar para el caso de las álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima.

Tal como se indicó en el capítulo de Preliminares, el primer espacio de cohomología de un álgebra $\mathcal{L}$, $H^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$, se define como:

$$H^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})/B^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$$

donde $Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$ y $B^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$ son, respectivamente, el espacio de los 1-cociclos y el espacio de los 1-cobordes del álgebra $\mathcal{L}$.

Como $Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$ se identifica con el espacio de derivaciones de $\mathcal{L}$, $Der(\mathcal{L})$, y $B^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$ con el de las derivaciones interiores, $R(\mathcal{L})$, se puede interpretar el primer espacio de cohomología como el espacio de derivaciones "exteriores" del álgebra de Leibniz $\mathcal{L}$ módulo las derivaciones interiores. Por tanto, si se pretende encontrar el primer espacio de cohomología $H^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$, bastará calcular una base de $Der(\mathcal{L})$ y otra de $R(\mathcal{L})$.

5.1. ESTUDIO COHOMOLÓGICO DE LAS ÁLGEBRAS CASIFILIFORMES

5.1.1. ESPACIO DE DERIVACIONES

A continuación se muestra el estudio del espacio de derivaciones de las álgebras de Leibniz casifiliformes de longitud máxima. El caso 2-filiforme de Lie fue estudiado en [24], así, consideramos en esta sección las álgebras de Leibniz no de Lie cuya sucesión característica es $(n-2,2)$ ó $(n-2,1-1.)$

En el trabajo [4] se prueba que sólo existe un álgebra de Leibniz no de Lie de longitud máxima, M^4, con sucesión característica $(n-2,1,1)$, es decir, 2-filiforme. Por otro lado, en el segundo capítulo de esta memoria se obtuvo la clasificación de las álgebras de Leibniz no de Lie casifiliformes de longitud máxima, cuya sucesión característica es $(n-2,2)$. Se prueba en los Teoremas 2.5 y 2.6 que, si $n \geq 5$, existen tres familias de álgebras $M^{1,\delta}$, $M^{2,\lambda}$ y $M^{3,\alpha}$, donde $\delta \in \{0,1\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0$ si $n > 6$ y $\alpha \in \{0,1\}$ si $n = 6$. Por tanto, esas serán las 4 álgebras que estudiaremos en esta sección.

El siguiente resultado será de gran utilidad para el cálculo del espacio de derivaciones de las 3 familias de álgebras a estudiar y M^4.

Lema 5.1. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de Leibniz no de Lie n-dimensional casifiliforme de longitud máxima, con $n \geq 5$ y x un elemento de $\mathcal{L}$. Entonces se tienen las condiciones siguientes:*

- *Si $\mathcal{L} \in M^{1,\delta}$, se verifica* $\begin{cases} Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq 0, \text{ si } x \in \{y_1, y_n\} \\ Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq -2, \text{ si } x \notin \{y_1, y_n\} \end{cases}$
- *Si $\mathcal{L} \in M^{2,\lambda}$, se verifica* $\begin{cases} Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq 0, \text{ si } x \notin \{y_{n-1}, y_n\} \\ Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq 2-n, \text{ si } x \in \{y_{n-1}, y_n\} \end{cases}$
- *Si $\mathcal{L} \in M^{3,\alpha}$, se verifica* $\begin{cases} Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq 0, \text{ si } x \in \{y_1, y_2\} \\ Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq -2, \text{ si } x \notin \{y_1, y_2\} \end{cases}$
- *Si $\mathcal{L}$ es isomorfa a M^4, se verifica* $\begin{cases} Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq 0, \text{ si } x \notin \{y_{n-1}, y_n\} \\ Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L}) = F_r(Z^1(\mathcal{L},\mathcal{L})) \text{ con } r \leq 2-n, \text{ si } x \in \{y_{n-1}, y_n\} \end{cases}$

Demostración: Tomemos la graduación de longitud máxima $\mathcal{L} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, la cual tiene asociada la siguiente filtración:

$$S_i := \begin{cases} \mathcal{L} \text{ si } i \leq 1 \\ \bigoplus_{j \geq i} V_j \text{ si } 2 \leq i \leq n \\ \{0\} \text{ si } i \geq n+1. \end{cases}$$

Denotemos por i el mayor subíndice tal que $x \in S_i$, con $1 \leq i \leq n$ y sea $f \in \mathbb{Z}^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$. Usaremos inducción sobre i para probar que $f(x) \in S_{i+r}$.

Para $i = 1$ está claro que $f(y_1) \in \mathcal{L} = S_1 \subseteq S_{1+r}$ para todo $r \leq 0$. Distingamos los siguientes casos para continuar la prueba:

- Si $\mathcal{L} \in M^{1,\delta}$, considerando la graduación, tenemos $y_{n-1} \in S_3$. Además, $f(y_{n-1}) \in \mathcal{L} = S_1 \subseteq S_{3+r}$ si $r \leq -2$. Como $f \in \mathbb{Z}^1(\mathcal{L},\mathcal{L})$ se tiene

$$f([y,u]) = [f(y),u] + [y, f(u)].$$

Por otra parte, $y_2 = [y_{n-1}, y_1]$, así $f(y_2) \in S_{4+r\,,r\leq -2} + S_{4+r\,,r\leq 0}$. Por lo tanto, como $\{S_i\}$ no es creciente, concluimos que $f(y_2) \in S_{4+r}$ con $r \leq -2$.

Como

$$\begin{cases} y_n = [y_1, y_1], \\ f(y_1) \in S_{1+r} \text{ con } r \leq 0, \end{cases}$$

entonces $f(y_n) \in S_{2+r}$ con $r \leq 0$.

Para cualquier otro elemento del álgebra $\mathcal{L}$ se verifica

$$y_i = [y_{i-1}, y_1], \quad \text{con } 3 \leq i \leq n-2.$$

Usando de nuevo el método de inducción sobre i afirmamos que $[f(y_{i-1}), y_1] \in S_{i+2+r\,,r\leq -2}$, y $[y_{i-1}, f(y_1)] \in S_{i+2+r\,,r\leq 0}$, es decir $f(y_i) \in S_{i+2+r}$ con $r \leq -2$.

- Si $\mathcal{L} \in M^{2,\lambda}$, tenemos $y_{n-1} \in S_{n-1}$. Además $f(y_{n-1}) \in \mathcal{L} = S_1 \subseteq S_{n-1+r}$ con $r \leq 2-n$. Como $y_n = [y_{n-1}, y_1]$, usando las mismas herramientas que en el caso anterior, se tiene $f(y_n) \in S_{n+r}$ con $r \leq 2-n$.

  Para cualquier otro elemento del álgebra $\mathcal{L}$ se verifica $y_i = [y_{i-1}, y_1]$ con $2 \leq i \leq n-2$. Entonces, por inducción sobre i, se prueba fácilmente que $[f(y_{i-1}), y_1] \in S_{i+r}$ y $[y_{i-1}, f(y_1)] \in S_{i+r}$ con $r \leq 0$, es decir, $f(y_i) \in S_{i+r}$ con $r \leq 0$.

- Si $\mathcal{L} \in M^{3,\alpha}$, procediendo análogamente, probaremos la contención usando de nuevo inducción. Nótese que en este caso tenemos dos generadores: y_2 e y_3. Como $x = y_3 \in S_3$, se deduce $f(y_3) \in \mathcal{L} = S_1 \subseteq S_{3+r}$ con $r \leq -2$. Además, como

$$\begin{cases} y_2 = [y_1, y_1], \\ f(y_1) \in S_{1+r} \text{ con } r \leq 0, \end{cases}$$

  se tiene $f(y_2) \in S_{2+r}$ con $r \leq 0$. Basta ahora usar el método de inducción para probar que $f(y_i) \in S_{i+r}$ con $r \leq -2$, $4 \leq i \leq n$ e $y_i \notin \{y_2, y_3\}$.

- Si $\mathcal{L}$ es isomorfa a M^4, como $y_{n-1} \in S_{n-1}$, está claro que $f(y_{n-1}) \in \mathcal{L} = S_1 \subseteq S_{n-1+r}$ con $r \leq 2-n$. Análogamente a los casos anteriores se prueba, usando inducción sobre i, que $f(y_i) \in S_{i+r}$ con $r \leq 0$, $2 \leq i \leq n-2$ y $f(y_n) \in S_{n+r}$ con $r \leq 2-n$.

□

El siguiente teorema muestra una base del espacio de derivaciones de la familia de álgebras $M^{1,\delta}$.

Teorema 5.1. *Las siguientes aplicaciones lineales de $M^{1,\delta}$ forman una base de $Der(M^{1,\delta})$, definidas como sigue:*

- *Si $\delta = 0$*

$$d_{-1}(y_{n-1}) := y_n, \qquad d_{n-1}(y_1) := y_{n-2},$$

$$d_0^1(x) := \begin{cases} y_1 \textit{ si } x = y_1 \\ (i-1)y_i \textit{ si } x = y_i, 2 \leq i \leq n-2 \\ 2y_n \textit{ si } x = y_n. \end{cases} \qquad d_0^2(x) := \begin{cases} y_i \textit{ si } x = y_i, 2 \leq i \leq n-2 \\ y_{n-1} \textit{ si } x = y_{n-1} \end{cases}$$

$$d_1^1(y_1) := y_n, \qquad d_1^2(x) = \begin{cases} y_{i+1} \textit{ si } x = y_i, 2 \leq i \leq n-3 \\ y_2 \textit{ si } x = y_{n-1} \end{cases}$$

$$d_2(x) := \begin{cases} y_{i+2} \textit{ si } x = y_i, 2 \leq i \leq n-4, \\ y_3 \textit{ si } x = y_{n-1}. \end{cases} \qquad d_k(x) := \begin{cases} y_{i+k} \textit{ si } x = y_i, 2 \leq i \leq n-k-2, \\ y_{k+1} \textit{ si } x = y_{n-1} \end{cases}$$

con $2 \leq k \leq n-3$.

- *Si $\delta = 1$*

$d_{-1}, d_1^1, d_1^2, d_2, \ldots, d_{n-1}$ *definidas previamente*

$$d_0(x) := \begin{cases} y_1 \textit{ si } x = y_1 \\ (i+2)y_i \textit{ si } x = y_i,\ 2 \leq i \leq n-2 \\ 3y_{n-1} \textit{ si } x = y_{n-1} \\ 2y_n \textit{ si } x = y_n. \end{cases}$$

Nota 5.1. *Es trivial probar que los endomorfismos $d_{-1}, d_0, d_1^1, d_1^2, d_2, \ldots, d_{n-1}$ de $M^{1,\delta}$ definidos anteriormente son derivaciones linealmente independientes de $M^{1,\delta}$.*

Demostración: Se va a demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones del álgebra $M^{1,\delta}$.

El álgebra de Leibniz graduada $M^{1,\delta}$ admite la siguiente graduación de longitd máxima:

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus \cdots \oplus V_n, \text{ donde } y_1 \in V_1, y_n \in V_2, y_{n-1} \in V_3, y_2 \in V_4, \cdots, y_{n-2} \in V_n,$$

por lo tanto podemos escribir:

$$Der(M^{1,\delta}) = W_{-n} \oplus W_{-n+1} \oplus \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \cdots \oplus W_{n-1} \oplus W_n.$$

Por las propiedades de las derivaciones y de la graduación tomada, es trivial ver que $W_n = 0$ y $W_{-n} = 0$. Además, por el Lema 5.1 se tiene que $W_r = \{0\}$ para todo $r \leq -2$. Estudiemos por tanto el resto de espacios W_i. Denotaremos por d_i lo elementos del espacio W_i.

Cálculo de W_{-2}

Tomemos $d_{-2} \in W_{-2}$, que está definido por

$$\begin{cases} d_{-2}(y_{n-1}) = \alpha_{n-1} y_1, \\ d_{-2}(y_2) = \alpha_2 y_n, \\ d_{-2}(y_3) = \alpha_3 y_{n-1}, \\ d_{-2}(y_i) = \alpha_i y_{i-2}, \text{ con } 4 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

Al exigir que d_{-2} sea una derivación y considerar la ley del álgebra $\mathcal{L}$, se obtiene

$$d_{-2}(y_2) = d_{-2}([y_{n-1}, y_1]) = [d_{-2}(y_{n-1}), y_1] + [y_{n-1}, d_{-2}(y_1)] = \alpha_{n-1}[y_1, y_1] + 0 = \alpha_{n-1} y_n$$

$$d_{-2}(y_3) = d_{-2}([y_2, y_1]) = [d_{-2}(y_2), y_1] + [y_2, d_{-2}(y_1)] = \alpha_2 [y_n, y_1] = 0,$$

es decir, $\alpha_2 = \alpha_{n-1}$ y $\alpha_3 = 0$. Aplicando inducción sobre i se tiene

$$\alpha_i y_{i-2} = d_{-2}(y_i) = d_{-2}([y_{i-1}, y_1]) = [d_{-2}(y_{i-1}), y_1] + [y_{i-1}, d_{-2}(y_1)] = 0 \text{ con } 4 \leq i \leq n-2.$$

Además, como $0 = d_{-2}([y_{n-1}, y_{n-1}]) = [d_{-2}(y_{n-1}), y_{n-1}] + [y_{n-1}, d_{-2}(y_{n-1})] = \alpha_1 y_2$, se obtiene $\alpha_1 = 0$. Así, se ha probado que $d_{-2} = 0$, por tanto $W_{-2} = \{0\}$.

Cálculo de W_{-1}

De la definición y propiedades de las derivaciones se puede suponer que:

$$\begin{aligned} d_{-1}(y_1) &= 0, \\ d_{-1}(y_n) &= \alpha_n y_1, \\ d_{-1}(y_{n-1}) &= \alpha_{n-1} y_n, \\ d_{-1}(y_2) &= \alpha_2 y_{n-1}, \\ d_{-1}(y_i) &= \alpha_i y_{i-1}, \text{ con } 3 \leq i \leq n-2. \end{aligned}$$

Del Lema 5.1 se tiene $\alpha_n = 0$.

Como

$$\begin{cases} d_{-1}(y_{n-1}) = \alpha_{n-1} y_n, \\ y_n \in Cent(M^{1,\delta}), \end{cases}$$

se deduce que $\alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Continuemos la prueba usando inducción sobre i, para el cálculo de $d_{-1}(y_i)$.

Para $i = 2$, se tiene

$$\alpha_2 y_{n-1} = d_{-1}(y_2) = d_{-1}([y_{n-1}, y_1]) = [d_{-1}(y_{n-1}), y_1] + [y_{n-1}, d_{-1}(y_1)] = \alpha_{n-1}[y_n, y_1] = 0,$$

entonces, por hipótesis de inducción, se tiene fácilmente

$$d_{-1}(y_i) = 0, \ \ 2 \leq i \leq n-2.$$

Se concluye que una base de W_{-1} está formada por la aplicación $d_{-1}(y_{n-1}) = y_n$.

Cálculo de W_0

Es claro que $d_0(y_i) = \alpha_i y_i$, con $1 \leq i \leq n$. De la definición y propiedades de las derivaciones tenemos:

$$\begin{cases} d_0(y_2) = \alpha_2 y_2, \\ d_0([y_{n-1}, y_1]) = \alpha_{n-1}[y_{n-1}, y_1] + \alpha_1 [y_{n-1}, y_1] = \alpha_{n-1} y_2 + \alpha_1 y_2, \end{cases}$$

de donde se deduce:

$$\alpha_2 = \alpha_{n-1} + \alpha_1. \tag{5.1}$$

Mediante un proceso de inducción finita sobre i en la expresión $d_0(y_i)$ es fácil ver que

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_1 \text{ con } 3 \leq i \leq n-2. \tag{5.2}$$

De (5.1) y (5.2) se tiene $\alpha_i = \alpha_{n-1} + (i-1)\alpha_1$ con $2 \leq i \leq n-2$.

Al exigir que d_0 sea derivación y por la ley de $\mathcal{L}$ se obtiene:

$$d_0(y_n) = d_0([y_1, y_1]) = 2\alpha_1 y_n, \text{ es decir, } \alpha_n = 2\alpha_1.$$

Para determinar completamente la aplicación d_0 tenemos que distinguir dos casos:

- Si $\delta = 1$, por las propiedades de las derivaciones y la ley de $\mathcal{L}$ tenemos:

  $$\alpha_4 y_4 = d_0(y_4) = d_0([y_{n-1}, y_{n-1}]) = [d_0(y_{n-1}), y_{n-1}] + [y_{n-1}, d_0(y_{n-1})] = 2\alpha_{n-1} y_4,$$

  es decir, $\alpha_4 = 2\alpha_{n-1}$.

  Por (5.2) se tiene $\alpha_4 = \alpha_{n-1} + 3\alpha_1$, así $3\alpha_1 = \alpha_{n-1}$. En consecuencia, se verifica que

  $$d_0(x) := \begin{cases} \alpha_1 y_1, & \text{si } x = y_1, \\ (i+2)\alpha_1 y_i, & \text{si } x = y_i, \ 2 \leq i \leq n-2, \\ 3\alpha_1 y_{n-1}, & \text{si } x = y_{n-1}, \\ 2\alpha_1 y_n, & \text{si } x = y_n. \end{cases}$$

  Para obtener una base de W_0, tomamos $\alpha_1 = 1$ obteniendo así la expresión de d_0.

- Si $\delta = 0$, no se obtiene ninguna restricción sobre los parámetros α_1 y α_{n-1}, son por tanto libres. En consecuencia, la aplicación d_0 está definida por:

  $$d_0(x) := \begin{cases} \alpha_1 y_1, & \text{si } x = y_1, \\ [\alpha_{n-1} + (i-1)\alpha_1] y_i, & \text{si } x = y_i, \ 2 \leq i \leq n-2, \\ \alpha_{n-1} y_{n-1}, & \text{si } x = y_{n-1}, \\ 2\alpha_1 y_n, & \text{si } x = y_n. \end{cases}$$

Por último, basta tomar $(\alpha_1, \alpha_{n-1}) = (1, 0)$ y $(\alpha_1, \alpha_{n-1}) = (0, 1)$ para obtener una base de W_0. Esto da lugar a las aplicaciones d_0^1 y d_0^2 respectivamente.

Cálculo de W_{n-1}

Es fácil ver que $d_{n-1}(y_1) = \alpha_1 y_{n-2}$ ya que $d_{n-1}(x) \neq 0$ si y solo si $x = y_1$. Además, como $y_{n-2} \in Cent(M^{1,\delta})$, el parámetro α_1 es libre. Así, tomando $\alpha_1 = 1$ obtenemos el elemento d_{n-1} de la base de $Der(M^{1,\delta})$.

Cálculo de W_{n-2}

Por las propiedades de las derivaciones, podemos asegurar que $d_{n-2}(x) \neq 0$ si y sólo si $x = y_1$ ó $x = y_n$, entonces d_{n-2} está definido como sigue:

$$d_{n-2}(x) := \begin{cases} \alpha_1 y_{n-3} & \text{si } x = y_1, \\ \alpha_n y_{n-2} & \text{si } x = y_n, \\ 0 & \text{si } x \notin \{y_1, y_n\}. \end{cases}$$

De nuevo, al exigir que d_{n-2} sea derivación y al considerar la ley de $\mathcal{L}$ se prueba que $\alpha_1 = \alpha_n$ ya que:

$$\begin{aligned} \alpha_n y_{n-2} = d_{n-2}(y_n) = d_{n-2}([y_1, y_1]) = [d_{n-2}(y_1), y_1] + [y_1, d_{n-2}(y_1)] = \\ = \alpha_1[y_{n-3}, y_1] + \alpha_1[y_1, y_{n-3}] = \alpha_1 y_{n-2}. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha_1 = 1$ se obtiene una base del espacio W_{n-2}.

Cálculo de W_1

Por las propiedades de las derivaciones afirmamos que:

$$d_1(y_1) = \alpha_1 y_n,$$

$$d_1(y_n) = \alpha_n y_{n-1},$$

$$d_1(y_{n-1}) = \alpha_{n-1}y_2,$$
$$d_1(y_i) = \alpha_i y_{i+1}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-3.$$

Al exigir que d_1 sea derivación se obtiene que:

$$\alpha_2 y_3 = d_1([y_{n-1}, y_1]) = [d_1(y_{n-1}), y_1] + [y_{n-1}, d(y_1)] = \alpha_{n-1}[y_2, y_1] = \alpha_{n-1}y_3.$$

es decir, $\alpha_{n-1} = \alpha_2$.

Razonando análogamente, llegamos a que $\alpha_3 y_4 = d_1(y_3) = d_1([y_2, y_1]) = \alpha_2 y_4$. Basta aplicar inducción sobre j para probar que $\alpha_j = \alpha_2$, con $2 \leq j \leq n-3$:

$$\alpha_{j+1}y_{j+2} = d_1([y_j, y_1]) = [d_1(y_j), y_1] + [y_j, d_1(y_1)] = [\alpha_j y_{j+1}, y_1] = \alpha_j y_{j+2} \text{ con } 2 \leq j \leq n-3.$$

Además, tenemos:

$$\alpha_n y_{n-1} = d_1([y_1, y_1]) = [d_1(y_1), y_1] + [y_1, d_1(y_1)] = \alpha_1([y_n, y_1] + [y_1, y_n]) = 0,$$

es decir, $\alpha_n = 0$. Así, las aplicaciones d_1^1 y d_1^2 se obtienen tomando $(\alpha_1, \alpha_{n-1}) = (1, 0)$ y $(\alpha_1, \alpha_{n-1}) = (0, 1)$, respectivamente.

Cálculo de W_2

Por la graduación del álgebra y las propiedades de las derivaciones afirmamos que $d_2(x) \neq 0$ si $x \notin \{y_{n-3}, y_{n-2}\}$, es decir:

$$d_2(y_1) = \alpha_1 y_{n-1},$$
$$d_2(y_i) = \alpha_i y_{i+2}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-4,$$
$$d_2(y_{n-1}) = \alpha_{n-1}y_3,$$
$$d_2(y_n) = \alpha_n y_2.$$

Para obtener la expresión de W_2 es suficiente calcular $d_2(y_n)$, $d_2(y_i)$ con $2 \leq i \leq n-4$ y $d_2([y_n, y_1])$. Aplicando las mismas herramientas que en casos anteriores y el método de inducción se obtiene:

$$d_2(x) := \begin{cases} \alpha_{n-1} y_{i+2}, & \text{si } x = y_i, \ \ 2 \leq i \leq n-4, \\ \alpha_{n-1} y_3, & \text{si } x = y_{n-1}. \end{cases}$$

Tomando $\alpha_{n-1} = 1$, obtenemos una base de W_2.

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_k\textbf{, con } 3 \leq k \leq n-3.}$

Por las propiedades de las derivaciones y la graduación del álgebra tomada se tiene que

$$d_k(x) = 0 \ \text{ si } \ x = y_j, \ \text{ con } \ n-k-1 \leq j \leq n,$$

por lo tanto d_k está definida como sigue:

$$\begin{aligned} d_k(y_1) &= \alpha_1 y_{k-1}, \\ d_k(y_n) &= \alpha_n y_k, \\ d_k(y_{n-1}) &= \alpha_{n-1} y_{k+1}, \\ d_k(y_i) &= \alpha_i y_{i+k}, \text{ con } 2 \leq i \leq n-k-2. \end{aligned}$$

Exigiendo que d_k sea derivación, se obtiene que

$$\begin{aligned} \alpha_n y_k &= d_k(y_n) = d_k([y_1, y_1]) = \alpha_1 y_k, \\ \alpha_2 y_{k+2} &= d_k(y_2) = d_k([y_{n-1}, y_1]) = \alpha_{n-1} y_{k+2}, \\ \alpha_3 y_{k+3} &= d_k(y_3) = d_k([y_2, y_1]) = \alpha_2 y_{k+3}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_{n-1}$.

Es fácil ver, aplicando inducción sobre i, que $\alpha_i = \alpha_{i-1}$, con $3 \leq i \leq n-k-2$.

Calculemos por último $d_k([y_n, y_1])$:

$$0 = d_k([y_n, y_1]) = [d_k(y_n), y_1] + [y_n, d_k(y_1)] = \alpha_n [y_k, y_1] + \alpha_1 [y_n, y_{k-1}] = \alpha_1 y_{k+1},$$

entonces $\alpha_1 = 0$.

Así, $\alpha_i = \alpha_2$, con $3 \leq i \leq n-1$ y $\alpha_n = \alpha_1$.

Basta considerar la independencia de los elementos de la base del espacio de derivaciones de $\mathcal{L}$ para obtener la derivación d_k, completando así la demostración del teorema.

$\square$

A continuación estudiaremos los espacios de derivaciones de las familias $M^{2,\lambda}$ y $M^{3,\alpha}$ usando el siguiente resultado.

Lema 5.2. *Los espacios $Der(M^{2,\lambda})$ y $Der(M^{3,\alpha})$ verifican las siguientes propiedades:*

1) $W_i = \{0\}$ con $-n \leq i \leq -3$,

2) $W_n = \{0\}$,

3) $W_{n-1} =< d_{n-1} >$, donde $d_{n-1}(y_1) = y_n$.

Demostración: Tomemos la graduación

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus \cdots \oplus V_n, \text{ con } y_i \in V_i, \ \ 1 \leq i \leq n,$$

que es una graduación de longitud máxima admisible para las dos familias de álgebras. Así el espacio de derivaciones se puede descomponer como:

$$Der(\mathcal{L}) = W_{-n} \oplus W_{-n+1} \oplus \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \cdots \oplus W_{n-1} \oplus W_n,$$

con $\mathcal{L} = M^{2,\lambda}$ ó $\mathcal{L} = M^{3,\alpha}$.

Denotemos por $d_i \in Der(\mathcal{L})$ la aplicación en W_i.

Recuérdese que $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha = 0$ si $n > 6$ y $\alpha \in \{0, 1\}$ si $n = 6$.

Está claro que $W_{-n} = 0$ y $W_n = 0$ por las propiedades de las derivaciones y de la graduación tomada. Aplicando el lema 5.1 se tiene $W_{-n+1} = W_{-n+2} = 0$ para $M^{2,\lambda}$ y $W_i = 0$ con $i \leq -3$ para $M^{3,\alpha}$. Estudiemos los otros espacios W_i.

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_{-n+i}, \textbf{ con } 3 \leq i \leq n-3.}$

Estamos bajo las hipótesis del Lema 5.1, por lo tanto $W_{-n+i} = \{0\}$ con $3 \leq i \leq n-3$ al trabajar con la familia $M^{3,\alpha}$. Calculemos entonces las derivaciones de la familia $M^{2,\lambda}$.

Por la graduación tomada y las propiedades de las derivaciones afirmamos que

$$d_{-n+i}(x) \in V_{-n+i+j}, \text{ si } j > n - i.$$

Además el Lema 5.1 asegura que $\alpha_j = 0$ con $n-i+1 \leq j \leq n-2$, así

$$d_{-n+i}(y_j) = \alpha_j y_{-n+i+j}, \text{ con } j > n-i.$$

Al exigir que d_{-n+i} sea derivación, se verifica

$$\begin{aligned}\alpha_n y_i &= d_{-n+i}(y_n) = d_{-n+i}([y_{n-1}, y_1]) = [d_{-n+i}(y_{n-1}), y_1] + [y_{n-1}, d_{-n+i}(y_1)] = \\ &= [\alpha_{n-1} y_{i-1}, y_1] = \alpha_{n-1} y_i\end{aligned}$$

y

$$0 = d_{-n+i}([y_n, y_1]) = [d_{-n+i}(y_n), y_1] + [y_n, d_{-n+i}(y_1)] = [\alpha_n y_i, y_1] = \alpha_n y_{i+1},$$

obteniendo $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 0$.

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_{n-1}}$

En este caso es trivial que $d_{n-1}(y_i) \neq 0$ si y solo si $i = 1$. Para construir una base del espacio de derivaciones W_{n-1} basta tomar la aplicación

$$d_{n-1}(y_1) = \alpha_1 y_n, \quad \text{con} \quad \alpha_1 \in \mathbb{C}.$$

Utilizando argumentos similares a los usados en casos anteriores, se prueba fácilmente que no existe ninguna restricción sobre el parámetro α_1, cerrando así la demostración.

$\square$

El siguiente resultado muestra una base de las álgebras $Der(M^{2,\lambda})$ y $Der(M^{3,\alpha})$, usando el Lema anterior.

Teorema 5.2. *Las aplicaciones lineales* d_{-2}, d_{-1}, d_0^1, d_0^2, d_1^1, d_1^2 *y* d_k *con* $2 \leq k \leq n-1$, *forman* *una base del espacio $Der(M^{2,\lambda})$ y están definidas como sigue:*

$$d_{-2}(x)\ (si\ \lambda=0) := \begin{cases} y_{n-3} & si\ x=y_{n-1} \\ y_{n-2} & si\ x=y_n \end{cases} \qquad d_{-2}\equiv 0\ si\ \lambda\neq 0.$$

$$d_{-1}(y_{n-1}) := y_{n-2} \qquad d_0^1(x) := \begin{cases} iy_i & si\ x=y_i,\ 1\leq i\leq n-2 \\ y_n & si\ x=y_n \end{cases}$$

$$d_0^2(x) := \begin{cases} y_{n-1} & si\ x=y_{n-1},\ 1\leq i\leq n-2 \\ y_n & si\ x=y_n \end{cases} \qquad d_1^1(x) := y_{i+1}\ 1\leq i\leq n-3$$

$$d_1^2(y_{n-1}) := y_n \qquad d_k(y_i) := y_{k+i}\ 1\leq i\leq n-k-2\ con\ 2\leq k\leq n-3,$$

$$d_{n-2}(x) := \begin{cases} y_{n-1} & con\ x=y_1 \\ (1+\lambda)y_n & if\ x=y_2 \end{cases} \qquad d_{n-1}(y_1) := y_n.$$

Las aplicaciones lineales d_{-1}, d_0^1, d_0^2, d_1, y d_k con $3\leq k\leq n-1$, forman una base del espacio $Der(M^{3,\alpha})$ y están definidas como sigue:

- *Si* $\alpha=0$

$$d_{-1}(y_3) = y_2$$

$$d_0^1(x) := \begin{cases} iy_i & si\ x=y_i,\ con\ 1\leq i\leq 2 \\ (i-3)y_i & si\ x=y_i,\ 4\leq i\leq n \end{cases} \qquad d_0^2(y_i) := y_i\ con\ 3\leq i\leq n.$$

$$d_1^1(y_1) := y_2 \qquad d_1^2(y_i) := y_{i+1}\ con\ 3\leq i\leq n-1.$$

$$d_k^1(y_1) := y_{k+1}\ con\ 2\leq k\leq n-3, \qquad d_k^2(y_i) := y_{k+i}\ con\ 3\leq i\leq n-k,\ 2\leq k\leq n-3$$

$$d_{n-2}(y_1) := y_{n-1} \qquad d_{n-1}(y_1) := y_n.$$

- *Si* $\alpha=1,(n=6)$

$d_{-1}, d_3^1, d_3^2, d_4, d_5$ *definidas anteriormente y*

$d_0(y_i) := iy_i$ *con* $1\leq i\leq 6$,

$d_1^1(y_1) := y_2,$ $\qquad d_1^2(y_i) := y_{i+1}$ *con* $3\leq i\leq 5,$

$d_2(y_i) := y_{i+2}$ *con* $3\leq i\leq 4.$

Nota 5.2. *Es trivial probar que los endomorfismos mostrados en este teorema son derivaciones linealmente independientes.*

Demostración: Se va a demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones correspondiente.

Tómese la graduación de longitud máxima

$$V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \oplus V_4 \oplus \cdots \oplus V_n, \quad \text{donde } y_i \in V_i, \quad \text{con } 1 \leq i \leq n,$$

válida para las dos familias de álgebras.

Por estar bajo las hipótesis del Lema 5.2 y el Lema 5.1 es suficiente calcular las bases de los espacios $W_{-2}, W_{-1}, \ldots, W_{n-2}$ para completar el estudio de las derivaciones de las familias $M^{2,\lambda}$ y $M^{3,\alpha}$.

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_{-2}}$

Por las propiedades de las derivaciones y la graduación tomada, la derivación $d_{-2} \in W_{-2}$ está definida en $M^{2,\lambda}$ por:

$$d_{-2}(y_i) = \alpha_i y_{i-2} \quad \text{con} \quad 3 \leq i \leq n.$$

Al estar bajo las hipótesis del Lema 5.1 se tiene que $\alpha_i = 0$ con $3 \leq i \leq n-2$.

Exigiendo que d_{-2} sea una derivación, se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_n y_{n-2} = d_{-2}(y_n) = d_{-2}([y_{n-1}, y_1]) = [d_{-2}(y_{n-1}), y_1] + [y_{n-1}, d_{-2}(y_1)] = \\ = \alpha_{n-1}[y_{n-3}, y_1] = \alpha_{n-1} y_{n-2} \Longrightarrow \alpha_n = \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

y

$$\lambda\alpha_n y_{n-2} = d_{-2}(\lambda y_n) = d_{-2}([y_1, y_{n-1}]) = [d_{-2}(y_1), y_{n-1}] + [y_1, d_{-2}(y_{n-1})] = \alpha_{n-1}[y_1, y_{n-3}] = 0,$$

es decir, $\lambda\alpha_n = 0$.

Por tanto, tenemos que distinguir los siguientes casos para determinar la derivación d_{-2}:

- Si $\lambda \neq 0$ se tiene $d_{-2} = 0$.
- Si $\lambda = 0$ se tiene

$$d_{-2}(x) = \begin{cases} \alpha_{n-1} y_{n-3} & \text{si } x = y_{n-1} \\ \alpha_{n-1} y_{n-2} & \text{si } x = y_n. \end{cases}$$

Consideremos ahora la familia de álgebras $M^{3,\alpha}$. Por la graduación tomada y las propiedades de las derivaciones tenemos:

$$d_{-2}(y_i) = \alpha_i y_{i-2}, \quad 3 \leq i \leq n.$$

La ley de $M^{3,\alpha}$ y las propiedades de las derivaciones implican

$$d_{-2}([y_{n-1}, y_3]) = [d_{-2}(y_{n-1}), y_3] + [y_{n-1}, d_{-2}(y_3)] = [y_{n-1}, \alpha_3 y_1] = \alpha_3 y_n, \Longrightarrow \alpha_3 = 0. \quad (5.3)$$

Aplicando inducción y de nuevo las propiedades de la derivación tenemos $\alpha_i = \alpha_3$, con $4 \leq i \leq n-2$, pues

$$\begin{aligned} \alpha_i y_{i-2} = d_{-2}(y_i) = d_{-2}([y_{i-1}, y_1]) &= [d_{-2}(y_{i-1}), y_1] + [y_{i-1}, d_{-2}(y_1)] = \\ &= \alpha_{i-1}[y_{i-3}, y_1] = \alpha_{i-1} y_{i-2}, \end{aligned}$$

con $4 \leq i \leq n-2$. Así, gracias a (5.3), se concluye que

$$\alpha_{n-2} = \alpha_{n-3} = \cdots = \alpha_4 = \alpha_3 = 0.$$

Siguiendo un razonamiento análogo se prueba que $\alpha_n = \alpha_{n-1} = 0$, y por tanto $d_{-2} = 0$ en este caso.

Cálculo de W_{-1}

Por la graduación tomada y las propiedades de las derivaciones se tiene

$$d_{-1}(y_i) = \alpha_i y_{i-1} \quad \text{con} \quad 2 \leq i \leq n.$$

Al trabajar con la familia $M^{2,\lambda}$, está claro que $\alpha_i = 0$ con $2 \leq i \leq n-2$ gracias al Lema 5.1. Es más, se tiene:

$$\alpha_n y_{n-1} = d_{-1}(y_n) = d_{-1}([y_{n-1}, y_1]) = [d_{-1}(y_{n-1}), y_1] + [y_{n-1}, d_{-1}(y_1)] = [\alpha_{n-1} y_{n-2}, y_1] = 0,$$

es decir, $\alpha_n = 0$.

Como

$$\alpha_2 y_1 = d_{-1}(y_2) = d_{-1}([y_1, y_1]) = [d_{-1}(y_1), y_1] + [y_1, d_{-1}(y_1)] = 0,$$

entonces $\alpha_2 = 0$. Así la derivación se puede escribir como $d_{-1}(y_{n-1}) = \alpha_{n-1} y_{n-2}$.

Si consideramos la familia de álgebras $M^{3,\alpha}$, se tiene $\alpha_2 = 0$ siguiendo el mismo razonamiento.

Usando la ley de la familia, las propiedades de las derivaciones y el método de inducción simple se tiene:

$$\alpha_i = \alpha_4, \text{ con } 5 \leq i \leq n. \tag{5.4}$$

Como

$$\alpha_4 y_3 = d_{-1}(y_4) = d_{-1}([y_3, y_1]) = [d_{-1}(y_3), y_1] + [y_3, d_{-1}(y_1)] = 0,$$

entonces $\alpha_4 = 0$. Usando (5.4) se llega a la conclusión de que $\alpha_i = 0$ con $4 \leq i \leq n$. Así, se obtiene:

$$d_{-1}(y_3) = \alpha_3 y_2 \quad \text{con} \quad \alpha_3 \in \mathbb{C}.$$

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_0}$

Es claro que $d_0(y_i) = \alpha_i y_i$, con $1 \leq i \leq n$.

Siguiendo un razonamiento similar al de los casos anteriores se obtiene:

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \alpha_1. \tag{5.5}$$

La igualdad (5.5) es cierta para $2 \leq i \leq n-2$ si trabajamos con $M^{2,\lambda}$ y cierta para $4 \leq i \leq n$ si trabajamos con $M^{3,\alpha}$.

En el estudio del espacio de derivaciones de la familia $M^{2,\lambda}$, exigiendo que d_0 sea una derivación se obtiene

$$\alpha_n y_n = d_0(y_n) = d_0([y_{n-1}, y_1]) = (\alpha_{n-1} + \alpha_1) y_n,$$

es decir, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_1$. En consecuencia, se verifica que

$$d_0(x) := \begin{cases} i\alpha_1 y_i, & \text{si} \quad x = y_i, \ \ 1 \leq i \leq n-2, \\ \alpha_{n-1} y_{n-1}, & \text{si} \quad x = y_{n-1}, \\ (\alpha_{n-1} + \alpha_1) y_n, & \text{si} \quad x = y_n. \end{cases}$$

Al estudiar la otra familia de álgebras y exigir que d_0 sea derivación se tiene que

$$\alpha_2 y_2 = d_0(y_2) = d_0([y_1, y_1]) = 2\alpha_1 y_2,$$

es decir, $\alpha_2 = 2\alpha_1$. Entonces, si $\alpha = 0$ se obtiene la derivación

$$d_0(x) := \begin{cases} i\alpha_1 y_1, & \text{si} \quad x = y_i, \ \ 1 \leq i \leq 2 \\ (\alpha_3 + (i-3)\alpha_1) y_i, & \text{si} \quad x = y_i, \ \ 3 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Si $\alpha \neq 0$, sabemos que $\alpha = 1$ y $n = 6$. Por tanto, calculando $d_0(\alpha y_6)$ se tiene $\alpha_6 = 2\alpha_3$. Así, de la igualdad (5.5) se concluye que $\alpha_3 = 3\alpha_1$ y por tanto

$$d_0(y_i) := i\alpha_1 y_i, \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq 6.$$

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_1}$

Por la graduación tomada y las propiedades de las derivaciones se deduce que

$$d_1(y_i) = \alpha_i y_{i+1} \ \text{ con } \ 1 \leq i \leq n-1.$$

Calculemos $d_1(y_{n-2})$ en ambas familias:

$$\alpha_{n-2} y_{n-1} = d_1(y_{n-2}) = d_1([y_{n-3}, y_1]) = [d_1(y_{n-3}, y_1] + [y_{n-3}, d_1(y_1)] = \alpha_{n-3}[y_{n-2}, y_1] = 0.$$

Entonces se tiene $\alpha_{n-2} = 0$.

Usando las mismas herramientas que en casos anteriores, se prueba que

$$\alpha_i = \alpha_1 \ \text{ con } \ 2 \leq i \leq n-3 \ \text{ para } \ M^{2,\lambda} \ \text{ y}$$

$$\alpha_i = \alpha_3 \text{ con } 4 \leq i \leq n-1 \text{ para } M^{3,\alpha}.$$

Por último, calculando $d_1([y_1, y_1])$ con la ley de la familia $M^{3,\alpha}$ se tiene $\alpha_2 = 0$. Así, los parámetros α_1 y α_3 son libres, obteniendo la derivación

$$d_1(x) := \begin{cases} \alpha_1 y_2, \text{ si } x = y_1 \\ \alpha_3 y_{i+1} \text{ si } x = y_i, \text{ con } 3 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Para completar el estudio del espacio de derivaciones de $M^{2,\lambda}$ es suficiente calcular $d_1([y_{n-3}, y_1])$. En consecuencia, se verifica que

$$d_1(x) := \begin{cases} \alpha_1 y_{i+1}, & \text{si } x = y_i, \ 1 \leq i \leq n-3, \\ \alpha_{n-1} y_n, & \text{si } x = y_{n-1}. \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_2}$

Es fácil ver que

$d_2(y_i) = \alpha_i y_{i+2}$ con $1 \leq i \leq n-2$ al estudiar la familia $M^{2,\lambda}$ y

$d_2(y_i) = \alpha_i y_{i+2}$ con $5 \leq i \leq n-2$ al estudiar la familia $M^{3,\alpha}$.

Si consideramos la ley de $M^{2,\lambda}$ e inducción sobre i tenemos $\alpha_i = \alpha_1$, con $1 \leq i \leq n-4$.

Tomando la ley de $M^{3,\alpha}$ y exigiendo que d_2 sea derivación, tenemos:

$$\alpha_4 y_6 = d_2(y_4) = (\alpha_3 + \alpha\alpha_1) y_6 \text{ y}$$
$$-\alpha_4 y_6 = d_2(-y_4) = (\alpha\alpha_1 - \alpha_3) y_6.$$

De las restricciones hasta ahora obtenidas, se deduce que si $\alpha = 0$ los parámetros α_1 y α_3 son libres y si $\alpha \neq 0$, $\alpha_1 = 0$. Así, la derivación d_2 es obtenida.

$\boxed{\textbf{Cálculo de } W_k, \textbf{ con } 3 \leq k \leq n-3}$

Es fácil ver que $d_k(x) = 0$ si $x = y_i$, con $i > n-k$, es decir:

$$d_k(y_i) = \alpha_i y_{i+k} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-k.$$

Mediante un proceso de inducción finita sobre i se tiene que:

$$\alpha_i = \alpha_1, \text{ con } 2 \leq i \leq n-k-2 \text{ para } M^{2,\lambda} \text{ y}$$
$$\alpha_i = \alpha_3, \text{ con } 4 \leq i \leq n-k \text{ para } M^{3,\alpha}.$$

Aplicando, al igual que en los casos anteriores, la ley de la familia $M^{2,\lambda}$ y las propiedades de las derivaciones a las expresiones $d_k([y_{n-k-2}, y_1])$, $d_k([y_{n-k-1}, y_1])$ $d_k([y_1, y_3])$ y $d_k([y_1, y_1])$ se tiene

$$d_k(y_1) := \alpha_1 y_{k+1},$$

obteniendo una base de W_k para $M^{2,\lambda}$.

Razonando análogamente al trabajar con $M^{3,\alpha}$, no se obtienen más restricciones sobre los parámetros α_1 y α_3, por tanto pueden ser considerados libres, dando lugar a d_k^1 y d_k^2.

Cálculo de W_{n-2}

Es fácil ver que $d_{n-2}(y_1) = \alpha_1 y_{n-1}$, $d_{n-2}(y_2) = \alpha_2 y_n$ y $d_{n-2}(y_i) = 0$, con $3 \leq i \leq n$.

Considerando la ley de la familia $M^{2,\lambda}$ y exigiendo que d_{n-2} sea una derivación se tienen las siguientes igualdades:

$$\alpha_2 y_n = d_{n-2}(y_2) = d_{n-2}([y_1, y_1]) = [d_{n-2}(y_1), y_1] + [y_1, d_{n-2}(y_1)] =$$
$$= [\alpha_1 y_{n-1}, y_1] + [y_1, \alpha_1 y_{n-1}] = (\alpha_1 + \lambda\alpha_1) y_n,$$

lo cual implica que $\alpha_2 = (1+\lambda)\alpha_1$. Así la expresión de la derivación d_{n-2} en $M^{2,\lambda}$ es

$$d_{n-2}(x) := \begin{cases} \alpha_1 y_{n-1}, & si \;\; x = y_1, \\ \alpha_1(1+\lambda) y_n, & si \;\; x = y_2. \end{cases}$$

Consideramos ahora la ley de la familia $M^{3,\alpha}$. Al calcular $d_{n-2}([y_1, y_1])$ se obtiene $d_{n-2}(y_1) := \alpha_1 y_{n-1}$. La prueba concluye considerando el Lema5.2.

$\square$

El teorema siguiente muestra una base del espacio de derivaciones del álgebra M^4.

Teorema 5.3. *Las aplicaciones lineales d_{-1}, d_0^1, d_0^2, d_1^1, d_1^2, $d_2, \ldots, d_{n-1}$ definidas en M^4 forman una base del espacio $Der(M^4)$, definidas como sigue:*

$$d_{-1}(y_{n-1}) := y_{n-2} \qquad d_{n-1}(y_1) := y_n$$

$$d_0^1(x) := \begin{cases} y_n & si\ x = y_n, \\ y_i & si\ x = y_i,\ 1 \leq i \leq n-2 \end{cases} \qquad d_0^2(x) := \begin{cases} y_{n-1} & si\ x = y_{n-1}, \\ y_n & si\ x = y_n, \end{cases}$$

$$d_1^1(y_i) := y_{i+1}\ 1 \leq i \leq n-3 \qquad d_1^2(y_{n-1}) := y_n$$

$$d_k(y_i) := y_{i+k}\ 1 \leq i \leq n-k-3,\ 2 \leq k \leq n-2 \quad d_{n-2}(x) := \begin{cases} y_{n-1} & si\ x = y_1, \\ y_n & si\ x = y_2, \end{cases}$$

Nota 5.3. *Es trivial probar que los endomorfismos d_{-1}, d_0^1, d_0^2, d_1^1, d_1^2, $d_2, \ldots, d_{n-1}$ son derivaciones linealmente independientes de M^4.*

Demostración: Sólo se darán algunas ideas de la prueba, ya que las herramientas necesarias para demostrar que los endomorfismos citados constituyen una base del espacio de derivaciones $Der(M^4)$ se han detallado anteriormente en este capítulo.

La graduación de longitud máxima tomada es $M^4 = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ con $y_i \in V_i$ y $1 \leq i \leq 4$, induciendo la correspondiente graduación del espacio de derivaciones $Der(M^4) = \sum_{i=-n}^n W_i$.

Consideremos los subespacios W_k con $2 \leq i \leq n-3$ y denotemos $d_k \in W_k$. Gracias a las propiedades de la graduación y de las derivaciones se tiene

$$d_k(y_i) = \alpha_i y_{i+k} \quad \text{con} \quad 1 \leq i \leq n-k.$$

Procediendo por inducción sobre i, se tiene $\alpha_i = \alpha_1$, con $2 \leq i \leq n-k-2$.

Por otra parte, de analizar $d_k(y_{n-k-1})$ y $d_k(y_{n-k})$ se afirma que $\alpha_{n-k-1} = \alpha_{n-k} = 0$. Esto implica

$$d_k(y_i) = y_{i+k} \text{ con } 1 \leq i \leq n-k-2 \text{ y } 2 \leq k \leq n-3.$$

Los otros espacios se obtienen de manera similar, aplicando el Lema 5.1 y la independencia lineal de las derivaciones d_i, como en los teoremas anteriores.

□

5.1.2. PRIMER ESPACIO DE COHOMOLOGÍA.

La dimensión del primer espacio de cohomología de cualquier álgebra n-dimensional de Leibniz no de Lie casifiliforme de longitud máxima ha sido estudiada en el siguiente corolario y es consecuencia directa del espacio de derivaciones de dicha álgebra.

Corolario 5.1.

$$dim(H^1(M^{1,\delta}, M^{1,\delta})) = \begin{cases} n+2 \; si \; \delta = 0, \\ n \qquad si \; \delta = 1. \end{cases}$$

$$dim(H^1(M^{2,\lambda}, M^{2,\lambda})) = \begin{cases} n+2 \; si \; \lambda = 0, \\ n \qquad si \; \lambda \neq 0. \end{cases}$$

$$dim(H^1(M^{3,\alpha}, M^{3,\alpha})) = \begin{cases} n+1 \; si \; \alpha = 0, \\ 5 \qquad si \; \alpha = 1 (n = 6). \end{cases}$$

$$dim(H^1(M^4, M^4)) = n+2.$$

Demostración: Por los Teoremas 5.1, 5.2 y 5.3 sabemos que $dim(Der(\mathcal{L})) = n+3$ cuando $\mathcal{L}$ es isomorfa a $M^{1,\delta}$, $M^{2,\delta}$ ó $M^{3,\delta}$ y $dim(Der(\mathcal{L})) = n+4$ cuando $\mathcal{L}$ es isomorfa a M^4. Para calcular la dimensión del primer espacio de cohomología de cada álgebra o familia de álgebras. es suficiente estudiar la dimensión del espacio de derivaciones interiores, es decir, $dim(B^1(\mathcal{L}, \mathcal{L}))$ en cada caso. Por la ley de M^4 o de las familias $M^{1,\delta}$, $M^{2,\delta}$ y $M^{3,\delta}$ es trivial ver que

$$dim(B^1(M^{1,\delta}, M^{1,\delta})) = \begin{cases} 1 \text{ si } \delta = 0, \\ 2 \text{ si } \delta = 1. \end{cases}$$

$$dim(B^1(M^{2,\lambda}, M^{2,\lambda})) = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda = 0, \\ 2 \text{ si } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

$$dim(B^1(M^{3,\alpha}, M^{3,\alpha})) = n - 2.$$

$$dim(B^1(M^4, M^4)) = 2.$$

□

Nota 5.4. *Obsérvese que, en realidad, se podría dar fácilmente la descripción de $H^1(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ puesto que conocemos explícitamente $Der(\mathcal{L})$ y $R(\mathcal{L})$ para cada álgebra $\mathcal{L}$ estudiada.*

5.2. ESTUDIO COHOMOLÓGICO DE LAS ÁLGEBRAS 3-FILIFORMES

En la anterior sección se han mostrado y detallado todas las herramientas teóricas para el cálculo del espacio de derivaciones de un álgebra de longitud máxima. Por tanto, se considera de mayor interés realizar el estudio en esta sección usando como herramienta fundamental un programa creado en el software *Mathematica*. La implementación de dicho programa se presenta en dimensiones pequeñas y fijas para después formular su generalización, probándolo, posteriormente, por inducción para una dimensión arbitraria.

5.2.1. ESPACIO DE DERIVACIONES

En esta sección obtendremos la dimensiones del primer espacio de cohomología de las álgebras N, M y la familia $M^{1,\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, obtenidas en los Teoremas 3.3 y 3.6, respectivamente. A continuación se muestra pasa a paso el programa diseñado para calcular una base y la dimensión del espacio de derivaciones de un álgebra de Leibniz de longitud máxima. En particular, se aplica dicho programa en este apartado para obtener el espacio de derivaciones de las álgebras de Leibniz 3-filiformes de longitud máxima obtenidas en el capítulo 3, es decir, N, M y $M^{1,\alpha}$.

El método algorítmico se compone de los tres pasos siguientes:

- Paso 1: se definen algunas propiedades de las álgebras de Leibniz y la ley del álgebra a estudiar. Nótese que en este procedimiento la ley del álgebra está definida por los productos de los vectores de la base. El siguiente paso es describir la graduación de longitud máxima del álgebra, la cual es introducida por la subrutina Gradation. A modo de ejemplo, se muestra la gradación de un álgebra del capítulo 3.

```
dim=10; (*the dimension of the algebra*)
base = Table[x[i], {i, 1, dim + 1}];
par = Flatten[Table[a[i, j], {i, -dim, dim}, {j, -1, dim - 1}]];
Module[{j}, For[j = -1, j <= dim-1, j++,g[j_] :=
 Which[j == -1, x[dim - 1], j == 0, x[dim],
 1 <= j <= dim-2, x[j], j==dim-1, x[dim+1],j > dim-1 || j < -1, 0]]];
Gradation := Module[{i},For[i = -1, i <= dim-1, i++,
    If[! NumberQ[g[i]], Print["V[" , i, "]->", "<", g[i], ">"]]]];
```

- Paso 2: El objetivo ahora es encontrar un sistema generador del espacio de derivaciones (ver preliminares para más detalles).

```
der[i_Integer, j_Integer, k_Integer] := Collect[
   d[i][mu[x[j], x[k]]] - mu[d[i][x[j]], x[k]] - mu[x[j], d[i][x[k]]],
    base];

Module[{i, j}, For[i = -dim, i <= dim, i++,
   For[j = -1, j <= dim-1, j++, d[i][g[j]] =
   Which[-1 <= j <= dim-1 && -1 <= i + j <= dim-1,
       a[i, j] g[i + j], (i + j > dim-1 || i + j < -1) ||
       (j > dim-1 || j < -1), 0]]
    If[g[j] == 0, d[i][g[j]] = 0]]];
For[i = -dim, i <= dim, i++, For[j = 1, j <= dim+1, j++,
  For[k = 1, k <= dim+1, k++, deriv[i_, j_, k_] :=
  Coefficient[der[i, j, k], base]]]]
```

```
For[v = -dim, v <= dim, v++, funcion[v_] := Module[{j, k, Lec}, Lec ={};
          For [j = 1, j <= dim+1, j++, For[k = 1, k <= dim+1, k++,
            Lec = Union[Lec, deriv[v, j, k]];];]; Lec]];
For[v = -dim, v <= dim, v++, sol[v_] := Solve[funcion[v] == 0,par]][[1]];
Off[Solve::"svars"] Off[General::"stop"];
```

- Paso 3: Por último, tomamos las derivaciones linealmente independientes, devolviendo así la dimensión del espacio de derivaciones de nuestro álgebra.

```
For[i = -dim, i <= dim, i++, For[j = -1, j <= dim-1, j++,
   Which[-1 <= i + j <= dim-1, der[i][g[j]] = d[i][ g[j]] /. sol[i],
     i + j > dim-1 || i + j < -1 || j < -1 || j > dim-1,der[i][g[j]]=0]]];
Module[{i, j, k}, For[i = -dim, i <= dim, i++,
   For[j = 1, j <= dim+1, j++,If[! NumberQ[der[i][x[j]]],
     Print["d", i, "(x[", j, "])=", der[i][x[j]]]]]]];
Module[{u}, For[u = -dim, u <= dim, u++,
   parametroder[u_] :=Select[Variables[Table[der[u][x[i]], {i, 1, dim+1}]],
   FreeQ[#, x] &, FreeQ[#, \[Alpha]] &]]];

For[p = -dim, p <= dim, p++, dimder[p_Integer] := Length[parametroder[p]]];

Module[{t}, For[t = -dim, t <= dim, t++,
   Print["dimention(d", t, ")--> ", dimder[t]]]];
```

$$\texttt{dimension}=\sum_{u=-dim}^{dim}\texttt{dimder[u]}$$

```
 Print["DIMENSIONDERIVATIONS-----> ", dimension]
```

Usando el algoritmo anterior hemos obtenido el siguiente resultado:

Teorema 5.4.

- $dim(\mathcal{D}er(N)) = 3\dfrac{n-1}{2} + 7.$

- $dim(\mathcal{D}er(M)) = n + 6.$

- $dim(\mathcal{D}er(M^{1,\alpha})) = n + 5.$

5.2.2. Primer espacio de cohomología

Como mencionamos en el capítulo de preliminares, las álgebras de longitud máxima permiten estudiar algunas propiedades cohomológicas fácilmente, como el primer espacio de cohomología. Teniendo en cuenta el Teorema 5.4, se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 5.2.

- $dim(\mathcal{H}^1(N, N)) = \dfrac{n+19}{2}.$

- $dim(\mathcal{H}^1(M, M)) = n + 4.$

- $dim(\mathcal{H}^1(M^{1,\alpha}, M^{1,\alpha})) = n + 2.$

Conclusiones y problemas abiertos

The aim of this work is to obtain an algorithm to classify the n-dimensional p-filiform Leibniz algebras of maximum length, with n and p generic. We have closed this classification when $0 \leq p \leq 3$ and the generic case when we consider the extension of the naturally graded p-filiform Lie algebras. Moreover, the third chapter has been very helpful to obtain this algorithm, thanks to it, we have achieved the conjecture that there is no n-dimensional p-filiform non split Leibniz algebra, for n big enough and $p \geq 4$. In this direction, we have found two main problems: the complexities of working with algebraic structures with two free parameters and the complexities of obtaining an algorithm to classify the p-filiform split algebras.

Therefore, the following researches might be the natural continuation of this work:

- The classification of the p-filiform Leibniz algebras of maximum length, whose naturally graded associated algebra is Lie and split.
- The classification of the p-filiform Leibniz algebras of maximum length, whose naturally graded associated algebra is no Lie.

Several authors as Cabezas, Gómez, Goze and Khakimdjanov have showed that the algebras of maximum length make easier the study of the space of derivations, thus the cohomological study. In the present work we have already closed the study of the space of derivations and the first group of cohomology of p-filiform Leibniz algebras of maximum length for $0 \leq p \leq 3$. Therefore, other open problem is as follows:

- The study of the space of derivations and cohomological properties of p-filiform Leibniz algebras of maximum length, for $p \geq 4$.

Regarding the last open problems, it is worthwhile to consider the Zinbiel algebras. These algebras are the dual to Leibniz ones in Koszul sense. Koszul algebras were introduced in 1970 in [35] and have had important applications in algebraic geometry, quantum groups, algebraic topology and recently, in combinatorial analysis [28]. J.-L. Loday studied in [31] categorical properties of Leibniz algebras and considered in this connection a new object- *Zinbiel algebra* -. Since the category of Zinbiel algebras is Koszul dual to the category of Leibniz algebras, sometimes they are also named dual Leibniz algebras. Rikhsiboev, Rakhimov and Basri discussed the categories of Loday's algebras and interrelations between them in [38]. Thus, we can analyse the classification of these kinds of algebras. To emphasize that the classification of the naturally graded p-filiform Zinbiel algebras has been study in [11], hence we come to the following open problems:

- The classification of p-filiform Zinbiel algebras.
- The classification of p-filiform Zinbiel algebras of maximum length.
- Computational study of the p-filiform Zinbiel algebras of maximum length and their cohomological applications.

Bibliografía

[1] Adashev J.Q., Cañete E.M., *Derivations of the quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length,* Uzbek Mathematical Journal, Vol. 2, 2011, p. 3–14.

[2] Ancochea J.M., Goze M.,*Classification des algebres de Lie nilpotentes completes de dimension 7*, Archiv. Math, vol. 52 (2), 1989, p. 175–185.

[3] Ayupov Sh.A., Omirov B.A., *On some classes of nilpotent Leibniz algebras*, (Russian) Sibirsk. Mat. Zh., vol. 42 (1), 2001, p. 18–29; translation in Siberian Math. J., vol. 42 (1), 2001, p. 15–24.

[4] Cabezas J.M., Camacho L.M., Rodríguez I.M., *On filiform and 2-filiform Leibniz algebras of maximum length*, Journal of Lie Theory, vol. 18, 2008, p. 335–350.

[5] Cabezas J.M., Gómez J.R., *Derivation algebras of certain nilpotent Lie algebras*, Journal of Lie Theory, vol. 15, 2005, p. 379–391.

[6] Cabezas J.M., Gómez J.R., Jiménez-Merchán A., *Family of p-filiform Lie algebras*, Algebra and Operator Theory, Kluwer Academic Publishers, 1998, p. 93–102.

[7] Cabezas J.M., Pastor E., *Naturally graded p-filiform Lie algebras in arbitrary finite dimension*, Journal of Lie Theory, vol. 15, 2005, p. 379–391.

[8] Camacho L.M., Cañete E.M., Gómez J.R., Omirov B.A., *Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length,* Siberian Mathematical Journal, vol. 52 (5), 2011, p. 840–853.

[9] Camacho L. M., Cañete E.M, Gómez J.R., Omirov B.A., *3-filiform Leibniz algebras of maximum length, whose naturally graded algebras are Lie algebras*, Linear and Multilinear Algebra, vol. 59 (9), 2011, p. 1039–1058.

[10] Camacho L. M., Cañete E.M, Gómez J.R., Omirov B.A., *Computational Applications for maximum length of Leibniz Algebras.*, submitted to Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing Journal (2011).

[11] Camacho L. M., Cañete E.M, Gómez-Vidal S., Omirov B.A., *p-filiform Zinbiel algebras*, arxiv:math.RA/12004.2051v1.

[12] Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A., *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras*, Journal of Symbolic Computation, vol. 44, 2009, p. 527–539.

[13] Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A., *The classification of naturally graded p-filiform Leibniz algebras*, Communications in Algebra, vol. 39 (1), 2011, p. 153–163.

[14] Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A., *Naturally graded 2-filiform Leibniz Algebras*, Communications in Algebra, vol. 38 (10), 2010, p. 3671–3685.

[15] Camacho L.M., Gómez J.R., Navarro R.M., *Cohomology of some Nilpotent Lie Algebras,* Extracta Mathematicae, vol. 15 (1), 2000, p. 155–174.

[16] Camacho L.M., Gómez J.R., Navarro R.M., *Algebra of derivations of Lie algebras,* Linear Algebra and its Applications, vol 332-334, 2001, p. 371-380.

[17] Camacho L.M., Gómez J.R., Navarro R.M., Rodríguez I., *Effective computation of algebra of derivations of Lie algebras,* Computer Algeba in Scientific Computing CASC, Springer, 2000, p. 101–111.

[18] Casas J.M., Ladra M., *Non-abelian tensor product of Leibniz algebras and an exact sequence in Leibniz homology,* Comm. Algebra, vol. 31 (9), 2003, p. 4639–4646.

[19] Dirac P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics,* Oxford University Press, Oxford 1958.

[20] Dzhumadil'daev A. S., *Cohomologies of colour Leibniz algebras: pre-simplicial approach.* Lie theory and its applications in physics, III (Clausthal, 1999), 124–136, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000

[21] Dzhumadil'daev A. S., Davydov A. A., *Factor-complex for Leibniz cohomology.* Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin. Comm. Algebra, vol. 29(9), 2001, p. 4197–4210

[22] Feigin B.L. and Fuks D.B., *Cohomology of Lie groups and Lie algebras,* Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravleniya, vol. 21, 1988, p. 121-209, Zbl. 653.17008.

[23] Gómez J.R., Jiménez-Merchán A., *Naturally graded quasi-filiform Lie algebras*, Journal of Algebra, vol. 256, 2002, p. 211–228.

[24] Gómez J.R., Jiménez-Merchán A., Reyes J., *Quasi-filiform Lie algebras of maximum length*, Linear Algebra and Applications, vol. 335, 2001, p. 119–135.

[25] Gómez J.R., Jiménez-Merchán A., Reyes J., *Filiform Lie algebras of maximum length*, Extracta Mathematicae, vol. 16(3), 2001, p. 405–421.

[26] Gómez J.R., Navarro R.M., *Espacio de derivaciones de álgebras de Lie con Mathematica,* Proc. of IV Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA, Sigüenza, 1998.

[27] Goze M., Khakimjanov Yu., *Nilpotent Lie algebras*, Math. Appl., vol. 361, Kluwer Academic Publishers, 1996, 336 pp. 2001, p. 405–421.

[28] Ho Hai P., Lorenz M., *Koszul algebras and the quantum MacMahon master theorem*, Bull. Lond. Mathematical Society, vol. 39 (4), 2007, p. 667–676.

[29] Loday J.L., *Cyclic homology,* Grundl. Math. Wiss. Bd. **301**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[30] Loday J.L., *Une version non commutative des algébres de Lie: les algébres de Leibniz.* Ens. Math., vol. 39, 1993, p. 269–293.

[31] Loday, J.-L., *Cup product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras*, Math Scand., vol. 77, 1995, p. 189-196.

[32] Loday J.L, Pirashvili T., *Universal enveloping algebras of Leibniz and (co)homology*, Math.Ann., vol. 296, 1993, p. 139–158.

[33] Omirov B.A., *On derivations of filiform Leibniz algebras*, Math. Notes, vol. 77 (5), 2005,p. 733–742.

[34] Pastor Sahagún E.,*Graduaciones naturales de álgebras de Lie 3-filiformes*, PH.D. Thesis, Universidad de Sevilla, 2001.

[35] Priddy, Stewart B., *Koszul resolutions,* Trans. American Mathematical Society, vol. 152, 1970, p. 39–60.

[36] Rakhimov I.S., Said Husain S.K., *Classification of a subclass of low-dimensional Complex filiform Leibniz algebras* , Linear and Multilinear Algebra, vol. 59(3), 2011, p. 339–354.

[37] Reyes Columé J.,*Álgebras de Lie casifiliformes graduadas de longitud maximal*, PH.D. Thesis, Universidad de Sevilla, 1997.

[38] Rikhsiboev I.M., Rakhimov I.S. and Basri W., *Classification of 3-Dimensional Complex Diassociative Algebras*, Malaysian Journal of Math. Sciences, vol. 4 (2), 2010, p. 241–254.

[39] Vergne M., *Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application'a l'étude de la variete des algèbres de Lie nilpotentes*, Bull. Soc. Math. France, vol. 98, 1970, p. 81–116.